Perspectiva Filosófica, vol. 47, n. 2, 2020

ARITMÉTICA E CONHECIMENTO SIMBÓLICO: NOTAS SOBRE O *TRACTATUS LOGICO-PHILOSOPHICUS* E O ENSINO DE FILOSOFIA DA MATEMÁTICA

Gisele Dalva Secco[1]

À memória de Sören Stenlund

RESUMO

Partindo de e encerrando com reflexões acerca de práticas de ensino de filosofia da matemática, proponho uma comparação entre os principais traços da noção leibniziana de conhecimento simbólico e algumas passagens tractarianas sobre a aritmética. Defendo que esta chave de leitura permite a um só tempo (i) projetar nova luz sobre as especificidades da definição tractariana de número em comparação com as de Frege e Russell; (ii) fazer despontar a compreensão da natureza do conhecimento matemático como conhecimento simbólico ou formal que Wittgenstein mobiliza em seu livro; (iii) elencar algumas razões para a alegação de que Wittgenstein pode ser considerado o filósofo da prática matemática *avant la lettre*. O trabalho se encerra com um apanhado, um retorno à reflexão inicial sobre os vínculos entre pesquisa e ensino, e uma defesa da chave de leitura aqui utilizada em termos de seu potencial para o desenvolvimento de estudos em filosofia da matemática.

Palavras-chave: Conhecimento simbólico. Leibniz. Wittgenstein. Ensino de Filosofia. Filosofia da prática matemática.

ABSTRACT

Departing from and closing with reflections on issues regarding teaching practices of philosophy of mathematics, I propose a comparison between the main features of the Leibnizian notion of symbolic knowledge and some passages from the *Tractatus* on arithmetic. I argue that this way of reading allows (i) to shed a new light on the specificities of the Tractarian definition of number, compared to those of Frege and Russell; (ii) to highlight the understanding of the nature of mathematical knowledge as symbolic or formal knowledge that Wittgenstein mobilizes in his book; (iii) to offer reasons for the claim that Wittgenstein can be considered the philosopher of mathematical practice *avant la lettre*. The paper ends with an overview, a return to the initial reflection on the connections between research and teaching, and a de-

[1] Professora adjunta do Departamento de Filosofia da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). E-Mail gisele.secco@ufsm.br. ORCID 0000-0003-3290-746X.

fense of the reading key used here in terms of its potential for the research in philosophy of mathematics.

Keywords: Symbolic Knowledge. Leibniz. Wittgenstein. Teaching Philosophy. Philosophy of Mathematical Practice.

Abertura

Fato por vezes silenciado, as relações entre práticas filosóficas e matemáticas são atávicas nas mais distintas culturas humanas. Fato bastante conhecido, reflexões sobre as especificidades, os objetos e a aplicabilidade do conhecimento matemático cruzam a inteira história da filosofia ocidental. Assim, o processo de preparar um curso introdutório – visando a familiarização de estudantes de graduação com este corpo ancestral de conhecimentos que hoje denominamos filosofia da matemática – demanda não somente um exercício de seleção de temas, problemas, autores e textos, como também uma revisão das narrativas que encontramos na literatura de apoio, em especial a disponível em língua portuguesa.

Dos três livros introdutórios mais recentemente publicados em nossa língua, a saber, *Introdução à filosofia matemática* de Bertrand Russell (2007),[2] *Filosofias da matemática* de Jairo Da Silva (2007) e *Filosofia da matemática* de Stuart Shapiro (2017), o primeiro foi escrito durante a evolução da famigerada crise nos fundamentos da matemática – por sua vez tematizada com mais ou menos robustez nos outros dois. A diferença de ordem histórica entre os textos, que implica diferenças de ordem metodológica e conceitual entre o primeiro e os outros, é relevante para as decisões programáticas do docente: por um lado, eleger a obra de Russell pareceria já implicar um posicionamento, tomada mesma de partido, na celeuma.[3] Por outro, apresentar tal amostra da prosa do mentor de Wittgenstein a nossos estudantes ocasionaria um contato positivo com um pensamento filosófico em plena forma, elaborado com a ge-

[2] Apesar de existirem traduções mais antigas, aponto somente esta.

[3] Sobre a tomada de partido por parte de professores, ainda que se trate de partidos políticos e não filosóficos, vale a pena conferir o que tem a dizer o próprio Russell em "Funções de um professor" (2000). Sobre o tema da neutralidade do professor em sala de aula – não somente de filosofia – sugiro particularmente o segundo capítulo de *Ensino de filosofia e currículo* (Rocha 2015) e o mais recente *Escola Partida: ética e política na sala de aula* (Rocha 2020).

nuína intenção de ser "essencialmente uma 'Introdução'" (RUSSELL 2007: 15) – e, vale notar, escrito sob ímpar condição.[4] Fosse como fosse, a eleição do livro de Russell no hipotético curso introdutório exigiria do docente uma apresentação do cenário no qual ele é apenas um dos elementos, somente uma das posições em ação na querela dos fundamentos. Além disso, seria pertinente lembrar que não se tratava, para Russell, de uma introdução à filosofia *da* matemática, mas de uma *filosofia matemática* (*mathematical philosophy*), ou seja, de parte daquilo que ele considerava possível chamar matemática.[5]

No que tange às conveniências didáticas que se podem obter com os demais dois livros, deve-se logo ponderar que entre eles as diferenças são outras, além da que preservam com o de Russell: ambos foram publicados recentemente, por autores de diferentes nacionalidades e envergaduras, visando oferecer um panorama de autores e problemas que abarcam mais do que as questões abordadas por Russell. Em termos de estrutura, por exemplo, o livro de Da Silva se organiza em sequência histórica: um capítulo sobre Platão e Aristóteles; um sobre Leibniz e Kant; um sobre Frege e o logicismo (com duas econômicas páginas dedicadas a Russell); um sobre o construtivismo e um último sobre o formalismo. Já a composição do livro de Shapiro articula (entre suas quatro partes e seus capítulos encadernados em quase quinhentas páginas), ao menos três grandes eixos: um metodológico, um histórico e um conceitual. Valeria notar outras diferenças, como aquela marcada pela robustez do elenco selecionado nas referências bibliográficas, ou ainda outra, relativa ao grau de aprofundamento e à sofisticação argumentativa de cada autor. Um dos aspectos em comum entre os dois livros, entretanto, me interessa. Trata-se do modo como reconstroem as discussões filosóficas constitutivas da conjuntura de crise dos fundamentos, pelo qual se constata uma ilustre ausência: a da posição do jovem Wittgenstein.

Razoavelmente, penso, é de se esperar que o docente que deseje ou ao qual seja incumbida a tarefa de lecionar um curso de introdução à filosofia da matemática seja ou bem um especialista na área ou alguém muito bem (in)for-

[4] Na prisão, para onde Russell fora levado em 1918 em virtude de declarações que supostamente insultavam aliados de guerra do Reino Unido, conforme explica Slater na apresentação da edição brasileira, traduzida por Maria Borges.

[5] Agradeço a Rodrigo Sabadin Ferreira por chamar a atenção para este ponto.

mado, quer dizer, alguém capaz de oferecer a seus estudantes a oportunidade de desenvolver suas habilidades filosóficas com base no que de melhor, de mais atual e relevante se sabe, pesquisa e publica (seja em nossa língua materna ou em línguas estrangeiras) na área a ser ensinada. Ora, considerando-se o fato de que após ter passado por um período de abandono e maus-tratos editoriais – que poderiam bem explicar o pouco-caso, as leituras caricaturais, e até mesmo algumas injustiças interpretativas que sofreu e ainda sofre –, a filosofia da matemática de Wittgenstein passa por um processo de recuperação bastante bem sucedido desde inícios dos anos 1990, quando da publicação do seminal *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics* (Frascolla 1994);[6] considerando-se ainda que pesquisadores brasileiros estão na linha de frente dos negócios wittgensteinianos no cenário mundial, tendo promovido eventos mais ou menos inclusivos, publicado inúmeros artigos, volumes de revistas acadêmicas e livros (em português e em línguas estrangeiras) nos quais se apresentam, analisam e desenvolvem reflexões acerca da matemática do filósofo austríaco; considerando que Wittgenstein não somente não ignorava mas se posicionava constantemente (e idiossincraticamente) acerca das questões mais prementes que se debatiam entre os representantes das "três grandes" filosofias da matemática engendradas no início do século XX; considerando por fim, que isso que designamos de filosofia da matemática de Wittgenstein tem bastante a oferecer a docentes-pesquisadores e a nossos estudantes, tanto conceitual como metodologicamente – é dizer, em potencial filosófico – quer me parecer que são escassas as razões para preparar um curso de introdução à filosofia da matemática mantendo a solene lacuna observada nos dois livros há pouco mencionados.

