# Um curso de lógica

**Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)**
**(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

Silvestre, Ricardo Sousa
Um curso de lógica / Ricardo Sousa Silvestre. –
Petrópolis, RJ : Vozes, 2011.
Bibliografia.
ISBN 978-85-326-4040-6

1. Lógica – Estudo e ensino I. Título.

10-05873 CDD-160

Índices para catálogo sistemático:
1. Lógica : Filosofia 160

Ricardo Sousa Silvestre

# Um curso de lógica

EDITORA
VOZES

Petrópolis

Rua Frei Luís, 100
25689-900 Petrópolis, RJ
Internet: http://www.vozes.com.br



**Diretor editorial**
Frei Antônio Moser

**Editores**
Aline dos Santos Carneiro
José Maria da Silva
Lídio Peretti
Marilac Loraine Oleniki

**Secretário executivo**
João Batista Kreuch

*Editoração*: Dora Beatriz V. Noronha
*Projeto gráfico*: AG.SR Desenv. Gráfico
*Capa*: Érico Lebedenco

ISBN 978-85-326-4040-6

Editado conforme o novo acordo ortográfico.

Este livro foi composto e impresso pela Editora Vozes Ltda.

A minha esposa, Eugênia, e minhas filhas,
Ekarani, Jahnavi e Tulasi.

# Sumário

# Prefácio

A *lógica* enquanto disciplina acadêmica tem suas particularidades. Primeiro, apesar de estar tradicionalmente relacionada com a filosofia, ela hoje desempenha um papel extremamente importante em áreas como a matemática, a ciência da computação, a inteligência artificial e o direito. Segundo, no final do século XIX e início do século XX, aconteceu com a lógica fenômeno semelhante ao que ocorreu com a física nos séculos XVI e XVII: a sua matematização. Em outras palavras, a lógica passou a ser desenvolvida e estudada através de métodos matemáticos: ela se transformou, por assim dizer, na *lógica matemática*.

Esse segundo ponto é importante por várias razões. Primeiro, semelhantemente ao que aconteceu com a física após a sua matematização, nos pouco mais de cem anos que se passaram desde que figuras como Boole, Frege, Russell e Whitehead estabeleceram os alicerces da lógica matemática, esta foi alvo de um desenvolvimento extraordinário (principalmente se comparado com o seu desenvolvimento desde sua criação, por Aristóteles, no século IV a.C. até meados do século XIX). Segundo, hoje a lógica é indubitavelmente uma disciplina matemática, sendo os termos "lógica" e "lógica matemática" em certo sentido sinônimos. Isso, no entanto, não implica que a lógica, ou lógica matemática, seja uma disciplina *exclusiva* da matemática, ou de áreas correlatas com a matemática. Apesar de, após a sua matematização a lógica ter passado a incluir o currículo oficial de matemáticos e posteriormente cientistas da computação, na filosofia também se verificou a adoção massiva do estudo da lógica por esse viés matemático (o que pode ser constatado examinando-se a literatura filosófica especializada desenvolvida nas últimas oito décadas).

Isso talvez sugira certa assimetria em relação à posição da lógica na filosofia, de um lado, e na computação e matemática, de outro. Primeiro, pode-se acertadamente atribuir uma posição privilegiada à lógica matemática dentro da computação e da matemática; de fato, foi exatamente esse fenômeno de matematização da lógica o que a tornou interessante e útil para matemáticos e cientistas da computação. Por outro lado, pode-se ter a impressão de que, com o surgimento da lógica matemática, passou a existir, dentro da filosofia, algo como a "velha" e a "nova" lógica, sendo as duas algo como que rivais uma da outra. Houve sim, é verdade, várias tentativas dentro da história da filosofia de realizar o objetivo da lógica[1], sendo a lógica aristotélica e a lógica estoica dois exemplos disso. No entanto, do ponto de vista da comunidade filosófico-acadêmica contemporânea, tais tentativas históricas são exatamente o que tal expressão significa: tentativas históricas. Salvo exceções pontuais, do ponto de vista da pesquisa que é feita em lógica dentro da filosofia hoje, e do uso que se faz da lógica em disciplinas como epistemologia, metafísica, ética, filosofia da religião e outras, lógica em filosofia hoje é o mesmo que lógica matemática. Há obviamente uma importância inquestionável em se conhecer, por exemplo, a lógica aristotélica ou a lógica estoica. É nossa opinião, no entanto, que tal importância não é maior nem menor do que a importância que há para um físico em aprender a física aristotélica ou a física cartesiana: ela tem um caráter meramente histórico.

No que se refere ao ensino da lógica, enquanto que do lado da computação e matemática este aspecto matemático da lógica não tem, por razões óbvias, maiores implicações, do lado da filosofia há certa tensão oriunda do rigor que passou a caracterizar a lógica a partir do século XX. Apesar da relação tradicionalmente existente entre matemática e filosofia, a adoção de um vocabulário por vezes extremamente técnico tem, de certa forma, contribuído para uma falta de interesse na lógica por parte de estudantes e professores de filosofia com pouca bagagem matemática. Isso é certamente lamentável, pois sem um conhecimento mínimo de lógica, tais acadêmicos ficam impossibilitados não só de participar, mas mesmo de compreender muitos dos desenvolvimentos mais notáveis feitos em filosofia nas últimas décadas.

Dito isso, é possível ir ao que podemos chamar de o objetivo central deste livro: ser uma maneira fácil e acessível, porém rigorosa e tecnicamente precisa, do leitor com pouca ou nenhuma familiaridade com a matemática[2] ser introduzido à lógica matemática. Na persecução desse objetivo, tentamos fazer com que todo o texto seja, na medida do possível, autoexplicativo, o que nos levou a incluir extensas explicações da parte mais técnica do conteúdo do livro. Concomitante a isso, tentamos enfatizar de modo especial a aplicação prática dos sistemas lógicos na análise de enunciados e argumentos. Assim, esse livro pode ser visto como uma tentativa de explicar em termos claros e simples os pormenores por trás da definição, uso e propriedades dos sistemas lógicos.

O nosso público alvo, como os parágrafos acima bem deixam transparecer, é primordialmente alunos e professores de cursos de graduação e pós-graduação em filoso-

---

**1.** Cf. capítulo 1 para uma discussão a respeito do que é o objetivo da lógica.

**2.** A única exceção a isso é a exigência de uma familiaridade mínima com a notação de teoria dos conjuntos, cujo domínio nós supomos o leitor adquiriu no ensino médio.

fia, direito, matemática e computação. De uma forma geral, no entanto, conforme será explanado logo abaixo, tanto o conteúdo do livro como a sua organização foram concebidos de tal forma a permitir sua utilização por qualquer pessoa interessada em aprender lógica, independentemente de sua área de atuação ou bagagem teórica prévia.

O livro é dividido em cinco unidades: (1) Introdução, (2) Lógica proposicional, (3) Derivação e análise lógica no cálculo proposicional, (4) Lógica de predicados e (5) Apêndices, sendo cada uma dessas unidades composta por dois ou mais capítulos. Na unidade intitulada “Introdução”, que engloba os capítulos 1 e 2, tentamos primeiro, no capítulo 1, delimitar o que seria o escopo da lógica, enfatizando o seu duplo aspecto como teoria da inferência e teoria da representação. Já no capítulo 2 nos detemos sobre o que poderíamos chamar de o método da lógica, isto é, sobre o uso que ela faz da linguagem e das técnicas matemáticas. Por ser geral, não se restringindo a nenhum sistema lógico em particular, o conteúdo deste capítulo é um tanto quanto abstrato[3].

Já os capítulos da segunda unidade se detêm na exposição de um dos sistemas lógicos mais importantes: a lógica clássica proposicional. Enquanto os capítulos 3 e 4 expõem, respectivamente, a linguagem proposicional e a semântica da lógica proposicional, o capítulo 5 se concentra no cálculo axiomático clássico proposicional.

Os capítulos da unidade intitulada “Derivação e análise lógica no cálculo proposicional” cumprem vários propósitos. Em primeiro lugar, eles representam uma extensão do capítulo 5, visto que centram sobre a noção de derivação no cálculo clássico proposicional. Enquanto que o capítulo 6 exibe e prova diversos teoremas lógicos e regras de inferência derivadas relacionadas com a implicação, conjunção e disjunção, o capítulo 7 mostra a derivação de alguns dos mais importantes teoremas lógicos e regras de inferência da negação. Isso representa, cremos nós, o preenchimento de uma séria lacuna encontrada nos livros-texto de lógica, que é o de detalhar e elaborar sobre o processo de construção de derivações dos mais importantes teoremas e regras do cálculo axiomático clássico. Em segundo lugar, de posse de tais teoremas e regras, ilustramos, no capítulo 8, o uso do cálculo proposicional na análise lógica de diversos argumentos, na sua grande maioria de natureza filosófica. Com isso tentamos mostrar a utilidade prática da lógica em algo que é uma das principais tarefas do filósofo: a avaliação de argumentos. Finalmente, na exposição dos vários teoremas e regras relacionadas com os vários conectivos lógicos feita nos capítulos 6 e 7, introduzimos diversos cálculos mais fracos que o cálculo clássico proposicional, entre eles o cálculo intuicionista e dois cálculos paracon-

3. Uma versão preliminar dos capítulos 1 e 2 foi publicada na revista *Crítica* (ISSN 1749-8457) sob o título “Lógica e sistemas lógicos”.

sistentes. Assim, esses capítulos também podem ser vistos como modestas introduções ao que hoje é certamente uma das áreas de pesquisa mais importantes em lógica: a área de lógicas não clássicas.

Como seria de se esperar, os capítulos da unidade intitulada "Lógica de predicados" realizam tarefa semelhante à dos capítulos 3, 4 e 5, só que agora com respeito à lógica clássica de predicados de primeira ordem. Enquanto os capítulos 9 e 10 expõem, respectivamente, a linguagem de predicados e a semântica da lógica de primeira ordem, o capítulo 11 se concentra no cálculo axiomático de predicados.

Finalmente, há uma seção de apêndices englobando os dois últimos capítulos. No capítulo 12 é abordada a área da lógica tradicionalmente conhecida como metalógica ou metateoria. Incluindo tal tópico como um capítulo separado[4], pudemos nos abster de exibir as provas dos diversos metateoremas mencionados no decorrer de nossa exposição. Assim, caso o instrutor deseje, tal tópico pode ser trabalhado em um momento posterior à aprendizagem dos sistemas lógicos propriamente ditos. Fizemos isso obviamente em virtude de a metalógica ser indubitavelmente a parte da lógica que requer maior grau de abstração matemática, razão talvez pela qual essa importante subárea da lógica seja de certa forma negligenciada por estudantes de filosofia, e também por ser algo claramente distinto da (muito embora intimamente relacionado com) apresentação e do uso dos sistemas lógicos. Finalmente, seguindo o que acreditamos ser o mais recomendável em um livro-texto desse tipo, omitimos qualquer referência bibliográfica no corpo dos capítulos e reunimos no capítulo 13 todas as referências juntamente com indicações de leitura adicional para cada unidade.

Sobre os exercícios do livro, conforme falamos acima, uma das nossas preocupações centrais foi a de ilustrar a aplicação dos sistemas lógicos na análise de enunciados e argumentos. Na tentativa de alcançar esse objetivo, dividimos a seção de exercícios contida no final de cada capítulo em duas: uma com exercícios explorando os aspectos técnico-conceituais do conteúdo exposto, e outra contendo exercícios de análise lógica de enunciados e argumentos. Como seria de se esperar, esta última envolve o uso dos sistemas lógicos expostos no livro; são sentenças e argumentos, na sua maioria de conteúdo filosófico, que têm como objetivo fazer com que o aluno *use* o conhecimento técnico aprendido no decorrer do capítulo na análise e apreciação de argumentos. Essa divisão, acreditamos, facilitará o uso do livro por leitores de áreas tão diversas como a filosofia e a computação. Apesar de ambas as classes de exercícios serem necessárias à as-

**4.** Na maioria dos livros-textos clássicos de lógica matemática, a metalógica aparece diluída dentro dos capítulos que expõem os diversos sistemas lógicos.

similação satisfatória do conteúdo, enquanto professores de computação e matemática provavelmente enfatizarão exercícios da primeira seção, professores de cursos de filosofia talvez prefiram dar prioridade aos exercícios da segunda seção[5].

Existem várias maneiras de utilizar este livro em um curso de graduação. Uma delas é simplesmente cobrir todo o conteúdo do livro em uma única disciplina. Outra seria dividir o seu conteúdo em duas partes, de forma que a primeira seja trabalhada em uma disciplina e a segunda parte no semestre seguinte em outra disciplina. Para fins de exposição, chamemos essa primeira disciplina de Lógica I e a segunda de Lógica II. Assim, enquanto que em Lógica I seriam trabalhados os capítulos da Introdução (capítulos 1 e 2) e da Lógica Proposicional (capítulos 3, 4 e 5), em Lógica II seriam trabalhados os capítulos da Derivação e análise lógica no cálculo proposicional (capítulos 6, 7 e 8), Lógica de predicados (capítulos 9, 10 e 11) e o capítulo 12. Outra possibilidade é, em adição aos capítulos mencionados acima, trabalhar em Lógica I também o capítulo 8, o que deve obviamente ser precedido por uma breve explanação acerca de alguns pontos-chave sobre construção de derivações mencionados nos capítulos 6 e 7. Dessa forma, Lógica II ficaria restrita aos capítulos 6, 7, 9, 10, 11 e 12, obtendo assim um equilíbrio maior em termos de conteúdo entre as duas disciplinas.

Campina Grande, Paraíba, Setembro de 2010

Ricardo Sousa Silvestre

---

**5.** Na elaboração dos exercícios de análise lógica, utilizamos o estilo e alguns dos exemplos encontrados no livro de Harry Gensler (2001).

# Agradecimentos

Agradeço de sobremaneira à minha família, a quem esse livro é dedicado, pelo amor, paciência e suporte dados a mim constantemente. Também agradeço ao Prof. Tarcício Pequeno, amigo e mentor intelectual; aos Professores Guido Imaguire (UFRJ) e Matias Francisco Dias (UFPB), por terem lido versão anterior do livro e feito comentários valiosos; ao Prof. Alexandre Costa Leite (UnB), por ter gentilmente feito revisão minuciosa de todo o manuscrito; e a todos os meus alunos que, de uma forma ou de outra, ajudaram na confecção deste livro; em especial agradeço a Leomir Batista, da UFC, e a Deniz de Souza, da UFCG, tendo este último me ajudado sobremaneira na revisão do livro. Finalmente, devo mencionar que o projeto ao qual este livro está vinculado foi parcialmente financiado pelo CNPq (Projeto Universal 2007 e Edital 03/2009).

# INTRODUÇÃO

# 1
# O que é lógica?

## 1.1 Lógica como teoria da inferência

O termo "lógica", e muitos de seus derivados como "lógico", "logicamente" e "ilógico", aparecem em diversas instâncias do nosso discurso quotidiano. Muitas vezes nos perguntamos sobre a lógica de uma determinada afirmação, ou falamos, por exemplo, que é lógico que certo enunciado ou hipótese seja verdade; ou que se certo enunciado A for verdade, logicamente o enunciado B será verdade; ou que é ilógico que acreditemos simultaneamente nos enunciados A e B. Apesar do fato de o que discutiremos neste livro estar, em um sentido muito forte, relacionado com esses usos ordinários da palavra "lógica", reservaremos esse termo para nos referirmos a uma determinada disciplina acadêmica que, pode-se dizer, tenta explicar o conceito central subjacente a todas essas construções linguísticas. E o que seria tal conceito? Para respondermos essa pergunta precisamos antes falar um pouco sobre a noção de *argumento*. Abaixo temos alguns exemplos do que entendemos como sendo um argumento:

(1) Todos os homens são mortais.
Sócrates é homem.
Portanto, Sócrates é mortal.

(2) Para possuir título de eleitor é necessário ser maior de 16 anos.
João possui título de eleitor.
Portanto, João é maior de 16 anos.

(3) Até onde a história da civilização nos diz, nunca houve um dia em que o sol não tenha nascido.
Até onde a nossa lembrança nos diz, o sol tem nascido todos os dias.
Portanto, concluímos que amanhã o sol nascerá.

(4) Se uma determinada entidade é empiricamente percebida por todos, ou quase todos os membros de uma comunidade, então essa entidade existe.
Na história da humanidade, apenas um número extremamente reduzido de pessoas proclamou ter percebido empiricamente a entidade a qual chamamos de Deus.

Não é verdade então que Deus tenha sido empiricamente percebido por todos, ou quase todos os membros das mais diversas comunidades existentes na história da humanidade.

Portanto, Deus não existe.

De um ponto de vista analítico, um argumento é antes de tudo um par, composto de um lado por um conjunto de enunciados aos quais damos o nome de *premissas* e, do outro, um enunciado chamado por nós de *conclusão*. Nos casos acima, o último enunciado, iniciado sempre pela palavra "Portanto", seria a conclusão do argumento e os demais enunciados vindos antes dele seriam as premissas do argumento. Mas para chamarmos um determinado conjunto de premissas e certa conclusão de argumento, as premissas e a conclusão devem estar relacionados de tal forma que a verdade das premissas de alguma forma *implique logicamente* ou acarrete a verdade da conclusão. Ou, falando de outra forma, a verdade da conclusão deve *seguir* da verdade das premissas, ou ainda, a conclusão deve poder ser *derivada*, *provada* ou *deduzida* a partir das premissas. Utilizando a noção de crença, poderíamos dizer que se uma pessoa acredita na verdade das premissas de um argumento, então, dado a relação que há entre premissas e conclusão, ela será forçada, de um ponto de vista lógico, a também acreditar na verdade da conclusão.

Dada essa breve exposição, devemos então supor que as premissas de cada um dos argumentos acima implicam logicamente suas respectivas conclusões. Mas será que isso é o caso para todos os quatro argumentos? Tentemos avaliar intuitivamente esses argumentos para ver se em todos eles a verdade da conclusão segue logicamente da verdade das premissas. O primeiro argumento parece não representar nenhum tipo de problema: se é verdade que todos os homens são mortais e que Sócrates é homem, então obviamente também é verdade que Sócrates é mortal. Ou, falando de outra forma, é impossível nesse caso que as premissas sejam verdadeiras, mas a conclusão não. O mesmo parece acontecer com o segundo argumento: se é verdade que para possuir título de eleitor é necessário ser maior de 16 anos, e João possui título de eleitor, então também deve ser verdade que João é maior de 16 anos.

Já o terceiro argumento, apesar de bastante razoável, não parece ter a mesma força dos dois primeiros. Apesar de sabermos que suas premissas são verdadeiras, não parece em absoluto absurdo imaginar que amanhã o sol não nascerá. Em outras palavras, apesar de bastante razoável, nesse terceiro argumento a verdade das premissas não garante de forma total, ou não implica *necessariamente*, a verdade da conclusão. Apesar de podermos dizer nesse caso que é provável que o Sol nascerá amanhã, não podemos, dado simplesmente a verdade das premissas, afirmar que é *certo* que isso acontecerá.

Em relação ao quarto argumento, apesar de à primeira vista ele parecer válido, o que ocorre é exatamente o oposto. Para vermos isso basta atentarmos para o fato de que o que a verdade da primeira premissa nos garante é que *se* uma determinada entidade é empiricamente percebida por todos, ou quase todos os membros de uma comunidade, *então* essa entidade existe. Nada em absoluto é dito a respeito da situação na qual uma entidade não tenha sido empiricamente percebida por todos, ou quase todos os membros das mais diversas comunidades existentes na história da humanidade. Mas é exatamente isso o que é dito na terceira premissa: que não é verdade que Deus tenha sido empiricamente percebido por todos, ou quase todos os membros das mais diversas comunidades existentes na história da humanidade. Consequentemente, dado apenas a verdade das premissas de (4), não podemos de forma alguma inferir sua conclusão, ou seja, que Deus não existe.

Temos aqui então dois argumentos em que a verdade das premissas não implica a verdade da conclusão, ou a implica de uma forma não necessária. Além de nos forçar a refinar a nossa definição inicial de argumento, isso nos convida a encontrar uma taxonomia de argumentos na qual os exemplos acima possam ser encaixados. Primeiro vamos dizer que um argumento é um par composto por um conjunto de enunciados chamados de premissas e por um enunciado chamado de conclusão em que *pretensamente* há uma relação inferencial entre esses dois termos. Por *relação inferencial* entendemos exatamente aquilo que, em um argumento, nos permite concluir, derivar ou inferir a conclusão a partir das premissas. Em função disso, de agora em diante também chamaremos argumentos de *inferências*. Segundo, de posse dessa nova definição, podemos classificar os quatro argumentos acima de acordo com a *validade* da suposta relação de inferência presente em cada um deles. Chamaremos argumentos como (1), (2) e (3), em que há indubitavelmente uma relação de inferência entre premissas e conclusões de *argumentos válidos*. A argumentos como (4), no qual é patente que a conclusão não pode efetivamente ser inferida a partir das premissas, damos o nome de *argumentos inválidos*. Apesar de o termo *falácia* também ser usado para designar argumentos inválidos, tal termo seria mais apropriadamente usado para se referir exclusivamente àqueles argumentos inválidos que, à primeira vista, poderiam ser tomados por argumentos válidos. Nesse caso, (4) poderia, muito razoavelmente, ser classificado como uma falácia.

Os argumentos válidos são tradicionalmente divididos em argumentos *dedutivos* e argumentos *indutivos*. (1) e (2) são exemplos de argumentos dedutivos, casos nos quais a verdade das premissas implica *necessariamente* a verdade da conclusão ou, equivalentemente, é impossível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa. Dizemos neste caso que a relação de inferência existente entre premissas e conclusão é uma *relação de dedução*. Argumentos indutivos, exemplificados pelo argumento (3), são aqueles argumentos cuja verdade das premissas não implica necessariamente a verdade da conclusão; em um argumento indutivo pode acontecer de as premissas serem verdadeiras e a conclusão falsa. No entanto, diferentemente das falácias, reconhecemos nos argumentos indutivos algum tipo de racionalidade ou retitude lógica. Podemos por exemplo dizer que, apesar de as premissas de (3) não nos permitirem concluir com certeza sua conclusão, elas nos permitem concluir que é *provável*, plausível ou razoável que amanhã o sol tornará a nascer.

Outra maneira de distinguir dedução de indução é dizer que enquanto inferências dedutivas *preservam a verdade* e são *não ampliativas*, inferências indutivas *não preservam a verdade* e são *ampliativas*. Uma inferência preserva a verdade se a verdade de suas premissas *garante* a verdade de sua conclusão ou, em outras palavras, se da verdade só obtemos verdade. Isso obviamente significa que é impossível que as premissas de tal argumento sejam verdadeiras e a conclusão falsa, o que é exatamente a definição de argumento dedutivo dada acima. Como, no entanto, por definição é possível que em um argumento indutivo as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa, temos que tais argumentos não preservam a verdade. Por outro lado, há a possibilidade de, através de uma inferência indutiva, *ampliarmos* nosso conhecimento, coisa que não acontece em um argumento dedutivo. Dada a informação contida nas premissas de (3), a informação de que o sol nascerá amanhã é seguramente algo novo, não contido nessas premissas; a informação de que Sócrates é mortal, por sua vez, já está de certa forma "contida" nas premissas de (1), de forma que a conclusão de (1) não pode ser considerada como uma ampliação de um conhecimento prévio composto pelas sentenças "Todos os homens são mortais" e "Sócrates é homem".

Em um sentido *lato*, a lógica pode ser entendida como o estudo dos argumentos válidos, sejam eles dedutivos ou indutivos. Em um sentido mais estrito, porém, sentido este que usaremos neste livro, a lógica se dedica ao estudo dos argumentos dedutivos. Tal uso mais restrito do termo "lógica" é, de certa forma, corroborado tanto pela existência de um termo específico – lógica indutiva – para designar o estudo dos argumentos indutivos, como pelo fato de que enquanto a lógica, entendida como o estudo dos argumentos válidos dedutivos, consiste, em um sentido muito importante, em um corpo de conhecimento consolidado e relativamente bem definido, a lógica indutiva ainda é uma área de pesquisa que não conseguiu gerar muito consenso, de forma que a inclusão de argumentos indutivos na classe dos argumentos válidos ainda é algo extremamente controverso[6].

Dado tudo isso, podemos dizer então que o conceito central subjacente às expressões que usamos para iniciar este capítulo, e que é o objeto central da lógica, é a noção

6. Adicione-se ainda o fato de que, enquanto área de pesquisa, a lógica indutiva perdeu muito do fôlego que detinha, por exemplo, há 30 anos.

de *relação de dedução* ou *consequência lógica*. Assim, lógica para nós significará daqui em diante a disciplina incubida de estudar os argumentos ou inferências (dedutivamente) válidas. Mais na frente, no entanto, veremos que na prossecução desse objetivo chega-se a outro aspecto da lógica que, apesar de sempre poder ser visto como uma mera consequência desse objetivo maior de explicar a noção de consequência lógica, consiste de fato em um segundo componente daquilo que podemos chamar de o *escopo da lógica*. Seja como for, tal visão de lógica claramente nos força a ver o termo "validade" como se aplicando exclusivamente à noção de validade dedutiva, sendo o termo "argumento válido" tomado daqui em diante como sinônimo de "argumento dedutivo".

Neste ponto é importante enfatizar algumas conexões relevantes do ponto de vista da lógica entre os conceitos de *validade* e *verdade*. Primeiro uma distinção crucial: enquanto que válido é um adjetivo a ser aplicado exclusivamente a argumentos ou inferências, verdade (ou verdadeiro) se aplica exclusivamente a sentenças ou enunciados. Assim, é um uso incorreto dos termos afirmar, por exemplo, que tal argumento é verdadeiro ou que tal enunciado é válido. Segundo, apesar de o conceito de validade ser definido em função dos conceitos de verdade e possibilidade (um argumento é válido se é impossível que suas premissas sejam verdadeiras e sua conclusão falsa), o foco central da lógica não é o conceito de verdade, mas sim o de validade: o conceito de verdade interessa à lógica apenas enquanto instrumento auxiliar na análise dos conceitos de validade e consequência lógica. Isso pode melhor ser visto se atentarmos para o fato de que, em um argumento qualquer, é completamente irrelevante para a sua validade o fato de suas premissas e conclusão serem verdadeiras ou não; o que importa é o fato de que *se* tais premissas são verdadeiras, necessariamente a sua conclusão também é. Por exemplo, o argumento abaixo, cuja segunda premissa é falsa, mas cujas conclusão e primeira premissa são verdadeiras, é um argumento válido:

(5) Todo peixe é um ser aquático.
Golfinhos são peixes.
Portanto, golfinhos são seres aquáticos.

## 1.2 Lógica como teoria da representação

Tomando então a lógica como o estudo das inferências válidas, ou seja, como uma *teoria da inferência*, devemos agora nos perguntar como esse estudo se dá. Considere os seguintes argumentos:

(6) Se Sócrates é homem, então Sócrates é mortal.
Sócrates é homem.
Portanto, Sócrates é mortal.

(7) Se João possui título de eleitor, então João é maior de 16 anos.
João possui título de eleitor.
Portanto, João é maior de 16 anos.

O que esses dois argumentos têm em comum? Primeiro de tudo, há realmente algo em comum entre estes argumentos? Enquanto um se refere a uma propriedade dos seres humanos instanciada por um ser humano particular, Sócrates, o outro fala de algo completamente diferente, a saber, a consequência óbvia de uma peculiaridade do sistema eleitoral brasileiro quando aplicada a João. A despeito, porém, dessa diferença de conteúdo, os argumentos (6) e (7) parecem compartilhar algo deveras importante, a saber, sua estrutura ou *forma lógica*. Se, por exemplo, realizássemos o exercício de extrair de (6) e (7) qualquer menção sobre os tópicos específicos tratados nesses argumentos, teríamos como resultado algo como o que segue:

(8) Se *isto*, então *aquilo*.
*Isto*.
Portanto, *aquilo*.

Ou, chamando *isto* de A e *aquilo* de B,

(8') Se A, então B.
A.
Portanto, B.

Aqui, obviamente, A e B (ou *isto* e *aquilo*) não designam quaisquer sentenças em particular, mas apenas os *lugares* dentro de um argumento específico que as sentenças que o compõem devem ocupar para que tal argumento tenha a forma acima ilustrada. Não temos aqui então um argumento como os que temos visto até agora, mas sim um *esquema de argumento*. Se substituimos, por exemplo, A por "Sócrates é homem" e B por "Sócrates é mortal", obtemos o argumento (6); se substituirmos A por "João possui título de eleitor" e B por "João é maior de 16 anos" obtemos (7). Dizemos então que (8') representa a forma lógica dos argumentos (6) e (7), ou equivalentemente, que (6) e (7) são *instâncias* do esquema de inferência representado por (8').

O importante para nós nisso tudo é que é exatamente pelo fato de possuírem a forma lógica representada em (8') que os argumentos (6) e (7) são válidos. Não é, por exemplo, por tratar das regras do sistema eleitoral brasileiro que (7) é um argumento válido, mas sim pela maneira como esta informação aparece no argumento em relação às outras informações e à construção "se ... então". Falando de outra maneira, o que *ca-*

*racteriza* (7), e consequentemente (6), como sendo um argumento válido é exclusivamente a sua forma ou, sendo mais específico, o fato de ser ele uma instância de (8'). O conteúdo de um argumento, ou o tópico do qual ele trata, é completamente irrelevante para a sua validade.

A consequência óbvia disso é que se a lógica tem a pretensão de estudar os argumentos válidos, ela tem que se concentrar na forma, e não no conteúdo, dos argumentos. Em outras palavras, é estudando a forma dos argumentos que conseguiremos identificar sua validade[7].

O leitor atento deve ter notado certa similaridade entre os argumentos (1) e (6) de um lado, e (2) e (7) de outro. Considere (1) e (6) primeiramente:

(1) Todos os homens são mortais.
Sócrates é homem.
Portanto, Sócrates é mortal.

(6) Se Sócrates é homem, então Sócrates é mortal.
Sócrates é homem.
Portanto, Sócrates é mortal.

Aqui, com exceção da primeira premissa, os enunciados dos dois argumentos são idênticos. Mas mesmo com respeito à primeira premissa, há sem dúvida uma relação muito íntima entre os dois enunciados: podemos facilmente concluir a primeira premissa de (6) a partir da primeira premissa de (1). Em outras palavras, o argumento abaixo é válido:

(9) Todos os homens são mortais.
Portanto, se Sócrates é homem, então Sócrates é mortal.

Mas veja que as formas desses dois enunciados são bastante diferentes: enquanto que um tem a forma "Todo A é B", o outro tem a forma "Se A então B". Como então poderíamos escrever esses enunciados de forma a deixar explícita a relação inferencial que há entre eles? Bom, trivialmente enquanto um fala de algo referente a todos os homens, o outro parece falar a *mesma coisa*, mas sobre um homem específico. Em outras palavras, ambos os enunciados falam sobre o mesmo ponto, mas sob perspectivas diferentes: um de uma perspectiva universal e outro de uma perspectiva particular. Assim, o que deve haver de diferente na forma desses dois enunciados deve estar relacionado com essa diferença de perspectiva. Isso pode ser visto mais claramente se reescrevermos (9) como segue:

(9') Para toda entidade, *se esta entidade é homem, então ela é mortal.*
Portanto, *se Sócrates é homem, então Sócrates é mortal.*

---

**7.** É nesse sentido que muitas vezes se usa a expressão "lógica formal" para designar a disciplina objeto desse livro.

Ou, de forma ainda mais explícita no que se refere à sua forma lógica:

(10) Para todo *x*, se *x* é Z, então *x* é Y.
Portanto, se *w* é Z, então *w* é Y.

Podemos, portanto, reescrever (1) como segue:

(1') Para toda entidade, se esta entidade é homem, então ela é mortal.
Sócrates é homem.
Portanto, Sócrates é mortal.

Sendo o esquema de argumento abaixo a representação de sua forma lógica:

(11) Para todo *x*, se *x* é Z, então *x* é Y;
*w* é Z;
Portanto, *w* é Y.

Utilizando raciocínio similar, podemos reescrever (2) como segue:

(2') Para toda entidade, se esta entidade é tal que ela possui título de eleitor, então ela é maior de 16 anos[8].

João é tal que ele possui título de eleitor.

Portanto, João é maior de 16 anos.

Sobre a forma lógica de (2'), trivialmente ela corresponde a (11): substitua Z por "possuidora de título de eleitor", Y por "maior de 16 anos" e *w* por "João" e você obterá (2'). Temos então que (1) e (2) possuem a mesma forma lógica.

É importante observar nesse ponto que a primeira premissa do argumento (1), por exemplo, é tal que sua forma lógica, representada pela primeira premissa de (1'), difere consideravelmente do que podemos chamar de sua *forma gramatical*: enquanto em (1) tal premissa é da forma "Todo A é B", em (1') ela já tem a forma "Para todo *x*, se *x* é Z, então *x* é Y"'[9]. E claramente, a forma como tal enunciado é representado em (1') revela de forma muito mais clara as relações inferenciais que ele tem com os outros enunciados de (1), bem como as relações que porventura existam entre (1) e outros argumentos, como é o caso de (1) e (6). Assim temos o fato extremamene importante para o estudo dos argumentos válidos de que a forma gramatical dos enunciados nem sempre equivale à sua forma lógica.

**8.** Para vermos que "Para toda entidade, se esta entidade é tal que ela possui título de eleitor, então ela é maior de 16 anos" significa o mesmo que "Para possuir título de eleitor é necessário ser maior de 16 anos", basta vermos que se uma pessoa qualquer possui título de eleitor, então com certeza ela será maior de 16 anos, pois de outra forma ela não teria conseguido obter seu título.

**9.** O mesmo acontece em relação à primeira premissa de (2).

Se quiséssemos definir de uma maneira mais precisa o conceito de forma lógica, diríamos que a *forma lógica* de um argumento ou enunciado é a estrutura subjacente ao argumento ou enunciado em virtude da qual ele possui suas propriedades inferenciais. Trivialmente, a forma lógica de um argumento dedutivo se reduz às formas lógicas dos enunciados que o compõem (feita obviamente a devida demarcação de o que é premissa e o que é conclusão).

Não é difícil então, dado tudo isso, avaliar a importância da noção de forma lógica para o estudo das inferências válidas. Mas se isso é o caso, temos então que será de igual importância para tal estudo o desenvolvimento de *métodos de representação* que explicitem o máximo possível a forma lógica dos enunciados. Na verdade isso é mais ou menos trivial. Se a lógica se dedica a estudar as inferências válidas, e isso é feito através da explicitação da forma ou estrutura das inferências, é natural que parte fundamental deste projeto seja o de encontrar maneiras adequadas de representação que tornem o mais explícito possível a estrutura lógico-inferencial dos enunciados. Assim, a maneira através da qual representamos os enunciados ou, em outras palavras, a *linguagem* que usamos na representação dos nossos argumentos, deve obviamente desempenhar um papel fundamental no estudo dos argumentos válidos.

Com isso chegamos ao outro aspecto fundamental da lógica enquanto disciplina: seu *aspecto representacional*. Podemos então dizer que a lógica possui na verdade dois aspectos que, conjuntamente, definem o seu escopo: um aspecto inferencial e um aspecto representacional. Em outras palavras, enquanto vista como uma *teoria da inferência*, a lógica se preocupa primordialmente com o estudo das inferências válidas, enquanto *teoria da representação* ela se dedica ao estudo de maneiras adequadas do ponto de vista lógico-formal de representar enunciados.

Veja, no entanto, que esses dois aspectos estão intimamente relacionados um com o outro. Conforme já mencionamos, se nosso objetivo é estudar as inferências válidas, teremos que dispor de alguma maneira condizente com esse objetivo de representar os componentes básicos dos argumentos que compõem os enunciados. Por outro lado, se nossa preocupação primordial é com a representação dos enunciados, nos depararemos inevitavelmente com construções linguísticas de caráter eminentemente lógico-inferencial e consequentemente com a exigência de tornar explícitas as relações inferenciais que existem entre enunciados.

Podemos ver com mais clareza a conveniência de uma teoria da inferência para o projeto de elaborar uma teoria da representação se entendemos por relação inferencial entre premissas e conclusão algo como esta já estar de certa forma "contida" (ou "logicamente contida", para ser mais preciso) nas premissas. Tome o argumento (1), por exemplo:

(1) (a) Todos os homens são mortais;

(b) Sócrates é homem;

(c) Portanto, Sócrates é mortal.

Podemos dizer neste caso que "Sócrates é mortal" está logicamente contido nos enunciados "Todos os homens são mortais" e "Sócrates é homem", no sentido de que a informação expressa em (c) já está de certa forma, ao menos sob um ponto de vista lógico, presente em (a) e (b). Isso obviamente representa um princípio de economia bastante valioso: para armazenar ou representar a informação (c), basta que eu represente (a) e (b) e disponha de um mecanismo inferencial capaz de "extrair" (c) de (a) e (b). De uma forma geral, se dispomos de tal mecanismo inferencial, apenas com um número reduzido de enunciados podemos representar uma quantidade muito grande (na verdade infinita) de informação. Assim, se nosso objetivo maior é a *representação de informação* ou *conhecimento*, dispor de uma teoria da inferência capaz de dizer quando um enunciado pode ser deduzido de um conjunto de enunciados é uma exigência quase que necessária.

## 1.3 Inferência, representação e análise de argumentos

No próximo capítulo falaremos mais sobre esse duplo aspecto da lógica e como ele se manifesta dentro do que chamaremos de sistemas lógicos. Indicaremos aqui, no entanto, de forma muito breve (porém com certo nível de detalhe), através da análise de alguns argumentos, em que consistem essas duas tarefas da lógica.

Considere a seguinte versão modificada do argumento (2):

(12) Para possuir título de eleitor é necessário ter nascido no Brasil ou ser naturalizado brasileiro, bem como ser maior de 16 anos.

João possui título de eleitor e não nasceu no Brasil.

Portanto, João é naturalizado brasileiro e maior de 16 anos.

A primeira premissa deste argumento pode ser reescrita como segue:

(12') Para toda entidade, se esta entidade é tal que ela possui título de eleitor, então ela é um nativo brasileiro ou naturalizado brasileiro, e maior de 16 anos.

Trivialmente, então, temos uma versão mais simples de (12) onde (12') é levada em conta:

(13) Se João possui título de eleitor, então ele é um nativo brasileiro ou naturalizado brasileiro, e maior de 16 anos.

João possui título de eleitor e não nasceu no Brasil

Portanto, João é naturalizado brasileiro e maior de 16 anos.

Neste caso, a forma lógica de (13) seria como segue:

(14) Se A, então (B ou C) e D.
A e não B.
Portanto, C e D.

Diferentemente dos argumentos analisadas por nós até agora, não nos parece nesse caso tão trivial que (14) seja um argumento válido. Tentemos então explicitar os passos que fariam com que, nesse argumento, partindo das premissas, nós chegássemos à conclusão. Primeiro de tudo, como é dito na segunda premissa que A, podemos concluir, usando a primeira premissa, que (B ou C) e que D. Mas veja que também na segunda premissa é dito que não B. Assim, como temos que B ou C, obviamente teremos C. Juntando essas duas conclusões, temos C e D. Esses passos podem ser descritos de uma forma mais detalhada como segue:

| | |
|---|---|
| 1. Se A, então (B ou C) e D | 1ª premissa |
| 2. A e não B | 2ª premissa |
| 3. A | Segue de 2 |
| 4. (B ou C) e D | Segue de 1 e 3 |
| 5. D | Segue de 4 |
| 6. (B ou C) | Segue de 4 |
| 7. não B | Segue de 2 |
| 8. C | Segue de 6 e 7 |
| 9. C e D | Segue de 5 e 8 |

Aqui a primeira coluna contém os passos inferenciais intermediários que precisamos obter para chegarmos à conclusão do argumento, representada no passo 9, e a segunda coluna contém a justificativa do passo em questão.

Esta seria uma das tarefas da lógica enquanto teoria da inferência: tornar o mais explícito possível a estrutura inferencial de um argumento. Mas veja que nesta e nas outras tentativas que fizemos de tornar explícita a forma lógica dos enunciados, há algumas construções linguísticas que, além de aparecerem com relativa frequência na estrutura dos argumentos válidos, parecem desempenhar um papel fundamental na validade dos mesmos. No nosso caso acima, só podemos, por exemplo, concluir 3 a partir de 2 por conta do que entendemos como sendo um aspecto lógico fundamental da expressão "e"; 4 só segue de 1 e 3 devido à existência da expressão "se... então..." em 2; e só podemos concluir 8 a partir de 6 e 7 por conta do conectivo "ou" contido em 6 e da expressão "não" presente em 7. Isso mostra que são exatamente construções linguísticas desse tipo que conferem as propriedades lógicas de um enunciado ou argumento; na verdade, são tais construções linguisticas o que em grande parte determina o que estamos chamando aqui de a forma lógica de um enunciado. Assim, nada mais natural do que a lógica dar uma atenção especial a tais construções. Primeiro de tudo, talvez seja mais conveniente, na representação dos enunciados e argumentos, usarmos símbolos especiais para designar tais construções: a construção "se... então..." poderia, por exemplo, ser representada pelo símbolo $\rightarrow$, "e" por $\wedge$, "ou" por $\vee$, "não" por $\neg$. A tais símbolos nós damos o nome de *conectivos lógicos*. Procedendo assim, poderíamos reescrever os passos acima como segue:

| | |
|---|---|
| 1. $A \rightarrow ((B \vee C) \wedge D)$ | 1ª premissa |
| 2. $A \wedge \neg B$ | 2ª premissa |
| 3. $A$ | Segue de 2 |
| 4. $(B \vee C) \wedge D$ | Segue de 1 e 3 |
| 5. $D$ | Segue de 4 |
| 6. $B \vee C$ | Segue de 4 |
| 7. $\neg B$ | Segue de 2 |
| 8. $C$ | Segue de 6 e 7 |
| 9. $C \wedge D$ | Segue de 5 e 8 |

A essa tarefa de explicitar a forma lógica de um argumento e os passos inferenciais que vão das premissas à conclusão nós damos o nome de *análise lógica* de argumentos.

Analisemos agora o argumento (12) considerando a forma lógica de sua primeira premissa conforme descrito em (12'). Segue abaixo a forma lógica de (12):

(15) Para todo *x*, se *x* é Z, então (*x* é R ou *x* é S) e *x* é Y;
*a* é Z e *a* não é R;
*a* é S e *a* é Y.

Veja que, diferentemente de (14), devido à existência de uma quantificação universal (para todo *x*), nós temos que fazer referência, na forma lógica, a propriedades de objetos (no caso a propriedade de possuir título de eleitor, de ser nativo brasileiro, etc.) e aos objetos que possuem tais propriedades. Também devido à quantificação universal, a análise dos passos inferenciais de (15), que vão das premissas à conclusão, terá uma etapa a mais, a saber, uma que nos permita ir do discurso universal contido na primeira premissa ao discurso particular da conclusão. De uma forma mais específica, os passos inferenciais desse argumento podem ser descritos como segue.

Como para todo *x*, se *x* é Z, então (*x* é R ou *x* é S) e *x* é Y, então, se *a* é Z, (*a* é R ou *a* é S) e *a* é Y. Mas como é dito na segunda premissa que *a* é Z, concluímos que (*a* é R ou *a* é S) e que *a* é Y. Mas veja que também na segunda premissa é dito que *a* não é R. Assim, como *a* é R ou *a* é S, podemos concluir que *a* é S. Juntando essas duas conclusões podemos então dizer que *a* é S e *a* é Y. Estes passos podem descritos de uma forma mais detalhada como segue:

| | |
|---|---|
| 1. Para todo *x*, se *x* é Z, então (*x* é R ou *x* é S) e *x* é Y | 1ª premissa |
| 2. Se *a* é Z, então (*a* é R ou *a* é S) e *a* é Y | Segue de 1 |
| 3. *a* é Z e *a* não é R | 2ª premissa |
| 4. *a* é Z | Segue de 3 |
| 5. (*a* é R ou *a* é S) e *a* é Y | Segue de 2 e 4 |
| 6. *a* é Y | Segue de 5 |
| 7. (*a* é R ou *a* é S) | Segue de 5 |
| 8. *a* não é R | Segue de 3 |
| 9. *a* é S | Segue de 7 e 8 |
| 10. *a* é S e *a* é Y | Segue de 6 e 9 |

Fazendo o mesmo exercício que fizemos com (14), vemos aqui que algumas construções linguísticas desempenham papel importante na justificativa dos passos acima. Em adição ao que dissemos sobre "e", "se ... então ...", "ou" e "não", temos que 2 só segue de 1 por conta da expressão "para todo *x*" que aparece em 1. Assim, supondo que representemos "para todo *x*" por $\forall x$, e expressões como "*a* é Z" por Z(a), teríamos os passos acima reescritos como segue:

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x(Z(x)\rightarrow((R(x)\vee S(x))\wedge Y(x)))$ | 1ª premissa |
| 2. $Z(a)\rightarrow((R(a)\vee S(a))\wedge Y(a))$ | Segue de 1 |
| 3. $Z(a)\wedge\neg R(a)$ | 2ª premissa |
| 4. $Z(a)$ | Segue de 3 |
| 5. $(R(a)\vee S(a))\wedge Y(a)$ | Segue de 2 e 4 |
| 6. $Y(a)$ | Segue de 5 |
| 7. $R(a)\vee S(a)$ | Segue de 5 |
| 8. $\neg R(a)$ | Segue de 3 |
| 9. $S(a)$ | Segue de 7 e 8 |
| 10. $S(a)\wedge Y(a)$ | Segue de 6 e 9 |

Veja que, nesses exemplos, a forma lógica dos enunciados, bem como o papel dessa forma nos passos inferenciais que nos levam de um enunciado a outro, está muito mais claro. A linguagens desse tipo, capazes de representar adequadamente a forma lógica dos diversos tipos de enunciados, nós damos o nome de *linguagens lógico-formais*, ou simplesmente linguagens lógicas, sendo sua elaboração uma das principais tarefas da lógica enquanto teoria da representação.

## 1.4 Exercícios propostos

1. Defina e dê exemplos dos seguintes conceitos:
   a. Argumento válido;
   b. Argumento dedutivo;
   c. Argumento indutivo;
   d. Argumento inválido;
2. De acordo com a nossa definição de argumento dedutivo, é possível haver um argumento dedutivo inválido? Justifique sua resposta.
3. Qual a relação que há entre dedução e certeza, de um lado, e indução e probabilidade, de outro?
4. Explicamos o que é um argumento indutivo fazendo uso do termo "provável". Diga em que sentido o cálculo matemático de probabilidades está relacionado com a noção de indução.
5. Em que sentido o conceito de racionalidade está relacionado com a noção de argumento válido?
6. Diga quais são as vantagens e desvantagens de um argumento:
   a. Preservar a verdade, mas ser não ampliativo;
   b. Não preservar a verdade, mas ser ampliativo.
7. Qual a diferença entre verdade e validade?
8. Responda as seguintes perguntas:
   a. O que é a forma lógica de um argumento (e de um enunciado)?
   b. Qual a importância que tal conceito tem para a lógica enquanto teoria da inferência?
   c. De que maneira a noção de forma lógica faz com que uma teoria da inferência exija uma teoria da representação?
9. Quais os dois escopos da lógica, e qual a relação entre eles?

## 1.5 Exercícios de análise lógica

1. Qual o papel dos conectivos lógicos na análise lógica dos argumentos?
2. Identifique as premissas e a conclusão de cada um dos argumentos abaixo:
   a. Como a felicidade consiste na paz de espírito e como a duradoura paz de espírito depende da confiança que temos no futuro, e como essa confiança é baseada no conhecimento que devemos ter da natureza de Deus e da alma, segue-se que tal conhecimento é necessário à verdadeira felicidade. [Este argumento é de Gottfried Leibniz.]
   b. Não podemos comparar um processo com "a passagem do tempo" – não existe tal coisa – mas unicamente com outro processo (como o funcionamento de um cronômetro). Logo, só podemos descrever o lapso de tempo confiando em algum outro processo. [Este argumento foi dado por Ludwig Wittgenstein em seu *Tractatus Logico-Philosophicus.*]
   c. Se dermos à eternidade o significado não de duração temporal infinita, mas de atemporalidade, então a vida eterna pertence aos que vivem no presente. [Este argumento foi dado por Ludwig Wittgenstein em seu *Tractatus Logico-Philosophicus.*]

d. Quando o elevado preço do trigo é o efeito de uma procura crescente, ele é sempre precedido de um aumento de salários, pois a procura não pode subir sem um aumento dos meios, no povo, para pagar aquilo que deseja. [Este argumento é de David Ricardo.]

e. Ainda que exista um embusteiro, sumamente poderoso, sumamente ardiloso, que empregue todos os seus esforços para manter-me perpetuamente ludibriado, não pode subsistir dúvida alguma de que existo, uma vez que ele me ludibria. [Este argumento foi dado por René Descartes em suas *Meditações Metafísicas*.]

f. O Senhor disse (Gn 16,7): "Porque me arrependo de ter feito o Homem". Mas quem se arrepende do que fez tem uma vontade variável. Portanto, Deus tem uma vontade variável. [Este argumento foi dado por Tomás de Aquino.]

g. Em sua forma mais simples o problema é este: Deus é onipotente; Deus é sumamente bom; e ainda assim o mal existe. Aparentemente há uma contradição entre estas três proposições, de forma que se quaisquer duas delas são verdadeiras, a terceira deve ser falsa. Mas ao mesmo tempo, todas as três proposições são partes essenciais da maioria das posições teológicas: o teólogo, ao mesmo tempo em que deve, aparentemente não pode aderir consistentemente às três proposições. [Este argumento foi dado por John Mackie.]

h. Um hortelão que cultiva sua própria horta, com suas próprias mãos, reúne em sua própria pessoa três diferentes caracteres: de proprietário rural, de agricultor e de trabalhador rural. Seu produto, portanto, deveria pagar-lhe a renda do primeiro, o lucro do segundo e o salário do terceiro. [Este argumento foi dado por Adam Smith em seu *A Riqueza das Nações*.]

i. Uma subsistência abundante incrementa o vigor físico do trabalhador, e a consoladora esperança de melhorar sua condição, a fim de terminar seus dias, talvez, no conforto e na prosperidade, anima-o a empregar ao máximo esse vigor. Assim, quando os salários são altos, veremos sempre os trabalhadores mais ativos, diligentes e desembaraçados do que quando os salários são baixos. [Este argumento foi dado por Adam Smith em seu *A Riqueza das Nações*.]

j. Podemos estabelecer quatro hipóteses sobre as primeiras causas do universo: que elas possuem bondade perfeita; que elas possuem maldade perfeita; que elas são opostas e contém tanto bondade como maldade; ou que elas não contêm nem bondade nem maldade. Fenômenos heterogêneos não podem nunca provar os dois primeiros princípios não heterogêneos; e a uniformidade e a constância das leis gerais parecem se opor ao terceiro. O último, portanto, parece ser de longe o mais provável. [Esse argumento foi dado por David Hume em seu *Diálogos sobre a Religião Natural*.]

k. Como os testes demonstraram que são necessários pelo menos 2.3 segundos para manobrar a culatra do rifle de Oswald, é óbvio que Oswald não poderia ter disparado três vezes – atingindo Kennedy duas vezes e Connally uma vez – em 5.6 segundos ou menos.

l. A água tem um calor latente superior ao do ar: mais calorias são necessárias para aquecer uma determinada quantidade de água do que para aquecer um igual montante de ar. Assim, a temperatura do mar determina, de um modo geral, a temperatura do ar acima dele.

m. Durante a guerra, as redes de espionagem inimiga foram descobertas mediante a escuta e gravação dos telefonemas dos suspeitos. Portanto, as autoridades deveriam adotar o procedimento de escuta dos telefonemas de todos os suspeitos.

n. Nenhum matemático foi capaz de demonstrar, até hoje, a verdade do famoso “último teorema” de Fermat; portanto, esse teorema deve ser falso.

o. A regra de ouro é básica para todo sistema ético até hoje criado, e todos a aceitam sob uma forma ou outra. Portanto, a regra de ouro é um princípio moral necessário.

p. Se a crença na existência de Deus tem base científica, então ela é racional. Porém, nenhum experimento científico concebível pode decidir se Deus existe ou não. Mas se a crença na existência de Deus tem base científica, então há algum experimento científico concebível capaz de decidir se Deus existe ou não. Logo, a crença na existência de Deus não é uma crença racional.

q. Como o homem é essencialmente racional, o reaparecimento constante da metafísica na história do conhecimento humano deve ter explicação na estrutura da própria razão.

# 2
# Lógica e sistemas lógicos

## 2.1 O método da lógica

Comumente consideram-se dois aspectos como sendo fundamentais para a caracterização de uma disciplina: o escopo, objetivo ou objeto que essa disciplina pretende estudar, e a maneira ou método através do qual ela visa atingir tal objetivo. Vimos que a lógica enquanto disciplina possui dois objetivos básicos: o de estudar as inferências válidas e o de prover maneiras adequadas de representar enunciados. Assim a lógica pode ser vista como uma teoria da inferência ou como uma teoria da representação. Mas qual seria então o método, por assim dizer, através do qual a lógica tenciona atingir tais objetivos?

