

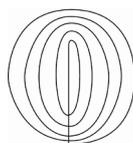
Versão PDF da entrada

ABSTRACTA

da EDIÇÃO DE 2014 do

COMPÊNDIO EM LINHA
DE PROBLEMAS DE FILOSOFIA ANALÍTICA

2012-2015 FCT Project PTDC/FIL-FIL/121209/2010



Editado por
João Branquinho e Ricardo Santos

ISBN: 978-989-8553-22-5

Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica
Copyright © 2014 do editor
Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa
Alameda da Universidade, Campo Grande, 1600-214 Lisboa

Abstracta
Copyright © 2014 do autor
Gonçalo Santos

Todos os direitos reservados

Resumo

A noção de *objecto abstracto* desempenha um papel central em diferentes debates filosóficos contemporâneos, da metafísica à estética, passando pela filosofia da linguagem. A sua origem está contudo relacionada com a filosofia da matemática e em particular, com o trabalho de Frege nos fundamentos da aritmética. O nosso primeiro objectivo será assim o de explicar o contributo desta noção para o entendimento Fregeano da realidade matemática. Veremos também que, em virtude de certas dificuldades inerentes ao projeto Fregeano, a dada altura a natureza do universo matemático passou a ser entendida nos termos da chamada *teoria dos conjuntos*. Com este material à nossa disposição, podemos então discutir o papel desempenhado pela noção de *objecto abstracto* em certos debates filosóficos contemporâneos. Em particular, procuraremos ilustrar o interesse actual da noção, discutindo a distinção *abstracto/concreto*.

Palavras-chave

Objecto lógico, objecto matemático, Logicismo, Teoria dos Conjuntos, objecto concreto

Abstract

The notion of *abstract object* plays a central role in different philosophical disciplines, such as metaphysics, aesthetics or the philosophy of language. At its origin, this notion is however associated with the philosophy of mathematics and in particular, with Frege's work on the foundations of arithmetic. Our first goal will thus be that of explaining the role played by the notion on the Fregean understanding of mathematics. We will also see that the Fregean project came across certain difficulties and that as a consequence of these, the set theoretical understanding of the mathematical realm became more widely accepted. With this background material at our disposal, we can then begin discussing the role that abstract objects play in certain contemporary philosophical debates. Namely, we will illustrate the importance of the notion, by discussing an attempt to draw a distinction between abstract and concrete objects.

Keywords

Logical object, mathematical object, Logicism, Set Theory, concrete object

Abstracta

1 A noção de objecto lógico

A noção de *objecto abstracto* é, em termos filosóficos, relativamente recente, não desempenhando um papel significativo na discussão filosófica anterior ao século passado. É aliás difícil imaginar como é que essa discussão se poderia processar antes do trabalho de Frege, tal foi o contributo deste autor para a definição dos termos nos quais se desenvolve a discussão contemporânea. Esse autor vai assim ser o ponto de partida do presente trabalho. Como a literatura no tema é hoje em dia extremamente abundante, a presente entrada não pode ser exaustiva no seu tratamento da noção. Os seus principais objectivos são apenas explicar o interesse filosófico de *objecto abstracto* e descrever a evolução no modo como se entendem aqueles que, já para Frege, são os casos paradigmáticos de objectos abstractos. Nomeadamente, os objectos matemáticos.

Como veremos na próxima secção, para Frege, os objectos matemáticos são em última análise objectos lógicos. Esta tese é porém a conclusão de uma história e para percebermos como é que se pode chegar aí, devemos começar por descrever a concepção Fregeana da lógica. Um dos aspectos distintivos esta concepção corresponde ao modo como Frege entende aquela que é suposta ser uma das características definidoras da lógica. A saber, a sua *generalidade*. A lógica pode dizer-se geral na medida em que ela se aplica a todas as coisas. As leis da lógica não são apenas válidas quando aplicadas a uma colecção restricta de objectos. Elas são válidas quando aplicadas a qualquer colecção de objectos.

Tradicionalmente, outra das características atribuídas à lógica é a sua *formalidade*. A lógica pode dizer-se *formal* na medida em que ela abstrai de todo o conteúdo semântico associado ao nosso uso da linguagem e por meio do qual nos referimos aos objectos no mundo. Se juntarmos generalidade com formalidade, segue-se que a lógica define as formas válidas para podermos estabelecer verdades acerca de absolutamente todos os objectos. No entanto, a lógica ela mesma não estabelece quaisquer verdades acerca de quaisquer objectos.

Frege rompe com esta tradição, negando o carácter formal da

lógica. Mais exactamente, ele defende que certas expressões lógicas evidenciam um comportamento semântico semelhante ao das expressões não lógicas e que conseqüentemente, a lógica não pode abstrair do conteúdo semântico associado a essas expressões. E como ela não pode abstrair destes conteúdos, segue-se que tal como as outras ciências, a lógica também estabelece verdades acerca de certos objectos.¹

Segundo Frege, tudo isto se segue do carácter absolutamente geral da lógica. Para substanciar esta última afirmação, Frege precisa porém de desenvolver um entendimento particular da generalidade da lógica. Isto porque, tal como descrita acima, esta generalidade não aparece imediatamente associada ao estabelecimento de verdades acerca de objectos. Na próxima subsecção, procuraremos descrever o entendimento da generalidade associado à concepção Fregeana da lógica.

1.1 *A generalidade da lógica*

As ciências da natureza procuram estabelecer as leis da natureza, as quais se aplicam a certos objectos. Já a lógica procura estabelecer as leis da lógica, as quais se aplicam a toda e qualquer colecção de objectos. Podem estas leis ser equiparadas? Uma dificuldade inicial deriva do facto de que, ao passo que as primeiras se aplicam a certos objectos, o mesmo não parece acontecer com as segundas. Isto é, dado que as leis da lógica permanecem válidas independentemente da colecção de objectos em questão, elas parecem não ser aplicáveis a nenhuns objectos em particular. Para Frege, contudo, esta aparência é enganadora. Ainda que à primeira vista tal não pareça ser o caso, tal como as leis da natureza, as leis da lógica também se aplicam a

¹ Uma linguagem com conteúdo semântico é habitualmente descrita como uma *linguagem interpretada*. Ao defender que a lógica possui uma linguagem interpretada, Frege entra particularmente em desacordo com Hilbert, o qual defendia precisamente o oposto. Como consequência deste desacordo, Frege e Hilbert mantiveram um aceso debate acerca da forma correcta de entender o papel dos axiomas de uma teoria matemática. Este debate possui implicações profundas para o nosso entendimento filosófico da lógica e o leitor que deseje aprender mais sobre o assunto, encontrará no trabalho de Blanchette (2007) uma excelente introdução.

certos objectos. Vejamos então como é que Frege procurou, num certo sentido, entender as leis da lógica como as mais gerais de todas as leis da natureza.

Dizemos que uma dada afirmação é uma *lei*, se ela satisfaz um dos dois seguintes requisitos: a afirmação descreve uma certa regularidade na ordem das coisas (normalmente possuindo um elevado valor explicativo relativamente a cenários contrafactuais) ou a afirmação prescreve aquilo que nós devemos fazer, fornecendo um critério para a avaliação da nossa conduta como correcta ou incorrecta. Às afirmações que satisfazem o primeiro requisito chamamos *leis descritivas*. Às afirmações que satisfazem o segundo requisito chamamos *leis normativas*. As chamadas *leis da natureza* são supostas satisfazer ambos os requisitos.

Tome-se uma lei da física, por exemplo. Ela diz-se descritiva na medida em que descreve uma certa regularidade no comportamento dos objectos físicos (tentando assim explicar porque é que, em determinadas situações, eles se comportam de uma certa maneira e não de outra). Simultaneamente, essa lei diz-se normativa na medida em que introduz prescrições para uma pessoa que pense acerca de objectos físicos. Nomeadamente, na medida em que uma pessoa pensa acerca de objectos físicos, essa actividade deve ser passível de avaliação à luz das leis da física.

Para Frege, tal como as leis da natureza, as leis da lógica também satisfazem ambos os requisitos. Nomeadamente, se as leis da física se dizem normativas por fornecer critérios que nos permitem avaliar o nosso pensamento acerca dos objectos físicos como correcto ou incorrecto, as leis da lógica também se podem dizer normativas ao fornecer os critérios que nos permitem avaliar o pensamento em geral como correcto ou incorrecto. Por outro lado, poderá não parecer tão simples perceber porque é que as leis da lógica também se dizem descritivas. Afinal, que objectos é que elas descrevem e que valor explicativo é que elas possuem relativamente a cenários contrafactuais?

Para responder a esta última pergunta, devemos recordar a tese Fregeana mencionada anteriormente. Nomeadamente, de acordo com Frege os objectos matemáticos são, em última análise, objectos lógicos. Esta posição vai ser analisada com mais detalhe na próxima secção. Contudo, podemos desde já notar que, supondo a verdade de uma tal tese, apesar das aparências, a lógica acaba por também des-

crever o comportamento de certos objectos. Adicionalmente, essa suposição permite-nos atribuir valor explicativo à lógica no que diz respeito a cenários contrafactuais. Isto porque, se por um lado os físicos podem considerar outros mundos possíveis, com leis físicas diferentes das actuais, por outro, ninguém pode considerar um mundo no qual as leis da matemática não se verificam.² Portanto, ao explicar a necessidade das leis que regulam a matemática, a lógica também acaba por possuir um valor explicativo no que diz respeito a cenários contrafactuais. Nomeadamente, a lógica explica porque é que não podem existir cenários matemáticos deste tipo. Neste sentido, podemos então dizer que as leis da lógica devem ser entendidas como as mais gerais de todas as leis da natureza.

