دراسة في المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية

د. عدنان الطيباني[1] د. حمزة حاكمي[2] د. إيمان الخوجة[3] د. أحمد سلامة[4]

الملخص

تعد المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية نوعاً جديداً من المجموعات الكلاسيكية، وقد ظهر مفهوم المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية لأول مرة عام 2013، حيث درس كلاً من I. Hanfy و A.Salama المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية في حالة خاصة وذلك بغية دراسة الأحداث النيتروسوفية الكلاسيكية واحتمالاتها [3]، وفي سياق دراسة هذا النوع من المجموعات ميز كل من A.Salama و S. Broumi ثلاث أنواع من المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية في حالتها الخاصة، فضلاً عن تعريف المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية في حالتها العامة [9].

ندرس في هذا البحث المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية في حالتها العامة بهدف الوصول إلى أسر من المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية كلاً منها يحافظ على خصائص جبر المجموعات الكلاسيكية وذلك من خلال إعادة صياغة بعض المفاهيم الأساسية المرتبطة بالمجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية.

الكلمـات المفتاحيـة. مجموعـة، مجموعـة نيتروسـوفية، مجموعـة نيتروسـوفية كلاسـيكية، نقطة نيتروسوفية كلاسيكية.

[1] قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية – جامعة البعث.
[2] أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق.
[3] أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.
[4] أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة بور سعيد.

A Study about Neutrosophic Crisp Sets

Dr. Adnan Al-Taybani[1] Dr. Hamza Hakmi[2] Dr. Eaman Al-Khouja[3]
Dr. Ahmed Salama[4]

Abstract

A Neutrosophic crisp set is a new type of crisp set, and the concept of Neutrosophic crisp set appeared for the first time in 2013, where I. Hanfy a and A. Salama studied the Neutrosophic crisp set in a special case in order to study Neutrosophic crisp events and their possibilities [3]. In the context of studying this type of sets, A. Salama and S. Broumi distinguished three types of Neutrosophic crisp set in its special case, in addition to defining the Neutrosophic crisp set in its general case [9].

The aim of this paper is to study Neutrosophic crisp set in its general case to find families of Neutrosophic crisp sets each of which preserves the properties of classical algebra of crisp sets by reformulating some of the basic concepts associated with classical Neutrosophic crisp sets.

Key Words: Crisp set, Neutrosophic set, Neutrosophic crisp set, Neutrosophic crisp point.

[1] Department of Basic Sciences, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering Al-Baath University.
[2] Professor, Department of Mathematics Damascus University.
[3] Assistant Professor, Department of Mathematics Al-Baath University.
[4] Professor, Department of Mathematics Port-Said University. (Egypt).

المقدمـة.

تعد المجموعة واحدة من أهم المفاهيم في نظرية المجموعات، وقد أدى استخدام مفهوم المجموعة من دون أي تحديد إلى ظهور بعض النتائج المتناقضة، وحاول كثير من العلماء وضع أسس لنظرية المجموعات لأجل التخلص من هذه التناقضات، ويعد الرياضي الألماني *G. Cantor* أحد هؤلاء الذين ساهموا في وضع هذه الأسس وإليه يعود الفضل لما يمكن قوله بتعريف المجموعة (إذا صح التعبير).

نتيجة للعلاقة الوثيقة بين نظرية المجموعات والمنطق الرياضي والتي وضحها *A. Tarski* في [10] شهدت دراسة نظرية المجموعات تطوراً هاماً بعد أن عرف *L. Zadeh* المجموعة الجزئية الضبابية [12] عام 1965 والتي تعد تعميماً للمجموعة العادية (الكلاسيكية) وقد وافق ذلك ظهور المنطق الضبابي كأحد أشكال المنطق متعدد القيم وقام *Ch. Ashbancher* بعرض دراسة تفصيلية عن هذا المنطق في [1]. وبعد ظهور العديد من المسائل التي لم تكن سابقاً قابلة للتوصيف من خلال المجموعات الجزئية الضبابية، كان لا بد من إيجاد تعميم لهذا المفهوم، وضمن هذا السياق ظهر تعميمان هامان للمجموعات الجزئية الضبابية:

– الأول كان عام 1983 على يد الرياضي البلغاري *K. Atanassov* [2]، الذي قدم مفهوم المجموعة الجزئية الضبابية الحدسية كتعميم للمجموعة الجزئية الضبابية وذلك بإضافة دالة اللاعضوية إلى جانب دالة العضوية التي عرفها *L. Zadeh*، بحيث إن مجموع هاتين الدالتين يساوي الواحد من أجل أي عنصر في حالة المجموعة الجزئية الضبابية، أما في حالة المجموعة الجزئية الضبابية الحدسية فإن هذا المجموع يأخذ أي قيمة من المجال $[0,1]$.

– التعميم الثاني فظهر عام 1998 على يد الرياضي *F. Smarandache* الذي قدم مفهوم المجموعة الجزئية النيتروسوفية كتعميم لمفهوم المجموعات الجزئية الضبابية والضبابية الحدسية بعد أن قدم النيتروسوفي كفرع جديد في الفلسفة [5]، فضلاً عن المنطق النيتروسوفي كأحد أشكال المنطق متعدد القيم والذي يعد تعميماً للمنطق الضبابي وقد قام *Ch. Ashbancher* بعرض دراسة تفصيلية لهذا المنطق في [1]، وقد قام

$F.\ Smarandache$ بإضافة دالة الحياد (اللاتعيين) إلى جانب دالتي العضوية واللاعضوية المعرفتان سابقاً.

في عام 2013 قام كل من $I.\ Hanafy$ و $A.\ Salama$ بإدخال مفهوم المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية (A neutrosophic classical set) والتي سميت لاحقاً (A neutrosophic crisp set) وقد تم نشر العديد من الأوراق البحثية المرتبطة بهذه المجموعات والتي جمع جزء منها في كتاب واحد [7]، عام 2015.

الهدف من البحث.

إن الهدف من بحثنا هو دراسة المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية في حالتها العامة بهدف الوصول إلى أسرة من المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية كلاً منها يحافظ على خصائص جبر المجموعات الكلاسيكية وذلك من خلال إعادة صياغة بعض المفاهيم الأساسية المرتبطة بالمجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية.

1 – المجموعة الجزئية النيتروسوفية.

في هذه الفقرة نقوم بعرض المفاهيم الأساسية المتعلقة بالنيتروسوفي والمجموعات النيتروسوفية، والبداية مع النظرية الأساسية في النيتروسوفي:

المبدأ الأساسي في النيتروسوفي [5].

لنفرض أن $\langle A \rangle$ قضية ما وأن $\langle non\ A \rangle$ هي نفي القضية $\langle A \rangle$، و $\langle anti\ A \rangle$ هي مضاد القضية $\langle non\ A \rangle$، و $\langle neut\ A \rangle$ هي حياد القضية $\langle A \rangle$. عندئذ:

- إن $\langle neut\ A \rangle$ تقع ما بين $\langle non\ A \rangle$ و $\langle anti\ A \rangle$.
- إن $\langle non\ A \rangle$ مختلفة عن $\langle anti\ A \rangle$.

في الحالة العامة تكون الحدود بين المفاهيم السابقة غير واضحة أو مبهمة وبالتالي من أجل قضية ما $\langle A \rangle$ فمن الممكن أن تملك $\langle A \rangle$ و $\langle neut\ A \rangle$ و $\langle anti\ A \rangle$ و $\langle non\ A \rangle$ أجزاء مشتركة مثنى مثنى، (متقاطعة مثنى مثنى).

الاشتقـــاق اللفظـــــي [5].

إن $Neutrosophy$ كلمة مؤلفة من مقطعين وهي مشتقة من كلمة $Neutral$ والتي تعني المحايد وكلمة $Sophia$ التي تعني الحكمة، وبذلك يكون معنى هذه الكلمة "معرفة التفكير المحايد".

