PARACONSISTENCIA Y FUNDAMENTACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS

Christian Andrés Romero Rodríguez

Resumen

Así como se evidencia en el nombre del artículo, en este texto se desarrolla un problema clásico dentro del programa formalista de la fundamentación de las matemáticas. Lo anterior se hace desde un enfoque no clásico de la lógica, para el caso, desde la lógica paraconsistente LP (*Logic of Paradox*) de Graham Priest. Finalizando el artículo se rescatan las virtudes y las bondades de la reformulación de este problema clásico y se evalúa hasta qué punto puede ser posible, y legítimo, hablar de programa formalista actualmente, a la luz de aritméticas inconsistentes con base en LP.

Palabras clave

Inconsistente, formalismo, fundamentación, matemáticas, lógica.

INTRODUCCIÓN

> So is Hilbert's programme vindicated?
> Maybe, maybe not.
>
> PRIEST, G. (1994)

Las nuevas concepciones no clásicas de la lógica parecen obligarnos a retomar problemas clásicos de la filosofía, gracias a la multiplicidad de las nuevas herramientas que traen consigo. El objetivo del siguiente texto es hacer una revisión paraconsistente del problema gödeliano en la corriente formalista hilbertiana. Esto se intentará, en primera medida, elaborando una definición de sistemas lógicos paraconsistentes para presentar la lógica LP de Priest. Posteriormente, me permito dar algunas razones para trabajar la corriente formalista desde un punto de vista paraconsistente. Finalmente, presento el modelo de aritmética inconsistente y resalto la relación entre este y el programa formalista de Hilbert. Concluiré evidenciando las bondades de interpretaciones no clásicas sobre problemas clásicos de la lógica y la matemática.

Introducción a la paraconsistencia

Para que una lógica sea considerada paraconsistente debe poder tolerar las contradicciones dentro de su sistema, sin que por ello su sistema sea trivial. Es decir, el principio *Ex contradictione quodlibet* (ECQ)[1], que en sentido formal se expresa $(A \wedge \neg A) \vdash B$, sería invalidado como regla de inferencia. Esta invalidación tiene un trasfondo filosófico sumamente interesante, sin embargo esto desborda este trabajo; a quien le interese puede remitirse a textos de Da Costa y de Priest, quienes actualmente son considerados padres de este tipo de sistemas lógicos.

Por otro lado, en un sentido clásico, las contradicciones () están unidas a la definición de trivialidad[2], en palabras de Nagel podemos verlo de esta forma:

> En resumen, si el cálculo no es consistente, toda fórmula es un teorema, lo que equivale a decir que de un conjunto contradictorio de axiomas puede ser derivada cualquier fórmula. Pero esto tiene una contrapartida: si no toda fórmula es un teorema (es decir, si existe por lo menos una fórmula que no sea derivable de los axiomas), entonces el cálculo es consistente. Lo que hace falta, por consiguiente, es demostrar que existe por lo menos una fórmula que no puede ser derivada de los axiomas. (Nagel & Newman 1994: 26)

En este contexto se desliga la relación conceptual entre estos dos términos para darle paso a lo que ahora conocemos como sistemas lógicos

1 También se le conoce como *Pseudoescoto* o *Regla de Cornubia*.

2 En palabras de Trueba (2000: 121): "La trivialidad de una teoría es su capacidad de que cualquier fórmula del lenguaje se derive de ella. Si la teoría es capaz de implicar cualquier fórmula del lenguaje, entonces para cualquier fórmula del lenguaje, la teoría es capaz de implicar esa fórmula tanto como su negación".

paraconsistentes. Así, podemos entender la definición de lógica paraconsistente como una lógica que se caracteriza: "[...] en general por construir teorías no-trivialmente inconsistentes, es decir, teorías en las cuales es posible que determinadas contradicciones sean válidas, sin que por ello cualquier fórmula lo sea" (Palau 2002: 161).

Lógica LP de Priest

Para nuestro interés, evaluaremos la lógica paraconsistente LP, la cual fue creada inicialmente por Asenjo (1954) y formalizada finalmente por Priest (1979). Esta se caracteriza por ser una lógica multivaluada, al tener más de dos valores de verdad. En este caso se manejan los valores <1, ½, 0>, siendo los valores designados <1, ½> y el antidesignado <0>. Es decir, los valores designados se interpretan como verdaderos, el antidesignado como falso. Sin embargo, ½ se interpreta como verdadero y falso a la vez, aunque formalmente se considere como designado. Es importante rescatar que el valor designado ½ es el que se les da a las paradojas. De esto se desprende inmediatamente que en LP son posibles las contradicciones verdaderas, dando espacio a una defensa del *dialeteismo*[3].