2 Números como extensões de conceitos

A distinção entre *verdades analíticas* e *verdades sintéticas* será o nosso ponto de partida para a discussão da tese Fregeana de acordo com a qual os objectos da matemática são, em última análise, objectos lógicos. Como veremos, para Frege, todas as verdades matemáticas são verdades analíticas. De modo grosseiro, as verdades aritméticas podem ser explicadas em termos do significado de *número natural*, o que hipoteticamente permitiria uma redução da aritmética à lógica. Esta é aliás a premissa central do chamado programa *Logicista* Fregeano.

A distinção *analítico/sintético* foi introduzida por Kant com o intuito de marcar a diferença que intuitivamente parece existir entre juízos como “Todos os gorilas são primatas” e “Alguns primatas vivem em cativeiro”. Uma forma comum de explicar esta diferença consiste em fazer notar que, para conhecer o valor de verdade da primeira frase, basta conhecer o significado dos conceitos que nela ocorrem. Isto é, se alguém conhece o significado de *primata* e *gori-*

² A afirmação de que ninguém pode considerar um mundo no qual as leis da matemática não se verificam, vê-se justificada pelo facto de que a suposição da falsidade de verdades matemáticas conduz a conclusões absurdas. Por exemplo, se supomos uma falsidade matemática como $0=1$, vemos que qualquer coisa se pode demonstrar. Como ilustração, considere-se a seguinte demonstração da existência de Deus. Suponhamos que $0=1$ e que Deus não existe. Então o número de Deus é igual a 0. Como $0=1$, o número de Deus também é igual a 1. Mas então segue-se que Deus existe.

la, então essa pessoa sabe que a frase em questão é verdadeira. Por outro lado, para conhecer o valor de verdade da segunda frase, não basta conhecer o significado dos conceitos que nela ocorrem. Adicionalmente, é necessário verificar se a realidade é tal como a frase em questão a descreve. Dada esta diferença, Kant sugeriu chamar à primeira frase uma *verdade analítica* e à segunda uma *verdade sintética*.

Antes de descrevermos o modo como Frege entende a analiticidade das verdades aritméticas, deve ser salientado que esta proposta é acompanhada por um entendimento particular da noção de analiticidade.³ Nomeadamente, para Frege, se formos capazes de demonstrar que uma dada verdade se pode demonstrar logicamente a partir dos conceitos associados a uma verdade mais primitiva, segue-se que a primeira é uma verdade analítica se a segunda também o for. Portanto, se formos capazes de demonstrar que as verdades aritméticas se podem demonstrar a partir de verdades lógicas, como as últimas são supostas serem analíticas, as primeiras também o serão.⁴

Começemos então por rever algumas das noções e distinções introduzidas por Frege. Provavelmente a mais importante para os nossos propósitos, é a noção de que os conceitos são os correlatos ontológicos dos predicados. Dito de outra maneira, de acordo com Frege, as expressões predicativas denotam conceitos. Por exemplo, se removermos ‘Koko’ de:⁵

³ A noção de *analiticidade* é entendida por Kant e Frege de modos ligeiramente diferentes. O leitor que deseja saber mais acerca das diferenças entre a abordagem Kantiana e Fregeana à analiticidade (e noções associadas), encontra no trabalho de MacFarlane (2002) uma discussão pormenorizada.

⁴ Ainda que os detalhes técnicos do programa Logicista não sejam discutidos no presente trabalho, valerá ainda assim a pena salientar o seguinte aspecto. Como as verdades da aritmética são infinitas, é impossível demonstrar caso a caso que todas elas se seguem de verdades lógicas. Podemos contudo formular a aritmética em termos de um número finito de axiomas (obtendo a teoria habitualmente conhecida como *aritmética de Peano*), de onde se seguem todas as verdades aritméticas. Portanto, podemos demonstrar que toda a aritmética se reduz à lógica, se formos capazes de demonstrar caso a caso que todos os axiomas se seguem de verdades lógicas. Foi esta a abordagem ao problema que Frege procurou implementar.

⁵ Embora tal seja apenas uma curiosidade, ‘Koko’ é o nome de uma famosa gorila. [http://en.wikipedia.org/wiki/Koko_\(gorilla\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Koko_(gorilla))

1. Koko é uma gorila.

obtemos o predicado “é uma gorila” o qual denota um conceito. Além desta distinção entre *predicado* e *conceito*, Frege nota adicionalmente que devemos distinguir um conceito da sua extensão, isto é, da colecção de objectos relativamente aos quais a aplicação do predicado resulta numa verdade. Embora extensões sejam objectos, os conceitos não podem ser entendidos como tal. Eles são por natureza incompletos, possuindo uma posição que deve ser ocupada. Mais exactamente, Frege entende os conceitos como funções de objectos (ou pares de objectos, triplos de objectos, ...) para valores de verdade.

Uma última distinção que devemos ter em conta é a de que, mesmo nos casos em só existe um objecto que satisfaz o predicado, não devemos identificar a extensão de um conceito com os elementos dessa extensão. Portanto, dado o predicado “é a gorila capaz de entender mais de duas mil palavras”, devemos distinguir entre o conceito que a Koko faz corresponder o verdadeiro, a colecção cujo único elemento é Koko e a Koko propriamente dita.

Com estas distinções à nossa disposição, podemos começar a descrever o programa Logicista com mais algum detalhe. Devemos ter sempre em mente que o principal objectivo deste programa é o de reduzir os objectos aritméticos a objectos lógicos. Ora, é inegável que por vezes o objecto das nossas predicções é um outro predicado. Por exemplo, é isto que acontece quando dizemos:

2. Os gorilas na jaula são dois.

Note-se que o predicado “são dois” não é verdadeiro de cada um dos gorilas na jaula. Nenhum deles é idêntico a dois. Esse predicado é antes verdade da colecção dos gorilas na jaula. Devemos pois pensar no objecto da predicção como a extensão do conceito “é um gorila na jaula”.⁶ Predicados cujo objecto de predicção é outro predicado dizem-se *predicados de segunda ordem*. Frege argumentou que os predicados numéricos são deste tipo, tendo como objecto outros predicados.⁷ Dado um tal entendimento dos predicados numéricos,

⁶ O autor agradece ao José Manuel Mestre os seus comentários e sugestões a respeito de uma formulação anterior deste ponto.

⁷ Embora um tal aspecto do programa Logicista não seja discutido no presente trabalho, deve ser salientado que, ao admitir a existência de colecções de objectos

a questão que então se coloca é como entender a extensão destes conceitos de conceitos. Para responder a esta questão, comecemos por observar que o nosso último exemplo pode ser reescrito do seguinte modo:

3. Existe um gorila na jaula e outro gorila na jaula e estes são os únicos gorilas na jaula.

Esta reformulação pode ser por sua vez ser parafraseada na linguagem lógica concebida por Frege do seguinte modo:

4. $\exists x \exists y (x \neq y \wedge Mx \wedge My \wedge \forall z (z = x \vee z = y))$

Para tornar esta abordagem mais explícita, vamos agora introduzir a noção de *operador de abstração*. Um operador de abstração é uma função que tem como valores objectos abstractos de algum tipo. Por exemplo, podemos definir uma função d que toma como argumento linhas l_1, l_2 e que tem como valores direcções $d(l_1), d(l_2)$. Se l_1, l_2 são linhas diferentes com uma mesma direcção, segue-se que $d(l_1) = d(l_2)$. Portanto, neste caso, a diferentes linhas corresponde um único objecto abstracto.

No caso numérico, o operador de abstração relevante escreve-se $\#$ e lê-se “o número de...”. Este operador toma como argumento predicados de segunda-ordem como M , tomando nesse caso o valor do número de gorilas na jaula. Adoptando o símbolo \vdash para expressar a relação de deducibilidade, podemos então dizer que:

5. $\#x Mx = 2 \vdash \exists x \exists y (x \neq y \wedge Mx \wedge My \wedge \forall z (z = x \vee z = y))$

Isto é, segue-se do número de M 's ser igual a dois, que existem dois e só dois objectos que satisfazem o predicado M . Simultaneamente, segue-se de existirem dois e só dois objectos que satisfazem o predicado M , que o número de M 's é igual a dois.

À semelhança do que acontece com linhas e direcções, podemos predicar “é idêntico a dois” de outro conceito N , se este possui o mesmo número de objectos na sua extensão. Isto é, a diferentes conceitos

no domínio de quantificação, a lógica Fregeana precisa de admitir variáveis de segunda-ordem. Assim, enquanto que as variáveis de primeira-ordem tomam objectos como valores, as variáveis de segunda-ordem tomam colecções de objectos como valores. Para o leitor interessado em saber mais sobre lógica de ordem-superior, um bom ponto de partida é a obra de Shapiro (1991).

pode corresponder um mesmo número. Mais rigorosamente, a ideia é a de que podemos definir uma relação de *equinumerosidade* R que a cada gorila na extensão de M faz corresponder um certo elemento da extensão de N e que a cada elemento na extensão de N , faz corresponder um certo gorila na extensão de M . Quando tal acontece, dizemos que existe uma *correspondência biunívoca* entre N e M e que estes conceitos satisfazem a relação R .