الصيغـــة العــامـــة لمنطـــق النيتروسوفي [5].

إن كل قضية $\langle A \rangle$ تكون صحيحة بنسبة $T = t\,\%$ ومحايدة (غير معينة) بنسبة $I = i\,\%$ وخاطئة بنسبة $F = f\,\%$، حيث إن T, I, F مجموعات جزئية من المجال $]\,0^-, 1^+[$ وأن $1^+ = 1 + \varepsilon$ و $0^- = 0 - \varepsilon$ وأن $\varepsilon > 0$ مقدار لا متناهي في الصغر، وهكذا نجد أن:

$$0^- \le \sup T + \sup I + \sup F \le 3^+$$

وقد ميز $C.\ Ashbancher$ في [1] ثلاث أنواع خاصة من المنطق النيتروسوفي حيث تأخذ كل من t, i, f قيمة وحيدة من المجال $[0,1]$ وهي على النحو الآتي:

- $t + i + f = 1$.
- $t + i + f < 1$.
- $t + i + f \ge 1$.

بناءً على الصيغة العامة للمنطق النيتروسوفي ظهرت عدة أنواع من المجموعات النيتروسوفية يمكن الاطلاع عليها في [6]، [11] وقد وضع $F.\ Smarandache$ تعريفاً عاماً للمجموعة النيتروسوفية بالشكل:

تعريـــف [5].

لتكن X مجموعة غير خالية، تعرف المجموعة الجزئية النيتروسوفية A من المجموعة X بالشكل:

$$A = \{(x, T_A(x), I_A(x), F_A(x)) :\ x \in X\}$$

حيث إن $T_A(x), I_A(x), F_A(x)$ مجموعات جزئية من المجال $]\,0^-, 1^+[$ وتحقق أن:

$$0^- \le \sup T_A(x) + \sup I_A(x) + \sup F_A(x) \le 3^+$$

وذلك أياً كان $x \in X$. ونسمي:

- $T_A(x)$ درجة انتماء العنصر x إلى المجموعة A.
- $I_A(x)$ درجة حياد (اللاتعيين) العنصر x بالنسبة إلى المجموعة A.
- $F_A(x)$ درجة عدم انتماء العنصر x إلى المجموعة A.

ملاحظـــة.

إن العلاقات الجبرية المعرفة على المجموعات النيتروسوفية تتعلق بنوع المجموعات النيتروسوفية المدروسة، وفي [7] قام كل من *F. Smarandache* و *A. Salama* بتعريف هذه العلاقات بشكل عام عندما تأخذ كل من $T_A(x), I_A(x), F_A(x)$ قيمة وحيدة في المجال $]^-0, 1^+[$.

2 – المجمـــوعات النيتـــروسوفيـــة الكلاسيكيـــة.

ندرس في هذه الفقرة المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية في حالتها العامة بهدف الوصول إلى أسر من المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية كلاً منها يحافظ على خصائص جبر المجموعات الكلاسيكية وذلك من خلال إعادة صياغة بعض المفاهيم الأساسية المرتبطة بالمجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية والبداية مع التعريف الآتي:

تعريـــف [9].

لتكن X مجموعة غير خالية، تعرف المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية A على X بأنها الثلاثية المرتبة $A = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ حيث إن A_1, A_2, A_3 مجموعات جزئية من X.

يرمز لأسرة المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية على X بالشكل $Ncs\,(X)$. ونسمى A_1, A_2, A_3 بالمركبات الأولى والثانية والثالثة على الترتيب للمجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية A.

أما في الحالة الخاصة المعرفة في [3]، فقد تم تعريف المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية بالشكل الآتي:

تعريـــف [3].

لتكن X مجموعة غير خالية، تعرف المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية A على X بأنها الثلاثية المرتبة $A=\langle A_1, A_2, A_3\rangle$ حيث إن A_1, A_2, A_3 مجموعات جزئية من X تحقق أن $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \phi$.

سنرمز لأسرة المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية على X في الحالة الخاصة بالرمز $SNcs\,(X)$، ونلاحظ هنا أن $SNcs\,(X) \subset Ncs\,(X)$.

لتكن X مجموعة غير خالية و $A=\langle A_1, A_2, A_3\rangle$ مجموعة نيتروسوفية كلاسيكية على X، عندئذ يمكن وفقاً للشرط $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \phi$ تمييز ثلاث حالات خاصة من المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية، التي تعرف بالشكل:

تعريـــف [9].

لتكن X مجموعة غير خالية و $A=\langle A_1, A_2, A_3\rangle \in SNcs\,(X)$، عندئذ:

- نقول إن المجموعة النيتروسوفية A من النوع الأول إذا كان:

$$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_3 = \phi$$

- نقول إن المجموعة النيتروسوفية A من النوع الثاني إذا كان:

$$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_3 = \phi \quad \text{و} \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 = X$$

- نقول إن المجموعة النيتروسوفية A من النوع الثالث إذا كان:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \phi \quad \text{و} \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 = X$$

يمكننا وفقاً للتعريف الأخير صياغة النتيجة الآتية:

نتيجـــة.

لتكن X مجموعة غير خالية، إذا رمزنا لأسرة المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية من النوع الأول والثاني والثالث على الشكل:

$$SNcs_1\,(X),\;\; SNcs_2\,(X),\;\; SNcs_3\,(X)$$

على الترتيب، نلاحظ أن:

$$SNcs_2(X) \subset SNcs_1(X) \subset SNcs(X) \subset Ncs(X)$$
$$SNcs_2(X) \subset SNcs_3(X) \subset SNcs(X) \subset Ncs(X)$$

ننتقل الآن إلى عرض العمليات والعلاقات الجبرية المعرفة على المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية، وفي دراستنا سنقوم بتقسيم هذه العمليات والعلاقات الجبرية إلى مجموعتين وذلك بغية الحفاظ على خواصها كما في المجموعات الكلاسيكية، وهذا ما سنبينه لاحقاً، والبداية مع التعريف الآتي:

تعريــف [7].

لتكن X مجموعة غير خالية و $A, B \in Ncs(X)$ حيث إن $A = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ و $B = \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$ عندئذ:

- **المجموعة الأولى:**

1 – $A \subseteq B$ عندما وفقط عندما $A_1 \subseteq B_1,\ A_2 \subseteq B_2,\ A_3 \supseteq B_3$.

2 – الاجتماع. $A \cup B = \langle A_1 \cup B_1, A_2 \cup B_2, A_3 \cap B_3 \rangle$.

3 – التقاطع. $A \cap B = \langle A_1 \cap B_1, A_2 \cap B_2, A_3 \cup B_3 \rangle$.

إذا كانت $\{A_j\}_{j\in J}$ أسرة من المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية على X، عندئذ فإن:

$$\cup_{j\in J} A_j = \left\langle \cup_{j\in J} A_{1j}, \cup_{j\in J} A_{2j}, \cap_{j\in J} A_{3j} \right\rangle$$
$$\cap_{j\in J} A_j = \left\langle \cap_{j\in J} A_{1j}, \cap_{j\in J} A_{2j}, \cup_{j\in J} A_{3j} \right\rangle$$

- **المجموعة الثانية:**

1 – $A \subseteq B$ عندما وفقط عندما $A_1 \subseteq B_1,\ A_2 \supseteq B_2,\ A_3 \supseteq B_3$.

2 – الاجتماع. $A \cup B = \langle A_1 \cup B_1, A_2 \cap B_2, A_3 \cap B_3 \rangle$.

3 – التقاطع. $A \cap B = \langle A_1 \cap B_1, A_2 \cup B_2, A_3 \cup B_3 \rangle$.