Para respondermos essa pergunta, temos que falar sobre um aspecto bastante peculiar da lógica contemporânea: a sua relação com a matemática. Essa relação é, na verdade, estreita a tal ponto de a disciplina que hoje chamamos de lógica ser, em um sentido muito forte, equivalente ao que se convencionou chamar de *lógica matemática*. Primeiro de tudo, deve-se mencionar que muito da motivação para o surgimento do que chamamos de lógica moderna foi o desejo, por parte de alguns filósofos e matemáticos, de melhor compreender o raciocínio por trás da argumentação matemática. É neste sentido então que a expressão "lógica matemática" pode ser vista como significando a lógica *da* matemática. Tal visão, no entanto, reflete apenas um aspecto das coisas e, na verdade, pode ser enganadora, visto que, como verificamos, o objetivo da lógica em geral e da lógica moderna em particular é o estudo das inferências em um sentido *lato*, não se restringindo a nenhum tipo particular de argumento. Outra maneira de ler a expressão "lógica matemática" (que neste caso sim, não só reflete com exatidão a disciplina à qual ela tenta dar nome, mas também releva um aspecto essencial sobre ela) é entendendo-a como o *estudo matemático da lógica* ou, em outras palavras, como a tentativa de desenvolver uma teoria da inferência e da representação utilizando metodologia semelhante àquela usada pelos matemáticos no desenvolvimento de suas teorias.

Essa tentativa de se estudar a lógica sob uma perspectiva matemática se dá, grosso modo, através do desenvolvimento de sistemas matemático-formais não por acaso chamados de *sistemas lógicos*. Se tomarmos a lógica enquanto teoria da inferência, por exemplo, a análise ou tentativa de identificar a classe dos argumentos válidos tomará, como um todo, a forma de um sistema matemático, de modo que a resposta à pergunta "quando um argumento é válido?" será algo como que um subproduto inevitável do sistema lógico em questão. Apesar de uma compreensão satisfatória do que estamos chamando de "o método da lógica" somente poder ser obtida através de um estudo pormenorizado dos sistemas lógicos – o que daremos cabo neste livro –, tentaremos, neste capítulo, dar uma ideia básica de o que são tais sistemas e como eles tentam atingir esse objetivo específico de identificar a classe dos argumentos válidos.

Comecemos lembrando que a validade em um argumento é basicamente uma *relação lógica* entre um conjunto de enunciados (as premissas) e um enunciado (a conclusão). Mas em matemática, relações são entidades passíveis de serem construídas e analisadas matematicamente. (Um exemplo disso é a relação "maior que", geralmente representada pelo símbolo ">".) Isso nos leva à óbvia cogitação de que talvez a relação de dedução ou consequência lógica também possa ser analisada por esse viés matemático. Para sermos capazes de bem avaliar tal proposta, é útil consideramos de início três pontos a respeito das relações matemáticas.

Primeiro, para realmente sabermos de que relação matemática nós estamos falando, temos que fixar os dois conjuntos cujos elementos vão ou não se relacionar de acordo com a relação em questão. Por exemplo, para falarmos de uma relação "maior que", temos que dizer a que conjunto de entidades essa relação vai ser "aplicada"( se ao conjunto de números naturais, inteiros, racionais, etc). De um ponto de vista rigoroso, a relação > que relaciona elementos do conjunto dos números naturais é diferente da relação > que relaciona elementos do conjunto dos números inteiros, apesar de o símbolo que usamos para as duas relações ser o mesmo. No caso da primeira, dizemos que > é uma relação do tipo $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ (o que representamos também por $>: \mathbb{N}x\mathbb{N}$), ou seja, uma relação que associa dois elementos do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ e, no caso da segunda relação, dizemos que > é do tipo $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$, ou seja, uma relação que associa dois elementos pertencentes ao conjunto dos números inteiros.

O segundo ponto, que apesar de ser por demais óbvio vale a pena ser mencionado, é que dada uma relação matemática qualquer $R: \Delta x\Gamma$ e dois elementos $\alpha\in\Delta$ e $\beta\in\Gamma$, R nos dirá se $\alpha$ se relaciona ou não com $\beta$ de acordo com R. Por exemplo, dada a relação "maior que" aplicada aos naturais, $>: \mathbb{N}x\mathbb{N}$ e dois números $x,y\in\mathbb{N}$, > nos diz se x é ou não maior que y. Em outras palavras, > é capaz de nos dizer, para quaisquer dois números x e y pertencentes ao conjunto dos naturais, se x é ou não maior que y.

O terceiro ponto é que uma relação matemática geralmente possui propriedades formais de fundamental importância para a sua diferenciação enquanto relação. Por exemplo, a relação $>$: $\mathbb{N}$x$\mathbb{N}$ é tal que, dados x,y,z$\in\mathbb{N}$, se x>y e y>z, então x>z. Se uma relação R é tal que se aRb e bRc então aRc, onde aRb é uma abreviação para "o objeto *a* se relaciona com o objeto *b* de acordo com a relação R", nós dizemos que esta relação é *transitiva*. Assim, > é transitiva. Outras propriedades interessantes são a *reflexividade* e a *simetria*: uma relação R é reflexiva se e somente se aRa para todo *a*; e simétrica se e somente se se aRb então bRa. Enquanto, no entanto, > é transitiva, ela não é nem reflexiva nem simétrica: não é o caso que para todo número x, x>x; nem que para todo número x e y, se x>y então y>x. Já a relação de identidade definida para os naturais (= : $\mathbb{N}$x$\mathbb{N}$), por exemplo, é reflexiva, simétrica e transitiva: a=a para todo a$\in\mathbb{N}$; para todo a,b$\in\mathbb{N}$, se a=b então b=a; e para todo a,b,c$\in\mathbb{N}$, se a=b e b=c então a=c.

Mas o que é que tudo isso, o leitor pode perguntar, tem a ver com lógica? Talvez muito, já que, como dissemos, um argumento é válido em virtude de uma relação inferencial, chamada por nós de relação de dedução, relação de consequência lógica ou simplesmente relação de inferência, que há entre premissas e conclusão. Suponha então que, à semelhança do que é feito em matemática, usemos um símbolo especial para referenciarmos tal relação, digamos o símbolo "$\Vdash$". Invocando o primeiro ponto acima, para caracterizarmos precisamente $\Vdash$ precisamos identificar os tipos de elementos que se relacionarão através de $\Vdash$; ou, equivalentemente, os dois conjuntos aos quais tais elementos pertencem. Essa não parece ser uma tarefa das mais difíceis, visto que, como sabemos, a relação de dedução associa ou relaciona um conjunto de enunciados (que chamamos de premissas) de um lado, com um enunciado (a conclusão) do outro. Mas enunciados são entidades linguísticas, que em certo sentido podem ser vistas como pertencentes a línguas específicas. Assim, para falarmos sobre os dois conjuntos aos quais os elementos que $\Vdash$ relacionará pertencem, teremos que falar sobre a língua ou, adotando a nomenclatura padrão em lógica, a *linguagem* a qual os enunciados em questão pertencem.

Se chamarmos essa linguagem de L, teremos que a nossa relação $\Vdash$ será definida como associando duas entidades, a saber, conjuntos de enunciados pertencentes a L e enunciados também pertencentes a L. Para bem compreendermos esse tipo de definição, no entanto, temos que ver a linguagem L como sendo nada mais do que um conjunto, na verdade um conjunto enorme, contendo todos os enunciados que podem ser construídos naquela linguagem. Por exemplo, se quiséssemos caracterizar a língua portuguesa dessa maneira, diríamos que a língua (ou linguagem) portuguesa é o conjunto de todas as sentenças, significavas neste caso, que podem ser escritas em português. Como então $\Vdash$ associa conjuntos de enunciados pertencentes a L e enunciados também pertencentes a L, temos então que podemos escrever coisas como $\Gamma \Vdash \alpha$, em que $\Gamma$ é um conjunto de enunciados pertencentes a L ou, em outras palavras, um subconjunto de L (em símbolos: $\Gamma \subseteq L$) e $\alpha$ é um enunciado pertencente a L (em símbolos: $\alpha \in L$). Como $\Gamma$ é um subconjunto de L, também podemos dizer que $\Gamma$ pertence ao *conjunto de todos os subconjuntos* de L, comumente chamado de conjunto das partes de L, que aqui representaremos por $\mathfrak{R}(L)$. Assim, dada uma linguagem L qualquer, podemos dizer que $\Vdash$ é da forma: $\mathfrak{R}(L)xL$, ou seja, uma relação que associa elementos de $\mathfrak{R}(L)$ (ou seja, subconjuntos de L, que são obviamente conjuntos de enunciados) e elementos de L (ou seja, enunciados).

Segundo, dadas uma linguagem L específica e uma relação de dedução $\Vdash$ aplicada à L, e dados um enunciado qualquer $\alpha \in L$ e um conjunto de enunciados $\Gamma \subseteq L$, através de $\Vdash$ saberemos se $\alpha$ é deduzido ou não a partir de $\Gamma$. Tomando os elementos de $\Gamma$ como sendo as *premissas* e $\alpha$ como sendo a *conclusão*, $\Vdash$ nos dirá se o argumento composto por $\Gamma$ e $\alpha$ (em símbolos: $<\Gamma,\alpha>$) é ou não um argumento válido. Em caso positivo, escrevemos $\Gamma \Vdash \alpha$; em caso negativo $\Gamma \nVdash \alpha$. Em outras palavras, $\Gamma \Vdash \alpha$ é nada mais do que uma representação do fato de que o argumento composto pelas premissas $\Gamma$ e conclusão $\alpha$ é válido. Esse ponto deve ser bem compreendido, pois ele contém na verdade o propósito da lógica enquanto teoria da inferência. Se dispomos de uma relação $\Vdash$ do tipo $\mathfrak{R}(L)xL$, e se dizemos que ela caracteriza a relação de validade dedutiva de forma que $\Gamma \Vdash \alpha$ significa que $\alpha$ pode ser deduzido a partir de $\Gamma$, ou que o par $<\Gamma,\alpha>$ é um argumento válido, então o nosso trabalho estará terminado. Já teremos em mãos uma caracterização da classe de argumentos válidos, pelo menos, dos argumentos válidos que podem ser construídos usando uma linguagem específica, a saber, L[10].

Terceiro, enquanto relação matemática, $\Vdash$ deve possuir propriedades formais através das quais podemos entender melhor as características disso que estamos chamando de consequência lógica. Por exemplo, trivialmente temos que

(1) se $\alpha \in \Gamma$, então $\Gamma \Vdash \alpha$

ou seja, se a conclusão de um argumento aparece entre suas premissas, tal argumento será válido. A essa propriedade nós damos o nome de a *reflexividade* de $\models$. $\models$ também possui um tipo de *transitividade*:

(2) se $\Gamma \Vdash \beta$ e $\{\beta\} \Vdash \varphi$, então $\Gamma \Vdash \varphi$

---

**10.** Esse ponto deve ser de certa forma qualificado, pois muito embora possamos dizer que o objetivo de se construir um sistema lógico é o de obter uma relação $\Vdash$ tal que possamos dizer, para todo conjunto de enunciados $\Gamma$ e todo enunciado $\alpha$, se $\Gamma \Vdash \alpha$ ou se $\Gamma \nVdash \alpha$, do ponto de vista prático, alguns sistemas lógicos, como as lógicas de predicados, por exemplo, só conseguem realizar a primeira parte da tarefa. Em outras palavras, caso $\alpha$ seja uma conseqüência lógica de $\Gamma$, então o aparato formal do sistema será tal que $\Gamma \Vdash \alpha$; no entanto, caso $\alpha$ não seja uma consequência lógica de $\Gamma$, pode ser que tal aparato nunca consiga estabelecer o fato de que $\Gamma \nVdash \alpha$.

isto é, se $\beta$ é concluído a partir de $\Gamma$ e $\varphi$ é concluído a partir de $\beta$, então $\varphi$ deve poder ser concluído a partir de $\Gamma$. Também temos que

(3) se $\Gamma \Vdash \alpha$, então para toda fórmula $\beta \in L$, $\Gamma \cup \{\beta\} \Vdash \alpha$.

Isso significa que se $\alpha$ é uma conclusão do conjunto de premissas $\Gamma$, ela continuará sendo mesmo se adicionarmos mais premissas a $\Gamma$ (que é o que é feito quando consideramos o conjunto $\Gamma \cup \{\beta\}$). A essa propriedade damos o nome de *monotonicidade*. Existem também propriedades que correlacionam $\Vdash$ com conectivos lógicos específicos. Por exemplo, temos que

(4) se $\Gamma \cup \{\beta\} \Vdash \alpha$ então $\Gamma \Vdash \beta \rightarrow \alpha$

Tal propriedade é associada ao que comumente é chamado de *teorema da dedução*. O inverso de (4) também expressa uma propriedade válida:

(5) se $\Gamma \Vdash \beta \rightarrow \alpha$ então $\Gamma \cup \{\beta\} \Vdash \alpha$

Eis outro exemplo:

(6) $\Gamma \Vdash \alpha \vee \neg \alpha$

(6) afirma que dado um conjunto de enunciados $\Gamma$ qualquer e um enunciado $\alpha$ qualquer, $\alpha \vee \neg \alpha$ pode ser deduzido a partir de $\Gamma \subseteq L$; como $\Gamma$ é um conjunto de enunciados arbitrário, temos que $\alpha \vee \neg \alpha$ é o que chamamos de um princípio lógico universal. Tal princípio, que chamamos de *princípio do terceiro excluído*, significa basicamente que, para todo enunciado $\alpha \in L$, $\alpha$ é verdade ou sua negação é verdade. Como a relação $\Gamma \Vdash \alpha \vee \neg \alpha$ vale para todo e qualquer subconjunto $\Gamma$ da linguagem L, ela também valerá para o conjunto vazio, pois $\varnothing \subseteq L$. Assim, temos também que $\varnothing \Vdash \alpha \vee \neg \alpha$. Comumente representamos isso omitindo a referência ao conjunto vazio e escrevendo apenas

(6') $\Vdash \alpha \vee \neg \alpha$

Esta é na verdade a maneira mais adequada de dizer que o princípio em questão é válido universalmente, pois, como ele é deduzido a partir de $\varnothing$, ele será, dada a monotonicidade de $\Vdash$, deduzido também a partir de qualquer conjunto $\Gamma$ ($\varnothing \subseteq \Gamma$). Um exemplo semelhante é o seguinte:

(7) $\Vdash \neg(\alpha \wedge \neg \alpha)$

que é nada mais do que a validade do que chamamos de *princípio da não contradição* (para todo enunciado $\alpha$, não pode ser o caso que tanto $\alpha$ como sua negação sejam verdades) sendo estabelecida em termos de relação de dedução. Temos também que métodos clássicos de argumentação podem ser representados através de propriedades de $\Vdash$, como é o caso da chamada prova por *redução ao absurdo*:

(8) se $\Gamma \cup \{\alpha\} \Vdash \beta$ e $\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \neg \beta$, então $\Gamma \Vdash \neg \alpha$

Isso significa que, se em adição aos pressupostos contidos em $\Gamma$, que por questões metodológicas podemos aceitar como sendo verdadeiros, supormos a verdade de $\alpha$ e a partir disso chegarmos a um absurdo do tipo $\beta$ e $\neg\beta$, então podemos concluir que $\alpha$ é falso. Intimamente associados a estes dois últimos princípios temos o chamado princípio do *princípio da explosão* (também conhecido como *ex contradictione sequitur quodlibet*):

(9) $\Gamma\cup\{\beta,\neg\beta\}\Vdash\alpha$

para todo $\alpha\in L$; isto é, de uma contradição do tipo $\{\beta,\neg\beta\}$ podemos concluir toda e qualquer fórmula.

Obviamente que essa relação $\Vdash$ deve ser rigorosamente definida ou construída através de estipulações conceituais. A descrição das propriedades que fizemos acima pressupõe tal definição e, na verdade, deve seguir como uma consequência dessa definição. Por exemplo, apesar de sabermos intuitivamente onde aplicar a relação > de forma a dizer se dois números naturais quaisquer x e y são tais que x>y, se quisermos adotar uma postura mais rigorosa teremos que definir formalmente essa relação. Isso pode ser feito da seguinte forma:

1. Seja $x\in N$ um número natural qualquer tal que x  0. x>0;
2. Não existe $x\in N$ tal que 0>x;
3. Sejam $x,y\in$ ‘ dois números naturais quaisquer. x>y se e somente se (x-1)>(y-1).

Toda e qualquer propriedade de >, tal como sua transitividade, deve seguir e, consequentemente poder ser demonstrada, a partir da definição acima.

Assim, um sistema lógico, se entendido como uma teoria da inferência, é nada mais do que uma série de definições que, se tomadas em conjunto, podem ser vistas como definindo ou construindo a relação de dedução $\Vdash$ (de forma semelhante a como a relação > é construída na definição acima)[11]. Em outras palavras, um sistema lógico nada mais é do que uma definição rigorosa da relação de consequência lógica $\Vdash$. E, conforme já falamos, todas as propriedades de $\Vdash$ devem seguir estritamente dessa definição, sendo um dos principais trabalhos do lógico demonstrar que tais propriedades realmente valem em seu sistema. Tradicionalmente, a parte da lógica responsável por estudar as propriedades dos sistemas lógicos é chamada de *metalógica*.

## 2.2 Lógica e lógicas

Até agora temos falado como se houvesse apenas uma relação de dedução ou noção de validade dedutiva. Falamos, por exemplo, que é tarefa da lógica distinguir argumentos

---

**11.** Vale a pena observar que toda definição faz uso de termos primitivos, ou seja, termos cujos significados não foram previamente definidos. No caso da definição de > acima, temos $\in$, $\mathbb{N}$ e "0", por exemplo, como termos primitivos.

válidos de argumentos inválidos, o que obviamente pressupõe que haja uma maneira única de fazer tal distinção e, portanto, uma única relação de consequência lógica. Lembremos, no entanto, que para realmente identificarmos univocamente $\VDash$ temos que dizer qual é a linguagem à qual os enunciados que $\VDash$ associará pertencem. Assim, da mesma forma que a relação "maior que" aplicada a conjuntos diferentes resulta em relações diferentes, também $\VDash$ usada em conjunto com linguagens diferentes resultará em relações de inferência diferentes. Assim, para realmente dizermos que relação de inferência $\VDash$ designa, temos que mencionar também qual a linguagem sobre a qual $\VDash$ é definida[12]. Por conta disso, tradicionalmente identifica-se um sistema lógico como sendo caracterizado não só por uma relação de inferência, mas também por uma linguagem lógica. Em outras palavras, um *sistema lógico* S pode ser identificado como um par $<L,\VDash>$, em que L é uma linguagem e $\VDash$ é uma relação entre subconjuntos de L e elementos de L chamada relação de inferência lógica. Assim, o que chamamos de aspecto representacional e aspecto inferencial da lógica se encontram explícitos na própria caracterização de um sistema lógico.

A implicação óbvia disso é que muito provavelmente haverá uma multiplicidade de sistemas lógicos. A linguagem natural é extremamente variada no que se refere à estrutura de seus enunciados, de forma que se quisermos tratar tal variedade estrutural de forma especializada, isto é, abordando cada aspecto separadamente, teremos inevitavelmente uma pluralidade de linguagens lógicas e, consequentemente, uma pluralidade de relações de inferências e sistemas lógicos. Por exemplo, se decidirmos tratar enunciados como entidades indivisíveis, não analisando os seus componentes constituintes, mais ou menos como fizemos na análise do argumento (13) do capítulo1, teremos a chamada *linguagem proposicional*, que é a linguagem lógica de um dos sistemas lógicos mais conhecidos: a *lógica clássica proposicional*, ou simplesmente lógica proposicional. Se, por outro lado, decidirmos detalhar os componentes de um enunciado, tais como seu sujeito e predicado bem como seu aspecto universal (quando houver), mais ou menos como fizemos com o argumento (12) do capítulo anterior, teremos uma *linguagem de predicados de primeira ordem*, que é a linguagem usada pelo sistema lógico conhecido como *lógica clássica de predicados de primeira ordem*. As linguagens proposicional e de predicados de primeira ordem serão estudadas com detalhes nos capítulos 3 e 9, respectivamente; e enquanto a segunda e terceira unidades do livro são dedicadas primordialmente à lógica clássica proposicional, a quarta trata da lógica clássica de predicados de primeira ordem.

Algo digno de nota é que pode acontecer de dois sistemas lógicos $S_1=<L_1,\VDash_1>$ e $S_2=<L_2,\VDash_2>$ serem tais que $L_1$ é diferente de $L_2$ (e, consequentemente, sob um ponto de

12. É claro que, como para definirmos uma relação de dedução específica $\VDash$ temos que definir previamente a linguagem sobre a qual a relação operará, podemos dizer que a linguagem L associada a $\VDash$ já está, pelo menos implicitamente, contida em $\VDash$.

vista rigoroso, $\Vdash_1$ é diferente de $\Vdash_2$), mas, ainda assim, em um sentido muito importante, $\Vdash_1$ ser igual a $\Vdash_2$, pois ambos compartilham propriedades formais independentes dos aspectos específicos que tornam $L_1$ e $L_2$ diferentes uma da outra. Tome a lógica proposicional $S_p$ e a lógica de predicados de primeira ordem $S_1$ como exemplo. Apesar de as linguagens desses dois sistemas serem diferentes, suas relações de inferência satisfazem todas aquelas propriedades consideradas importantes na caracterização de uma relação de inferência, entre elas as mencionadas alguns parágrafos acima. Assim, podemos dizer que $S_p$ e $S_1$ possuem a mesma relação de inferência, porém linguagens diferentes, o que pode ser representado por $S_p=<L_p,\Vdash_c>$ e $S_1=<L_1,\Vdash_c>$, em que $L_p$ e $L_1$ são as linguagens de $S_p$ e $S_1$, respectivamente, e $\Vdash_c$ é o que chamamos de *relação de inferência clássica*, que seria a relação de inferência de ambos os sistemas $S_p$ e $S_1$. O mesmo se aplica a muitos outros sistemas lógicos tais como a lógica modal, a lógica deôntica e a lógica temporal, que possuem linguagens diferentes da linguagem proposicional e da linguagem de primeira ordem, mas cujas relações de inferência possuem as mesmas características de $\Vdash_c$ (no sentido acima descrito).

Mas obviamente não é só em relação à linguagem lógica que dois sistemas lógicos podem diferir um do outro. Mais especificamente, se um sistema lógico S é caracterizado como um par $<L,\Vdash>$ então dois sistemas lógicos $S_1=<L_1,\Vdash_1>$ e $S_2=<L_2,\Vdash_2>$ podem diferir um do outro em no mínimo três aspectos fundamentais:

(i) Pode ser que $\Vdash_1$ seja igual a $\Vdash_2$ mas $L_1$ seja diferente de $L_2$ (que foi o caso visto até agora);

(ii) Pode ser que $L_1$ seja igual a $L_2$, mas $\Vdash_1$ seja diferente de $\Vdash_2$;

(iii) E pode ser que tanto $L_1$ seja diferente de $L_2$ como $\Vdash_1$ seja diferente de $\Vdash_2$.

Podemos chamar a classe de sistemas que inclui a lógica clássica proposicional e todos os sistemas lógicos que diferem dela de acordo com (i) de *lógica clássica* ou *lógicas clássicas*. À classe dos sistemas que diferem da lógica proposicional de acordo com (ii) ou (iii) podemos dar o nome de *lógicas não clássicas*. Equivalentemente, tomando a relação de inferência clássica $\Vdash_c$ como parâmetro, dizemos que a lógica clássica é a classe de todos os sistemas lógicos da forma $S=<L,\Vdash_c>$, e as lógicas não clássicas são os sistemas lógicos da forma $S=<L,\Vdash_{nc}>$, em que $\Vdash_{nc}$ é diferente de $\Vdash_c$[13].

Exemplos de lógicas não clássicas são os sistemas lógicos em que o princípio do terceiro excluído não é válido. Em tais lógicas, entre as quais a *lógica intuicionista* é o exem-

**13.** É digno de nota que algumas pessoas alternativamente usam o termo "lógica clássica" para designar apenas as lógicas proposicional e de predicados, e o termo "lógicas não clássicas" para referenciar todos os demais sistemas lógicos. Neste livro abordaremos prioritariamente o que estamos chamando de lógica clássica. Breve menção, no entanto, será feita no capítulo 7 sobre a lógica intuicionista e paraconsistente: no decorrer de nosso caminho de construção do cálculo clássico proposicional definiremos um cálculo intuicionista e outro paraconsistente.

plar mais conhecido, não é o caso que $\Vdash\alpha\vee\neg\alpha$ (em que $\Vdash$ é a relação de inferência de tais sistemas), ou seja, o princípio do terceiro excluído não é válido. Outro exemplo é a *lógica paraconsistente*, na qual o princípio da explosão (9) não é valido. Em outras palavras, em tais sistemas lógicos não é o caso que $\Gamma\cup\{\beta,\neg\beta\}\vDash\alpha$, para todo $\alpha\in L$; pode haver enunciados da linguagem lógica que não são deduzidos a partir de uma contradição. Comumente nessas lógicas também não valem o princípio da redução ao absurdo (8) e o princípio da não contradição (7). Apesar de a ênfase deste livro ser na exposição das lógicas clássicas proposicional e de primeira ordem, introduziremos no capítulo 7 alguns sistemas lógicos não clássicos, entre eles um sistema intuicionista e dois paraconsistentes.

Dois pontos devem ser mencionados antes de terminarmos este capítulo. Primeiro um esclarecimento em relação ao uso da palavra "lógica". Conforme o leitor deve ter observado, temos usado, nesta seção, esse termo para designar um sistema lógico específico ou uma classe de sistemas lógicos. Assim falamos, por exemplo, na lógica clássica proposicional e na lógica de predicados de primeira ordem, designando dois sistemas lógicos específicos, e também na lógica clássica e na lógica paraconsistente, designando dessa forma classes de sistemas lógicos. Assim, é prática comum se usar o termo "lógica" para se referir tanto à *disciplina* incumbida de desenvolver e estudar sistemas lógicos, como aos próprios sistemas lógicos.

Segundo, existem basicamente duas maneiras distintas de se definir a relação de inferência de um sistema lógico: *semanticamente* e *sintaticamente*. Grosso modo, a distinção é que, enquanto a definição semântica faz uso de conceitos semânticos como o conceito de verdade e, em última instância, atenta para o significado dos símbolos, em uma abordagem sintática nenhuma consideração é feita sobre o significado dos termos, enfocando-se exclusivamente a forma lógica dos enunciados. Por fazer referência ao significado dos símbolos, uma definição semântica é mais intuitiva, no sentido de que o fato de tal definição ser ou não uma construção do que entendemos como sendo a relação de consequência lógica ser mais facilmente identificável. Por outro lado, no uso efetivo da relação de inferência na avaliação de argumentos, uma definição sintática é mais eficiente. Assim, tradicionalmente, a relação de inferência de um sistema lógico é definida tanto sintática como semanticamente. E, para distinguir uma da outra, usa-se tanto uma nomenclatura como uma simbologia especial. Para a relação de inferência definida sintaticamente reservamos o termo "relação de dedução", sendo um símbolo especial, "$\vdash$", usado para designar tal relação. Para a relação de inferência definida semanticamente reservamos o termo "relação de consequência lógica", sendo o símbolo "$\vDash$" usado para designá-la. Quando quisermos falar de tal relação independentemente de ela ser definida sintática ou semanticamente, procedemos como fizemos aqui e usamos a expressão "relação de inferência" e o símbolo $\Vdash$.

Dado isso, uma maneira mais correta de caracterizar um sistema lógico seria identificá-lo como uma tripla

$<L, \vdash, \vDash>$,

em que L é sua linguagem lógica, $\vdash$ sua relação de inferência definida sintaticamente e $\vDash$ a mesma relação definida semanticamente. A parte incumbida de definir $\vDash$ nós chamamos de a *semântica* da lógica em questão. A parte do sistema incumbida em definir $\vdash$ nós chamamos de o *cálculo* do sistema. É assim que falamos, por exemplo, no cálculo proposicional e no cálculo de predicados de primeira ordem, significando com isso a definição sintática da relação de inferência da lógica clássica proposicional e da lógica clássica de predicados de primeira ordem, respectivamente. Enquanto que as semânticas das lógicas clássicas proposicional e de predicados de primeira ordem são introduzidas nos capítulos 4 e 10, respectivamente, os cálculos proposicional e de predicados de primeira ordem são introduzidos nos capítulos 5 e 11, respectivamente[14].

Mas dado que podemos definir a relação de inferência $\vDash$ de uma lógica sintática e semanticamente, sendo essas definições, do ponto de vista formal, naturalmente diferentes, podemos perguntar: como saber se a definição sintática $\vdash$ e a definição semântica $\vDash$ definem realmente a *mesma coisa*, isto é $\vDash$? Trivialmente, para que $\vdash$ e $\vDash$ realmente correspondam à mesma relação de inferência, dado um conjunto de fórmulas $\Gamma \in L$ e uma fórmula $\alpha \in L$, devemos ter que

(10) se $\Gamma \vdash \alpha$ então $\Gamma \vDash \alpha$,

e que

(11) se $\Gamma \vDash \alpha$ então $\Gamma \vdash \alpha$.

Em outras palavras, deve ser o caso que se $<L,\alpha>$ é um argumento válido de acordo com a relação de inferência sintática $\vdash$, ele também deve ser de acordo com a relação semântica $\vDash$, e se $<L, \alpha>$ é um argumento válido de acordo com $\vdash$, ele também deve ser de acordo com $\vDash$. Chamamos a propriedade (10) de a *corretude* do sistema lógico em questão, e (11) de sua *completude*. A demonstração de tais propriedades é um dos resultados mais importantes do que chamamos acima de metalógica. Reservamos o capítulo 12 para tratar da metalógica, sendo os teoremas da corretude e da completude tratados na seção 12.4.

**14.** É digno de nota que há maneiras diferentes de definir sintaticamente uma relação de inferência. Pode-se ter, por exemplo, um cálculo axiomático, isto é, um cálculo que é definido de acordo com o chamado método axiomático, um cálculo de dedução natural ou um cálculo de sequente. Neste livro utilizaremos exclusivamente o método axiomático para definirmos os nossos cálculos. Informações detalhadas sobre em que consiste tal método são dadas na seção 5.2.

## 2.3 Exercícios propostos

1. Como devemos entender a expressão “lógica matemática”?
2. Responda as perguntas abaixo:
   a. Qual a forma geral da relação de dedução $\Vdash$?
   b. Na relação a seguir, o que são premissas e o que é conclusão?
   $\{A\vee B, \neg B, A\vee C\rightarrow\neg D\}\Vdash\neg D$.
   c. Mencione e explique três propriedades que a relação de dedução $\vDash$ pode ter.
3. Responda as perguntas abaixo:
   a. O que é um sistema lógico?
   b. Em que aspectos dois sistemas lógicos podem diferir um do outro?
4. Explique a diferença, do ponto de vista da lógica, entre sintaxe e semântica.
5. Mencione dois sistemas lógicos não clássicos, e diga quais suas características identificadoras.
6. Quais as duas principais maneiras de se definir uma relação de inferência?
7. De acordo com a nomenclatura que utilizamos, qual a diferença entre $\Vdash$, $\vdash$ e $\vDash$?
8. O que é corretude e completude?

# Lógica proposicional

# 3
# Linguagem proposicional

## 3.1 Linguagens lógico-formais e linguagem natural

Conforme dissemos no capítulo anterior, um sistema lógico pode ser caracterizado como um par $<L,\Vdash>$ em que L é a sua linguagem lógica e $\Vdash$ é a sua relação de inferência ou, alternativamente, como um triplo $<L,\vdash,\vDash>$ em que L é a linguagem lógica, $\vdash$ a relação de inferência ($\Vdash$) definida sintaticamente e $\vDash$ a mesma relação definida semanticamente. Neste capítulo introduziremos uma linguagem lógica específica que faz parte de diversos sistemas lógicos: a *linguagem proposicional*. Essa linguagem já foi na verdade introduzida informalmente e de forma muito breve no primeiro capítulo. Nele nós a utilizamos para evidenciar a utilidade de um simbolismo especial na representação da estrutura lógica de sentenças e argumentos. Continuaremos aqui essa empreitada elucidativa e, antes de apresentarmos a linguagem proposicional propriamente dita, tentaremos elaborar um pouco mais sobre a necessidade de dispormos de linguagens lógico-formais na representação de enunciados e no estudo dos argumentos válidos[15].

Para começar, poderíamos perguntar por que, ao invés de símbolos especiais, que sem sombra de dúvida são extremamente estranhos ao não iniciado, não utilizamos uma linguagem natural específica, já que as linguagens naturais são indubitavelmente capazes de representar a grande maioria dos argumentos?[16]

Um primeiro ponto a ser evocado na resposta a essa pergunta é o fato, já discutido no primeiro capítulo, de que a lógica deve se preocupar com a forma, e não com o conteúdo dos enunciados. Assim, é importante dispor de símbolos que, não tendo atrelado

---

**15.** Convém advertir que essa seção tem como objetivo esclarecer alguns pontos cruciais a respeito do uso de linguagens formais *em geral*. Assim, de forma semelhante a como fizemos no capítulo 1, visando tornar mais enfáticos alguns pontos cruciais da nossa exposição, faremos uso aqui de notação não pertencente à linguagem proposicional (que é o foco principal do capítulo), mas a outra linguagem lógica, a ser introduzida formalmente no capítulo 9, chamada de linguagem de predicados de primeira ordem.

**16.** Uma exceção disso são obviamente os argumentos matemáticos que, por sua própria natureza, exigem uma simbologia especial.

a eles nenhum significado específico, deixem clara a forma lógica dos enunciados. Naquele capítulo demos como exemplo que a forma do argumento

(1) Se Sócrates é homem, então Sócrates é mortal.
Sócrates é homem.
Portanto, Sócrates é mortal.

apenas ficaria explícita quando substituíssemos o conteúdo específico dos enunciados que compõem o argumento pelo que podemos chamar de variáveis proposicionais, ou seja, símbolos que não denotam nenhuma proposição em particular, mas apenas marcam um lugar que pode ser ocupado por qualquer enunciado:

(1') Se A, então B.
A.
Portanto, B.

Além disso, visto que a forma gramatical exibida por um enunciado escrito em linguagem natural pode não corresponder a sua forma lógica, utilizar a linguagem natural sem nenhum refinamento pode atrapalhar a tarefa do lógico de identificar os argumentos válidos. Entre os exemplos que demos no capítulo 1, vimos que, a despeito de sua forma gramatical, a forma lógica da sentença

(2) Todos os homens são mortais

é mais adequadamente representada pelo esquema de sentença abaixo:

(2') Para todo indivíduo *x*, se *x* é Z, então *x* é Y,

ou, já utilizando o simbolismo de uma linguagem lógico-formal:

(2'') $\forall x(Z(x) \rightarrow Y(x))$

Diretamente relacionado com essa dificuldade da linguagem natural em exibir de forma clara a estrutura lógica dos enunciados está o fato de que muitas vezes o significado ou papel lógico de certos termos da linguagem natural é *ambíguo*. Considere os seguintes enunciados:

(3) Os rubis *são* vermelhos.

(4) Os meses do ano *são* doze.

Uma análise superficial desses enunciados poderia nos levar a concluir que, tendo a mesma estrutura ou forma gramatical, eles devem obviamente possuir a mesma forma lógica, mesmo que essa forma lógica seja diferente das suas formas gramaticais. Após uma breve reflexão, no entanto, concluiremos que o significado, digamos assim, do verbo "ser" em (3) é completamente diferente do seu significado em (4), o que certamente implicará formas lógicas diferentes. Ao dizer que os rubis são vermelhos, estamos obviamente querendo dizer que os rubis possuem a propriedade vermelha, ou que a classe de rubis está contida na classe de objetos vermelhos. Utilizando o formalismo que introduzimos informalmente no capítulo 1, representaríamos isso da seguinte forma:

(3') $\forall x(R(x) \rightarrow V(x))$

em que R significa a propriedade de ser rubi e V a propriedade de ser vermelho. Já no caso de (4), estamos simplesmente querendo dizer que o número de meses (em um ano) é igual a doze, o que pode ser representado simplesmente por

(4') Número de meses = 12

Assim, claramente o significado ou papel lógico do verbo "ser" é ambíguo: enquanto em (3) ele significa algo como continência entre conjuntos ou classes, em (4) ele já significa identidade. Consideremos outro exemplo:

(5) Os quadrados *são* losângulos *e* retângulos.

(6) Os seres vivos *são* os animais *e* os vegetais .

Aqui, (5) e (6) estão usando o conectivo "e" com significados completamente diferentes. Isso pode ser visto se representamos (5) e (6) em termos de conjuntos:

(5') Quadrado = Losângulo $\cap$ Retângulo.

(6') Ser vivo = Animais $\cup$ Vegetais.

em que $\cap$ significa intersecção entre conjuntos, e $\cup$ união. Aqui temos que, enquanto em (5) o conectivo "e" significa interseção entre conjuntos, em (6) ele significa união, ou seja, duas coisas completamente diferentes. Essa ambiguidade se tornará ainda mais clara se decidirmos representar (5) e (6) formalmente:

(5'') $\forall x(Q(x) \rightarrow L(x) \wedge R(x))$

(6'') $\forall x(S(x) \rightarrow A(x) \vee V(x))$

em que o Q significa a propriedade de ser quadrado, L a de ser um losângulo, R a de ser um retângulo, S a de ser um ser vivo, A a de ser um animal, e V a de ser um vegetal. Aqui, além de termos que as formas de (5'') e (6''), que supostamente revelam as formas lógicas de (5) e (6), respectivamente, são diferentes das formas gramaticais exibidas em (5) e (6), temos curiosamente que o termo "e" presente em (6) corresponde na verdade não a uma conjunção, mas a uma disjunção, ou seja, ao termo "ou", que na nossa simbologia é representado por $\vee$.

Alguém poderia, no entanto, perguntar se a ambiguidade é realmente ruim. É realmente tão importante assim que os nossos enunciados sejam isentos de ambiguidade? Para responder essa pergunta, suponha que estejamos analisando a validade do seguinte argumento, e o façamos sem tradução para uma linguagem formal:

(7) x é y.
Portanto, y é x

em que $x$ e $y$ são dois objetos quaisquer. Como aqui não estamos interessados em um argumento em particular, mas em toda uma classe de argumentos que possuem a forma de (7), não devemos especificar o que são os objetos $x$ e $y$. Claramente então a pergunta que nos interesse é: o esquema de argumento (7) é válido ou não? Ou, em outras palavras, é o caso que todos os argumentos que possuem a mesma estrutura de (7) são válidos?

Infelizmente, neste caso, nós não seremos capazes de dar uma resposta, pois, como vimos, o significado do termo "é" é ambíguo. Se interpretarmos "é" como em (4), em termos de identidade, claramente o argumento acima será válido. No entanto, se o interpretarmos como em (3), ele será inválido, pois o fato de a classe de rubis, por exemplo, estar contida na classe de coisas vermelhas não implica que a classe de coisas vermelhas esteja também contida na classe de rubis. Assim, a menos que desambiguemos o significado dos termos de nossa linguagem, a nossa tarefa de análise lógica dos argumentos estará seriamente comprometida.

Outra fonte de ambiguidade em linguagem natural é o fato de ela permitir certos assim chamados termos lógicos, por exemplo, aparecerem em qualquer parte da sentença. Considere o termo "não", por exemplo. De uma forma geral, existem diversas maneiras através das quais um enunciado pode ser negado, e o que acontece é que algumas dessas construções são de fato ambíguas. Considere o enunciado abaixo:

(8) Todos os homens não são bons.

Claramente este enunciado é ambíguo. Não está claro se aqui queremos dizer que

(9) Nenhum homem é bom,

que será verdade somente se nenhum homem possuir a característica de ser bom, ou se queremos ao invés disso dizer que

(10) Não é o caso que todos os homens são bons,

que, para ser verdade, é necessário que apenas haja algum homem que não seja bom.

Esse tipo de problema é resolvido nas linguagens formais definindo regras rígidas de formação de enunciados, de forma que os termos que compõem um enunciado só possam aparecer em posições fixas e bem definidas dentro do enunciado. Por exemplo, na maioria das linguagens lógico-formais, o símbolo $\neg$, correspondente ao "não", aparece sempre imediatamente antes da sentença que ele nega, de forma a impedir construções como (8), onde a negação aparece antes do verbo. Assim, (9) e (10) seriam representados, respectivamente, como segue:

(9') $\forall x(Hx \rightarrow \neg Bx)$

(10') $\neg \forall x(Hx \rightarrow Bx)$, em que H significa a propriedade de ser homem e B a propriedade de ser bom. Aqui, vemos ainda mais claramente em que sentido (9) e (10) diferem um do outro.

### 3.2 Símbolos proposicionais e conectivos lógicos

Um dos objetivos então a serem perseguidos na construção de uma linguagem lógica é que seus termos sejam livres de ambiguidade, o que significa que cada termo da linguagem deve ter apenas um significado ou interpretação. Também queremos obviamente que tais termos tenham no mínimo uma interpretação, ou seja, não queremos termos que não signifiquem nada.

Apesar de tais diretrizes, bastante razoáveis, devemos admitir, a questão do significado dos termos de uma linguagem lógica é algo que, talvez surpreendentemente, não está contemplado na definição formal da linguagem: a atribuição de algo digno de ser chamado de o significado dos termos da linguagem lógica aparecerá apenas nas definições sintática e semântica da relação de inferência. De um ponto de vista rigoroso, linguagens lógicas são estruturas *não interpretadas,* isto é, estruturas cujo significado de seus termos está completamente em aberto, por assim dizer. No entanto, por fins didáticos, introduziremos nesta seção a linguagem proposicional fazendo referência ao significado ou interpretação de seus componentes, estando claro, no entanto, que a definição formal de tal significado será feita apenas nos capítulos 4 e 5.

Uma das características mais relevantes do que estamos chamando aqui de linguagens lógico-formais é a sua *composicionalidade*. Tal característica pode se apresentar em diversos níveis da construção de um sistema lógico; no que concerne à construção de uma linguagem, composicionalidade significa basicamente que os elementos desta linguagem devem ser compostos por, ou serem construídos a partir de, elementos mais simples. Por exemplo, a sentença

(11) No verão o sol nasce mais cedo e se põe mais tarde, e no inverno ele nasce mais tarde e se põe mais cedo.

que obviamente pertence a uma linguagem específica, é composta por vários componentes mais simples da mesma linguagem, a saber, os termos “No”, “verão, “o”, “sol”, “nasce”, “mais”, etc. No que se refere a sentenças ou enunciados, podemos dizer que, em certo sentido, (11) é composto por, ou é construído a partir de, outros enunciados mais simples, a saber,

(12) No verão o sol nasce mais cedo e se põe mais tarde.

(13) No inverno o sol nasce mais tarde e se põe mais cedo.

que são "unidos" com o auxílio do termo "e" (antecedido pelo símbolo ",")[17]. (12) e (13), por sua vez, também podem ser tomados como compostos por outros enunciados mais simples. No caso de (12), podemos dizer que ele é composto pelos dois enunciados abaixo:

(14) No verão o sol nasce mais cedo.

(15) No verão o sol se põe mais tarde.

Já no caso de (13), dizemos que ele é composto pelos enunciados abaixo:

(16) No inverno o sol nasce mais tarde.

(17) No inverno o sol se põe mais cedo.

Veja que se assumimos que todo enunciado em uma linguagem é composto por enunciados mais simples, é necessário que haja certo conjunto de enunciados elementares, ou seja, que, apesar de servirem de base para a construção ou composição de todos os outros enunciados, eles mesmos não são compostos por enunciados mais simples. A tais enunciados nós damos o nome de *enunciados atômicos*.

Na linguagem proposicional, os chamados *símbolos proposicionais* correspondem a tais enunciados atômicos. Apesar de que aqui não iremos impor nenhuma restrição no que se refere à forma gráfica dos símbolos proposicionais, iremos comumente usar letras maiúsculas do alfabeto latino para representar tais símbolos. Assim, se quiséssemos, por exemplo, representar os enunciados acima na linguagem proposicional, poderíamos dizer que os símbolos proposicionais A, B, C e D significam, respectivamente, (14), (15), (16) e (17):

A: No verão o sol nasce mais cedo.

B: No verão o sol se põe mais tarde.

C: No inverno o sol nasce mais tarde.

D: No inverno o sol se põe mais cedo.

Dois pontos devem ser bem compreendidos no momento de se realizar a empreitada de representar enunciados em língua natural na linguagem proposicional. Primeiro, que apenas enunciados completos, passíveis de serem verdadeiros ou falsos, podem ser representados como símbolos proposicionais. Por exemplo, o fragmento "se põe mais tarde" não pode, a rigor, ser representado por um símbolo proposicional, pois é um enunciado incompleto, não passível de ser classificado como falso ou verdadeiro; "O que se põe mais tarde?", poderíamos perguntar.

Segundo, apenas enunciados atômicos, que não podem ser divididos em enunciados (completos) mais simples, podem ser representados como símbolos proposi-

---

**17.** Veja aqui que substituindo o pronome "ele" pelo termo "sol" em (13) tornamos explícito o que em (11) estava obviamente claro, mas apenas de uma forma implícita: que o pronome "ele" se refere ao termo "sol".

cionais. Assim, seria incorreto representar, por exemplo, (12), como um símbolo proposicional, pois claramente (12) é composto por dois outros enunciados, a saber, (14) e (15). Para representar (12) precisamos juntar, por assim dizer, os enunciados (14) e (15) como auxílio da conjunção "e". Como vimos rapidamente no capítulo 1, usa-se comumente o símbolo "$\wedge$" para representar o termo "e", de forma que (12) seria representado na linguagem proposicional como segue:

(12') $A \wedge B$

(13) por sua vez seria representado por

(13') $C \wedge D$

Chamamos $\wedge$ de o conectivo da conjunção, ou simplesmente *conjunção*. Veja que podemos usar a conjunção quantas vezes quisermos para formar enunciados não atômicos ou *complexos*. Podemos, por exemplo, juntar (12') e (13') e assim obter uma representação ou tradução de (11) na linguagem proposicional:

(11') $(A \wedge B) \wedge (C \wedge D)$

Os parênteses aqui servem para delimitar os componentes da conjunção, ou seja, que o enunciado ou *fórmula* (11') é composta pela conjunção das fórmulas $A \wedge B$ e $C \wedge D$.

Como vimos na seção anterior, entretanto, o termo "e" da linguagem natural pode ter mais de um significado. Uma maneira de não deixar dúvidas em relação ao fato de que o que queremos representar com $\wedge$ é precisamente o conceito de conjunção é examinar o que chamamos de *tabela de verdade* do conectivo $\wedge$:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \wedge \beta$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

Aqui $\alpha$ e $\beta$ são duas fórmulas quaisquer, sejam atômicas ou não ($\alpha$ pode ser, por exemplo, o enunciado ou fórmula atômica A, mas também a fórmula $A \wedge B$, a fórmula $(A \wedge B) \wedge (B \wedge C)$, etc.); "V" e "F" significam, respectivamente, "verdadeiro" (ou "verdade"[18]) e "falso". Dizemos que "V" e "F" são os dois possíveis *valores de verdade* de uma fórmula. Assim, o que temos acima é a representação do valor de verdade de $\alpha \wedge \beta$ (colu-

**18.** Estaremos aqui usando os termos "verdade" e "verdadeiro" de forma equivalente. Em particular, usaremos ambos os termos como qualificadores de enunciados e fórmulas (o conceito de fórmula será explicado logo abaixo). Por exemplo, podemos escrever tanto "o enunciado S é verdade" como o "o enunciado S é verdadeiro".

na mais à direita) em cada uma das possíveis combinações de valores de verdade de $\alpha$ e $\beta$ (duas colunas mais à esquerda). Por exemplo, temos na primeira linha da tabela que se $\alpha$ é verdade e $\beta$ é verdade, então $\alpha \wedge \beta$ é verdade. Se $\alpha$ é verdade, mas $\beta$ é falso, teremos que $\alpha \wedge \beta$ é falso. O mesmo acontece se $\alpha$ é falso e $\beta$ é verdade, e se ambos são falsos.

Enquanto que símbolos proposicionais fazem parte do que chamamos de *símbolos não lógicos* da linguagem proposicional, o conectivo $\wedge$ faz parte dos *símbolos lógicos* da linguagem proposicional. Um segundo símbolo lógico, que obviamente pode ser usado na construção de fórmulas complexas, é o símbolo de *negação* $\neg$[19]. Por exemplo, se quisermos representar o enunciado

(18) No verão o sol não nasce mais cedo.

que efetivamente é verdadeiro em regiões muito próximas ao equador, escreveríamos

(18') $\neg A$

Lemos $\neg A$ como "não é o caso que A", ou simplesmente "não A". Se quiséssemos representar a negação de (11) escreveríamos

(19) $\neg((A \wedge B) \wedge (C \wedge D))$

Veja que aqui o uso dos parênteses é indispensável para evitar ambiguidades: ao colocarmos toda a fórmula $(A \wedge B) \wedge (C \wedge D)$ entre parênteses, com $\neg$ antecedendo o primeiro parêntese, deixamos claro que o que se está negando é efetivamente $(A \wedge B) \wedge (C \wedge D)$. Contraste isso com uma situação na qual tivéssemos dispensado estes parênteses mais externos:

(19') $\neg(A \wedge B) \wedge (C \wedge D)$

Aqui, estaria no mínimo ambíguo se o que estamos negando é a fórmula $A \wedge B$ ou a fórmula $(A \wedge B) \wedge (C \wedge D)$. Assim, para evitar ambiguidade na escrita das nossas fórmulas, em muitos casos é imprescindível que façamos uso dos parênteses.

Conforme mencionamos na seção anterior, o fato de a linguagem natural permitir que o termo "não" apareça em vários lugares dentro do enunciado é fonte de ambiguidades. Isso é evitado na linguagem proposicional, e na verdade na maioria das linguagens lógico-formais, exigindo que o símbolo da negação apareça necessariamente antes do enunciado que está sendo negado, sendo tal enunciado bem definido, possivelmente com o auxílio de parênteses. A tabela de verdade de $\neg$, extremamente simples, diga-se de passagem, é como segue:

19. É bastante comum encontrarmos também o símbolo $\sim$ como significando o símbolo lógico da negação.

| $\alpha$ | $\neg\alpha$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

Temos aqui que $\neg\alpha$ é verdade se e somente se $\alpha$ for falso, e $\neg\alpha$ é falso se e somente se $\alpha$ for verdade.

O terceiro símbolo lógico tenciona representar a *disjunção*, expressa em linguagem natural através do termo "ou" e representada aqui pelo símbolo $\vee$. Assim, se $\alpha$ e $\beta$ são duas fórmulas, $\alpha\vee\beta$ também será uma fórmula, neste caso significando "$\alpha$ ou $\beta$". Supondo, por exemplo, que os símbolos proposicionais E e F tenham os significados abaixo:

E: O quarto está arrumado.

F: O carro está limpo.

o enunciado

(20) O quarto está arrumado ou o carro está limpo.

seria representado na linguagem proposicional por

(20') E$\vee$F

Segue abaixo a tabela de verdade do $\vee$:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha\vee\beta$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

Aqui temos que no mínimo um dos membros da disjunção deve ser verdade para que toda a fórmula seja verdade: nos casos em que $\alpha$ e $\beta$ são ambos verdade, $\alpha$ é verdade e $\beta$ é falso, e $\alpha$ é falso e $\beta$ é verdade, $\alpha\vee\beta$ é verdade. O único caso em que $\alpha\vee\beta$ é falso é quando tanto $\alpha$ como $\beta$ são falsos.

Aqui se poderia objetar que a interpretação contida na primeira linha da tabela, que diz que se $\alpha$ e $\beta$ são ambos verdadeiros, $\alpha\vee\beta$ também o é, conflita com o uso corrente que fazemos da palavra "ou". De acordo com esta visão, a expressão "ou" encerra em si um aspecto exclusivo, de forma que para que a expressão "$\alpha$ ou $\beta$" seja verdade, não pode ser o caso de ambos $\alpha$ e $\beta$ serem verdade. Isso seria exemplificado pelo enunciado abaixo:

(21) Ou eu vou à faculdade ou eu vou à festa.

Aqui, claramente temos a ideia de que, para que (21) seja verdade, eu não posso ir para a faculdade *e* também ir para a festa.

O que temos aqui, de fato, é mais um caso de ambiguidade da linguagem natural. Existem, na verdade, dois usos para a palavra "ou" na linguagem natural: o uso *exclusivo*, exemplificado por (21), e o uso *inclusivo*, exemplificado por (20). Enquanto que a *disjunção exclusiva* proíbe que ambos os termos da disjunção sejam verdadeiros, a *disjunção inclusiva* já permite isso. Para ver que (20) efetivamente incorpora essa interpretação inclusiva, basta ver que um pai que ordene a seu filho que arrume o quarto ou lave o carro dificilmente poderá reclamar se o rapaz fizer ambos.

Isso é obviamente importante para nós, pois a noção capturada por $\vee$ é o ou inclusivo, não o ou exclusivo. No entanto, podemos facilmente, utilizando os conectivos vistos até agora, representar a ideia por trás da noção de disjunção exclusiva. Supondo que os símbolos proposicionais G e H sejam interpretados como segue:

G: Eu vou à faculdade.

H: Eu vou à festa.

(21) seria traduzido para a linguagem proposicional como segue:

(21') $(G \vee H) \wedge \neg(G \wedge H)$

em que claramente há a proibição de que ambos G e H sejam verdadeiros.

O último símbolo lógico do qual falaremos aqui tenta capturar a noção de *condicionalidade* encontrada em expressões da linguagem natural como "se ... então". Considere a sentença abaixo, por exemplo:

(22) Se há fumaça, então há fogo.

Aqui, os dois enunciados que compõem (22) estão estruturados de tal forma que a veracidade do primeiro garante a veracidade do segundo, isto é, se o enunciado "há fumaça" é verdade, então o enunciado "há fogo" também o é. Representaremos essa noção através do símbolo $\rightarrow$, de forma que se $\alpha$ e $\beta$ são fórmulas, $\alpha \rightarrow \beta$ também é uma fórmula. $\alpha \rightarrow \beta$ pode ser lido como "se $\alpha$, então $\beta$", "$\alpha$ implica $\beta$" ou "$\alpha$ somente se $\beta$". O símbolo $\rightarrow$ é comumente chamado de *condicional* ou *implicação material*[20]. Supondo que os símbolos proposicionais I e J sejam interpretados como descrito abaixo:

I: Há fumaça.