Esta relação de equinumerosidade tem um papel central num importante princípio logicista habitualmente conhecido como *Princípio de Hume*:⁸

$$6. \quad \#xMx = \#xNx \leftrightarrow \exists R(R \text{ faz corresponder 1-1 } M\text{'s e } N\text{'s})$$

Fazemos agora notar que R possui três características importantes. Nomeadamente, ela é reflexiva (dado que qualquer conceito é equinumérico consigo mesmo), simétrica (dado que se um conceito é equinumérico com outro, então o segundo é equinumérico com o primeiro) e transitiva (dado que se um conceito é equinumérico com um segundo e o segundo é equinumérico com um terceiro, segue-se que o primeiro é equinumérico com o terceiro). Relações que satisfazem estas três características designam-se de *relações de equivalência*.

Quando aplicada a um domínio de objectos, uma relação de equivalência efectua aquilo que se designa como uma *partição do domínio*. Informalmente, esta operação divide o domínio em distintas partes (habitualmente designadas de *classes de equivalência*), com os elementos de uma parte a relacionarem-se com todos os outros elementos dessa parte, ao mesmo tempo que não se relacionam com nenhum elemento de qualquer outra parte. No caso em discussão, a

⁸ Como veremos de seguida, o paradoxo de Russell demonstra que o projecto Logicista, tal como concebido por Frege, não pode ser executado. Em anos mais recentes, diferentes autores (entre os quais Hale and Wright (2001)) têm procurado desenvolver uma nova versão do logicismo conhecida como *neologicismo*. O princípio de Hume assume um papel central no neo-logicismo, dado que ele é aí tomado como uma verdade lógica. Por um lado, este princípio permite aos neo-logicistas a derivação dos axiomas de Peano (um resultado conhecido como *teorema de Frege*), ao mesmo tempo que evita o paradoxo de Russell. Por outro, é discutível que o Princípio de Hume possa ser considerado como um princípio lógico, entre outras coisas, porque implica sérios compromissos ontológicos. O leitor que procura uma análise crítica do programa neo-logicista pode começar pelo trabalho de Boolos (1997).

relação de equinumerosidade efectua uma partição do domínio de conceitos, sendo que os conceitos de uma parte são equinumericos com todos os outros conceitos dessa parte, mas com nenhum dos conceitos em nenhuma das outras partes.

Esta observação é crucial para perceber a definição Fregeana de número. Isto porque, com a partição efectuada pela relação de equinumerosidade, obtemos todos os conceitos com um elemento na sua extensão reunidos numa só parte, todos os conceitos com dois elementos na sua extensão reunidos noutra parte, todos os conceitos com três elementos na sua extensão reunidos ainda noutra parte e por aí adiante. Frege propôs então identificar os números naturais um, dois, três e por aí adiante com essas partes do domínio de conceitos. Isto é, em geral:

7. $\#xMx = a$ extensão do conceito de ser equinumerico a M .

Esta imagem do universo de conceitos está na base do projecto logicista, o qual, como já foi mencionado, procurava entender os objectos matemáticos em termos puramente lógicos. Caso este projecto fosse concluído com sucesso, ele forneceria uma razão para pensarmos que os objectos abstractos podem ser entendidos como existindo de forma tão real quanto os objectos concretos. Objectos abstractos e concretos existiriam assim lado a lado, por assim dizer, na suposta colecção de absolutamente tudo.

À primeira vista, uma tal concepção de objecto abstracto pode parecer demasiado literal. Afinal, apesar de falarmos frequentemente do número de variados tipos de objectos concretos, não parece que possamos dizer ter o mesmo número de interacção com objectos abstractos. Não só não os detectamos através dos sentidos, como os nossos instrumentos de observação mais refinados não os detectam. Nem sequer parece que o possam vir a fazer. Pois onde quer que os números naturais possam existir, é certos que eles não vão ser detectados nem ao nível microscópico nem ao nível macroscópico.

Ao mesmo tempo, uma tal reacção à imagem do universo de conceitos Fregeanos pode ser consequência de uma visão demasiado simplista da realidade. Afinal, é inegável que apesar de os nossos corpos serem compostos pela mesma matéria (moléculas, átomos, partículas sub-atómicas...) que compõe as estrelas, falamos de indivíduos humanos como existindo lado a lado, por assim dizer, da matéria que

os compõe. Num certo sentido, é como se o próprio concreto fosse composto por diferentes níveis de abstracção. E se aceitarmos esta visão menos simplista da realidade, porquê rejeitar a existência de um nível de abstracção adicional, onde os números naturais existem numa relação com os humanos, idêntica àquela em que os seres humanos existem em relação à matéria que os compõe?

Apesar do inegável interesse destas questões, não vamos continuar a discutir-las na presente entrada. Continuaremos isso sim a explorar uma última e importante consequência do projecto logicista. É que como veremos no início da próxima secção, é fácil demonstrar que este projecto conduz a uma contradição e, dado o propósito logicista de fornecer um fundamento sólido para a matemática, isto representa um problema significativo. Na próxima secção veremos como dar conta deste problema, através da descrição de uma concepção alternativa de objectos abstractos.

3 Números como conjuntos

Para fins expositivos, convém introduzir a seguinte convenção terminológica e notacional. Em seguida, designamos *extensões* como *conjuntos* e como tal, dado um conceito como o de ser um gorila, falamos do conjunto de todos os objectos que caem sob esse conceito, i.e., do conjunto de todos os gorilas. Em símbolos, escrevemos $\{x: x \text{ é um gorila}\}$ e lemos, *o conjunto dos x 's tais que x é um gorila*.

Acabámos de ver que Frege propõe entender a realidade dos números em termos da realidade dos conceitos numéricos. Em particular, vimos que esse projecto visava fundar a aritmética numa teoria geral de conjuntos. Os objectos matemáticos seriam em última análise analisados em termos de conjuntos e, por hipótese, as verdades matemáticas poderiam ser deduzidas a partir de princípios puramente lógicos acerca de conjuntos. Ora, um dos princípios identificados por Frege é a infamosa Lei Básica V, segundo qual, para quaisquer fórmulas Φ e Ψ da nossa linguagem:

$$8. \quad \{x: \Phi x\} = \{x: \Psi x\} \leftrightarrow \forall x(\Phi x \leftrightarrow \Psi x)$$

Esta lei diz-nos que se o conjunto dos Φ 's é idêntico ao conjunto dos Ψ 's, então todo o Φ é Ψ e todo o Ψ é Φ e que se todo o Φ é Ψ e todo o Ψ é Φ então o conjunto dos Φ 's é idêntico ao conjunto dos

Ψ 's. Como se pode ver facilmente, esta lei tem como consequência a existência de conjuntos para qualquer fórmula Φ . Dito de outra forma, de acordo com a Lei Básica V, para qualquer fórmula Φ , existe um conjunto com todos os objectos que satisfazem essa fórmula.⁹ Como veremos em seguida, esta lei revelou-se demasiado liberal, permitindo a existência de certos conjuntos “paradoxais”.

Para vermos como se deriva o paradoxo de Russell a partir da concepção Fregeana de conjuntos, note-se primeiro que alguns conceitos se aplicam a conjuntos e que as extensões de tais conceitos, são conjuntos que contêm outros conjuntos como elementos.¹⁰ Por exemplo, considere-se o conceito *conjunto finito*. A sua extensão F é o conjunto cujos elementos são conjuntos como um número finito de elementos. Simbolicamente:

$$\bullet \quad F = \{x: x \text{ é um conjunto finito}\}$$

Os elementos de F contêm assim, por exemplo, o conjunto de todos os gorilas na Terra, assim como o conjunto de todas as estrelas na nossa galáxia. Já o conjunto dos números naturais não pertence a F . Este conjunto cai antes debaixo do conceito de *conjunto infinito*, sendo portanto um elemento de:

$$\bullet \quad I = \{x: x \text{ é um conjunto infinito}\}.$$

Note-se agora que, apesar dos elementos de F serem conjuntos finitos, o próprio F é um conjunto infinito, dado que entre os seus elementos encontram-se todos os conjuntos na lista infinita $\{0\}, \{1\}$,

⁹ A demonstração consiste basicamente em explorar a direcção da direita para a esquerda do bicondicional, tendo como premissa a verdade lógica $\forall x(\Phi x \leftrightarrow \Phi x)$. Daí, por eliminação da implicação, segue-se $\{x: \Phi x\} = \{x: \Phi x\}$, o que equivale a dizer que existe um conjunto dos Φ 's.

¹⁰ Como mencionado no início desta secção, com vista ao material a ser discutido no resto deste trabalho, convencionámos começar a falar de *extensões* em termos de *conjuntos*. Isto pode soar um pouco estranho, na medida em que não é habitual falar-se da teoria Fregeana nestes termos. Note-se contudo que a chamada *teoria ingénua dos conjuntos* possui várias semelhanças com a teoria Fregeana de extensões, entre as quais, um axioma equivalente à Lei V. Tal como a Lei V, este axioma, habitualmente conhecido como o *axioma ingénuo da compreensão*, é demasiado liberal relativamente à existência de conjuntos, nomeadamente, ao permitir a existência de certos conjuntos “paradoxais”.