Este sistema está basado en las matrices de Kleene (1952), (Cf. Priest 1979: 126f), con la particularidad de poseer las siguientes características.

La negación funciona de la siguiente manera:

A	¬A
1	0
½	½
0	1

3 Es importante notar que Priest no se compromete con ninguna teoría de la verdad. Este problema es sumamente rico en términos de poder obtener alguna contradicción verdadera. A esta postura se le conocerá como *Dialeteista*. Lastimosamente comenzar a desarrollar el tema sería totalmente agotador y no aportaría a mi investigación. Es por ello que, en esta medida, quiero referenciar al interesado a Priest (2007), en su escrito *Paraconsistency and Dialetheism*.

La conjunción funciona de la siguiente manera:

$A \wedge B$

A \ B	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	0
0	0	0	0

La disyunción funciona de la siguiente manera:

$A \vee B$[4]

A \ B	1	½	0
1	1	1	1
½	1	½	½
0	1	½	0

La implicación se define de la siguiente manera:

$A \rightarrow B$[5]

A \ B	1	½	0
1	1	½	0
½	1	½	½
0	1	1	1

4 También definido como $\neg(\neg A \wedge \neg B)$.

5 Nótese que $A \rightarrow B$ se define como $\neg A \vee B$.

Y, por último, el bicondicional se define de la siguiente manera:

$A \leftrightarrow B$

A \ B	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	½
0	0	½	1

Todo lo demás en términos de deducción sigue igual que en la lógica clásica, incluso las reglas de formación proposicional. Es interesante observar que LP es una lógica mucho más "pobre" que la lógica clásica en cuanto a la cantidad de inferencias validas que tenemos. Ahora procedo a explicar el motivo por el cual es importante LP para nuestra investigación y cuál es su plus en comparación con el modelo clásico.

¿Por qué la lógica paraconsistente LP y no LC?

La historia de la fundamentación de la matemática deja por sentado que el programa formalista de Hilbert se ve limitado en términos del teorema de incompletitud de Gödel[6]. Es importante recalcar que esto último solo sucede con los sistemas formales que cumplen ciertas características, como: tener la capacidad para definir los números naturales, ser recursivo y finito. Todo lo anterior desde una mirada clásica.

Sin embargo, contemporáneamente podemos observar de manera crítica algunas investigaciones que se han desarrollado a la luz de la lógica clásica. Nuestro interés no reside en hacer una caracterización de este problema con las infinitas lógicas no clásicas, sino solo con la lógica paraconsistente LP de Priest. Este tipo de lógica tiene la particularidad de soportar y trabajar con paradojas, lo que permite flexibilidad en el tema de nuestro interés. Para ser más exactos, quiero que se observe con atención lo bosquejado en el siguiente cuadro:

6 No considero esencial bosquejar formalmente el teorema de incompletitud de Gödel. Además, este trabajo excedería los límites de este ensayo.

	Autores Representantes	¿Cuál debe ser el fundamento de la aritmética?	Problemas generales	Investigación antes de las lógicas no clásicas	Investigación posterior a las lógicas no clásicas
Formalismo	David Hilbert, Kurt Gödel	Los sistemas formales	Teorema de incompletitud de Gödel	Relativamente muerta	Propuesta paraconsistente de aritmética finitista de Priest

La preferencia en desarrollar una interpretación no clásica del problema se debe a que una interpretación clásica sería solamente descriptiva en relación con el teorema de incompletitud. A la luz de los sistemas lógicos paraconsistentes nos encontramos con propuestas como la aritmética finitista de Priest, en donde se puede proceder en la investigación con nuevas herramientas metodológicas. Observamos que las investigaciones vigentes del programa de Hilbert son prácticamente simples caracterizaciones, es decir, sería necio pensar que el programa hilbertiano no muere con el teorema de incompletitud de Gödel. Sin embargo, se pueden hacer extrapolaciones juiciosas que permitan modificar los criterios metalógicos exigidos por los formalistas. Es decir, si estudiamos juiciosamente el esquema del teorema, observaremos que su *definición de Validez* es la siguiente $(N \models \neg P) \Leftrightarrow (N \not\models P)$ y debido a ello no se puede presentar de forma valida $\neg P \wedge P$ en el mismo sistema, pues esto desembocaría en una contradicción. En otras palabras, no es válida una sentencia y su negación en el mismo modelo, en donde la definición claramente está respondiendo a la preocupación por el principio de explosión.