J: Há fogo.

---

**20.** Também encontramos, principalmente nos manuais de lógica mais antigos, o símbolo $\supset$ como designando a implicação material.

(22) seria traduzido para a linguagem proposicional como segue:

(22') $I \rightarrow J$

A enunciados deste tipo damos o nome de *implicações* ou *condicionais*, visto que a veracidade do *antecedente* do condicional – no caso de (22') a fórmula I – é uma condição suficiente para a veracidade do seu *consequente* – no caso de (22') a fórmula J. Isso pode ser visto melhor se lemos $I \rightarrow J$ como "I somente se J": I é verdade somente se J for verdade, há fumaça somente se houver fogo. A tabela de verdade de $\rightarrow$ é como segue:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \rightarrow \beta$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

Aqui temos, antes de tudo, na primeira linha da tabela, que se ambos antecedente e consequente de um condicional são verdadeiros, então o condicional como um todo também o é. Por outro lado, caso o antecedente $\alpha$ seja verdade e o consequente $\beta$ seja falso, trivialmente $\alpha \rightarrow \beta$ é falso. Isso está dito na linha seguinte. As linhas terceira e quarta da tabela basicamente dizem que, independentemente do valor de verdade do consequente, caso o antecedente de um condicional seja falso, o condicional como um todo será verdade. Veja que a primeira e terceira linhas da tabela estabelecem algo semelhante relativo ao consequente: independentemente do valor de verdade do antecedente, caso o consequente seja verdade, o condicional também o é.

O leitor atento deve ter notado algo de estranho na determinação do valor de verdade de $\alpha \rightarrow \beta$ dado nas duas últimas linhas da tabela. Enquanto parece extremamente razoável considerar $\alpha \rightarrow \beta$ como verdade quando $\alpha$ é verdade e $\beta$ é verdade, e como falso quando $\alpha$ é verdade e $\beta$ é falso, à primeira vista parece um pouco bizarro dizer que $\alpha \rightarrow \beta$ é verdade em uma situação onde $\alpha$ é falso e $\beta$ é verdadeiro. Tal estranheza aumenta quando juntamos isso com o afirmado na quarta linha da tabela – que diz que $\alpha \rightarrow \beta$ é verdade se $\alpha$ é falso e $\beta$ é falso – e vemos que, caso $\alpha$ seja falso, independentemente do valor de verdade de $\beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ é verdade.

Uma maneira de justificar isso seria como segue. Quando dizemos "se $\alpha$ então $\beta$", ou "$\alpha$ somente se $\beta$", estamos basicamente estabelecendo uma relação entre os valores de verdade dos enunciados $\alpha$ e $\beta$, a saber, a relação que diz que se $\alpha$ for verdade, $\beta$ também o é. Há, através desses enunciados, algo como que a garantia de que sempre que $\alpha$ for verdade, $\beta$ também o será. Mas veja que essa relação só especifica algo a respeito da situação na qual $\alpha$ é verdade: ela não diz nada sobre uma circunstância onde $\alpha$ seja falso. É mais ou menos como se ao dizer $\alpha \rightarrow \beta$ eu esteja assumindo um compromisso de garantir que, caso $\alpha$ seja verdade, $\beta$ também o será. No entanto, ao fazer isso, eu não estou assumindo compromisso nenhum no caso de $\alpha$ ser falso. Caso $\alpha$ seja falso e $\beta$ seja verdadeiro, ou $\alpha$ falso e $\beta$ falso, o meu compromisso expresso através de $\alpha \rightarrow \beta$ não terá sido em absoluto invalidado.

Outra maneira de justificar estas duas últimas linhas é fazer referências ao fato óbvio que, seja qual for nossa análise da implicação, o enunciado "se $\alpha$ e $\beta$, então $\beta$" deve ser verdade em todas as circunstâncias. Assim, em primeiro lugar, caso $\alpha$ seja falso e $\beta$ verdade, "$\alpha$ e $\beta$" será falso e $\beta$ verdade, o que justificaria a terceira linha da tabela. Mas se ambos $\alpha$ e $\beta$ forem falsos, tanto "$\alpha$ e $\beta$" como $\beta$ serão falsos, o que justifica por sua vez a última linha da tabela.

No entanto, apesar de tal justificativa, pode-se replicar que há efetivamente algo de paradoxal na tabela de verdade acima, e a razão disso é a importante constatação de que não há exigência alguma, na nossa análise dos condicionais, de que o antecedente seja *relevante* para o consequente. Por exemplo, de acordo com a nossa interpretação, os enunciados abaixo são verdadeiros:

(23) Se Napoleão Bonaparte não está morto, então a lua não é o único satélite da terra.

(24) Se Napoleão Bonaparte está morto, então a lua é o único satélite da terra.

Isso obviamente é o caso devido ao fato já mencionado que qualquer condicional com o consequente verdade ou antecedente falso é verdade. Portanto, pode-se objetar que nossa análise lógica vai de encontro ao uso corrente de expressões condicionais em linguagem natural.

No entanto, não é difícil de ver que nós efetivamente usamos, em linguagem natural, condicionais sem pressupor nenhuma conexão entre antecedente e consequente, como, por exemplo, ao dizermos

(25) Se Maomé for um cristão, então eu sou um macaco.

ou

(26) Se 2+2 é igual a 4, então eu ganharei esta partida.

Enquanto em (25) estamos negando o antecedente, colocando-o em um condicional com um consequente claramente falso, em (26) estamos afirmando o consequente, apelando para o fato de que o antecedente é claramente verdade. Poder-se-ia, no entanto, replicar que tais construções são indubitavelmente escassas no uso da linguagem natural. Apesar de tal réplica obviamente não ser válida, pois uma construção linguística não deixa de ser autêntica apenas por ser pouco usada, ela nos leva a considerar uma questão deveras interessante na discussão ora em tela: por que seriam tais usos escassos?

A resposta a esta pergunta é que, na grande maioria das vezes, nos utilizamos de construções do tipo "se ... então" apenas em circunstâncias nas quais os valores de verdade do antecedente e consequente nos são desconhecidos. E em tais circunstâncias, a "estranheza" do que está explícito nas linhas 3 e 4 da tabela de $\rightarrow$ não pode se manifestar. Mas uma das tarefas da análise lógica é tornar explícito o que se encontra apenas de forma implícita nos usos correntes da linguagem natural. E para replicar eventuais acusações de incorretude na nossa análise lógica, como a de que tal análise deixou de fora algum aspecto importante na noção que ela tinha como objetivo analisar, exibem-se algumas instâncias, claramente legítimas do ponto de vista do uso corrente da linguagem natural, em que tal aspecto está presente. Assim, exibindo casos legítimos de uso de condicionais em linguagem natural onde a referida relevância entre antecedente e consequente não está presente, no mínimo abrandamos a acusação de que, por conta de não levar tal aspecto em consideração, nossa analise seria de certa forma defeituosa[21].

Para finalizar esta seção, devemos enfatizar o fato de que, na linguagem proposicional, proposições simples ou atômicas, representadas como vimos pelos símbolos proposicionais, são tratadas como não *analisáveis*. Isto significa que não é feita nenhuma tentativa de identificar a estrutura lógica de tais componentes. A única coisa que nos interessa neste ponto são as relações lógicas entre proposições. Considere, por exemplo, o enunciado abaixo:

(27) Há uma causa que é a causa de todas as coisas, sendo ela mesma não causada.

Aqui, obviamente, este enunciado é composto por enunciados mais simples, a saber,

(28) Há uma causa que é a causa de todas as coisas.

e

(29) A causa de todas as coisas é não causada.

que, por sua vez, são passíveis de serem analisados e terem suas partes constituintes determinadas. E, devido ao uso do termo "causa", muito provavelmente tal análise revelará algo de comum entre as formas lógicas de (28) e (29). No entanto, no que se refere à linguagem proposicional, o que estamos chamando aqui de análise lógica para, por assim dizer, na determinação de que (27) é uma conjunção entre (28) e (29), não havendo nenhum esforço para analisar a forma lógica de (28) e (29). Designando os símbolos

**21.** Convém notar que objeções à interpretação clássica da implicação material, que vão, na verdade, bem mais além das objeções que mostramos aqui, levaram ao surgimento de lógicas que interpretam $\rightarrow$ de forma diferente, sendo as lógicas relevantes o melhor exemplo disso.

proposicionais K para representar (28) e L para representar (29), teríamos que (27) seria representado por

(27') $K \wedge L$

A análise de (28) e (29) só será possível a partir da quarta unidade deste livro, onde introduziremos a linguagem de predicados de primeira ordem.

### 3.3 Definição da linguagem proposicional

Até agora apresentamos a linguagem proposicional de maneira informal. Nesta seção apresentaremos tal linguagem de forma que possamos precisar com clareza que enunciados realmente pertencem a essa linguagem. Vimos na seção anterior que a linguagem proposicional tem três tipos de componentes: os símbolos lógicos, a saber $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$; os símbolos não lógicos, compostos pelo conjunto de símbolos proposicionais; e os parênteses, que chamamos simplesmente de *símbolos de pontuação* – sendo os enunciados pertencentes a linguagem proposicional formados por esses símbolos. Mas pode-se perguntar: formados de que maneira? Por que, por exemplo,

(30) $((A \wedge B) \rightarrow C)$

pertence à linguagem proposicional mas

(31) $(\vee C \neg) \vee (\rightarrow DA \vee)$

não pertence? O nosso propósito nesta seção será definir de forma rigorosa a linguagem proposicional de forma a podermos responder de forma inequívoca perguntas como essa. Ademais, como veremos, para demonstrar certas propriedades da lógica em questão, a linguagem e todos os outros componentes da lógica têm de estar definidos de forma precisa.

Abaixo temos a definição que realiza essa tarefa de caracterizar de forma precisa a linguagem proposicional.

**DEFINIÇÃO 1.1** Seja P um conjunto contável de símbolos chamados símbolos proposicionais. A *linguagem proposicional* $L_p$ é definida como segue:

(i) Se $\alpha \in P$, então $\alpha \in L_p$;

(ii) Se $\alpha \in L_p$, então $(\neg\alpha) \in L_p$;

(iii) Se $\alpha, \beta \in L_p$, então $(\alpha \wedge \beta) \in L_p$;

(iv) Se $\alpha, \beta \in L_p$, então $(\alpha \vee \beta) \in L_p$;

(v) Se $\alpha, \beta \in L_p$, então $(\alpha \rightarrow \beta) \in L_p$;

(vi) Nada mais pertence à $L_p$.

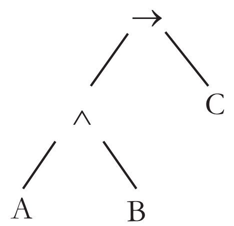
Os itens (i)-(vi) são conjuntamente chamados de *regras gramaticais* ou *regras de formação* de $L_p$. Chamaremos os membros de $L_p$ de enunciados, proposições[22] ou *fórmulas*.

Como, de acordo com a definição 1.1 o conjunto de símbolos proposicionais P é um parâmetro a ser fornecido na construção de $L_p$ e como obviamente podemos conceber diferentes conjuntos de símbolos proposicionais, teremos que, para cada conjunto de símbolos proposicionais fornecido, haverá uma linguagem proposicional diferente. No entanto, qual conjunto de símbolos proposicionais é usado na definição de $L_p$ é completamente irrelevante para o estudo que daremos cabo aqui. Assim, assumiremos daqui em diante a existência de um conjunto arbitrário qualquer de símbolos proposicionais a ser usado em conjunto com a definição 1.1. Conforme dissemos na seção anterior, representaremos os elementos de P por letras maiúsculas (pertencentes, geralmente, ao início) do alfabeto latino. Abaixo segue a definição que precisa os vários componentes da linguagem proposicional:

**DEFINIÇÃO 1.2** Chamamos o conjunto $A_p=\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow\}\cup\{(,)\}\cup P$ de o *alfabeto* de $L_p$, sendo os membros de $\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow\}$ chamados de *símbolos lógicos* de $L_p$, os de P de *símbolos não lógicos* e os membros de $\{(,)\}$ de *símbolos de pontuação*[23].

Vejamos agora como a definição 1.1 pode responder à pergunta que fizemos no início desta seção, isto é, por que (30) pertence à $L_p$, mas (31) não.

Em certo sentido, o que a definição 1.1 faz é exatamente nos dizer o que (isto é, quais sequências de símbolos) pertence ou não à $L_p$. Vejamos como isso acontece no caso de (30). Para facilitar nosso trabalho, considere o que chamamos de a *árvore sintática* da fórmula (30):




22. Tradicionalmente, em filosofia da linguagem e filosofia da lógica, os termos "proposição" e "enunciado" designam noções diferentes. Enquanto, por exemplo, "O céu é azul" e "The sky is blue" são enunciados de tipos diferentes, escritos inclusive em línguas diferentes, esses dois enunciados expressam a mesma proposição. Há também autores que estabelecem diferenças conceituais entre "enunciado" e "sentença". Ignoraremos aqui tais distinções e usaremos os termos "proposição", "enunciado" e "sentença" como sinônimos.

23. Em um sentido muito importante, os parênteses também são símbolos não lógicos. Entretanto, reservaremos esse termo exclusivamente para aqueles símbolos não lógicos passíveis de interpretação semântica, como é o caso, na linguagem proposicional, por exemplo, dos membros de P.

O que temos aqui é apenas uma forma alternativa, mais visual, diríamos, de representar (30). O conectivo superior da árvore, no caso acima $\rightarrow$, diz que o enunciado em questão é uma implicação. O que vem do lado esquerdo e direito de $\rightarrow$, unidos a $\rightarrow$ por uma linha, representam, respectivamente, o antecedente e consequente da implicação. Do lado direito, no final da linha, temos apenas o símbolo proposicional C, significando que o consequente da implicação é tal símbolo proposicional. Do lado esquerdo temos ao final da linha o conectivo $\wedge$, significando que o antecedente da implicação é uma conjunção. Mas conjunção de quê? Essa pergunta é respondida examinando o que vem no final das linhas à esquerda e direita de $\wedge$, a saber, os símbolos proposicionais A e B.

Voltando à definição 1.1 e à pergunta de como podemos usá-la para saber se (30) pertence ou não à $L_p$, o que os itens (i)-(v) nos dizem é, basicamente, que forma as sequências de símbolos que pertencem à $L_p$ têm. De acordo com o item (v), sentenças da forma $(\alpha \rightarrow \beta)$ pertencem à $L_p$ se $\alpha \in L_p$ e $\beta \in L_p$. Claramente (30) tem a mesma forma que $(\alpha \rightarrow \beta)$, sendo que no seu caso $\alpha$ seria $(A \wedge B)$ e $\beta$ seria C. Assim, de acordo com o item (v), se $(A \wedge B) \in L_p$ e $C \in L_p$, então $((A \wedge B) \rightarrow C) \in L_p$. Vemos então que, para responder a nossa pergunta original, temos agora que responder duas perguntas intermediárias, a saber, se $(A \wedge B)$ pertence à $L_p$, e se C pertence à $L_p$. Em relação à segunda pergunta, o item (i) nos garante que $C \in L_p$, pois C é um símbolo proposicional, isto é, $C \in P$. No caso de $(A \wedge B)$, de acordo com (iii), se $A \in L_p$ e $B \in L_p$, então $(A \wedge B) \in L_p$. Mas como $A, B \in P$, isto é, como eles são símbolos proposicionais, temos por (i) que A e B pertencem à linguagem proposicional. Assim concluímos que $((A \wedge B) \rightarrow C) \in L_p$. Podemos resumir esses passos como segue:

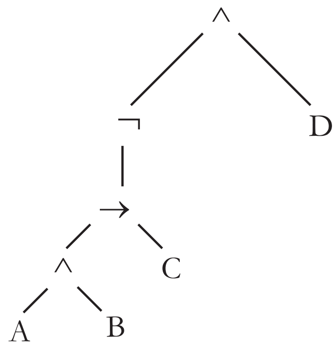
| **De acordo com** | **Temos que** |
|---|---|
| Item (v) | 1. Se $(A \wedge B) \in L_p$ e $C \in L_p$, então $((A \wedge B) \rightarrow C) \in L_p$. |
| Item (iii) | 1.1. Se $A \in L_p$ e $B \in L_p$, então $(A \wedge B) \in L_p$. |
| Item (i) | 1.1.1. $A \in L_p$, pois $A \in P$. |
| Item (i) | 1.1.2. $B \in L_p$, pois $B \in P$. |
| Item (i) | 1.2. $C \in L_p$, pois $C \in P$. |

Aqui, os membros da primeira coluna justificam a afirmação correspondente da segunda coluna. Também a endentação dos membros da segunda coluna determina o papel justificativo do item em questão. Assim o item X.Y contribui para a justificação do item X: por exemplo, 1.1 e 1.2 justificam 1; e 1.1.1 e 1.1.2 justificam 1.1. E repare que a endentação dos passos acima repete a mesma estrutura da árvore da fórmula.

Vejamos como a definição funciona com outro exemplo:

(32) $((\neg((A\wedge B)\rightarrow C))\wedge D)$

Abaixo temos a árvore da fórmula, e logo em seguida os passos que devem ser efetuados para justificar, através da definição 1.1, que (32) pertencente à $L_p$:




| **De acordo com** | **Temos que** |
|---|---|
| Item (iii) | 1. Se $(\neg((A\wedge B)\rightarrow C))\in L_p$ e $D\in L_p$, então $((\neg((A\wedge B)\rightarrow C))\wedge D)\in L_p$ |
| Item (ii) | 1.1. Se $((A\wedge B)\rightarrow C)\in L_p$, então $(\neg((A\wedge B)\rightarrow C))\in L_p$ |
| Item (v) | 1.1.1. Se $(A\wedge B)\in L_p$ e $C\in L_p$, então $((A\wedge B)\rightarrow C)\in L_p$ |
| Item (iii) | 1.1.1.1. Se $A\in L_p$ e $B\in L_p$, então $(A\wedge B)\in L_p$ |
| Item (i) | 1.1.1.1.1. $A\in L_p$, pois $A\in P$ |
| Item (i) | 1.1.1.1.2. $B\in L_p$, pois $B\in P$ |
| Item (i) | 1.1.1.2. $C\in L_p$, pois $C\in P$ |
| Item (i) | 1.2. $D\in L_p$, pois $D\in P$ |

Agora podemos perguntar: Como a definição 1.1 irá, de forma precisa, nos dizer por que o enunciado

(31) $(\vee C\neg)\vee(\rightarrow DA\vee)$

não pertence à $L_p$? A resposta está no item (vi), que nos diz que tudo o que pertence à linguagem deve satisfazer a um dos itens (i)-(v), o que obviamente significa que se uma dada sequência de símbolos não satisfaz a nenhum desses itens, então tal sequência de formulas não pertence à $L_p$. No caso de (31), temos que ela possui a forma exigida pelo item (iv) – $(\alpha\vee\beta)$ – sendo $\alpha$ $(\vee C\neg)$ e $\beta$ $(\rightarrow DA\vee)$. Mas para que (31) pertença à $L_p$, $(\vee C\neg)$ e $(\rightarrow DA\vee)$ devem, por sua vez, ambos pertencerem à $L_p$. O problema é que claramente nós não podemos usar nenhum dos itens da definição 1.1 para justificar que

$(\vee C\neg) \in L_p$ ou que $(\rightarrow DA\vee) \in L_p$. Consequentemente, de acordo com o item (vi), (31) não pertence à $L_p$.

Veja que nestas instâncias de uso da definição 1.1, nós procedemos primeiro aplicando a fórmula em questão, digamos (30), a um dos itens da definição, e então sucessivamente efetuando o mesmo procedimento a todas as fórmulas que compõem (30), obedecendo obviamente à hierarquia dessas fórmulas dentro de (30) (tal hierarquia está explícita na representação da fórmula em forma de árvore), até termos apenas símbolos proposicionais que, dado o item (i) de 1.1, não mais produzem novas aplicações de 1.1.

Além de vermos a definição 1.1 dessa forma, como um procedimento de *verificação* de se uma determinada concatenação de símbolos pertence ou não à linguagem lógica, também podemos vê-la como um procedimento de *construção* de fórmulas de $L_p$ a partir de elementos mais simples, no caso símbolos proposicionais, conectivos lógicos e parênteses. Por exemplo, sabendo que $A \in P$ e que $B \in P$, pelo item (i) temos que $A \in L_p$ e $B \in L_p$. Mas se isso é o caso, pelo item (v) temos que $(A\rightarrow B) \in L_p$, o que também nos autoriza a concluir, pelo item (ii), que $(\neg(A\rightarrow B)) \in L_p$. Usando este último fato conjuntamente com o item (iii) temos que $((\neg(A\rightarrow B))\wedge A) \in L_p$. Desta forma, podemos *ad infinitum* continuar neste processo de construção de fórmulas complexas a partir de fórmulas mais simples. Assim, em última instância, o que a definição 1.1 faz é possibilitar que um determinado conjunto, a saber, o conjunto $L_p$ de fórmulas da linguagem proposicional, seja construído.

Um ponto digno de nota é a maneira como a definição 1.1 constrói o conjunto $L_p$. Primeiramente, nos é informado que os membros de outro conjunto, a saber, o conjunto de símbolos proposicionais P, também são membros de $L_p$. Isso é feito no item (i). Após isso, isto é, após termos a informação de que todos os membros de P são também membros de $L_p$, informa-se, nos itens (ii)-(v), como esses membros de P, que agora sabemos são também membros de $L_p$, podem ser concatenados com os símbolos $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$ de forma a obtermos outros membros de $L_p$. Assim, dados dois símbolos proposicionais A e B, que além de pertencerem à P também pertence à $L_p$ – de acordo com (i)–, temos por (ii) que $(\neg A)$ e $(\neg B)$ também pertencem à $L_p$, assim como por (iii), (iv) e (v), respectivamente, que $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$ e $(A\rightarrow B)$ também pertencem à $L_p$.

A esse tipo de procedimento damos o nome de *recursividade*, sendo a definição 1.1 classificada como uma *definição recursiva*. A ideia básica da recursividade é a definição de uma noção específica utilizando, em alguns de seus passos, a própria noção; em outras palavras, a noção  é definida em função dela mesma. Isso aparece na definição 1.1 nos itens (ii)-(v), em que, na execução da tarefa de definir o conjunto $L_p$, fazemos menção ao próprio conjunto $L_p$. Mas então como podemos afirmar que estamos definindo o conjunto $L_p$, se para saber se um elemento pertence à $L_p$ eu já devo ser capaz de dizer se outro elemento pertence à $L_p$? Aparentemente a nossa definição seria circular e no final não estaríamos definindo absolutamente nada. Felizmente esse problema não acontece em uma definição recursiva, pois há o que chamamos de *base da recursividade*: uma ou mais partes da definição que não se utilizam do conceito a ser definido e para o qual todos os outros passos da definição levam. No caso da definição 1.1, sua base é o item (i): como (i) não faz referência à $L_p$ para dizer se um elemento pertence à $L_p$, ele é a etapa final, podemos assim dizer, de qualquer uso que se faça da definição 1.1.

Uma das vantagens das definições recursivas é nos permitir definir, através de um número finito de passos, entidades infinitas. No caso da definição 1.1, a partir de uma classe de entidades básicas, a saber, o conjunto P, os símbolos lógicos e parênteses, e fazendo uso de um número finito de passos ou regras de construção, podemos definir de forma rigorosa um conjunto que é na verdade infinito. Como aqui estamos interessados em caracterizar entidades infinitas como a classe de enunciados de uma linguagem, a classe de argumentos válidos e a classe de sentenças logicamente verdadeiras, sem o uso de definições recursivas nosso trabalho estaria seriamente comprometido. Conforme o leitor terá oportunidade de constatar, boa parte das definições a serem apresentadas aqui serão definições recursivas.

Alguns parágrafos acima nos referimos à noção de uma fórmula complexa ser composta por outra fórmula menos complexa; no caso de (32), por exemplo, ela é composta, entre outras, pelas fórmulas abaixo:

(33) $(\neg((A\wedge B)\rightarrow C))$

(34) D

(35) $((A\wedge B)\rightarrow C)$

Dizemos, neste caso, que (33), (34) e (35) são *subfórmulas* de (32). Essa ideia, na verdade, é uma consequência natural da definição 1.1, já que, por exemplo, (32) é uma fórmula da linguagem proposicional devido ao fato de ser uma conjunção – ou seja, ter a forma $(\alpha\wedge\beta)$ – entre duas concatenações de símbolos que por sua vez também são fórmulas de $L_p$, a saber, (33) e (34). Assim, naturalmente muitos dos componentes de (32) serão, eles mesmos, fórmulas. Pela mesma razão, podemos dizer que (35) é uma subfórmula de (33). Mas como (33) é uma subfórmula de (32), é natural que (35) seja também considerada uma subfórmula de (32), o mesmo valendo às subfórmulas de (35), e assim por diante. Essa noção de subfórmula pode ser definida de forma precisa como segue:

**DEFINIÇÃO 1.3** Seja $\varphi \in L_p$ uma fórmula da linguagem proposicional. Definimos a noção de *subfórmula* como segue:

(i) $\varphi$ é uma subfórmula de $\varphi$;

(ii) Se $\varphi \equiv (\neg\alpha)$[24], então $\alpha$ é uma subfórmula de $\varphi$;

(iii) Se $\varphi \equiv (\alpha \wedge \beta)$, então $\alpha$ e $\beta$ são subfórmulas de $\varphi$;

(iv) Se $\varphi \equiv (\alpha \vee \beta)$, então $\alpha$ e $\beta$ são subfórmulas de $\varphi$;

(v) Se $\varphi \equiv (\alpha \rightarrow \beta)$, então $\alpha$ e $\beta$ são subfórmulas de $\varphi$;

(vi) Se $\alpha$ é uma subfórmula de $\varphi$ e $\beta$ é uma subfórmula de $\alpha$, então $\beta$ é uma subfórmula de $\varphi$;

Veja que, semelhantemente à definição 1.1, essa nova definição também é uma definição recursiva, estando sua recursividade localizada no item (vi). É este item que, fazendo uso da própria noção de subfórmula, faz com que possamos dizer que a subfórmula de uma subfórmula de $\varphi$ também é uma subfórmula de $\varphi$, que a subfórmula de uma subfórmula de uma subfórmula de $\varphi$ também é uma subfórmula de $\varphi$, e assim por diante. Repare que, de acordo com o item (i), toda fórmula $\varphi$ é uma subfórmula dela mesma. Usando a definição 1.3 podemos identificar todas as oito subfórmulas de (32):

1. $((\neg((A \wedge B) \rightarrow C)) \wedge D)$
2. $(\neg((A \wedge B) \rightarrow C))$
3. D
4. $((A \wedge B) \rightarrow C)$
5. $(A \wedge B)$
6. C
7. A
8. B

Um ponto importante no qual ainda não tocamos é que, de acordo com a definição 1.1, o uso dos parênteses para delimitar uma determinada cadeia de símbolos é necessário para que tal cadeia seja uma fórmula bem formada. Assim, por exemplo,

(36) $A \vee B$

não é uma fórmula da linguagem proposicional; o correto seria escrever

(37) $(A \vee B)$

---

**24.** O símbolo $\equiv$ denota a relação de *identidade sintática*, de forma que dadas duas concatenações de símbolos $\alpha$ e $\beta$, $\alpha \equiv \beta$ se se somente se os símbolos que compõe $\alpha$ e $\beta$ são os mesmos, ordenados de forma idêntica. Assim, $(A \vee B) \rightarrow C \equiv (A \vee B) \rightarrow C$. Por sua vez, $(A \vee B) \rightarrow C \equiv ((A \vee B) \rightarrow C)$ é falso, visto que não se trata de duas sequências de símbolos idênticas.

que, neste caso sim, pertence à $L_p$. O mesmo vale para $(A \to C) \to D$, $\neg B$ e $D \wedge (\neg F)$, por exemplo, cuja escrita correta seria, respectivamente, $((A \to C) \to D)$, $(\neg B)$ e $(D \wedge (\neg F))$.

Como vimos, a principal razão do uso dos parênteses na delimitação das subfórmulas dentro de uma fórmula é evitar ambiguidades. No entanto, nos casos acima, e em muitos outros, do ponto de vista do que a fórmula quer dizer, não há comprometimento algum em não escrevermos todos os parênteses exigidos pela definição 1.1: podemos, por exemplo, escrever $A \vee B$ ao invés de $(A \vee B)$, ou $(A \to C) \to D$ ao invés de $((A \to C) \to D)$. Isto é obviamente muito diferente de, digamos,

(38) $C \wedge A \vee B$

em que temos que usar parênteses para tornar claro se estamos queremos dizer

(39) $(C \wedge A) \vee B$

ou

(40) $C \wedge (A \vee B)$

No entanto, o uso de parênteses, como exigido pela definição 1.1, pode muitas vezes comprometer a legibilidade das fórmulas. Considere, por exemplo, a fórmula abaixo, que até o mais experiente dos lógicos necessitará dar uma segunda olhada para se certificar de sua estrutura lógica:

(41) $((\neg(\neg A)) \to ((\neg((\neg(\neg(A \vee B))) \to C)) \wedge A))$

Assim, para fins de clareza abandonaremos o uso dos parênteses sempre que não houver perigo de ambiguidade. Relaxaremos um pouco as normas referentes ao uso dos parênteses e nos permitiremos escrever fórmulas como, por exemplo, $(A \to C) \to D$, $\neg B$ ou $D \wedge (\neg F)$. Para isso, adotaremos as seguintes regras de omissão de parênteses. Seja $\varphi \in L_p$ uma fórmula da linguagem proposicional:

**Regra 1** Os parênteses mais externos de $\varphi$ podem ser omitidos.

**Regra 2** Os parênteses mais externos de uma subfórmula de $\varphi$ podem ser omitidos caso o uso da seguinte ordem de precedência entre conectivos seja capaz de restaurar o sentido original da fórmula:

1. $\to$ (menor precedência)
2. $\wedge$ $\vee$ (precedência intermediária)
3. $\neg$ (maior precedência)

Isso significa que $\neg$ tem maior precedência que $\wedge$ e $\vee$, que por sua vez têm maior precedência que $\to$. $\wedge$ e $\vee$ não têm precedência alguma um sobre o outro. Por precedência entre dois conectivos significamos que, caso apareçam em uma fórmula na qual parênteses tenham sido omitidos, o conectivo de maior precedência será "resolvido" antes do de menor precedência. Por exemplo, se escrevemos

(42) $\neg A \rightarrow B \vee C$

estamos na verdade representando em forma abreviada a fórmula

(43) $((\neg A) \rightarrow (B \vee C))$

No processo de restaurar (42) para sua forma original, primeiro resolvemos o conectivo de maior precedência, ou seja, a negação. Assim sabemos que o símbolo $\neg$ em (42) está negando o que vem imediatamente após ele, ou seja, A. Consequentemente escrevemos $(\neg A) \rightarrow B \vee C$. Segundo, como $\vee$ tem precedência sobre $\rightarrow$, resolveremos $\vee$ antes de $\rightarrow$, o que significa tornarmos explícito que $\vee$ é uma conjunção entre o que vem imediatamente à sua esquerda e o que vem imediatamente à sua direita, ou seja, entre B e C. Portanto escrevemos $(\neg A) \rightarrow (B \vee C)$. Finalmente, restauramos os parênteses mais externos e obtemos (43). É digno de nota que, se fizermos a árvore dessa fórmula, enquanto que o conectivo com menor prioridade, $\rightarrow$, ficará no topo da árvore, a negação, que tem maior prioridade, ficará no nível imediatamente anterior ao último nível.

Veja que no caso da conjunção e disjunção, como nenhum dos dois tem precedência sobre o outro, o uso dos parênteses é necessário para evitar ambiguidades. Assim, (38) é uma concatenação de símbolos que, devido ao fato de nossas regras não serem capazes de desambiguizá-la, não abrevia fórmula alguma da linguagem proposicional.

De posse dessas regras de omissão de parênteses, podemos omitir boa parte dos parênteses de (43) e, consequentemente, torná-la bem mais legível:

(41') $\neg\neg A \rightarrow \neg(\neg\neg(A \vee B) \rightarrow C) \wedge A$

Esse procedimento de abreviar parênteses adotando uma escala de precedência entre conectivos é semelhante ao que fazemos ao escrevermos expressões aritméticas sem utilizamos os devidos parênteses. Por que, por exemplo, não temos dificuldade em entender o significado de 2*4+4? A rigor, esta expressão poderia significar tanto (2*4)+4 como 2*(4+4), o que obviamente são expressões diferentes: enquanto a primeira é igual a 12, a segunda é igual a 16. A resposta para isso é que utilizamos uma regra de precedência similar à exposta acima: como * tem precedência sobre +, ao nos depararmos com 2*4+4 nós resolvemos, literalmente, 2*4 antes, para só então resolvermos a adição.

O leitor atento deve estar se perguntando se essa economia de parênteses não vai de encontro ao nosso propósito de rigor, visto que, de acordo com a definição 1.1, sentenças como (41') e (42) não pertencem à linguagem proposicional. Neste ponto é importante frisarmos que, como já mencionamos acima, tais concatenações de símbolos são na verdade *abreviações* de certas sequências de símbolos que, estas sim, pertencem à $L_P$. Assim, (41') é na verdade uma abreviação para (41), e (42) é uma abreviação para (43). Essa situação é equivalente a uma em que, por exemplo, eu, ao invés de escrever meu nome completo, a saber, "Ricardo Sousa Silvestre", escrevo simplesmente uma abreviação deste nome: "R. S. S". Obviamente não existe uma pessoa chamada R. S. S. (pelo menos não no sentido de haver, por exemplo, um CPF e RG associados a tal sequência de símbolos). Essa sequência de símbolos na verdade é uma abreviação para outra sequência de símbolos, a saber, a sequência "Ricardo Sousa Silvestre", que, esta sim, é o nome de uma pessoa. Similarmente, ao escrevermos (41'), por exemplo, o que estamos fazendo é escrevendo uma abreviação para uma fórmula pertencente à $L_p$, a saber, (41); não temos nenhuma pretensão com isso de dizer que, por exemplo, (41') ela mesma é uma fórmula da linguagem proposicional.

A utilidade de usar abreviações não se restringe à economia de parênteses. É muito comum querermos manter o número de símbolos lógicos usados na gramática de nossa linguagem relativamente reduzido, e introduzirmos outros símbolos lógicos de forma derivada através de abreviações. Por exemplo, ao introduzirmos $\vee$, falamos de outro tipo de disjunção, chamada por nós de disjunção exclusiva que, segundo dissemos, pode ser representado através dos conectivos $\vee$, $\wedge$ e $\neg$. O exemplo dado foi que poderíamos representar uma leitura exclusiva para o enunciado

(21) Ou eu vou à faculdade ou eu vou à festa.

como segue:

(21') $(G\vee H)\wedge\neg(G\wedge H)$

em que G significa "Eu vou à faculdade" e H "Eu vou à festa".

No entanto, seria bastante conveniente se dispuséssemos de um símbolo, tal qual $\vee$, para expressarmos este ou exclusivo. Isso pode ser feito escolhendo um símbolo qualquer, digamos $\overline{\vee}$, e definindo $\alpha\overline{\vee}\beta$ como uma abreviação para $((\alpha\vee\beta)\wedge(\neg(\alpha\wedge\beta)))$:

$(\alpha\overline{\vee}\beta) \overset{\text{def}}{=} ((\alpha\vee\beta)\wedge(\neg(\alpha\wedge\beta)))$

Aqui, $\alpha$ e $\beta$ são duas fórmulas quaisquer e "$\overset{\text{def}}{=}$" significa "por definição, é igual à". Ao fazermos isso, estipulamos que, sempre que encontrarmos $(\alpha\overline{\vee}\beta)$, que obviamente não é uma fórmula de $L_p$, isso na verdade está abreviando uma cadeia de símbolos maior, a saber, $((\alpha\vee\beta)\wedge(\neg(\alpha\wedge\beta)))$, esta sim pertencente à linguagem proposicional. Chamamos $\vee$ de *símbolo primitivo* e $\overline{\vee}$ de *símbolo derivado*. Na verdade, todos os membros do alfabeto, conforme conceitualizado na definição 1.2, são símbolos primitivos, e qualquer outro símbolo introduzido através de abreviações é um símbolo derivado. Segue abaixo a definição formal de $\overline{\vee}$.

**DEFINIÇÃO 1.4** Sejam $\alpha,\beta\in L_p$ duas fórmulas quaisquer. Definimos os símbolos derivados $\leftrightarrow$ e $\overline{\vee}$, significando, respectivamente, a dupla implicação ou *bicondicional* e a *disjunção exclusiva*, como segue:

(i) $(\alpha\overline{\vee}\beta) \overset{\text{def}}{=} ((\alpha\vee\beta)\wedge(\neg(\alpha\wedge\beta)))$

(ii) $(\alpha\leftrightarrow\beta) \overset{\text{def}}{=} ((\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha))$

O outro símbolo introduzido na definição 1.4 é a chamada dupla implicação ou bi-condicional. Como pode ser facilmente visto no item (ii), a ideia de $\alpha\leftrightarrow\beta$ é simplesmente capturar uma situação na qual as proposições $\alpha$ e $\beta$ implicam mutuamente uma a outra. Diferentemente de $\overline{\vee}$, usaremos com certa frequência o conectivo derivado $\leftrightarrow$. Assim, convém estabelecer uma regra de precedência para ele: ele terá a mesma ordem de precedência que a implicação. Desta forma, nossa Regra 2 de abreviação de parênteses seria modificada como segue:

**REGRA 3** Os parênteses mais externos de uma subfórmula de $\varphi$ podem ser omitidos caso o uso da seguinte ordem de precedência entre conectivos seja capaz de restaurar o sentido original da fórmula:

1. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (menor precedência)
2. $\wedge$ $\vee$ (precedência intermediária)
3. $\neg$ (maior precedência)

Antes de finalizarmos este capítulo, convém mencionar um aspecto de fundamental importância na construção e análise de linguagens lógico-formais. Trata-se do fato óbvio de que para construirmos ou estudarmos as propriedades de uma linguagem, seja ela formal ou não, precisamos usar outra linguagem. No caso das definições 1.1-1.4 dadas acima e das várias observações que fizemos sobre elas, temos definido e discorrido sobre uma linguagem específica – a linguagem proposicional – nos utilizando de outra linguagem – a língua portuguesa. Tal situação é semelhante a quando escrevemos um livro em francês, por exemplo, sobre a gramática e o vocabulário da língua inglesa, digamos. Neste caso estamos falando sobre uma linguagem específica, a saber, o inglês, fazendo uso de outra linguagem, no caso o francês. Chamamos então a linguagem sobre a qual estamos falando, nos casos acima a linguagem proposicional e o inglês, de *linguagem objeto*, e a linguagem na qual este discurso é feito, nos casos mencionados o português e o francês, de *metalinguagem*.

À primeira vista pode-se perguntar: o que há de tão importante nisso? Usamos a linguagem para falar de diversas coisas: sapatos, economia, o resultado das últimas eleições, o fim último da vida, etc. Que particularidade então haveria em usar uma linguagem para falar de outra linguagem, e que necessidade há em chamar uma de linguagem objeto e outra de metalinguagem? Para responder a essa pergunta, considere os seguintes argumentos:

(44) Romeu ama Julieta.
Julieta é uma palavra de sete letras.
Portanto, Romeu ama uma palavra de sete letras.

(45) 1+1 contém o sinal de mais.
1+1=2.
Portanto, 2 contém o sinal de mais.

Claramente esses argumentos são inválidos. Mas o que exatamente há de errado com eles? Usando a terminologia introduzida há pouco, ambos os argumentos confundem a linguagem objeto com a metalinguagem. No caso de (44), enquanto a primeira premissa é um enunciado que se refere à relação entre duas pessoas, neste caso as pessoas denotadas pelas palavras "Romeu" e "Julieta", a segunda premissa consiste em uma afirmação sobre a palavra "Julieta", e não sobre a pessoa referida por essa palavra, caso no qual o português está desempenhando tanto o papel de linguagem objeto como de metalinguagem. Assim, a conclusão simplesmente não segue das duas premissas. De forma semelhante, enquanto a primeira premissa de (45) é uma sentença em português sobre uma expressão da linguagem da aritmética, a saber, a expressão "1+1", sendo esta última a linguagem objeto e o português a metalinguagem, a segunda premissa é uma expressão puramente aritmética afirmando a identidade entre as entidades denotadas por "1+1" e "2". Assim, claramente a conclusão é inválida.

Para evitar esse tipo de confusão, é necessário deixar claro nas premissas mencionadas o que pertence à linguagem objeto e o que pertence à metalinguagem. Seguindo prática comum[25], usa-se aspas duplas quando se fala sobre termos da linguagem objeto. Assim, os nossos argumentos seriam reescritos como segue:

(44') Romeu ama Julieta.
"Julieta" é uma palavra de sete letras.
Portanto, Romeu ama uma palavra de sete letras.

(45') "1+1" contém o sinal de mais.
1+1=2.
Portanto, 2 contém o sinal de mais.

Aqui, a invalidade dos argumentos fica patente, visto que, em (44'), por exemplo, o que Romeu ama é a pessoa à qual a palavra "Julieta" se refere, e não a palavra "Julieta", que é o que a segunda premissa atribui a propriedade de ter sete letras.

Nos casos acima, o que as aspas fazem basicamente é distinguir o *uso* de uma expressão de sua *menção*. Em (44'), por exemplo, a aspas na segunda premissa indicam que estamos na verdade mencionando a expressão linguística "Julieta", e não a usando, como acontece na primeira premissa. Ao usarmos a expressão "Julieta" na primeira premissa, podemos estabelecer uma relação entre o objeto ao qual essa palavra se refere e o objeto ao qual a palavra "Romeu" se refere. Já na segunda premissa, ao mencionarmos a expressão "Julieta", estamos falando não sobre o que essa expressão se refere, mas sobre ela mesma, a saber, que ela tem sete letras. No nosso discurso sobre linguagens lógico-formais, no entanto, como em geral a maioria dos símbolos de tais linguagens são distintos dos símbolos da língua portuguesa, a menos que haja possibilidade de ambiguidade, abster-nos-emos, na maioria das vezes, do uso das aspas simples.

**25.** Que, diga-se de passagem, já estamos adotando nesse livro.

## 3.4 Exercícios propostos

1. Por que a linguagem natural não se adéqua ao estudo lógico de argumentos?
2. Por que a ambiguidade pode comprometer a análise lógica de argumentos?
3. O que é composicionalidade?
4. Explique o paradoxo presente na tabela de verdade do conectivo $\rightarrow$, e dê argumentos contra e a favor de tal interpretação.
5. Diga se as seguintes fórmulas pertencem ou não à linguagem proposicional. Em caso negativo, diga por quê. (Leve em conta as regras de omissão de parênteses.)
   a. $A,B \in L$
   b. $(1=1) \wedge (6>2)$
   c. $(\neg(A \rightarrow B))$
   d. $A \neg(C \rightarrow D)$
   e. $(\neg(\neg(\neg(\neg A))))$
   f. $\neg((A \rightarrow B) \wedge (C \vee D)$
6. Mostre, através da definição 1.1, que as seguintes fórmulas pertencem à linguagem proposicional:
   a. $(A \vee (\neg A))$
   b. $(A \rightarrow (B \vee (\neg C)))$
   c. $((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg((C \wedge D) \rightarrow A)))$
7. Explique o que são definições recursivas e por que elas são tão importantes.
8. Mostre quais fórmulas podem ser construídas colocando-se parênteses nas expressões abaixo:
   a. $A \rightarrow \neg B \rightarrow C$
   b. $\neg A \wedge B \rightarrow C$
   c. $A \rightarrow B \vee B \rightarrow \neg C \wedge \neg A$
   d. $\neg B \vee C \leftrightarrow A \rightarrow \neg B \in C$
9. Usando as regras de omissão de parênteses, elimine a maior quantidade possível de parênteses das fórmulas abaixo:
   a. $(\neg(A \wedge (\neg A)))$
   b. $(A \vee (\neg A))$
   c. $((A \wedge B) \rightarrow ((C \wedge D) \rightarrow E))$
   d. $(A \rightarrow (\neg B))$
   e. $(\neg(A \rightarrow ((\neg B) \vee C)))$
   f. $((B \vee C) \rightarrow A)$
   g. $(A \rightarrow (B \vee (\neg C)))$
   h. $((\neg B) \rightarrow (\neg A))$
   i. $((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg((C \wedge D) \rightarrow A)))$
10. Construa a árvore sintática de cada uma das fórmulas das questões 6 e 9.
11. Liste as subfórmulas de todas as fórmulas da questão 9.

12. Utilizando as regras de omissão de parênteses e a definição 1.4, restaure cada uma das fórmulas abaixo à sua forma original não abreviada:
   a. $((\neg A)\overline{\triangledown}(\neg B))$
   b. $A\rightarrow\neg(B\wedge C)$
   c. $\neg B\vee(C\wedge\neg D\rightarrow B)$
   d. $A\wedge B\rightarrow\neg C$
   e. $(A\vee B\rightarrow C\wedge\neg D)\rightarrow\neg A$
   f. $A\leftrightarrow B\wedge C$
   g. $C\wedge B\rightarrow\neg(A\rightarrow B\vee\neg(B\rightarrow D))$
   h. $(A\rightarrow B)\rightarrow\neg(C\wedge D)\vee A$

13. Explique a distinção entre linguagem objeto e metalinguagem.

## 3.5 Exercícios de análise lógica

1. Traduza para a linguagem proposicional os enunciados abaixo utilizando o seguinte glossário:

   Glossário

   A: Eu vou à escola.

   B: Você vai ao futebol.

   C: Você vai à escola.

   D: Eu vou ao futebol.

   a. Eu não vou à escola.
   b. Eu não vou ao futebol e você vai à escola.
   c. Você vai à escola e eu vou ao futebol.
   d. Se você for à escola, então eu vou ao futebol.
   e. Se você não for à escola, então eu vou ao futebol.
   f. Você vai à escola ou eu vou ao futebol.
   g. Eu vou à escola e eu não vou à escola.
   h. Não é verdade que você vai ao futebol e você não vai ao futebol.
   I. Ou você vai à escola ou eu vou ao futebol.
   j. Se eu for ao futebol, você não vai à escola. Mas se eu não for ao futebol, você vai à escola.
   k. Se eu for à escola, então se você for ao futebol eu vou à escola.

2. Traduza para a linguagem proposicional os enunciados abaixo (usando um glossário com os símbolos proposicionais usados).
   a. Se o mal existe, então ou Deus não é onibenevolente ou Deus não é onipotente.
   b. Se Deus é infinitamente misericordioso, então não é verdade que se fizermos o mal nós seremos castigados durante toda a eternidade.
   c. Se um problema é filosófico, então ele não pode ser resolvido com o auxílio dos sentidos.
   d. Se eu trouxer minha câmera digital, então se as baterias não acabarem logo eu tirarei fotos do final da festa e as colocarei no meu web-site.
   e. Se você praticar exercício e não comer muito então você conseguirá emagrecer.

f. Esse livro não é nem sobre lógica nem sobre epistemologia, ele é sobre metafísica.
g. O carro só pegará se tiver gasolina.
h. A menos que você me ajude, eu vou desistir.
I. Você estudar bastante é suficiente para você passar.
j. Você estudar bastante é necessário para você passar.
k. Você estudar bastante é necessário e suficiente para você passar.
l. Você ter menos que 25% de faltas é uma condição necessária, porém não suficiente, para você passar.
m. Você obter 10,0 nas duas provas é uma condição necessária e suficiente para passar.
n. Você ser brasileiro e maior de dezoito anos são requisitos para você poder se candidatar.
o. Você é homem apenas se você for um animal racional.
p. Para gostar de lógica você deve ser louco ou desocupado.
q. Se eu tiver uma boa biblioteca e tempo para estudar, então se houver seleção para bolsa de pesquisa e for na área de lógica, então eu me candidatarei à bolsa.
r. Eu só me matricularei em Lógica II se não houver nenhuma outra disciplina optativa sendo ofertada.
s. Não é verdade que você é bem-sucedido somente se você for desonesto ou se tiver nascido em família abastada.
t. A menos que você tenha fé, sua vida nunca será bem-sucedida.
u. Eu irei à festa apenas se você não beber.
v. Apesar de um pouco difícil, a disciplina de lógica não é tão ruim assim.
w. Você não pode ser um bom filósofo se não sabe lógica.

# 4
# Semântica da lógica proposicional

## 4.1 Sintaxe, semântica e relação de inferência

Comumente concebemos uma língua ou linguagem como contendo tanto um aspecto sintático como um aspecto semântico. Enquanto a sintaxe de uma linguagem estipula como os símbolos e termos desta linguagem se juntarão uns com os outros para formar sentenças ou enunciados, sua semântica determina o significado destes termos. Tome a língua portuguesa, por exemplo. Enquanto de um lado existem regras gramaticais que estipulam como os diversos componentes de tal língua poderão ser concatenados de forma a formar enunciados significativos do português, de outro lado cada palavra tem, em geral, associada a si um ou mais significados. Quando conhecemos tais significados e sabemos se o que certo enunciado afirma sobre o mundo é o caso ou não, podemos dizer se tal enunciado é verdadeiro. Mas mesmo se não somos capazes de avaliar se o estado de coisas descrito por um enunciado é o caso ou não, apenas de posse do significado dos termos que o compõem é possível sabermos como o mundo *deve ser* para que o enunciado seja verdade. Dessa forma, uma das tarefas centrais do que estamos chamando de semântica é exatamente precisar as condições de verdade dos enunciados.

No capítulo anterior, ao introduzirmos a linguagem lógica proposicional, referimo-nos ao significado tanto dos conectivos lógicos, através da menção de suas tabelas de verdade, por exemplo, como dos símbolos proposicionais, especificando a que enunciados do português tais símbolos corresponderiam. No entanto, conforme falamos no início da seção 2 daquele capítulo, linguagens lógicas são estruturas puramente sintáticas, isentas de qualquer estipulação em termos de significado. Isso pode ser constatado pelo fato de que, apesar de na nossa exposição preliminar dos conceitos introduzidos nas definições 1.1-1.4 termos feito referência a aspectos semânticos, tais definições não fazem menção a nada digno de ser chamado de o significado dos termos da linguagem.

Vendo então a lógica como teoria da representação ou linguagem, podemos dizer que as definições 1.1-1.4 estipulam a *sintaxe* de toda lógica que use a linguagem proposicional em geral, e em particular a sintaxe do sistema lógico que é o objeto principal desta unidade, a saber, a *lógica clássica proposicional*. O que faremos neste capítulo será apresentar as definições que irão compor o que chamamos de a *semântica* da lógica proposicional que, como é de se esperar, estipulará, em um sentido muito importante, o significado dos componentes da linguagem proposicional.

Duas observações são necessárias neste ponto. Primeiro, apesar de, conforme mencionado acima, toda linguagem ter um aspecto sintático e outro semântico, e apesar de a lógica, se vista como linguagem ou teoria da representação, também possuir tais componentes, o termo "linguagem" usado por nós nas expressões "linguagem lógica" e "linguagem proposicional" tem um sentido diferente, contemplando apenas e unicamente o aspecto sintático. (Daí dizermos que uma linguagem lógica é uma linguagem não interpretada.) Apenas quando considerada em conjunto com um componente extra, a saber, a semântica de um sistema lógico, é que os termos de uma linguagem lógica possuirão significado.

Segundo, conforme mencionamos no capítulo 2, existem basicamente duas maneiras de se definir a *relação de inferência* de um sistema lógico: semanticamente e sintaticamente. Enquanto uma definição semântica faz uso de conceitos semânticos como os conceitos de verdade e satisfatibilidade e, em última instância, atenta para o significado dos símbolos tendo em vista a caracterização da classe de argumentos válidos, em uma abordagem sintática nenhuma consideração é feita a respeito do significado dos termos, enfocando-se exclusivamente a forma lógica dos enunciados que compõem um argumento. Assim, apesar de a semântica da lógica proposicional efetivamente estipular o significado dos termos da linguagem proposicional e, de uma forma mais específica, dar as *condições de verdade* de seus enunciados, apresentaremos tal semântica aqui como definindo primordialmente a relação de inferência da lógica proposicional. Em outras palavras, definiremos de forma semântica uma relação $\vDash$ que será capaz de nos dizer se, dado um conjunto $\Gamma$ qualquer de fórmulas e uma fórmula $\alpha$, $\alpha$ é ou não uma consequência lógica (ou é deduzido a partir) de $\Gamma$ (caso no qual escrevemos $\Gamma \vDash \alpha$). No entanto, no caminho a ser percorrido na definição de $\vDash$, teremos que definir algo semelhante ao significado dos termos da linguagem e, consequentemente, as condições de verdade de seus enunciados.

Conforme dito no capítulo 2, referir-nos-emos à $\vDash$ como a relação de consequência lógica, reservando o termo "relação de dedução" para a relação de inferência definida sintaticamente. No entanto, conforme também já mencionado, um dos resultados mais importantes da chamada metalógica, que será visto com detalhes no capítulo 12, é mostrar que a relação de consequência lógica e a relação de dedução são equivalentes (em símbolos: se $\Gamma \vdash \alpha$ então $\Gamma \vDash \alpha$, e se $\Gamma \vDash \alpha$ então $\Gamma \vdash \alpha$). Conjuntamente com a linguagem proposicional introduzida no capítulo 3, a definição da relação de consequência lógica a ser aqui introduzida constituirá a primeira instanciação do que chamamos no capítulo 2 de sistema lógico.