Assim, meu *superobjetivo*[7] consiste em incluir a estranha filosofia wittgensteiniana da matemática nas narrativas sobre a *Grundlagenkrise*. Meu objetivo aqui, entretanto, é o de mostrar como, por sincopadas que sejam, as

---

[6] Seguido de outros trabalhos relevante do próprio Frascolla (1997, 2017) e, para mencionar alguns, o livro de Mathieu Marion (1998), diversos trabalhos de Juliet Floyd, (2002, 2007a), Felix Mühlhölzer (2005). Em português, além de alguns certeiros parágrafos do ensaio introdutório à sua tradução do *Tractatus* (Santos 2000), temos Santos (2008). O trabalho mais importante que é a premiada tese de doutorado de Anderson Nakano (2015). Notável antecipação da qualidade das abordagens pós-Frascolla, deve-se lembrar de Wrigley (1977).

[7] Cf. D'Agostini (2018).

observações tractarianas sobre a aritmética merecem ser consideradas em suas especificidades, como saliências que permitem melhor posicionar o filósofo quando jovem no contexto logicista. Para tanto, além desta abertura, compus este texto em três partes: na primeira, ofereço o contexto *interno aos estudos wittgensteinianos* a partir do qual, via trabalhos de Sören Stenlund (2012, 2013, 2014, 2015), valido a estratégia de traçar conexões entre Leibniz e o jovem Wittgenstein *no que diz respeito à matemática*, apresentando também a noção de conhecimento simbólico leibniziano por meio de ideias de Oscar Miguel Esquisabel (2012) e Abel Lassalle Casanave (2012). Na segunda parte, desdobrando o que fizemos em trabalhos conjuntos anteriores, (Secco & Noguez 2017), forneço uma comparação entre os principais traços da noção leibniziana de conhecimento simbólico e algumas passagens tractarianas sobre a aritmética. Esta chave de leitura permite a um só tempo (i) projetar nova luz sobre as especificidades da definição tractariana de número em comparação com as de seu amigo Russell e de seu admirado Frege; (ii) fazer despontar a compreensão da natureza do conhecimento matemático como conhecimento simbólico ou formal do jovem Wittgenstein; (iii) elencar algumas razões para a alegação de que Wittgenstein pode ser considerado o filósofo da prática matemática *avant la lettre*. O trabalho se encerra com um apanhado, um retorno à reflexão inicial sobre os vínculos entre pesquisa e ensino, e uma defesa da chave de leitura aqui utilizada em termos de seu potencial para o desenvolvimento de estudos wittgensteinianos internos e externos à comunidade de especialistas.

1. Matemática e conhecimento simbólico: conexões

1.1. A abordagem de Sören Stenlund

Embora sejam por vezes reconhecidas, as semelhanças entre o tratado de juventude de Wittgenstein e a extraordinária obra de Leibniz,[8] no que tange às suas perspectivas acerca da matemática, não tem sido objeto de muitos estudos por parte dos especialistas na obra do vienense. Significativa exceção se encontra na série de

[8] Sobre este ponto ver Hydé Ishiguro (1972) e Juliet Floyd (2007b).

trabalhos em que Sören Stenlund (2012, 2013, 2014, 2015) se dedicou a pensar as especificidades das observações de Wittgenstein sobre a matemática através da vinculação com o que chamou de "matemática simbólica" ou "matemática moderna":

> The notion of symbolic mathematics has its roots in the invention of algebra and the algebraic methods in the 17th century. F. Vieta (1540–1603), who made decisive contributions to this development, uses the word 'symbol' in the sense that is relevant here. Symbolic mathematics is to be contrasted with mathematics as an ontological science, for instance as the science of quantity and magnitude, which was the prevailing view in ancient Greek mathematics and in particular in the renaissance version of the Aristotelian and Euclidian heritage. (STENLUND, 2013, p. 8)

Essa caracterização é acompanhada de uma série de considerações histórico-filosóficas, nas quais procura mostrar que o advento de técnicas e simbolismos algébricos foi tão poderoso a ponto de ter possibilitado a Descartes a criação de sua geometria, e a Leibniz a invenção do cálculo integral. Com base nisso, Stenlund afirma não somente a permanência da concepção ontológica de matemática no interior da lógica formal, moderna lógica matemática, como também defende a tese geral de que existe, desde o *Tractatus*, uma forte comunidade de perspectiva entre Wittgenstein e a tradição algébrica, que nomeia matemática simbólica.

Dessa tese geral sai uma segunda, específica, de acordo com a qual sua tese geral é o pano de fundo mais adequado para compreender um aspecto fulcral do que chamamos de filosofia da matemática de Wittgenstein, sua postura frente a certos exageros de alguns discursos, prosas filosóficas acerca da lógica, da matemática, e da lógica matemática. Os nomes que tem sido dados para uma tal postura, ainda mais se levarmos em conta as flutuações típicas da fase intermediária do pensamento do austríaco, são muitos: antiplatonismo, antirreferencialismo, antiproposicionalismo, quase-formalismo, antirrealismo, realismo à moda... Dentre tais possíveis títulos, Stenlund elege o aspecto a partir do qual o contraste entre Wittgenstein e os demais filósofos da matemática de seu tempo é radical, o de antifundacionalista.[9] Uma terceira tese de

[9] Para uma abordagem do antirrealismo e do antifundacionalismo de Wittgenstein em filosofia da matemática, na qual se mostram fortes linhas de conexão entre a sua e a filosofia da matemática de Henri Poincaré, com extremo proveito se pode ler a tese de doutorado de Ca-

Stenlund deve ainda ser destacada, a saber, a de que a via de conexão com a perspectiva da matemática simbólica tem um papel hermenêutico unificador: “a concepção simbólica da matemática nos oferece uma perspectiva a partir da qual a unidade da filosofia da matemática de Wittgenstein torna-se patente”. (2013, p. 14) Dessa tese, entretanto, não tratarei aqui.

Sobre o *Tractatus*, Stenlund considera que em grande parte o livro é associável à tradição da matemática simbólica, posto que, em primeiro lugar, a ideia crucial de sintaxe lógica está diretamente relacionada com a atividade de manipulação simbólica, com o uso regrado de signos, como expresso claramente nas passagens 3.326 e 3.327. Em segundo lugar, nada menos do que o pensamento fundamental do livro (seu *Grundgedanke*), é o de que as constantes lógicas nada representam ou substituem (*nicht vertreten*), tal como o fazem nomes com relação a objetos (4.0312). Ademais, Wittgenstein sentencia no início do segundo grupo de passagens sobre a matemática (6.2) que as equações, as “proposições da matemática”, são *pseudoproposições* (*Scheinsätze*) – ao contrário do que pensava Frege, elas não expressam pensamento, não veiculam informação que possa ser verdadeira ou falsa. Ao contrário, enfatiza Stenlund, as equações são expressões que autorizam ações ou operações (mas não no sentido das operações de verdade, cruciais para a teoria da proposição desenvolvida no livro). A seguinte passagem resume bem o espírito da conexão proposta por Stenlund entre o *Tractatus* e a matemática simbólica:

> It [logical syntax] has to do not only with the external combinatorial forms of the signs as finite sequences, but with *the forms of use of signs*, i.e. *the forms of use that constitute the symbols*. The logical syntax of the *Tractatus* needs no supplementation with something like a ‘semantics’, because it is *already* concerned with the sense of signs: to get clear about the forms of use of signs is to get clear about their sense (or logical content). (STENLUND, 2013, p. 25)

O trecho ocorre no contexto em que Stenlund está defendendo a interpretação de acordo com a qual a concepção de sintaxe lógica do jovem Wittgenstein difere significativamente daquela herdada das concepções semânticas sobre a linguagem. Enquanto nelas a sintaxe é tomada mais como um *sistema estático*, para Wittgenstein se trata antes de tudo de algo com o qual se opera,

mila Jourdan (2009).

uma *atividade*. O filósofo sueco quer sublinhar a ênfase de Wittgenstein no aspecto operacional do simbolismo como decisiva para a economia interna do *Tractatus* (3.326 reza que é preciso atentar para o *uso significativo* dos sinais para que neles sejam reconhecidos [*erkennen*] símbolos; enquanto 3.327 determina que signos só podem fixar formas lógicas se forem considerados em conjunto com seu *emprego lógico-sintático*). Além disso, como indicado acima, Stenlund sustenta que a operacionalidade, o caráter acional do simbolismo do qual a sintaxe lógica é uma expressão, é uma das linhas de continuidade mais prementes no pensamento de Wittgenstein, mesmo ao longo do camaleônico período intermediário (entre 1929, quando retorna oficialmente às práticas filosóficas, e meados de 1935).