{2}, Assim, F não é um membro de si mesmo, mas antes de I . Em símbolos, escrevemos $F \notin F$ e $F \in I$. Por sua vez, o conjunto I possui como elementos, os conjuntos da lista infinita $\{0, 1, 2, \dots\}$, $\{1, 2, 3, \dots\}$, $\{2, 3, 4, \dots\}, \dots$, pelo que I é um conjunto que é ele mesmo infinito. Como tal, $I \in I$.

Vemos assim que, de acordo com a concepção de conjuntos empregue por Frege, alguns conjuntos são elementos deles mesmos, enquanto que outros não o são. Considere-se então o conceito *conjunto que não é um membro de si mesmo* e seja R a sua extensão:

- $R = \{x: x \text{ é um conjunto e } x \notin x\}$.

Suponhamos que perguntamos agora se $R \in R$. Por definição, R é um membro de R se e só se ele cai sobre o conceito conjunto que não é um elemento de si mesmo. Simbolicamente:

- $R \in R$ se e só se $R \notin R$.

Segue-se então que, quer R seja um elemento dele mesmo quer não, as condições de verdade da bicondicional nunca podem ser satisfeitas. Ou seja, a suposição de que o conceito *conjunto que não é um elemento de si mesmo* tem uma extensão, conduz a uma contradição, pelo que o projecto Logicista Fregeano falha como tentativa de fornecer um fundamento para a aritmética.

Este falhanço significa que a lógica, tal como concebida por Frege, é incapaz de garantir a consistência da matemática. Deste resultado não se segue contudo a inconsistência da matemática. Em particular, se pensamos que a matemática necessita de um fundamento, nada nos impede de procurar uma alternativa ao Logicismo. No que resta desta secção, procuraremos introduzir de modo informal aquela que é habitualmente adoptada como a teoria fundadora da matemática. Nomeadamente, falaremos brevemente da teoria de conjuntos Zermelo-Fraenkel (daqui em diante **ZF**).¹¹

Esta teoria pode ser descrita de duas formas. Por um lado, **ZF** é a teoria do infinito actual.¹² Por outro, **ZF** é a teoria na qual todas

¹¹ Existem várias alternativas para o leitor interessado numa introdução matemática a esta disciplina. Se o autor deve recomendar apenas uma, esta será a obra de Devlin (1979).

¹² A distinção entre *infinito actual* e *infinito potencial* basicamente correspon-

as outras teorias matemáticas podem ser interpretadas. Este segundo sentido manifesta-se na utilização sistemática que as outras teorias matemáticas fazem de noções definidas em **ZF** (como *conjunto* e *função*, por exemplo). Em última análise, todos os objectos e operações matemáticas podem ser interpretados como conjuntos e operações em conjuntos. Devemos contudo notar que conjuntos não são objectos lógicos, num sentido Fregeano. A teoria **ZF** é uma teoria matemática que pode ser entendida como fornecendo um fundamento para a matemática, na medida em que ela define um universo de objectos abstractos suficientemente rico para interpretar todas as outras teorias matemáticas.

Neste ponto o leitor poderá perguntar-se se, depois de demonstrada a inconsistência de um projecto fundacional que faz uso da noção de *conjunto*, continua ainda assim a fazer sentido confiar noutra projecto fundacional que faz uso da mesma noção? Em particular, o que nos garante que **ZF** não nos levará a cair no mesmo erro que Frege? Esta é sem dúvida uma boa pergunta. Ela é contudo passível de ser respondida. Nomeadamente, dado que a desconfiança em torno

de a duas formas distintas de entender a colecção dos números naturais. Uma característica distintiva desta colecção é que ela é maior que qualquer colecção finita, independentemente do quão grande esta última possa ser. Assim, se uma colecção finita possui n elementos, o número de elementos da colecção dos números naturais será maior que n . A questão que então se levanta é como entender a colecção de *todos* os naturais. Uma opção seria a seguinte. Como ela não possui um número maior que todos os outros, a colecção de todos os naturais cresce indefinidamente. E se ela nunca chega a estar completa, então devemos entendê-la como meramente potencial. Basicamente, esta é a concepção de infinito potencial. Apesar de intuitivamente correcta, a teoria dos conjuntos oferece uma outra opção para entender a colecção de todos os números naturais. Em particular, a teoria dos conjuntos permite-nos mostrar que existem colecções infinitas maiores que a colecção dos números naturais (nomeadamente, a colecção dos números reais). E se há colecções maiores que a dos números naturais, então esta tem que parar de crescer depois de um certo ponto. Como tal, mesmo sem possuir um número maior que todos os outros, a colecção de todos os naturais pode ser vista como completa. Basicamente, esta é concepção de infinito actual. Apesar desta opção poder parecer contra-intuitiva, a teoria **ZF** descreve-a de forma matematicamente rigorosa. O leitor interessado em saber mais acerca da existência de colecções maiores que a dos números naturais, encontra uma introdução rigorosa e filosoficamente informada no segundo capítulo da obra de Giaquinto (2002).

de *conjunto* resulta do paradoxo de Russell, ela pode ser eliminada se formos capazes de mostrar que o mesmo argumento não levanta problemas no contexto de ZF.

Para vermos como é que ZF pode ultrapassar uma tal dificuldade, precisamos de descrever algumas propriedades adicionais de conjuntos. Com vista a um tal fim, seja A o conjunto cujos elementos são os números primos menores que 10, isto é, $A = \{2, 3, 5, 7\}$. Seja B o conjunto das soluções da equação polinomial: $x^4 - 17x^3 + 101x^2 - 247x + 210 = 0$. Como o leitor pode verificar, este polinómio possui quatro soluções: 2, 3, 5 e 7. Portanto, A e B possuem exactamente os mesmos elementos. Quando este tipo de coincidências ocorrem, dizemos que A e B são iguais. Este constitui um dos princípios fundamentais de ZF e é habitualmente conhecido como *princípio da extensionalidade*.

Princípio da extensionalidade Dois conjuntos possuem exactamente os mesmos elementos se e só se eles são iguais. Simbolicamente: $\forall z((z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y)$.

Note-se que se $a = b$, isto quer dizer que o que quer que seja verdadeiro do objecto a também é verdadeiro do objecto b . Por exemplo, se $a = b$, então é verdade que para qualquer objecto x , $x \in a$ se e só se $x \in b$ (o que corresponde à implicação da direita para a esquerda do princípio da extensionalidade).

Observemos alguns conjuntos particulares. Um conjunto pequeno seria $\{0\}$, o qual possui 0 como único elemento. E um conjunto ainda mais pequeno seria $\{\}$, o qual não possui quaisquer elementos. Este conjunto é habitualmente conhecido como *conjunto vazio*, sendo alternativamente representado pelo símbolo \emptyset . Como primeira aplicação do princípio da extensionalidade, podemos ver que \emptyset é o único conjunto nestas condições. Isto é, como os conjuntos se identificam pelos seus elementos, quaisquer conjuntos vazios são idênticos (o mesmo não acontecendo com conjuntos com um elemento, por exemplo, existindo diversos conjuntos nessas condições que não são idênticos entre si).

Consideremos algumas aplicações adicionais do princípio de extensionalidade. Primeiro veja-se que, para quaisquer objectos x e y , podemos formar o conjunto $\{x, y\}$. Como segunda aplicação do princípio da extensionalidade, note-se que $\{x, y\} = \{y, x\}$ dado que em

ambos os casos os únicos elementos são x e y . Um outro caso que vale a pena notar é o dos conjuntos $\{x, x\}$ e $\{x\}$. Dado que ambos os conjuntos possuem os mesmos elementos, segue-se por extensibilidade que $\{x, x\} = \{x\}$.

Apesar da identidade de um conjunto ser definida em termos dos seus elementos, deve-se ter em atenção que um conjunto é um objecto diferente dos seus elementos. O conjunto \emptyset ilustra este facto na perfeição, pois \emptyset é um objecto ainda que não tenha elementos. Adicionalmente, partindo de \emptyset podemos obter uma infinidade de outros conjuntos. Por exemplo, podemos obter o conjunto $\{\emptyset\}$, cujo único elemento é \emptyset , do qual obtemos $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ e por aí adiante.¹³

Outra forma de obter mais conjuntos é através de certas operações realizadas em conjuntos previamente dados. Duas operações familiares são a união e a intersecção. A *união* de dois conjuntos a e b é o conjunto $a \cup b$. Os seus elementos são todos os objectos que são elementos de a ou de b . Simbolicamente:

$$(x \in a \cup b) \leftrightarrow (x \in a \vee x \in b).$$

Por sua vez, a *intersecção* de a e b é o conjunto $a \cap b$. Os seus elementos são todos os objectos que são elementos de a e de b . Simbolicamente:

$$(x \in a \cap b) \leftrightarrow (x \in a \wedge x \in b).$$

Dizemos que os conjuntos a e b são disjuntos quando eles não possuem elementos comuns. Num tal caso:

$$a \cap b = \emptyset.$$

Por exemplo:

$$\{x, y\} \cup \{z\} = \{x, y, z\};$$

$$\{x, y\} \cap \{y, z\} = \{y\};$$

$$\{x\} \cap \emptyset = \emptyset.$$

Como vimos, dois conjuntos a e b são idênticos quando eles pos-

¹³ Tendo novamente em atenção o princípio da extensibilidade, podemos ver $\{\emptyset\} \neq \emptyset$ pois $\emptyset \in \{\emptyset\}$ mas $\emptyset \notin \emptyset$.

suem exactamente os mesmos elementos. Uma situação diferente  aquela em todos os elementos de a são elementos de b , mas existem elementos de b que não são elementos de a . Por exemplo $a = \{0\}$ e $b = \{0, 1\}$. Uma vez que todos os elementos de a pertencem a b , dizemos que a está *incluído* em b ou que a  um *subconjunto* de b e escrevemos $a \subseteq b$.