É digno de nota que, como veremos no próximo capítulo, mesmo quando escolhemos uma abordagem sintática para definirmos a relação de inferência, nos depararemos com algo digno de ser chamado de o significado dos símbolos da linguagem. Assim, temos a importante lição de que apenas quando tomamos uma linguagem L em conjunto com uma relação de inferência $\VDash$, seja ela definida sintática ou semanticamente, e obtemos um sistema lógico $<L,\VDash>$, é que os símbolos da linguagem passam a ter significado e, consequentemente, a linguagem lógica L pode ser considerada uma linguagem (parcialmente, como veremos) interpretada.

Antes, porém, de darmos a definição da relação de inferência semântica da lógica proposicional, o que será feito na seção 4.4, faremos duas coisas. Primeiro, falaremos, na próxima seção, um pouco mais sobre a noção de tabela de verdade e outros conceitos semânticos chaves (na seção 4.4 mostraremos como tais conceitos se encaixam na definição semântica da relação de inferência da lógica proposicional). Segundo, tentaremos, na seção 4.3, definir de forma geral, isto é, sem fazer referência a nenhum sistema lógico específico, a relação de inferência semântica. Tal conceitualização será usada nas definições das relações de consequência lógica da lógica proposicional que, como dissemos, será apresentada na seção 4.4, e da lógica de predicados de primeira ordem, a ser apresentada no capítulo 10.

## 4.2 Tabela de verdade

Como vimos no capítulo 3, a tabela de verdade de uma fórmula $\varphi$ é uma tabela mostrando todas as possibilidades de combinação de valores de verdade de suas subfórmulas e o valor de verdade resultante de $\varphi$ em cada uma dessas possibilidades. Naquele capítulo mostramos as tabelas de verdade dos conectivos lógicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$:

| $\alpha$ | $\neg\alpha$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha\wedge\beta$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha\vee\beta$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha\rightarrow\beta$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

Veja que, como observamos no capítulo 3, nas tabelas acima $\alpha$ e $\beta$ representam duas fórmulas quaisquer da linguagem proposicional. Assim, $\alpha\wedge\beta$, $\neg\alpha$, $\alpha\vee\beta$ e $\alpha\rightarrow\beta$ não são fórmulas da linguagem proposicional, mas o que chamamos de *esquemas de fórmula*, isto é, generalizações feitas a partir dos conectivos lógicos representando todas as fórmulas que possuem a forma lógica nelas expressa. Por exemplo, dizemos que as fórmulas abaixo satisfazem ou são instâncias do esquema de fórmula $\alpha\rightarrow\beta$[26]:

(1) $A\rightarrow B$

(2) $(A\rightarrow C)\rightarrow\neg B$

(3) $\neg((A\wedge B)\rightarrow C)\rightarrow(A\vee\neg B)$

Apesar de diferente em vários aspectos, essas três fórmulas têm a forma representada por $\alpha\rightarrow\beta$; isso pode ser visto melhor se atentamos para o fato de que em (1) A ocupa o lugar de $\alpha$ e B o de $\beta$, em (2) $\alpha$ foi substituído por $(A\rightarrow B)$ e $\beta$ por $\neg B$, e em (3) $\neg((A\wedge B)\rightarrow C)$ está no lugar de $\alpha$ e $(A\vee\neg B)$ no de $\beta$. Assim, um esquema de fórmula é mais ou menos como um esqueleto lógico, no qual as letras gregas marcam "lugares" que podem ser ocupados por quaisquer fórmulas pertencentes a uma determinada linguagem. Por exemplo, a fórmula

(4) $(A\rightarrow B\vee C)\rightarrow((D\rightarrow B\vee C)\rightarrow(A\vee D\rightarrow B\vee C))$

é uma instância do esquema de fórmula

(5) $(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\varphi\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\vee\varphi\rightarrow\beta))$

em que A ocupa o lugar de $\alpha$, $B\vee C$ o lugar de $\beta$ e D o lugar de $\varphi$[27].

Assim, as tabelas acima, que chamamos de a tabela de verdade de $\neg$, a tabela de verdade de $\wedge$, a tabela de verdade de $\vee$ e a tabela de verdade de $\rightarrow$, respectivamente, são na verdade *esquemas de tabela de verdade*. Nesse caso, a tabela abaixo, por exemplo, seria uma instância da tabela de verdade de $\wedge$:

| A | B | $A\wedge B$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

**26.** Aqui estamos obviamente adotando as regras de abreviação de parênteses introduzidas no capítulo anterior.

**27.** Veja que nós já fizemos uso do recurso de esquema de fórmulas nas definições 1.1, 1.3 e 1.4.

De uma forma geral, o que uma tabela de verdade nos dá são as *condições de verdade* de uma fórmula, isto é, as situações de valores de verdade de seus componentes mais básicos, isto é, os símbolos proposicionais, nas quais a fórmula em questão é verdadeira ou falsa. Na tabela acima, temos que $A \wedge B$ é verdade apenas quando tanto A como B são verdade, sendo falsa nas outras três possibilidades. Assim, o ponto central da tabela de verdade de uma fórmula qualquer é tornar explícito em que condições tal fórmula é verdade e em que condições ela é falsa. Por exemplo, as condições de verdade da fórmula

(6) $\neg A \vee B$

podem ser determinadas através de sua tabela de verdade, que pode, por sua vez, ser construída a partir das tabelas de verdade da conjunção e da negação:

| A | B | $\neg A$ | $\neg A \vee B$ |
|---|---|---|---|
| V | V | F | V |
| V | F | F | F |
| F | V | V | V |
| F | F | V | V |

Aqui, a partir da tabela de verdade de $\neg$ determinamos as condições de verdade de $\neg A$ (representada pela primeira e terceira colunas, da esquerda para a direita). De posse então dessa informação, podemos utilizar a tabela de verdade da disjunção para determinar as condições de verdade de (6). Feito isso, vemos que a única situação na qual (6) é falsa é quando A é verdade e B é falso, sendo verdade nas outras três possibilidades, a saber, quando A e B são ambos verdade, quando A é falso e B é verdade, e quando ambos A e B são falsos. Abaixo segue a tabela de verdade de uma fórmula um pouco mais complexa:

(7) $\neg A \rightarrow \neg A \vee \neg B$

| A | B | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg A \vee \neg B$ | $\neg A \rightarrow \neg A \vee \neg B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | F | V |
| V | F | F | V | V | V |
| F | V | V | F | V | V |
| F | F | V | V | V | V |

Fazendo uso da tabela da negação, colocamos na terceira e quarta colunas (da esquerda para a direita) os valores de verdade de $\neg A$ e $\neg B$ para cada uma das quatro possibilidades de combinação de valores de verdade de A e B. De posse dessa informação, agora com o auxílio da tabela de verdade de ∨, determinamos os valores de verdade de ¬A∨¬B. Com isso, usando a tabela de verdade da implicação, podemos finalmente escrever, na última coluna, as condições de verdade de (7). Seguem abaixo dois outros exemplos.

(8) ¬(A∧¬B→A)

| A | B | ¬B | A∧¬B | A∧¬B→A | ¬(A∧¬B→A) |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V | F |
| V | F | V | V | V | F |
| F | V | F | F | V | F |
| F | F | V | F | V | F |

(9) ¬(¬A∨¬B)

| A | B | ¬A | ¬B | ¬A∨¬B | ¬(¬A∨¬B) |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | F | V |
| V | F | F | V | V | F |
| F | V | V | F | V | F |
| F | F | V | V | V | F |

Vemos assim que, para construir a tabela de verdade de uma fórmula mais complexa, reservamos, além de uma coluna para cada um dos símbolos proposicionais que aparecem na fórmula e uma para a fórmula (no caso acima a primeira, segunda e última colunas, respectivamente), também uma coluna para cada uma das subfórmulas restantes.

No que se refere à quantidade de linhas da tabela, ela será determinada pelo número de símbolos proposicionais que a fórmula contiver. Mais especificamente, como deve haver uma linha para cada combinação possível de valor de verdade de tais símbolos, e como existem apenas dois valores de verdade, temos que o número de linhas total da tabela de uma fórmula φ será $2^n$, onde *n* é o numero de símbolos proposicionais (diferentes) que aparecem em φ. Como temos examinado até agora apenas fórmulas com dois símbolos proposicionais, nossas tabelas têm tido exatamente 4 ($2^2$) linhas. No entanto, se o número de símbolos proposicionais aumentar para três, teremos uma tabela com 8 ($2^3$) linhas; se aumentar para quatro, 16 ($2^4$) linhas; se aumentar para 5, 32 ($2^5$) linhas, e assim por diante. Segue abaixo a tabela de verdade de uma fórmula contendo três símbolos proposicionais, caso no qual a tabela de verdade correspondente terá 8 linhas:

(10) $((A\to B)\vee\neg C)\to A$

| A | B | C | $(A\to B)$ | $\neg C$ | $((A\to B)\vee\neg C)$ | $((A\to B)\vee\neg C)\to A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | F | V | V |
| V | V | F | V | V | V | V |
| V | F | V | F | F | F | V |
| V | F | F | F | V | V | V |
| F | V | V | V | F | V | F |
| F | V | F | V | V | V | F |
| F | F | V | V | F | V | F |
| F | F | F | V | V | V | F |

Um ponto importante é que podemos usar as tabelas dos conectivos lógicos para construir não apenas tabelas de verdade de fórmulas, mas também outros esquemas de tabelas de verdade, a única diferença sendo que, ao invés de enumerarmos as possibilidades de combinação dos símbolos proposicionais da fórmula, enumeramos as possibilidades de combinação dos esquemas de fórmula representados pelas letras gregas. Podemos, por exemplo, construir as tabelas de verdade dos conectivos derivados introduzidos na definição 1.4. A tabela do bicondicional $\leftrightarrow$ $((\alpha\leftrightarrow\beta) \stackrel{\text{def}}{=} ((\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)))$ seria como segue:

| $\alpha$ | $\beta$ | $(\alpha\to\beta)$ | $(\beta\to\alpha)$ | $(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F |
| F | V | V | F | F |
| F | F | V | V | V |

Se quiséssemos representar essa tabela usando a forma abreviada $\leftrightarrow$ teríamos o que segue:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha\leftrightarrow\beta$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

Já a tabela do *ou exclusivo*, que é construída com auxílio das tabelas da negação, conjunção e disjunção, seria como segue:

| $\alpha$ | $\beta$ | $(\alpha\vee\beta)$ | $(\alpha\wedge\beta)$ | $\neg(\alpha\wedge\beta)$ | $(\alpha\vee\beta)\wedge\neg(\alpha\wedge\beta)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | F | F |
| V | F | V | F | V | V |
| F | V | V | F | V | V |
| F | F | F | F | V | F |

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha\,\underline{\vee}\,\beta$ |
|---|---|---|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

O leitor atento deve ter observado algo de peculiar nas tabelas das fórmulas (7) e (8). Enquanto o valor de verdade de (7) é sempre V em todas as linhas, na tabela de (8) acontece exatamente o oposto: para toda e qualquer possibilidade de combinação de valor de verdade de seus símbolos proposicionais, seu valor é F. A fórmulas como (7), que são verdade em toda e qualquer circunstância, nós damos o nome de *tautologias*, e fórmulas que, como (8), são sempre falsas, nós damos o nome de *contradições*. Fórmulas como (6) e (9) que são ora verdadeiras, ora falsas, nós chamamos de *contingências*.

Outro detalhe que o nosso leitor deve ter observado é a semelhança entre a tabela de verdade da implicação e da fórmula (6), de um lado, e entre a tabela de verdade da conjunção e de (9), de outro. Isso pode ser visto mais claramente se removemos as colunas intermediárias das tabelas de (6) e (9) e as colocamos lado a lado das tabelas de $A\rightarrow B$ e $A\wedge B$, respectivamente:

| A | B | $\neg A\vee B$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

| A | B | $A\rightarrow B$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

| A | B | $\neg(\neg A\vee\neg B)$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

| A | B | $A\wedge B$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

Sendo mais específico, as tabelas de verdade de $\neg A\vee B$ e $A\rightarrow B$, de um lado, e $\neg(\neg A\vee\neg B)$ e $A\wedge B$, de outro, têm os mesmos valores para cada uma das quatro possibilidades de combinação dos valores de verdade de A e B. Quando isso acontece, dizemos que as fórmulas correspondentes são *semanticamente equivalentes* uma à outra. Nos dois exemplos acima, dizemos que $\neg A\vee B$ é semanticamente equivalente a $A\rightarrow B$, e que $\neg(\neg A\vee\neg B)$ é semanticamente equivalente a $A\wedge B$. Nesses casos podemos afirmar que, em termos de valores de verdade e de relação inferencial, tanto faz escrever $\neg A\vee B$ como $A\rightarrow B$, por exemplo. Uma consequência disso é que todas as tautologias (bem como todas as contradições) são semanticamente equivalentes entre si.

Neste ponto é útil mencionar um detalhe relevante a respeito do conectivo derivado $\leftrightarrow$. Repare que, de acordo com a sua tabela de verdade, $\alpha\leftrightarrow\beta$ é verdade quando tanto $\alpha$ como $\beta$ são verdade, ou quando ambos são falsos. Mas nos casos de equivalência semântica acima mencionados, como, por exemplo, na equivalência entre $A\rightarrow B$ e $\neg A\vee B$, como as suas tabelas de verdade são idênticas, $A\rightarrow B$ é verdade se e somente se $\neg A\vee B$ é verdade, e $A\rightarrow B$ é falso se e somente se $\neg A\vee B$ também o é. A conclusão então é que a fórmula

(11) $(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg A\vee B)$

é verdade em todas as combinações de valores de verdade de A e B. Em outras palavras (11) é uma tautologia:

| A | B | $A\rightarrow B$ | $\neg A$ | $\neg A\vee B$ | $(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg A\vee B)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | V | V |
| V | F | F | F | F | V |
| F | V | V | V | V | V |
| F | F | V | V | V | V |

O mesmo vale para $A\wedge B$ e $\neg(\neg A\vee\neg B)$: $(A\wedge B)\leftrightarrow(\neg(\neg A\vee\neg B))$ é uma tautologia. Assim, as equivalências semânticas entre fórmulas podem também ser representadas na linguagem objeto com o auxílio do conectivo $\leftrightarrow$; não por acaso esse conectivo tem o nome "equivalência material".

## 4.3 Definição semântica da relação de inferência

Iremos agora introduzir as definições que nos levarão à nossa primeira formulação da relação de inferência da lógica proposicional, a saber, a sua relação de consequência lógica. No entanto, conforme mencionado no início do capítulo, definiremos primeiramente várias noções, incluindo a noção de consequência lógica, de forma geral, sem fazer referência a nenhum sistema lógico específico. Após isso, na seção seguinte, instanciaremos tais definições à lógica proposicional.

Conforme já mencionamos, a definição semântica da relação de inferência de uma lógica faz uso de conceitos semânticos como o conceito de verdade e, em última instância, atenta para o significado dos símbolos, tendo em vista a caracterização da classe dos argumentos válidos. Assim, podemos considerar como um subproduto de tal definição a estipulação do significado de alguns termos-chave da linguagem proposicional e, de uma forma mais específica, das condições de verdade de seus enunciados. Como já sabemos, usaremos o símbolo $\vDash$ para nos referirmos à relação de inferência definida semanticamente, de forma que, dado um conjunto qualquer $\Gamma$ de fórmulas da linguagem lógica e uma fórmula $\alpha$ da mesma linguagem, escrevemos $\Gamma \vDash \alpha$ para dizer que $\alpha$ é uma *consequência lógica* de $\Gamma$ (quando isso não for o caso escrevemos $\Gamma \nvDash \alpha$).

A noção mais importante na definição semântica da relação de inferência é a noção de *modelo*. Intuitivamente, um modelo, interpretação ou valoração pode ser visto como uma representação de uma situação ou estado de coisas capaz de dar as informações necessárias para dizermos se as fórmulas da linguagem em questão são verdadeiras ou falsas[28]. Sendo um pouco mais específico, podemos ver um modelo M como responsável pela "fixação semântica" dos símbolos não lógicos de uma linguagem lógica L qualquer, caso no qual dizemos que M é um modelo para L. No caso da lógica proposicional, por exemplo, um modelo é basicamente uma estrutura que diz, para cada um dos símbolos proposicionais, se tal símbolo é verdadeiro ou falso.

O conceito de modelo será usado por aquilo que podemos chamar de a *semântica* da lógica em questão, isto é, pelo componente responsável em dizer, para toda fórmula $\alpha \in L$, se $\alpha$ é verdadeira ou falsa em um dado modelo M, ou em outras palavras, se M *sa-*

**28.** Neste livro usaremos o termo "modelo" de maneira diferente de como ele é usado em livros-texto clássicos de lógica. O nosso uso estará mais em consonância com a maneira como tal termo é usado em livros-texto de lógica modal e lógica filosófica.

*tisfaz* $\alpha$ (em símbolos: $M \Vdash \alpha$) ou não (em símbolos: $M \nVdash \alpha$). Definindo a relação de *satisfatibilidade*, uma semântica fornecerá o que chamamos de as *condições de verdade* das fórmulas da linguagem, isto é, em que condições uma dada fórmula $\alpha$ é verdade, ou ainda, quais características um modelo M deve ter para satisfazer $\alpha$. Dizemos nesse caso que $\Vdash$ é uma relação de satisfatibilidade em L. Não é difícil ver que tanto a estrutura de modelo de uma lógica como sua relação de satisfatibilidade dependerão de sua linguagem e da maneira como os símbolos lógicos são "interpretados".

Uma vez que tenhamos ao nosso dispor tais noções (modelo e satisfatibilidade) podemos definir importantes noções semânticas como as noções de tautologia, contradição, contingência e, obviamente, a noção de consequência lógica. Nosso propósito nesta seção é apresentar tais definições. Como queremos, no entanto, definições gerais, aplicáveis a qualquer sistema lógico, deixaremos em aberto que linguagem lógica e relação de satisfatibilidade específicas estão envolvidas, por exemplo, na definição da noção de consequência lógica, podendo tais noções serem tomadas como *parâmetros* da definição. Outro ponto importante é que, apesar de não termos ainda definido formalmente nenhum modelo ou relação de satisfatibilidade, usaremos mesmo assim tais conceitos em nossas definições. Para isso estamos nos apoiando obviamente na explicação informal de tais noções dada acima, mas também no fato de que na próxima seção introduziremos formalmente as noções de modelo e satisfatibilidade na lógica proposicional. Comecemos pelas definições de tautologia, contradição e contingência:

**DEFINIÇÃO 1.5** Seja L uma linguagem lógica, $\Vdash$ uma relação de satisfatibilidade em L e $\alpha \in L$ uma fórmula qualquer.

(i) Dizemos que $\alpha$ é uma *tautologia* se e somente se, para todo modelo M, $M \Vdash \alpha$;

(ii) Dizemos que $\alpha$ é uma *contradição* se e somente se, para todo modelo M, $M \nVdash \alpha$;

(iii) Dizemos que $\alpha$ é uma *contingência* se e somente se existirem ao menos dois modelos M' e M'' tal que $M' \Vdash \alpha$ e $M' \nVdash \alpha$.

Vendo um modelo simplesmente como a representação de uma situação na qual enunciados podem ser verdadeiros ou falsos, uma tautologia então é simplesmente um enunciado ou fórmula que é verdadeiro em todas as situações possíveis; uma contradição, um enunciado falso em todas as situações possíveis; e uma contingência um enunciado que não é nem tautologia nem contradição.

Abaixo temos uma tentativa de estender a noção de satisfatibilidade de forma que a mesma possa ser aplicada a conjuntos de fórmulas e ser usada como propriedade de conjuntos:

**DEFINIÇÃO 1.6** Seja L uma linguagem lógica, M um modelo para L, $\Vdash$ uma relação de satisfatibilidade em L, $\alpha \in L$ uma fórmula qualquer e $\Gamma \subseteq L$ um conjunto de fórmulas.

(i) Dizemos que M *satisfaz* $\Gamma$ (em símbolos: $M \Vdash \Gamma$) se e somente se, para todo $\beta \in \Gamma$, $M \Vdash \beta$;

(ii) Dizemos que $\Gamma$ é *satisfatível* se e somente se, para ao menos um modelo M', M' satisfaz $\Gamma$.

De posse dessa extensão da noção de satisfatibilidade, podemos definir o conceito chave deste capítulo: a noção de consequência lógica.

**DEFINIÇÃO 1.7** Seja L uma linguagem lógica, $\Vdash$ uma relação de satisfatibilidade em L, $\Gamma \subseteq L$ um conjunto de fórmulas e $\alpha \in L$ uma fórmula. Dizemos que $\alpha$ é uma *consequência lógica* de $\Gamma$ (em símbolos: $\Gamma \vDash \alpha$) se e somente se, para todo modelo M tal que $M \Vdash \Gamma$, $M \Vdash \alpha$. (Caso $\alpha$ não seja uma consequência lógica de $\Gamma$ escrevemos $\Gamma \nvDash \alpha$.)

A ideia intuitiva presente aqui é que se $\alpha$ é uma consequência lógica de $\Gamma$ ou, em outras palavras, se $\alpha$ pode ser inferido a partir de $\Gamma$, então para toda e qualquer circunstância ou situação na qual todos os membros de $\Gamma$ são verdade, então $\alpha$ também é verdade nessa situação. Se trocarmos na frase acima "situação" por "modelo" e "verdade" por "satisfação", então teremos exatamente o que é dito na definição acima. Outra maneira de explicar a noção de consequência lógica é dizer que se $\Gamma \vDash \alpha$, então não existe nenhum modelo M tal que M satisfaz todos os membros de $\Gamma$, mas não satisfaz $\alpha$, ou, falando de outra forma, não existe nenhuma situação em que todos os membros de $\Gamma$ sejam verdade, mas $\alpha$ seja falso.

O leitor atento deve ter percebido que a definição 1.7, bem como a explicação dela dada acima, correspondem de forma bastante significativa à definição que demos no capítulo 1 de argumento dedutivo. Na ocasião, dissemos que uma inferência dedutiva é aquela em que é impossível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa. Em outras palavras, em toda e qualquer situação *s*, se todas as premissas de um argumento dedutivo são verdadeiras em *s*, então a conclusão também deve ser verdadeira em *s*. Ou, equivalentemente, não existe nenhuma situação em que todas as premissas de um argumento dedutivo sejam verdade, mas a sua conclusão seja falsa. Considerando $\Gamma$ como sendo o conjunto de premissas e $\alpha$ como sendo a conclusão, temos então a definição 1.7 nos dando o que podemos chamar de uma *explicação* precisa para o conceito de argumento dedutivo ou, colocando em outros termos, para a noção de relação de dedução ou consequência lógica conforme definido por nós no capítulo 1. Ficam faltando, obviamente, as definições de modelo e satisfatibilidade que, como falamos, dependem do sistema lógico em questão.

Uma consequência interessante da definição 1.7 é que o que chamamos na definição 1.5 de tautologia é nada mais do que uma consequência lógica do conjunto vazio.

**COROLÁRIO 1.1** Seja L uma linguagem lógica, $\Vdash$ uma relação de satisfatibilidade em L, e $\alpha \in L$ uma fórmula. $\alpha$ é uma tautologia se e somente se $\varnothing \vDash \alpha$ (caso no qual escrevemos simplesmente $\vDash \alpha$).

Para finalizar esta seção, segue abaixo a definição formal da noção de equivalência semântica, já utilizada por nós na seção anterior.

**DEFINIÇÃO 1.8** Seja L uma linguagem lógica, $\Vdash$ uma relação de satisfatibilidade em L e $\alpha,\beta \in L$ duas fórmulas. Dizemos que $\alpha$ *equivale semanticamente* a $\beta$ (em símbolos: $\alpha \mathrel{\hat{=}} \beta$) se e somente se $\{\alpha\} \vDash \beta$ e $\{\beta\} \vDash \alpha$.

Exemplificaremos essas definições na próxima seção, na qual as aplicaremos à definição semântica da relação de inferência da lógica proposicional.

## 4.4 Modelo, satisfatibilidade e consequência lógica

Iremos agora introduzir as definições específicas à lógica proposicional que nos permitirão usar as definições 1.5-1.8. Começamos obviamente pela noção de modelo, que é, como falamos, a estrutura básica responsável pela avaliação semântica das fórmulas.

**DEFINIÇÃO 1.9** Em lógica clássica proposicional, um *modelo* (também chamado de *interpretação* ou *valoração*) M é uma função: $P \rightarrow \{V,F\}$ que atribui, para cada símbolo proposicional de P, o valor V (verdadeiro) ou F (falso).

Em lógica proposicional, um modelo M é simplesmente uma função que literalmente "fixa semanticamente" os símbolos proposicionais de $L_p$, atribuindo, para cada um deles, o valor V ou F. Supondo, por exemplo, que o nosso conjunto P de símbolos proposicionais seja igual à $\{A,B,C,D,E\}$, teríamos as funções abaixo como exemplos de modelos:

$M_1(A)=V$; $M_1(B)=F$; $M_1(C)=V$; $M_1(D)=V$; $M_1(E)=V$;

$M_2(A)=V$; $M_2(B)=V$; $M_2(C)=F$; $M_2(D)=V$; $M_2(E)=V$;

$M_3(A)=F$; $M_3(B)=F$; $M_3(C)=F$; $M_3(D)=F$; $M_3(E)=F$;

Isso também pode ser representado como segue:

| Modelo | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | V | F | V | V | V |
| $M_2$ | V | V | F | V | V |
| $M_3$ | F | F | F | F | F |

Nesse ponto é válido mencionar a relação que há entre o conceito de modelo e a noção de tabela de verdade. Como é fácil de ver na tabela acima, um modelo corresponde exatamente a uma determinada combinação de valores de verdade dos símbolos proposicionais. Mas tal combinação é exatamente o que determina uma *linha* específica de uma tabela de verdade. A única diferença é que enquanto uma linha de uma tabela de verdade estabelece uma possível combinação dos valores de verdade de um conjunto bastante reduzido de símbolos proposicionais, a saber, apenas aqueles símbolos proposicionais que aparecem na fórmula em questão, um modelo deve dizer, para *todos* os elementos do conjunto de símbolos proposicionais, se cada um deles é falso ou verdadeiro. Por exemplo, na tabela de (6) abaixo

(6) $\neg A \vee B$

| A | B | $\neg A$ | $\neg A \vee B$ |
|---|---|---|---|
| V | V | F | V |
| V | F | F | F |
| F | V | V | V |
| F | F | V | V |

enquanto a primeira linha corresponde à interpretação $M_2$, a segunda e a quarta correspondem à $M_1$ e $M_3$, respectivamente. Mas veja que se considerarmos o modelo $M_4$, conforme mostrado abaixo,

$M_4(A)=V$; $M_4(B)=F$; $M_4(C)=V$; $M_4(D)=V$; $M_4(E)=F$;

que é claramente diferente de $M_1$ (enquanto em $M_1$ o valor de verdade de E é V, em $M_4$ o mesmo símbolo proposicional tem o valor F), veremos que associado a cada linha da tabela de verdade existe não apenas um modelo, mas um conjunto de modelos. No nosso exemplo, temos que associado à segunda linha da tabela de (6) estão todas as interpretações que atribuam V para A e F para B.

É importante salientar que um modelo atribui valor de verdade apenas aos símbolos proposicionais, não dizendo absolutamente nada a respeito do valor de verdade de fórmulas complexas como (6). Conforme foi dito na seção anterior, é incumbência da noção de satisfatibilidade fazer uso de um modelo para avaliar semanticamente todo e qualquer tipo de fórmula ou, em outras palavras, dizer, para toda e qualquer fórmula $\alpha \in L_p$, se um dado modelo M satisfaz ou não $\alpha$.

**DEFINIÇÃO 1.10** Seja M um modelo, $p \in P$ é um símbolo proposicional qualquer e $\alpha, \beta \in L_p$ duas fórmulas. Na lógica clássica proposicional, a relação de satisfatibilidade $\Vdash$ é definida como segue:

(i) $M \Vdash p$ sss $M(p)=V$;

(ii) $M \Vdash \neg\alpha$ sss $M \nVdash \alpha$;

(iii) $M \Vdash \alpha \wedge \beta$ sss $M \Vdash \alpha$ e $M \Vdash \beta$;

(iv) $M \Vdash \alpha \vee \beta$ sss $M \Vdash \alpha$ ou $M \Vdash \beta$;

(v) $M \Vdash \alpha \rightarrow \beta$ sss $M \nVdash \alpha$ ou $M \Vdash \beta$.

$M \Vdash \alpha$ significa "$\alpha$ é satisfeita pelo (ou no) modelo M", ou ainda "$\alpha$ é verdade em M"; $M \nVdash \alpha$, por sua vez, quer dizer que $\alpha$ não é satisfeita por M.

A primeira coisa que deve ser bem compreendida a respeito da definição 1.10 é o significado da expressão "sss" (se e somente se). Ao dizermos, por exemplo, que $M \Vdash \neg\alpha$ sss $M \nVdash \alpha$, estamos afirmando duas coisas: primeiro que se $M \Vdash \neg\alpha$ então $M \nVdash \alpha$, e segundo que se $M \nVdash \alpha$, então $M \Vdash \neg\alpha$. Em outras palavras, estamos dizendo em que circunstâncias ou modelos uma fórmula da forma $\neg\alpha$ é satisfeita, a saber, nos modelos nos quais $\alpha$ é satisfeito, e em nenhum outro mais. Fazendo isso para todos os tipos de fórmulas, a definição 1.10 na verdade estabelece as condições nas quais toda e qualquer fórmula é verdade.

Segundo, conforme já dissemos, apesar de a ideia básica de um modelo M ser tal que toda e qualquer fórmula $\alpha$ é verdade ou falsa em M, o modelo em si, conforme definido na definição 1.9, atribui valor de verdade apenas para certo tipo de fórmula, a saber, as fórmulas atômicas (símbolos proposicionais). É propósito então, pode-se dizer, da relação $\Vdash$ estender M de forma a fazer com que sejamos capazes de dizer, para toda e qualquer fórmula de $L_p$, independentemente de ela ser atômica ou complexa, se ela é verdadeira ou não em M.

Terceiro, ao dizermos quando uma fórmula qualquer é satisfeita ou verdadeira em um modelo M, estamos automaticamente dizendo quando ela não é satisfeita. A razão disso é que, ao usarmos a expressão "sss" no item (ii), por exemplo, estamos dizendo que $M \Vdash \neg\alpha$ só é o caso em uma circunstância na qual $M \nVdash \alpha$, e em nenhuma outra mais. Mas como para qualquer fórmula $\beta$, ou $M \Vdash \beta$ ou $M \nVdash \beta$, isso significa que na outra circunstância possível, a saber, $M \Vdash \alpha$, teremos $M \nVdash \neg\alpha$ e que se $M \nVdash \neg\alpha$, então $M \Vdash \alpha$. Em outras palavras, uma consequência trivial do item (ii) da definição acima é que $M \nVdash \neg\alpha$

sss $M \Vdash \alpha$. Fazendo o mesmo exercício para os outros itens nós temos a seguinte consequência ou *corolário* da definição 1.10.

**COROLÁRIO 1.2** Seja M um modelo, $p \in P$ um símbolo proposicional qualquer e $\alpha, \beta \in L_P$ duas fórmulas quaisquer.

(i) $M \nVdash p$ sss $M(p)=F$;

(ii) $M \nVdash \neg\alpha$ sss $M \Vdash \alpha$;

(iii) $M \nVdash \alpha \wedge \beta$ sss $M \nVdash \alpha$ ou $M \nVdash \beta$;

(iv) $M \nVdash \alpha \vee \beta$ sss $M \nVdash \alpha$ e $M \nVdash \beta$;

(v) $M \nVdash \alpha \rightarrow \beta$ sss $M \Vdash \alpha$ e $M \nVdash \beta$.

Para ver como a definição 1.10 pode ser usada na determinação das condições de verdade de uma fórmula, suponha novamente que o nosso conjunto de símbolos proposicionais P seja igual à {A,B,C,D,E} e que, em adição a isso, desejemos saber se

(12) $\neg(A \rightarrow B)$

é ou não satisfeita no modelo $M_1$. De acordo com o item (ii) da definição 1.10, dado um modelo M qualquer,

$M \Vdash \neg(A \rightarrow B)$ sss $M \nVdash A \rightarrow B$.

Mas pelo corolário 1.1, item (v), temos que

$M \nVdash A \rightarrow B$ sss $M \Vdash A$ e $M \nVdash B$.

Finalmente, o item (i) da definição 1.10 nos diz que $M \Vdash A$ sss $M(A)=V$ e o item (i) do corolário 1.1 que $M \nVdash B$ sss $M(B)=F$. Assim, temos que (12) é satisfeito em um modelo específico se e somente se esse modelo atribui, para A e B, os valores V e F, respectivamente. Como $M_1(A)=V$ e $M_1(B)=F$, temos que $M_1 \Vdash \neg(A \rightarrow B)$, isto é, $M_1$ satisfaz $\neg(A \rightarrow B)$.

Esse procedimento pode ser resumido como segue:

$$
\begin{tikzcd}
& M \Vdash \neg(A \rightarrow B) \arrow[d, no head] & \\
& M \nVdash A \rightarrow B \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] \arrow[d, phantom, "\text{e}"] & \\
M \Vdash A \arrow[d, no head] & & M \nVdash B \arrow[d, no head] \\
M(A)=V & & M(B)=F
\end{tikzcd}
$$

em que cada mudança de um nível superior para um inferior deve ser lida como "se e somente se". Temos abaixo outro exemplo no qual é feito o mesmo tipo de análise para a fórmula

(13) $\neg(\neg A \wedge \neg B)$

$$M \Vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

$$M \nVdash \neg A \wedge \neg B$$

ou

$$M \nVdash \neg A \qquad M \nVdash \neg B$$

$$M \Vdash A \qquad M \Vdash B$$

$$M(A)=V \qquad M(B)=V$$

Assim, temos que para um modelo M satisfazer (13) ele tem que ser tal que M(A)=V ou M(B)=V. Falando de outra forma, apenas as valorações que atribuem V à A ou V à B satisfarão $\neg(\neg A \wedge \neg B)$. Isso obviamente significa que todas as outras valorações que não atribuírem nem V à A nem V à B tornarão (13) falsa. Considerando apenas os valores de A e B, temos que os seguintes modelos satisfazem (13)[29]:

| Modelo | A | B |
|---|---|---|
| $M_1$ | V | V |
| $M_2$ | V | F |
| $M_3$ | F | V |

e que apenas o modelo abaixo não satisfaz (13):

| Modelo | A | B |
|---|---|---|
| $M_4$ | F | F |

Obviamente que $M_1$-$M_4$ acima somente serão valorações caso consideremos o nosso conjunto de símbolos proposicionais como contendo apenas A e B. Caso contrário o

**29.** Aqui estamos iniciando uma nova numeração de modelos (o modelo $M_1$ abaixo não é o mesmo modelo $M_1$ da página 90).

que $M_1$-$M_4$ representam são classes de valorações, onde $M_1$, por exemplo, representa todas as valorações que atribuem V tanto para A como para B (mas que obviamente podem atribuir qualquer outro valor para os demais símbolos proposicionais). Isso é relevante, pois nas duas tabelas acima temos todas as informações necessárias para construir a *tabela de verdade* de (13), a saber, as condições nas quais (13) é verdadeira, e as condições nas quais (13) é falsa. Juntando isso, nós obtemos a tabela de verdade de (13) conforme exibido abaixo:

| A | B | $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

Isso trivialmente serve para ilustrar o fato de que o procedimento de construção de tabela de verdade é, na verdade, uma consequência das definições 1.9 e 1.10; em outras palavras, tais definições precisam de forma rigorosa o que temos chamado até agora de tabela de verdade.

De posse das noções de modelo e satisfatibilidade na lógica proposicional, podemos facilmente usar as definições 1.5-1.8 para obter as noções de tautologia, contradição, contingência, consequência lógica e equivalência semântica da lógica proposicional. Tudo que temos a fazer é considerar, nessas definições, a linguagem proposicional $L_p$ e as noções de modelo e satisfatibilidade conforme definidos nas definições 1.9 e 1.10.

A respeito das noções de tautologia, contradição e contingência, claramente a determinação de se uma dada fórmula é uma tautologia, contradição ou contingência pode ser feita através da definição 1.10 conforme exemplificado acima. Por exemplo, como apenas modelos M tais que M(A)=V ou M(B)=V satisfazem (13), claramente haverá modelos que não satisfazem (13). Assim, de acordo com a definição 1.5 aplicada às definições 1.9 e 1.10, (13) é uma contingência. Na verdade, como o próprio procedimento de tabela de verdade é uma aplicação, por assim dizer, das definições 1.9 e 1.10, o seu uso na determinação do status lógico de uma proposição pode naturalmente ser considerado também como uma aplicação de tais definições.

Segue abaixo uma tabela com algumas tautologias da lógica proposicional que, em virtude de seu uso e importância histórica, são muitas vezes nomeadas com o auxílio da palavra "Lei" (aqui preferiremos, na maioria das vezes, o termo "princípio"). Novamente, $\alpha$, $\beta$ e $\varphi$ abaixo representam fórmulas arbitrárias de $L_p$. Assim, os princípios listados abaixo são na verdade esquemas de fórmulas.

| | |
|---|---|
| Princípio da não contradição | $\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$ |
| Princípio do terceiro excluído | $\alpha\vee\neg\alpha$ |
| Lei da dupla negação | $\alpha\leftrightarrow\neg\neg\alpha$ |
| Lei da contrapositiva | $(\alpha\rightarrow\beta)\leftrightarrow(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)$ |
| Lei de Peirce | $((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\alpha)\rightarrow\alpha$ |
| Lei da exportação | $(\alpha\wedge\beta\rightarrow\varphi)\leftrightarrow(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))$ |
| Lei da permutação | $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))\leftrightarrow(\beta\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))$ |
| Lei da identidade | $\alpha\leftrightarrow\alpha$ |
| Leis de De Morgan | $\neg(\alpha\vee\beta)\leftrightarrow(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$ |
| | $\neg(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow(\neg\alpha\vee\neg\beta)$ |
| Leis de tautologia | $\alpha\leftrightarrow(\alpha\vee\alpha)$ |
| | $\alpha\leftrightarrow(\alpha\wedge\alpha)$ |
| Leis de associatividade | $(\alpha\vee(\beta\vee\varphi))\leftrightarrow((\alpha\vee\beta)\vee\varphi)$ |
| | $(\alpha\wedge(\beta\wedge\varphi))\leftrightarrow((\alpha\wedge\beta)\wedge\varphi)$ |
| | $(\alpha\leftrightarrow(\beta\leftrightarrow\varphi))\leftrightarrow((\alpha\leftrightarrow\beta)\leftrightarrow\varphi)$ |
| Leis de distributividade | $(\alpha\wedge(\beta\vee\varphi)\leftrightarrow((\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\varphi))$ |
| | $(\alpha\vee(\beta\wedge\varphi))\leftrightarrow((\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\varphi))$ |
| Leis de comutatividade | $(\alpha\vee\beta)\leftrightarrow(\beta\vee\alpha)$ |
| | $(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow(\beta\wedge\alpha)$ |
| | $(\alpha\leftrightarrow\beta)\leftrightarrow(\beta\leftrightarrow\alpha)$ |

No que se refere à relação de consequência lógica, vejamos um exemplo de como a definição 1.7 aplicada à lógica proposicional pode ser usada na avaliação de argumentos. Considere o seguinte argumento:

(14) Se Sócrates é homem, então Sócrates é mortal;
Sócrates é homem;
Portanto, Sócrates é mortal.

que seria traduzido para a linguagem proposicional como segue:

(14') $A \rightarrow B$
$\quad A$
$\therefore B$

em que A significa "Sócrates é homem.", B "Sócrates é mortal" e o símbolo $\therefore$ significa "Portanto". Usando a terminologia da definição 1.7, o conjunto de premissas $\Gamma$ seria aqui igual a $\{A \rightarrow B, A\}$ e a conclusão $\alpha$ seria B, sendo a nossa tarefa usar a definição 1.7 para saber se B é ou não uma consequência lógica de $\{A \rightarrow B, A\}$ ou, em símbolos, se $\{A \rightarrow B, A\} \vDash B$. De acordo com a definição 1.7, para que $\{A \rightarrow B, A\} \vDash B$ todos os modelos que satisfazem $\{A \rightarrow B, A\}$ devem também satisfazer B. Assim, o que devemos fazer é avaliar todos os modelos possíveis e, para cada um deles, checar se o dito acima é o caso. Como temos aqui apenas os símbolos A e B, devemos considerar apenas quatro modelos, ou sendo mais preciso, as quatro classes de modelos caracterizados na tabela abaixo:

| Modelo | A | B |
|---|---|---|
| $M_1$ | V | V |
| $M_2$ | V | F |
| $M_3$ | F | V |
| $M_4$ | F | F |

Consideremos primeiro se $M_1$ satisfaz $\{A \rightarrow B, A\}$. Uma breve consulta às definições 1.6 e 1.10 é suficiente para nos convencer que sim, $M_1$ satisfaz $\{A \rightarrow B, A\}$. É também trivial que $M_1$ satisfaz B. Assim, a nossa verificação foi bem-sucedida para $M_1$. Falta agora fazermos o mesmo para $M_2$, $M_3$ e $M_4$. Em relação $M_2$, temos que esse modelo não satisfaz $\{A \rightarrow B, A\}$, pois ele não satisfaz $A \rightarrow B$. Não precisamos então considerar $M_2$, pois tudo o que a definição exige é que nos modelos em que *todos* os membros de $\Gamma$ sejam satisfeitos, $\alpha$ também o seja. Assim, apenas os modelos que satisfazem $\Gamma$ é que podem invalidar a relação de consequência lógica entre $\Gamma$ e $\alpha$. Como a situação com $M_3$ e $M_4$ é semelhante (tanto $M_3$ como $M_4$ não satisfazem $\{A \rightarrow B, A\}$, pois não satisfazem A), temos então que $\{A \rightarrow B, A\} \vDash B$.

Esse fato de que apenas as valorações que satisfazem $\Gamma$ podem mostrar que $\Gamma \nvDash \alpha$ pode ser melhor visto quando usamos a definição 1.7 para mostrar que uma determinada fórmula não é consequência lógica de um conjunto de fórmulas, ou, usando outra terminologia, que um determinado argumento não é (dedutivamente) válido. Considere o argumento abaixo:

(15) Se chover então a rua estará molhada;

A rua está molhada;

Portanto choveu.

cuja tradução para a linguagem proposicional poderia ser como segue:

(15') $A \rightarrow B$

$B$

$\therefore A$

em que A agora significa "Choveu" (ou "Chove"), e B "A rua está molhada". Não é difícil de concluir que esse argumento não é válido. Se quisermos, no entanto, usar a definição 1.7 para mostrar que $\{A \rightarrow B, B\} \nvDash A$, basta encontrarmos um modelo M tal que M satisfaz $\{A \rightarrow B, B\}$, mas não satisfaz A. Uma breve consulta à tabela de modelos acima é suficiente para sabermos que tal modelo é $M_3$: claramente temos que $M_3$ satisfaz $\{A \rightarrow B, B\}$, mas não satisfaz A. Assim, como não é verdade que para todo modelo M tal que M satisfaz $\{A \rightarrow B, B\}$, M também satisfaz A, temos que não é o caso que $\{A \rightarrow B, B\} \vDash A$, isto é, não é o caso que A é uma consequência lógica de $\{A \rightarrow B, B\}$.

Segue abaixo tabela com alguns (esquemas de) argumentos (juntamente com suas denominações mais conhecidas) cujas validades podem ser facilmente demonstradas através da definição 1.7.

| | |
|---|---|
| *Modus ponens* | $\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \vDash \beta$ |
| *Modus tolens* | $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vDash \neg\alpha$ |
| Silogismo hipotético | $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \varphi\} \vDash \alpha \rightarrow \varphi$ |
| Silogismo disjuntivo | $\{\alpha \vee \beta, \neg\alpha\} \vDash \beta$ |
| Conjunção | $\{\alpha, \beta\} \vDash \alpha \wedge \beta$ |
| Adição | $\{\alpha\} \vDash \alpha \vee \beta$ |
| Redução ao absurdo | $\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \neg\beta\} \vDash \neg\alpha$ |
| Princípio da explosão | $\{\alpha, \neg\alpha\} \vDash \beta$ |

Um detalhe importante a respeito dessa maneira de mostrar que um determinado argumento é válido, que se aplica igualmente ao método de tabela de verdade na determinação do status lógico de uma proposição, é que ela envolve necessariamente a consideração de todos os modelos (ou classes de modelos, se quisermos ser mais precisos) relevantes para o argumento em questão. Se estamos, por exemplo, trabalhando com um argumento ou fórmula que contém apenas 2 símbolos proposicionais, teremos que examinar 4 modelos. Mas se nosso problema envolve 3 símbolos proposicionais, já teremos que considerar 8 modelos; 4 símbolos, 16 modelos; 5 símbolos, 32 modelos, e assim por diante. Não é difícil ver que esse caráter exponencial de complexidade do nosso método que, como já mencionamos, também atinge o método de tabela de verdade, pode tornar nosso trabalho de verificação do status de fórmulas e de validade de argumentos praticamente inexequível.

Outra maneira de realizar a mesma tarefa que, em muitos casos, pode ser extremamente mais eficiente do que a maneira tradicional, é utilizando o chamado método de *prova por absurdo* ou por *redução ao absurdo*, já mencionado por nós no capítulo 2. A ideia da prova por absurdo é na verdade bastante simples. Imagine que desejemos provar certa tese T, ou seja, desejamos mostrar que T é verdade. Uma maneira de fazer isso é de forma direta, ou seja, partir de premissas conhecidamente verdadeiras e tentar chegar à T. No entanto, podemos também fazer a prova de maneira indireta, supondo que a negação de T é verdadeira e chegando a partir daí em um absurdo ou contradição. Se conseguirmos fazer isso, teremos então provado que $\neg T$ é falso, e consequentemente que T é verdadeiro. Para ilustrar isso, considere a prova abaixo da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

1. Suponha que $\sqrt{2}$ é racional, isto é, que existem dois números inteiros mutuamente primos $n$ e $m$ tal que $n/m=\sqrt{2}$
2. Consequentemente, $m^2=2n^2$
3. Disso segue que $m^2$ é par.
4. Consequentemente, $m$ também é par, pois um número quadrado não pode ter nenhum fator primo que também não seja um fator do número do qual ele é quadrado.
5. Como $n$ e $m$ são mutuamente primos, $n$ tem de ser ímpar.
6. Assumindo que $m=2k$, temos que $(2k)^2=2n^2$.
7. O que equivale a dizer que $4k^2=2n^2$, ou $n^2=2k^2$.
8. Repetindo o argumento de (3) e (4), concluímos que $n$ é par.
9. Isso, no entanto, é uma contradição, pois vimos que $n$ é ímpar.
10. Consequentemente, $\sqrt{2}$ não é racional.

Aqui, a tese que desejávamos provar era a de que $\sqrt{2}$ não é racional. No entanto, a prova foi iniciada supondo-se que $\sqrt{2}$ é racional, ou seja, supondo que a negação da própria tese é verdadeira. A partir daí, efetuando algumas inferências básicas e utilizando certas assunções matemáticas estabelecidas, chegou-se a um resultado contraditório: que $n$ é par e impar. Daí concluirmos que a nossa suposição inicial é falsa, ou seja, que a tese que $\sqrt{2}$ é racional é falsa, o que acarreta obviamente que a tese que $\sqrt{2}$ não é racional é verdade[30].

Aplicando então o método da redução ao absurdo à determinação do status lógico de uma fómula, suponha que desejemos provar que

(16) $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$

é uma tautologia. Como (16) tem 3 símbolos proposicionais, para fazer isso usando o método de tabela de verdade, por exemplo, teríamos que construir uma tabela com 8 linhas, o que pode ser bastante trabalhoso. Vejamos como funcionaria, nesse caso, o método de prova por absurdo.

Como desejamos provar que (16) é uma tautologia, partimos da suposição de que a sua negação, ou seja, a tese de que (16) não é uma tautologia, é verdade. De acordo com a definição 1.5, se (16) não é uma tautologia, então há um modelo M que não satisfaz (16). Se isso é o caso, então, pela definição 1.10, item (v), M é tal que $M\Vdash A\to(B\to C)$ e $M\nVdash(A\to B)\to(A\to C)$. Mas se $M\nVdash(A\to B)\to(A\to C)$, pela mesma definição temos que $M\Vdash A\to B$ e $M\nVdash A\to C$. Finalmente, como $M\nVdash A\to C$, temos que $M\Vdash A$ e $M\nVdash C$. Mas se $M\Vdash A\to B$ e $M\Vdash A$, temos que $M\Vdash B$. Mas se $M\Vdash A\to(B\to C)$ e $M\Vdash A$, então $M\Vdash B\to C$. Finalmente, como $M\Vdash B\to C$ e $M\nVdash C$, temos, necessariamente, que $M\nVdash B$. Mas nós concluímos logo acima que $M\Vdash B$. Logo, temos uma contradição e, consequentemente, que (16) é uma tautologia. Esse raciocino pode ser detalhado como segue (com exceção de (2), todos os passos inferenciais se utilizam do item (v) da definição 1.10).

1. (16) não é uma tautologia;
2. Há um modelo M que não satisfaz (16) (definição 1.5);
3. M é tal que $M\Vdash A\to(B\to C)$ e $M\nVdash(A\to B)\to(A\to C)$;
4. Como $M\nVdash(A\to B)\to(A\to C)$, então $M\Vdash A\to B$ e $M\nVdash A\to C$;
5. Como $M\nVdash A\to C$, então $M\Vdash A$ e $M\nVdash C$;
6. Como $M\Vdash A\to B$ e $M\Vdash A$, então $M\Vdash B$;
7. Como $M\Vdash A\to(B\to C)$ e $M\Vdash A$, então $M\Vdash B\to C$;
8. Como $M\Vdash B\to C$ e $M\nVdash C$, então $M\nVdash B$;
9. (6) contradiz (8);

---

**30.** Alguns autores fazem a justa distinção entre redução ao absurdo, ou *reduction ad absurdum*, que é o método no qual o resultado paradoxal obtido é um absurdo no sentido de ir de encontro a algumas suposições consensuais ou óbvias demais para serem negadas, e redução ao impossível, ou *reduction ad impossible*, cujo resultado paradoxal, além de ser também um absurdo, é logicamente impossível, como no exemplo acima no qual inferimos da suposição de que $\sqrt{2}$ é racional a proposição contraditória que *n* é par e impar.

10. Logo, (1) não é verdade;

11. Logo, (16) é uma tautologia.

Esses passos poderiam ser abreviados consideravelmente se simplesmente preenchêssemos os valores de uma única linha da tabela de verdade de (16) conforme especificado abaixo:

| A | B | C | $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ |
|---|---|---|---|
| $V_5$ | $V_6$ | $F_5$ | $V_3$ $F_8$ $V_7$ $F_2$ $V_4$ $V_6$ $F_3$ $V_5$ $F_4$ $F_5$ |
| | $F_8$ | | |

Aqui, cada valor de verdade representa o valor da fórmula associada ao símbolo logo acima. Por exemplo, como abaixo do primeiro $\to$ há um V, isso significa que a subfórmula que tem tal conectivo como conectivo principal, a saber, $A \to (B \to C)$ é verdade. Já o símbolo F abaixo do terceiro $\to$ indica que a subfórmula que tem tal conectivo como conectivo principal, a saber, a própria fórmula (16), é falsa. O símbolo V abaixo da terceira instância do símbolo proposicional A, indica que tal símbolo é verdade. O subscrito em cada um dos valores de verdade indica o passo inferencial associado ao ato de escrever tal símbolo na tabela. De acordo com o nosso raciocínio, começamos com a suposição de que (16) não é uma tautologia (passo 1), e concluímos, no passo 2, que há um modelo M que não satisfaz (16). Assim escrevemos $F_2$ abaixo do conectivo principal de (16). Já no passo 3 concluímos que M é tal que $M \Vdash A \to (B \to C)$ e $M \nVdash (A \to B) \to (A \to C)$. Assim escrevemos $V_3$ e $F_3$ abaixo dos conectivos principais de $A \to (B \to C)$ e $(A \to B) \to (A \to C)$, respectivamente. Dessa forma, procedemos ao preenchimento dos valores de verdade das várias subfórmulas de (16) até que encontramos, nos passos 6 e 8, uma contradição, o que é explicitado escrevendo $V_6$ e $F_8$ abaixo do símbolo B.