É relevante notar também que inicialmente os argumentos de Stenlund (2012, 2013) para mostrar os vínculos entre Wittgenstein e a matemática simbólica, capazes de explicar a singularidade da perspectiva do filósofo quando jovem, cursavam um caminho via Spengler e Hertz:

> I don't want to say that Wittgenstein *was inspired* by 17th-century mathematicians. He had surely become aware of the deep difference between ancient Greek mathematical thinking and modern mathematics through his reading of Spengler in the early 1930's. But the symbolic point of view is present already in the *Tractarian* conception of arithmetic and logic. I think that the main source of inspiration for Wittgenstein were certain ideas issuing from the struggle for rigor in mathematics and theoretical physics in the latter half of the 19th century, in which the symbolic point of view was prominent. *He was particularly influenced* in this respect by Heinrich Hertz. Hertz' work on the mathematics of classical mechanics, in which Hertz showed how to deal with conceptual problems connected, for instance, with the notion of force of classical mechanics, was an important and influential contribution to the symbolic point of view. (STENLUND 2013, pp.21-22, meus itálicos)[10]

Já em trabalhos posteriores, embora ainda considere a filosofia tractariana da matemática como representante do ponto de vista simbólico e mantenha que não se trata de uma influência direta, Stenlund (2014, 2015) passa a caracterizar o pensamento do jovem Wittgenstein como legítimo emissário do

[10] O vínculo ente as concepções de Wittgenstein e Hertz por meio da teoria leibniziana da expressão simbólica, em especial o modo como Wittgenstein entende o papel do simbolismo na física, pode ser investigado em Massimo Ferrari e Ion-Olimpiu Stamatescu (2002).

modo leibniziano de conceber o pensamento simbólico *strictu sensu*. Recorrendo a alguns elementos da noção leibniziana de conhecimento simbólico tal como analisados em um ensaio de Oscar Miguel Esquisabel (2012), o filósofo sueco sublinha com ainda mais força a importância dada por Wittgenstein ao aspecto operacional ou acional da matemática. Ocorre, entretanto, que ao se apropriar dos traços com os quais Esquisabel delineia a noção de conhecimento simbólico em Leibniz, Stenlund reconhece apenas *en passant* a outra feição desse conceito *bifrons*: seu aspecto *ectético*[11] ou de expressão visual – a meu ver vital para uma adequada compreensão das observações de Wittgenstein sobre a aritmética em seu tratado.[12] Passo, então, a um resumo das principais notas características da noção leibniziana de conhecimento simbólico de acordo com Esquisabel.

1.2. Conhecimento simbólico leibniziano: traços

Leibniz introduz a noção de *pensamento simbólico* – nomeada de diversos modos em muitos de seus escritos filosóficos –[13] já em sua *Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666). O contexto mais amplo no qual é engendrada, vale notar, é a distinção cartesiana entre conhecimento intuitivo (não media-

[11] O termo "ectético", explica Esquisabel, vem do grego *ékthesis* e, literalmente, significa exposição ou apresentação. Em sentido técnico é utilizado para se referir a tipos de provas ou demonstrações, tanto em contexto aristotélico (uma prova na qual se introduz um termo singular, instância ou exemplificação, na inferência) como em contexto euclidiano (o passo de uma demonstração no qual se apresentam ou instanciam as informações geométricas contidas na proposição ou problema a ser provado ou resolvido). Tal como utilizado por Leibniz, *ékthesis* tem relação com o modo como Jungius o aplica em sua discussão sobre demonstrações silogísticas que podem ser modificadas de tal modo que a forma lógica de uma proposição possa ser representada: "From the fact that the syntax of formulae makes a form or structure ostensible it follows that formulae have an ambivalent trait, since on the one hand they are suitable for mechanical computation and on the other they are *displaying something* that goes beyond themselves. Furthermore, Leibniz sees in this 'expositive' capability of formulae the grounds for their performance in invention or discovery, because they make us discover relations or connections that otherwise would be hidden to us, a feature that we could call 'expressivity' in speaking of formulae. For this reason, *formulae share some features with pictures and diagrams*, which also play a role as perceptible guides for thinking, although not necessarily in a mechanical fashion" (ESQUISABEL, 2012, p. 29, meus itálicos).

[12] A articulação entre operar e exibir, como duas faces de todo o simbolismo, pode bem ser estendida para as observações de Wittgenstein sobre a lógica – o que ela faz e o que ela mostra. Tal ampliação, entretanto, não cabe no espaço destas notas.

[13] "Such denominations are "blind thought" (*cogitatio caeca*, *pensée sourde* or *vuide*), "blind knowledge" (*cognitio caeca*), "suppositive notion" (*cognitio suppositiva*, *connaissance suppositive*) and even "suppositive notion" (*notio suppositiva*) and "blind concept" (*conceptus caecus*)." (ESQUISABEL, 2012, p. 2)

do) e conhecimento simbólico (mediado por signos). Esquisabel explica que, na obra inaugural de Leibniz, a metáfora do *pensamento cego* ocorre na caracterização de número. A seguinte passagem é citada para mostrar como Leibniz entende a "performance simbólica do número":

> For example, we often grasp a number, however large, all at once in a kind of *blind thought*, namely, when we read ciphers on paper which not even the age of Methusela would suffice to count explicitly. (A VI 1, 170 [Loemker 76], *apud.* ESQUISABEL, 2012, p. 12)

O que aqui merece atenção é a ideia de simultaneidade de percepção que um só signo (digamos, 10^{100}) favorece quando deputa ou está por um todo bastante largo, impossível de ser apreendido nas unidades que o compõem. De acordo com Esquisabel essa ideia faz emergir outra, que antecipa um aspecto fundamental das concepções leibnizianas sobre a representação simbólica: de que "o número é um tipo de 'figura universal' por meio da qual *todas as coisas*, seja qual for sua natureza, podem ser *representadas e trabalhadas*. (ESQUISABEL, 2010, p. 12, meus itálicos). Importa notar que o número não é entendido como "figura universal" porque a linguagem da aritmética seja capaz de representar, ou designar, do mesmo modo como nomes ou proposições representam. Para Leibniz, o número é uma figura universal porque a manipulação do simbolismo aritmético organiza-se de modo a sub-rogar aspectos estruturais de qualquer representação conceitual – algo que é também característico do modo algébrico de pensar, afinal a grande inspiração do projeto da *Característica universal* leibniziana.

Da utilização de números, constantes individuais, variáveis, sinais de operação e de igualdade, etc., diz-se sub-rogatória no sentido de que toda manipulação de símbolos no interior do sistema no qual que se faça corresponder a conceitos ditos analisáveis pode ser reduzida a uma manipulação dos símbolos cuja operação ocorra em quaisquer níveis ulteriores de análise lógica desse conceito. Na alvorada da tradição do conhecimento simbólico, a noção de número aparece como consideração abstrata – e aplicável variavelmente – da relação entre todos e partes expressa em qualquer juízo. Assim, fica claro que a substituição da linguagem na qual um juízo qualquer é formulado pelo arcabouço simbólico aritmético (ou algébrico) não altera nem acrescenta conteúdo cognitivo (proposicional), mas apenas *o exibe* conforme às relações estruturais relevantes para associá-lo ao que é expresso por outras formulações da linguagem. A primeira e bastante geral caracterização da noção de pensamento cego, já se pressente, está conectada ao conceito aritmético de número, cuja definição marcará uma diferença crucial do *Tractatus* para com as concepções de Frege e Russell. Mas não nos antecipemos. Ofereço a seguir, listados, os principais aspectos ou funções do pensamento simbólico cego tal como apresentados por Esquisabel e apropriados por Stenlund:[14]

> **(a) função sub-rogatória** ou representacional, pela qual signos artificiais (como signos algébricos ou aritméticos) substituem ou estão por alguma *ideia*;
> **(b) função psicotécnica**, de abreviação e simplificação de processos de pensamento, que permite aprimorar nossas capacidades de raciocínio e, portanto, de obtenção de conhecimento seguro. Sem precisar considerar a compreensão dos "significados materiais" dos signos, alivia-se a memória de quem raciocina;
> **(c) função calculatória**, computacional ou de simbolismo operativo, pois pensamento simbólico cego requer certas "estruturas tomadas como sistemas de objetos físicos sujeitos a operações de construção e transformação de acordo com regras", preservando uma ordem estrutural ou sintática – donde a ideia leibniziana de um *filum mechanicum meditandi* que, a seu turno, está diretamente associado o aspecto seguinte;
> **(d) função *ectética*, ou de exibição**, associada à demanda pela apreensão de formas ou estruturas exibidas nas configurações simbólicas elas mesmas, de modo que o pensamento opere "por meio de uma espécie de raciocínio visual." Este é um aspecto de importância central para a compreensão da natureza formal ou estrutural do pensamento simbólico, e mesmo para sua função sub-rogatória (isso porque "a es-

[14] Trechos desta subseção foram emprestados, com ligeiras modificações de meu já referido trabalho com Secco & Noguez (2017).

trutura do objeto ou estado de coisas é projetada na sintaxe da expressão simbólica");

(e) função instrumental que se manifesta pelo uso de regras operacionais de construção e transformação de signos, nos quais as próprias expressões guiam e permitem verificar as inferências ou cálculos em jogo (Esquisabel fala, a esse respeito de verificabilidade *ad oculos*); o pensamento assim se torna como que imune às compreensões confusas, típicas do comércio comum da fala, tributário do pensamento verbal;

(f) função que possibilita conhecimento de estruturas ou formas: uma vez que as inferências levadas a cabo neste modo de pensar abstraem os significados materiais dos termos envolvidos (as ideias ou conceitos que eles sub-rogam), o que resta desta abstração – as características formais dos sistemas simbólicos nos quais se opera – pode ser investigado em si mesmo, de modo igualmente abstrato e formal. Sistemas simbólicos, afinal, podem expressar-se mutuamente – conforme se abstraiam as relações formais de cada um, invariantes sob as transformações projetivas ou mapeamentos entre sistemas simbólicos. Ao fim e ao cabo, anote-se, estas relações desempenham um papel determinante para nada menos do que a caracterização leibniziana de verdade (já que seriam sua "base"). Alcança-se, desse modo, um tipo especial de conhecimento: sintático e estrutural.