إذا كانت $\{A_j\}_{j\in J}$ أسرة من المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية على X، عندئذ فإن:

$$\cup_{j\in J} A_j = \left\langle \cup_{j\in J} A_{1j}, \cap_{j\in J} A_{2j}, \cap_{j\in J} A_{3j} \right\rangle$$

$$\cap_{j\in J} A_j = \left\langle \cap_{j\in J} A_{1j}, \cup_{j\in J} A_{2j}, \cup_{j\in J} A_{3j} \right\rangle$$

تعريـــف.

لتكن X مجموعة غير خالية و $A,B \in Ncs\,(X)$ حيث إن:

$A = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ و $B = \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$.

نقول إن المجموعتين النيتروسوفيتين الكلاسيكيتين A,B متساويتين عندما وفقط عندما

$A_1 = B_1,\ A_2 = B_2,\ A_3 = B_3$.

ملاحظة.

لتكن X مجموعة غير خالية، سنرمز لأسرة المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية على X عند التعامل مع المجموعة الأولى من العلاقات والعمليات الجبرية المعرفة على أسرة المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية على X بالرمز $Ncs_1\,(X)$ وعند التعامل مع المجموعة الثانية من العلاقات والعمليات الجبرية المعرفة على أسرة المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية على X بالرمز $Ncs_2\,(X)$.

تعد النقطة النيتروسوفية الكلاسيكية على مجموعة غير خالية X واحدة من المفاهيم الهامة في نظرية المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية، حيث إن عناصر مجموعة نيتروسوفية كلاسيكية على X هي نقاط نيتروسوفية كلاسيكية على X، وقد أدخل مفهوم النقطة النيتروسوفية الكلاسيكية لأول مرة عام 2014، حيث قام A.Salama و S. Broumi في [8] بدراسة الأسرة $Ncs_1\,(X)$ وتعريف النقطة النيتروسوفية الكلاسيكية على X وانتمائها إلى مجموعة نيتروسوفية كلاسيكية من الأسرة $Ncs_1\,(X)$. هنا سنقوم بداية بدراسة هذا المفهوم وخصائصه الأساسية والبداية مع التعريف الآتي:

تعريـــف [8].

لتكن X مجموعة غير خالية و $A = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle \in Ncs_1(X)$. نسمي كل ثلاثية من الشكل $P = \langle \{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\} \rangle$ حيث $p_1 \neq p_2 \neq p_3 \in X$ نقطة

نيتروسوفية كلاسيكية على X. ونقول إن P تنتمي إلى A ونكتب اختصاراً $P \in A$ عندما وفقط عندما يتحقق أحد الشرطين الآتيين:

- $\{p_1\} \subseteq A_1, \{p_2\} \subseteq A_2, \{p_3\} \subseteq A_3$.
- $\{p_1\} \subseteq A_1, \{p_2\} \supseteq A_2, \{p_3\} \subseteq A_3$.

ملاحظـــة.

لتكن X مجموعة غير خالية و $P = \langle \{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\} \rangle$ نقطة نيتروسوفية كلاسيكية على X، لما كانت $\{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\}$ مجموعات جزئية من X فإن $P \in Ncs\,(X)$. بمعنى آخر، إن كل نقطة نيتروسوفية كلاسيكية على X هي مجموعة نيتروسوفية كلاسيكية على X.

مثـــال 1.

لتكن Z_6 مجموعة الأعداد الصحيحة بالمقاس 6 و $A, B \in Ncs_1(Z_6)$ حيث إن:

$$B = \langle \{0,1\}, \{2,3\}, \{4\} \rangle \text{ و } A = \langle \{1\}, \{2,3\}, \{0,4\} \rangle$$

لأجل النقطة النيتروسوفية الكلاسيكية $P = \langle \{1\}, \{2\}, \{0\} \rangle$ على Z_6، نلاحظ أن $P \in A$ وأن $P \not\subset A$ سواء كانت $A, P \in Ncs_1(Z_6)$ أو $A, P \in Ncs_2(Z_6)$. كما أن $A \subseteq B$ سواء كانت $A, B \in Ncs_1(Z_6)$ أو $A, B \in Ncs_2(Z_6)$، لكن $P \notin B$.

من جهة أخرى، إن أسرة النقاط النيتروسوفية الكلاسيكية على Z_6 والتي كل منها ينتمي إلى A هي:

$$\Im = \{ p_1 = \langle \{1\}, \{2\}, \{0\} \rangle,\ p_2 = \langle \{1\}, \{2\}, \{4\} \rangle,$$
$$p_3 = \langle \{1\}, \{3\}, \{0\} \rangle,\ p_4 = \langle \{1\}, \{3\}, \{4\} \rangle \}$$

ونلاحظ أنه:

- من أجل $\Im \in Ncs_1(Z_6)$ فإن $\cup_{i=1}^{4} P_i = \langle \{1\}, \{2,3\}, \phi \rangle \neq A$.
- من أجل $\Im \in Ncs_2(Z_6)$ فإن $\cup_{i=1}^{4} P_i = \langle \{1\}, \{\phi, \phi \rangle \neq A$.

بناءً على ما سبق يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

لتكن X مجموعة غير خالية و $A, B \in Ncs_1(X)$. لنفرض أن $\{P_j\}_{j \in J}$ أسرة من النقاط النيتروسوفية الكلاسيكية على X والتي كل منها ينتمي إلى A ، عندئذ فإن:

- العبارة $P_j \in A$ لا تعني بالضرورة أن $P_j \subseteq A$.
- إذا كانت $A \subseteq B$ ، عندئذ ليس بالضرورة أن $P_j \in B$ وذلك أياً كان $j \in J$.
- إن $\cup_{j \in J} P_j$ ليس بالضرورة أن يكون مساوياً إلى A .

في عام 2017 قام كلاً من K. Hur و P. Lim بدراسة فئة المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية في [4]، حيث تم التطرق في هذه الدراسة إلى مفهوم النقطة النيتروسوفية الكلاسيكية، حيث تم طرح مفهوم جديد لانتماء النقطة النيتروسوفية الكلاسيكية إلى مجموعة نيتروسوفية كلاسيكية بالشكل الآتي:

تعريــــف [4].

لتكن X مجموعة غير خالية و $P = \langle \{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\} \rangle$ نقطة نيتروسوفية كلاسيكية على X ، نقول إن P تنتمي إلى المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية $A = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ ونرمز لذلك اختصاراً بالرمز $P \in A$ إذا كان:

$$\{p_1\} \subseteq A_1, \{p_2\} \subseteq A_2, \{p_3\} \subseteq A_3'$$

حيث إن A_3' هو متمم المجموعة A_3 .

مثـــال 2.

لتكن $A = \langle \{1\}, \{2,3\}, \{0,4\} \rangle \in Ncs_1(Z_6)$ حيث إن:

عندئذ لأجل $P = \langle \{1\}, \{2\}, \{3\} \rangle$ ، نلاحظ أن $P \in A$ لكن $P \not\subset A$.

بناءً على ذلك يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجـــة.

لتكن X مجموعة غير خالية و $A \in Ncs(X)$. إذا كانت النقطة النيتروسوفية الكلاسيكية P على X تنتمي إلى A ، فإنه ليس من الضروري أن يكون $P \subseteq A$.

وفقاً لما سبق، نلاحظ أن تعريف النقطة النيتروسوفية الكلاسيكية على مجموعة غير خالية X تقتصر على حالة خاصة من المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية من الشكل $P=\langle \{p_1\},\{p_2\},\{p_3\}\rangle$ حيث $p_1 \neq p_2 \neq p_3 \in X$ ، في حين أنه حسب التعريف العام للمجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية، فإنه من الممكن أن يتساوى عنصرين على الأقل من العناصر p_1, p_2, p_3 .