O mesmo procedimento pode ser feito para provarmos que um determinado argumento é válido. Suponha que desejemos provar que a relação abaixo é correta:

(17) $\{(A \vee \neg B), B, \neg C \to \neg A\} \vDash C$

Como queremos provar (17), supomos que sua negação é verdade, ou seja, $\{(A \vee \neg B), B, \neg C \to \neg D\} \nvDash C$. De acordo com a definição 1.7, temos que existe um modelo M tal que $M \Vdash \{(A \vee \neg B), B, \neg C \to \neg D\}$ e $M \nVdash C$. Se M satisfaz $\{(A \vee \neg B), B, \neg C \to \neg A\}$, então de acordo com a definição 1.6 temos que $M \Vdash A \vee \neg B$, $M \Vdash B$ e $M \Vdash \neg C \to \neg A$. Mas como $M \nVdash C$, então pela definição 1.10, item (ii), $M \Vdash \neg C$. Mas se $M \Vdash \neg C$ e $M \Vdash \neg C \to \neg A$, então $M \Vdash \neg A$. Novamente, pela definição 1.10, item (ii), se $M \Vdash \neg A$, então $M \nVdash A$. Mas se $M \nVdash A$ e $M \Vdash A \vee \neg B$, então $M \Vdash \neg B$, o que implica que $M \nVdash B$. Assim temos que $M \nVdash B$ e $M \Vdash B$, o que é uma contradição. Logo, (17) está correto. De maneira semelhante a como fizemos com (16), podemos resumir esse procedimento como segue:

1. $\{(A\vee\neg B), B, \neg C\rightarrow\neg D\}\nvDash C$;
2. Existe um modelo M tal que $M\Vdash\{(A\vee\neg B), B, \neg C\rightarrow\neg D\}$ e $M\nVdash C$;
3. Como $M\Vdash\{(A\vee\neg B), B, \neg C\rightarrow\neg A\}$, então $M\Vdash A\vee\neg B$, $M\Vdash B$ e $M\Vdash\neg C\rightarrow\neg A$;
4. Como $M\nVdash C$, então $M\Vdash\neg C$;
5. Como $M\Vdash\neg C$ e $M\Vdash\neg C\rightarrow\neg A$, então $M\Vdash\neg A$;
6. Como $M\Vdash\neg A$, então $M\nVdash A$;
7. Como $M\nVdash A$ e $M\Vdash A\vee\neg B$, então $M\Vdash\neg B$;
8. Como $M\Vdash\neg B$, então $M\nVdash B$;
9. (3) contradiz (8);
10. Logo, (1) não é correto;
11. Logo, (17) é uma relação válida.

Ou, de forma diagramática:

| $A\ \vee\ \neg B$ | $B$ | $\neg C\ \rightarrow\ \neg A$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| $F_6\ \ V_3\ \ V_7$ | $V_3$ | $V_4\ \ V_3\ \ V_5$ | $F_2$ |
| | $F_8$ | | |

Um procedimento semelhante pode ser usado para mostrar que um dado conjunto de fórmulas é satisfatível.

Veja que esse método de raciocínio metalógico (no sentido de ser usado para provar algo relacionado com as fórmulas da nossa linguagem lógica) é representado logicamente (ou, se preferir, intralogicamente) pelo princípio da redução ao absurdo $\{\alpha\rightarrow\beta, \alpha\rightarrow\neg\beta\}\vDash\neg\alpha$, conforme descrito acima. Também podemos, como fizemos no capítulo 2, representar a prova ao absurdo em termos da relação de consequência lógica: se $\Gamma\cup\{\alpha\}\vDash\beta$ e $\Gamma\cup\{\alpha\}\vDash\neg\beta$, então $\Gamma\vDash\neg\alpha$.

Finalmente, podemos usar a definição 1.8 para obter a noção de equivalência semântica na lógica proposicional. Fazendo isso, um aspecto interessante relacionado com a distinção entre linguagem e metalinguagem surge. Primeiro de tudo, dada a relação existente entre a noção de equivalência semântica e o conectivo $\leftrightarrow$ mencionada na seção anterior, é de se esperar que as leis expressas na forma de bicondicional mencionadas na primeira tabela acima possam ser expressas com o auxílio da noção de equivalência semântica:

| | |
|---|---|
| Lei da dupla negação | $\alpha \doteqdot \neg\neg\alpha$ |
| Lei da contrapositiva | $(\alpha\rightarrow\beta) \doteqdot (\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)$ |
| Lei da exportação | $(\alpha\wedge\beta\rightarrow\varphi) \doteqdot (\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))$ |
| Lei da permutação | $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi)) \doteqdot (\beta\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))$ |
| Lei da identidade | $\alpha \doteqdot \alpha$ |
| Leis de De Morgan | $\neg(\alpha\vee\beta) \doteqdot (\neg\alpha\wedge\neg\beta)$ |
| | $\neg(\alpha\wedge\beta) \doteqdot (\neg\alpha\vee\neg\beta)$ |
| Leis de tautologia | $\alpha \doteqdot (\alpha\vee\alpha)$ |
| | $\alpha \doteqdot (\alpha\wedge\alpha)$ |
| Leis de associatividade | $(\alpha\vee(\beta\vee\varphi)) \doteqdot ((\alpha\vee\beta)\vee\varphi)$ |
| | $(\alpha\wedge(\beta\wedge\varphi)) \doteqdot ((\alpha\wedge\beta)\wedge\varphi)$ |
| | $(\alpha\leftrightarrow(\beta\leftrightarrow\varphi)) \doteqdot ((\alpha\leftrightarrow\beta)\leftrightarrow\varphi)$ |
| Leis de distributividade | $(\alpha\wedge(\beta\vee\varphi)) \doteqdot ((\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\varphi))$ |
| | $(\alpha\vee(\beta\wedge\varphi)) \doteqdot ((\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\varphi))$ |
| Leis de comutatividade | $(\alpha\vee\beta) \doteqdot (\beta\vee\alpha)$ |
| | $(\alpha\wedge\beta) \doteqdot (\beta\wedge\alpha)$ |
| | $(\alpha\leftrightarrow\beta) \doteqdot (\beta\leftrightarrow\alpha)$ |

Mas se todas essas leis podem ser expressas tanto com $\leftrightarrow$ como com $\doteqdot$, pode-se perguntar qual a diferença que há, se é que há diferença, entre a equivalência semântica e o bicondicional.

Conforme definido na definição 1.4, uma fórmula do tipo $\alpha\leftrightarrow\beta$ é nada mais do que uma abreviação para a fórmula do tipo $(\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha)$. A fórmula a seguir, por exemplo, é uma instância da lei da contrapositiva:

(18) $(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$

(18), no entanto, é uma abreviação para a fórmula

(18') $((A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A))\wedge((\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B))$

que é por sua vez, de acordo com as regras de abreviação de parênteses, uma abreviação para a fórmula

(18'') $(((A\rightarrow B)\rightarrow((\neg B)\rightarrow(\neg A)))\wedge(((\neg B)\rightarrow(\neg A))\rightarrow(A\rightarrow B)))$.

Mas (18'), trivialmente, é, de acordo com a definição 1.1, uma fórmula da nossa linguagem objeto, ou seja, de $L_p$. Já a versão da mesma instância da lei da contrapositiva expressa com $\triangleq$,

(19) $(A\rightarrow B)\triangleq(\neg B\rightarrow\neg A)$

não é um elemento da linguagem objeto, mas pertence sim a nossa metalinguagem. A mesma coisa se aplica à boa parte dos termos usados nas definições dadas neste capítulo. Por exemplo, as expressões a seguir, apesar de serem compostas também por elementos da linguagem objeto, pertencem todas à metalinguagem: "$M(P)=V$", "$M\Vdash\neg(A\rightarrow B)$" e "$\{(A\rightarrow B),A\}\vDash B$". Resumindo então, enquanto $A\leftrightarrow B$, ou, mais especificamente, a fórmula que tal concatenação de símbolos abrevia, pertence à linguagem objeto, $A\vDash B$ pertence à metalinguagem.

Veja, no entanto, que afirmamos haver certa equivalência entre $\leftrightarrow$ e $\triangleq$. Mais precisamente, dissemos que, para duas fórmulas quaisquer $\alpha,\beta\in L_p$, se $\alpha\leftrightarrow\beta$ então $\alpha\triangleq\beta$, e se $\alpha\triangleq\beta$ então $\alpha\leftrightarrow\beta$. Tal resultado pertence ao que chamamos no capítulo 2 de metalógica, pois estabelece uma importante relação entre fórmulas da linguagem lógica e o conceito metalógico (isto é, pertencente à metalinguagem) de equivalência semântica. Obviamente que não basta afirmarmos tal relação; é necessário que demonstremos que efetivamente $\alpha\leftrightarrow\beta$ sss $\alpha\triangleq\beta$.

Conforme adiantado no início desta seção, juntamente com as definições apresentadas no capítulo anterior, as definições apresentadas aqui são a primeira instância do que chamamos no capítulo 2 de um *sistema lógico*: enquanto a definição 1.1 introduz a linguagem proposicional $L_p$, as definições 1.5-1.7 usadas em conjunto com 1.9 e 1.10 definem a relação de inferência $\vDash$ que dirá, para todo conjunto de fórmulas $\Gamma\subseteq L_p$ e toda fórmula $\alpha\in L_p$, se $\alpha$ é ou não uma consequência lógica de $\Gamma$, isto é, se o argumento tendo como conjunto de premissas $\Gamma$ e como conclusão $\alpha$ é ou não um argumento válido. Assim temos uma primeira caracterização completa do sistema lógico semântico proposicional, ou em símbolos, o sistema $<L_p,\vDash>$.

## 4.5 Exercícios propostos

1. Explique o que é e qual o propósito da sintaxe e da semântica de uma linguagem.
2. Construa três instâncias de cada um dos esquemas de fórmula abaixo:
   a. $\alpha\rightarrow\beta\wedge\neg\alpha$
   b. $\neg(\alpha\vee\neg(\varphi\rightarrow\alpha))$
   c. $\alpha\vee(\neg\alpha\rightarrow\alpha)$
   d. $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi\wedge\alpha))\leftrightarrow\neg\alpha\vee\beta$
   e. $((\neg\neg\alpha\rightarrow\beta)\vee(\beta\rightarrow\alpha))\rightarrow\neg\beta\wedge\alpha$
3. Faça a tabela de verdade de cada uma das fórmulas abaixo e diga se se trata de contingência, tautologia ou contradição. Se for conveniente, utilize também o método da redução ao absurdo.
   a. $B\rightarrow(C\rightarrow B)$
   b. $A\leftrightarrow(B\vee C)$
   c. $A\rightarrow\neg A$
   d. $\neg(B\wedge C\rightarrow B)$
   e. $B\rightarrow B\vee C$
   f. $B\rightarrow(C\rightarrow\neg\neg B\wedge C)$
   g. $A$
   h. $(A\rightarrow B)\vee\neg(A\rightarrow B)$
   i. $A\vee B\rightarrow\neg(A\leftrightarrow\neg B)$
   j. $A\wedge B\rightarrow\neg C$
   k. $A\rightarrow\neg B$
   l. $\neg(A\rightarrow A)$
   m. $\neg(B\vee\neg B)$
   n. $\neg B\rightarrow(B\rightarrow C)$
   o. $(A\rightarrow B)\rightarrow\neg(A\wedge B)$
   p. $\neg(B\vee C)\wedge C\rightarrow\neg(B\vee C)$
   q. $A\wedge(B\vee C\rightarrow\neg A)$
   r. $(B\rightarrow D)\rightarrow((C\rightarrow D)\rightarrow(B\vee C\rightarrow D))$
   s. $(B\rightarrow(C\rightarrow D))\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(B\rightarrow D))$
4. Faça a tabela de verdade das fórmulas abaixo e diga quais fórmulas são semanticamente equivalentes entre si:
   a. $A\rightarrow B$
   b. $\neg(A\vee B)$
   c. $\neg B\rightarrow\neg A$
   d. $A$
   e. $A\rightarrow(B\rightarrow C)$
   f. $\neg A\vee B$
   g. $B\rightarrow(A\rightarrow C)$
   h. $\neg\neg A$
   i. $\neg A\wedge\neg B$

5. Seja M um modelo em que M(A)=V e M(B)=F. O que podemos concluir a respeito da satisfatibilidade de cada uma das fórmulas da questão anterior em M?
6. Seja $\alpha\equiv(A\vee\neg B)\rightarrow\neg\neg C$ e M um modelo qualquer.
   a. Supondo que M(A)=V e M(C)=F, o que se pode concluir a respeito da satisfatibilidade de $\alpha$ em M?
   b. Supondo que M(C)=V, o que se pode concluir a respeito da satisfatibilidade de $\alpha$ em M?
   c. Supondo que M(B)=V, o que se pode concluir a respeito da satisfatibilidade de $\alpha$ em M?
   d. Supondo que $M\Vdash\alpha$ e M(A)=F, o que se pode concluir a respeito de M(C)?
   e. Supondo que $M\nVdash\alpha$, o que se pode concluir a respeito de M(A), M(B) e M(C)?
7. Utilizando a definição 1.10, mostre as condições de verdade das fórmulas abaixo:
   a. $B\rightarrow B\vee C$
   b. $B\rightarrow(C\rightarrow B\wedge C)$
   c. $A\rightarrow\neg B$
   d. $(A\wedge B\rightarrow\neg C)\rightarrow\neg(A\vee B)$
   e. $\neg\neg\neg(A\rightarrow A)$
   f. $((A\rightarrow\neg B)\wedge(C\vee\neg D))\rightarrow\neg\neg C$
   g. $(B\rightarrow(C\rightarrow B))\vee\neg\neg D$
8. Seja M um modelo e as afirmações abaixo. O que se pode concluir a respeito delas supondo que $M\Vdash A\rightarrow B$? E se supormos que $M\nVdash A\rightarrow B$?
   a. $M\Vdash A\vee C\rightarrow B\vee C$
   b. $M\Vdash A\wedge C\rightarrow B\wedge C$
   c. $M\Vdash\neg A\vee B\rightarrow A\vee B$
9. Seja M um modelo tal que $M\Vdash A\leftrightarrow B$. O que podemos concluir a respeito das afirmações abaixo?
   a. $M\Vdash\neg A\wedge B$
   b. $M\Vdash A\vee\neg B$
   c. $M\Vdash A\rightarrow B$
   d. $M\Vdash A\wedge C\leftrightarrow B\wedge C$
   e. $M\Vdash A\vee C\leftrightarrow B\vee C$
10. Sejam as fórmulas abaixo. Identifique, justificando sua resposta, os casos em que $\{\alpha\}\vDash\beta$ e os casos em que $\alpha\triangleq\beta$.
    a. $\alpha\equiv A$, $\beta\equiv A$
    b. $\alpha\equiv A$, $\beta\equiv A\vee B$
    c. $\alpha\equiv(A\rightarrow B)$, $\beta\equiv\neg A\vee B$
    d. $\alpha\equiv A\rightarrow\neg B$, $\beta\equiv\neg B$
    e. $\alpha\equiv B\rightarrow B\vee C$, $\beta\equiv(B\rightarrow B\vee C)\vee(C\vee\neg C)$
    f. $\alpha\equiv A\wedge\neg A$, $\beta\equiv A\wedge B\rightarrow\neg C$
    g. $\alpha\equiv B\wedge C\rightarrow B$, $\beta\equiv(B\rightarrow D)\rightarrow((C\rightarrow D)\rightarrow(B\vee C\rightarrow D))$
    h. $\alpha\equiv\neg(B\rightarrow A)$, $\beta\equiv A\wedge(B\vee C\rightarrow\neg A)$
11. Usando agora o método da redução ao absurdo, diga quais casos da questão 10 são tais que $\{\alpha\}\vDash\beta$.
12. Diga, usando o método da tabela de verdade ou método da redução ao absurdo, quais dos conjuntos de fórmulas abaixo são satisfatíveis.

a. $\{P, \neg P\}$
b. $\{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P, \neg R\}$
c. $\{P \rightarrow Q, \neg(Q \wedge \neg R), R \rightarrow S, \neg(S \wedge P)\}$
d. $\{\neg(B \vee C) \wedge C \rightarrow \neg(B \vee C), \neg Q, R \rightarrow (S \vee R), S\}$
e. $\{P, Q \wedge \neg R, \neg Q \vee R\}$
f. $\{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P, R\}$
g. $\{P \rightarrow Q, \neg(Q \wedge \neg R), R \rightarrow S\}$

13. Seja L uma linguagem lógica e $\alpha \in L$ uma fórmula dessa linguagem. Mostre que
   a. $\alpha$ é uma tautologia sss $\neg\alpha$ é uma contradição;
   b. $\alpha$ é uma contradição sss $\neg\alpha$ é uma tautologia;
   c. $\alpha$ é uma contingência sss $\alpha$ não é nem tautologia nem contradição;
14. Prove o corolário 1.1.
15. Seja L uma linguagem lógica e $\alpha, \beta \in L$ fórmulas dessa linguagem. Mostre que $\alpha \doteq \beta$ sss $\alpha \leftrightarrow \beta$ é uma tautologia.
16. Prove o corolário 1.2.

## 4.6 Exercícios de análise lógica

1. Traduza para a linguagem proposicional os argumentos abaixo (usando um glossário com os símbolos proposicionais usados) e avalie intuitivamente sua validade. Após isso, demonstre, utilizando as definições 1.9 e 1.10, em conjunto com a definição 1.7, se tais argumentos são efetivamente válidos ou não. Utilize, se achar conveniente, o método da prova por absurdo.

a. Se fosse possível ter uma prova absoluta da existência de Deus, então seria possível sermos irresistivelmente atraídos a fazer o bem.

Se fosse possível para nós sermos irresistivelmente atraídos a fazer o bem, então nós não teríamos livre-arbítrio.

Nós temos livre-arbítrio.

$\therefore$ Não é possível ter uma prova absoluta da existência de Deus.

b. Se o racismo é realmente incorreto, então é factualmente evidente que todas as raças têm habilidades iguais ou é moralmente claro que os interesses similares de todos os seres vivos devem ser levados igualmente em consideração.

Não é factualmente evidente que todas as raças têm habilidades iguais.

Se é moralmente claro que os interesses similares de todos os seres vivos devem ser levados igualmente em consideração, então é claro que interesses similares de animais e seres humanos devem ser igualmente levados em consideração.

$\therefore$ Se o racismo é realmente incorreto, então é claro que interesses similares de animais e seres humanos devem ser igualmente levados em consideração. [Esse argumento foi dado por Peter Singer, um dos líderes do Movimento de Libertação dos Animais.]

c. Se não há conversa na sala de aula e todos os alunos adquiriram o livro, então é possível ter uma boa aula de lógica.

Há conversa na sala de aula.

Todos os alunos adquiriram o livro.

$\therefore$ Não é possível ter uma boa aula de lógica.

d. O universo é ordenado [tal qual um relógio que obedece a leis complexas].

A maioria das coisas ordenadas que nós temos examinado tem por trás de sua criação seres inteligentes.

Nós examinamos uma quantidade grande e variada de coisas ordenadas.

Se a maioria das coisas ordenadas que nós temos examinado tem por trás de sua criação seres inteligentes e nós examinamos uma quantidade grande e variada de coisas ordenadas, então provavelmente a maioria das coisas ordenadas tem por trás de sua criação seres inteligentes.

Se o universo é ordenado e provavelmente a maioria das coisas ordenadas tem por trás de sua criação seres inteligentes, então o universo provavelmente tem por trás de sua criação um ser inteligente.

∴ O universo provavelmente tem por trás de sua criação um ser inteligente.

e. O mal existe.

Se o mal existe, então Deus não deseja impedir o mal ou Ele não pode impedir o mal.

Se Deus não deseja impedir o mal, então Ele não é onibenevolente.

Se Deus não pode impedir o mal, então Ele não é onipotente.

Se Deus existe, então Ele é onipotente e onibenevolente.

∴ Deus não existe.

f. Sistemas fechados tendem em direção a maiores entropias [uma distribuição mais uniforme de energia; essa é a segunda lei da termodinâmica].

Se sistemas fechados tendem em direção a maiores entropias e o universo não teve um início no tempo, então o universo teria atingido um estado de quase completa entropia (por exemplo, tudo teria a mesma temperatura).

O universo não atingiu um estado de quase completa entropia.

∴ O universo teve um início no tempo. [Esse argumento é de William Craig e James Moreland.]

g. O universo teve um início no tempo.

Se o universo teve um início no tempo, então houve uma causa para o início do universo.

Se houve uma causa para o início do universo, então um ser pessoal é a causa do universo.

∴ Um ser pessoal é a causa do universo. [Esse argumento é de William Craig e James Moreland.]

h. Se a crença na existência de Deus tem base científica, então ela é racional.

Nenhum experimento científico concebível pode decidir se Deus existe ou não.

Se a crença na existência de Deus tem base científica, então há algum experimento científico concebível capaz de decidir se Deus existe ou não.

∴ A crença na existência de Deus não é uma crença racional.

i. Se a virtude pode ser ensinada, então existem professores profissionais de virtude ou existem professores amadores de virtude.

Se existem professores profissionais de virtude, então os sofistas podem ensinar seus estudantes a serem virtuosos.

Se existem professores amadores de virtude, então os mais nobres dos atenienses podem ensinar os seus filhos a serem virtuosos.

Os sofistas não podem ensinar seus estudantes a serem virtuosos e os mais nobres dos atenienses (tal qual o grande líder Péricles) não podem ensinar os seus filhos a serem virtuosos.

∴ A virtude não pode ser ensinada. [Esse argumento aparece no *Mênon* de Platão.]

j. Se nós temos um conceito simples para Deus, então é porque nós temos experiência direta de Deus e não podemos racionalmente duvidar de sua existência.

Nós não temos experiência direta da existência de Deus.

∴ Nós não temos um conceito simples para Deus.

k. É igualmente errado para um sádico cegar permanentemente uma pessoa seja depois ou antes do seu nascimento [através, por exemplo, de uma injeção que o cegaria mas não machucaria sua mãe].

Se é igualmente errado para um sádico cegar permanentemente uma pessoa seja depois ou antes do seu nascimento, então é falso que os direitos morais das pessoas começam apenas após o nascimento.

Se infanticídio é errado e aborto não é errado, então os direitos morais de uma pessoa começam apenas após o nascimento.

Infanticídio é errado.

∴ Aborto é errado.

l. Se a predestinação é verdade, então Deus é a causa de sermos pecadores.

Se Deus é a causa de sermos pecadores, mas ainda assim condena os pecadores ao castigo eterno, então Deus não é bom.

∴ Se Deus é bom, então ou a predestinação não é verdade ou Deus não condena os pecadores ao castigo eterno.

m. Se uma determinada entidade é empiricamente percebida por todos, ou quase todos os membros de uma comunidade, então essa entidade existe.

Na história da humanidade, apenas um número extremamente reduzido de pessoas proclamou ter percebido empiricamente a entidade a qual chamamos de Deus.

Não é verdade então que Deus tenha sido empiricamente percebido por todos, ou quase todos os membros das mais diversas comunidades existentes na história da humanidade.

∴ Deus não existe.

n. Deus é todo-poderoso.

Se Deus é todo-poderoso, então Ele poderia ter criado o mundo de qualquer maneira, lógica ou não, e o mundo tal qual ele é não teria nenhum tipo de necessidade.

Se o mundo tal qual ele é não tem nenhum tipo de necessidade, então nós não podemos conhecê-lo por mera especulação filosófica sem a ajuda da experiência.

∴ Nós não podemos conhecer o mundo tal qual ele é por mera especulação filosófica sem a ajuda da experiência. [Esse argumento é do filósofo medieval William de Ockham.]

o. Se a voz do povo é a voz de Deus, então Lampião é um herói.

Se a voz do povo é a voz de Deus, então Lampião é um assassino sanguinário.

Se Lampião é um assassino sanguinário, então ele não é um herói.

∴ Não é verdade que a voz do povo é a voz de Deus.

p. Se você tem uma crença moral e não age de acordo com ela, então você está sendo inconsistente.

Se você está sendo inconsistente, então você está agindo errado.

∴ Se você tem uma crença moral e age de acordo com ela, então você não está agindo errado.

# 5
# Método axiomático e o cálculo proposicional

## 5.1 Derivação, axiomas e inferências

Neste capítulo abordaremos a relação de inferência lógica $\models$ de uma maneira estritamente sintática. Conforme falamos no capítulo 2, tal maneira de se definir a relação de inferência lógica, que será representada aqui pelo símbolo $\vdash$, faz referência exclusivamente à forma sintática dos enunciados, sem atentar para o significado dos seus símbolos. Assim, para saber se um argumento qualquer $<\Gamma,\alpha>$ é válido, examina-se apenas a forma sintática das fórmulas que o compõem, isto é, a maneira como os diversos símbolos estão concatenados uns com os outros dentro dos enunciados. No caso de $<\Gamma,\alpha>$ ser válido, escrevemos $\Gamma\vdash\alpha$; caso contrário, escrevemos $\Gamma\nvdash\alpha$. Comumente chamamos o sistema lógico $<L,\vdash>$, em que L é uma linguagem lógica e $\vdash$ é uma relação de inferência definida sintaticamente, de um *cálculo lógico*. Como seria de se esperar, centraremos nossos esforços em apresentar tal definição para a lógica clássica proposicional. Juntamente com a linguagem proposicional introduzida no capítulo 3, essa definição comporá o que chamamos de cálculo clássico proposicional, ou simplesmente *cálculo proposicional*. Antes, porém, de introduzirmos o cálculo proposicional, iremos, nesta seção e na próxima, tentar dar uma caracterização geral, independente de qualquer lógica específica, de o que é um cálculo lógico. De posse de tal caracterização, introduziremos então, na seção 5.3, a relação de inferência sintática para a lógica proposicional.

Para começar, tentemos descobrir como uma apresentação puramente sintática da relação de inferência poderia ser feita. Para isso, considere o seguinte argumento:

(1) Se o universo teve um início, então ele teve uma causa.
Se o universo teve uma causa, então Deus é a causa do universo.
Não é verdade que o universo não teve um início.
Portanto, Deus é a causa do universo.

cuja tradução para a linguagem proposicional seria como segue:

(1') $A \rightarrow B$
$B \rightarrow C$
$\neg\neg A$
$\therefore$ C

em que o significado de A, B e C é conforme descrito abaixo:

A: O universo teve um início.

B: O universo teve uma causa.

C: Deus é a causa do universo.

Assim, teríamos o conjunto $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, \neg\neg A\}$ como sendo as premissas, e C como sendo a conclusão de (1').

Podemos ver, sem muita dificuldade, que esse argumento é válido. Agora, a despeito dessa avaliação intuitiva, como podemos justificar a validade de (1')? Sabemos como fazer isso semanticamente, utilizando a relação de consequência lógica $\vDash$ descrita na definição 1.7. Nosso problema aqui é, no entanto, dar tal justificativa de uma forma puramente sintática, olhando exclusivamente para a forma dos enunciados, sem se referir a possíveis interpretações semânticas dos símbolos da linguagem. Isso poderia ser feito como segue. Primeiramente nós diríamos que é autoevidente que se nós temos $\neg\neg A$, então nós temos também A ou, em outras palavras, que $\neg\neg A \rightarrow A$ é algo como uma *lei lógica*, um princípio válido universalmente. Mas se isso é o caso, como a nossa terceira premissa é exatamente $\neg\neg A$, então aplicando esse princípio nós temos também A. Agora, dado que temos A e que a primeira premissa de (1') é $A \rightarrow B$, então obviamente nós teremos também B. No entanto, como temos B e $B \rightarrow C$ (segunda premissa), então temos também C, que é exatamente a conclusão do nosso argumento.

Refletindo um pouco sobre essa justificativa informal da validade de (1'), trivialmente o que fizemos foi simplesmente fornecer uma sequência de fórmulas cujo último membro é exatamente a conclusão do argumento que estamos tentando justificar. Isso pode ser visto se reescrevermos todas as fórmulas que mencionamos na nossa justificativa na ordem em que elas apareceram:

(2) 1. $\neg\neg A$
2. $\neg\neg A \rightarrow A$
3. A
4. $A \rightarrow B$
5. B
6. $B \rightarrow C$
7. C

Colocado dessa forma, o que temos agora como justificativa de que (1') é válido, ou como justificativa que C é realmente uma consequência de $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, \neg\neg A\}$, é uma sequência de fórmulas tendo C como último membro. Chamemos, de agora em diante, uma sequência de fórmulas do tipo acima, que tem como objetivo justificar a validade de um argumento, de uma *derivação*, no caso de (1') uma derivação de C a partir de $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, \neg\neg A\}$. Assim temos que um argumento é válido se formos capazes de exibir uma derivação que, como no exemplo acima, consiga "chegar" à conclusão a partir das premissas.

Indo um pouco mais além nessa reflexão e tentando melhor compreender essa recém introduzida noção de derivação, tentemos elaborar um pouco sobre que características uma sequência de fórmulas deve ter para poder ser chamada de uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$, em que $\alpha$ é uma fórmula e $\Gamma$ é um conjunto de fórmulas. Em primeiro lugar, vimos que uma primeira condição para que uma tal sequência seja uma derivação é que seu último membro seja igual a $\alpha$. Apesar de necessária, tal condição claramente não é suficiente. A razão disso é que na justificativa informal de (1') que demos acima, a presença de cada um dos membros na sequência parece de alguma forma estar justificada. Isso na verdade é óbvio, pois se iremos usar uma sequência de fórmulas para justificar que $\alpha$ pode ser deduzido a partir de $\Gamma$, então cada uma das fórmulas pertencentes à sequência deve ela própria estar de alguma forma justificada. A nossa tarefa agora então é descobrir o que seria suficiente para justificar a presença de uma determinada fórmula em uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$.

A fim de tornarmos nossa exposição mais concisa, referir-nos-emos, a partir de agora, à primeira fórmula da sequência (2) como a fórmula (2.1), a segunda como (2.2), a terceira como (2.3), e assim por diante. Dito isso, claramente as fórmulas (2.1), (2.4) e (2.6) podem fazer parte da derivação, pois elas mesmas são partes do conjunto de premissas, sendo essa a justificativa de estarem tais fórmulas presentes na sequência. Se estamos tentando mostrar que $\alpha$ segue de $\Gamma$, nada mais natural do que podermos utilizar os membros de $\Gamma$ para isso. Assim, temos uma primeira justificativa possível para a presença de uma fórmula $\beta$ em uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$: que $\beta$ pertença à $\Gamma$.

Já com (2.2), a situação é diferente: $\neg\neg A \rightarrow A$ não é uma das premissas. Note, no entanto, que na exposição informal que demos acima, além de fazermos uso da expressão "como é óbvio que", dissemos que tal fórmula seria algo como um princípio ou *lei lógica*, sugerindo que sua veracidade seria algo além de qualquer dúvida. Se isso é o caso, e parece bastante razoável que seja, tal fórmula então poderia aparecer na justificativa de qualquer argumento. Diremos então que outra possível justificativa para a presença de uma fórmula $\beta$ em uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$ é que $\beta$ seja uma dessas leis lógicas, às quais daremos o nome de *axiomas lógicos*[31].

31. Mais na frente veremos que o que chamaremos efetivamente de axiomas lógicos corresponde apenas a uma pequena parte do conjunto de todas as leis lógicas.

Esses dois tipos de justificativas que encontramos até agora claramente não são suficientes para efetivamente chegarmos à $\alpha$ a partir de $\Gamma$. Isso porque, a menos que $\alpha$ fosse um dos membros de $\Gamma$ ou um axioma lógico, a mera inclusão de membros de $\Gamma$ ou axiomas lógicos nunca poderia nos levar à $\alpha$. Para isso é necessário que possamos incluir *novas* fórmulas a partir de outros membros da sequência. Isso é feito através do uso do que chamamos de *regras de inferências*, que é o que justifica a presença de (2.3), (2.5) e (2.7) na nossa derivação.

Tome (2.3) como exemplo. Na nossa explanação informal, a presença de A é justificada através da menção de duas fórmulas anteriormente introduzidas: $\neg\neg A$ e $\neg\neg A \rightarrow A$. Apesar de não ter sido mencionado, claramente essa justificativa apela para a existência de um princípio lógico que diz que, para quaisquer fórmulas $\alpha$ e $\beta$, pode-se inferir $\beta$ a partir de $\alpha$ e $\alpha \rightarrow \beta$. Essa é a famosa regra *modus ponens* (ou simplesmente MP), que obviamente é um exemplo do que estamos chamando aqui de regra de inferência. Tradicionalmente representamos MP através do esquema abaixo:

(3) $\dfrac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$

em que $\alpha$ e $\beta$ são duas fórmulas quaisquer. A linha acima de $\beta$ indica que podemos inferir $\beta$ a partir de $\alpha$ e $\alpha \rightarrow \beta$. Se substituirmos $\alpha$ por $\neg\neg A$ e $\beta$ por A, obtemos a regra específica utilizada na inferência de (2.3):

(4) $\dfrac{\neg\neg A, \neg\neg A \rightarrow A}{A}$

Sendo (4) uma *instância* de MP, dizemos que (4) é uma *inferência admissível*, o que significa que podemos efetivamente inferir A a partir de $\neg\neg A$ e $\neg\neg A \rightarrow A$. Mas como essas duas últimas fórmulas, ou seja, os antecedentes da inferência admissível, são exatamente (2.1) e (2.2), podemos então acrescentar seu consequente, isto é, A (2.3), na derivação (2). Assim, dizemos que (2.3) é o resultado do uso da inferência admissível (4) em conexão com (2.1) e (2.2), o que justifica então sua presença em (2). Como (4) é uma instância de MP, dizemos que (2.3) é o resultado da *aplicação* de MP a (2.1) e (2.2).

Algo similar acontece com (2.5) e (2.7). As inferências abaixo, ambas instâncias de MP e portanto inferências admissíveis, justificam, respectivamente, a presença das fórmulas (2.5) e (2.7) na derivação (2):

(5) $\dfrac{A, A \rightarrow B}{B}$

(6) $\dfrac{B, B \rightarrow C}{C}$

Enquanto (5) torna explícito o fato de (2.5) ser o resultado da aplicação de MP à (2.3) e (2.4), (6) deixa claro que (2.7) é o resultado da aplicação de MP à (2.5) e (2.6).

Assim diremos que a terceira maneira através da qual podemos justificar a presença de uma fórmula em uma derivação é que ela tenha sido obtida através de uma regra de inferência aplicada a um ou mais membros anteriores da derivação; ou equivalentemente, que tal fórmula seja o consequente de uma inferência admissível cujos antecedentes sejam membros anteriores na derivação. Podemos então reescrever a derivação (2) explicitando a justificativa de cada um dos seus membros como segue:

| | | |
|---|---|---|
| (2') | 1. $\neg\neg A$ | Premissa |
| | 2. $\neg\neg A \rightarrow A$ | Axioma |
| | 3. $A$ | MP 1,2 |
| | 4. $A \rightarrow B$ | Premissa |
| | 5. $B$ | MP 3,4 |
| | 6. $B \rightarrow C$ | Premissa |
| | 7. $C$ | MP 5,6 |

Aqui a expressão "MP 1,2" ao lado da terceira fórmula da sequência, por exemplo, indica que tal fórmula foi obtida através da aplicação de MP à primeira e segunda fórmulas da derivação; ou, em outras palavras, que existe uma inferência admissível instância de MP cujos antecedentes são as primeira e segunda fórmulas, e cujo consequente é exatamente essa terceira fórmula da sequência.

Resumindo então, o nosso objetivo, vale a pena lembrar, é construir $\vdash$ de tal forma que, para um conjunto qualquer de fórmulas $\Gamma$ e uma fórmula qualquer $\alpha$, possamos responder a pergunta: $\alpha$ é ou não deduzida a partir de $\Gamma$? (Em caso positivo nós escrevemos $\Gamma \vdash \alpha$, em caso negativo $\Gamma \nvdash \alpha$.) A resposta que encontramos foi que para que $\alpha$ seja deduzido a partir de $\Gamma$, é necessário que haja uma sequência de fórmulas, à qual demos o nome de *derivação*, cujo último membro seja $\alpha$, e tal que cada um de seus membros, incluindo esse último membro, seja justificado em uma das três maneiras seguintes: ou ele é um membro do *conjunto de premissas* $\Gamma$, ou é membro de um conjunto de fórmulas chamadas de *axiomas lógicos*, ou possa ser obtido a partir de outros membros da sequência anteriores a ele através do uso de uma *inferência admissível*, que por sua vez deve ser uma instância do que estamos chamando de regra de inferência. Vemos então que, para construirmos um cálculo lógico nos moldes aqui delineados, temos que considerar, além de uma linguagem lógica, também um conjunto de axiomas e um conjunto de inferências admissíveis. A uma estrutura deste tipo nós damos o nome de *cálculo axiomático*.

## 5.2 Cálculo axiomático

Vejamos agora, nesta seção, como os conceitos introduzidos na seção anterior podem ser definidos de forma precisa. Conforme já mencionamos, faremos isso de forma geral, sem instanciarmos tais conceitos a nenhum sistema lógico específico. Em outras palavras, definiremos os conceitos de inferência, derivação e relação de dedução, por exemplo, de tal forma que eles possam ser aplicados a qualquer sistema lógico; na seção 5.3, quando definirmos o cálculo proposicional, veremos em detalhes como se dá tal aplicação. Nesta ocasião teremos oportunidade de ilustrar e melhor clarificar várias das definições apresentadas nesta seção.

O método de apresentar um cálculo lógico enfatizando o uso de axiomas é conhecido como *método axiomático*[32]. Como vimos, no entanto, além dos axiomas é imprescindível a existência de uma maneira de inferir novas fórmulas a partir de fórmulas já conhecidas. De uma forma geral, chamaremos tal procedimento simplesmente de uma *inferência*:

**DEFINIÇÃO 1.11** Seja L uma linguagem lógica. Uma *inferência* em L é um par $<A,\beta>$ em que $A\subseteq L$ é um conjunto de fórmulas e $\beta\in L$ é uma fórmula. Representaremos alternativamente a inferência $<\{\alpha_1,...,\alpha_n\},\beta>$ como $\alpha_1,...,\alpha_n \,/\, \beta$ ou $\dfrac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\beta}$.

Trivialmente, o que a definição 1.11 faz é simplesmente apresentar de uma forma mais precisa a noção de inferência introduzida na seção anterior. De posse dessa noção, e chamando um determinado conjunto de inferências de *inferências admissíveis* e um conjunto específico de fórmulas de *axiomas*, podemos definir formalmente a noção de *cálculo axiomático* como segue:

**DEFINIÇÃO 1.12** Um *cálculo axiomático* C é uma tripla $<L,\Sigma,\Lambda>$ em que L é uma linguagem lógica, $\Sigma$ é um conjunto de inferências em L chamadas de *inferências admissíveis* de C e $\Lambda\subseteq L$ é um conjunto de fórmulas chamadas de *axiomas* de C.

De posse desse conceito, podemos definir formalmente o que chamamos na seção passada de *derivação*, com o diferencial de que aqui falaremos sempre de uma derivação de uma fórmula a partir de um conjunto de fórmulas *em* um cálculo axiomático específico.

---

**32.** Essa expressão, que tem sua origem na maneira como Euclides sintetizou o conhecimento geométrico de sua época em seu livro *Elementos*, geralmente se refere também a uma maneira específica de organizar o conhecimento que, em um sentido muito forte, encontra sua forma mais bem acabada nas apresentações axiomáticas da lógica.

**DEFINIÇÃO 1.13** Seja $C=<L,\Sigma,\Lambda>$ um cálculo axiomático, $\Gamma\subseteq L$ um conjunto de fórmulas, $\alpha\in L$ uma fórmula e $\Omega=<\beta_1,...,\beta_n>$, $\beta_i\in L$ (i=1,...,n), uma sequência de fórmulas. Dizemos que $\Omega$ é uma *derivação de* $\alpha$ *a partir de* $\Gamma$ no cálculo C se e somente se as duas condições abaixo são satisfeitas

(i) $\beta_n\equiv\alpha$;

(ii) Para i=1,...,n, uma das condições abaixo é satisfeita:

a) $\beta_i\in\Gamma$;

b) $\beta_i\in\Lambda$;

c) Existe uma inferência admissível $\beta j_1,...,\beta j_n$ / $\beta_i \in\Sigma$ tal que $j_1, ..., j_n<i$.

Primeiro de tudo, temos aqui explicitamente todos os elementos necessários para dizer se $\Omega$ é uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$, a saber, um *cálculo axiomático* C composto por uma *linguagem* L, um conjunto de *inferências admissíveis* $\Sigma$ e um conjunto de *axiomas* $\Lambda$. Segundo, para a sequência de fórmulas $\Omega$ ser efetivamente uma *derivação* de $\alpha$ a partir de $\Gamma$ no cálculo C, duas condições têm de ser satisfeitas. Primeiro, (i) o último membro de $\Omega$, que na definição acima chamamos de $\beta_n$, tem de ser sintaticamente igual à $\alpha$ (em símbolos: $\beta_n\equiv\alpha$). Isso significa que $\beta_n$ tem de ser exatamente a mesma concatenação de símbolos que $\alpha$. Segundo, (ii) para cada um dos membros $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ de $\Omega$, ou, usando a terminologia da própria definição, para *i* variando de 1 até *n*, *no mínimo uma* das três condições seguintes tem de ser satisfeita: ou (a) o membro de $\Omega$ em questão é uma das premissas (em símbolos: $\beta_i\in\Gamma$), ou (b) ele é um axioma (em símbolos: $\beta_i\in\Lambda$); ou (c) ele é obtido a partir de um ou mais membros anteriores de $\Omega$ através de uma inferência admissível (em outras palavras, existe uma inferência admissível $\beta j_1,...,\beta j_n$ / $\beta_i\in\Sigma$ tal que $j_1, ..., j_n<i$).

Vale a pena lembrar que, de acordo com o que concluímos na seção passada, uma derivação é exatamente o que justifica a validade de um argumento. Em outras palavras, um argumento $<\Gamma,\alpha>$, em que $\Gamma$ é o conjunto de premissas e $\alpha$ é a conclusão, é um argumento válido se e somente se existir ao menos uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$. Isso é formalizado na definição abaixo:

**DEFINIÇÃO 1.14** Seja $C=<L,\Sigma,\Lambda>$ um cálculo axiomático, $\Gamma\subseteq L$ um conjunto de fórmulas e $\alpha\in L$ uma fórmula. Dizemos que $\alpha$ *é deduzida a partir de* $\Gamma$ no cálculo C (em símbolos: $\Gamma\vdash\alpha$) se e somente se existir uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$ no cálculo C.

Veja que, em consonância com toda a exposição feita até aqui, e também com a definição semântica da relação de inferência dada no capítulo anterior, a definição 1.14 acima estabelece uma relação entre um conjunto de fórmulas $\Gamma$ e uma fórmula $\alpha$ específica: se $\Gamma\vdash\alpha$, então podemos dizer que, de acordo com o cálculo axiomático em questão, o argumento $<\Gamma,\alpha>$ é um argumento válido. No entanto, pode ser que queiramos dizer não que uma única fórmula é deduzida a partir de $\Gamma$, mas sim que um conjunto de fórmulas $\Delta$ é deduzido a partir de $\Gamma$, no sentido de todos os membros de $\Delta$ serem deduzidos a partir de $\Gamma$. Tal extensão da noção de dedução é feita logo a seguir:

**DEFINIÇÃO 1.15** Seja $C=<L,\Sigma,\Lambda>$ um cálculo axiomático e $\Delta,\Gamma\subseteq L$ dois conjuntos de fórmulas. Dizemos que $\Delta$ *é deduzido a partir de* $\Gamma$ no cálculo C (em símbolos: $\Gamma\vdash\Delta$) se e somente se, para todo $\alpha\in\Delta$, $\Gamma\vdash\alpha$[33].

Um ponto digno de nota é que, de acordo com a definição 1.15, para todo $\Gamma\subseteq L$, temos que $\Gamma\vdash\varnothing$. Isso pode ser visto mais claramente quando reescrevemos 1.15 como segue: Dizemos que $\Delta$ é deduzido a partir de $\Gamma$ no cálculo C (em símbolos: $\Gamma\vdash\Delta$) se e somente se não houver nenhum $\alpha\in\Delta$ tal que $\Gamma\nvdash\alpha$. Como efetivamente não há nenhum $\alpha\in\varnothing$ tal que $\Gamma\nvdash\alpha$, devido ao fato óbvio de que o conjunto vazio não possui elemento algum, temos então que $\Gamma\vdash\varnothing$. Para finalizar esta seção, segue abaixo a definição da noção de *teorema lógico*:

**DEFINIÇÃO 1.16** Seja $C=<L,\Sigma,\Lambda>$ um cálculo axiomático e $\alpha\in L$ uma fórmula. Dizemos que $\alpha$ é um *teorema lógico* de C se e somente se $\varnothing\vdash\alpha$ (no cálculo C). Comumente representaremos $\varnothing\vdash\alpha$ como $\vdash\alpha$[34].

Como pode ser facilmente constatado, um teorema lógico é apenas um caso particular da situação geral descrita na definição 1.14, em que uma fórmula é deduzida a partir de um conjunto de premissas, sendo a particularidade em questão que tal conjunto é o conjunto vazio. Nesse caso, trivialmente a derivação que justifica tal dedução não se utiliza de nenhuma premissa, mas apenas dos axiomas e inferências admissíveis do cálculo em questão. Veja que, de acordo com essa definição, todos os axiomas de C são automaticamente também teoremas lógicos de C, pois eles claramente são deduzidos a partir do conjunto vazio: para qualquer $\alpha\in\Lambda$, existe uma derivação de $\alpha$ a partir de $\varnothing$, a saber, uma sequência unitária de fórmulas composta pelo próprio $\alpha$; assim temos que $\varnothing\vdash\alpha$.

---

**33.** Apesar de estarmos usando o termo "dedução" e o símbolo $\vdash$ nas duas definições 1.14 e 1.15, tais definições tratam, na verdade, de dois conceitos diferentes (porém, é claro, intimamente relacionados entre si). Isso fica patente quando observamos o fato óbvio de que, enquanto o conceito de dedução da definição 1.14 é uma relação entre conjuntos de fórmulas e fórmulas, o da definição 1.15 é uma relação entre conjuntos de fórmulas. De aqui em diante, salvo dito o contrário, quando usarmos o termo "dedução", estaremos nos referindo à noção apresentada na definição 1.14.

**34.** Apesar de existir um segundo uso para a palavra "teorema" (que já foi antecipado em capítulos anteriores e será explicado em detalhes no próximo capítulo), quando o contexto não der margem para ambiguidades poderemos nos referir a um teorema lógico simplesmente através da palavra "teorema".

## 5.3 Cálculo proposicional

Nesta seção instanciaremos a noção de cálculo axiomático introduzida na seção anterior definindo o que temos chamado até agora de cálculo proposicional, isto é, a relação de inferência da lógica proposicional vista de uma perspectiva estritamente sintática. Paralelamente a isso, elucidaremos alguns aspectos importantes do que estamos chamando aqui de método axiomático.

Comecemos com a definição dos axiomas do cálculo proposicional. Considere primeiramente a relação

(7) $\{A \wedge B \to C, \neg(A \wedge B) \to C\} \vdash C$

e uma das possíveis derivações capazes de justificá-la:

| | | |
|---|---|---|
| (8) | 1. $A \wedge B \to C$ | Premissa |
| | 2. $(A \wedge B \to C) \to ((\neg(A \wedge B) \to C) \to ((A \wedge B) \vee \neg(A \wedge B) \to C))$ | Axioma |
| | 3. $(\neg(A \wedge B) \to C) \to ((A \wedge B) \vee \neg(A \wedge B) \to C)$ | MP 1,2 |
| | 4. $\neg(A \wedge B) \to C$ | Premissa |
| | 5. $(A \wedge B) \vee \neg(A \wedge B) \to C$ | MP 4,3 |
| | 6. $(A \wedge B) \vee \neg(A \wedge B)$ | Axioma |
| | 7. $C$ | MP 6,5 |

Aqui, os axiomas que aparecem em (8) são instanciações de dois princípios lógicos fundamentais. Enquanto (8.2) é a instanciação de um axioma que diz que se $\alpha \to \varphi$ e $\beta \to \varphi$, então $\alpha \vee \beta \to \varphi$, isto é,

(9) $(\alpha \to \varphi) \to ((\beta \to \varphi) \to (\alpha \vee \beta \to \varphi))$

(8.6) instancia o que chamamos no capítulo 1 de *princípio do terceiro excluído*:

(10) $\alpha \vee \neg\alpha$.

Mas veja que

(8.6) $(A \wedge B) \vee \neg(A \wedge B)$

é bastante diferente de

(10') $A \vee \neg A$,

que seria a fórmula que mais imediatamente pensaríamos como representando o princípio do terceiro excluído. No entanto, e apesar disso, (8.6) e (10') possuem algo em comum: sua forma lógica, que é exatamente o que é representado em (10). O mesmo vale, podemos seguramente afirmar, para as fórmulas $(A \vee B) \vee \neg(A \vee B)$, $(B \to A) \vee \neg(B \to A)$ e $(\neg\neg B \to B) \vee \neg(\neg\neg B \to B)$. A mesma coisa pode ser dita sobre (8.2) e (9). (9) e (10) são o que chamamos no capítulo 4 de *esquemas de fórmulas*, sendo (8.2) e (8.6) *instâncias* de (9) e (10), respectivamente.

Esse ponto é importante, pois queremos incluir no nosso conjunto de axiomas não apenas uma ou duas instâncias de (9) e (10), mas todas as instâncias de tais princípios lógicos. Mas claramente há um número *infinito* de fórmulas que compartilham, por exemplo, a forma lógica exibida em (10). Assim, definiremos o componente $\Lambda$ do cálculo proposicional, isto é, o conjunto de axiomas a ser usado nas nossas derivações, apelando para a semelhança em termos de forma lógica que certos axiomas têm. Em outras palavras, ao invés de listarmos todos os axiomas de um cálculo, listaremos o que chamamos de *esquemas de axiomas*[35].

**DEFINIÇÃO 1.17** Seja L uma linguagem lógica cujo alfabeto $A_L$ seja tal que $\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow\}\subseteq A_L$[36] e $\alpha,\beta,\varphi\in L$ fórmulas quaisquer dessa linguagem. Nomeamos as fórmulas abaixo como segue:

P1. $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$

P2. $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))$

P3. $\alpha\wedge\beta\rightarrow\alpha$

P4. $\alpha\wedge\beta\rightarrow\beta$

P5. $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha\wedge\beta)$

P6. $\alpha\rightarrow\alpha\vee\beta$

P7. $\beta\rightarrow\alpha\vee\beta$

P8. $(\alpha\rightarrow\varphi)\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\vee\beta\rightarrow\varphi))$

P9. $(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\neg\alpha)$

P10. $\neg\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$

P11. $\alpha\vee\neg\alpha$

Chamamos a forma esquemática de cada uma dessas fórmulas pelo mesmo nome.

Nosso objetivo em definir tal lista de esquemas de fórmulas e estipular a cada um deles uma denominação especial é obviamente usar as suas instâncias como axiomas na

---

35. Outro detalhe importante é que, conforme veremos abaixo, além de tornar possível a referência a um número infinito de axiomas, o uso de esquemas de axiomas também permite que definamos os axiomas para uma linguagem arbitrária qualquer. Isso permitirá que usemos, no capítulo 11, as mesmas definições apresentadas aqui na construção do cálculo de predicados, cálculo este definido a partir de outra linguagem: a linguagem de predicados de primeira ordem.

36. Aqui estamos supondo que os conectivos lógicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$ são usados na definição de L em consonância com a maneira como os mesmos são usados na definição 1.1. Tal pressuposição se aplica igualmente à definição 1.19 em relação ao conectivo $\rightarrow$ e à definição 2.12 no capítulo 7.

construção de nossos cálculos axiomáticos. Tendo em vista tal uso, definimos abaixo a noção de *conjunto de axiomas*:

**DEFINIÇÃO 1.18** Seja L uma linguagem lógica e $PI_1$, ..., $PI_n$ esquemas de fórmulas. Dizemos que $\Lambda_{PI1,..., PIn}$ é o *conjunto de axiomas* formado por todas, e apenas todas as fórmulas de L satisfazendo os esquemas de fórmulas $PI_1$,..., $PI_n$; ou equivalentemente, que $\Lambda_{PI1,..., PIn}$ é o conjunto de axiomas composto por todas, e apenas todas as fórmulas $PI_1$,..., $PI_n \in L$. Chamamos nesse caso os esquemas de fórmulas $PI_1$, ..., $PI_n$ de *esquemas de axiomas* e as fórmulas $PI_1$, ..., $PI_n$ de *axiomas* em L[37].

Fixando $L_p$ como a linguagem de referência, $\Lambda_{P1\text{-}P11}$ é o conjunto de axiomas composto por todas, e apenas todas as fórmulas P1-P11 pertencentes a $L_p$. Em outras palavras, $\Lambda_{P1\text{-}P11}$ é o conjunto formado por todas as fórmulas de $L_p$ satisfazendo um dos esquemas de fórmula P1, P2, ... ou P11. Similarmente, $\Lambda_{P3\text{-}P5}$ é o conjunto formado por todas, e apenas todas as fórmulas de $L_p$ satisfazendo um dos esquemas P3, P4 ou P5, $\Lambda_{P1,P2,P6\text{-}P8}$ é o conjunto formado por todas, e apenas todas as fórmulas de $L_p$ satisfazendo um dos esquemas P1, P2, P6, P7 ou P8, e assim por diante.

Como o uso que faremos das fórmulas e esquemas de fórmulas da definição 1.17 se dará sempre no contexto de um conjunto de axiomas Λ especifico, referir-nos-emos a tais fórmulas e esquemas de fórmulas daqui em diante simplesmente como *axiomas* e *esquemas de axiomas*, respectivamente. Também abusaremos, com certa frequência, desses conceitos e usaremos de forma indiscriminada o termo "axioma" tanto para designar axiomas como para designar esquemas de axiomas. Nos capítulos seguintes teremos oportunidade de comentar a respeito de cada um dos axiomas da definição 1.17, enfatizando a função que cada um deles pode desempenhar dentro de uma derivação. Por enquanto, neste capítulo, nos limitaremos a explicar a estrutura das definições, bem como ilustrar, de uma forma geral, o uso que se faz dos axiomas e regras de inferência na prova de deduções.

Conforme adiantado, algo de essencial na definição 1.17 é o fato de ela definir, na verdade, um número infinito de axiomas. Para ver isso mais claramente, considere novamente L como sendo a linguagem proposicional $L_p$. De acordo com a definição 1.7, dadas três fórmulas quaisquer de $L_p$, como, por exemplo, B, C e A, temos que a fórmula abaixo é um axioma P8 em $L_p$:

37. De um ponto de vista rigoroso, na definição de um conjunto de axiomas Λ específico menção deve ser feita à linguagem L, pois dependendo de que linguagem estamos falando nós teremos instâncias diferentes de $PI_1$, ..., $PI_n$. No entanto, como o uso que faremos de um conjunto Λ se dará sempre dentro do contexto de um cálculo axiomático C=<L,Σ,Λ> específico, a linguagem L usada na definição de Λ estará sempre inequivocamente subentendida.