Ahora bien, si gran parte del teorema está basado en la *definición de validez* y al mismo tiempo observamos que los sistemas lógicos paraconsistentes responden críticamente ante este foco metalógico, entonces parece que sería de gran interés para la fundamentación de las matemáticas darle una mirada crítica al teorema mismo, desde los sistemas lógicos paraconsistentes. Este tipo de trabajos comenzaron a desarrollarse de manera crítica desde la segunda mitad del siglo XX por el australiano Graham Priest, quien fue uno de los pioneros en adentrarse en los problemas de considerar una aritmética inconsistente.

Para un lector formalista hilbertiano riguroso, puede que esta idea cause ciertas molestias en términos metalógicos y es normal que se considere que la investigación paraconsistente no llevará a ninguna parte, pero ¿qué se puede perder en términos académicos cuando por medio de LC el trabajo está relativamente muerto? Todo lo que nos queda es ganancia, en términos de un desarrollo lógico y metalógico.

¿Podemos trabajar el teorema de Gödel con una lógica paraconsistente?

Sí y no. Como partidario de la lógica clásica, esta respuesta probablemente le parecerá infructífera al lector, sin embargo, procederé a dar las razones por las cuales es probable que haya inconvenientes para trabajar todo el problema desde la paraconsistencia. A pesar de ello, considero que hoy existen argumentos a favor que nos exigen darle una mirada paraconsistente al teorema, por lo cual procederé posteriormente a defender esto en los siguientes numerales:

Limitantes y problemas de una interpretación paraconsistente.

a. La exigencia de Hilbert por la consistencia.
b. La concepción de una aritmética estándar.
c. Problemas con la concepción inicial del programa formalista.
d. Consecuencias de aceptar completamente este tipo de investigaciones.

Podemos observar que los problemas expuestos no son pocos; sin embargo, creo que en gran medida se pueden ver representados por los puntos de (a) hasta (d). Me dispongo entonces a problematizar estos puntos para tratar de observar sus virtudes y defectos.

Decir actualmente que Hilbert no tuvo en cuenta el problema del principio de explosión es todo un anacronismo. Para Hilbert, al igual que para la antigua axiomática, la consistencia era un requisito intrínseco de la lógica clásica (a). Con la llegada del formalismo axiomático, los axiomas ahora no son planteamientos totalmente evidentes sino suposiciones, es por ello que se necesitaba de una prueba de consistencia para asegurar la estabilidad del sistema (Cf. Alcaraz 1999: 75).

Los conocedores de Hilbert podrían argumentar que él habría defendido tajantemente esto: "el eje fundamental de toda estructura rigurosa tenía que ser su no contradictoriedad" (Bobenrieth 1996: 60). Por ello, sería algo descabellado pensar una posibilidad paraconsistente del teorema de incompletitud de Gödel que afecte directamente al programa formalista. Sin embargo, con el diverso panorama actual de lógicas no clásicas, alguna persona podría cuestionarse por qué tomar a la lógica clásica como un modelo de la razón misma: ¿Es la lógica clásica *La lógica* que se debe usar en todos los procedimientos o estructuras rigurosas? Parece que responder "sí" o "no" a la pregunta es algo meramente arbitrario.

Pareciese entonces que condiciones de consistencia como la de Hilbert se deben evaluar por su contexto histórico. Por otra parte, seguir aceptando la consistencia como una condición *sine qua non* podría desembocar en algún tipo de falacia *ad antiquitatem*. Es decir, aunque históricamente se haya considerado la consistencia como algo esencial, no se sigue que debamos seguir aceptándola sin cuestionarla, más aún con los avances de los sistemas lógicos paraconsistentes. El debate entonces debe darse en términos argumentativos.

Podemos replantear el debate en lo que Da Costa (1994) autodenomina "Principios pragmáticos de la razón". El primero de ellos es el principio de Sistematización: la razón se expresa por medio de una lógica. El segundo es el principio de Unicidad: en un contexto dado, la lógica subyacente es única. Y, por último, el principio de Adecuación: la lógica subyacente a un contexto dado debe ser la que mejor se le adapte (Cf. Da Costa 1994: 45-46). Este último, que es el que nos interesa, Da Costa lo considera obvio. De ahora en adelante, la investigación se ve legitimada gracias al principio de adecuación, en donde la paraconsistencia puede comenzar a dar argumentos acerca de si es o no probable que la aritmética esté basada en un modelo estándar (clásico) o un modelo paraconsistente.