Apesar de relacionadas,  importante perceber como  que as relações de inclusão (\subseteq) e de pertenca (\in) se distinguem. Quando queremos saber se $a \in b$ temos que (ignorando os elementos de a e entendendo-o como um objecto) verificar se a está entre os elementos de b . Por outro lado, quando queremos saber se $a \subseteq b$ temos que (entendendo a como uma colecção de objectos) verificar se todos os seus elementos se encontram entre os elementos de b . Por exemplo:

$$\emptyset \subseteq \emptyset$$

$$\emptyset \notin \emptyset$$

$$\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$$

$$\{\emptyset\} \not\subseteq \{\{\emptyset\}\}$$

Uma vez clarificada esta distinção, podemos ver que qualquer conjunto possui um ou mais subconjuntos.¹⁴ Nomeadamente, \emptyset está incluído em qualquer conjunto, visto que todos os seus elementos pertencem a qualquer outro conjunto (incluindo \emptyset). Adicionalmente, dada a distinção, podemos definir outra operação para obter mais conjuntos. Assim, dado um conjunto a , obtemos um novo conjunto ao reunir todos os subconjuntos de a num único conjunto. Ao conjunto de todos os subconjuntos de a chama-mos o *conjunto potência* de a e escrevemos $\mathcal{P}(a)$. Por exemplo:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\};$$

$$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\};$$

$$\mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

¹⁴ De facto, se um conjunto a possui n elementos, então a possui 2^n subconjuntos.

Como mencionado anteriormente, para ganhar a nossa confiança enquanto fundamento da matemática, **ZF** deve ser capaz de evitar o erro do projecto logicista, demonstrando que no seu enquadramento, o argumento do paradoxo de Russell não conduz a uma contradição. Podemos agora começar a ver como é isto possível. Resumidamente, este feito é uma consequência do modo como **ZF** entende a estrutura do universo de conjuntos. De acordo com esta teoria, o universo de conjuntos estrutura-se em etapas, as quais podem ser ordenadas ao longo de uma série.

Na etapa inicial, juntamos num só conjunto todos os objectos que não são conjuntos, sendo estes habitualmente conhecidos como *elementos atómicos*. Seja então V_0 o conjunto de todos os átomos. Na segunda etapa da série, V_1 , juntamos todos os átomos com todos os conjuntos possíveis que possuem átomos como elementos. Isto é, em V_1 juntamos os átomos com os elementos do conjunto potência de V_0 . Simbolicamente:

$$V_1 = V_0 \cup \mathcal{P}(V_0).$$

A terceira etapa contém tudo aquilo que está no nível anterior, juntamente com todos os conjuntos de etapas anteriores. Isto é:

$$V_2 = V_1 \cup \mathcal{P}(V_1).$$

Obtemos assim sucessivamente $V_0, V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$, para qualquer número natural arbitrário n . Note-se porém que, apesar deste método de geração de conteúdos nos garantir a existência de um número arbitrariamente finito de conjuntos, por si só ele não é suficiente para gerar todos os conjuntos de que necessitamos. Por exemplo, os números naturais são infinitos em número pelo que, se o nosso objectivo é entender qualquer objecto matemático como um conjunto, precisamos de conseguir chegar a uma etapa que contenha um número infinito de conjuntos.

Para colmatar esta insuficiência, tomamos a união de $V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup \dots$ e colecionamos todos os conjuntos assim obtidos numa etapa V_ω . Esta etapa aparece na série previamente descrita, imediatamente após todas as etapas indexadas por um número natural. Isto é, $V_0, V_1, V_2, \dots, V_\omega$. Uma vez nesta etapa, podemos formar subconjuntos de V_ω . Em particular, como anteriormente, podemos formar $\mathcal{P}(V_\omega)$ e chegar à etapa $V_{\omega+1}$, donde podemos chegar à etapa

$V_{\omega+2}, V_{\omega+3}, \dots$. Como anteriormente, podemos chegar à etapa $V_{\omega+\omega}$, juntando todos os objectos obtidos nas etapas $V_0, V_1, V_2, \dots, V_n, \dots, V_\omega, V_{\omega+1}, V_{\omega+2}, V_{\omega+3}, \dots$. Procedendo desta forma, podemos então chegar às etapas $V_{\omega+\omega+1}, \dots, V_{\omega+\omega+\omega}, \dots, V_{\omega^\omega}, \dots$ ¹⁵

Temos assim que a série ao longo da qual se estrutura o universo de ZF é tal que, a cada etapa, podemos passar para uma etapa ulterior com mais conjuntos que a inicial. Vejamos agora como esta característica estrutural do universo se reflecte no argumento associado ao paradoxo de Russell. Suponhamos que numa certa etapa temos o conjunto de todos os conjuntos, ou mais simplesmente, que numa certa etapa temos o conjunto universal u . Seja $r = \{x \in u: x \notin x\}$. Por definição de u , $r \in u$. Mas então $r \in r \leftrightarrow r \notin r$. Como anteriormente, as condições de verdade deste bicondicional não podem ser satisfeitas. Contudo, à diferença do que acontecia antes, esta contradição é agora condicional na suposição de que em alguma etapa temos um conjunto universal. Como tal, este argumento pode ser interpretado como uma redução ao absurdo da premissa inicial e portanto, segue-se dele que em nenhuma etapa temos um conjunto universal.

Vemos assim que, o argumento que demonstra a inconsistência da compreensão Fregeana do universo matemático, quando desenvolvido no contexto da teoria ZF, torna-se numa demonstração de um facto acerca do universo de conjuntos. Como vimos, de acordo com esta teoria, o universo matemático estrutura-se ao longo de uma série de etapas. E como o argumento Russelliano mostra que não existe

¹⁵ O leitor pode eventualmente pensar que, ao passar além dos números naturais, a nossa descrição da série de etapas abarca uma fase já avançada do universo de conjuntos. Mas a verdade é que a nossa descrição apenas abarca uma fase muito precoce deste universo. Por exemplo, tal como descrito, este universo ainda não possui um número de objectos suficiente para interpretar a colecção dos números reais. Além do mais, a questão de saber onde reside exactamente uma etapa com um tal número de objectos, é tal que não admite uma resposta unívoca. Mais exactamente, essa questão é independente dos axiomas de ZF. E tal como essa questão, existem muitas outras afirmações acerca do universo de conjuntos de ZF, cujo valor de verdade não pode ser determinado apenas fazendo apelo aos axiomas da teoria. Este universo de objectos abstractos continua assim, em certa medida, desconhecido, possuindo uma infinidade de questões em aberto. Para uma introdução aos aspectos mais filosóficos da estrutura do universo de conjuntos de ZF, o leitor interessado pode consultar o artigo de Boolos (1971).

um conjunto de todos os conjuntos, isto significa que a série não possui uma última etapa, a partir da qual não existiriam mais conjuntos. Neste sentido, a teoria **ZF** pode pois ser vista como ultrapassando o obstáculo levantado pelo Paradoxo de Russell.

Este resultado parece assim demonstrar que a produção de objectos matemáticos nunca chega a um ponto a partir do qual não se podem gerar mais objectos. Isto porque a série de etapas ao longo das quais estes objectos são gerados, parece continuar indefinidamente. À luz deste facto aparente, soará porventura estranho dizer que em matemática habitualmente se fala de uma colecção de todos os conjuntos. Não acabámos nós de ver que isso implica uma contradição? Como é que poderá existir uma colecção de todos os conjuntos se **ZF** não admite um conjunto universal? Na próxima subsecção discutiremos este aspecto da teoria dos conjuntos com mais algum detalhe.

3.1 *Um universo indefinidamente extensível*

Vimos há pouco que, à luz do Paradoxo de Russell, parece que devemos entender o universo de conjuntos como uma realidade que continua a crescer indefinidamente. Isto porque, de acordo com um tal resultado, em qualquer etapa do processo de construção de conjuntos, podemos sempre construir mais conjuntos. Ainda que um tal facto pareça impedir a existência de uma colecção com todos os conjuntos, em matemática é habitual fazermos referência a uma tal colecção. Esta é porém uma colecção que não é um conjunto, merecendo por isso uma outra designação. Nomeadamente, a colecção de todos os conjuntos diz-se uma *classe própria*.

Este tipo de colecções é caracterizada de forma rigorosa por teorias matemáticas como a teoria de conjuntos von Neumann-Bernays-Gödel (**NBG**) ou a teoria de conjuntos Morse-Kelley (**MK**). Uma característica importante das classes próprias é que elas não podem ser elementos de outras classes próprias. Assim, ainda que possamos ter uma classe própria com todos os conjuntos, por definição, não podemos ter uma classe própria com todas as classes próprias. Em última análise, é esta característica das classes próprias que mantém teorias como **NBG** e **MK** a salvo do Paradoxo de Russell.