(11) $(B\to A)\to((C\to A)\to(B\vee C\to A))$

Similarmente, se tomarmos duas outras triplas de fórmulas, como, por exemplo, A, A e $\neg A$, ou $A\vee B$, $\neg(A\vee B)$ e C, teremos dois outros axiomas P8 em $L_P$:

(12) $(A\to\neg A)\to((A\to\neg A)\to(A\vee A\to\neg A))$

(13) $(A\wedge B\to C)\to((\neg(A\wedge B)\to C)\to((A\wedge B)\vee\neg(A\wedge B)\to C))$

Esse processo obviamente pode ser continuado *ad infinitum*, o que indica a existência, de na verdade, um número infinito de axiomas P8 em $L_P$.

Neste ponto não é em absoluto difícil de ver que (11), (12) e (13) possuem a mesma *forma lógica*, forma esta representada pelo esquema de axiomas P8, sendo obviamente isso o que nos permite dizer que tais fórmulas são axiomas P8 em $L_P$. Assim também dizemos que (11), (12) e (13) *satisfazem* ou são *instâncias* do esquema de axiomas P8. Para ver isso, basta considerar que (11) pode ser obtido a partir de P8 se substituirmos $\alpha$ por B, $\beta$ por C e $\varphi$ por A, (12) se substituirmos $\alpha$ por A, $\beta$ por A e $\varphi$ por $\neg A$, e (13), que é exatamente a fórmula (8.2), se substituirmos $\alpha$ por $A\wedge B$, $\beta$ por $\neg(A\wedge B)$ e $\varphi$ por C. Uma lição que podemos tirar disso é que, dado o esquema de axioma P8, por exemplo, se substituirmos $\alpha$, $\beta$ e $\varphi$ por quaisquer fórmulas de $L_P$, não importa quão complexas elas sejam, obteremos como fórmula resultante um axioma P8 em $L_P$[38].

Seguindo a mesma ideia, definimos abaixo o esquema de inferência a ser usado na composição do cálculo proposicional, seguido da definição da noção de *esquema de inferência admissível*:

**DEFINIÇÃO 1.19** Seja L uma linguagem lógica cujo alfabeto $A_L$ seja tal que $\{\to\}\subseteq A_L$ e $\alpha,\beta\in L$ fórmulas quaisquer dessa linguagem. Nomeamos a inferência em L abaixo como segue:

$$\text{MP:}\frac{\alpha,\alpha\to\beta}{\beta}$$

Chamamos a forma esquemática dessa inferência pelo mesmo nome.

38. A única restrição que deve ser obedecida nessa substituição é que ela seja uma *substituição consistente*, isto é, que, por exemplo, ao substituirmos $\alpha$ por $(A\wedge B)$, devemos fazer tal substituição em todas as ocorrências de $\alpha$ que aparecem em P8.

**DEFINIÇÃO 1.20** Seja L uma linguagem lógica e $I_1$, ..., $I_n$ esquemas de inferência. Dizemos que $\Sigma_{I1,...,In}$ é o *conjunto de inferências admissíveis* formado por todas, e apenas todas, as inferências em L satisfazendo os esquemas de inferência $I_1$,..., $I_n$. Chamamos nesse caso os esquemas de inferência $I_1$, ..., $I_n$ de *esquemas de inferência admissíveis* e as inferências $I_1$, ..., $I_n$ de *inferências admissíveis* em L.

Um esquema de inferência admissível como o descrito na definição 1.19 é o que temos chamado até agora de *regra de inferência*, pois ele estipula de uma forma universal, isto é, para toda e qualquer fórmula, em que condições podemos inferir uma fórmula a partir de outras. Como não poderia deixar de ser, o esquema MP acima representa a regra *modus ponens* introduzida na seção 5.1. Assim, $\Sigma_{MP}$ é o conjunto de todas as inferências *modus ponens* que podem ser representadas em L, ou, usando a terminologia da definição 1.12, o conjunto de inferências admissíveis composto por todas, e apenas todas, as inferências em L satisfazendo o esquema de inferência MP.

Fixando $L_p$ como a linguagem lógica de referência, e de posse do conjunto de axiomas $\Lambda_{P1\text{-}P11}$ e do conjunto de inferências admissíveis $\Sigma_{MP}$, definimos abaixo o cálculo clássico proposicional $C_p$:

**DEFINIÇÃO 1.21** O cálculo clássico proposicional (ou simplesmente *cálculo proposicional*) $C_p$ é a tripla $<L_p,\Sigma_{MP},\Lambda_{P1\text{-}P11}>$.

Uma vez feito isso, podemos usar as definições 1.13 e 1.14 para obtermos a noção de dedução do cálculo proposicional e, consequentemente, sermos capazes de avaliar sintaticamente a validade de argumentos escritos na linguagem proposicional. Representando a relação de inferência do cálculo proposicional assim obtida por $\vdash$, além de termos com $<L_p,\vdash>$ mais uma instância do que chamamos no capítulo 2 de sistema lógico, teremos também a primeira instância de uma caracterização completa do sistema lógico ao qual demos o nome de lógica clássica proposicional: a tripla $<L_p,\vdash,\vDash>$, na qual $\vDash$ é a relação de consequência lógica da lógica proposicional conforme definido no capítulo anterior.

Vale a pena recordar que, de acordo com a definição 1.13, dado um cálculo axiomático qualquer $C=<L,\Sigma,\Lambda>$, um conjunto de fórmulas $\Gamma$, uma fórmula $\alpha$ e uma sequência de fórmulas $\Omega=<\beta_1,...,\beta_n>$, $\Omega$ é uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$ no cálculo C sss (i) $\beta_n\equiv\alpha$, ou seja, o último membro de $\Omega$ é exatamente a conclusão do argumento, e (ii) cada um dos membros $\beta_i$ de $\Omega$ é ou (a) uma das premissas ($\beta_i\in\Gamma$), ou (b) um dos axiomas ($\beta_i\in\Lambda$) ou (c) tal que existe uma inferência admissível em C capaz de "produzir" $\beta_i$ a partir de membros anteriores de $\Omega$ (isto é, existe uma inferência admissível $\beta j_1,...,\beta j_n / \beta_i \in\Sigma$ tal que $j_1$, ..., $j_n$<i). Caso $\Omega$ seja efetivamente uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$, de

acordo com a definição 1.14 então, podemos dizer que $\alpha$ é deduzido a partir de $\Gamma$ no cálculo C, ou simplesmente $\Gamma\vdash\alpha$.

Vejamos como isso funciona com o cálculo proposicional ou, em outras palavras, como as definições 1.13 e 1.14 podem ser usadas em conjunto com a definição de 1.21 na avaliação de argumentos. Considere a relação e derivação abaixo[39]:

(14) $\{A\rightarrow C, A\rightarrow\neg C\}\vdash\neg A$[40]

| | |
|---|---|
| 1. $A\rightarrow C$ | Premissa |
| 2. $(A\rightarrow C)\rightarrow((A\rightarrow\neg C)\rightarrow\neg A)$ | P9 |
| 3. $(A\rightarrow\neg C)\rightarrow\neg A$ | MP 1,2 |
| 4. $A\rightarrow\neg C$ | Premissa |
| 5. $\neg A$ | MP 4,3 |

(14) nos diz que $\{A\rightarrow C, A\rightarrow\neg C\}\vdash\neg A$ é o caso e que a sequência de fórmulas

(15) $\Omega=\{A\rightarrow C,(A\rightarrow C)\rightarrow((A\rightarrow\neg C)\rightarrow\neg A),(A\rightarrow\neg C)\rightarrow\neg A,A\rightarrow\neg C,\neg A\}$

é uma derivação de $\neg A$ a partir de $\{A\rightarrow C, A\rightarrow\neg C\}$. Para ver se isso realmente é o caso, temos que checar se $\Omega$ satisfaz as condições exigidas pela definição 1.13 conforme explicadas acima. Primeiro, como o último membro de $\Omega$ é justamente $\neg A$, temos que a condição (i) é satisfeita. Para mostrar que a segunda condição é satisfeita, temos que justificar a presença de cada um dos membros de (15). Isso é feito mostrando que, para cada um deles, uma das subcondições (a), (b) ou (c) é satisfeita. A presença dos itens (14.1) e (14.4) de $\Omega$ é justificada por eles satisfazerem a subcondição (a): eles pertencerem ao conjunto de premissas. Isso é explicitado na nossa lista acima escrevendo-se "premissa" à direita de cada uma dessas fórmulas. Já o item (14.2) tem sua presença justificada pelo fato de ele satisfazer a subcondição (b); ou seja, pertencer ao conjunto de axiomas lógicos $\Lambda_{P1\text{-}P11}$. Isso é explicitado em (14) escrevendo-se ao lado da fórmula em questão o esquema de axioma do qual ela é uma instância, no caso ora em tela, o esquema de axioma P9.

No caso de (14.3) e (14.5), suas presenças são justificadas pela subcondição (c): ambas são aplicações da regra *modus ponens*; no caso de (14.3) MP é aplicada à (14.1) e (14.2) e no caso de (14.5) MP é aplicada à (14.3) e (14.4). Isto é explicitado na justificativa que

**39.** Daqui em diante, neste capítulo, usaremos o símbolo $\vdash$ exclusivamente para representar a relação de dedução do cálculo proposicional (conforme definido pelas definições 1.13 e 1.14 em conjunto com a definição 1.21).

**40.** É interessante observar que temos aqui o uso de uma representação intralógica do princípio da *redução ao absurdo*, mencionado tanto no capítulo 1 como no capítulo 4: se uma dada fórmula $\alpha$ implica tanto $\beta$ como sua negação $\neg\beta$, então $\neg\alpha$ deve ser o caso. Tal princípio é obviamente materializado no axioma P9.

aparece à direita das respectivas fórmulas. Utilizando a terminologia da definição 1.13, nós temos como segue. Primeiro, as duas inferências abaixo são inferências admissíveis de C (isto é, inferências pertencentes ao conjunto $\Sigma_{MP}$):

(16) $A \rightarrow C, (A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow \neg C) \rightarrow \neg A)$ / $(A \rightarrow \neg C) \rightarrow \neg A$

(17) $A \rightarrow \neg C, (A \rightarrow \neg C) \rightarrow \neg A$ / $\neg A$

pois ambas são instâncias de MP: (16) é obtido substituindo $\alpha$ por $A \rightarrow C$ e $\beta$ por $(A \rightarrow \neg C) \rightarrow \neg A$, e (17) é obtido substituindo-se $\alpha$ por $A \rightarrow \neg C$ e $\beta$ por $\neg A$. Segundo, o fato de (14.3) satisfazer a subcondição (c) significa que há uma inferência admissível $\beta j_1, \beta j_2 / \beta_i \in \Sigma_{MP}$ tal que $j_1, ..., j_n < i$, que, como o leitor já deve ter intuído, é a inferência (16). Nesse caso, temos $j_1=1$, $j_2=2$ e $i=3$, sendo $\beta j_1$ obviamente (14.1), $\beta j_2$ (14.2) e $\beta_i$ o próprio (14.3). No caso de (14.5), temos também que há uma inferência admissível $\beta j_1, \beta j_2 / \beta_i \in \Sigma_{MP}$ tal que $j_1, ..., j_n < i$: a inferência (17). Aqui temos $j_1=4$, $j_2=3$ e $i=5$, sendo $\beta j_1$ obviamente (14.4), $\beta j_2$ (14.3) e $\beta_i$ o próprio (14.5)[41].

Um último detalhe que devemos mencionar é que a definição 1.14 diz que $\Gamma \vdash \alpha$ se e somente se existir *ao menos uma* derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$. Isso deixa aberta a possibilidade de haver mais de uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$. De fato, em boa parte dos casos, há efetivamente mais de uma maneira, ou seja, mais de uma derivação através da qual podemos provar que $\alpha$ é deduzido a partir de $\Gamma$. Considere, por exemplo, a seguinte relação:

(18) $\{A, \neg A\} \vdash \neg B$

Podemos provar (18) exibindo qualquer uma das duas derivações abaixo:

| | | |
|---|---|---|
| (19) | 1. $A$ | Premissa |
| | 2. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ | P1 |
| | 3. $B \rightarrow A$ | MP 1,2 |
| | 4. $\neg A$ | Premissa |
| | 5. $\neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$ | P1 |
| | 6. $B \rightarrow \neg A$ | MP 4,5 |
| | 7. $(B \rightarrow A) \rightarrow ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg B)$ | P9 |
| | 8. $(B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg B$ | MP 3,7 |
| | 9. $\neg B$ | MP 6,8 |

41. Vale a pena frisar que, apesar da elaboração explicativa da qual fizemos uso nessa aclaração de que (15) é realmente uma derivação de $\neg A$ a partir de $\{A \rightarrow C, A \rightarrow \neg C\}$, todas as justificativas por nós mencionadas já se encontram em (14), no texto à direita de cada membro da derivação.

| | |
|---|---|
| (20) 1. $\neg A$ | Premissa |
| 2. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ | P10 |
| 3. $A \rightarrow \neg B$ | MP 1,2 |
| 4. $A$ | Premissa |
| 5. $\neg B$ | MP 4,3 |

Aqui, enquanto o axioma chave de (19) é P9, em (20), o principal axioma que permite efetivamente que chequemos de $\{A, \neg A\}$ a $\neg B$ é P10. Com exceção de (19.5), no qual $\alpha$ é substituído por $\neg A$ e $\beta$ por B em P1, e de (20.2), no qual $\alpha$ é substituído por A e $\beta$ por $\neg B$ em P10, a substituição em todos os demais axiomas é trivial. Claramente (20) é uma derivação bem mais simples que (19), enquanto para chegar à $\neg B$ (19) faz uso de três axiomas: duas instâncias de P1 e uma instância de P9; (20) utiliza apenas um axioma: P10. No entanto, no que se refere à definição 1.14 (que exige a existência de uma derivação para que possamos concluir que $\{A, \neg A\} \vdash \neg B$) não importa se a sequência de fórmulas em questão é simples ou não: a única coisa que importa é que tal sequência satisfaça as condições da definição 1.13, ou seja, que seja efetivamente uma derivação da conclusão a partir das premissas. Assim, é igualmente válida a menção de (19) ou (20) na prova de (18).

## 5.4 Teoremas lógicos e regras derivadas

O leitor atento deve ter notado que o exemplar do que chamamos de axioma ou lei lógica dada na seção 5.1, a saber,

(21) $\neg\neg A \rightarrow A$

não se encontra na lista de axiomas apresentados na definição 1.17. Não só ela, mas também muitas outras fórmulas que, intuitivamente, estaríamos fortemente inclinados a classificar como leis lógicas, tais como

(22) $A \rightarrow A$

ou

(23) $\neg(A \wedge \neg A)$

não se encontram contempladas na lista de axiomas da definição 1.17[42]. Isso obviamente pode ser um problema, pois, na explicação informal que demos na seção 5.1 de como devemos avaliar sintaticamente um argumento, dissemos que poderíamos mencionar nas nossas derivações toda e qualquer instância do que estamos chamando aqui de lei

42. (22) é a chamada *lei da identidade*; (23) é a *lei da não contradição*, já mencionada no capítulo 1.

lógica; e as fórmulas listadas acima indubitavelmente fazem parte do que, de um ponto de vista intuitivo, poderíamos chamar de leis lógicas.

Apesar de esses e outros princípios lógicos não estarem explicitamente contidos em $\Lambda_{P1\text{-}P11}$, de uma forma indireta eles estão contemplados sim na nossa definição do cálculo proposicional. Ao introduzirmos a noção de regra de inferência em nossa explicação informal da noção de derivação, dissemos que um de seus propósitos é o de obter ou inferir novas fórmulas a partir de outras. Claramente MP faz isso ao inferir $\beta$ a partir de $\alpha$ e $\alpha\to\beta$. O ponto é que, muito embora o conjunto $\Lambda_{P1\text{-}P11}$ não contenha obviamente todas as leis lógicas, é possível a partir dele, juntamente com MP, obter o que poderíamos chamar de o conjunto total das leis lógicas[43]. Basta para isso que o nosso conjunto de axiomas nos permita inferir, com o auxílio das regras de inferências, as demais leis lógicas.

Considere (22), por exemplo. Se conseguirmos, utilizando as definições 1.21 e 1.13, obter uma derivação de (22) a partir de um conjunto vazio de premissas, ou seja, uma derivação que utilize apenas os axiomas e MP, então teríamos provado que (22) é um teorema lógico de $C_p$ (definição 1.16) e, consequentemente, que já está, em certo sentido, presente em $C_p$. A bem da verdade, tal derivação existe, e é exibida logo abaixo:

| | | |
|---|---|---|
| (24) | 1. $(A\to((B\to A)\to A))\to((A\to(B\to A))\to(A\to A))$ | P2 |
| | 2. $A\to((B\to A)\to A)$ | P1 |
| | 3. $(A\to(B\to A))\to(A\to A)$ | MP 2,1 |
| | 4. $A\to(B\to A)$ | P1 |
| | 5. $A\to A$ | MP 4,3 |

Aqui (24.1) é uma instância de P2, obtida através da substituição de $\alpha$ por A, $\beta$ por $B\to A$ e $\varphi$ por A; (24.2) uma instância de P1, obtida através da substituição de $\alpha$ por A e $\beta$ por $B\to A$; e (24.4) uma instância de P1, obtida substituindo-se $\alpha$ por A e $\beta$ por B. (24.3) e (24.5) são obtidos através da aplicação de MP. Como em (24) não é utilizada nenhuma premissa, mas apenas axiomas lógicos e MP, pela definição 1.13 temos que (24) é uma derivação de $A\to A$ a partir do conjunto vazio $\varnothing$. Isso é representado como segue:

(25) $\varnothing\vdash A\to A$

ou, de forma abreviada,

(26) $\vdash A\to A$

Consequentemente, de acordo com a definição 1.16, (22) é um teorema lógico de $C_p$.

**43.** Obviamente que estamos nos referindo exclusivamente às leis lógicas que podem ser formuladas na linguagem $L_p$.

O mesmo se aplica a (21) e (23). Segue abaixo a derivação que prova que (23) é um teorema lógico, ou seja, que $\vdash\neg(A\wedge\neg A)$.

(27) 1. $A\wedge\neg A\rightarrow A$ P3

2. $(A\wedge\neg A\rightarrow A)\rightarrow((A\wedge\neg A\rightarrow\neg A)\rightarrow\neg(A\wedge\neg A))$ P9

3. $(A\wedge\neg A\rightarrow\neg A)\rightarrow\neg(A\wedge\neg A)$ MP 1,2

4. $A\wedge\neg A\rightarrow\neg A$ P4

5. $\neg(A\wedge\neg A)$ MP 4,3

Aqui o ponto crucial é o uso do axioma P9: ao substituirmos em P9 $\alpha$ por $A\wedge\neg A$ e $\beta$ por A e obtermos (27.2), podemos usar MP duas vezes em conjunto com os axiomas P3 e P4 (substituindo $\alpha$ por A e $\beta$ por $\neg A$). Já a derivação que prova que (21) é um teorema lógico, ou seja, que $\vdash\neg\neg A\rightarrow A$, é um pouco mais complexa:

(28) 1. $\neg\neg A\rightarrow(\neg A\rightarrow A)$ P10

2. $(\neg\neg A\rightarrow(\neg A\rightarrow A))\rightarrow((\neg\neg A\rightarrow\neg A)\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A))$ P2

3. $(\neg\neg A\rightarrow\neg A)\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A)$ MP 1,2

4. $((\neg\neg A\rightarrow\neg A)\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A))\rightarrow(\neg A\rightarrow((\neg\neg A\rightarrow\neg A)\rightarrow$
$(\neg\neg A\rightarrow A)))$ P1

5. $\neg A\rightarrow((\neg\neg A\rightarrow\neg A)\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A))$ MP 3,4

6. $(\neg A\rightarrow((\neg\neg A\rightarrow\neg A)\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A)))\rightarrow((\neg A\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow\neg A))\rightarrow$
$(\neg A\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A)))$ P2

7. $(\neg A\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow\neg A))\rightarrow(\neg A\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A))$ MP 5,6

8. $\neg A\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow\neg A)$ P1

9. $\neg A\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A)$ MP 8,7

10. $A\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A)$ P1

11. $(A\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A))\rightarrow((\neg A\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A))\rightarrow(A\vee\neg A\rightarrow$
$(\neg\neg A\rightarrow A)))$ P8

12. $(\neg A\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A))\rightarrow(A\vee\neg A\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A))$ MP 10,11

13. $A\vee\neg A\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A)$ MP 9,12

14. $A\vee\neg A$ P11

15. $\neg\neg A\rightarrow A$ MP 14,13

Na explicação desta derivação, nos limitaremos a listar abaixo as substituições que são feitas em cada um dos axiomas mencionados em (28):

| Linha | Axioma | $\alpha$ é substituído por | $\beta$ é substituído por | $\varphi$ é substituído por |
|---|---|---|---|---|
| 1. | P10 | $\neg A$ | $A$ | - |
| 2. | P2 | $\neg\neg A$ | $\neg A$ | $A$ |
| 4. | P1 | $(\neg\neg A\to\neg A)\to(\neg\neg A\to A)$ | $\neg A$ | - |
| 6. | P2 | $\neg A$ | $\neg\neg A\to\neg A$ | $\neg\neg A\to A$ |
| 8. | P1 | $\neg A$ | $\neg\neg A$ | - |
| 10. | P1 | $A$ | $\neg\neg A$ | - |
| 11. | P8 | $A$ | $\neg A$ | $\neg\neg A\to A$ |
| 14. | P11 | $A$ | - | - |

Note que da mesma forma que provamos que (23), por exemplo, é um teorema lógico, podemos fazer o mesmo com as fórmulas abaixo,

(29) $\neg((A\to B)\wedge\neg(A\to B))$

(30) $\neg((\neg A\vee B\to C)\wedge\neg(\neg A\vee B\to C))$

que claramente possuem a mesma forma lógica que (23). Para isso, basta substituirmos na derivação (27) o símbolo A pela fórmula correspondente: substituindo A por $A\to B$ obtemos uma prova que (29) é um teorema, e substituindo A por $\neg A\vee B\to C$ obtemos uma derivação que prova que (30) é um teorema lógico. Generalizando esse raciocínio, podemos representar (27) não como uma derivação de (23) a partir de $\varnothing$, mas como um *esquema de derivação* do esquema de fórmula

(31) $\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$

a partir de $\varnothing$:

| | | |
|---|---|---|
| (32) | 1. $\alpha\wedge\neg\alpha\to\alpha$ | P3 |
| | 2. $(\alpha\wedge\neg\alpha\to\alpha)\to((\alpha\wedge\neg\alpha\to\neg\alpha)\to\neg(\alpha\wedge\neg\alpha))$ | P9 |
| | 3. $(\alpha\wedge\neg\alpha\to\neg\alpha)\to\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$ | MP 1,2 |
| | 4. $\alpha\wedge\neg\alpha\to\neg\alpha$ | P4 |
| | 5. $\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$ | MP 4,3 |

Dessa forma, provamos que, para toda fórmula $\alpha\in L_p$,

(33) $\vdash\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$.

Em outras palavras, provamos que (31) é um esquema de teorema lógico, sendo todas as fórmulas que satisfaçam (31) também teoremas lógicos. Trivialmente, é bem mais vantajoso representarmos teoremas lógicos dessa forma, através de esquemas de fórmulas, pois assim trabalhamos não com teoremas lógicos, mas com conjuntos de teoremas lógicos. Dessa forma, daqui em diante, nosso trabalho de apresentação e elaboração de derivações será baseado não mais em fórmulas, mas em esquemas de fórmulas.

Segue abaixo tabela com alguns dos (esquemas de) teoremas lógicos mais conhecidos:

| | |
|---|---|
| Princípio da não contradição | $\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$ |
| Lei da dupla negação | $\alpha\leftrightarrow\neg\neg\alpha$ |
| Lei da contrapositiva | $(\alpha\rightarrow\beta)\leftrightarrow(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)$ |
| Lei de Peirce | $((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\alpha)\rightarrow\alpha$ |
| Lei da exportação | $(\alpha\wedge\beta\rightarrow\varphi)\leftrightarrow(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))$ |
| Lei da permutação | $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))\leftrightarrow(\beta\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))$ |
| Lei da identidade | $\alpha\leftrightarrow\alpha$ |
| Leis de De Morgan | $\neg(\alpha\vee\beta)\leftrightarrow(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$ |
| | $\neg(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow(\neg\alpha\vee\neg\beta)$ |
| Leis de tautologia | $\alpha\leftrightarrow(\alpha\vee\alpha)$ |
| | $\alpha\leftrightarrow(\alpha\wedge\alpha)$ |
| Leis de associatividade | $(\alpha\vee(\beta\vee\varphi))\leftrightarrow((\alpha\vee\beta)\vee\varphi)$ |
| | $(\alpha\wedge(\beta\wedge\varphi))\leftrightarrow((\alpha\wedge\beta)\wedge\varphi)$ |
| | $(\alpha\leftrightarrow(\beta\leftrightarrow\varphi))\leftrightarrow((\alpha\leftrightarrow\beta)\leftrightarrow\varphi)$ |
| Leis de distributividade | $(\alpha\wedge(\beta\vee\varphi))\leftrightarrow((\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\varphi))$ |
| | $(\alpha\vee(\beta\wedge\varphi))\leftrightarrow((\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\varphi))$ |
| Leis de comutatividade | $(\alpha\vee\beta)\leftrightarrow(\beta\vee\alpha)$ |
| | $(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow(\beta\wedge\alpha)$ |
| | $(\alpha\leftrightarrow\beta)\leftrightarrow(\beta\leftrightarrow\alpha)$ |

No próximo capítulo exibiremos uma lista, bem mais completa do que essa, com os mais importantes teoremas lógicos do cálculo proposicional.

Uma consequência de trabalharmos com esquemas de fórmulas ao invés de com fórmulas é que podemos ver relações como (14) não mais apenas como estabelecendo uma relação entre um conjunto de fórmulas e uma fórmula específica, mas sim como uma *regra de inferência* semelhante à *modus ponens*. Considere a versão de (14) expressa em termos de esquemas de fórmulas:

(34) $\{\alpha\to\beta,\alpha\to\neg\beta\}\vdash\neg\alpha$

cuja derivação seria como segue:

(35) 1. $\alpha\to\beta$ Premissa

2. $(\alpha\to\beta)\to((\alpha\to\neg\beta)\to\neg\alpha)$ P9

3. $(\alpha\to\neg\beta)\to\neg\alpha$ MP 1,2

4. $\alpha\to\neg\beta$ Premissa

5. $\neg\alpha$ MP 4,3

Aqui, como (34) vale para quaisquer $\alpha,\beta\in L_p$, temos que ela representa na verdade um esquema de argumento válido ou, equivalentemente, um esquema de inferência, ou ainda, uma regra de inferência. O fato de estarmos chamando (34) de inferência é claro quando vemos que, através de (34), podemos obter fórmulas novas a partir de outras fórmulas já conhecidas. Já o fato de (34) ser uma *regra* de inferência fica claro quando vemos que, substituindo consistentemente, em (34), $\alpha$ e $\beta$ por duas fórmulas quaisquer da linguagem proposicional, obtemos novos argumentos ou inferências válidas no cálculo proposicional. Para distinguirmos (34), por exemplo, de MP, que é uma regra de inferência primitiva do cálculo proposicional (incorporada na própria definição de $C_p$), usaremos a expressão *regra de inferência derivada*. Segue abaixo tabela com algumas regras de inferência (derivadas ou não) do cálculo proposicional:

| | |
|---|---|
| *Modus ponens* | $\{\alpha\to\beta,\alpha\}\vdash\beta$ |
| *Modus tolens* | $\{\alpha\to\beta,\neg\beta\}\vdash\neg\alpha$ |
| Silogismo hipotético | $\{\alpha\to\beta,\beta\to\varphi\}\vdash\alpha\to\varphi$ |
| Silogismo disjuntivo | $\{\alpha\vee\beta,\neg\alpha\}\vdash\beta$ |
| Conjunção | $\{\alpha,\beta\}\vdash\alpha\wedge\beta$ |
| Adição | $\{\alpha\}\vdash\alpha\vee\beta$ |
| Redução ao absurdo | $\{\alpha\to\beta,\alpha\to\neg\beta\}\vdash\neg\alpha$ |
| Princípio da explosão | $\{\alpha,\neg\alpha\}\vdash\beta$ |

O leitor atento deve ter notado a semelhança entre estas duas tabelas – a tabela de teoremas lógicos e a tabela de regras derivadas – e as tabelas descritas na seção 4.4 com as tautologias e argumentos válidos mais conhecidos. Tal semelhança não é de forma alguma coincidência: conforme veremos no capítulo 12, é desejável em toda lógica (e isso obviamente acontece com a lógica proposicional) que toda tautologia seja um teorema lógico, e que todo teorema lógico seja uma tautologia; e que todo argumento válido sintaticamente seja também válido semanticamente, e vice-versa. Isso na verdade é nada mais do que o resultado metalógico que temos chamado até agora de corretude e completude.

Para finalizar este capítulo, vale a pena mencionar que algumas derivações, como (28), por exemplo, possuem uma complexidade inquestionável, complexidade esta que se revela, o leitor deve ter observado, tanto no momento de *compreender* a derivação como no momento de *construí-la*. No próximo capítulo, no qual efetivamente daremos cabo do estudo das derivações, introduziremos alguns recursos que diminuirão consideravelmente o grau de complexidade de nossas derivações, fazendo-as mais fáceis tanto de serem compreendidas como de serem construídas. Entre tais recursos, está o uso, nas derivações, de teoremas lógicos e regras derivadas previamente provados.

## 5.5 Exercícios propostos

1. Explique com suas palavras os seguintes conceitos:
   a. Derivação;
   b. Lei lógica;
   c. Regra de inferência admissível.
2. Enumere três instâncias de *modus ponens*.
3. Enumere cada uma das três condições que podem justificar um enunciado fazer parte de uma derivação, e explique a razão por trás de tais condições.
4. Tente explicar o significado de cada um dos axiomas P1-P11 da definição 1.17.
5. Responda as perguntas abaixo:
   a. Qual a diferença entre uma fórmula e um esquema de fórmula?
   b. Por que os axiomas da definição 1.17 devem ser representados como esquemas de fórmulas e não como fórmulas?
   c. De acordo com a terminologia por nós usada, qual a diferença entre regra, regra admissível e regra de inferência?
6. Exiba três instâncias de cada um dos axiomas P1-P11 da definição 1.17.
7. Dê exemplos de fórmulas que representem substituições não consistentes para os axiomas P2 e P8.
8. Explique a relevância filosófica de podermos inferir todas as leis lógicas a partir de um número consideravelmente reduzido de axiomas lógicos juntamente com uma única regra de inferência.
9. Usando a definição 1.13 aplicada à definição 1.21, explique detalhadamente por que a sequência de fórmulas abaixo é uma derivação de $A \to C$ a partir de $\{A \to B, B \to C\}$.
   1. $A \to B$
   2. $B \to C$
   3. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
   4. $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$
   5. $A \to (B \to C)$
   6. $(A \to B) \to (A \to C)$
   7. $A \to C$
10. Utilizando a definição 1.14 aplicada à definição 1.21, prove as relações abaixo.
   a. $\{A \to B, A\} \vdash B$
   b. $\{A \to B, B \to C, A\} \vdash C$
   c. $\{\neg A\} \vdash \neg A$
   d. $\{\neg A, B \to \neg\neg C, \neg D \lor A\} \vdash B \to \neg\neg C$
   e. $\{A \land \neg B, A \land \neg B \to \neg(D \to E)\} \vdash \neg(D \to E)$
   f. $\{\neg A \to \neg\neg C, \neg\neg C \to B \lor (A \land C), \neg A\} \vdash B \lor (A \land C)$
   g. $\varnothing \vdash \neg(A \to \neg\neg C) \lor (A \to \neg\neg C)$
   h. $\{\neg B \to C, C \to \neg(A \lor B), \neg B, \neg(A \lor B) \to D\} \vdash D$
   i. $\{A, A \lor B, \neg(C \to F)\} \vdash B \to (A \to B)$
   j. $\{A \to (B \to (C \to D)), \neg A \to B, D\} \vdash \neg A \to B$

11. Utilizando a definição 1.14 aplicada à definição 1.21 e seguindo a dica ao lado (que diz que axioma usar na derivação), prove as relações abaixo.

a. $\{A\}\vdash B\to A$ (Dica: axioma P1)

b. $\{A, A\lor B\to C\}\vdash C$ (Dica: axioma P6)

c. $\{A\land B, B\to C\}\vdash C$ (Dica: axioma P4)

d. $\{A, B, A\land B\to C\}\vdash C$ (Dica: axioma P5)

e. $\{A, \neg A\}\vdash \neg\neg C$ (Dica: axioma P10)

f. $\{A\to(B\to C), A\to B\}\vdash A\to C$ (Dica: axioma P2)

g. $\{A\to B, C\to B\}\vdash (A\lor C)\to B$ (Dica: axioma P8)

h. $\{A\land C\to B, A\land C\to\neg B\}\vdash\neg(A\land C)$ (Dica: axioma P9)

i. $\{(A\to C)\lor\neg(A\to C)\to\neg D\}\vdash\neg D$ (Dica: axioma P11)

12. Utilizando a definição 1.14 aplicada à definição 1.21 e seguindo a dica ao lado (que diz que axioma(s) usar na derivação), prove as relações abaixo.

a. $\{A, B\}\vdash A\land B$ (Dica: axioma P5)

b. $\{A, A\to B, B\lor C\to F\}\vdash F$ (Dica: axioma P6)

c. $\{A\land B, B\lor\neg D\to C\}\vdash C$ (Dica: axiomas P4 e P6)

d. $\{A\land B\}\vdash B\land A$ (Dica: axiomas P3, P4 e P5)

e. $\{D, (C\to D)\to(A\to\neg B), C\to\neg B\}\vdash (A\lor C)\to\neg B$ (Dica: axiomas P1 e P8)

f. $\{(A\to B)\to C, \neg C\}\vdash\neg(A\to B)$ (Dica: axiomas P1 e P9)

g. $\{D\to A, D, A\to B, A\to\neg B\}\vdash\neg(D\to A)$ (Dica: axioma P10)

h. $\{A\to B, \neg A\to B\}\vdash B$ (Dica: axiomas P8 e P11)

i. $\{A\to B, \neg B\}\vdash\neg A$ (Dica: axiomas P1 e P9)

j. $\{A\to B, B\to C\}\vdash A\to C$ (Dica: axioma P2)

k. $\{A\to B, A\to C\}\vdash A\to B\land C$ (Dica: axiomas P2 e P5)

# Derivação e análise lógica no cálculo proposicional

# 6
# Implicação, conjunção e disjunção

## 6.1 Derivação e outros cálculos proposicionais

Nosso propósito neste capítulo e no próximo é ilustrar alguns aspectos fundamentais da construção de derivações no método axiomático. Entre outras coisas, falaremos com detalhes sobre os axiomas da definição 1.17, mostrando a função de cada um deles dentro das derivações, e os principais teoremas lógicos e regras derivadas que podem ser provados com o auxílio deles. Também mostraremos alguns resultados do cálculo axiomático que nos ajudarão significantemente no processo de avaliação e construção de derivações. Conforme temos feito até agora, usaremos o cálculo clássico proposicional como sistema paradigmático da nossa exposição. No entanto, na prossecução do objetivo acima delineado, introduziremos outros cálculos axiomáticos, entre eles o cálculo intuicionista e um cálculo paraconsistente, o que pode ser tomado como um segundo objetivo destes capítulos 6 e 7.

Comecemos atentando para a modularidade, digamos assim, presente na lista de axiomas da definição 1.17. Enquanto os axiomas P1 e P2 lidam apenas com a implicação, P3-P5 contêm, além da implicação, apenas a conjunção; P6-P8 lidam de forma principal com a disjunção; e P9-P11 tratam primordialmente do símbolo da negação. Considerando o fato de que são tais axiomas que efetivamente nos dão informação a respeito dos conectivos em questão, podemos seguramente dizer que os axiomas P1 e P2 definem as propriedades lógico-inferencias da *implicação*; P3-P5, as propriedades da *conjunção*; P6-P8, as propriedades da *disjunção*; e P9-P11 as propriedades de *negação*.

Em relação à negação, podemos ver uma modularidade mesmo quando consideramos P9, P10 e P11 separadamente. O leitor deve lembrar-se quando falamos, no capítulo 2, da lógica intuicionista e da lógica paraconsistente; enquanto na primeira o princípio do terceiro excluído

(1) $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$

não é aceito, na segunda o princípio da explosão

(2) $\{\alpha,\neg\alpha\}\vdash\beta$

e, em geral, o princípio da redução ao absurdo

(3) se $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ e $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\neg\beta$, então $\Gamma\vdash\neg\alpha$

não são válidos.

No entanto, como veremos mais adiante, tais propriedades dependem, respectivamente, dos axiomas P11, P10 e P9. Em outras palavras, enquanto rejeitando P11 nós obtemos a *negação intuicionista*, rejeitando P9 e P10 nós obtemos uma *negação paraconsistente*; já rejeitando P10 e P11 nós obtemos uma *negação minimal* que pode ser classificada como *semiparaconsistente*[44]. Desta forma, o mais correto seria ver P9-P11 como definindo um tipo específico de negação: o que chamamos de *negação clássica*.

A significância disso é dupla. Primeiro, considerando que P1 e P2, por exemplo, "contêm" todas as propriedades da implicação, na prova dos teoremas lógicos e regras derivadas relacionados exclusivamente com a implicação, ou seja, que representem explicitamente propriedades exclusivas da implicação, serão usados obviamente apenas os axiomas P1 e P2. Similarmente, todos os teoremas lógicos e regras da negação clássica que envolvam apenas os conectivos $\neg$ e $\rightarrow$ podem ser derivados apenas com o auxílio dos axiomas P1, P2, P9-P11. Dessa forma, a modularidade à qual nos referimos se estende também à construção de derivações.

Segundo, podemos definir novos cálculos que incorporem exclusivamente a característica de um ou mais conectivos lógicos específicos. Por exemplo, podemos definir um cálculo axiomático da implicação, que contenha, além de *modus ponens*, apenas os axiomas P1 e P2. Desta forma, todos, e apenas todos os teoremas lógicos da implicação são prováveis em tal cálculo, a consequência óbvia disso sendo que tais teoremas usam em sua derivação apenas os axiomas P1 e/ou P2 e MP. No caso da negação, por exemplo, usando os axiomas P9-P11 em conjunção com os demais axiomas e MP obtemos, como vimos, o cálculo clássico proposicional. No entanto, caso adicionemos a P1-P8 e MP apenas os axiomas P9 e P10, por exemplo, obtemos o *cálculo intuicionista*. Caso adicionemos apenas P11 obtemos um *cálculo paraconsistente*[45].

Desta forma, na apresentação dos vários teoremas lógicos e regras derivadas, nos utilizaremos de diversos cálculos de forma a tornar explícito de quais axiomas tais teo-

---

**44.** Apesar de podermos, juntamente com P1, obter a partir de P9 uma versão fraca do princípio da explosão, a saber, $\{\alpha,\neg\alpha\}\vdash\neg\beta$, não conseguimos, somente com P9, derivar sua versão completa.

**45.** Como veremos mais na frente, entretanto, tal cálculo é por demais fraco, não sendo capaz de provar uma série de propriedades da negação que não conflitam com o princípio da explosão. Assim, mostraremos também como, através da adição de outros axiomas, podemos obter um cálculo paraconsistente forte o suficiente para provar boa parte das leis tradicionalmente associadas à negação.

remas e regras dependem. Por exemplo, faremos a exposição dos teoremas lógicos da implicação através de um cálculo definido a partir de P1, P2 e MP; já os teoremas e regras que dependem essencialmente de P9, por exemplo, serão apresentados através de dois cálculos: um definido a partir de P1, P2, P9 e MP, e outro definido a partir de P1-P9 e MP.

Neste capítulo abordaremos os teoremas e regras da implicação, conjunção e disjunção, juntamente com seus respectivos cálculos. A negação e os vários cálculos a ela relacionados serão abordados no capítulo seguinte. Com exceção dos cálculos intuicionista e paraconsistente, todos os cálculos a serem aqui introduzidos têm um fim meramente didático, possuindo, em princípio, pouca relevância teórica.

Um ponto importante do qual não devemos nos esquecer, no entanto, é que o foco principal deste capítulo e do próximo é efetivamente os teoremas lógicos e regras derivadas do cálculo clássico proposicional $C_p$. Dessa forma, é de se esperar que todos os teoremas e regras derivadas a serem aqui apresentados como válidos em um cálculo outro que não o cálculo clássico proposicional sejam também válidos em $C_p$. Para garantir isso, precisamos da noção de *extensão conservativa*, que é definida logo abaixo:

**DEFINIÇÃO 2.1** Sejam $C'=\langle L,\Sigma,\Lambda'\rangle$ e $C''=\langle L,\Sigma,\Lambda''\rangle$ dois cálculos axiomáticos. C'' é uma *extensão conservativa* de C' se e somente se, para todo $\Gamma\subseteq L$ e todo $\alpha\in L$, se $\Gamma\vdash\alpha$ em C' então $\Gamma\vdash\alpha$ em C''.

Assim, o cálculo C'' é uma extensão conservativa de C' se e somente todo argumento válido em C' é também um argumento válido em C''; como consequência disso, todo teorema lógico ou regra derivada de C' será também teorema ou regra derivada de C''. Trivialmente, C é uma extensão conservativa dele mesmo. Como o leitor já deve ter desconfiado, o cálculo clássico proposicional $C_p$ é uma extensão conservativa de todos os cálculos a serem introduzidos aqui, de forma que os teoremas lógicos e regras derivadas desses cálculos também são teoremas e regras derivadas de $C_p$. Note, no entanto, que o inverso não vale: existem teoremas e regras derivadas válidas em $C_p$ que não são válidas, por exemplo, no cálculo intuicionista.

## 6.2 Implicação e o cálculo $C_{\rightarrow}$

De forma a melhor esclarecermos o método acima exposto, e também, é claro, começarmos nossa exposição, definimos abaixo o nosso primeiro cálculo: o cálculo da implicação material.

**DEFINIÇÃO 2.2** O *cálculo da implicação material* $C_{\rightarrow}$ é a tripla $<L_p, \Sigma_{MP}, \Lambda_{P1\text{-}P2}>$.

Diferentemente de $C_p$, o conjunto de axiomas de $C_{\rightarrow}$ é composto apenas por P1 e P2. Conforme fizemos com o cálculo proposicional na seção 5.3, podemos usar as definições 1.13 e 1.14 para, juntamente com a definição 2.2, obtermos a noção de dedução do cálculo da implicação material. Uma vez feito isso, e considerando que o conjunto de axiomas de $C_{\rightarrow}$ é um subconjunto do conjunto de axiomas de $C_p$, temos que $C_p$ é uma extensão conservativa de $C_{\rightarrow}$:

**COROLÁRIO 2.1** $C_p$ é uma extensão conservativa de $C_{\rightarrow}$.

Esse corolário segue automaticamente das definições 1.21, 2.1 e 2.2. Uma consequência trivial disso é que todos os teoremas e regras derivadas de $C_{\rightarrow}$, entre outros resultados, são também teoremas e regras derivadas de $C_p$. Segue abaixo alguns dos mais importantes teoremas e regras de $C_{\rightarrow}$, alguns seguidos de sua denominação mais comum, e o corolário que explicita o dito acima:

**TEOREMA 2.1** Sejam $\alpha,\beta,\varphi \in L_p$ fórmulas quaisquer. As relações abaixo são válidas em $C_{\rightarrow}$.

| | | |
|---|---|---|
| I1. | $\alpha \vdash \beta \rightarrow \alpha$ | |
| I2. | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi) \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi)$ | |
| I3. | $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$ | *lei da identidade* |
| I4. | $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \varphi \vdash \alpha \rightarrow \varphi$ | *transitividade da implicação* |
| I5. | $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \varphi) \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi))$ | *transitividade da implicação* |
| I6. | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi) \vdash \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi)$ | *lei da permutação* |
| I7. | $\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi))$ | *lei da permutação* |
| I8. | $\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi) \vdash \alpha \rightarrow \varphi$ | |
| I9. | $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \vdash \alpha \rightarrow \beta$ | |
| I10. | $\vdash (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ | |
| I11. | $\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi))$ | |

**COROLÁRIO 2.2** As relações mencionadas no teorema 2.1 são também válidas em $C_p$.

Duas observações devem ser feitas antes de começarmos a falar sobre as relações do teorema 2.1 e o uso que elas fazem de P1 e P2. Primeiro, semelhantemente ao que fizemos em relação aos parênteses das fórmulas, a partir de agora omitiremos o uso das chaves ao escrevermos regras derivadas. Assim, I4 é na verdade uma abreviação para $\{\alpha\rightarrow\beta,\beta\rightarrow\varphi\}\vdash\alpha\rightarrow\varphi$ (que, por sua vez, é uma abreviação para $\{(\alpha\rightarrow\beta),(\beta\rightarrow\varphi)\}\vdash(\alpha\rightarrow\varphi)$).

Segundo, toda a nossa exposição neste capítulo será feita mediante o uso de *teoremas* como o teorema 2.1 acima. De um modo geral, um teorema é qualquer proposição que possamos provar a partir das definições e proposições primitivas de um sistema ou teoria. Considere $C_p$, por exemplo. Aqui temos várias proposições ou enunciados primitivos – os axiomas P1-P11 – escritos em uma linguagem específica – $L_p$ – e uma maneira precisa, bem definida, de obter novos enunciados a partir deles. Conforme definido no capítulo anterior, a tais enunciados nós damos o nome de *teoremas lógicos*. Veja, no entanto, que tais teoremas se pronunciam, por assim dizer, *de dentro* do cálculo proposicional. Tome uma instância específica do teorema I3, por exemplo:

(4) $(A\vee\neg B)\rightarrow(A\vee\neg B)$

Utilizando a linguagem proposicional, (4) claramente expressa algo relevante, a saber, que $(A\vee\neg B)$ implica a si mesmo, sendo isso uma consequência, ou um teorema, do que P1-P11 (ou, para ser mais específico, do que certas instâncias de P1-P11) afirmam. Porém, trivialmente o que os teoremas lógicos podem dizer é limitado ao poder expressivo de $L_p$. Eles não podem, por exemplo, dizer que eles mesmos são teoremas lógicos. Em outras palavras, eles não podem falar *sobre*, como que olhando *de fora* para, o cálculo proposicional, que é exatamente o que o teorema 2.1 faz. De acordo com um segundo sentido do termo então, teoremas, assim como o que temos chamado até aqui de corolário, são proposições que podemos provar sobre os vários sistemas lógicos aqui introduzidos[46]. Em consequência disso, diferentemente dos teoremas lógicos, tais teoremas são escritos não na linguagem lógica, mas na metalinguagem. É por essa razão que muitas vezes nos referimos a tais teoremas como *metateoremas*, enfatizando tanto o fato de eles serem escritos na metalinguagem, como o fato de eles falarem algo sobre os sistemas lógicos mesmos. No entanto, uma vez que já dispomos do termo "teorema lógico", referenciaremos os metateoremas aqui simplesmente como teoremas.

Vamos então ao papel que os axiomas P1 e P2 desempenham na prova dos teoremas lógicos e regras derivadas do (meta) teorema 2.1. Comecemos por I4, cuja derivação é mostrada logo abaixo:

**46.** Tradicionalmente, a diferença entre um teorema e um corolário é simplesmente que este último, diferentemente do primeiro, é um resultado quase que imediato, e consequentemente relativamente simples, das definições e proposições primitivas ou de outros teoremas.

(I4) $\alpha\to\beta,\beta\to\varphi\vdash\alpha\to\varphi$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\to\beta$ | Premissa |
| 2. $\beta\to\varphi$ | Premissa |
| 3. $(\alpha\to(\beta\to\varphi))\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\varphi))$ | P2 |
| 4. $(\beta\to\varphi)\to(\alpha\to(\beta\to\varphi))$ | P1 |
| 5. $\alpha\to(\beta\to\varphi)$ | MP 2,4 |
| 6. $(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\varphi)$ | MP 5,3 |
| 7. $\alpha\to\varphi$ | MP 1,6 |

I4, vale lembrar, é uma regra de inferência que diz que podemos inferir $\alpha\to\varphi$ a partir de $\alpha\to\beta$ e $\beta\to\varphi$; é a chamada *lei do silogismo hipotético* ou *transitividade da implicação*. De um ponto de vista inferencial, já considerando o uso da implicação em conjunto com MP, é como se nós não precisássemos passar por $\beta$ para chegar de $\alpha$ a $\varphi$: como podemos chegar de $\alpha$ a $\beta$ e de $\beta$ a $\varphi$, então podemos "pular" $\beta$ e chegar diretamente a $\varphi$ a partir de $\alpha$.

Na derivação de I4, o primeiro axioma que aparece é P2, logo na terceira linha (I4.3)[47]. Considerando a aplicação de MP – e a esta altura o leitor já deve ter notado que, com exceção de P11, a forma condicional de todos os axiomas visa a sua utilização em conjunto com MP – o que P2 nos diz basicamente é que se temos $\alpha\to(\beta\to\varphi)$, então teremos também $(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\varphi)$. Falando de outra forma, de posse de $\alpha\to(\beta\to\varphi)$, é possível *distribuir* ou *internalizar* a implicação de $\alpha$ em relação à $\beta\to\varphi$ e concluir $(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\varphi)$.

Mas como iremos obter $\alpha\to(\beta\to\varphi)$? Repare que $\beta\to\varphi$ é (I4.2). Assim, se substituirmos em P1 $\alpha$ por $\beta\to\varphi$ e $\beta$ por $\alpha$, obteremos $(\beta\to\varphi)\to(\alpha\to(\beta\to\varphi))$ (I4.4), a partir do qual, juntamente com MP e (I4.2), podemos concluir $\alpha\to(\beta\to\varphi)$ (I4.5). Feito isso, usamos (I4.5) juntamente com (I4.3) para concluir $(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\varphi)$ (I4.6), após o que, finalmente, concluimos $\alpha\to\varphi$ (I4.7) a partir de MP e (I4.1). O ponto que nos interessa aqui é que podemos ver claramente P1 permitindo que, a partir da premissa $\beta\to\varphi$, concluamos $\alpha\to(\beta\to\varphi)$. De uma forma geral esse é o uso mais comum de P1: fazer com que possamos, a partir de uma premissa $\alpha$, concluir $\beta\to\alpha$, em que $\beta$ é uma fórmula qualquer.

Essas funções inferenciais de P1 e P2 são explicitadas em I1 e I2, enquanto I1 nos diz que a partir de $\alpha$ podemos concluir $\beta\to\alpha$, para qualquer $\beta$, I2 nos diz que a partir de $\alpha\to(\beta\to\varphi)$ podemos distribuir condicionalmente $\alpha$ em relação à $\beta\to\varphi$ e concluir

**47.** Aqui vamos adotar uma notação semelhante à adotada na seção 5.1 e referir o primeiro membro da derivação de I4 como (I4.1), o segundo como (I4.2), e assim por diante.

$(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi)$. Segue abaixo I1 e I2 com suas respectivas derivações, em que podemos ver o mencionado uso inferencial que se faz de P1 e P2:

(I1) $\alpha\vdash\beta\rightarrow\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha$ | Premissa |
| 2. $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$ | P1 |
| 3. $\beta\rightarrow\alpha$ | MP 1,2 |

(I2) $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi)\vdash(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi)$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi)$ | Premissa |
| 2. $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))$ | P2 |
| 3. $(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi)$ | MP 1,2 |

O leitor atento deve ter notado certa semelhança entre as relações I4 e I5, I6 e I7, e I9 e I10. Da mesma forma que I1 e I2 podem ser vistas como versões inferenciais (isto é, em termos da relação de inferência $\vdash$) de P1 e P2, respectivamente, I4 pode ser vista como a versão inferencial de I5; I6 como a versão inferencial de I7; e I9 como a versão inferencial de I10. Tome I6, por exemplo: coloque $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi)$ para o lado esquerdo de $\vdash$ e o una através da implicação com $\beta\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi)$ que você obterá I7. Falando de outra forma, é como se em I5, I7 e I10 a implicação estivesse desempenhando o mesmo papel inferencial que $\vdash$ desempenha em I4, I6 e I9. Desse modo então surge a pergunta: são tais pares de relações equivalentes entre si? Ou, sendo mais geral, podemos tomar o símbolo lógico $\rightarrow$ e a relação de dedução $\vdash$ como sendo, de alguma forma, equivalentes entre si?

Essa pergunta pode ser colocada de forma mais precisa da seguinte maneira. Dado um conjunto de fórmulas $\Gamma$ e duas fórmulas $\alpha$ e $\beta$, podemos dizer que $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ sss $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta$? No caso limite de $\Gamma=\varnothing$, essa pergunta questiona a veracidade ou não de $\beta$ ser deduzido a partir de $\alpha$ ($\{\alpha\}\vdash\beta$) se e somente se $\alpha\rightarrow\beta$ for um teorema lógico ($\vdash\alpha\rightarrow\beta$). Devido ao uso da expressão "sss", o que temos aqui são na verdade duas perguntas: se é verdade que (1) se $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta$ então $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ e se é verdade que (2) se $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ então $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta$. Claramente (1) é o caso: se há uma derivação de $\alpha\rightarrow\beta$ a partir de $\Gamma$, então se temos, em adição a isso, $\alpha$ como premissa, podemos aplicar *modus ponens* a $\alpha$ e $\alpha\rightarrow\beta$ e concluir $\beta$, produzindo assim uma derivação de $\beta$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$. Já (2), cuja demonstração não é tão trivial como a de (1) e cuja descrição formal é dada logo abaixo, é na verdade um dos resultados mais importantes da lógica. Trata-se do assim chamado *teorema da dedução*:

**TEOREMA 2.2** Seja $C=\langle L,\Sigma,\Lambda\rangle$ uma extensão conservativa de $C_{\rightarrow}$, $\Gamma\subseteq L$ um conjunto de fórmulas e $\alpha,\beta\in L$ duas fórmulas. Se $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ em C, então $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta$ em C.