Pareciese que si aceptáramos una interpretación paraconsistente, estamos obligados a salirnos de la comodidad que nos brinda el modelo estándar de la aritmética (b). Sin embargo, una posición responsable es investigar sobre ese camino nuevo. Actualmente existen incluso matemáticas inconsistentes que cuentan con teoría de conjuntos inconsistentes. La persona interesada puede remitirse al texto *Inconsistent Mathematics*, de Mortensen (1995), en donde se desarrolla esta rama significativa de los sistemas lógicos paraconsistentes y ejemplos clásicos como la paradoja de conjuntos de Russell. En este sentido, si tenemos todo un aparataje matemático, es probable que no tengamos mayor razón para quedarnos en la senda segura. Es probable que se pueda aprovechar en mayor medida esta investigación relativamente muerta del teorema de incompletitud de Gödel.

Otra objeción podría observarse en términos de la exigencia de la consistencia, como algo necesario para que alguien pudiera llevar a cabo el programa formalista clásico (c). Es importante recordar que el motivo por el cual fracasó el programa formalista es por sus exigencias en sentido metalógico. Es decir, el programa formalista exigía una demostración *finita*, *recursiva* y *consistente*. A pesar de que el teorema de incompletitud de Gödel demuestra que: "El enunciado que expresa la consistencia de un sistema axiomático recursivo para la aritmética no es demostrable dentro de ese sistema" (Martínez & Piñeiro 2009: 39), afirmar que actualmente no hay una prueba de consistencia para la aritmética es descabellado. En efecto, hay diferentes pruebas *externas*[7] que pueden brindarle a la aritmética el sustento que necesitaba. Es en esta misma dirección que esta investigación cobra sentido.

Una extrapolación paraconsistente no es una mala interpretación o lectura del teorema de incompletitud debido a que solo se están modificando los criterios metalógicos iniciales; la mayor exigencia del programa formalista, en sentido de trabajar con *manchas de tinta*, sigue en pie. Es legítimo entonces hablar de una propuesta paraconsistente de este problema sin caer dentro de problemas metodológicos.

Aceptar este tipo de demostraciones parece que no es nada fácil (d); no obstante, es importante comprender que salir de la zona de confort de la aritmética estándar y adentrarse en una concepción de una aritmética inconsistente es algo realmente complejo. La idea, pues, con el próximo apartado es observar hasta qué punto este tipo de modelos tiene más ventajas que el modelo estándar. Esto se hará con base en la investigación de Priest (1994) en *Is Arithmetic Consistent?*

Modelo paraconsistente de aritmética inconsistente

Es probable que el teorema de Gödel no evidenciara los límites del formalismo sino los de la lógica clásica. Según Priest: "La incompletitud del sistema formal mostraría meramente que habían problemas matemáticos cuya resolución estaba más allá de lo que podríamos demostrar mediante nuestros procedimientos"[8] (1979: 221). En este sentido, Priest se adentra en una investigación que, incluso contemporáneamente, se sigue desarrollando como *estado del arte*.

Apenas en 1959 la primera persona en hablar de aritmética inconsistente iba a ser Edward Nelson, al afirmar que la aritmética de Peano era inconsistente, basándose en la lógica paraconsistente para demostrarlo. De todo este trabajo, posteriormente Priest en 1979 —con ayuda de los trabajos de Robert K. Meyer en *Relevant Arithmetic*— consigue plantear lo que algunos han denominado como metateorema de la aritmética inconsistente (Bremer 2007). Me propongo evidenciar, entonces, de qué trata el metateorema de la aritmética inconsistente desarrollado por Priest (1994).

7 Se recuerda al lector que la exigencia del programa formalista era una prueba de consistencia interna, de tal manera que el sistema formal mismo tuviera capacidad de afirmar su propia consistencia.

8 Traducción propia del original: "The incompleteness of the formal system would merely show that there were mathematical problems beyond the powers of our proof procedures to settle"

Metateorema de la aritmética inconsistente

Definiciones:

Sea, ***L*** un Lenguaje de primer orden de la aritmética, que contiene el 0, el símbolo del sucesor (S), multiplicación, suma y un símbolo de predicado =

Sea, ***N***, el conjunto de sentencias verdaderas de L en la interpretación estándar.