Informalmente, uma classe própria é descrita como uma colecção

que é demasiado grande para ser um conjunto. Uma tal descrição parece contudo pouco esclarecedora. Poderíamos inicialmente pensar ser impossível construir colecções de objectos além daquelas que podem ser construídas num número arbitrariamente finito de passos. Contudo, ZF mostrou ser possível levar a cabo construções que vão além de qualquer restrição ao finito. A questão que então se levanta é, que restrição adicional pode explicar como é que uma colecção pode ser demasiado grande para ser um conjunto?

Esta questão foi levantada por Dummett (1991) no contexto de um argumento contra a existência de classes próprias. Em traços largos, o argumento assume que a única razão para aceitar a existência de classes próprias é a ameaça de uma contradição (nomeadamente, a conclusão do Paradoxo de Russell). E como uma contradição não pode funcionar como justificação de nenhuma tese, seguir-se-ia que não somos supostos ter nenhuma razão para aceitar a existência de classes próprias. Recorde-se que, na ausência de classes próprias, só podemos entender o universo de conjuntos como sendo indefinidamente extensível. O argumento de Dummett pretende portanto justificar uma compreensão da hierarquia de conjuntos, onde estes fazem parte de um universo indefinidamente extensível.

Como é óbvio, esta conclusão depende crucialmente da ideia segundo a qual uma contradição não pode funcionar como uma justificação para aceitar a existência de algo. Antes de continuar, devemos pois esclarecer este ponto. Para tal, recorde-se que um paradoxo é um argumento com três características singulares: as suas premissas são aparentemente verdadeiras, as suas inferências são aparentemente válidas e a sua conclusão é aparentemente falsa. Ora, por definição, nenhum argumento pode partir de premissas realmente verdadeiras e, por meio de inferências realmente válidas, estabelecer uma conclusão realmente falsa. Como tal, quando nos deparamos com um paradoxo, devemos ser capazes de explicar como é que aquilo que inicialmente parece ser um argumento aparentemente inaceitável, na realidade corresponde a um dos seguintes três casos: um argumento que tem premissas falsas, um argumento que tem uma inferência inválida ou um argumento que tem uma conclusão verdadeira.¹⁶

¹⁶ Ao longo da história da Filosofia, argumentos paradoxais de vários tipos têm sido uma fonte constante de discussão. Hoje em dia, esta continua a ser uma

No processo de explicar como é que aquilo que aparentemente é o caso, realmente não o é, podemos obviamente fazer apelo a certas distinções. Estas distinções devem contudo ser passíveis de ser explicadas independentemente do paradoxo. Isto porque se o paradoxo é a única explicação para a distinção, como a distinção é suposta explicar o paradoxo, aquilo que obtemos no final não é mais do que um círculo explicativo. E como tal, nem o paradoxo, nem a distinção acabam por ser explicados.

A questão levantada por Dummett pretende reflectir este facto, em particular, procurando mostrar que ao introduzir a noção de *classe própria* na explicação do Paradoxo de Russell, estamos a introduzir uma distinção entre colecções que são conjuntos e colecções que são classes próprias, para qual a única explicação é o paradoxo. Segundo Dummett, em última análise, a razão pela qual se diz que a colecção de todos os conjuntos é uma classe própria e não um conjunto, é que se essa colecção fosse um conjunto e não uma classe própria, então chegaríamos a uma contradição. Contudo, como ele nota, ao raciocinar deste modo, não estamos a explicar o paradoxo, dado que a introdução de classes próprias apenas se limita a deixar-nos num círculo explicativo como aquele que foi descrito acima.

No resto desta subsecção vamos considerar duas reacções possíveis à questão levantada por Dummett. A primeira visa responder à questão, negando que o Paradoxo de Russell justifica uma compreensão indefinidamente extensível do universo de conjuntos. A segunda visa responder à questão Dummettiana, sugerindo um entendimento modal da alegada extensão indefinida do universo de conjuntos. Ambas as reacções concordam contudo no facto de que, para responder a Dummett, devemos levar a cabo uma expansão da nossa ideologia lógica. Nomeadamente, a primeira implica a adopção de uma forma de quantificação habitualmente designada de *quantificação plural* (juntamente com termos que referem colecções alegadamente plurais), por meio da qual supostamente podemos falar da colecção de todos os conjuntos, sem estarmos realmente comprometidos com a

área de investigação muito activa e onde, além do mais, a filosofia manifesta a sua vertente interdisciplinar, entrando em contacto não somente com a investigação em matemática, mas também em disciplinas como a psicologia, a informática, a linguística e a economia. O leitor que procura saber mais acerca desta área, encontra uma boa introdução na obra de Sainsbury (2002).

existência de colecções que não são conjuntos. A segunda implica a adopção de uma modalidade primitiva, por meio da qual supostamente podemos explicar o carácter meramente potencial da colecção de todos os conjuntos.

Passamos então a descrever a primeira destas reacções. A melhor maneira de introduzir as noções de *quantificação plural* e de *colecção plural*, provavelmente é pensando em algumas das colecções com que nos deparamos quotidianamente. Por exemplo, todas as manhãs o autor deste trabalho gosta de comer cereais ao pequeno almoço. E como normalmente o autor acorda com bastante fome, ele come todos os cereais que coloca na tigela. Podemos assim dizer que todas as manhãs, o autor deste trabalho come a sua colecção de cereais. Segue-se contudo disto que todas as manhãs, o autor ingere um objecto abstracto? A resposta é obviamente negativa. O autor come só e apenas cereais.

Este exemplo ilustra como quotidianamente nos deparamos com colecções que a nossa linguagem lógica não tem capacidade para descrever. Esta falta de poder expressivo deve-se ao facto dos únicos termos dessa linguagem serem singulares. Com uma linguagem sem termos plurais, apenas podemos falar de colecções em termos singulares e como tal, uma colecção deve ser entendida como um objecto. Como vimos anteriormente, um conjunto corresponde a um objecto que, por assim dizer, existe acima dos seus elementos.¹⁷ Portanto, recorrendo a uma linguagem sem termos plurais para descrever algumas das colecções com que nos deparamos quotidianamente, estamos-nos a comprometer com a existência de objectos abstractos com os quais não nos pretendemos comprometer quando fazemos essas descrições.

Para colmatar esta insuficiência do poder expressivo da nossa linguagem lógica, Boolos (1984, 1985) propôs a adopção de uma linguagem lógica que, além dos termos e quantificadores singulares, possui termos e quantificadores plurais. Uma tal linguagem não só permite fazer referência a colecções plurais, como também permite falar de forma geral acerca dessas mesmas colecções. Por exemplo,

¹⁷ Vale eventualmente a pena relembrar a natureza singular do conjunto vazio. Este conjunto ilustra na perfeição o facto dos conjuntos existirem acima dos seus elementos. Isto porque o conjunto vazio existe, apesar de não possuir elementos.

por meio de uma linguagem com vocabulário plural, não só podemos fazer referência à colecção dos cereais na tigela sem nos comprometermos com a existência de conjuntos, como podemos dizer que, de todas as variedades de cereais na estante do supermercado, aqueles que levo na cesta das compras são os mais nutritivos, sem que isso implique uma comparação entre diferentes conjuntos. Simbolicamente, tornou-se habitual escrever *aa*, *bb*, *cc*, ... para constantes plurais, *xx*, *yy*, *zz*, ... para variáveis plurais e $\forall xx$, $\exists xx$, ... para quantificadores plurais.

Conjuntos e colecções plurais distinguem-se em vários aspectos. Por exemplo, como vimos, é habitual falar dos objectos que pertencem ao conjunto. Já no que concerne a colecções plurais, é mais habitual falar dos objectos que fazem parte da pluralidade. Esta distinção reflecte-se formalmente no que diz respeito à transitividade das relações de *pertença* e de *ser parte de*. Nomeadamente, a primeira é transitiva mas a segunda não o é. Portanto, do facto de que um objecto é parte de um segundo e de que um segundo é parte de um terceiro, segue-se que o primeiro também é parte do terceiro. Por exemplo, os tijolos fazem parte de uma parede, a qual faz parte de uma casa, portanto, por transitividade, os tijolos fazem parte da casa. Por outro lado, $a \in \{a\}$ e $\{a\} \in \{\{a\}\}$ mas $a \notin \{\{a\}\}$. Para marcar esta diferença, escrevemos $a < aa$ para simbolizar que o objecto *a* faz parte da colecção plural dos *aa*'s.¹⁸

Regressemos agora à objecção levantada por Dummett e vejamos como é que a expansão ideológica que acabamos de descrever, abre uma via de resposta à mesma. O primeiro passo com vista a uma tal resposta, consiste em reformular qualquer referência a classes próprias em termos de colecções plurais.¹⁹ Isto permite-nos falar da colecção de todos os conjuntos, sem estarmos comprometidos com a existência de um objecto que não é um conjunto. Dito de

¹⁸ Note-se que a relação *ser parte de* não faz parte da teoria de conjuntos, tal como tradicionalmente considerada. Esta relação faz antes parte de uma teoria conhecida como *Mereologia*. Para uma tentativa de reformular a teoria de conjuntos em termos mereológicos, o leitor interessado pode consultar a obra de Lewis (1991).