فضلاً عن ذلك، إن انتماء نقطة نيتروسوفية كلاسيكية إلى مجموعة نيتروسوفية كلاسيكية لا يعني بالضرورة أن هذه النقطة النيتروسوفية الكلاسيكية محتواه في المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية التي تنتمي إليها. بناءً على ذلك، سنقوم بتعميم مفهوم النقطة النيتروسوفية الكلاسيكية وإعادة صياغة مفهوم انتماء نقطة نيتروسوفية كلاسيكية إلى مجموعة نيتروسوفية كلاسيكية وذلك بغية الحصول على أسر من المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية التي تحافظ على خواص المجموعات الكلاسيكية بالشكل الآتي:

تعريـــف.

لتكن X مجموعة غير خالية و $A \in Ncs(X)$. نسمي كل مجموعة نيتروسوفية كلاسيكية على X من الشكل $P=\langle \{p_1\},\{p_2\},\{p_3\}\rangle$ نقطة نيتروسوفية كلاسيكية على X ونقول في هذه الحالة إن P تنتمي إلى A ، ونكتب ذلك اختصاراً $P \in A$ إذا كانت $P \subseteq A$.

وسنرمز لأسرة النقاط النيتروسوفية الكلاسيكية على X بالشكل $Ncp(X)$ ، ونلاحظ هنا أن:

$$Ncp(X) \subseteq Ncs(X) .$$

نتيجـــة.

لتكن X مجموعة غير خالية و $A \in Ncs(X)$ ، حيث إن $A=\langle A_1, A_2, A_3\rangle$ ولنفرض أن $P \in Ncp(X)$ ، حيث إن $P=\langle \{p_1\},\{p_2\},\{p_3\}\rangle$ ، عندئذ:

1 – إذا كانت $A, P \in Ncs_1(X)$ ، عندئذ فإن $P \in A$ عندما وفقط عندما

$$\{p_1\} \subseteq A_1, \{p_2\} \subseteq A_2, \{p_3\} \supseteq A_3$$

2 – إذا كانت $A, P \in Ncs_2(X)$ ، عندئذ فإن $P \in A$ عندما وفقط عندما

$$\{p_1\} \subseteq A_1, \{p_2\} \supseteq A_2, \{p_3\} \supseteq A_3$$

تمهيديـــة 2-1.

لتكن X مجموعة غير خالية و $A = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle \in Ncs_1(X)$ وأن $P = \langle \{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\} \rangle$ نقطة نيتروسوفية كلاسيكية على X، عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1- $P \in A$.

2- $p_1 \in A_1,\ p_2 \in A_2, (A_3 = \{p_3\}\ or\ A_3 = \phi)$.

البرهـــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن $P \in A$، عندئذ فإن $\{p_1\} \subseteq A_1, \{p_2\} \subseteq A_2, \{p_3\} \supseteq A_3$
ولما كان $\{p_1\} \subseteq A_1$ و $\{p_2\} \subseteq A_2$، عندئذ فإن $p_1 \in A_1,\ p_2 \in A_2$.
من جهة أخرى، لما كانت المجموعة $\{p_3\}$ وحيدة العنصر و A_3 مجموعة جزئية منها فإنه إما أن تكون $A_3 = \phi$ أو إن $A_3 = \{p_3\}$، وهذا يبين أن:

$$p_1 \in A_1,\ p_2 \in A_2, (A_3 = \{p_3\}\ or\ A_3 = \phi)$$

$(2) \Leftarrow (1)$. لنفرض أن $p_1 \in A_1,\ p_2 \in A_2, (A_3 = \{p_3\}\ or\ A_3 = \phi)$، عندئذ لما كان $p_1 \in A_1$ و $p_2 \in A_2$ فإن $\{p_1\} \subseteq A_1$ و $\{p_2\} \subseteq A_2$.
من جهة أخرى، لما كان $A_3 = \{p_3\}\ or\ A_3 = \phi$ نجد أن $\{p_3\} \subseteq A_3$ وهذا يبين أن $P \in A$. ◊

بناءً على التمهيدية الأخيرة يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجـــة.

لتكن X مجموعة غير خالية و $A = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle \in Ncs_1(X)$ ولنفرض أن:

$$P = \langle \{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\} \rangle \in Ncp(X).$$

عندئذ فإن $P \in A$ عندما وفقط عندما A تملك أحد الشكلين الآتيين:

$$A = \langle A_1, A_2, \phi \rangle \quad or \quad A = \langle A_1, A_2, \{p_3\} \rangle$$

حيث إن $p_1 \in A_1,\ p_2 \in A_2$.

ملاحظـــة.

لتكن X مجموعة غير خالية و $A=\langle A_1, A_2, A_3\rangle \in Ncs_2(X)$ ولنفرض أن: $P=\langle \{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\}\rangle \in Ncp(X)$.

عندئذ بشكل مشابه لما سبق يمكن أن نبرهن أن $P \in A$ عندما وفقط عندما A تملك أحد الأشكال الآتية:

$$A=\langle A_1, \{p_2\}, \{p_3\}\rangle \quad or \quad A=\langle A_1, \{p_2\}, \phi\rangle$$
$$or \quad A=\langle A_1, \phi, \{p_3\}\rangle \quad or \quad A=\langle A_1, \phi, \phi\rangle$$

حيث إن $p_1 \in A_1$.

مبرهنــة 2-2.

لتكن X مجموعة غير خالية و $A=\langle A_1, A_2, \{x\}\rangle \in Ncs_1(X)$ حيث A_1, A_2 مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من X وأن $x \in X$. لنفرض أن $\Im=\{P_j\}_{j\in J}$ أسرة النقاط النيتروسوفية الكلاسيكية على X والتي كل منها تنتمي إلى A، عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1 – أياً كانت $P \in \Im$ فإن $P=\langle \{x_1\}, \{x_2\}, \{x\}\rangle$ حيث $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$.

2 – $A=\cup_{j\in J} P_j$.

البرهـان.

1 – ينتج مباشرة من التمهيدية (2-1) حيث إن المركبة الثالثة من المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية A غير خالية.

2 – لتكن $P_j=\langle \{x_{1j}\}, \{x_{2j}\}, \{x_{3j}\}\rangle \in \Im$ حيث $j \in J$، عندئذ حسب (1) فإن:

$$x_{1j} \in A_1,\ \ x_{2j} \in A_2,\ \ x_{3j}=x$$

من جهة أخرى، وحسب تعريف $\Im$ فإن المركبة الأولى لعناصر $\Im$ تمسح كامل عناصر المجموعة A_1، كما أن المركبة الثانية لعناصر $\Im$ تمسح كامل المجموعة A_2، أي إن:

$$A_1=\cup_{j\in J}\{x_{1j}\},\ \ A_2=\cup_{j\in J}\{x_{2j}\}$$

ومنه فإن:

$$A=\langle A_1, A_2, \{x\}\rangle=\langle \cup_{j\in J}\{x_{1j}\}, \cup_{j\in J}\{x_{2j}\}, \{x\}\rangle$$

$$=\left\langle \cup_{j\in J}\{x_{1j}\}, \cup_{j\in J}\{x_{2j}\}, \cap_{j\in J}\{x_{3j}\}\right\rangle = \cup_{j\in J} P_j$$

بشكل مشابه لما سبق يمكن إثبات صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنـة 2-3.

لتكن X مجموعة غير خالية بحيث $Card\ X \geq 2$ و $A=\langle A_1, A_2, \phi\rangle \in Ncs_1(X)$ بحيث A_1, A_2 مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من X. لنفرض أن $\Im=\{P_j\}_{j\in J}$ أسرة النقاط النيتروسوفية الكلاسيكية على X والتي كل منها تنتمي إلى A. عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1 – أياً كانت $P\in\Im$ فإن:

$$P=\langle \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}\rangle$$

حيث $x_1\in A_1, x_2\in A_2, x_3\in X$.

2 – $A=\cup_{j\in J} P_j$.

البرهـان.