Sea $\mathfrak{M}$, una interpretación inconsistente del lenguaje L.

Sea N_n un conjunto de sentencias verdaderas del lenguaje L

Sea ***n*** un número natural que cumple la siguiente característica:
Es un "número increíblemente grande, por ejemplo, un número mayor que el número combinación de todas las partículas elementales del cosmos, más grande que cualquier número que podría ser especificado sensiblemente en toda la vida, tan grande que no tiene significado físico o realidad psicológica".

Metateorema

i. $N \supseteq N_n$ y entonces N_n es completo (i.e. para cualquier sentencia φ, N_n contiene ya sea a φ o a $\neg\varphi$)

ii. N_n es una teoría en la lógica paraconsistente LP.

iii. N_n es inconsistente.

iv. Si φ es una ecuación (negada) que concierne a los números $< n$ entonces $\varphi \in N_n$, sii $\varphi \in N$. (por lo tanto, si n > 0, N_n no es trivial.)

v. N_n es decidible (y entonces axiomatizada)

vi. N_n es representable en N_n, por lo tanto L contiene un predicado verdadero N_n

vii. Si B es una prueba del predicado N_n, entonces cada caso de $B_{(<\varphi>)} \rightarrow \varphi$ está en N_n

viii. Si φ no es un teorema de $N_n \neg B_{(<\varphi>)}$ es demostrable en N_n. Por lo tanto, la no trivialidad de N_n puede ser establecida en N_n (de modo finitista)

ix. La "sentencia de Gödel"[9] en N_n es (demostrable) en N_n tanto como su negación.

9 Recuérdese que hace referencia a una sentencia que dice de ella misma que es indemostrable

Interpretación del metateorema

En el metateorema observamos cómo cada elemento de N es también elemento de N_n, con la particularidad que es inconsistente y hace parte de LP. Hay rasgos importantes, por ejemplo con vii se está evitando caer dentro del teorema de Tarski y su distinción entre lenguaje y metalenguaje. La persona que esté interesada en esto puede remitirse a Priest (1994: 343). Pareciese que con ix se llegará a la misma conclusión del teorema de incompletitud; sin embargo, hay que tener en cuenta que este sistema es capaz de demostrar su no trivialización internamente, luego, su teoría tiene el poder de demostrar la sentencia de Gödel en N_n.

En sentido meramente filosófico, esto parece no tener mayor inconveniente, aunque pueden existir críticas juiciosas desde las matemáticas. Tal parece que al metateorema le falta una función de recursividad que asegure la posibilidad del movimiento logrado en términos de finitud. Sin embargo, y queriendo defender a Priest, se podría argumentar que al trabajar con el lenguaje de primer orden de la aritmética (L) se trabaja también con su función de recursividad del teorema de incompletitud de Gödel.

Otro de los problemas que a simple vista pareciesen surgir, es el escepticismo de la demostración de forma finita de la no trivialidad del sistema. Empero, gracias al punto viii, Priest demostró esta sentencia en una interpretación inconsistente de L, que de ahora en adelante se conocerá como $\mathfrak{M}$. Es aquí donde el asunto se torna mucho más interesante. Pareciese entonces que el modelo adecuado para poder desarrollar este tipo de pruebas sea un modelo $\mathfrak{M}$ (paraconsistente). El intento de legitimar el modelo $\mathfrak{M}$ sobre el N (estándar, clásico) es probable que nos brinde luz sobre nuestra investigación, como dice Priest:

> La improbabilidad de la consistencia (no trivialidad) de la aritmética en la aritmética misma, fue, ciertamente, un resultado negativo para muchos, de hecho, destruyó por completo el Programa Hilbert. Mal o bien la presente situación es un bonus para $\mathfrak{M}$ y, consecuentemente, está conectado con la pregunta por la importancia de la viabilidad de tal programa[10]. (Priest 1994: 344)

En este caso parece que la creación del modelo $\mathfrak{M}$ resulta totalmente fructífera. A pesar de ello, adentrarnos en detalles técnicos de cómo

10 Traducción propia del original "The unprovability of the consistency (non-triviality) of arithmetic in arithmetic was certainly a negative result for many, in that it killed off Hilbert's Programme. Whether or not the present situation is a plus for M is therefore connected with the question of the importance of the viability of that Programme."

funciona el modelo $\mathfrak{M}$ sobrepasa esta investigación, por lo que remito al lector al parágrafo 1.5 del texto *Inconsistent Arithmetics: Issues Technical and Philosophical*, de Priest (2003). En este texto se podrán encontrar todos los detalles técnicos que se necesitan para hacer una evaluación juiciosa sobre la plausibilidad de este tipo de modelos. A pesar de todo el trabajo de Priest, él mismo reconoce que hay problemas abiertos por bosquejar dentro de su modelo $\mathfrak{M}$.