Além do papel desempenhado no estabelecimento de certo tipo de equivalência entre o símbolo lógico $\rightarrow$ e o símbolo metalógico $\vdash$, o teorema da dedução tem uma relevância extrema na diminuição do grau de complexidade das derivações. Considere, por exemplo, a derivação de I5 abaixo (cuja leitura minuciosa pode ser omitida):

(I5) $\vdash(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))$

1. $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))$ P2
2. $((\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi)))\rightarrow$
   $((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow((\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))))$ P1
3. $(\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow((\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi)))$ MP 1,2
4. $((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow((\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))))\rightarrow$
   $(((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi)))\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))))$ P2
5. $((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi)))\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi)))$ MP 3,4
6. $(\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))$ P1
7. $(\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))$ MP 6,5
8. $((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi)))\rightarrow(((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta))\rightarrow$
   $((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi)))$ P2
9. $((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta))\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))$ MP 7,8
10. $(((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta))\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi)))\rightarrow$
    $((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta))\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))))$ P1
11. $(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta))\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi)))$ MP 9,10
12. $((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta))\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))))\rightarrow$
    $(((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow$
    $(\alpha\rightarrow\varphi))))$ P2
13. $((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow$
    $(\alpha\rightarrow\varphi)))$ MP 11,12
14. $(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta))$ P1
15. $(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))$ MP 14,13

É pouco provável que alguém conteste a complexidade da derivação acima, complexidade essa que atinge tanto sua legibilidade como a sua gênese. O leitor, no entanto, não precisa começar a se desesperar por causa disso. Dificilmente teremos oportunidade de trabalhar com derivações tão complexas como essa, não porque nos absteremos de provar relações como I5, mas porque podemos, na construção de sua derivação, fazer uso de certos artifícios capazes de simplificar consideravelmente nossas derivações.

E o primeiro de tais artifícios é a utilização, na construção das derivações, do teorema da dedução.

Repare que o teorema 2.2 diz que se $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ então $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$ ou, em outras palavras, que se temos uma derivação de $\beta$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$, então temos a garantia de haver também uma derivação de $\alpha\to\beta$ a partir de $\Gamma$[48]. Mas veja que nós já temos uma derivação para a versão inferencial de I5, a saber, I4. Ou seja, nós já provamos que $\{\alpha\to\beta,\beta\to\varphi\}\vdash\alpha\to\varphi$ ou, equivalentemente, que $\{\alpha\to\beta\}\cup\{\beta\to\varphi\}\vdash\alpha\to\varphi$. De acordo então com o teorema da dedução (tomando $\Gamma$ como sendo $\{\alpha\to\beta\}$, $\alpha$ como sendo $\beta\to\varphi$ e $\beta$ sendo como $\alpha\to\varphi$), temos então que $\{\alpha\to\beta\}\vdash(\beta\to\varphi)\to(\alpha\to\varphi)$. Mas como temos $\{\alpha\to\beta\}\vdash(\beta\to\varphi)\to(\alpha\to\varphi)$ ou, equivalentemente, $\varnothing\cup\{\alpha\to\beta\}\vdash(\beta\to\varphi)\to(\alpha\to\varphi)$, de acordo com o teorema 2.2 novamente temos que $\varnothing\vdash(\alpha\to\beta)\to((\beta\to\varphi)\to(\alpha\to\varphi))$, que é nada mais do que I5. Assim, para provarmos I5, podemos, ao invés de exibir uma derivação de $(\alpha\to\beta)\to((\beta\to\varphi)\to(\alpha\to\varphi))$ a partir de $\varnothing$ como fizemos acima, simplesmente exibir uma derivação de $\alpha\to\varphi$ a partir de $\{\alpha\to\beta,\beta\to\varphi\}$ (isto é, provar I4) e, usando o teorema da dedução duas vezes, provar $\vdash(\alpha\to\beta)\to((\beta\to\varphi)\to(\alpha\to\varphi))$. E veja que uma vez que tenhamos provado o teorema 2.2 e tenhamos construído uma derivação de $\alpha\to\varphi$ a partir de $\{\alpha\to\beta,\beta\to\varphi\}$, o uso do teorema da dedução para provar I5 é tão legítimo quanto a exibição de uma derivação de $(\alpha\to\beta)\to((\beta\to\varphi)\to(\alpha\to\varphi))$ a partir de $\varnothing$.

Vejamos como podemos provar I10 a partir de I9 e do teorema da dedução. (I10 e I9 fazem exatamente o inverso de duas versões específicas de P1 e I1: $\vdash(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to(\alpha\to\beta))$ e $\alpha\to\beta\vdash\alpha\to(\alpha\to\beta)$.) Segue abaixo I9 seguido de sua derivação:

I9. $\alpha\to(\alpha\to\beta)\vdash\alpha\to\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $(\alpha\to((\beta\to\alpha)\to\alpha))\to((\alpha\to(\beta\to\alpha))\to(\alpha\to\alpha))$ | P2 |
| 2. $\alpha\to((\beta\to\alpha)\to\alpha)$ | P1 |
| 3. $(\alpha\to(\beta\to\alpha))\to(\alpha\to\alpha)$ | MP 2,1 |
| 4. $\alpha\to(\beta\to\alpha)$ | P1 |
| 5. $\alpha\to\alpha$ | MP 4,3 |
| 6. $\alpha\to(\alpha\to\beta)$ | Premissa |
| 7. $(\alpha\to(\alpha\to\beta))\to((\alpha\to\alpha)\to(\alpha\to\beta))$ | P2 |
| 8. $(\alpha\to\alpha)\to(\alpha\to\beta)$ | MP 6,7 |
| 9. $\alpha\to\beta$ | MP 5,8 |

**48.** Essa garantia é dada pela prova que daremos para o teorema 2.2 no capítulo 12. (Esse capítulo, o leitor deve se lembrar, trata da metalógica e conterá, entre outras coisas, a prova de todos os resultados que mencionarmos no decorrer de nossa exposição.) Grosso modo, essa prova nos diz como, a partir de uma derivação de $\beta$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$, podemos construir uma derivação de $\alpha\to\beta$ a partir de $\Gamma$, para qualquer $\Gamma\subseteq L$ e quaisquer $\alpha,\beta\in L$.

Como provamos acima que $\alpha\to(\alpha\to\beta)\vdash\alpha\to\beta$, de acordo com o teorema da dedução temos então I10, ou seja, $\vdash(\alpha\to(\alpha\to\beta))\to(\alpha\to\beta)$. Veja que nessa prova de I10 é imprescindível, além da exibição da prova de I9, ou seja, de uma derivação de $\alpha\to\beta$ a partir de $\alpha\to(\alpha\to\beta)$, também a menção, como estamos fazendo aqui, do uso do teorema 2.2, pois é ele que efetivamente faz a ligação entre a prova de I9 e a de I10. Trivialmente, de acordo com o próprio teorema 2.2, tal procedimento de prova de teoremas lógicos (e regras derivadas) pode ser feito em qualquer extensão conservativa de $C_{\to}$.

Utilizando o teorema da dedução, algumas de nossas derivações podem ficar na verdade ridiculamente simples. No processo de provar I10 através de I9, podemos mesmo provar I9 usando o teorema da dedução, bastando para isso provar $\alpha\to(\alpha\to\beta),\alpha\vdash\beta$, cuja derivação, conforme exibido abaixo, é das mais simples possíveis:

(5) $\alpha\to(\alpha\to\beta),\alpha\vdash\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\to(\alpha\to\beta)$ | Premissa |
| 2. $\alpha$ | Premissa |
| 3. $\alpha\to\beta$ | MP 2,1 |
| 4. $\beta$ | MP 2,3 |

De posse disso, usamos o teorema da dedução uma vez para provarmos I9 e, usando-o outra vez, provamos I10.

O mesmo fenômeno pode ser constatado se provarmos I4 (e I5) e I11 usando o teorema da dedução. Provemos primeiro I4, para o qual precisamos provar o resultado intermediário abaixo:

(6) $\alpha\to\beta,\beta\to\varphi,\alpha\vdash\varphi$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\to\beta$ | Premissa |
| 2. $\alpha$ | Premissa |
| 3. $\beta$ | MP 2,1 |
| 4. $\beta\to\varphi$ | Premissa |
| 5. $\varphi$ | MP 3,4 |

Como então temos (6), de acordo com o teorema da dedução temos também I4. Feito isso, repetimos o mesmo procedimento e provamos I5.

No que se refere à I11, o que à primeira vista poderia parecer um resultado de relativa complexidade se mostra, com o uso do teorema da dedução, em uma derivação extremamente simples:

(7) $(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\varphi),\alpha,\beta\vdash\varphi$

| | |
|---|---|
| 1. $(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\varphi)$ | Premissa |

| | |
|---|---|
| 2. $\beta$ | Premissa |
| 3. $\beta\to(\alpha\to\beta)$ | P1 |
| 4. $\alpha\to\beta$ | MP 2,3 |
| 5. $\alpha\to\varphi$ | MP 4,1 |
| 6. $\alpha$ | Premissa |
| 7. $\varphi$ | MP 6,5 |

Como temos (7), de acordo com o teorema da dedução podemos concluir

(8) $(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\varphi),\alpha\vdash\beta\to\varphi$

Mas, novamente de acordo com o teorema da dedução, como temos (8) teremos também

(9) $(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\varphi)\vdash\alpha\to(\beta\to\varphi)$

E, finalmente, como temos (9), de acordo como mesmo teorema 2.2, temos também I11[49].

Para finalizar essa seção, provemos I6 e I7. Para isso, teremos que provar primeiro o resultado intermediário abaixo:

(10) $\alpha\to(\beta\to\varphi),\beta\vdash\alpha\to\varphi$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\to(\beta\to\varphi)$ | Premissa |
| 2. $(\alpha\to(\beta\to\varphi))\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\varphi))$ | P2 |
| 3. $(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\varphi)$ | MP 1,2 |
| 4. $\beta\to(\alpha\to\beta)$ | P1 |
| 5. $\beta$ | Premissa |
| 6. $\alpha\to\beta$ | MP 5,4 |
| 7. $\alpha\to\varphi$ | MP 6,3 |

Como temos (10), pelo teorema da dedução temos então I6 e, consequentemente, pelo mesmo teorema, temos também I7.

## 6.3 Conjunção e o cálculo C$\wedge$

Procedamos agora à conjunção. Tendo em vista uma maior modularidade na exposição dos teoremas lógicos e regras derivadas, introduziremos aqui dois cálculos: um

49. Sem sombra de dúvida, o exemplo mais bobo dessa maneira de provar teoremas lógicos é o uso do teorema da dedução para provar I3. O leitor é convidado a fazer esse exercício e compará-lo com a derivação que exibimos para prová-lo no capítulo 5.

definido apenas em função de P3-P5 e MP, e outro já contendo, em seu conjunto de axiomas, os axiomas da implicação P1 e P2. Segue abaixo o primeiro, que chamamos de cálculo fraco da conjunção:

**Definição 2.3** O *cálculo fraco da conjunção* $C_{\wedge-}$ é a tripla $\langle L_P,\Sigma_{MP},\Lambda_{P3\text{-}P5}\rangle$.

A partir dessa definição, juntamente com as definições 1.13 e 1.14, podemos obter a relação de dedução do cálculo fraco da conjunção[50]. Seguem abaixo os teoremas lógicos e regras derivadas de $C_{\wedge-}$:

**Teorema 2.3** Sejam $\alpha,\beta,\varphi \in L_P$ fórmulas quaisquer. As relações abaixo são válidas em $C_{\wedge-}$.

| | |
|---|---|
| C1. $\alpha\wedge\beta\vdash\alpha$ | *simplificação* |
| C2. $\alpha\wedge\beta\vdash\beta$ | *simplificação* |
| C3. $\alpha,\beta\vdash\alpha\wedge\beta$ | *lei da conjunção* |
| C4. $\alpha\wedge\beta\vdash\beta\wedge\alpha$ | *comutatividade da conjunção* |

Aqui os teoremas lógicos C1, C2 e C3 representam inferencialmente os axiomas P3, P4 e P5, respectivamente. C1 nos permite simplificar $\alpha\wedge\beta$ e, a partir dele, inferir $\alpha$; já C2 faz a mesma coisa, mas agora com respeito a $\beta$. Seguem abaixo as derivações de C1 e C2:

(C1) $\alpha\wedge\beta\vdash\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\wedge\beta$ | Premissa |
| 2. $\alpha\wedge\beta\rightarrow\alpha$ | P3 |
| 3. $\alpha$ | MP 1,2 |

(C2) $\alpha\wedge\beta\vdash\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\wedge\beta$ | Premissa |
| 2. $\alpha\wedge\beta\rightarrow\beta$ | P4 |
| 3. $\beta$ | MP 1,2 |

Já C3, que é conhecida como de lei da conjunção, permite que efetivamente concluamos $\alpha\wedge\beta$ a partir de $\alpha$ e $\beta$. Segue abaixo a sua derivação:

---

50. A partir de agora, ao introduzirmos um novo cálculo, nos absteremos de mencionar que sua relação de dedução é construída com o auxílio das definições 1.13 e 1.14, e procederemos direto à menção e prova de seus teoremas lógicos e regras derivadas, ficando, no entanto, claro que tais teoremas e regras dependem conceitualmente de tais definições.

(C3) $\alpha,\beta \vdash \alpha\wedge\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha$ | Premissa |
| 2. $\alpha\to(\beta\to\alpha\wedge\beta)$ | P5 |
| 3. $\beta\to(\alpha\wedge\beta)$ | MP 1,2 |
| 4. $\beta$ | Premissa |
| 5. $\alpha\wedge\beta$ | MP 4,3 |

Veja que o cálculo $C_{\wedge-}$, como seu próprio nome indica, é bastante fraco, não sendo capaz de provar propriedades da conjunção cuja representação depende da implicação material, como, por exemplo, que se $\alpha$ implica a conjunção de $\beta$ e $\varphi$, então $\alpha$ implica $\beta$ e $\alpha$ implica $\varphi$:

(11) $\alpha\to(\beta\wedge\varphi)\vdash\alpha\to\beta$

(12) $\alpha\to(\beta\wedge\varphi)\vdash\alpha\to\varphi$

Dessa forma, definiremos um cálculo mais forte, já utilizando os axiomas da implicação P1 e P2, chamado simplesmente de cálculo da conjunção. Feito dessa forma, e sendo o cálculo da conjunção uma extensão conservativa tanto de $C_{\to}$ como de $C_{\wedge-}$, todas as relações mencionadas nos teoremas 2.1 e 2.3 são também válidas em tal cálculo.

**DEFINIÇÃO 2.4** O *cálculo da conjunção* $C_{\wedge}$ é a tripla $<L_P,\Sigma_{MP},\Lambda_{P1\text{-}P5}>$.

Segue abaixo alguns dos principais teoremas lógicos e regras derivadas de $C_{\wedge}$:

**TEOREMA 2.4** Sejam $\alpha,\beta,\varphi\in L_P$ fórmulas quaisquer. As relações abaixo são válidas em $C_{\wedge}$:

IC1. $\alpha\to(\beta\to\varphi)\vdash\alpha\wedge\beta\to\varphi$

IC2. $\alpha\to\beta,\alpha\to\varphi\vdash\alpha\to\beta\wedge\varphi$

IC3. $\vdash(\alpha\to\beta)\to((\alpha\to\varphi)\to(\alpha\to\beta\wedge\varphi))$

IC4. $\vdash(\alpha\to\beta)\wedge(\alpha\to\varphi)\to(\alpha\to\beta\wedge\varphi)$

IC5. $\vdash(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\varphi)\to(\alpha\to\varphi)$ *transitividade da implicação*

IC6. $\alpha\to(\beta\wedge\varphi)\vdash\alpha\to\beta$

IC7. $\alpha\to(\beta\wedge\varphi)\vdash\alpha\to\varphi$

IC8. $\vdash(\alpha\to\beta\wedge\varphi)\to(\alpha\to\beta)\wedge(\alpha\to\varphi)$

IC9. $\vdash(\alpha\to\beta)\to(\alpha\wedge\varphi\to\beta\wedge\varphi)$

IC10. $\alpha\to\varphi,\beta\to\gamma\vdash\alpha\wedge\beta\to\varphi\wedge\gamma$

Comecemos provando IC1. Para isso, provaremos o resultado intermediário abaixo:

(13) $\alpha \to (\beta \to \varphi), \alpha \wedge \beta \vdash \varphi$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha \wedge \beta$ | Premissa |
| 2. $\alpha \wedge \beta \to \alpha$ | P3 |
| 3. $\alpha$ | MP 1,2 |
| 4. $\alpha \wedge \beta \to \beta$ | P4 |
| 5. $\beta$ | MP 1,4 |
| 6. $\alpha \to (\beta \to \varphi)$ | Premissa |
| 7. $\beta \to \varphi$ | MP 3,6 |
| 8. $\varphi$ | MP 5,7 |

Como então temos $\alpha \to (\beta \to \varphi), \alpha \wedge \beta \vdash \varphi$, pelo teorema da dedução temos também $\alpha \to (\beta \to \varphi) \vdash \alpha \wedge \beta \to \varphi$, ou seja, IC1.

Basicamente o que IC1 diz é que se de $\alpha$ podemos concluir que de $\beta$ concluímos $\varphi$, então de $\alpha \wedge \beta$ podemos concluir $\varphi$. Considerando o uso de MP, esse na verdade é um resultado mais ou menos imediato: se temos $\alpha \to (\beta \to \varphi)$, então de posse de $\alpha$ e $\beta$, utilizando MP duas vezes obtemos $\varphi$; mas se temos $(\alpha \wedge \beta) \to \varphi$, então de posse de $\alpha$ e $\beta$, podemos usar P5 para concluir $\alpha \wedge \beta$ e, finalmente, usar MP para concluir $\varphi$. Assim, como será explicitado no teorema 2.6 abaixo, há uma equivalência entre $\alpha \to (\beta \to \varphi)$ e $(\alpha \wedge \beta) \to \varphi$.

Em função dessa equivalência podemos, por exemplo, expressar a transitividade da implicação de uma forma alternativa, usando a conjunção juntamente com a implicação (ao invés de somente a implicação como em I5). Isso é feito em IC5, cuja derivação segue abaixo:

(14) $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \varphi) \vdash \alpha \to \varphi$

| | |
|---|---|
| 1. $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \varphi)$ | Premissa |
| 2. $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \varphi) \to (\alpha \to \beta)$ | P3 |
| 3. $\alpha \to \beta$ | MP 1,2 |
| 4. $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \varphi) \to (\beta \to \varphi)$ | P4 |
| 5. $\beta \to \varphi$ | MP 1,4 |
| 6. $(\alpha \to (\beta \to \varphi)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \varphi))$ | P2 |
| 7. $(\beta \to \varphi) \to (\alpha \to (\beta \to \varphi))$ | P1 |
| 8. $\alpha \to (\beta \to \varphi)$ | MP 5,7 |
| 9. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \varphi)$ | MP 8,6 |
| 10. $\alpha \to \varphi$ | MP 3,9 |

Como então temos (14), pelo teorema da dedução temos também $\vdash(\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi)$, isto é, IC5.

Outra relação interessante, e na verdade bastante trivial, entre a conjunção e a implicação é expressa em IC2: se uma mesma fórmula $\alpha$ implica, separadamente, as fórmulas $\beta$ e $\varphi$, então podemos concluir que $\alpha$ implica a conjunção de $\beta$ e $\varphi$. Segue abaixo a sua prova:

(15) $\alpha\rightarrow\beta,\alpha\rightarrow\varphi,\alpha\vdash\beta\wedge\varphi$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha$ | Premissa |
| 2. $\alpha\rightarrow\beta$ | Premissa |
| 3. $\beta$ | MP 1,2 |
| 4. $\alpha\rightarrow\varphi$ | Premissa |
| 5. $\varphi$ | MP 1,4 |
| 6. $\beta\rightarrow(\varphi\rightarrow\beta\wedge\varphi)$ | P5 |
| 7. $\varphi\rightarrow\beta\wedge\varphi$ | MP 3,6 |
| 8. $\beta\wedge\varphi$ | MP 5,7 |

Como então provamos (15), de acordo com o teorema da dedução temos que existe uma derivação para IC2.

Algo interessante que o leitor pode facilmente constatar é que, na derivação de (14), os passos (14.1)-(14.3) e os passos (14.1), (14.4) e (14.5) são idênticos, se substituirmos $\alpha$ por $\alpha\rightarrow\beta$ e $\beta$ por $\beta\rightarrow\varphi$, às derivações que demos para C1 e C2, respectivamente. Isso significa que, uma vez que estejamos de posse das derivações de C1 e C2, podemos construir a derivação de (14) simplesmente copiando tais derivações e atualizando as fórmulas e os índices correspondentes. Isso é relevante, pois essa possibilidade nos leva à indagação de se, como já provamos C1 e C2, não poderíamos nos abster de repetir as suas respectivas derivações, encurtando assim a prova de (14) e consequentemente a de IC5.

A resposta a essa pergunta é sim; e o resultado que efetivamente nos permitirá realizar tal manobra dará, podemos assim dizer, pleno significado ao termo "regra de inferência derivada", que é como estamos chamando C1 e C2. Segue abaixo tal resultado, que chamaremos de *teorema da regra derivada*:

**TEOREMA 2.5** Seja $C=\langle L,\Sigma,\Lambda\rangle$ um cálculo axiomático, $\Gamma,\Delta_1, ...,\Delta_n\subseteq L$ $n$+1 conjuntos de fórmulas e $\alpha,\beta_1,...,\beta_n\in L$ $n$+1 fórmulas. Se, no cálculo C, $\Delta_1\vdash\beta_1,..., \Delta_n\vdash\beta_n$ e $\Gamma\vdash\Delta_1,..., \Gamma\vdash\Delta_n$ e $\Gamma\cup\{\beta_1,...,\beta_n\}\vdash\alpha$, então $\Gamma\vdash\alpha$ em C.

Primeiro de tudo, relembremos o que nos diz a definição 1.15: um conjunto de fórmulas $\Delta$ é deduzido a partir de outro conjunto de fórmulas $\Gamma$ ($\Gamma\vdash\Delta$) sss $\Gamma\vdash\alpha$ para todo

$\alpha \in \Delta$. Assim, o que o teorema 2.5 diz é que, dado um conjunto de fórmulas $\Gamma$ e uma fórmula $\alpha$, e dado *n* pares $<\Delta_i,\beta_i>$ (i=1,..,n), onde $\Delta_i$ é um conjunto de fórmulas e $\beta_i$ é uma fórmula, se cada um deles é tal que $\Delta_i \vdash \beta_i$ e $\Gamma \vdash \Delta_i$ (ou seja, cada membro de $\Delta_i$ é deduzido a partir de $\Gamma$) e se $\alpha$ é deduzido a partir de $\Gamma$ em conjunto com $\{\beta_1,...,\beta_n\}$ ($\Gamma \cup \{\beta_1,...,\beta_n\} \vdash \alpha$), então $\alpha$ é deduzido a partir de $\Gamma$. Um detalhe importante é que tal teorema vale para todo e qualquer cálculo axiomático, tal qual definido na seção 5.2, independentemente de quais axiomas e regras de inferência o compõem.

Aqui, $<\Delta_i,\beta_i>$ nada mais é do que uma instância de uma regra de inferência derivada, isto é, um par conjunto de fórmulas-fórmula tal que $\Delta_i \vdash \beta_i$. Segundo, $\Gamma$ e $\alpha$ são os membros de um argumento cuja validade ($\Gamma \vdash \alpha$) deseja-se provar utilizando as regras de inferência derivadas $<\Delta_i,\beta_i>$, i=1,...,n. Para que isso possa ser feito, duas condições têm de ser satisfeitas: primeiro, as premissas de cada uma das inferências de $<\Delta_i,\beta_i>$ tem de ser deduzidas a partir de $\Gamma$ ($\Gamma \vdash \Delta_i$); e segundo, $\alpha$ tem de ser deduzido a partir de $\Gamma$ em conjunto com todas as conclusões de tais regras ($\Gamma \cup \{\beta_1,...,\beta_n\} \vdash \alpha$). No caso dessas duas condições serem satisfeitas, e de $<\Delta_i,\beta_i>$ serem efetivamente inferências, ou seja, $\Delta_i \vdash \beta_i$, temos então a garantia de haver uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$ ($\Gamma \vdash \alpha$)[51].

Vejamos como isso funciona no caso acima aludido de IC5 e (14) e C1 e C2. Para isso, no entanto, consideremos, ao invés de esquemas de relação, instâncias de tais relações já com fórmulas de $L_p$ na sua formulação. Assim, queremos provar

(IC5') $\vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

aplicando o teorema da dedução a

(14') $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C$

Este, por sua vez, nós queremos provar utilizando as regras derivadas C1 e C2, ou, mais especificamente, as instâncias de C1 e C2 abaixo:

(16) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow B$

(17) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow C$

No que se refere à nomenclatura do teorema 2.5, nós temos aqui dois pares $<\Delta_1,\beta_1>$ e $<\Delta_2,\beta_2>$, sendo $\Delta_1 = \Delta_2 = \{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)\}$, $\beta_1 \equiv A \rightarrow B$ e $\beta_2 \equiv B \rightarrow C$. $\Gamma$ seria $\{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)\}$ e $\alpha$ $A \rightarrow C$. Como temos provado os esquemas de relação C1 e C2, temos então provadas as suas instâncias (16) e (17). Assim, temos que $\Delta_1 \vdash \beta_1$ e $\Delta_2 \vdash \beta_2$. Mas nós também temos, trivialmente, $\Gamma \vdash \Delta_1$ e $\Gamma \vdash \Delta_2$:

(18) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$

(19) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$

51. Conforme já tivemos oportunidade de dizer, a prova desse e de todos os outros (meta) teoremas a serem mencionados neste e nos capítulos posteriores será dada no capítulo 12.

Finalmente, nós temos que $\Gamma\cup\{\beta_1,\beta_2\}\vdash\alpha$:

(20) $\{(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow C)\}\cup\{A\rightarrow B, B\rightarrow C\}\vdash A\rightarrow C$

| | |
|---|---|
| 1. $A\rightarrow B$ | Premissa |
| 2. $B\rightarrow C$ | Premissa |
| 3. $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$ | P2 |
| 4. $(B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow(B\rightarrow C))$ | P1 |
| 5. $A\rightarrow(B\rightarrow C)$ | MP 2,4 |
| 6. $(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)$ | MP 5,3 |
| 7. $A\rightarrow C$ | MP 1,6 |

Assim, de acordo com o teorema 2.5, nós também temos $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)\vdash A\rightarrow C$.

Esses passos que realizamos na utilização do teorema 2.5 podem ser resumidos como segue:

(14') $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)\vdash A\rightarrow C$

| | |
|---|---|
| 1. $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)$ | Premissa |
| 2. $A\rightarrow B$ | C1 1 |
| 3. $B\rightarrow C$ | C2 1 |
| 4. $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$ | P2 |
| 5. $(B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow(B\rightarrow C))$ | P1 |
| 6. $A\rightarrow(B\rightarrow C)$ | MP 3,5 |
| 7. $(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)$ | MP 6,4 |
| 8. $(A\rightarrow C)$ | MP 2,7 |

Aqui, a justificativa em (14'.2) indica que estamos a usar a regra C1 aplicada a (14'.1), isto é, a instância de C1 tendo (14'.1) como antecedente e (14'.2) como consequente. O mesmo acontece com (14'.3): (14'.3) é o consequente e (14'.1) o antecedente de uma instância específica de C2. Como já provamos C1 e C2, temos que $\Delta_1\vdash\beta_1$ e $\Delta_2\vdash\beta_2$. (14'.1) é uma derivação que prova tanto (18) como (19). Assim temos $\Gamma\vdash\Delta_1$ e $\Gamma\vdash\Delta_2$. Finalmente, os passos (14'.2)-(14'.8) provam (20), de forma que podemos afirmar que $\Gamma\cup\{\beta_1,\beta_2\}\vdash\alpha$. Assim, de acordo com o teorema 2.5, temos $\Gamma\vdash\alpha$, ou seja, (14').

De agora em diante, nos usos posteriores do teorema 2.5, abster-nos-emos de dar uma explicação detalhada a respeito das condições que nos permitem, de acordo com o teorema 2.5, chegar a $\Gamma\vdash\alpha$, limitando-nos à exibição resumida de tais condições, semelhantemente a como fizemos com (14') acima. Veja que, nessa maneira de apresentação, mencionamos, nas justificativas de (14'.2) e (14'.3), as regras C1 e C2 da mesma forma como mencionamos MP na justificativa de muitos membros de nossas derivações; "C2

1", por exemplo, pode ser lido como "(14'.3) é justificado pelo uso da regra C2 aplicada a (14'.1)". Assim, vemos claramente que o teorema 2.5 nos permite usar as relações derivadas de forma semelhante a como usamos MP, ou seja, como regras de inferência.

O leitor atento deve ter notado nas derivações de (14) e (14') uma semelhança não só em relação às derivações de C1 e C2, mas também em relação à derivação de I4, exibida na seção anterior. Mais especificamente, os itens (14'.2)-(14'.8) acima, isto é, toda a derivação de (20), é nada mais do que uma instância trivial (substituindo $\alpha$, $\beta$ e $\varphi$ por A, B e C, respectivamente) da derivação que demos para provar I4. Assim, utilizando o teorema 2.5, podemos simplificar ainda mais a derivação de (14') utilizando também I4 como regra derivada. Assim temos o que segue:

(14") $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)\vdash A\rightarrow C$

| | |
|---|---|
| 1. $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)$ | Premissa |
| 2. $A\rightarrow B$ | C1 1 |
| 3. $B\rightarrow C$ | C2 1 |
| 4. $A\rightarrow C$ | I4 2,3 |

Aqui, a justificativa em (14".4) quer dizer que $A\rightarrow C$ é obtido através de I4 aplicada a (14".2) e (14".3). Fazendo então o caminho inverso que fizemos no início dessa explicação e transformando a derivação de (14") acima em um esquema de derivação[52], temos que IC5 pode ser provado como segue:

(21) $(\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\varphi)\vdash\alpha\rightarrow\varphi$

| | |
|---|---|
| 1. $(\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\varphi)$ | Premissa |
| 2. $\alpha\rightarrow\beta$ | C1 1 |
| 3. $\beta\rightarrow\varphi$ | C2 1 |
| 4. $\alpha\rightarrow\varphi$ | I4 2,3 |

Como então temos (21), pelo teorema da dedução temos também IC5.

Não é em absoluto difícil de ver, comparando a prova acima com a primeira prova que demos para IC5, o quão esse procedimento pode simplificar o processo de construção de provas. Resumindo então, de uma forma geral, o teorema 2.5 nos garante a possibilidade de utilizarmos quaisquer regras previamente provadas na construção de novas derivações[53].

52. Para o qual podemos dar uma justificativa semelhante à que demos no final da seção 5.4, quando introduzimos a ideia de provar não relações dedutivas mas esquemas de relação.

53. Devemos apenas atentar para a não ocorrência de circularidade, isto é, de que, na prova da relação X, usemos a relação Y, em que na própria na prova da relação Y usamos a relação X.

Dois bons exemplos de uso das regras derivadas previamente provadas na construção de novas derivações são IC9 e IC10: ambos podem ser facilmente provados usando as regras I1, I6, IC1 e IC2. Comecemos por IC9:

(22) $\alpha\rightarrow\beta\vdash\alpha\wedge\varphi\rightarrow\beta\wedge\varphi$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\rightarrow\beta$ | Premissa |
| 2. $\varphi\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$ | I1 1 |
| 3. $\alpha\rightarrow(\varphi\rightarrow\beta)$ | I6 2 |
| 4. $\alpha\wedge\varphi\rightarrow\beta$ | IC1 3 |
| 5. $\alpha\wedge\varphi\rightarrow\varphi$ | P4 |
| 6. $\alpha\wedge\varphi\rightarrow\beta\wedge\varphi$ | IC2 4,5 |

Como temos (22), pelo teorema da dedução temos também IC9. Já IC10 pode ser provado sem muita complicação sem o auxílio do teorema da dedução:

(IC10) $\alpha\rightarrow\varphi,\beta\rightarrow\gamma\vdash\alpha\wedge\beta\rightarrow\varphi\wedge\gamma$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\rightarrow\varphi$ | Premissa |
| 2. $\beta\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi)$ | I1 1 |
| 3. $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi)$ | I6 2 |
| 4. $\alpha\wedge\beta\rightarrow\varphi$ | IC1 3 |
| 5. $\beta\rightarrow\gamma$ | Premissa |
| 6. $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)$ | I1 5 |
| 7. $\alpha\wedge\beta\rightarrow\gamma$ | IC1 6 |
| 8. $\alpha\wedge\beta\rightarrow\varphi\wedge\gamma$ | IC2 4,7 |

Em relação aos dois cálculos introduzidos nesta seção, algo digno de nota é que, quando passamos de $C_{\wedge-}$ para $C_{\wedge}$, através da introdução dos axiomas da implicação, abrimos a possibilidade de expressar várias leis usando o conectivo derivado $\leftrightarrow$, visto que o mesmo é definido em função de $\wedge$ e de $\rightarrow$ (definição 1.4). Assim podemos não só representar na linguagem lógica a equivalência que mencionamos acima entre $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi)$ e $(\alpha\wedge\beta)\rightarrow\varphi$, por exemplo, mas também provar tal relação. Segue abaixo alguns dos vários teoremas lógicos expressos em termos do bicondicional que podemos provar em $C_{\wedge}$ e que representam propriedades lógicas importantes:

**Teorema 2.6** Sejam $\alpha,\beta,\varphi\in L_p$ fórmulas quaisquer. As relações abaixo são válidas em $C_{\wedge}$.

BC1. $\vdash\alpha\leftrightarrow\alpha$ *reflexividade da equivalência*

BC2. $\vdash(\alpha\leftrightarrow\beta)\rightarrow(\beta\leftrightarrow\alpha)$ *simetria da equivalência*

BC3. $\vdash(\alpha\leftrightarrow\beta)\wedge(\beta\leftrightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\leftrightarrow\varphi)$ *transitividade da equivalência*

BC4. $\vdash\alpha\wedge\beta\leftrightarrow\beta\wedge\alpha$ *comutatividade da conjunção*

BC5. $\vdash(\alpha\wedge(\beta\wedge\varphi))\leftrightarrow((\alpha\wedge\beta)\wedge\varphi)$ *associatividade da conjunção*

BC6. $\vdash\alpha\wedge\alpha\leftrightarrow\alpha$ *idempotência da conjunção*

BC7. $\vdash(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))\leftrightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))$

BC8. $\vdash(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))\leftrightarrow(\beta\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))$

BC9. $\vdash(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))\leftrightarrow(\alpha\wedge\beta\rightarrow\varphi)$

BC10. $\vdash(\alpha\rightarrow\beta\wedge\varphi)\leftrightarrow(\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\alpha\rightarrow\varphi)$

Comecemos por BC1. Trivialmente, esse princípio da reflexifidade da equivalência é nada mais do que a conjunção de duas ocorrências de I3: $(\alpha\rightarrow\alpha)\wedge(\alpha\rightarrow\alpha)$. Assim, para provar BC1, basta provar $\alpha\rightarrow\alpha$ e usá-lo juntamente com C3. Aqui então surge uma pergunta similar à que respondemos en relação à IC5: como já provamos I3, será que, na prova de BC1, é necessário reescrever toda a derivação de I3? Claramente não. Um teorema lógico, lembremos, nada mais é do que uma fórmula deduzida a partir do conjunto vazio, o que nos permite ver um esquema de teorema lógico como uma regra de inferência a partir do conjunto vazio. Assim, semelhantemente ao que temos feito até agora com as regras derivadas, podemos usar o teorema 2.5 e tomar vantagem do fato de que já temos uma derivação para I3. Segue abaixo então a prova abreviada de BC1, já fazendo uso, obviamente, do teorema 2.5:

(BC1) $\vdash\alpha\leftrightarrow\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\rightarrow\alpha$ | I3 |
| 2. $\alpha\rightarrow\alpha$ | I3 |
| 3. $(\alpha\rightarrow\alpha)\wedge(\alpha\rightarrow\alpha)$ | C3 1,2 |

Aqui temos, em (BC1.3), o uso de uma regra de inferência derivada com a qual já estamos familiarizados: C3 aplicada a (BC1.1) e (BC1.2). Já as duas primeiras linhas fazem referência não a uma regra derivada, mas a um teorema lógico previamente provado. Para ver que aqui também temos uma aplicação do teorema 2.5, tome $\Gamma=\varnothing$, $\alpha\equiv(\alpha\rightarrow\alpha)\wedge(\alpha\rightarrow\alpha)$, $\Delta_1=\Delta_2=\varnothing$, $\Delta_3=\{\alpha\rightarrow\alpha,\alpha\rightarrow\alpha\}$, $\beta_1\equiv\beta_2\equiv\alpha\rightarrow\alpha$ e $\beta_3\equiv(\alpha\rightarrow\alpha)\wedge(\alpha\rightarrow\alpha)$. Assim, como temos $\Delta_1\vdash\beta_1$, $\Delta_2\vdash\beta_2$ e $\Delta_3\vdash\beta_3$ (I3 e C3, já previamente provados por nós), $\Gamma\vdash\Delta_1$, $\Gamma\vdash\Delta_2$ (lembre-se que, conforme mencionado na seção 5.2, de acordo com a definição 1.15, $\Gamma\vdash\varnothing$) e $\Gamma\vdash\Delta_3$ (aqui, novamente, a prova prévia de I3 justifica esse passo) e $\Gamma\cup\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}\vdash\alpha$ (trivial), então temos também que $\Gamma\vdash\alpha$.

Assim vemos que o uso de teoremas lógicos na abreviação de derivações nada mais é do que um subcaso específico do teorema 2.5, subcaso este que é explicitado no corolário abaixo:

**COROLÁRIO 2.3** Seja $C=<L,\Sigma,\Lambda>$ um cálculo axiomático, $\Gamma\subseteq L$ um conjunto de fórmulas e $\alpha,\beta_1,...,\beta_n\in L$ $n+1$ fórmulas. Se, no cálculo C, $\vdash\beta_1,..., \vdash\beta_n$ e $\Gamma\cup\{\beta_1,..., \beta_n\}\vdash\alpha$, então $\Gamma\vdash\alpha$ em C.

No uso de teoremas lógicos em conjunto com o teorema 2.5, mencionaremos, na exibição de nossas derivações abreviadas, simplesmente o nome do teorema lógico usado. Elaborando mais um pouco essa ideia, vejamos como seriam as derivações de BC7 e BC8:

(BC7) $\vdash(\alpha\to(\beta\to\varphi))\leftrightarrow((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\varphi))$

| | |
|---|---|
| 1. $(\alpha\to(\beta\to\varphi))\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\varphi))$ | P2 |
| 2. $((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\varphi))\to(\alpha\to(\beta\to\varphi))$ | I11 |
| 3. $(\alpha\to(\beta\to\varphi))\leftrightarrow((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\varphi))$ | C3 1,2 |

(BC8) $\vdash(\alpha\to(\beta\to\varphi))\leftrightarrow(\beta\to(\alpha\to\varphi))$

| | |
|---|---|
| 1. $(\alpha\to(\beta\to\varphi))\to(\beta\to(\alpha\to\varphi))$ | I7 |
| 2. $(\beta\to(\alpha\to\varphi))\to(\alpha\to(\beta\to\varphi))$ | I7 |
| 3. $(\alpha\to(\beta\to\varphi))\leftrightarrow(\beta\to(\alpha\to\varphi))$ | C3 1,2 |

Aqui, enquanto na derivação de BC7 utilizamos I11 em conjunto com C3, em BC8 usamos I7 duas vezes em conjunto com C3.

O leitor pode notar que nessas duas derivações o uso de C3 foi fundamental. Tal regra, podemos dizer, tem como propósito "unir" duas premissas com o auxílio do conectivo $\wedge$. Como a dupla implicação é nada mais do que de uma conjunção de duas implicações, C3 claramente é de grande valia na construção de derivações de teoremas lógicos bicondicionais, como é o caso dos teoremas lógicos do teorema 2.6. Já vimos como BC1 pode ser provado usando I3 em conjunto com C3, BC7 usando P2 e I11, e BC8 usando I7. Vejamos como provaríamos BC6:

(BC6) $\vdash\alpha\wedge\alpha\leftrightarrow\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\wedge\alpha\to\alpha$ | P3 |
| 2. $\alpha\to(\alpha\to(\alpha\wedge\alpha))$ | P5 |
| 3. $(\alpha\to\alpha)\to(\alpha\to\alpha\wedge\alpha)$ | I2 2 |
| 4. $\alpha\to\alpha$ | I3 |
| 5. $\alpha\to\alpha\wedge\alpha$ | MP 4,3 |
| 6. $\alpha\wedge\alpha\leftrightarrow\alpha$ | C3 1,5 |

Veja que aqui os passos (BC6.2)-(BC6.5) consistem em uma derivação de

(23) $\vdash\alpha\rightarrow(\alpha\wedge\alpha)$

Assim, poderíamos tornar a derivação de BC6 mais modular e simples se tivéssemos provado (23) separadamente e depois usado-o juntamente com P3 e C3 para provar BC6.

Para finalizar esta seção, seguem abaixo os corolários que estabelecem que todos os teoremas lógicos e regras derivadas vistos até aqui são válidos também no cálculo clássico proposicional.

**COROLÁRIO 2.4** $C_P$ é uma extensão conservativa de $C_\wedge$ e de $C_{\wedge-}$.

**COROLÁRIO 2.5** As relações mencionadas nos teoremas 2.3, 2.4 e 2.6 são válidas em $C_P$.

## 6.4 Disjunção e o cálculo $C_\vee$

Nesta última seção do capítulo 6 apresentaremos os teoremas lógicos e regras derivadas da disjunção. Para tal, definiremos três cálculos: um contendo apenas os axiomas da disjunção, outro contendo, em adição a P6-P8, os axiomas da implicação e, finalmente, outro cálculo contendo os axiomas P1-P8. Segue abaixo a definição do primeiro cálculo da disjunção, que chamamos simplesmente de cálculo fraco da disjunção.

**DEFINIÇÃO 2.5** O *cálculo fraco da disjunção* $C_{\vee-}$ é a tripla $<L_P,\Sigma_{MP},\Lambda_{P6\text{-}P8}>$.

Da mesma forma que fizemos com os cálculos anteriores, podemos, a partir dessa definição e em conjunto com as definições 1.13 e 1.14, obter a relação de dedução de $C_{\vee-}$. Uma vez feito isso, podemos provar o teorema abaixo, que contém alguns teoremas lógicos e regras derivadas de $C_{\vee-}$:

**TEOREMA 2.7** Sejam $\alpha,\beta,\varphi\in L_P$ fórmulas quaisquer. As relações abaixo são válidas em $C_{\vee-}$.

D1. $\alpha\vdash\alpha\vee\beta$

D2. $\beta\vdash\alpha\vee\beta$

D3. $\alpha\rightarrow\varphi, \beta\rightarrow\varphi\vdash\alpha\vee\beta\rightarrow\varphi$

D4. $\alpha\vee\beta\vdash\beta\vee\alpha$ *Comutatividade da Disjunção*

Os teoremas D1, D2 e D3 representam, sob a forma inferencial, os axiomas P6, P7 e P8, respectivamente. D4 por sua vez representa o fato mais ou menos trivial de que de $\alpha\vee\beta$ podemos inferir $\beta\vee\alpha$. Seguem abaixo as provas de D1, D2 e D3:

(D1) $\alpha\vdash\alpha\vee\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha$ | Premissa |
| 2. $\alpha\rightarrow\alpha\vee\beta$ | P6 |
| 3. $\alpha\vee\beta$ | MP 1,2 |

(D2) $\beta\vdash\alpha\vee\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\beta$ | Premissa |
| 2. $\beta\rightarrow\alpha\vee\beta$ | P7 |
| 3. $\alpha\vee\beta$ | MP 2,1 |

(D3) $\alpha\rightarrow\varphi$, $\beta\rightarrow\varphi\vdash\alpha\vee\beta\rightarrow\varphi$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\rightarrow\varphi$ | Premissa |
| 2. $\beta\rightarrow\varphi$ | Premissa |
| 3. $(\alpha\rightarrow\varphi)\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\vee\beta\rightarrow\varphi))$ | P8 |
| 4. $(\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\vee\beta\rightarrow\varphi)$ | MP 1,3 |
| 5. $\alpha\vee\beta\rightarrow\varphi$ | MP 2,4 |

Algo que podemos mencionar aqui é que talvez alguém argumente que D4, por exemplo, sendo por demais óbvio, não necessitaria do que temos chamado até agora de *prova*. Sendo "A ou B" e "B ou A" trivialmente equivalentes entre si, é óbvio que podemos concluir um a partir do outro. Lembremos, no entanto, que uma linguagem lógica opera no nível puramente sintático, não estabelecendo nada digno de ser chamado o significado dos símbolos. Dessa forma, $A\vee B$ e $B\vee A$ são exatamente o que uma análise puramente sintática nos permite concluir: concatenações de símbolos e, consequentemente, elementos da linguagem proposicional diferentes um do outro. Assim, do ponto de vista da linguagem lógica não há nenhuma informação capaz de justificar a suposta obviedade de D4. Semelhantemente então a qualquer outra relação dedutiva, para provarmos que D4 é válida, temos que exibir uma derivação de $\beta\vee\alpha$ a partir de $\alpha\vee\beta$. Segue abaixo tal derivação:

(D4) $\alpha\vee\beta\vdash\beta\vee\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\rightarrow\beta\vee\alpha$ | P7 |
| 2. $\beta\rightarrow\beta\vee\alpha$ | P6 |
| 3. $\alpha\vee\beta\rightarrow\beta\vee\alpha$ | D3 1,2 |
| 4. $\alpha\vee\beta$ | Premissa |
| 5. $\beta\vee\alpha$ | MP 4,3 |

O leitor talvez já tenha notado que, da mesma forma como acontece com $C_{\wedge-}$, $C_{\vee-}$ é um sistema fraco, não sendo capaz de provar muitas das propriedades mais elementares da disjunção. Por exemplo, a prova de

(24) $\alpha\vee\alpha\vdash\alpha$

não pode ser feita sem o auxílio de I3 (que por sua vez depende de P1 e P2):

| | | |
|---|---|---|
| (25) | 1. $\alpha\to\alpha$ | I3 |
| | 2. $\alpha\to\alpha$ | I3 |
| | 3. $\alpha\vee\alpha\to\alpha$ | D3 1,2 |
| | 4. $\alpha\vee\alpha$ | Premissa |
| | 5. $\alpha$ | MP 4,3 |

Assim, para sermos capazes de derivar algumas das propriedades mais interessantes da disjunção, precisamos adicionar a $C_{\vee-}$ os axiomas da implicação P1 e P2; após o que obtemos o que chamamos de cálculo forte da disjunção.

**Definição 2.6** O *cálculo forte da disjunção* $C_{\vee+}$ é a tripla $\langle L_P,\Sigma_{MP},\Lambda_{P1,P2,P6\text{-}P8}\rangle$.

Seguem abaixo alguns dos teoremas lógicos e regras derivadas mais importantes de $C_{\vee+}$[54]:

**Teorema 2.8** Sejam $\alpha,\beta,\varphi\in L_P$ fórmulas quaisquer. As relações abaixo são válidas em $C_{\vee+}$.

ID1. $\alpha\vee\alpha\vdash\alpha$

ID2. $\alpha\vee(\beta\vee\varphi)\vdash(\alpha\vee\beta)\vee\varphi$

ID3. $(\alpha\vee\beta)\vee\varphi\vdash\alpha\vee(\beta\vee\varphi)$

ID4. $\vdash(\alpha\to\beta)\to(\alpha\vee\varphi\to\beta\vee\varphi)$

ID5. $\alpha\to\varphi,\beta\to\gamma\vdash\alpha\vee\beta\to\varphi\vee\gamma$

ID6. $\alpha\vee\varphi\vdash(\alpha\to\beta)\to\varphi\vee\beta$

ID7. $\vdash\alpha\vee\beta\to((\alpha\to\beta)\to\beta)$

Juntamente com ID3, ID2 determina aquilo que chamamos de *associatividade da disjunção*. A despeito da aparente trivialidade de ID3, por exemplo, sua prova contém certo grau de sofisticação:

---

**54.** ID1 é (24), que provamos acima.

(ID3) $(\alpha\vee\beta)\vee\varphi\vdash\alpha\vee(\beta\vee\varphi)$

| | |
|---|---|
| 1. $\beta\to\beta\vee\varphi$ | P6 |
| 2. $\beta\vee\varphi\to\alpha\vee(\beta\vee\varphi)$ | P7 |
| 3. $\beta\to\alpha\vee(\beta\vee\varphi)$ | I4 1,2 |
| 4. $\varphi\to\beta\vee\varphi$ | P7 |
| 5. $\beta\vee\varphi\to\alpha\vee(\beta\vee\varphi)$ | P7 |
| 6. $\varphi\to\alpha\vee(\beta\vee\varphi)$ | I4 4,5 |
| 7. $\alpha\to\alpha\vee(\beta\vee\varphi)$ | P6 |
| 8. $\alpha\vee\beta\to\alpha\vee(\beta\vee\varphi)$ | D3 7,3 |
| 9. $(\alpha\vee\beta)\vee\varphi\to\alpha\vee(\beta\vee\varphi)$ | D3 8,6 |
| 10. $(\alpha\vee\beta)\vee\varphi$ | Premissa |
| 11. $\alpha\vee(\beta\vee\varphi)$ | MP 10,9 |

Um tipo diferente de sofisticação é encontrado na prova de ID6, na qual temos que provar primeiro, com o auxílio do teorema da dedução, os dois resultados intermediários abaixo:

(26) $\vdash\alpha\to((\alpha\to\beta)\to\varphi\vee\beta)$

(27) $\vdash\varphi\to((\alpha\to\beta)\to\varphi\vee\beta)$

(28) $\alpha,\alpha\to\beta\vdash\varphi\vee\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha$ | Premissa |
| 2. $\alpha\to\beta$ | Premissa |
| 3. $\beta$ | MP 1,2 |
| 4. $\varphi\vee\beta$ | D2 3 |

(29) $\varphi,\alpha\to\beta\vdash\beta\vee\varphi$

| | |
|---|---|
| 1. $\varphi$ | Premissa |
| 2. $\varphi\vee\beta$ | D1 1 |

Como temos (28) e (29), usando o teorema da dedução duas vezes (em cada relação), temos também (26) e (27). De posse desses resultados, construímos de forma trivial a derivação de ID6:

(ID6) $\alpha\vee\varphi\vdash(\alpha\to\beta)\to\varphi\vee\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\to((\alpha\to\beta)\to\varphi\vee\beta)$ | (26) |
| 2. $\varphi\to((\alpha\to\beta)\to\varphi\vee\beta)$ | (27) |
| 3. $(\alpha\vee\varphi)\to((\alpha\to\beta)\to\varphi\vee\beta)$ | D3 1,2 |

4. $\alpha \vee \varphi$ Premissa

5. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \varphi \vee \beta$ MP 4,3

Vejamos como seria a prova de ID4:

(30) $(\alpha \rightarrow \beta).\alpha \vee \varphi \rightarrow \beta \vee \varphi$

1. $\alpha \rightarrow \beta$ Premissa
2. $\varphi \rightarrow \beta \vee \varphi$ P7
3. $\beta \rightarrow \beta \vee \varphi$ P6
4. $\alpha \rightarrow \beta \vee \varphi$ I4 1,3
5. $\alpha \vee \varphi \rightarrow \beta \vee \varphi$ D3 4,2

De posse de (30), pelo teorema da dedução concluímos ID4.