لتكن $P\in\Im$ ولنفرض أن $P=\langle \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}\rangle$، عندئذ لما كان $P\in A$ فإن:

$$\{x_1\}\subseteq A_1,\ \{x_2\}\subseteq A_2,\ \{x_3\}\supseteq \phi$$

أي إن $x_1\in A_1, x_2\in A_2, \{x_3\}\supseteq\phi$

ولما كانت المجموعة الخالية محتواه في أي مجموعة وحيدة العنصر من X نجد أن $x_3\in X$.

2 – لتكن $P_j=\langle \{x_{1j}\}, \{x_{2j}\}, \{x_{3j}\}\rangle\in\Im$ حيث $j\in J$، عندئذ حسب (1) فإن:

$$x_{1j}\in A_1, x_{2j}\in A_2, x_{3j}\in X$$

وبالتالي حسب تعريف $\Im$ فإن المركبة الأولى لعناصر $\Im$ تمسح جميع عناصر المجموعة A_1، كما أن المركبة الثانية لعناصر $\Im$ تمسح جميع عناصر المجموعة A_2، فضلاً عن ذلك إن المركبة الثالثة لعناصر $\Im$ تمسح جميع عناصر المجموعة X ولما كانت $Card\ X\geq 2$ فإن $\cap_{j\in J}\{x_{3j}\}=\phi$ كما أن:

$$A_1=\cup_{j\in J}\{x_{1j}\},\ \ A_2=\cup_{j\in J}\{x_{2j}\}$$

ومنه فإن:

$$A=\langle A_1, A_2, \phi\rangle=\langle \cup_{j\in J}\{x_{1j}\}, \cup_{j\in J}\{x_{2j}\}, \cap_{j\in J}\{x_{3j}\}\rangle=\cup_{j\in J} P_j$$

ملاحظـة.

لتكن X مجموعة غير خالية ولنفرض أن $X=\{x\}$. لتكن:

$$A=\langle A_1,\, A_2,\, \phi\rangle\in Ncs_1(X)$$

بحيث A_1, A_2 مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من X، عندئذ فإن $A_1=A_2=\{x\}$ وبالتالي فإن $A=\langle\{x\},\{x\},\,\phi\rangle$.

من جهة أخرى، نلاحظ أن النقطة النيتروسوفية الكلاسيكية $P=\langle\{x\},\{x\},\,\{x\}\rangle$ تنتمي إلى A، ولكن A لا تساوي إلى أي اجتماع للنقطة P مع نفسها، لذلك عند دراسة المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية على مجموعة غير خالية X من الأسرة $Ncs_1(X)$ والتي تملك الشكل $A=\langle A_1,\, A_2,\, \phi\rangle$ حيث إن A_1, A_2 مجموعتان جزئيتان من X نفرض أن $Card\ X\geq 2$.

بناءً على المبرهنتين $(2-2)$ و $(2-3)$ يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجـة.

1 – لتكن X مجموعة غير خالية و $A=\langle A_1,\, A_2,\, \{x\}\rangle\in Ncs_1(X)$ بحيث A_1, A_2 مجموعتان جزئيتان غير خاليتان من X وأن $x\in X$. تبين المبرهنة $(2-2)$ أن A تساوي إلى اجتماع أسرة النقاط النيتروسوفية الكلاسيكية على X والتي كل منها تنتمي إلى A.

وبالتالي كما في حالة المجموعات الكلاسيكية، يمكن أن نعبر عن المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية A بالشكل الآتي:

$$A=\{\,\langle x_1,\, x_2,\, \{x\}\rangle : x_1\in A_1, x_2\in A_2\,\}$$

بمعنى آخر، يمكننا القول إن المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية A على X هي أسرة النقاط النيتروسوفية الكلاسيكية على X والتي كل منها تنتمي إلى A.

2 – لتكن X مجموعة غير خالية حيث إن $Card\ X \geq 2$. لنفرض أن $A=\langle A_1, A_2, \phi \rangle \in Ncs_1(X)$ بحيث إن A_1, A_2 مجموعتان جزئيتان غير خاليتين من X. تبين المبرهنة (2−3) أن A تساوي إلى اجتماع أسرة النقاط النيتروسوفية الكلاسيكية على X والتي كل منها تنتمي إلى A. وبالتالي كما في حالة المجموعات الكلاسيكية، يمكن أن نعبر عن المجموعة النيتروسوفية A بالشكل الآتي:

$$A = \{ \langle \{x_1\}, \{x_2\}, \{x\} \rangle : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, x \in X \}$$

بمعنى آخر، يمكننا القول إن المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية A على X هي أسرة النقاط النيتروسوفية الكلاسيكية على X والتي كل منها ينتمي إلى A.

ملاحظـة.

لتكن X مجموعة غير خالية و A_1 مجموعة جزئية غير خالية من X ولنفرض أن $x_2, x_3 \in X$ ولنفرض أيضاً أن $A \in Ncs_2(X)$، عندئذ بشكل مشابه لما سبق يمكن أن نكتب:

1 – إذا كانت $A=\langle A_1, \{x_2\}, \{x_3\} \rangle$ فإنه من الممكن أن نعبر عن A بالشكل الآتي:

$$A = \{ \langle \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\} \rangle : x_1 \in A_1 \}$$

2 – في حال كون $Card\ X \geq 2$ فإن:

– إذا كانت $A=\langle A_1, \{x_2\}, \phi \rangle$ فإنه من الممكن أن نعبر عن A بالشكل الآتي:

$$A = \{ \langle \{x_1\}, \{x_2\}, \{x\} \rangle : x_1 \in A_1, x \in X \}$$

– إذا كانت $A=\langle A_1, \phi, \{x_3\} \rangle$ فإنه من الممكن أن نعبر عن A بالشكل الآتي:

$$A = \{ \langle \{x_1\}, \{x\}, \{x_3\} \rangle : x_1 \in A_1, x \in X \}$$

– إذا كانت $A=\langle A_1, \phi, \phi \rangle$ فإنه من الممكن أن نعبر عن A بالشكل الآتي:

$$A = \{ \langle \{x_1\}, \{x\}, \{y\} \rangle : x_1 \in A_1, x, y \in X \}$$

فضلاً عن ذلك، إن A تساوي إلى اجتماع أسرة النقاط النيتروسوفية الكلاسيكية على X والتي تنتمي كل منها إلى A وذلك في كل حالة من الحالات السابقة.

ملاحظـة.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x_2, x_3 \in X$، عندئذ لأجل الأسرة $Ncs_1(X)$ سنضع:

$$Ncs_1\,(X\,, X\,, \{x_3\}) = \{\ A = \left\langle A_{1j}\,, A_{2j}\,, \{x_3\} \right\rangle;\ A_{1j}\,, A_{2j} \subseteq X\ \}_{j\in J}$$

$$Ncs_1\,(X\,, X\,, \phi) = \{\ A = \left\langle A_{1j}\,, A_{2j}\,, \phi \right\rangle;\ A_{1j}\,, A_{2j} \subseteq X\ \}_{j\in J}$$

أما بالنسبة إلى الأسرة $Ncs_2(X)$ سنضع:

$$Ncs_2\,(X\,, \{x_2\}, \{x_3\}) = \{\ A_j = \left\langle A_{1j}\,, \{x_2\}, \{x_3\} \right\rangle;\ A_{1j} \subseteq X\ \}_{j\in J}$$

$$Ncs_2\,(X\,, \{x_2\}, \phi) = \{\ A_j = \left\langle A_{1j}\,, \{x_2\}, \phi \right\rangle;\ A_{1j} \subseteq X\ \}_{j\in J}$$

$$Ncs_2\,(X\,, \phi, \{x_3\}) = \{\ A_j = \left\langle A_{1j}\,, \phi, \{x_3\} \right\rangle;\ A_{1j} \subseteq X\ \}_{j\in J}$$

$$Ncs_2\,(X\,, \phi, \phi) = \{\ A_j = \left\langle A_{1j}\,, \phi, \phi \right\rangle;\ A_{1j} \subseteq X\ \}_{j\in J}$$

مع الأخذ بعين الاعتبار أنه في حالة كانت إحدى المركبات تساوي إلى ϕ فإن $Card\ X \geq 2$.