Finalizando el apartado, Priest brinda una serie de problemas abiertos que se pueden consultar en Priest (2003) en donde pone de manifiesto que esta investigación todavía está en construcción, por lo cual tiene muchos problemas tanto en términos de un modelo finito como de un modelo infinito.

El modelo $\mathfrak{M}$ paraconsistente y el teorema de incompletitud de Gödel

Con la creación del modelo $\mathfrak{M}$ de Priest, se obtiene pues un modelo no estándar de la aritmética. Para evitar críticas, el autor hace una distinción entre *Aritmética pura* y *Aritmética aplicada*. A la primera la define como el conjunto de sentencias verdaderas de los números mismos. La segunda es una aritmética pura empleada para efectos de computación u otra cosa (Cf. Priest 2003: 268). Es importante resaltar que los desarrollos lógicos no clásicos han sido acogidos por la comunidad de la programación de sistemas, por lo cual es posible que el desarrollo de una aritmética inconsistente aplicada sea bien acogido. Ahora bien, un plus que tiene, como se pudo observar, el modelo $\mathfrak{M}$ es evitar las limitaciones de la metateoría del modelo clásico *N*. Priest ha advertido que estos modelos son decidibles, lo que conlleva a afirmar que podemos obtener un algoritmo para resolver problemas aritméticos (Cf. Priest 2003: 271f). Las conclusiones son en realidad muy afortunadas para el programa formalista.

El programa formalista fracasa en gran medida por no lograr una axiomatización completa de la aritmética estándar. La conclusión a la que ha llegado Priest con sus investigaciones (Priest 2003: 272) es que la aritmética inconsistente logra una axiomatización completa. En ese caso, se procede entonces a presentar la relación directa con el programa hilbertiano.

El modelo $\mathfrak{M}$ paraconsistente y el programa formalista de Hilbert

Lo novedoso hasta ahora es que el modelo $\mathfrak{M}$ cumple con el requisito de ser axiomatizado en términos de trabajar con manchas de tinta. Recuérdese que la exigencia de la prueba de consistencia absoluta dentro del modelo estándar fue lo que llevó al mismo fracaso al programa formalista. Además

de ello, el modelo puede demostrar su no trivialidad dentro de sí mismo, lo que también es una buena noticia para la rigidez metalógica del programa formalista hilbertiano.

En lo que respecta al programa formalista de Hilbert, considero pertinente presentar los siguientes argumentos a favor y en contra de la relación con el modelo $\mathfrak{M}$.

Argumentos a favor:

a) $\mathfrak{M}$ puede ser axiomatizada.
b) Cualquier cosa que no sea un teorema de $\mathfrak{M}$ puede mostrarse como en $\mathfrak{M}$, como un no teorema (sin caer en la problemática del teorema de incompletitud de Gödel).
c) $\mathfrak{M}$ le hace una finta al teorema de Gödel.
d) Como $\mathfrak{M}$ es decidible, entonces $\mathfrak{M}$ es finito.

Argumentos en contra:

a) La consistencia como condición esencial dentro de la fundamentación de las matemáticas.
b) Es problemático concebir *n* de la manera expresada como un número "realmente grande". Esto hasta cierto punto puede chocar con un intento no finito.
c) Para un formalista radical, el programa formalista es insalvable en un sentido estricto.

Según lo visto, me adhiero a la conclusión de Priest haciendo referencia a la viabilidad del programa de Hilbert. ¿Se ha reivindicado el programa formalista? Tal vez sí, tal vez no (Priest 1994: 345). Como defensor de una teoría paraconsistente no tendría problema en aceptar tal conclusión. Sin embargo, el lector podrá quedar con un sinsabor general que puede ser realmente molesto. Si bien podemos aceptar que el modelo $\mathfrak{M}$ paraconsistente le haga una finta a Gödel, no de ello se sigue que la pelea contra la viabilidad del programa formalista esté totalmente cerrada. Actualmente el debate sigue abierto, incluso en 2002 Scott Shapiro le hace una fuerte crítica que el mismo Priest trata de conciliar en 2003.