Em resumo, as fórmulas e concatenações de fórmulas de cunhagem algébrica, que inspiram a ideia deste pensamento *sui generis*, sub-rogam, abreviam e simplificam processos de raciocínio, são mecanicamente manipuláveis, exibem ou expressam relações estruturais, permitem a verificação *ante oculos* de tais relações que podem existir entre diferentes estruturas simbólicas, e, assim, engendram conhecimento específico, conhecimento de tipo formal. Vale notar que para Leibniz não se trata aqui de uma modalidade de conhecimento *a mais*, mas sim de um gênero de conhecimento capaz de proporcionar o mais alto grau de certeza possível ao intelecto humano – o que é metaforicamente expresso na ideia da possibilidade de um teste *ante oculos* da verdade por meio de um *filum meditandi*.

O projeto leibniziano de uma ciência geral de estruturas formais instanciadas em qualquer domínio particular de conhecimento – a *Característica Geral* – é o ápice do conceito leibniziano de conhecimento simbólico cego. O objetivo da *Característica Geral* consiste em investigar as leis de composição e transformação de formas "vazias", fornecidas pelas propriedades das fórmulas que exibem formas gerais de relações, conexões e operações que não possuem interpretação determinada. Pode-se compreender o projeto como o delineamento de uma *ciência ou teoria ectética abstrata de nível superior*, que lida com estruturas teóricas. Esta ciência possibilita *conhecimento simbólico de invariantes estruturais*, "das condições de possibilidade do conhecimento simbólico como tal", revelando-se seus principais traços, ao modo de *Janus bifrons*: uma de suas feições é a de uma sintaxe operatória e a outra de expressar-se visualmente.[15] Embora seja caracterizado pela capacitista metáfora do *pensamento cego*, o conhecimento simbólico leibniziano depende essencialmente de certo tipo de visão.[16] Antes de indicar as reverberações desta imagem Januária no tratado de Wittgenstein devo ainda fazer um par de anotações, como complemento à abordagem de Esquisabel, complemento decisivo para o movimento que se segue na próxima seção. Trata-se da apresentação do conhecimento simbólico oferecida por Abel Lassalle Casanave (2012, 2016).[17] Lembrando que a distinção cartesiana entre conhecimento intuitivo e simbólico é um elemento contextual importante para a compreensão da noção engendrada por Leibniz, a compreensão do filósofo portenho contém três variações:

---

[15] Sobre as inúmeras dimensões do programa de Leibniz para uma *Característica geral* ver Esquisabel (2002).

[16] Não parece desacertado afirmar que se trata de um *ver-como*. Contemporaneamente, o tópico da visualização nas ciências formais é bastante discutido, em especial por filiados ao vago rótulo de filosofia da prática matemática, que abordarei ao final destas notas. Para uma excelente coletânea em língua portuguesa, da qual destaco – dados os fins deste texto – os capítulos de Paolo Mancosu, Abel Lassalle Casanave, Camila Jourdan e Luiz Carlos Pereira, ver Lassale Casanave & Sautter (2012).

[17] Respectivamente, em um texto sobre o conhecimento simbólico em Kant e outro sobre conhecimento simbólico e aritmética em Hilbert.

CS$_{SI}$ – conhecimento simbólico como *sucedâneo do conhecimento intuitivo*, quando "o simbolismo teria sempre uma contrapartida intuitiva de forma tal que alcançamos por seu intermédio um conhecimento que também poderíamos alcançar intuitivamente" (LASSALLE CASANAVE 2016, p. 227);
CS$_{EI}$ – conhecimento simbólico como *extensão instrumental do conhecimento intuitivo*, quando "são introduzidos por via simbólica conceitos e métodos sem contrapartida intuitiva, cuja finalidade é alcançar conhecimento que também poderíamos alcançar por procedimentos intuitivos, mas cuja execução eventualmente seria muito complexa" (*ibid*, p. 228);
CS$_{CF}$ – *conhecimento simbólico como conhecimento de estruturas, formas ou relações*, "em cujo caso falamos de conhecimento simbólico como conhecimento formal." (*loc.cit.*).

Resumindo, pode-se conceber que a **CS$_{SI}$** de Lassalle Casanave corresponde primordialmente a função **(a) sub-rogatória** de Esquisabel – de acordo com a qual o conhecimento simbólico depende de signos que substituem ou designam ideias; **CS$_{EI}$** enfatiza a função **(e) instrumental**, associada à **(d) função ectética**, posto que as operações (inferências, cálculos e/ou demonstrações) são norteadas pelo simbolismo ele mesmo, a correção da aplicabilidade de suas regras se verificando *ante óculos* etc.; **CS$_{CF}$** – identifica-se à função **(f)**, que chamaria de **função cognitivo-estrutural**, fosse eu autorizada a rebatizá-la.

Imagino que a esta altura a leitora frequente do *Tractatus* já tenha antecipado diversas comparações que se podem mobilizar no intuito de evidenciar elementos leibnizianos nas passagens sobre a matemática. Supondo, entretanto, que nem toda leitora destas notas tenha já, por qualquer uma de suas entradas, se embrenhado no labirinto, delineio possíveis cursos na próxima seção.

Para finalizar, retomo a Stenlund. Como indiquei acima, ainda que considere quase todos os aspectos **(a)–(f)** da noção de conhecimento simbólico na caracterização das reflexões de Wittgenstein acerca da matemática, Stenlund enfatiza significativamente o aspecto operacional, em detrimento do aspecto expressivo ou *ectético* dos simbolismos algébricos que inspiram Leibniz e ecoam nas reflexões Wittgenstein. Essa ênfase se explica, ao menos parcialmente, pelo fato de que o filósofo sueco estava mais interessado em sustentar a tese da unidade do pensamento de Wittgenstein sobre a matemática, que a chave leibniziana de leitura favorece, enfatizando a importância da ideia de uso dos signos, do que explorar suas nuances no contexto do *Tractatus.* Enquanto Stenlund interessa-se pelos desenvolvimentos de ideias tractarianas no camaleônico período intermediário, o meu é um recorte mais modesto.

2. Legados leibnizianos no *Tractatus*: o conceito de número e a ideia de conhecimento matemático

A metáfora mais utilizada em alusões, referências, análises especializadas e textos de introduções à leitura do livro de Wittgenstein é aquela que próprio autor forjou entre parêntesis na penúltima passagem [6.54].[18] Penso, entretanto, que a imagem do *Tractatus* como um labirinto com múltiplas entradas é mais adequada, especialmente se se considerar minha breve discussão inicial sobre como ensinar introdução à filosofia da matemática *com Wittgenstein*. Diferentemente da metáfora da escada, que exige uma leitura em progressão sequencial (cada uma das sete passagens do livro sendo um grande degrau – não se pode subir uma escada começando por qualquer degrau) – a imagem do labirinto de múltiplos inícios oferece uma liberdade que, para fins didáticos, é preciosa. Não que não seja preciso fornecer aos estudantes exposições e leituras que os permitam *saber a quantas andamos* (*knowing our/your way about*) quando enfrentamos a argumentação sincopada que encaramos ao ler o *Tractatus*. Antes de tudo, por certo, é preciso que já os tenhamos familiarizado com o contexto, quer dizer, com as filosofias da aritmética contra as quais Wittgenstein está a seu modo se rebelando – bastariam boas leituras prévias das partes mais relevantes dos *Fundamentos da Aritmética* de Frege e dos

[18] Para algumas "instruções sobre como subir a escada" ver Engelmann 2018a e 2018b.

três primeiros da *Introdução* de Russell, pelos quais se podem ensinar as diferenças conceituais nuançadas que subjazem suas definições de número, mas também aquilo que, tendo em comum, será objeto da crítica de Wittgenstein: o fato de que são definições dependentes da noção de classe, de uma analogia entre o modo de representar de nomes e de símbolos lógicos e matemáticos e, claro, de serem definições que, cada uma a seu modo, fazem dos números objetos.