فيما يلي سنهتم بدراسة الأسرة $Ncs_1\,(X\,, X\,, \{x_3\})$ حيث $x_3 \in X$، وأيضاً دراسة خواص المجموعات النيتروسوفية الكلاسيكية التي تنتمي إلى هذه الأسرة حيث إن دراسة بقية الأسر تتم بطريقة مماثلة.

ملاحظـــة.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x \in X$. لنفرض أن $A, B \in Ncs_1(X, X, \{x\})$ بحيث إن:

$$A = \left\langle A_1, A_2, \{x\} \right\rangle,\ B = \left\langle B_1, B_2, \{x\} \right\rangle$$

عندئذ فإن:

- $A \subseteq B$ عندما وفقط عندما $A_1 \subseteq B_1,\ A_2 \subseteq B_2$.
- $A = B$ عندما وفقط عندما $A_1 = B_1,\ A_2 = B_2$.
- $A \cup B = \left\langle A_1 \cup B_1,\ A_2 \cup B_2, \{x\} \right\rangle$.
- $A \cap B = \left\langle A_1 \cap B_1,\ A_2 \cap B_2, \{x\} \right\rangle$.
- أياً كانت $P = \left\langle \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\} \right\rangle \in Ncp(X)$ فإن $P \in A$ عندما وفقط عندما:

$$x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2,\ x_3 = x$$

تمهيديـــة 2-4.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x \in X$. لنفرض أن $A, B, C \in Ncs_1(X, X, \{x\})$. عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1 – إذا كانت $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ فإن $A \subseteq C$.

2 – $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$.

3 – $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,,\, (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

4 – $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

5 – $A \cap A = A, \quad A \cup A = A$.

6 – $A \cap B \subseteq A, B, \quad A, B \subseteq A \cup B$.

البرهـــان.

لتكن $C = \langle C_1, C_2, \{x\} \rangle\,,\, B = \langle B_1, B_2, \{x\} \rangle\,,\, A = \langle A_1, A_2, \{x\} \rangle$.

1 – لنفرض أن $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، عندئذ يكون:

$$A_1 \subseteq B_1,\ A_2 \subseteq B_2 \text{ و } B_1 \subseteq C_1,\ B_2 \subseteq C_2$$

ومنه فإن $A_1 \subseteq C_1,\ A_2 \subseteq C_2$ وهذا يبين أن $A \subseteq C$.

2 – إن:

$$A \cup B = \langle A_1 \cup B_1,\ A_2 \cup B_2,\ \{x\} \rangle =$$
$$= \langle B_1 \cup A_1,\ B_2 \cup A_2,\ \{x\} \rangle = B \cup A$$

وبشكل مشابه نجد أن $A \cap B = B \cap A$.

3 – إن:

$$(A \cup B) \cup C = \langle (A_1 \cup B_1) \cup C_1,\ (A_2 \cup B_2) \cup C_2,\ \{x\} \rangle =$$
$$= \langle A_1 \cup (B_1 \cup C_1),\ A_2(\cup B_2 \cup C_2),\ \{x\} \rangle = A \cup (B \cup C)$$

وبشكل مشابه نجد أن $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

4 – إن:

$$A \cup (B \cap C) = \langle A_1 \cup (B_1 \cap C_1),\ A_2 \cup (B_2 \cap C_2),\ \{x\} \rangle =$$

$$=\langle (A_1 \cup B_1) \cap (A_1 \cup C_1),\ (A_2 \cup B_2) \cap (A_2 \cup C_2),\ \{x\} \rangle =$$
$$=(A \cup B) \cap (A \cup C)$$

وبشكل مشابه نجد أن $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

5 و 6 كل منهما واضح. ◊

تعريـف.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x \in X$ ولنفرض أن $A \in Ncs_1(X, X, \{x\})$ حيث إن $A = \langle A_1, A_2, \{x\} \rangle$ ، عندئذ نقول إن المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية A خالية بالنسبة إلى المركبة الأولى إذا كان $A_1 = \phi$ ، وخالية بالنسبة إلى المركبة الثانية إذا كان $A_2 = \phi$.

ونقول إن المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية A خالية إذا كان $A_1 = A_2 = \phi$ ونرمز للمجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية الخالية من الأسرة $Ncs_1(X, X, \{x\})$ بالرمز ϕ_N ويكون في هذه الحالة $\phi_N = \langle \phi, \phi, \{x\} \rangle$.

بناءً على التعريف السابق يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجـــة.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x \in X$. لنفرض أن $A \in Ncs_1(X, X, \{x\})$ حيث إن $A = \langle A_1, A_2, \{x\} \rangle$ ، عندئذ إذا كانت A خالية بالنسبة للمركبة الأولى أو المركبة الثانية فإنه أياً كانت النقطة النيتروسوفية الكلاسيكية $P = \langle \{x_1\}, \{x_2\}, \{x\} \rangle$ فإن $P \notin A$ ، فضلاً عن ذلك إن $P \notin \phi_N$.

خواص المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية ϕ_N نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـة 2-5.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x \in X$. عندئذ أياً كانت $A \in Ncs_1(X, X, \{x\})$ بحيث $A = \langle A_1, A_2, \{x\} \rangle$ ، فإن القضايا الآتية صحيحة:

1 - $\phi_N \cap A = A \cap \phi_N = \phi_N$.

2 - $\phi_N \cup A = A \cup \phi_N = A$.

3 − $A \supseteq \phi_N$.

البرهـان.

1 − لنفرض أن $A = \langle A_1, A_2, \{x\} \rangle$ ، عندئذ حسب التعريف فإن $\phi_N = \langle \phi, \phi, \{x\} \rangle$ ومنه فإن:

$$A \cap \phi_N = \langle A_1 \cap \phi, A_2 \cap \phi, \{x\} \rangle = \langle \phi, \phi, \{x\} \rangle = \phi_N$$

وحسب التمهيدية (2−4)(2) نجد أن $\phi_N \cap A = A \cap \phi_N = \phi_N$.

وهذا يبين أن $\phi_N \cup A = A \cup \phi_N = A$.

2 − يبرهن بطريقة مشابهة كما في (1).

3 − لما كانت المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من أي مجموعة كلاسيكية فإن $\phi \subseteq A_1$ و $\phi \subseteq A_2$، ومنه نجد أن $\phi_N \subseteq A$. ◊

تمهيديـــــة 2−6.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x \in X$. لنفرض أن $A, B \in Ncs_1(X, X, \{x\})$. عندئذ القضايا الآتية متكافئة:

1 − $A \subseteq B$.

2 − $A \cap B = A$.

3 − $A \cup B = B$.

البرهـــان.

لنفرض أن $A = \langle A_1, A_2, \{x\} \rangle, B = \langle B_1, B_2, \{x\} \rangle$.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن $A \subseteq B$ ، عندئذ فإن $A_1 \subseteq B_1, A_2 \subseteq B_2$ ومنه يكون:

$$A_1 \cap B_1 = A_1, \;\; A_2 \cap B_2 = A_2$$

ولما كان $A \cap B = \langle A_1 \cap B_1, A_2 \cap B_2, \{x\} \rangle$ نجد أن $A \cap B = A$.

$(2) \Leftarrow (3)$. لنفرض أن $A \cap B = A$ ، عندئذ فإن:

$A_1 \cap B_1 = A_1, \;\; A_2 \cap B_2 = A_2$ ومنه فإن $A_1 \subseteq B_1, A_2 \subseteq B_2$ ومنه نجد أن:

$$A_1 \cup B_1 = B_1, \;\; A_2 \cup B_2 = B_2$$

وهذا يبين أن $A \cup B = B$.