Se pueden evidenciar entonces algunas posturas.

I. El formalista que considera que el programa de Hilbert murió con Gödel.
II. El formalista que ha considerado hacer una revisión de los aspectos metalógicos.

i. El formalista que considera que podemos desarrollar pruebas no finitistas de consistencia.
ii. El formalista que considera que se puede renunciar a conceptos centrales como el de *consistencia*, justificándose en la diferenciación contemporánea entre inconsistencia y trivialidad.

Si bien la postura I sería la de un formalista hilbertiano estricto e inflexible como hemos podido observar, de esto no se sigue que las posturas de II no sean plausibles. Priest puede ser encasillado en (ii) y autores como Gentzen, Ackermann, Lorenzen, Schütte y Hlodovskii en (i). Decir sin más que Hilbert defendería la posición (I) es limitarlo a una época, a una cosmovisión de las matemáticas. No podemos saber con certeza si con los avances de las matemáticas y la lógica en el desarrollo de la segunda mitad del siglo XX, Hilbert aún seguiría defendiendo los ideales clásicos y estándares de la aritmética.

Finalmente, podemos volver a cuestionarnos acerca de la pregunta inicial de las corrientes: ¿cuál debe ser el fundamento de la aritmética?, y aún no se tendría respuesta ante el problema de fundamentación de la matemática. El debate seguiría abierto y dándonos problemas. En esencia, el dilema se debe a diferentes posiciones filosóficas que parecen en primera medida irreconciliables como lo son el logicismo, el intuicionismo y el formalismo. Sin embargo, con la investigación paraconsistente es importante observar que sí podemos afirmar sin mayor problema cómo un modelo $\mathfrak{M}$, no estándar e inconsistente, puede estar fundamentado sin mayor problema en los sistemas formales. A pesar de ello, no se estaría fundamentando la aritmética misma (modelo estándar).

Ahora bien, el cuestionarse sobre la viabilidad de usar diferentes modelos aritméticos dependerá en gran medida de lo que hemos llamado el *principio de adecuación* en cuanto a la lógica que se debe utilizar. Es decir, si para efectos de computación resulta mucho más adecuado usar un modelo no estándar, como el $\mathfrak{M}$, entonces es legítimo usarlo. Es por ello que en gran medida el formalismo sí triunfa en un escenario que, si bien no es la pelea que se estaba librando en un sentido propio, es un desarrollo contemporáneo que va ganando cada vez más luz en el desarrollo de la lógica actualmente.

Referencias

Alcaraz, C. T. (1999) "El segundo problema de Hilbert sobre la compatibilidad de los axiomas de la aritmetica", en *Miscelanea Matemática*, Vol. 29: 73-97.

Asenjo (1954). "La idea de un cálculo de antinomias", Seminario Matemático, Universidad de La Plata, 1954.

Bobenrieth, A. (1996) *Inconsistencias, ¿por qué no?* Colombia: Colcultura.

Bremer, M. (2007) Varieties of Finitism. *Int Ontology Metaphysics*, 8:131–148

Da Costa (1994). *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. São Paulo: Hucitec.

Martínez, G. & Piñeiro, G. (2009) *Gödel para todos*. Argentina: Emecé Editores.

Mortensen, C. (1995) *Inconsistent Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Nagel, E., & Newman, J. R. (1994) *Teorema de Gödel*. España: Tecnos.

Palau, G. (2002) *Introducción a las lógicas no clasicas*. Barcelona: Gedisa.

Priest, G. (1979) "Logic of Paradox", en *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 8, No. 1, 219-241.

_____(1994) "Is Arithmetic Consistent?", en *Oxford University Press*, Vol. 103, No. 411, 337-349.

_____(2003) "Inconsistent Arithmetics: Issues Technical and Philosophical", en G. Priest, *Trends in Logic*, No. 21, 273-299.

_____(2007) "Paraconsistency and Dialetheism", en Gabbay, D. & Woods, J. (eds.) *Handbook of the History of Logic*, Vol. 8, 129 -204. Ámsterdam, Holanda: Elsevier B.V.

Trueba, C. (2000) *Racionalidad: Lenguaje, argumentación y acción*. México: Plaza y Valdrés.