Em momento oportuno (o que não quer dizer de início, nem na ordem em que aparecem no livro, afinal a lógica dos conteúdos não corresponde à lógica das aprendizagens),[19] é fundamental que os estudantes façam ideia da teoria geral da proposição, a seu turno dependente das ideias de fato e de pensamento, das noções de operação, de função, de verdade *et cetera*;[20] mais importante, é preciso alguma nitidez sobre o sentido do *Grundgedanke*, exposto em 4.0312 no contexto de construção da teoria da proposição – o de que, contra Frege e Russell, "as constantes lógicas não substituem", quer dizer, não representam ou designam como os nomes fazem com os objetos. Devem os estudantes estar cientes, por certo, da ideia de *forma geral da operação*, que antecede ao primeiro grupo de "passagens aritméticas" – formado por meros cinco aforismos [6.02 – 6.31]. Neles, encontramos: uma definição de número (inteiro) [6.02, 6.021]; algumas considerações sobre a "forma geral" e o conceito de número inteiro [6.022, 6.03]; derivada do que precede, uma acusação de superfluidade direcionada à teoria de classes na matemática [6.031]; a alegação de que esta desnecessidade vincula-se ao tipo de generalidade, não causal, que a matemática demanda.

A definição de número é dada, como indiquei, a partir do que Wittgenstein chama de "forma geral da operação", oferecida em 6.01. Uma operação caracteriza-se como a ação de engendrar uma proposição a partir de outras proposições ou, como explica Marion "mais precisamente como aquilo por meio do que uma forma de proposições é engendrada a partir de outra

[19] Esta lembrança é feita em Rocha (2015), o mesmo autor que intuiu a didática como a *arte da graça*.

[20] Há, em português, dois livros que, combinados, podem ser uma boa introdução geral à leitura do *Tractatus*: Marion (2012) e Marques (2005). Uma resenha valiosa do primeiro foi escrita por Silva (2015).

forma de proposições (5.23)" (2012, p. 90). A forma da passagem de uma proposição à outra se dá por meio da aplicação de um operador, o chamado operador *N*.[21] Além da forma geral da operação, a definição de Wittgenstein depende de regras notacionais estipuladas na primeira parte de 6.02. Esta notação pode ser apresentada através da interpretação de Frascolla:

> ***x*** exibe a forma de uma expressão que ainda não foi gerada pela aplicação de uma operação.
>
> **Ω** é a operação variável, o símbolo para o conceito de operação.
>
> **'** é forma do resultado da aplicação de uma operação a uma base dada; resultado de uma operação em geral.

Assim, diz Wittgenstein, em 6.02, "chegamos ao conceito de número:

> defino
> $x = \Omega^{0\prime} x$ Def.
> $\Omega' \Omega^{v\prime} x = \Omega^{v+1\prime} x$ Def."
> (WITTGENSTEIN, 2001, p. 249)

A partir destas definições, e por meio da aplicação sucessiva das regras sobre uma mesma base arbitrária, ou seja, por indução – ou *definição recursiva*, em que se define um objeto em termos de si próprio – gera-se a série (formal) ordenada dos números naturais. Assim, produz-se a seguinte sequência:

[21] Sobre o qual recomendo fortemente a leitura da dissertação de Rodrigo Sabadin Ferreira (2017).

$$
\begin{array}{rlll}
x = \Omega^{0'}x & \rightarrow\ 0 & = & 0\ \ Def. \\
\Omega'x = \Omega^{0+1'}x & \rightarrow\ 0+1 & = & 1\ \ Def. \\
\Omega'\Omega'x = \Omega^{0+1+1'}x & \rightarrow\ 0+1+1 & = & 2\ \ Def. \\
\Omega'\Omega'\Omega'x = \Omega^{0+1+1+1'}x & \rightarrow\ 0+1+1+1 & = & 3\ \ Def. \\
\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x = \Omega^{0+1+1+1+1'}x & \rightarrow\ 0+1+1+1+1 & = & 4\ \ Def. \\
\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x = \Omega^{0+1+1+1+1+1'}x & \rightarrow\ 0+1+1+1+1+1 & = & 5\ \ Def. \\
 & \vdots & &
\end{array}
$$

Figura 1

Reconstrução da definição tractariana de número por Renato Reis Leme (2018)

Wittgenstein completa sua definição determinando, em 6.021, que "O número é o expoente de uma operação." Com isso – quer dizer, tomando como primitiva a noção de operação e a ideia de expressão, ou do mostrar-se,[22] o filósofo se contrapõe inteiramente aos seus antecessores logicistas, em especial a Frege, cuja concepção de número era objetual. Para Wittgenstein, números *expressam*, como traços, a posição que ocupa, em uma série formal, aquilo (a base) sobre o que foi aplicada uma operação. Como nota Noguez, "operações se mostram em suas aplicações; não são, não se confundem com suas aplicações" (2018, p. 44). Embora talvez desagradasse a Wittgenstein, não seria equivocado dizer que da síntese entre sua definição de número e o *Grundgedanke* do tratado, a ideia de que números não são objetos é um corolário.[23]

A seguir, em 6.022, Wittgenstein afirma que o conceito de número "nada é senão *o que todos os números têm em comum*, a *forma geral do número*." (*loc. cit.*, meus itálicos) Agora, lembremos que para Leibniz, como acima indicado, o número é uma *figura universal* porquanto os símbolos aritméticos que se manipulam por meio de regras sub-rogam *aspectos estruturais* de qual-

[22] Para esclarecimentos importantes acerca da famigerada distinção entre o que se diz e o que se mostra são inultrapassáveis tanto Floyd (2007) quando Narboux (2014).

[23] A caracterização de corolário não agradaria a Wittgenstein pelo seu tom axiomático, posto que, justamente, um dos pontos fixos de sua crítica a Frege e Russell, seu projeto logicista de fundamentação da aritmética na lógica, está associado ao modo axiomático de conceber a lógica e sua redução da aritmética, movimento cujas consequências filosóficas desagradavam a Wittgenstein – em especial como nota Marion (2012, p. 102), a consequência de que a aritmética é tão analítica quanto a lógica.

quer representação conceitual. Números, assim como constantes lógicas, para Wittgenstein nada substituem (*nicht vertreten*), não designam ao modo dos nomes, não são propriedade de um *algo*. "Número" é um conceito formal, e enquanto tal, "é já dado com um objeto que sob ele cai" ([4.12721] WITTGENSTEIN, 2001, p. 187) – neste caso, a aplicação de uma operação, que é algo *que se faz*, não que se enuncia. Didaticamente "seja o estádio do Maracanã em dia de jogo do Flamengo o objeto e a contabilização de torcedor a operação, se ambos estão precisamente definidos, então o resultado da operação nos oferecerá a cardinalidade do conjunto objeto." (LEME, 2018, p. 38). Mas talvez fosse mais adequado dizer que "o resultado da *aplicação da operação mostrará* a cardinalidade do objeto". De todo modo, destacada a inseparabilidade do caráter acional ou operacional **(c)** e do caráter expressivo **(d)** da definição wittgensteiniana de número, a ressonância leibniziana da *complementaridade entre operar e exibir* torna-se clara,[24] e com ela se adquirem elementos adicionais para a compreensão das especificidades de sua noção de número como crítica às de Frege e Russell.[25]

Imagino que nesse ponto os leitores especializados, conhecedores da ênfase da literatura secundária na noção de operação como marca maior das filosofias tractarianas da lógica e da aritmética, podem estar se perguntando qual é a novidade que minha leitura traz à praia. A pergunta se justificaria ainda mais se lembrássemos que a tradição do conhecimento simbólico de corte leibniziano encontra ecos também na obra de Frege, como bem mostrou Javier Legris (2012), de modo que também nisso Frege teria influenciado Wittgenstein e que, portanto, nada há de muito relevante aqui. Ora, no que diz respeito à participação de ambos na linhagem leibniziana do conhecimento

[24] Ressonância que também encontrada em Hilbert e Bernays, como mostra Lassalle Casanave (2016, p. 229 *ssq*). Uma crítica da triangulação Leibniz-Hilbert-Wittgenstein, tematizada em Stenlund (2015), ainda está para ser elaborada. Tardo talvez em marcar o reconhecimento de que é possível também traçar um triângulo Leibniz-Russell-Wittgenstein, senão linhas de influência ou recepção direta (aqui se trata mais de um exercício de história das ideias), de linhas de conexão que ajudariam a percorrer melhor outras passagens do *Tractatus*; tratar-se-ia nesse caso de outra entrada no labirinto.