$(3) \Leftarrow (1)$. لنفرض أن $A \cup B = B$ ، عندئذ يكون:

$$A_1 \cup B_1 = B_1, \;\; A_2 \cup B_2 = B_2$$

ومنه فإن $A_1 \subseteq B_1, A_2 \subseteq B_2$ وهذا يبين أن $A \subseteq B$. ◊

مبرهنـــة 2-7.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x \in X$. لنفرض أن $A, B \in Ncs_1(X, X, \{x\})$.

عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1 - $A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$.

2 - $A = B$ عندما وفقط عندما $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

البرهــــان.

1 - لما كان بحسب التمهيدية $(2-4)(6)$ أن $A \cap B \subseteq A$ وأن $A \subseteq A \cup B$ ، عندئذ حسب التمهيدية $(2-6)$ نجد أن:

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A \; .$$

2 - إذا كان $A = B$ فهذا يكافئ أن $A_1 = B_1, A_2 = B_2$ وهذا بدوره يكافئ أن:

$$B_1 \subseteq A_1, B_2 \subseteq A_2 \text{ و } A_1 \subseteq B_1, A_2 \subseteq B_2$$

والذي يكافئ أيضاً أن $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$. ◊

مبرهنـــة 2-8.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x \in X$. لنفرض أن $A, B \in Ncs_1(X, X, \{x\})$.

عندئذ القضيتان الآتيتان متكافئتان:

1 - $A \subseteq B$.

2 - أياً كانت $P \in A$ فإن $P \in B$.

البرهــــان.

لنفرض أن $A = \langle A_1, A_2, \{x\} \rangle , B = \langle B_1, B_2, \{x\} \rangle$ حيث إن A_1, A_2, B_1, B_2 مجموعات جزئية غير خالية من X .

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن $A\subseteq B$، عندئذ فإن $A_1\subseteq B_1,\, A_2\subseteq B_2$. أياً كانت $P\in A$ فإن $P\subseteq A$ حسب العريف وبالتالي حسب التمهيدية $(2-4)(1)$ فإن $P\subseteq B$ وهذا يبين أن $P\in B$.

$(2)\Leftarrow(1)$. أياً كان $x_1\in A_1$ و $x_2\in A_2$، عندئذ فإن $P=\langle\{x_1\},\{x_2\},\{x\}\rangle\in A$ ولما كان حسب الفرض أن $P\in B$ فإن $x_1\in B_1$ و $x_2\in B_2$ وهذا يبين أن $A\subseteq B$. ◊

بناءً على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجـــة.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x\in X$. لنفرض أن $A,B\in Ncs_1(X,X,\{x\})$، حيث إن:

$$A=\langle A_1,A_2,\{x\}\rangle,\ B=\langle B_1,B_2,\{x\}\rangle$$

وإن A_1,A_2,B_1,B_2 مجموعات جزئية غير خالية من X. عندئذ فإن:

1 – لما كان $A,B\subseteq A\cup B$، عندئذ حسب المبرهنة $(2-4)(6)$ فإنه أياً كان $P\in A$ و $Q\in B$ فإن $Q,P\in A\cup B$.

2 – إذا كان $A_1\cap B_1\neq\phi$ و $A_2\cap B_2\neq\phi$، عندئذ لما كان $A\cap B\subseteq A,B$ وذلك حسب المبرهنة $(2-4)(6)$ فإنه أياً كانت $P\in A\cap B$ فإن $P\in A$ و $P\in B$.

مبرهنـــة 2-9.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x\in X$. لنفرض أن $A,B\in Ncs_1(X,X,\{x\})$. حيث إن:

$$A=\langle A_1,A_2,\{x\}\rangle,\ B=\langle B_1,B_2,\{x\}\rangle$$

وإن A_1,A_2,B_1,B_2 مجموعات جزئية غير خالية من X. عندئذ القضايا الآتية متكافئة:

1 – $A=B$.

2 – $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$.

3 – أياً كانت $P\in Ncp(X)$ فإن $P\in A$ عندما وفقط عندما $P\in B$.

البرهـــان.

ينتج مباشرة من المبرهنة (2−7) والمبرهنة (2−8). ◊

بناءً على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجـــة.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x \in X$. لنفرض أن $A, B \in Ncs_1(X, X, \{x\})$، حيث إن:

$$A = \langle A_1, A_2, \{x\} \rangle , B = \langle B_1, B_2, \{x\} \rangle$$

وإن A_1, A_2, B_1, B_2 مجموعات جزئية غير خالية من X. عندئذ فإن:

1 − إذا كانت $\Im = \{P_j\}_{j \in J}$ أسرة من النقاط النيتروسوفية الكلاسيكية على X والتي كل منها تنتمي إما إلى A أو إلى B فإن $A \cup B = \cup_{j \in J} P_j$، بمعنى آخر وقياساً على المجموعات الكلاسيكية إن:

$$A \cup B = \{P : P \in A \vee P \in B\}$$

2 − إذا كان $A_1 \cap B_1 \neq \phi$ و $A_2 \cap B_2 \neq \phi$ وكانت $\Im' = \{P'_j\}_{j \in J}$ أسرة من النقاط النيتروسوفية الكلاسيكية على المجموعة X والتي كل منها تنتمي إلى A و إلى B بآن واحد فإن $A \cap B = \cup_{j \in J} P_j$، بمعنى آخر وقياساً على المجموعات الكلاسيكية إن:

$$A \cap B = \{P' : P' \in A \wedge P' \in B\}$$

مبرهنـــة 2−10.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x \in X$. لنفرض أن $X_N = \langle X, X, \{x_3\} \rangle$، عندئذ لأجل كل $A \in Ncs_1(X, X, \{x_3\})$ القضايا الآتية صحيحة:

1 − $X_N \in Ncs_1(X, X, \{x_3\})$.

2 − $X_N \cap A = A \cap X_N = A$.

3 − $X_N \cup A = A \cup X_N = X_N$.

4 − $A \subseteq X_N$.

البرهــان.

لنفرض أن $A=\langle A_1, A_2, \{x\}\rangle$.

1 – واضح بحسب تعريف X_N .

2 – لدينا:

$$X_N \cap A=\langle X \cap A_1, X \cap A_2, \{x\}\cup\{x\}\rangle=\langle A_1, A_2, \{x\}\rangle = A$$

$$A\cap X_N =\langle A_1 \cap X, A_2 \cap X, \{x\}\cup\{x\}\rangle=\langle A_1, A_2, \{x\}\rangle = A$$

وحسب التمهيدية $(2-4)(2)$ نجد أن $X_N \cap A= A\cap X_N = A$.

3 – يتم بطريقة مماثلة كما في (2).

4 – واضح. ◊

بناءً على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة التعريف الآتـي:

تعريــف.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x\in X$. لنفرض أن $X_N \in Ncs_1(X, X,\{x\})$ حيث إن $X_N =\langle X, X, \{x\}\rangle$ ، نسمي المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية X_N المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية الشاملة في الأسرة $Ncs_1(X, X,\{x_3\})$.

مبرهنــة 2–11.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x_3 \in X$. لنفرض أن $A\in Ncs_1(X, X,\{x_3\})$ حيث إن $A=\langle A_1, A_2, \{x_3\}\rangle$. لنضع $A'=\langle A'_1, A'_2, \{x_3\}\rangle$ ، حيث إن A'_1 متمم المجموعة A_1 و A'_2 متمم المجموعة A_2 . عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1 – $A'\in Ncs_1(X, X,\{x\})$.

2 – $A\cup A' = A'\cup A = X_N$.

3 – $A\cap A' = A'\cap A = \phi_N$.

البرهـان.

1 – واضح بحسب تعريف A' .