¹⁹ O leitor interessado em saber mais sobre esta abordagem pode consultar o trabalho de Uzquiano (2003) e Burgess (2004).

outra forma, com o vocabulário plural à nossa disposição, os únicos objectos com os quais estamos comprometidos quando dizemos que há uma colecção com todos os conjuntos, são só e apenas todos os conjuntos. Portanto, quando em resposta ao paradoxo de Russell dizemos que a colecção de todos os conjuntos não é ela mesma um conjunto, não precisamos de introduzir nenhuma distinção entre objectos que são conjuntos e objectos que não são conjuntos. Isto oferece uma saída do círculo explicativo Dummettiano, dado que podemos aceitar a existência de colecções plurais independentemente da ameaça de uma contradição. Dito de outra forma, não é o paradoxo que explica a noção de *colecção plural*, mas é antes esta noção que explica o paradoxo.

Consideremos agora a segunda reacção à objecção de Dummett. Tal como a que acabámos de descrever, esta segunda reacção também assume a necessidade de expandir o nosso vocabulário lógico, aceitando como legítimos termos e quantificadores plurais. O proponente desta segunda reacção nota contudo que, ainda que diferentes, as concepções plural e singular de colecções, não são mutuamente exclusivas. Ainda que nos possamos referir a uma colecção de objectos em termos plurais, também nos podemos referir a essa mesma colecção em termos singulares. Esta segunda reacção compromete-se assim com a tese de que se algumas coisas formam uma pluralidade, então essas coisas também formam um conjunto. Mais exactamente, algumas coisas xx formam um conjunto y se todas as partes do primeiro, são elementos do segundo: $\forall u(u \prec xx \leftrightarrow u \in y)$.²⁰

Neste ponto o leitor poderá pensar que há algo de errado com a segunda reacção. Isto porque, dada a tese de que todas as colecções plurais podem dar origem a um conjunto, se admitirmos a existência de uma pluralidade de todos os conjuntos, segue-se imediatamente a existência do conjunto de todos os conjuntos, o que nos conduz de volta ao Paradoxo de Russell. Contudo, precisamente porque ela não admite a existência de uma pluralidade de todos os conjuntos, esta segunda reacção à objecção de Dummett não é vítima do paradoxo Russelliano. Este facto é por sua vez consequência da compreensão modal do conceito de *conjunto* que lhe está associada e de acordo com

²⁰ O leitor interessado em saber mais sobre esta abordagem pode consultar o trabalho de Linnebo (2010) e Studd (2012).

a qual, a colecção de todos os conjuntos deve ser entendida como meramente potencial.

De um ponto de vista informal, a ideia que subjaz a esta segunda reacção é a de que, ainda que não exista uma colecção completamente determinada que corresponde à colecção de todos os conjuntos, podemos ainda assim falar da colecção de todos os conjuntos como uma colecção que nunca para de crescer. A implementação formal desta ideia implica uma extensão da nossa linguagem lógica que vai além da adopção do vocabulário plural anteriormente descrito. Nomeadamente, também devemos adoptar vocabulário modal para poder descrever de forma apropriada a potencialidade evidenciada pelo universo de conjuntos.

Como afirmações acerca de todos os conjuntos pressupõem a utilização de quantificadores, uma opção natural consiste em associar a modalidade a estes vocabulários lógico. Assim, podemos prefixar o quantificador existencial com um operador de possibilidade ($\diamond\exists\Phi$) e o quantificador universal com um operador de necessidade ($\square\forall\Phi$). Quando dizemos que uma fórmula Φ é válida para algum conjunto x , estamos portanto a dizer que é possível levar a construção da hierarquia até um ponto no qual existe um conjunto x , relativamente ao qual Φ é verdadeira. E quando dizemos que Φ é válida acerca de todos os conjuntos, estamos a dizer que não importa quão longe se continue a construir a hierarquia de conjuntos, Φ será verdadeira de todos os conjuntos construídos até esse ponto.

Podemos agora comparar ambas as reacções relativamente ao problema levantado por Dummett. Ao contrário da primeira reacção, em certa medida, a segunda reacção subscreve a interpretação Dummettiana do Paradoxo de Russell. Isto não só porque ela evita um compromisso com uma classe própria (interpretada como um objecto abstracto que não é um conjunto), mas também porque ela evita um compromisso com uma colecção que possui todos os conjuntos como elementos (interpretada como uma colecção plural que não é uma classe própria). Portanto, a segunda reacção preserva a compreensão da hierarquia de conjuntos como sendo indefinidamente extensível.²¹

²¹ Note-se que a comparação que acabamos de oferecer, não pretende tomar partido por nenhuma das duas reacções descritas. O principal objectivo da pre-

4 A distinção *abstracto/concreto*

Uma vez introduzido o entendimento mais consensual do domínio de objectos matemáticos, podemos finalmente considerar o papel que a noção de *objecto abstracto* desempenha na discussão filosófica contemporânea. Uma questão importante é como entender a existência deste tipo de objectos. Por um lado, os objectos matemáticos não são dependentes da mente, como os produtos da imaginação de cada um. A existência de um produto da minha imaginação é contingente da minha vida mental, mas se alguém demonstra um certo resultado matemático, eu não posso dizer que esse facto não é válido para mim, simplesmente porque desconheço a sua demonstração. Outra característica típica dos objectos matemáticos é que uma afirmação matemática não se demonstra/refuta pelos mesmo métodos que verificam/falsificam as verdades empíricas. O valor de verdade de uma conjectura matemática não será determinado por nenhuma experiência física em laboratório, mas antes por uma demonstração matemática de algum tipo. Dadas estas peculiaridades dos objectos matemáticos, uma questão que se levanta é pois de que forma se relacionam os objectos abstractos com os outros tipos de objectos? Em particular, como podemos entender a relação entre objectos abstractos e os chamados *objectos concretos*?

Para respondermos a esta questão, seria obviamente útil possuir uma compreensão mais clara da distinção *abstracto/concreto*. Contudo, quando procuramos traçar essa mesma distinção, damos-nos conta de que não é óbvio onde é que ela reside. Para ilustrar esta dificuldade, vamos agora percorrer as quatro vias com vista à distinção *abstracto/concreto* identificadas por Lewis (1986: 81-86).²² A primeira é a

sente subsecção é antes oferecer uma descrição do estado da arte das questões que constituíram o ponto de partida do presente trabalho.

²² Talvez valha a pena notar que, no trabalho de Lewis em causa, a distinção *abstracto/concreto* não desempenha um papel central. O tema central desse trabalho é antes a tese conhecida como *realismo modal*. Um realista modal não só defende a existência de outros mundos possíveis, mas também a de todos os mundos possíveis (i.e. toda a possibilidade é actual em algum mundo). Relativamente à natureza destes mundos, apesar de causalmente independentes do nosso, todos os mundos são igualmente concretos. Como veremos em seguida, não é imediatamente óbvio como traçar a distinção *abstracto/concreto*. Com base nessa

chamada *via da exemplificação*. Segui-la, significa procurar clarificar a distinção *abstracto/concreto* por meio de exemplos paradigmáticos.

A ideia basicamente seria a seguinte. Um objecto macroscópico (como um gorila) pode ser decomposto em moléculas de diversos tipos, uma molécula pode ser decomposta em átomos de diversos tipos e, por sua vez, um átomo pode ser decomposto em partículas subatómicas de diversos tipos. Supondo que esta corresponde à última etapa nesta redução do físico, as partículas subatómicas corresponderiam então a um caso paradigmático de objectos concretos. Um caso paradigmático de objectos abstractos seria o dos objectos matemáticos anteriormente descrito. Ao contrário das partículas elementares, não existe nenhum acelerador de partículas suficientemente potente para detectar a sua existência ao nível subatômico. De igual modo, não existe nenhum radiotelescópio suficientemente potente para detectar a existência de objectos matemáticos em algum ponto remoto do universo. Com estes casos paradigmáticos em mente, podemos então tentar traçar a distinção *abstracto/concreto*, dizendo que um objecto é concreto se e só se é do mesmo tipo que uma partícula subatômica e que um objecto é abstracto se e só se é do mesmo tipo que um objecto matemático.