[25] É certo que existem ainda outras críticas de Wittgenstein às definições dos logicistas, que não abordarei, como a de que a definição relação de ancestralidade, fundamental para as caracterizações de Frege e Russell da sequência dos naturais, é circular – crítica, aliás, já formulada por Poincaré, como indica Marion (2012); ou a da superfluidade da noção de classe na matemática.

simbólico, mostramos em Secco & Noguez (2017) que as semelhanças não são tão relevantes quanto as diferenças; ainda que Frege busque, em especial na *Conceitografia*, desenvolver um sistema simbólico no qual as relações formais sejam exibidas com a maior clareza possível, a robustez de seu platonismo o distingue tanto de Leibniz quanto de Wittgenstein. Nos últimos, repito, no que diz respeito aos simbolismos lógicos e matemáticos, trata-se muito menos de considerar o aspecto sub-rogatório **(a)**, do que a aliança entre o caráter operacional e o ectético na articulação, para não dizer novamente da *complementaridade entre operar e exibir.*

O segundo grupo de passagens tractarianas sobre a matemática fornece ainda mais elementos para a consideração das diferenças entre Wittgenstein e seus mentores desde a perspectiva do conhecimento simbólico. Nelas, se enuncia que as proposições da matemática não exprimem pensamentos – que, em realidade, sendo equações (regras de autorização de operações aritméticas), são *pseudoproposições* [6.2, 6.21, 6.211, 6.24]; que, por meio do sinal de igualdade (uma autorização para a substituição de expressões), as equações aritméticas mostram, exibem "a lógica do mundo" [6.22, 6.23, 6.232]; que a correção das equações aritméticas "é algo a ser visto", não asserido (e nisso consiste "demonstrar": mostrar a substitutibilidade das expressões que ladeiam o sinal de identidade por meio de operações de iteração simbólica) [6.231, 6.2321, 6.2322, 6.2323]; que a intuição necessária à solução de problemas matemáticos é fornecida *pela linguagem ela mesma* – e daí resulta que calcular e realizar experimentos sejam processos conceitualmente distintos [6.233, 6.2331]; que a matemática é um método da lógica; [6.234, ecoando a primeira sentença de 6.2]. E, por fim, Wittgenstein "Demonstra" (calcula de acordo com as regras anteriormente explicitadas) que 2 x 2 = 4.[26]

Uma análise detida de todas estas ideias está fora do alcance dessas notas. O que faço aqui é considera-las em resumo e em conjunto com vistas a defender a ideia de que por mais que a letra do texto tractariano não nos autorize a falar de conhecimento matemático em sentido "genuíno" (como conhecimento proposicional), o modo como Wittgenstein se manifesta sobre as

[26] Renato Reis Leme (2018) sustenta que, de fato, não se trata de uma demonstração, mas de uma computação, no sentido posteriormente determinado por Turing.

práticas matemáticas cotidianas, em especial de calcular, é suficiente como para legitimar a tese de acordo com a qual, no *Tractatus*, conhecimento matemático é conhecimento formal em estrito sentido leibniziano (**CS$_{CF}$** ou **(f)** acima).

Para tanto, começo destacando as passagens 6.232 e 6.2321 – esta, aliás especular àquela onde se enuncia o "fato que contém em si toda a filosofia da lógica" (6.113): o de que a verdade das proposições da lógica pode ser reconhecida (*erkennen*) no símbolo tão somente (*am Symbol allein*). A primeira parte de 6.232 se refere à ideia de Frege de que "1+1+1+1" e "(1+1) + (1+1)" têm a mesma referência (*Bedeutung*), mas diferentes sentidos (*Sinn*). E segue:

> 6.232 (...) Mas o essencial, no caso da equação, é que ela não é necessária para se mostrar *que* as duas expressões ligadas pelo sinal de igualdade têm o mesmo significado, já que isso *se pode ver nessas próprias expressões*.
> 6.2321 E que as proposições da matemática possam ser demonstradas nada quer dizer senão que sua correção é *algo a ser visto*, sem que deva o que exprimem ser comparado com os fatos quanto à sua correção. (WITTGENSTEIN, 2001, p. 263, meus itálicos)

O aspecto ectético do reconhecimento de que duas expressões equacionais expressem a mesma informação, e de que uma equação é correta só poderia ser mais diretamente exposto se Wittgenstein repetisse a formosa expressão *am Symbol allein*. Parece-me também bastante sugestivo o fato de que não se necessita (e em realidade nem sequer se possa pretender) dizer, afirmar, asserir que ambos os lados do sinal de igualdade em uma equação partilham seu *Bedeutung*. Saber usar os sinais "1" e "+", manipula-los de acordo com as regras do jogo da aritmética, é saber tudo o que é preciso para o reconhecimento da igualdade do significado de "1+1+1+1" e "(1+1) + (1+1)"; do mesmo modo, saber usar numerais e outros símbolos para operações aritméticas é saber tudo o que é preciso para que se possa legitimamente pleitear saber adicionar, subtrair, multiplicar, dividir etc.. É por isso que Wittgenstein pode afirmar em 6.2323 que equações apenas fazem assinalar um ponto de vista: o ponto de vista desde o qual consideramos as expressões que ladeiam o sinal de igualdade. Esse é o contexto no qual o tema, a questão da necessidade da intuição na solução de problemas matemáticos é introduzido, em 6.233, retomando-se sob nova roupagem o tema da verificação (reconhecimento, para o caso das proposições lógicas)[27] e da visualização (para o caso das equações) *no símbolo tão somente*.

A resposta de Wittgenstein é, mais uma vez, essencialmente leibniziana: é a linguagem simbólica ela mesma, por meio de seu aspecto calculatório ((**c**) acima), que fornece a intuição de que se necessita para resolver um problema matemático. Assim (segue a passagem 6.2331), calcular não é o mesmo que fazer experimentos justamente porque consiste em manipular símbolos (que a seu turno *sub-rogam tão-somente conceitos e relações formais*, jamais objetos ou relações entendidas como objetos com os quais se tem alguma *acquaitance*) de acordo com regras de substituição de expressões. Em jargão tractariano, isso quer dizer que em matemática, ao calcular, estamos lidando com o âmbito da necessidade, das relações internas, relações estritamente formais. Embora também a ciência tenha um arcabouço formal de "iluminações *a priori*" (6.34), os processos de experimentação fazem uso predominante "da linguagem" (proposicional) a fim de contemplar as relações causais em jogo nos fenômenos descritos, e quando realizamos experimentos estamos na lida com o âmbito da contingência, das relações externas etc.[28]

Agora bem, é claro que se quisermos ser fiéis ao *Tractatus*, a alegação de que a matemática engendra conhecimento é descabida, pois neste livro suturado pela dialética entre o que se pode dizer e o que somente se mostra, o conhecimento se inscreve nos limites do dizível. Escovando o texto a contrapelo, minha alegação é a de que dado que se pode ver, como busquei mostrar, a presença de elementos claramente leibnizianos nas considerações do jovem Wittgenstein sobre a matemática, e que aqueles elementos, por sua vez se

---

[27] Reconhecimento que constitui fundamentalmente o que é demonstrar *em* lógica (de acordo com 6.1262): dispor de um expediente mecânico (cálculo) para facilitar o *reconhecimento* (visual) de uma tautologia complicada. Demonstrar *na* lógica e demonstrar *logicamente* (*com* lógica) não é o mesmo, assim como calcular ou utilizar proposições matemáticas *na* matemática não é o mesmo que as utilizar "na vida" (6.211).

[28] A dicotomia entre relações internas e externas como chave de compreensão da distinção entre asserir/dizer e exemplificar é abordada de maneira bastante clara em Jourdan (2009) e, no contexto de uma discussão sobre a autocrítica nos anos 1930, em especial o que diz respeito ao modo como criticará Frege na questão das atribuições numéricas em Velloso (2017).

combinam na composição de uma noção de conhecimento de estruturas e relações formais – conhecimento formal – é válida a caracterização da filosofia tractariana da matemática, *de tout* uma filosofia da aritmética, como legatária legítima da tradição leibniziana do conhecimento simbólico.[29]

3. Encerramento: um filósofo da prática matemática extemporâneo?

A terceira e última alegação anunciada na abertura destas notas acerca da chave de leitura acima proposta diz respeito mais a uma suspeição do que a uma certeza. A suspeita tem origem no contexto das diversas investigações que, por semelhança de família mais do que por definição, convencionou-se chamar de filosofia da prática matemática. Mais especificamente, quando se trata de investigações de ordem histórica – como as que encontramos na "Introdução" de Mancosu (2008) para o livro seminal desse novo *brand* de pesquisas filosóficas sobre a matemática, ou mais recentemente no trabalho de Jessica Carter (2019) – costuma-se retroceder no máximo até as investigações de Imre Lakatos em *Conjecturas e refutações*. De acordo com essa narrativa, o filósofo húngaro, sua filosofia dialética da matemática – que também chamou de quase-empirismo – teria sido um dos primeiros dissidentes das filosofias fundacionalistas da matemática que foram progressivamente se estabelecendo desde fins do século XIX até meados dos 1930.