2 – لما كانت A'_1 متمم المجموعة A_1 و A'_2 متمم المجموعة A_2 ، عندئذ فإن:

$$A_1 \cup A_1' = A_1' \cup A_1 = X$$
$$. A_2 \cup A_2' = A_2' \cup A_2 = X$$

ومنه فإن:

$$A \cup A' = \langle A_1 \cup A_1', A_2 \cup A_2', \{x_3\} \cap \{x_3\} \rangle =$$
$$= \langle X, X, \{x_3\} \rangle = X_N$$

وبطريقة مشابهة نجد أن $A' \cup A = X_N$.

3 – لما كانت المجموعة A_1' متمم المجموعة A_1 و A_2' متمم المجموعة A_2 ، عندئذ فإن:

$$A_1 \cap A_1' = A_1' \cap A_1 = \phi$$
$$A_2 \cap A_2' = A_2' \cap A_2 = \phi$$

ومنه فإن:

$$A \cap A' = \langle A_1 \cap A_1', A_2 \cap A_2', \{x_3\} \cup \{x_3\} \rangle =$$
$$= \langle \phi, \phi, \{x_3\} \rangle = \phi_N$$

وبطريقة مشابهة نجد أن $A' \cap A = \phi_N$. ◊

بناءً على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة التعريف الآتي:

تعريــف.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x_3 \in X$. لنفرض أن $A \in Ncs_1(X, X, \{x_3\})$ حيث إن $A = \langle A_1, A_2, \{x_3\} \rangle$ ، نسمي المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية $A' = \langle A_1', A_2', \{x_3\} \rangle$ متمم المجموعة النيتروسوفية الكلاسيكية A .

مبرهنـــة 2-12.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x \in X$. لنفرض أن $A, B \in Ncs_1(X, X, \{x\})$. عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1 - $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

2 - $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

البرهــــان.

لنفرض أن $A=\langle A_1, A_2, \{x\}\rangle$, $B=\langle B_1, B_2, \{x\}\rangle$ حيث إن A_1, A_2, B_1, B_2 مجموعات جزئية من X . عندئذ لما كان:

$$(A_i \cap B_i)' = A_i' \cup B_i' \quad i=1,2$$

$$(A_i \cup B_i)' = A_i' \cap B_i' \quad i=1,2$$

نجد بسهولة أن $(A\cup B)' = A' \cap B'$ وأن $(A\cap B)' = A' \cup B'$. ◊

مبرهنـــة 2−13.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x \in X$. عندئذ فإن الأسرة $Ncs_1(X, X, \{x\})$ تشكل جبر بول بالنسبة إلى الاجتماع $\cup$ والتقاطع $\cap$.

البرهـــان.

ينتج مباشرة حسب التمهيدية (2−4)(2 و3 و4) والمبرهنة (2−5)(2) والمبرهنة (2−10)(2) والمبرهنة (2−11)(2 و3). ◊

ملاحظـــة.

لتكن X مجموعة غير خالية و $x_1, x_2 \in X$. عندئذ يمكننا بشكل مشابه لما سبق إثبات صحة القضايا الآتية:

1 − الأسرة $Ncs_1(X, X, \phi)$ تشكل جبر بول بالنسبة إلى الاجتماع $\cup$ والتقاطع $\cap$ حيث إن:

$$N_X = \langle X, X, \phi\rangle \text{ و } \phi_N = \langle \phi, \phi, \phi\rangle$$

وأياً كان $A \in Ncs_1(X, X, \phi)$ حيث إن $A=\langle A_1, A_2, \phi\rangle$ فإن:

$$A' = \langle A_1', A_2', \phi\rangle .$$

2 − الأسرة $Ncs_2(X, \{x_1\}, \{x_2\})$ تشكل جبر بول بالنسبة إلى الاجتماع $\cup$ والتقاطع $\cap$ حيث إن:

$$N_X = \langle X, \{x_1\}, \{x_2\}\rangle \text{ و } \phi_N = \langle \phi, \{x_1\}, \{x_2\}\rangle$$

وأياً كان $A \in Ncs_2(X, \{x_1\}, \{x_2\})$ حيث إن $A=\langle A_1, \{x_1\}, \{x_2\}\rangle$ فإن:

$$A' = \langle A_1', \{x_1\}, \{x_2\}\rangle .$$

3 – الأسرة $Ncs_2(X,\{x_1\},\phi)$ تشكل جبر بول بالنسبة إلى الاجتماع $\cup$ والتقاطع $\cap$ حيث إن:

$$N_X = \langle X,\{x_1\},\phi\rangle \text{ و } \phi_N = \langle \phi,\{x_1\},\phi\rangle$$

وأياً كان $A \in Ncs_2(X,\{x_1\},\phi)$ حيث إن $A = \langle A_1,\{x_1\},\phi\rangle$ فإن:

. $A' = \langle A_1',\{x_1\},\phi\rangle$

4 – الأسرة $Ncs_2(X,\phi,\{x_2\})$ تشكل جبر بول بالنسبة إلى الاجتماع $\cup$ والتقاطع $\cap$ حيث إن:

$$N_X = \langle X,\phi,\{x_2\}\rangle \text{ و } \phi_N = \langle \phi,\phi,\{x_2\}\rangle$$

وأياً كان $A \in Ncs_2(X,\phi,\{x_2\})$ حيث إن $A = \langle A_1,\phi,\{x_2\}\rangle$ فإن:

. $A' = \langle A_1',\phi,\{x_2\}\rangle$

5 – الأسرة $Ncs_2(X,\phi,\phi)$ تشكل جبر بول بالنسبة إلى الاجتماع $\cup$ والتقاطع $\cap$ حيث إن:

$$N_X = \langle X,\phi,\phi\rangle \text{ و } \phi_N = \langle \phi,\phi,\phi\rangle$$

وأياً كان $A \in Ncs_2(X,\phi,\phi)$ حيث إن $A = \langle A_1,\phi,\phi\rangle$ فإن $A' = \langle A_1',\phi,\phi\rangle$.

المراجع العلميـة.

[1] – Ashbacher, C., " Introduction to Logic", American Research Press. Rehoboth. (2002).

[2] – Atanassov, K., " Intuitionistic Fuzzy sets ", V. Sgurev, Ed., VII., ITKR'S Session, Sofia (1983).

[3] – Hanafy, I. and Salama, A. and Mahfous, M. " Neutrosophic Classical Events and Its Probability ", IJMCAR. V. 3, (2013), pp. 171 – 178.

[4] – Hur, K. and Lim, P. and Lee, J. and Kim, J. " The Category of Neutrosophic Crisp Sets ", AFMI. V. 14, N. 1, (2017), pp. 43 – 54.

[5] – Samarandache, F.,"A Unifying Field Logics Neutrosophy : Neutrosophic Probability, Set and Logic", American Research Press. Rehoboth. (1998).

[6] – Samarandache, F. " Neutrosophic Overset, Neutrosophic Underset and Neutrosophic offset ", Pons Editions, Brussells (2016).

[7] – Salama, A. and Samarandache, F., " Neutrosophic Crisp Set Theory ", Educational Publisher Ohio. Columbus. (2015).

[8] – Salama, A. and Broumi, S and Samarandache, F., " Neutrosophic Crisp Open Set and Neutrosophic Crisp Continuity via Neutrosophic Crisp Ideals ", IJMCAR. V. 3, (2014), pp. 1 – 8.

[9] – Salama, A. and Broumi, S and Samarandache, F., " Some Types of Neutrosophic Crisp Set and Neutrosophic Crisp Relations ", IJIEEB, (2014).

[10] – Tarski, A., " Introduction to Logic ", Oxford University Press. (1941).

[11] – Wang, H. and Samarandache, F. and Zhang, Y.,"Single Valued Neutrosophic Sets ", Review of the Air Force Academy. N. 16, (2010), pp. 10 – 14.

[12] – Zadeh L. A. " Fuzzy Sets ", Information and Control. V.8, (1965), pp. 338 – 353.