Apesar de poder ser considerada um primeiro passo com vista à distinção *abstracto/concreto*, a via da exemplificação não nos pode levar muito longe. O seu principal problema é o seguinte. Dizer que um objecto é concreto se for do mesmo tipo que uma partícula subatômica, não parece ter grande valor explicativo. Isto porque, ainda que em certos sentidos um ser humano possa ser entendido como um objecto do mesmo tipo que uma partícula, em muitos outros sentidos, seres humanos e partículas elementares são de tipos completamente distintos. Por exemplo, por um lado, seres humanos e partículas são constituídos por partes cujo comportamento obedece às leis da física. Por outro, enquanto que seres humanos podem ser descritos em termos de várias partes, partículas subatômica não podem ser descritas em termos de mais partes. Assim sendo, em certos

dificuldade, Lewis argumenta que, apesar de poder parecer contra-intuitivo aceitar a existência de outros mundos que não o nosso, não existe um sentido claro de *concreto* de acordo com o qual não poderiam existir outros mundos possíveis, tão concretos quanto o nosso.

sentidos, seres humanos são como partículas e noutros, não o são. Portanto, para clarificar a noção de *concreto* por intermédio da via da exemplificação, não basta apontar um exemplo paradigmático. Adicionalmente, devemos ser capazes de identificar o sentido particular de acordo com o qual uma coisa pode ser do mesmo tipo que esse paradigma (sendo a situação semelhante com casos paradigmáticos de objectos abstractos).²³

Passamos agora à discussão da segunda via identificada por Lewis para clarificar a distinção *abstracto/concreto*. Esta é por ele designada de *via da subsunção*. Neste caso, a estratégia consiste em reduzir *abstracto/concreto* a uma distinção relativamente à qual possuímos uma melhor compreensão. Lewis discute a distinção *indivíduo particular/conjunto* como uma candidata para desempenhar esta função. Supostamente, poder-se-ia dizer que possuímos uma melhor compreensão desta outra distinção, porque a podemos interpretar em termos de uma teoria de conjuntos com elementos atómicos. Em particular, esta escolha permitir-nos-ia identificar os objectos concretos, com os elementos atómicos da teoria de conjuntos. Por sua vez, números naturais e restantes objectos matemáticos poderiam ser interpretados em termos de conjuntos cujos únicos elementos são outros conjuntos (habitualmente conhecidos como *conjuntos puros*).

Consideremos agora outra das vias identificadas por Lewis, nomeadamente, aquela que ele designa de *via da negação*. De acordo com esta via, objectos abstractos não possuem uma localização espacioso-

²³ Um problema adicional com a via da exemplificação seria o seguinte. No que respeita aos objectos matemáticos, ao entendê-los como conjuntos, estamos comprometidos com a tese de que, por exemplo, os números naturais podem ser identificados com certos conjuntos. Existem contudo diferentes formas de definir os números naturais em termos de conjuntos. Uma, proposta por Zermelo, define os números naturais enquanto conjuntos como: $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\{\emptyset\}\}$, $3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}$... A outra, proposta por Von Neumann, define os naturais como: $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$... Ora, é um facto matemático que ambas as definições produzem as mesmas verdades aritméticas. Na impossibilidade de dizer qual delas identifica os naturais, podemos ser levados a pensar que afinal a aritmética não deve ser entendida como o estudo de uma colecção de objectos em particular, mas sim como o estudo da estrutura que é comum a todas as colecções que validam os teoremas da aritmética. Este género de argumento foi primeiro proposto por Benacerraf (1965), um trabalho que deu origem à chamada *corrente estruturalista* na filosofia da Matemática.

-temporal, não entram em relações causais e nunca são mutuamente indiscerníveis. Se pensarmos nos objectos matemáticos, todos estes requisitos parecem adequados. Por exemplo, tal como mencionado anteriormente, não há nenhum instrumento que nos permita detectar a existência de objectos matemáticos. Além disso, sem uma localização espácio-temporal, não parece existir uma forma dos números participarem em relações causais.

Note-se que apesar de inicialmente parecerem plausíveis, quando levadas à letra, as vias da negação e da subsunção entram em conflito a diversos níveis. Tome-se o requisito segundo o qual objectos abstractos não possuem uma localização espácio-temporal. Se considerarmos, por exemplo, conjuntos unitários (i.e. um conjunto cujo único elemento é um elemento atómico), de acordo com Lewis, este localiza-se exactamente onde se localiza o seu único elemento. Mas então, dado que esse elemento se localiza no espaço e no tempo, seguir-se-ia que o seu conjuntos unitário também se localiza no espaço e no tempo.²⁴ Isto demonstraria então que, contrariamente ao que estipula a via da negação, existem objectos abstractos com localização espácio-temporal.

No que respeita à alegada ineficácia causal dos objectos abstractos, ela também parece entrar em conflito com a via da subsunção. Lewis pergunta, por exemplo, porque é que não seria correcto dizer que um conjunto de causas origina um certo efeito, ou que algo originou um certo conjunto de efeitos. Por último, o requisito de que objectos abstractos não são mutuamente indiscerníveis também aparenta gerar problemas. Nomeadamente, se dois objectos concretos podem ser mutuamente indiscerníveis, pela interpretação adoptada, a mesma coisa poder-se-ia verificar entre dois elementos particulares. Mas então, dados os elementos unitários cujos únicos elementos são um e um só desses elementos, como poderiam eles ser distinguidos?

A quarta e última estratégia considerada por Lewis para clarificar a distinção *abstracto/concreto* é a chamada *via da abstracção*. Neste caso,

²⁴ Talvez valha a pena notar que este raciocínio não apenas se aplica a conjuntos unitários, mas também a conjuntos com vários elementos atómicos. Adicionalmente, pelo mesmo raciocínio, se um conjunto unitário tem localização espácio-temporal, um conjunto cujo único elemento é esse conjunto unitário também possui uma localização espácio-temporal. Portanto, pelo mesmo raciocínio, todos os conjuntos possuem uma localização espácio-temporal.

a estratégia consiste em dizer que um objecto abstracto corresponde ao resultado de ignorarmos alguns dos aspectos em que diferem certos objectos concretos, ao mesmo tempo que destacamos um dos aspectos que lhes é comum. Assim, dados certos conjuntos de objectos, podemos falar do seu número de elementos como algo que lhes é comum e que, como tal, é passível de ser abstraído. Por exemplo, dados dois sacos de supermercado, um com 5 maçãs e outro com 5 pêras, podemos falar do número 5 como um objecto que resulta da abstracção de um aspecto que é comum aos conjuntos de maçãs e pêras. Contudo, como nota Lewis, explicar a existência de objectos matemáticos nos termos da via da abstracção, obrigar-nos-ia a entender nos mesmos termos, objectos que dificilmente podem ser vistos como abstractos. Por exemplo, se ambos os sacos de fruta foram adquiridos no mesmo supermercado, porque não falar de um objecto abstracto que corresponde a essa característica comum a ambos os conjuntos de objectos concretos? Uma tal consequência é porém indesejada, uma vez que queremos dizer que os objectos matemáticos existem num sentido completamente diferente ao desse hipotético objecto.

Percorridas as quatro vias identificadas por Lewis, a que conclusões podemos então chegar relativamente à distinção *abstracto/concreto*? Duas delas (subsunção e negação) entram em conflito mútuo e as duas outras (exemplificação e abstracção) enfrentam problemas que parecem difíceis de ultrapassar. Existirá porém uma forma de os contornar? Ou talvez uma quinta via, capaz de evitar completamente todas as dificuldades discutidas ao longo desta secção? Apesar de continuarem em aberto depois de um já longo debate, estas questões não deixam de ter interesse, desempenhando um papel central em diferentes debates contemporâneos. Como tal, poder-se-ia dizer que uma melhor compreensão desta distinção, corresponderia a um avanço importante numa questão filosófica que acaba por ir muito além da natureza dos objectos matemáticos.

Gonçalo Santos
LanCog Group, Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa

Referências

- Benacerraf, Paul. 1965. What Numbers Could Not Be. *Philosophical Review* 74(1):47-73.
- Blanchette, Patricia. 2007. The Frege-Hilbert Controversy. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Edited by Edward Zalta.
- Boolos, George. 1971. The Iterative Conception of Set. *Journal of Philosophy* 68(8):215-231.
- Boolos, George. 1984. To Be Is To Be a Value of a Variable (Or To Be Some Values of Some Variables). *Journal of Philosophy* 81(8):430-449.
- Boolos, George. 1985. Nominalist Platonism. *Philosophical Review* 94(3):327-344.
- Boolos, George. 1997. Is Hume's Principle Analytic? In *Language, Thought and Logic: Essays in Honour of Michael Dummett*, ed. by Richard Heck. Oxford: Clarendon Press.
- Burgess, John. 2004. Et Pluribus Unum: Plural Logic and Set Theory. *Philosophia Mathematica* 12(3):193-221.
- Devlin, Keith. 1979. *The Joy of Sets*. New York: Springer Verlag.
- Dummett, Michael. 1991. What Is Mathematics About? In *Mathematics and Mind*, ed. by Alexander George. Oxford: Oxford University Press.
- Giaquinto, Marcus. 2002. *The Search for Certainty*. Oxford: Oxford University Press.
- Hale, Bob and Wright, Crispin. 2001. *The Reason's Proper Study: Essays Towards A New-Fregean Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
- Lewis, David. 1991. *Parts of Classes*. Oxford: Blackwell.
- Lewis, David. 1986. *On The Plurality of Worlds*. Oxford: Blackwell.
- Linnebo, Øystein. 2010. Pluralities and Sets. *Journal of Philosophy* 107(3):144-164.
- MacFarlane, John. 2002. Frege, Kant and the Logic in Logicism. *Philosophical Review* 111(1):25-65.
- Sainsbury, Michael. 2002. *Paradoxes*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Shapiro, Stewart. 1991. *Foundations Without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*. Oxford: Oxford University Press.
- Studd, James. 2012. The Iterative Conception of Set: A (Bi)modal Axiomatization. *Journal of Philosophical Logic* 45(5):1-29.
- Uzquiano, Gabriel. 2003. Plural Quantification and Classes. *Philosophia Mathematica* 11(1):67-81.