Wittgenstein é por vezes mencionado, é verdade: como um terapeuta da linguagem cujos procedimentos podem aliviar as análises filosóficas da matemática de pesos desnecessários (Avigad 2018); como digno de desconsideração por princípio (Ferreirós 2016 – na primeira nota de rodapé de seu de outro modo importante livro); ou de modo um pouco mais simpático e operacional, como fizemos em Secco (2013) e Secco & Noguez (2017), e como faz John Mumma (2020) – sendo que nesses casos são mobilizados *insights* e outros elementos do pensamento de Wittgenstein do período maduro, quer dizer, posteriores aos anos 1939. Sobre o *Tractatus*, até hoje não me deparei

[29] Para uma abordagem de outros "deslocamentos, reinvestimentos, realocações e mesmo, em alguns casos de enriquecimento, senão do ponto de vista do conteúdo, ao menos do ponto de vista de suas aplicações [dos conceitos leibnizianos em Wittgenstein]" – curiosamente sem qualquer ênfase especial na matemática – Plaud (2018).

com uma linha sequer em que fosse usado ou mencionado como o texto que minha suspeição indica ser: o legítimo precursor contemporâneo da postura filosófica que caracteriza, a filosofia da prática matemática. Senão vejamos.

Ora, de acordo com Mancosu os ancestrais mais relevantes das filosofias da prática matemática (o plural é por minha conta) encontram-se na *tradição dos dissidentes* (*mavericks*). Os traços gerais de suas filosofias da matemática seriam:

> **a.** anti-foundationalism, i.e., there is no certain foundation for mathematics; mathematics is a fallible activity;
> **b.** anti-logicism, i.e. mathematical logic cannot provide the tools for an adequate analysis of mathematics and its development;
> **c.** attention to mathematical practice: only detailed analysis and reconstruction of large and significant parts of mathematical practice can provide a philosophy of mathematics worth its name. (MANCOSU, 2008, p.5)

Embora reconhecendo que os autores desta tradição realizaram uma significativa extensão do domínio tradicional de estudos filosóficos sobre a matemática, eles não foram tão longe como para "redirecionar substancialmente o curso da filosofia da matemática" (*loc. cit*).

Agora, dependendo do modo como concebemos a expressão "antifundacionalismo", ela até poderia se aplicar ao caso do *Tractatus*. Não porque ali encontremos a ideia de que a matemática é uma atividade falível (segunda parte da característica **a.** de Mancosu), mas porque às críticas mais ou menos explícitas de Wittgenstein aos logicismos de Frege e Russel parecem subjazer a ideia de que a matemática não necessita de fundamentação (primeira parte da característica **a.** de Mancosu). Lembremos que, para Wittgenstein, operar com símbolos matemáticos – tanto quanto o operar com símbolos lógicos – é realizar uma prática que, famosamente, *toma conta de si mesma*, é dizer, é autônoma com relação à realidade à qual perfeitamente se aplica, embora reflita, diáfana, a lógica do mundo (6.13). Que a postura do jovem Wittgenstein seja antilogicista (característica **b.** de Mancosu), não me parece ser preciso repetir.[30] Por fim, e talvez mais contenciosamente, as observações tractarianas

[30] Embora Rodrigo Sabadin considere que eu deva sublinhar aqui que minha leitura é oposta às de intérpretes que caracterizam a filosofia da matemática do jovem Wittgenstein como um "logicismo sem classes" – Mathieu Marion – ou como um "realismo à moda" – como Luiz Henrique Lopes dos Santos).

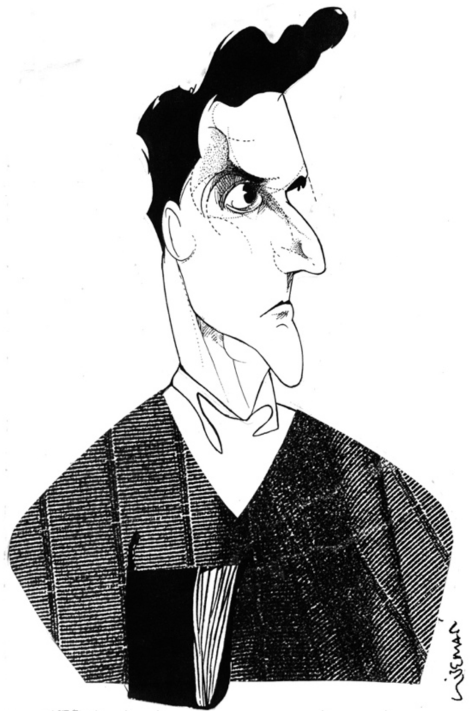
sobre a aritmética configuram análises de práticas matemáticas (característica **c.** de Mancosu), muito embora práticas operatórias muito simples, e detalhadas somente na medida em que permita a pré-socrática retórica do livro.

Que o tópico principal do interesse de Wittgenstein estivesse na análise de práticas triviais ou rudimentares, poderia bem indicar "um alto grau de sensibilidade conceitual por parte de sua abordagem simbólica", como já sugeriu Stenlund (2013, p. 32), que afirma ainda

> I would say that this is why it is so difficult in many cases to understand what he is doing, what he is up to, in his writings on the foundations of mathematics. On this level of 'trivialities', the topic of 'the nature of mathematical symbolism' is a non-issue for the mathematician. (*loc. cit.*)

Que os contemporâneos e contemporâneas filósofas da prática matemática se importem abundantemente com o tópico "a natureza do simbolismo matemático" deveria, a meu ver, servir como razão adicional para revisitar a obra de juventude de Wittgenstein, por razões históricas e conceituais. Afinal, um dos tópicos de assaz potencial está na inter-relação entre lógica, matemática e ciência da computação. Ademais, como tem indicado Juliet Floyd em diversos de seus mais recentes trabalhos, e Leme (2018) com sua ideia de programação como forma de vida, entre Wittgenstein e Turing há mais do que imagina nossa habitual filosofia.

De todo modo, e retornando à minha motivação original, terei ao menos um sucesso se leitores e leitoras engajados com filosofia da matemática, não somente como pesquisadores mas como professores-pesquisadores, considerarem a plausibilidade da ideia de que as primeiras observações de Wittgenstein sobre a aritmética merecem figurar em cursos de introdução à filosofia da matemática (e quiçá mesmo de introdução geral, como sugeriu Marcelo Carvalho em 2010). Isso, senão por seus acertos – que não é de ensinar acertos que vive uma professora de filosofia –, ao menos para que a formação de nossos estudantes possa ser mais completa do que quando lhes apresentamos apenas "as três grandes" escolas fundacionalistas, ignorando a voz dissonante de Wittgenstein (e, vale dizer, também a do grande Poincaré). Mostrar a nossos estudantes o exemplo deste aprendiz que buscou, de modo bastante peculiar, é verdade, contestar e ultrapassar as ideias de seus mentores pode ser um bom modo de instigá-los a fazer o mesmo e, assim, seguir estimulando o desenvolvimento da autonomia intelectual nesta longa e multifacetada conversa que é a filosofia. E talvez também a conversa entre a filosofia e a matemática.[31]



Crédito da Imagem: Bruno Liberati.

In memoriam

(1949-2020)

Referências

AVIGAD, J. "Understanding proofs". In: MANCOSU, P. (ed) *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford: Oxford University Press, 2008, pp. 317-353

CARVALHO, M. "O que se diz e o que se cala: Wittgenstein e os limites da linguagem." IN CORNELLI, G., CARVALHO, M., DANELON, M. (eds)

[31] A autora agradece à CAPES pelo financiamento através do AUXPE 23038.006944/2014-72 e do Projeto CAPES-Cofecub nº 88887.130207/2017-01, Processo 88887.371155/2019-00. Aos colegas Rodrigo Sabadin Ferreira, Ronai Pires da Rocha e Tamires Dal Magro, agradeço a leitura atenciosa, as correções e sugestões que melhoraram a redação deste texto. A Bruno Liberati, autor da caricatura acima, manifesto meu imenso carinho e a gratidão por ter generosamente cedido este seu trabalho para meu uso acadêmico em 2011. Que sua estadia em outros planos seja como você gostava de chamar as coisas boas, Bruno: *Sensacional!*

Filosofia: Ensino médio. Coleção Explorando o Ensino, Vol. 14. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010, pp. 101-116.

CARTER, J. "Philosophy of Mathematical Practice – Motivations, Themes and Prospects". *Philosophia Mathematica*, Vol. 27, Issue 1, February 2019, pp.1–32.

DA SILVA, J. J. *Filosofias da matemática*. São Paulo: Editora Unesp, 2007.

D'AGOSTINI, N. *Stanislávski e o Método de Análise Ativa: a criação do diretor e do ator*. São Paulo: Perspectiva, 2018.

ENGELMANN, M. "Instructions for Climbing the Ladder (The Minimalism of Wittgenstein's *Tractatus*)." *Philosophical Investigations*, v. 41, pp. 446-470, 2018.

ENGELMANN, M. "What does it take to climb the ladder? (A sideways approach)". *Kriterion*, n.140, pp. 591-611, 2018.

ESQUISABEL, O. M. "¿Lenguage racional o ciencia de las formulas? La pluridimensionalidad del programa leibniziano de la Característica general" In: WRIGLEY, M. (ed.) *Manuscrito, Revista Internacional de Filosofia,* Vol. 25, nº 2: *Dialogue, Language, Rationality. A Festschrift for Marcelo Dascal*, 2002, pp. 147-197.

ESQUISABEL, O. M. "Representing and Abstracting. An Analysis of Leibniz's Concept of Symbolic Knowledge." In: LASSALLE CASANAVE, A. (ed.) *Symbolic Knowledge from Leibniz to Husserl*. London: College Publications, 2012, pp. 1-50.

FERRARI, M. & STAMATESCU, I-O. *Symbol and physical knowledge: on the conceptual structure of physics* Berlin Heidelberg New York: 2002.

FERREIRA, R. *A Lógica do Tractatus e o Operador N: Decidibilidade e Capacidade Expressiva*. Dissertação (Mestrado em Filosofia). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2017.

FERREIRÓS, J. *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*. Princeton: Princeton University Press, 2016.

FLOYD, J. "Number and Ascriptions of Number in Wittgenstein's *Tractatus*" In RECK, E. (ed.), *From Frege to Wittgenstein: Perspectives on Early Analytic Philosophy* pp. New York: Oxford University Press, 2002, pp. 308–352.

FLOYD, J. "Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics. In SHAPIRO (ed.) *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. pp. 75-128, 2007a.

FLOYD, J. “Wittgenstein and the Inexpressible”. In: CRARY, A. (ed), *Wittgenstein and the Moral Life: Essays in Honor of Cora Diamond*. MIT Press, pp. 177-234, 2007b.

FRASCOLLA, P. *Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics*. London and New York: Routledge, 1994.

FRASCOLLA, P. *Understanding Wittgenstein's Tractatus*. Routledge, 2007.

FREGE, G. *Os Fundamentos da Aritmética. Uma Investigação Lógico-Matemática sobre o Conceito de Número*. Tradução de Luiz Henrique dos Santos. In. Frege/Peirce: Coleção Os Pensadores. São Paulo: Abril Cultural, 1980.

ISHIGURO, H. *Leibniz’s Philosophy of Logic and Language*. London: Duckwork, 1972.

JOURDAN, C.A. *Impredicatividade, Generalidade e o Desenvolvimento do Pensamento de Wittgenstein*. Tese (Doutorado em Filosofia) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Orientador: Luiz Carlos Pereira. Rio de Janeiro, 2009.

LASSALLE CASANAVE, A. “Kant’s Avatars of Symbolic Knowledge: The Role of Symbolic Manipulation in Kant’s Philosophy of Mathematics.” LASSALLE CASANAVE, A. (ed.), London: College Publications, 2012, pp. 51-78.

LASSALLE CASANAVE, A. “Conocimiento simbólico y aritmética en HIlbert”. FERREIRÓS DOMÍNGUEZ, J. & LASSALLE CASANAVE, A. (Coord.) El árbol de los números - cognición, lógica y prática matemática. Sevilla: Editorial Universidad de Sevilla, 2016, pp. 219-234.

LASSALLE CASANAVE, A. & SAUTTER, F. T. *Visualização das Ciências Formais*. London: College Publications, 2012.

LEME, R. R. *Programação como forma de vida*: *uma crítica aao representacionalismo na teoria da computação.* Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Filosofia). Orientador: Paulo F.E. Faria; co-orientadora: Gisele Dalva Secco. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.

LEGRIS, J. “Between Calculus and Semantic Analysis”. LASSALLE CASANAVE, A. (ed.), London: College Publications, 2012, pp. 79-114.

MANCOSU, P. “Introduction”. In: Mancosu (ed) *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford: Oxford University Press, 2008, pp. 1-21.

MARION, M. *Wittgenstein, Finitism, and The Foundations of Mathematics*. Nova York, EUA: Oxford University Press, 1998.

MARION, M. *Ludwig Wittgenstein: Introdução ao* Tractatus Logico-Philosophicus. São Paulo: Annablume Editora, 2012.

MARQUES, E. da R. *Wittgenstein e o* Tractatus. Rio De Janeiro: Zahar, 2015.

MÜHLHÖLZER, F. "'A mathematical proof must be surveyable' – what Wittgenstein mean by this and what it implies". *Grazer Philosophische Studien* vol. 71, 2005, pp. 57–86.

MUMMA, J. "The computational effectiveness of geometric diagrams". (no prelo)

NAKANO, A. L. *A matemática das Philosophische bemerkungen: Wittgenstein no contexto da* Grundlagenkrise. Tese (Doutorado). Universidade Fededral de São Carlos: UFSCar, 2015.

NARBOUX, JP. "How Showing takes care of itself". *Philosophical Topics*, v.42, n.2 2014.

POINCARÉ, J.-H. *O valor da ciência*. Tradução Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

PLAUD, S. *Expression et coordination de Leibniz à Wittgenstein*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 2018.

ROCHA, R. P. da. *Ensino de filosofia e currículo*. 2ª ed. Santa Maria: Editora da UFSM, 2015.

ROCHA, R.P. da. *Escola Partida: ética e política na sala de aula*. São Paulo: Editora Contexto, 2020.

RUSSELL, B. "As funções de um professor". *Quatro textos excêntricos*. Prefácio e tradução de Olga Pombo. Lisboa: Relógio D'água, 2000.

RUSSELL, B. *Introdução à filosofia matemática*. Tradução Maria Luiz X. De A. Borges. Rio de Janeiro: Zahar, 2007

SANTOS, L.H. dos "A Essência da Proposição e a Essência do mundo." In: *Tractatus Logico- Philosophicus*. Tradução, apresentação e estudo introdutório de Luiz Henrique Lopes dos Santos, São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001, pp. 11-128.

SANTOS, L.H. dos "Notas críticas sobre o realismo matemático, à moda de Wittgenstein". *Analytica Revista de Filosofia*, vol. 12 (1), 2008, pp.131-147.

SECCO, G.D. *Entre provas e experimentos: uma leitura wittgensteiniana das controvérias em torno da prova do Teorema das Quatro Cores*. Tese de Doutorado. Orientador: Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira. PUC-Rio. Rio de Janeiro, 2013.

SECCO, G.D. & NOGUEZ, P.M.R. "Operar e exibir: Aspectos do Conhecimento Simbólico na Filosofia Tractariana da Matemática". *Revista Portuguesa de Filosofia*, vol 73 (3-4), 2017, pp. 1463-1492.

SHAPIRO, S. *Filosofia da matemática*. Tradução e notas de Augusto J. Franco de Oliveira. Lisboa: Edições 70, 2015.

SILVA, M. MARION, Mathieu. *Ludwig Wittgenstein: introdução ao* Tractatus Logico-Philosophicus. São Paulo: Annablume, 2012. Princípios: Revista de Filosofia (UFRN), v. 20, n. 34, 14 jul. 2015, pp. p. 365-386.

STENLUND, S. "The "middle Wittgenstein" and Modern Mathematics" In: Dybjer et al. (eds) *Epistemology versus Ontology, Essays on the Philosophy and Foundations of Mathematics in Honour of Per Martin-Löf*. Dordrecht: Springer Science + Business Media, 2012, pp.139-159.

STENLUND, S. "Wittgenstein and Symbolic Mathematics". *O que nos faz pensar*, v.22, n.33, 2013, pp. 7-34.

STENLUND, S. *The Origin of Symbolic Mathematics and the End of the Science of Quantity*. Uppsala: Uppsala Universität, 2014.

STENLUND, S. "On the Origin of Symbolic Mathematics and Its Significance for Wittgenstein's Thought" *Nordic Wittgenstein Review*, 4, n.1, 2015, pp. 7-92.

VELLOSO, A. "Wittgenstein "Great Analysis" and Frege's construal of number as a property of properties". *Analytica*, Rio de Janeiro, vol 21 no 1, 2017, pp. 17 1-208.

WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Tradução, apresentação e estudo introdutório de Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

WRIGLEY, M. "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics," *Philosophical Quarterly*, Vol. 27, n., 1977, pp. 106: 50-9.