O leitor deve ter notado que ID2 e ID3 são o converso um do outro, o que seria muito mais naturalmente expresso usando-se a dupla implicação:

(31) $\alpha \vee (\beta \vee \varphi) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \vee \varphi$

Obviamente que para sermos capazes de provar (31) temos que ter em nosso conjunto de axiomas os axiomas da conjunção P3-P5. Faremos isso adicionando tais axiomas a $C_{\vee+}$, após o que obtemos o que chamamos simplesmente de cálculo da disjunção:

**DEFINIÇÃO 2.7** O *cálculo da disjunção* $C_{\vee}$ é a tripla $<L_P,\Sigma_{MP},\Lambda_{P1\text{-}P8}>$.

Segue abaixo alguns teoremas lógicos interessantes que podemos provar em $C_{\vee}$:

**TEOREMA 2.9** Sejam $\alpha,\beta,\varphi \in L_P$ fórmulas quaisquer. As relações abaixo são válidas em $C_{\vee}$.

ICD1. $\vdash \alpha \vee \beta \leftrightarrow \beta \vee \alpha$ *Comutatividade da Disjunção*

ICD2. $\vdash \alpha \vee \alpha \leftrightarrow \alpha$ *Idempotência da Disjunção*

ICD3. $\vdash \alpha \vee (\beta \vee \varphi) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \vee \varphi$ *Associatividade da Disjunção*

ICD4. $\vdash (\alpha \wedge \beta) \vee \varphi \leftrightarrow (\alpha \vee \varphi) \wedge (\beta \vee \varphi)$ *Distributividade de* $\vee$ *com* $\wedge$

ICD5. $\vdash (\alpha \vee \beta) \wedge \varphi \leftrightarrow (\alpha \wedge \varphi) \vee (\beta \wedge \varphi)$ *Distributividade de* $\wedge$ *com* $\vee$

Além possibilitar a prova de fórmulas como (30), que no teorema 2.9 recebe a denominação de ICD3, $C_{\vee}$ também torna possível a prova de princípios que relacionam a disjunção com a conjunção, como é o caso de ICD4 e ICD5. Enquanto ICD4 distribui a disjunção em relação à conjunção, ICD5 permite a distribuição da conjunção em relação à disjunção. Provemos ICD4. Para isso, precisamos provar os dois resultados intermediários abaixo:

(32) $\vdash(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi\rightarrow(\alpha\vee\varphi)\wedge(\beta\vee\varphi)$

(33) $\vdash(\alpha\vee\varphi)\wedge(\beta\vee\varphi)\rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi$

Comecemos pela prova de (32):

(32) $\vdash(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi\rightarrow(\alpha\vee\varphi)\wedge(\beta\vee\varphi)$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\rightarrow\alpha\vee\varphi$ | P6 |
| 2. $\beta\rightarrow\beta\vee\varphi$ | P6 |
| 3. $\alpha\wedge\beta\rightarrow(\alpha\vee\varphi)\wedge(\beta\vee\varphi)$ | IC10 1,2 |
| 4. $\varphi\rightarrow\alpha\vee\varphi$ | P7 |
| 5. $\varphi\rightarrow\beta\vee\varphi$ | P7 |
| 6. $\varphi\rightarrow(\alpha\vee\varphi)\wedge(\beta\vee\varphi)$ | IC2 4,5 |
| 7. $(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi\rightarrow(\alpha\vee\varphi)\wedge(\beta\vee\varphi)$ | D3 3,6 |

Para provarmos (33), temos de provar primeiro, usando o teorema da dedução, o resultado intermediário abaixo:

(34) $\vdash\varphi\rightarrow(\beta\vee\varphi\rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi)$

(35) $\varphi\vdash\beta\vee\varphi\rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi$

| | |
|---|---|
| 1. $\varphi$ | Premissa |
| 2. $\beta\rightarrow\varphi$ | I1 1 |
| 3. $\varphi\rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi$ | P7 |
| 4. $\beta\rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi$ | I4 2,3 |
| 5. $\beta\vee\varphi\rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi$ | D3 4,3 |

Como temos (35), pelo teorema da dedução temos também (34). De posse então de (34), podemos construir a derivação de (33):

(33) $\vdash(\alpha\vee\varphi)\wedge(\beta\vee\varphi)\rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi$

| | |
|---|---|
| 1. $\varphi\rightarrow(\beta\vee\varphi\rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi)$ | (34) |
| 2. $(\beta\rightarrow\alpha\wedge\beta)\rightarrow(\beta\vee\varphi\rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi)$ | ID4 |
| 3. $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha\wedge\beta)$ | P5 |
| 4. $\alpha\rightarrow(\beta\vee\varphi\rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi)$ | I4 3,2 |
| 5. $\alpha\vee\varphi\rightarrow(\beta\vee\varphi\rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi)$ | D3 4,1 |
| 6. $(\alpha\vee\varphi)\wedge(\beta\vee\varphi)\rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi$ | IC1 5 |

Uma vez provados (32) e (33), provamos facilmente ICD4:

(ICD4) $\vdash(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi\leftrightarrow(\alpha\vee\varphi)\wedge(\beta\vee\varphi)$

| | |
|---|---|
| 1. $(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi\rightarrow(\alpha\vee\varphi)\wedge(\beta\vee\varphi)$ | (32) |

2. $(\alpha\vee\varphi)\wedge(\beta\vee\varphi)\rightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi$ (33)

3. $(\alpha\wedge\beta)\vee\varphi\leftrightarrow(\alpha\vee\varphi)\wedge(\beta\vee\varphi)$ C3 1,2

Para finalizar, seguem abaixo os corolários que estabelecem que todos os teoremas lógicos e regras derivadas vistos nesta seção são válidos também no cálculo clássico proposicional:

**COROLÁRIO 2.6** $C_P$ é uma extensão conservativa de $C_\vee$, $C_{\vee+}$ e $C_{\vee-}$.

**COROLÁRIO 2.7** As relações mencionadas nos teoremas 2.7, 2.8 e 2.9 são válidas em $C_P$.

## 6.5 Exercícios Propostos

1. Prove os corolários 2.1 e 2.2.
2. Responda as questões abaixo referentes ao teorema 2.1:
   a. Qual o significado das relações I3, I6, I8, I9 e I11?
   b. Por que I6 é chamado de lei da permutação?
   c. Qual a relação que há entre I11 e o axioma P2?
   d. Que relação existe entre I3, I8 e I9?
3. Prove que os esquemas de relação abaixo são válidos em $C_{\rightarrow}$:
   a. $\vdash(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))$
   b. $(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi)\vdash\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi)$
   c. $\vdash\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\alpha)$
4. Em relação ao teorema 2.1, prove I3 e I8.
5. Faça o que é pedido a seguir:
   a. Prove que $C_{\wedge}$ é uma extensão conservativa de $C_{\wedge-}$;
   b. Prove que $C_{\wedge}$ é uma extensão conservativa de $C_{\rightarrow}$.
6. Diga o que significa e prove a relação C4 do teorema 2.3.
7. Responda as questões abaixo referentes ao teorema 2.4:
   a. O que significa IC2, e qual a relação que há entre ele e IC3 e IC4?
   b. Qual o significado de IC6, IC7 e IC8, e que relação há entre eles?
   c. Que relação que há entre IC2 e IC8? E entre IC2 e IC10?
   d. O que significa IC9?
8. Responda as questões abaixo referentes ao teorema 2.6:
   a. Qual o significado de BC2 e BC4 e que relação há entre eles e C4?
   b. Qual o significado de BC3 e que relação há entre ele e IC5?
   c. Qual o significado de BC5, BC6, BC7 e BC8?
   d. Que relação há entre BC9 e IC1?
   e. Que relação há entre BC10 e IC8?
9. Prove que os esquemas de relações abaixo são válidos em $C_{\wedge}$, utilizando-se possivelmente dos teoremas 2.2 e 2.5:
   a. $\vdash(\alpha\wedge\beta)\rightarrow(\beta\wedge\alpha)$
   b. $\vdash(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))\rightarrow(\alpha\wedge\beta\rightarrow\varphi)$
   c. $(\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\alpha\rightarrow\varphi)\vdash\alpha\rightarrow\beta\wedge\varphi$
   d. $\vdash(\alpha\rightarrow(\beta\wedge\varphi))\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$
   e. $\alpha\rightarrow\beta\vdash\alpha\wedge\varphi\rightarrow\beta\wedge\varphi$
   f. $\alpha\leftrightarrow\beta\vdash\beta\leftrightarrow\alpha$
   g. $\alpha\vdash\alpha\wedge\alpha$
   h. $\alpha\wedge\beta\rightarrow\varphi\vdash\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi)$
   i. $\alpha\rightarrow\beta\wedge\varphi\vdash(\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\alpha\rightarrow\varphi)$
10. Faça o que é pedido a seguir em relação ao teorema 2.4, utilizando-se possivelmente dos teoremas 2.2 e 2.5:
    a. Prove IC3;

b. Prove IC4 usando IC2;

c. Prove IC6 e IC7;

d. Prove IC8 usando as formas implicativas de IC6 e IC7, e IC2 como regra derivada;

e. Prove IC2 utilizando-se de IC10.

11. Prove o corolário 2.3 a partir do teorema 2.5.
12. Prove I9 utilizando I3 juntamente com o teorema 2.5.
13. Faça o que é pedido a seguir em relação ao teorema 2.6, utilizando-se possivelmente dos teoremas 2.2 e 2.5:

    a. Prove BC2 e BC4;

    b. Prove BC3 e BC5;

    c. Prove BC9 e BC10.
14. Prove os corolários 2.4 e 2.5.
15. Em relação ao teorema 2.8, qual o significado de ID4, ID5, ID6 e ID7, e que relação há entre eles?
16. Em relação ao teorema 2.8, prove ID1, ID5 e ID7, utilizando-se possivelmente dos teoremas 2.2 e 2.5.
17. Em relação ao teorema 2.9, o que significam ICD4 e ICD5?
18. Faça o que é pedido a seguir em relação ao teorema 2.9, utilizando-se possivelmente dos teoremas 2.2 e 2.5:

    a. Prove ICD1 usando D4;

    b. Prove ICD2 usando ID1 e P5;

    c. Prove ICD3 usando ID2 e ID3;

    d. Prove ICD5.
19. Prove os corolários 2.6 e 2.7.
20. Prove que $C_{\vee}$ é uma extensão conservativa de $C_{\vee+}$ e de $C_{\vee-}$.

# 7
# Negação e os cálculos clássico, intuicionista e paraconsistente

## 7.1 P9 e a negação minimal

Dedicar-nos-emos, neste capítulo, a apresentar os teoremas lógicos e regras de inferência derivadas relacionados com a negação. Diferentemente, no entanto, do que aconteceu com nossa exposição dos outros conectivos, deparar-nos-emos aqui com um fenômeno inteiramente novo. Conforme adiantado no início do capítulo anterior, os axiomas da negação P9, P10 e P11 podem ser vistos como caracterizando não apenas uma, mas várias negações. A razão disso é que certas propriedades oriundas desses axiomas têm sido vistas com certa desconfiança por diversos teóricos. Os exemplos que demos no capítulo 6 foram o princípio do terceiro excluído

(1) $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$

e o princípio da explosão

(2) $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$

De acordo com certa concepção filosófica, o significado dos conectivos lógicos e a prova das fórmulas por eles compostas devem ser explicados em termos da noção matemática de *construção*. Mais especificamente, a menos que tenhamos uma construção que prove uma determinada sentença $\alpha$, não podemos aceitar $\alpha$ como verdade. Por exemplo, se desejamos provar $A \wedge B$, temos que construir uma prova para A e uma prova para B; similarmente, se desejamos provar $A \vee B$ temos que construir uma prova para A ou uma prova para B. Mas, se aceitamos (1), então estamos assumindo que, para qualquer fórmula $\alpha$, existe uma prova para $\alpha \vee \neg\alpha$, mesmo que não tenhamos a menor ideia de como construir uma prova para $\alpha$ ou para $\neg\alpha$. Isso fica mais dramático se consideramos certos resultados como a generalização do 1° teorema da incompletude de Godel, por exemplo, que diz que para todo sistema S rico o suficiente para expressar a aritmética, existe um enunciado $\varphi$ tal que nem $\varphi$ nem $\neg\varphi$ podem ser provados em S. Conforme vimos no capítulo 2, chamamos o sistema lógico que rejeita (1) de *lógica intuicionista,* sendo a negação a ele associada chamada de *negação intuicionista*.

Já com (2) o problema é que, sob diversos pontos de vista, parece absurdo supor que a partir de uma contradição podemos inferir todo e qualquer enunciado. De acordo com (2), por exemplo, a partir de (3) e (4) abaixo

(3) Fará sol amanhã.

(4) Não fará sol amanhã.

podemos concluir disparates como

(5) A lua é feita de queijo.

ou

(6) 2+2=5.

Isso motivou a criação de sistemas lógicos nos quais (2) não é válido, isto é, sistemas lógicos capazes de tolerar contradições sem acarretar o que chamamos de *trivialização da teoria*, ou seja, sem que possamos inferir todo e qualquer enunciado a partir daí. A tal classe de lógicas damos o nome de *lógicas paraconsistentes*, sendo a negação a elas associadas chamada de *negação paraconsistente*.

Nosso objetivo aqui não é fornecer uma introdução às lógicas não clássicas; conforme mencionado no capítulo anterior, o objetivo principal deste capítulo é a exposição e prova dos vários teoremas lógicos e regras derivadas do cálculo clássico proposicional. No entanto, em função do método que estamos adotando, nos depararemos, na apresentação dos vários teoremas e regras derivadas da negação, com o cálculo não clássico intuicionista e com um cálculo paraconsistente. Assim, tomando vantagem da situação, aproveitaremos a presença de tais cálculos para discorrer brevemente sobre algumas propriedades interessantes de tais cálculos não clássicos.

Comecemos com o que chamamos de cálculo fraco da negação minimal; como veremos mais adiante, em função de possuírem P9 como único axioma da negação, tanto esse cálculo fraco da negação minimal como sua versão completa, a ser introduzida a seguir, podem ser vistos como cálculos *semiparaconsistentes*:

**DEFINIÇÃO 2.8** O *cálculo fraco da negação minimal* $C_{\neg m-}$ é a tripla $<L_P,\Sigma_{MP},\Lambda_{P1,P2,P9}>$.

Seguem abaixo alguns teoremas lógicos e regras derivadas de $C_{\neg m-}$:

**TEOREMA 2.10** Sejam $\alpha,\beta,\varphi\in L_P$ fórmulas quaisquer. As relações abaixo são válidas em $C_{\neg m-}$.

INm1. $\alpha\to\beta,\alpha\to\neg\beta\vdash\neg\alpha$

INm2. $\neg\alpha,\alpha\vdash\neg\beta$

INm3. $\vdash\neg\alpha\to(\alpha\to\neg\beta)$

INm4. $\alpha\to\beta,\neg\beta\vdash\neg\alpha$ *modus tolens*

INm5. $\alpha\to\beta\vdash\neg\beta\to\neg\alpha$

INm6. $\vdash(\alpha\to\beta)\to(\neg\beta\to\neg\alpha)$ *contrapositiva (metade)*

INm7. $\alpha\to\neg\beta\vdash\beta\to\neg\alpha$

INm8. $\vdash(\alpha\to\neg\alpha)\to\neg\alpha$

INm9. $\vdash(\neg\alpha\to\alpha)\to\neg\neg\alpha$

INm10. $\vdash\alpha\to\neg\neg\alpha$

INm11. $\vdash\neg\neg\neg\alpha\to\neg\alpha$

INm12. $\vdash(\alpha\to\beta)\to(\neg\neg\alpha\to\neg\neg\beta)$

INm13. $\vdash\neg\neg(\alpha\to\beta)\to(\neg\neg\alpha\to\neg\neg\beta)$

INm14. $\vdash(\alpha\to(\beta\to\varphi))\to(\neg\neg\alpha\to(\neg\neg\beta\to\neg\neg\varphi))$

INm15. $\neg\neg(\alpha\to\beta),\neg\neg(\beta\to\varphi)\vdash\neg\neg(\alpha\to\varphi)$

INm16. $\vdash\alpha\to(\neg\beta\to\neg(\alpha\to\beta))$

P9, conforme já falamos, é a representação axiomática do princípio da redução ao absurdo: se $\alpha$ implica $\beta$, então se $\alpha$ implica $\neg\beta$ temos que $\neg\alpha$. Como é fácil de ver, INm1 é a representação inferencial de tal princípio, sendo sua prova um uso trivial de P9:

(INm1) $\alpha\to\beta,\alpha\to\neg\beta\vdash\neg\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\to\beta$ | Premissa |
| 2. $(\alpha\to\beta)\to((\alpha\to\neg\beta)\to\neg\alpha)$ | P9 |
| 3. $(\alpha\to\neg\beta)\to\neg\alpha$ | MP 1,2 |
| 4. $\alpha\to\neg\beta$ | Premissa |
| 5. $\neg\alpha$ | MP 4,3 |

A partir de INm1, em conjunto com a regra I1 (derivada do axioma P1), podemos derivar INm2:

(INm2) $\alpha,\neg\alpha\vdash\neg\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha$ | Premissa |
| 2. $\beta\to\alpha$ | I1 1 |
| 3. $\neg\alpha$ | Premissa |
| 4. $\beta\to\neg\alpha$ | I1 3 |
| 5. $\neg\beta$ | INm1 2,4 |

É fácil de ver que INm2 nos permite, a partir de uma contradição, concluir qualquer fórmula negativa; trata-se, portanto, de uma forma fraca do princípio da explosão. Isso é o máximo que conseguimos obter em $C_{\neg m-}$; a forma plena de tal princípio, representada por (2), somente pode ser provada com o auxílio do axioma P10. (Note que INm3, que nada mais é do que a versão condicional de INm2, é uma versão fraca de P10.) Em outras palavras, apesar de podermos, a partir de uma contradição, provar $\neg\beta$, para qualquer fórmula $\beta$, não podemos provar $\beta$. Por conta disso dizemos que $C_{\neg m-}$ é um cálculo semiparaconsistente.

Poder-se-ia pensar que poderíamos usar INm2 para concluir $\neg\neg\beta$, e então a partir de $\neg\neg\beta$ inferir $\beta$, derivando assim a versão completa do princípio da explosão. No entanto, o princípio do qual tal inferência depende,

(7) $\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha$

não pode ser provado em $C_{\neg m}$; apenas o seu converso, INm10 pode.

INm4 é a famosa regra *modus tolens*. Semelhantemente à *modus ponens*, *modus tolens* parte de um condicional; diferentemente no entanto daquela, tanto sua conclusão como uma de suas premissas são fórmulas negativas. Segue abaixo a prova de INm4:

(INm4) $\alpha\rightarrow\beta,\neg\beta\vdash\neg\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\rightarrow\beta$ | Premissa |
| 2. $\neg\beta$ | Premissa |
| 3. $\alpha\rightarrow\neg\beta$ | I1 2 |
| 4. $\neg\alpha$ | INm1 1,3 |

É fácil de ver que INm5 e INm6 são nada mais do que formulações condicionais de INm4. Como seria de se esperar, a prova de ambos INm5 e INm6 é bastante trivial: como temos INm4, então de acordo com o teorema da dedução temos INm5. Mas como temos INm5, pelo mesmo teorema da dedução concluímos INm6.

Várias propriedades importantes da negação podem ser provadas com o auxílio de *modus tolens* e suas variantes condicionais INm5 e INm6. INm12, por exemplo, pode ser provado simplesmente usando-se INm6 duas vezes:

(INm12) $\vdash(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\neg\neg\alpha\rightarrow\neg\neg\beta)$

| | |
|---|---|
| 1. $(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)$ | INm6 |
| 2. $(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)\rightarrow(\neg\neg\alpha\rightarrow\neg\neg\beta)$ | INm6 |
| 3. $(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\neg\neg\alpha\rightarrow\neg\neg\beta)$ | I4 1,2 |

Note que INm6 é metade da famosa *lei da contrapositiva*:

(8) $(\alpha\rightarrow\beta)\leftrightarrow(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)$

O converso de INm6, no entanto, do qual (8) obviamente depende, não pode ser provado em $C_{\neg m-}$. Na verdade os conversos de boa parte dos teoremas lógicos mencionados no teorema 2.10 são tais que eles não podem ser provados em $C_{\neg m-}$. Apenas quando estivermos trabalhando com o cálculo clássico proposicional e usando os onze axiomas da definição 1.17, em especial o axioma P11, é que seremos capazes de prová-los. Por exemplo, apenas quando pudermos provar (7) é que poderemos derivar aquilo que, juntamente com INm10, compõem o que chamamos de *lei da dupla negação*:

(9) $\neg\neg\alpha\leftrightarrow\alpha$

Para provarmos INm10, é útil provarmos primeiro INm7:

(INm7) $\alpha\to\neg\beta\vdash\beta\to\neg\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\to\neg\beta$ | Premissa |
| 2. $(\alpha\to\beta)\to((\alpha\to\neg\beta)\to\neg\alpha)$ | P9 |
| 3. $\beta\to(\alpha\to\beta)$ | P1 |
| 4. $\beta\to((\alpha\to\neg\beta)\to\neg\alpha)$ | I4 3,2 |
| 5. $(\alpha\to\neg\beta)\to(\beta\to\neg\alpha)$ | I6 4 |
| 6. $\beta\to\neg\alpha$ | MP 1,5 |

Segue então abaixo a prova de INm10 (a instância de INm7 usada aqui é obtida substituindo $\alpha$ por $\neg\alpha$ e $\beta$ por $\alpha$):

(INm10) $\vdash\alpha\to\neg\neg\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg\alpha\to\neg\alpha$ | I3 |
| 2. $\alpha\to\neg\neg\alpha$ | INm7 1 |

Veja que, apesar de não podermos provar a lei da dupla negação em $C_{\neg m-}$, temos uma versão mais fraca, podemos assim dizer, de (7) que é INm11. Segue abaixo a sua derivação:

(INm11) $\vdash\neg\neg\neg\alpha\to\neg\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\to\neg\neg\alpha$ | INm10 |
| 2. $\neg\neg\neg\alpha\to\neg\alpha$ | INm5 1 |

Um teorema cuja derivação depende de INm11 (bem como de INm12 e INm5) é INm13. Segue abaixo a prova do resultado intermediário a partir do qual, usando o teorema da dedução, somos capazes de provar INm13:

(10) $\neg\neg(\alpha\to\beta),\neg\neg\alpha\vdash\neg\neg\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg\neg(\alpha\to\beta)$ | Premissa |
| 2. $\neg\neg\alpha$ | Premissa |

| | |
|---|---|
| 3. $(\alpha\to\beta)\to(\neg\neg\alpha\to\neg\neg\beta)$ | INm12 |
| 4. $\neg\neg\alpha\to((\alpha\to\beta)\to\neg\neg\beta)$ | I6 3 |
| 5. $(\alpha\to\beta)\to\neg\neg\beta$ | MP 2,4 |
| 6. $\neg\neg\neg\beta\to\neg(\alpha\to\beta)$ | INm5 5 |
| 7. $\neg\neg(\alpha\to\beta)\to\neg\neg\neg\neg\beta$ | INm5 6 |
| 8. $\neg\neg\neg\neg\beta$ | MP 1,7 |
| 9. $\neg\neg\neg\neg\beta\to\neg\neg\beta$ | INm11 |
| 10. $\neg\neg\beta$ | MP 8,9 |

Como temos (10), de acordo com o teorema da dedução temos

(11) $\neg\neg(\alpha\to\beta)\vdash\neg\neg\alpha\to\neg\neg\beta$

E, consequentemente, pelo mesmo teorema da dedução, temos INm13.

Veja que o converso de INm11 é nada mais do que a instância de INm10 obtida através da substituição de $\alpha$ por $\neg\alpha$:

(12) $\neg\alpha\to\neg\neg\neg\alpha$

Juntando INm11 com (12) obtemos a seguinte versão fraca da lei da dupla negação:

(13) $\neg\neg\neg\alpha\leftrightarrow\neg\alpha$

Mas veja que para provarmos (13) nós temos que usar os axiomas da conjunção, em especial P5. Assim, precisamos de um novo cálculo que contenha outros axiomas além de P1, P2 e P9. Segue então tal cálculo, que chamamos simplesmente *cálculo da negação minimal*:

**DEFINIÇÃO 2.9** O *cálculo da negação minimal* $C_{\neg m}$ é a tripla $<L_P,\Sigma_{MP},\Lambda_{P1\text{-}P9}>$.

Abaixo temos alguns dos teoremas lógicos mais importantes de $C_{\neg m}$:

**TEOREMA 2.11** Sejam $\alpha,\beta,\varphi\in L_P$ fórmulas quaisquer. As relações abaixo são válidas em $C_{\neg m}$.

Nm1. $\vdash\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$ *lei da não contradição*

Nm2. $\vdash(\alpha\to\neg\beta)\leftrightarrow(\beta\to\neg\alpha)$

Nm3. $\vdash\neg\neg\neg\alpha\leftrightarrow\neg\alpha$

Nm4. $\vdash\neg\neg(\alpha\vee\neg\alpha)$

Nm5. $\vdash\neg\neg(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta$

Nm6. $\vdash\neg\neg\alpha\vee\neg\neg\beta\to\neg\neg(\alpha\vee\beta)$

Nm7. $\vdash \neg\alpha \vee \neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$ *1ª Lei de De Morgan (metade)*

Nm8. $\vdash \neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$ *2ª Lei de De Morgan*

Nm9. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$

Nm10. $\vdash \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow \neg\neg(\alpha \wedge \beta)$

Nm11. $\vdash \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow \alpha \wedge \beta$

Segue abaixo a prova de (13), que no teorema 2.11 aparece como Nm3:

(Nm3) $\vdash \neg\neg\neg\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$ | INm11 |
| 2. $\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\neg\alpha$ | INm10 |
| 3. $\neg\neg\neg\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$ | C3 1,2 |

Nm1 é a famosa *lei da não contradição*, que diz que $\alpha$ e $\neg\alpha$ não é o caso. Ao contrário do que pode aparentar, a sua prova é bastante simples:

(Nm1) $\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \alpha$ | P3 |
| 2. $\alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$ | P4 |
| 3. $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ | INm1 1,2 |

Além de Nm3, temos ainda, no teorema 2.11, versões fracas de dois outros princípios cujas versões completas não podem ser provadas em $C_{\neg m}$: a *lei da contrapositiva* (Nm2) e o *princípio do terceiro excluído* (Nm4). Provemos Nm4:

(Nm4) $\vdash \neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha \rightarrow \alpha \vee \neg\alpha$ | P6 |
| 2. $\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$ | INm5 1 |
| 3. $\neg\alpha \rightarrow \alpha \vee \neg\alpha$ | P7 |
| 4. $\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\alpha$ | INm5 3 |
| 5. $\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha \wedge \neg\neg\alpha$ | IC2 2,4 |
| 6. $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\neg\alpha) \rightarrow \neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$ | INm5 5 |
| 7. $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\neg\alpha)$ | Nm1 |
| 8. $\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$ | MP 7,6 |

Um fenômeno interessante que acontece quando colocamos juntos os axiomas da conjunção, disjunção e negação é que podemos provar algumas relações importantes que existem entre esses três conectivos. Por exemplo, podemos mostrar que a negação pode ser internalizada em uma disjunção, transformando esta última em uma conjunção:

(14) $\vdash\neg(\alpha\vee\beta)\rightarrow\neg\alpha\wedge\neg\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\rightarrow\alpha\vee\beta$ | P6 |
| 2. $\neg(\alpha\vee\beta)\rightarrow\neg\alpha$ | INm5 1 |
| 3. $\beta\rightarrow\alpha\vee\beta$ | P7 |
| 4. $\neg(\alpha\vee\beta)\rightarrow\neg\beta$ | INm5 3 |
| 5. $\neg(\alpha\vee\beta)\rightarrow\neg\alpha\wedge\neg\beta$ | IC2 2,4 |

Também podemos provar que a negação pode ser externalizada em uma conjunção, transformando esta última em uma disjunção:

(15) $\neg\alpha\wedge\neg\beta\vdash\neg(\alpha\vee\beta)$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg\alpha\wedge\neg\beta$ | Premissa |
| 2. $\neg\alpha$ | C1 1 |
| 3. $\neg\beta$ | C2 1 |
| 4. $\neg\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\neg\varphi)$ | INm3 |
| 5. $\alpha\rightarrow\neg\varphi$ | MP 2,4 |
| 6. $\neg\beta\rightarrow(\beta\rightarrow\neg\varphi)$ | INm3 |
| 7. $\beta\rightarrow\neg\varphi$ | MP 3,6 |
| 8. $\alpha\vee\beta\rightarrow\neg\varphi$ | D3 5,7 |
| 9. $\neg\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\neg\neg\varphi)$ | INm3 |
| 10. $\alpha\rightarrow\neg\neg\varphi$ | MP 2,9 |
| 11. $\neg\beta\rightarrow(\beta\rightarrow\neg\neg\varphi)$ | INm3 |
| 12. $\beta\rightarrow\neg\neg\varphi$ | MP 3,11 |
| 13. $\alpha\vee\beta\rightarrow\neg\neg\varphi$ | D3 10,12 |
| 14. $\neg(\alpha\vee\beta)$ | INm1 8,13 |

Como temos (15), pelo teorema da dedução temos que

(16) $\vdash\neg\alpha\wedge\neg\beta\rightarrow\neg(\alpha\vee\beta)$

De posse então de (14) e (16), podemos provar a 2ª Lei de De Morgan, ou seja, Nm8:

(Nm8) $\neg(\alpha\vee\beta)\leftrightarrow\neg\alpha\wedge\neg\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(\alpha\vee\beta)\rightarrow\neg\alpha\wedge\neg\beta$ | (14) |
| 2. $\neg\alpha\wedge\neg\beta\rightarrow\neg(\alpha\vee\beta)$ | (16) |
| 3. $\neg(\alpha\vee\beta)\leftrightarrow\neg\alpha\wedge\neg\beta$ | C3 1,2 |

Outra relação importante é mais ou menos o dual de (16), ou seja, que a negação pode ser externalizada em uma disjunção, transformando esta última em uma conjunção:

(Nm7) $\vdash\neg\alpha\vee\neg\beta\rightarrow\neg(\alpha\wedge\beta)$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\wedge\beta\rightarrow\alpha$ | P3 |
| 2. $\neg\alpha\rightarrow\neg(\alpha\wedge\beta)$ | INm5 1 |
| 3. $\alpha\wedge\beta\rightarrow\beta$ | P4 |
| 4. $\neg\beta\rightarrow\neg(\alpha\wedge\beta)$ | INm5 3 |
| 5. $\neg\alpha\vee\neg\beta\rightarrow\neg(\alpha\wedge\beta)$ | D3 2,4 |

O converso de Nm7,

(17) $\neg(\alpha\wedge\beta)\rightarrow\neg\alpha\vee\neg\beta$

que juntamente com ele forma a 1ª Lei de De Morgan, não pode ser provada em $C_{\neg m}$. Semelhantemente, os conversos de Nm6 e Nm9 só podem ser provados em $C_P$.

Para finalizar nossa exemplificação de derivações em $C_{\neg m,}$ provemos Nm5 e Nm10:

(Nm5) $\vdash\neg\neg(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\wedge\beta\rightarrow\alpha$ | P3 |
| 2. $\neg\alpha\rightarrow\neg(\alpha\wedge\beta)$ | INm5 1 |
| 3. $\neg\neg(\alpha\wedge\beta)\rightarrow\neg\neg\alpha$ | INm5 2 |
| 4. $\alpha\wedge\beta\rightarrow\beta$ | P4 |
| 5. $\neg\beta\rightarrow\neg(\alpha\wedge\beta)$ | INm5 4 |
| 6. $\neg\neg(\alpha\wedge\beta)\rightarrow\neg\neg\beta$ | INm5 5 |
| 7. $\neg\neg(\alpha\wedge\beta)\rightarrow\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta$ | IC2 3,6 |
| 8. $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha\wedge\beta)$ | P5 |
| 9. $\neg(\beta\rightarrow\alpha\wedge\beta)\rightarrow\neg\alpha$ | INm5 8 |
| 10. $\neg\neg\alpha\rightarrow\neg\neg(\beta\rightarrow\alpha\wedge\beta)$ | INm5 9 |
| 11. $\neg\neg(\beta\rightarrow\alpha\wedge\beta)\rightarrow(\neg\neg\beta\rightarrow\neg\neg(\alpha\wedge\beta))$ | INm13 |
| 12. $\neg\neg\alpha\rightarrow(\neg\neg\beta\rightarrow\neg\neg(\alpha\wedge\beta))$ | I4 10,11 |
| 13. $\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta\rightarrow\neg\neg(\alpha\wedge\beta)$ | IC1 12 |
| 14. $\neg\neg(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta$ | C3 7,13 |

Para provar Nm10, precisamos primeiro provar o resultado intermediário abaixo:

(18) $\neg(\neg\alpha\vee\neg\beta)\vdash\neg\neg(\alpha\wedge\beta)$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(\neg\alpha\vee\neg\beta)$ | Premissa |
| 2. $\neg(\neg\alpha\vee\neg\beta)\leftrightarrow\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta$ | Nm8 |
| 3. $\neg(\neg\alpha\vee\neg\beta)\rightarrow\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta$ | C1 2 |

4. $\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta$ MP 1,3

5. $\neg\neg(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow(\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta)$ Nm5

6. $\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta\rightarrow\neg\neg(\alpha\wedge\beta)$ C2 5

7. $\neg\neg(\alpha\wedge\beta)$ MP 4,6

Como temos (18), de acordo com o teorema da dedução temos também Nm10.

Seguem abaixo os corolários que estabelecem que todas as relações mencionadas nos teoremas 2.10 e 2.11 são válidas também no cálculo clássico proposicional:

**COROLÁRIO 2.8** $C_p$ é uma extensão conservativa de $C_{\neg m-}$ e de $C_{\neg m}$.

**COROLÁRIO 2.9** As relações mencionadas nos teoremas 2.10 e 2.11 são válidas em $C_p$.

Finalizaremos esta seção mostrando um importante teorema que pode ser provado em qualquer extensão conservativa de $C_{\neg m-}$:

**TEOREMA 2.12** Seja $C=\langle L,\Sigma,\Lambda\rangle$ uma extensão conservativa de $C_{\neg m-}$, $\Gamma\subseteq L$ um conjunto de fórmulas e $\alpha,\beta\in L$ duas fórmulas. Se $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ e $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\neg\beta$, então $\Gamma\vdash\neg\alpha$ em C.

Esse teorema é basicamente uma extensão de INm1 e, consequentemente, uma representação metalógica, nós podemos dizer, do princípio da redução ao absurdo: se a partir de um conjunto de fórmulas $\Gamma$ juntamente com uma fórmula $\alpha$ nós derivamos tanto $\beta$ com $\neg\beta$, então nós podemos derivar $\neg\alpha$ a partir de $\Gamma$. Adiaremos para a próxima seção a exemplificação do uso de tal teorema na construção de derivações. No capítulo seguinte, isto é, no capítulo 8, nós estenderemos o teorema 2.12 de forma a obtermos uma versão mais completa do princípio da redução ao absurdo, e mostraremos como tal princípio pode ser útil na prova da validade de argumentos no cálculo clássico proposicional.

## 7.2 P10 e a negação intuicionista

Se adicionarmos a $C_{\neg m}$ o axioma P10 nós passamos de uma negação minimal para o que se convencionou chamar de *negação intuicionista*. Como seria de se esperar, o cálculo resultante de tal adição é chamado de cálculo intuicionista, que aqui referenciaremos por $C_{\neg I}$. De um ponto de vista axiomático, a única diferença entre o cálculo intuicionista e o cálculo clássico proposicional é a ausência, no caso de $C_{\neg I}$, do axioma P11, ou seja, da representação axiomática do princípio do terceiro excluído. No entanto, como veremos adiante, essa pequena diferença faz com que a negação definida em $C_{\neg I}$ pelos axiomas P9 e P10 seja consideravelmente diferente da negação definida em $C_P$ pelos axiomas P9-P11, de tal forma que uma gama considerável de propriedades da negação clássica não pode ser provada em $C_{\neg I}$. Segue abaixo a definição do cálculo intuicionista:

**DEFINIÇÃO 2.10** O *cálculo intuicionista* $C_{\neg I}$ é a tripla $<L_P,\Sigma_{MP},\Lambda_{P1\text{-}P10}>$.

Abaixo temos alguns teoremas lógicos e regras derivadas de $C_{\neg I}$:

**TEOREMA 2.13** Sejam $\alpha,\beta,\varphi\in L_P$ fórmulas quaisquer. As relações abaixo são válidas em $C_{\neg I}$.

Ni1. $\alpha,\neg\alpha\vdash\beta$

Ni2. $\vdash\alpha\vee\beta\to(\neg\alpha\to\beta)$

Ni3. $\vdash\alpha\vee\beta\to(\neg\beta\to\alpha)$

Ni4. $\vdash\neg\alpha\vee\beta\to(\alpha\to\beta)$

Ni5. $\vdash(\neg\neg\alpha\to\neg\neg\beta)\to\neg\neg(\alpha\to\beta)$

Ni6. $\vdash\neg\neg(\alpha\to\beta)\leftrightarrow(\neg\neg\alpha\to\neg\neg\beta)$

Ni7. $\vdash\neg\neg\alpha\to(\neg\alpha\to\alpha)$

Ni8. $\vdash\neg\neg\alpha\leftrightarrow(\neg\alpha\to\alpha)$

Ni9. $\vdash\alpha\vee\neg\alpha\to(\neg\neg\alpha\to\alpha)$

Ni10. $\vdash\neg\neg(\neg\neg\alpha\to\alpha)$

Ni11. $\vdash\beta\vee(\alpha\wedge\neg\alpha)\leftrightarrow\beta$

Ni12. $\vdash((\alpha\wedge\neg\alpha)\wedge\beta)\vee\varphi\leftrightarrow\varphi$

Ni13. $\alpha\vdash\beta\leftrightarrow\beta\vee\neg\alpha$

Ni1, que obviamente é a forma completa do princípio da explosão, pode ser visto como a representação inferencial do axioma P10[55]. Segue abaixo a sua prova:

(Ni1) $\alpha,\neg\alpha\vdash\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg\alpha$ | Premissa |
| 2. $\neg\alpha\to(\alpha\to\beta)$ | P10 |
| 3. $\alpha\to\beta$ | MP 1,2 |
| 4. $\alpha$ | Premissa |
| 5. $\beta$ | MP 4,3 |

55. Com o diferencial, irrelevante de um ponto de vista prático, que a primeira premissa é $\alpha$, e não $\neg\alpha$.

Ni2 e Ni3 representam uma propriedade importante da disjunção, podemos assim dizer, que vêm à tona somente quando dispomos dos axiomas da negação. De um ponto de vista semântico, se $\alpha\vee\beta$ é verdade, então obviamente se $\alpha$ é falso $\beta$ tem de ser verdade (Ni2); e se $\beta$ é falso $\alpha$ tem de se verdade (Ni3). Segue abaixo a prova de (Ni2):

(19) $\alpha\vee\beta,\neg\alpha\vdash\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg\alpha$ | Premissa |
| 2. $\neg\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$ | P10 |
| 3. $\alpha\rightarrow\beta$ | MP 1,2 |
| 4. $(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\beta\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\vee\beta\rightarrow\beta))$ | P8 |
| 5. $(\beta\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\vee\beta\rightarrow\beta)$ | MP 3,4 |
| 6. $\beta\rightarrow\beta$ | I3 |
| 7. $\alpha\vee\beta\rightarrow\beta$ | MP 6,5 |
| 8. $\alpha\vee\beta$ | Premissa |
| 9. $\beta$ | MP 8,7 |

Como temos (19), pelo teorema da dedução temos também

(20) $\alpha\vee\beta\vdash\neg\alpha\rightarrow\beta$

o que, usando mais uma vez o teorema da dedução, nos permite concluir Ni2.

De posse de (19), podemos facilmente provar Ni3:

(21) $\alpha\vee\beta,\neg\beta\vdash\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\vee\beta$ | Premissa |
| 2. $\beta\vee\alpha$ | D4 1 |
| 3. $\neg\beta$ | Premissa |
| 4. $\alpha$ | (19) 2,3 |

Semelhantemente a como fizemos com Ni2, uma vez que temos (21), podemos aplicar o teorema da dedução duas vezes e concluir Ni3. Note que os conversos de Ni2 e Ni3 não podem ser provados em $C_{\neg I}$.

Além de estabelecerem, conforme mencionamos, um aspecto inferencial importante da disjunção, Ni2 e Ni3 também estabelecem uma importante relação lógica que há entre a disjunção e a implicação, relação esta que é plenamente representada, podemos dizer, pela equivalência abaixo:

(22) $(\alpha\rightarrow\beta)\leftrightarrow(\neg\alpha\vee\beta)$

Basicamente o que (22) diz é que $\alpha\rightarrow\beta$ é equivalente a $\neg\alpha\vee\beta$. (22), no entanto, só poderá ser provada em $C_P$. A metade de (22), a saber, Ni4, porém, é facilmente provada em $C_{\neg I}$:

(Ni4) $\vdash\neg\alpha\vee\beta\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$ | P10 |
| 2. $\beta\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$ | P1 |
| 3. $\neg\alpha\vee\beta\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$ | D3 1,2 |

Conforme prometemos no final da seção anterior, ilustraremos aqui o uso do teorema 2.12 na construção de derivações. Para isso provaremos Ni5. Basicamente o que faremos será derivar uma contradição a partir de $\{\neg\neg\alpha\rightarrow\neg\neg\beta\}\cup\{\neg(\alpha\rightarrow\beta)\}$, a partir do qual, usando o teorema 2.12, concluiremos que $\neg\neg(\alpha\rightarrow\beta)$ é deduzido a partir de $\{\neg\neg\alpha\rightarrow\neg\neg\beta\}$. Feito isso, usaremos o teorema da dedução para obter Ni5. Segue abaixo a execução detalhada de tal plano:

(23) $\neg\neg\alpha\rightarrow\neg\neg\beta,\neg(\alpha\rightarrow\beta)\vdash\neg\neg\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(\alpha\rightarrow\beta)$ | Premissa |
| 2. $\neg\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$ | P10 |
| 3. $\neg(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\neg\neg\alpha$ | INm5 2 |
| 4. $\neg\neg\alpha$ | MP 1,3 |
| 5. $\neg\neg\alpha\rightarrow\neg\neg\beta$ | Premissa |
| 6. $\neg\neg\beta$ | MP 4,5 |

(24) $\neg\neg\alpha\rightarrow\neg\neg\beta,\neg(\alpha\rightarrow\beta)\vdash\neg\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(\alpha\rightarrow\beta)$ | Premissa |
| 2. $\beta\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$ | P1 |
| 3. $\neg(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\neg\beta$ | INm5 2 |
| 4. $\neg\beta$ | MP 1,3 |

Como temos então (23) e (24), pelo teorema 2.12 temos também

(24) $\neg\neg\alpha\rightarrow\neg\neg\beta\vdash\neg\neg(\alpha\rightarrow\beta)$

Mas, de acordo com o teorema da dedução, dado que temos (25), temos também Ni5. No capítulo seguinte teremos oportunidade de, utilizando uma versão mais completa do princípio da redução ao absurdo, falarmos mais sobre o método de prova ilustrado na prova de (25).

Para finalizar esta seção, provemos Ni9 e Ni10:

(Ni9) $\vdash\alpha\vee\neg\alpha\rightarrow(\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha)$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\rightarrow(\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha)$ | P1 |
| 2. $\neg\neg\alpha\rightarrow(\neg\alpha\rightarrow\alpha)$ | P10 |

3. $\neg\alpha\to(\neg\neg\alpha\to\alpha)$ I6 2

4. $\alpha\vee\neg\alpha\to(\neg\neg\alpha\to\alpha)$ D3 1,3

Algo extremamente interessante em Ni9 é que nele se encontra explícita a dependência de (7) em relação à P11: caso estejamos em um cálculo que tenha P11 como um de seus axiomas ou teoremas lógicos, podemos usá-lo em conjunto com Ni9 e MP e concluir (7). Claramente isso não é possível em $C_{\neg I}$. No entanto, podemos provar, em $C_{\neg I}$, outra versão fraca de (7), a saber, Ni10:

(Ni10) $\vdash\neg\neg(\neg\neg\alpha\to\alpha)$

1. $((\alpha\vee\neg\alpha)\to(\neg\neg\alpha\to\alpha))\to(\neg\neg(\alpha\vee\neg\alpha)\to\neg\neg(\neg\neg\alpha\to\alpha))$ INm12
2. $\alpha\vee\neg\alpha\to(\neg\neg\alpha\to\alpha)$ Ni9
3. $\neg\neg(\alpha\vee\neg\alpha)\to\neg\neg(\neg\neg\alpha\to\alpha)$ MP 2,1
4. $\neg\neg(\alpha\vee\neg\alpha)$ Nm4
5. $\neg\neg(\neg\neg\alpha\to\alpha)$ MP 4,3

Por fim, temos abaixo os corolários que estabelecem que todas as relações do teorema 2.13 são também válidas no cálculo clássico proposicional.

**COROLÁRIO 2.10** $C_P$ é uma extensão conservativa de $C_{\neg I}$.

**COROLÁRIO 2.11** As relações mencionadas no teorema 2.13 são válidas em $C_P$.

## 7.3 P11 e uma negação paraconsistente

Como o leitor já deve ter facilmente concluído, se adicionarmos P11 ao cálculo intuicionista nós obtemos o cálculo clássico proposicional. Antes, porém, de apresentarmos os teoremas lógicos e regras derivadas de $C_P$ que dependem de P11, vejamos o que acontece quando temos um cálculo no qual P11 é o único axioma da negação:

**DEFINIÇÃO 2.11** O *cálculo paraconsistente fraco* $C_{\neg p-}$ é a tripla $<L_P,\Sigma_{MP},\Lambda_{P1\text{-}P8,P11}>$.

Em função de não possuir nem P9 nem P10, não é possível derivar em $C_{\neg p-}$ nem INm2 nem Ni1. Logo, como o próprio nome indica, $C_{\neg p-}$ é um cálculo *paraconsistente*, sendo a negação a ele associada naturalmente uma *negação paraconsistente*. Segue abaixo alguns teoremas e regras derivadas de $C_{\neg p-}$:

**TEOREMA 2.14** Sejam $\alpha,\beta,\varphi \in L_p$ fórmulas quaisquer. As relações abaixo são válidas em $C_{\neg p-}$.

Np1. $\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \beta \vdash \beta$

Np2. $\vdash \beta \wedge (\alpha \vee \neg\alpha) \leftrightarrow \beta$

Np3. $\vdash (((\alpha \vee \neg\alpha) \vee \beta) \wedge \varphi) \leftrightarrow \varphi$

Np1 expressa a propriedade, bastante intuitiva, diga-se de passagem, de que se uma fórmula $\beta$ é implicada tanto por $\alpha$ como por $\neg\alpha$, então podemos concluir que tal fórmula é o caso. Segue abaixo a prova de Np1:

(Np1) $\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \beta \vdash \beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha \rightarrow \beta$ | Premissa |
| 2. $\neg\alpha \rightarrow \beta$ | Premissa |
| 3. $\alpha \vee \neg\alpha \rightarrow \beta$ | D3 1,2 |
| 4. $\alpha \vee \neg\alpha$ | P11 |
| 5. $\beta$ | MP 4,3 |

Provemos agora Np2, para o qual teremos que provar os dois resultados intermediários abaixo:

(26) $\vdash \beta \wedge (\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\beta \wedge (\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \beta$ | P3 |

(27) $\vdash \beta \rightarrow \beta \wedge (\alpha \vee \neg\alpha)$

| | |
|---|---|
| 1. $\beta \rightarrow \beta$ | I3 |
| 2. $\alpha \vee \neg\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha \vee \neg\alpha)$ | P1 |
| 3. $\alpha \vee \neg\alpha$ | P11 |
| 4. $\beta \rightarrow \alpha \vee \neg\alpha$ | MP 3,2 |
| 5. $\beta \rightarrow \beta \wedge (\alpha \vee \neg\alpha)$ | IC2 1,4 |

De posse então de (26) e (27), a prova de Np2 consiste basicamente no uso de C3:

(Np2) $\vdash \beta \wedge (\alpha \vee \neg\alpha) \leftrightarrow \beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\beta \wedge (\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \beta$ | (26) |
| 2. $\beta \rightarrow \beta \wedge (\alpha \vee \neg\alpha)$ | (27) |
| 3. $\beta \wedge (\alpha \vee \neg\alpha) \leftrightarrow b$ | C3 1,2 |

Trivialmente, todas as relações do teorema 2.14 são também válidas no cálculo clássico proposicional:

**COROLÁRIO 2.12** $C_P$ é uma extensão conservativa de $C_{\neg p-}$.

**COROLÁRIO 2.13** As relações mencionadas no teorema 2.14 são válidas em $C_P$.

Algo digno de nota é que, apesar de em virtude de ser uma extensão conservativa de $C_\vee$, $C_{\neg p-}$ herdar todos os teoremas lógicos e regras derivadas da implicação, conjunção e disjunção, no que se refere à negação tal cálculo é extremamente fraco; boa parte das propriedades tradicionalmente associadas à negação não podem ser provadas em $C_{\neg p-}$. E convém notar que, no que se refere à sua paraconsistência, diversas propriedades da negação que não acarretam o princípio da explosão, como as leis de De Morgan e a lei da dupla negação, por exemplo, não podem ser provadas em $C_{\neg p-}$. Na seção 7.5 veremos como podemos estender $C_{\neg p-}$ de forma a obter um cálculo paraconsistente bem mais forte e interessante do que $C_{\neg p-}$.

## 7.4 P11 e a negação clássica

Até agora mostramos, neste capítulo e no anterior, através da construção de vários cálculos axiomáticos, os mais importantes teoremas lógicos e regras derivadas da implicação, conjunção e disjunção e, através do mesmo método, os teoremas e regras do que chamamos de negação minimal, negação intuicionista e negação paraconsistente, associados, respectivamente, aos axiomas P9, P9 e P10, e P11. Nesta seção iremos concluir esse processo gradual de construção de novos cálculos que, conforme temos enfatizado, tem sido feito através da adição sucessiva de novos axiomas, considerando todos os axiomas da definição 1.17 em um único cálculo. Tal cálculo, o leitor já sabe, é o cálculo clássico proposicional $C_P$ já definido por nós no capítulo 5.

Vejamos então alguns dos mais importantes teoremas lógicos e regras derivadas relacionadas com a negação que podem ser provados em $C_P$ e que dependem de P11. Vale a pena lembrar que, conforme explicitado nos corolários 2.1-2.13, todos os teoremas lógicos e regras derivadas vistos até agora são também válidos em $C_P$.

**TEOREMA 2.15** Sejam $\alpha,\beta,\varphi\in L_P$ fórmulas quaisquer. As relações abaixo são válidas em $C_P$.

Nc1. $\vdash\neg\neg\alpha\leftrightarrow\alpha$ *Lei da dupla negação*

Nc2. $\vdash(\alpha\rightarrow\beta)\leftrightarrow(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)$ c*ontrapositiva*

Nc3. $\vdash\neg(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\neg\alpha\vee\neg\beta$ *1ª Lei de De Morgan*

Nc4. $\vdash(\alpha\rightarrow\beta)\leftrightarrow\neg\alpha\vee\beta$

Nc5. $\vdash(\alpha\rightarrow\beta)\leftrightarrow\neg(\alpha\wedge\neg\beta)$

Nc6. $\vdash\neg(\alpha\rightarrow\beta)\leftrightarrow\alpha\wedge\neg\beta$

Nc7. $\vdash((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\beta)\rightarrow\alpha\vee\beta$

Nc8. $\vdash\alpha\vee\beta\leftrightarrow(\neg\alpha\rightarrow\beta)$

Nc9. $\vdash\alpha\wedge\beta\leftrightarrow\neg(\alpha\rightarrow\neg\beta)$

Nc10. $\vdash\alpha\vee(\alpha\rightarrow\beta)$

Nc11. $\vdash(\alpha\rightarrow\beta)\vee(\beta\rightarrow\alpha)$

Nc12. $\vdash((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\alpha)\rightarrow\alpha$ *Lei de Peirce*

Nc1 é a forma completa da lei da dupla negação. Metade dela já foi provada na seção 7.1 (INm10); e já fizemos alusão de como sua outra metade pode ser provada em $C_p$. Vejamos então a versão completa de sua prova:

(28) $\vdash\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\vee\neg\alpha\rightarrow(\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha)$ | Ni9 |
| 2. $\alpha\vee\neg\alpha$ | P11 |
| 3. $\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha$ | MP 2,1 |

De posse de (28) e INm10, podemos facilmente provar Nc1:

(Nc1) $\vdash\neg\neg\alpha\leftrightarrow\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha$ | (28) |
| 2. $\alpha\rightarrow\neg\neg\alpha$ | INm10 |
| 3. $\neg\neg\alpha\leftrightarrow\alpha$ | C3 1,2 |

Além de Nc1, temos no teorema 2.15 as versões completas de três outros princípios cujas metades já foram provadas por nós: a lei da contrapositiva (Nc2), a 1ª lei de De Morgan (Nc3) e a equivalência entre a conjunção e a implicação à qual fizemos referência na seção 7.2 (Nc4). Provemos primeiro Nc2, para o qual precisamos obviamente provar o converso de INm6. Para isso provaremos o resultado intermediário abaixo:

(29) $\neg\beta\rightarrow\neg\alpha,\alpha\vdash\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg\beta\rightarrow\neg\alpha$ | Premissa |
| 2. $(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)\rightarrow(\neg\neg\alpha\rightarrow\neg\neg\beta)$ | INm6 |
| 3. $\neg\neg\alpha\rightarrow\neg\neg\beta$ | MP 1,2 |
| 4. $\alpha$ | Premissa |
| 5. $\alpha\rightarrow\neg\neg\alpha$ | INm10 |
| 6. $\neg\neg\alpha$ | MP 4,5 |

| | |
|---|---|
| 7. $\neg\neg\beta$ | MP 6,3 |
| 8. $\neg\neg\beta\to\beta$ | (28) |
| 9. $\beta$ | MP 7,8 |

Como então temos (29), pelo teorema da dedução temos

(30) $\neg\beta\to\neg\alpha\vdash\alpha\to\beta$

e, de acordo como mesmo teorema da dedução, temos

(31) $\vdash(\neg\beta\to\neg\alpha)\to(\alpha\to\beta)$

Uma vez que temos (31) e INm6, a prova de Nc2 não passa de mais um uso trivial de C3:

(Nc2) $\vdash(\alpha\to\beta)\leftrightarrow(\neg\beta\to\neg\alpha)$

| | |
|---|---|
| 1. $(\alpha\to\beta)\to(\neg\beta\to\neg\alpha)$ | INm6 |
| 2. $(\neg\beta\to\neg\alpha)\to(\alpha\to\beta)$ | (31) |
| 3. $(\alpha\to\beta)\leftrightarrow(\neg\beta\to\neg\alpha)$ | C3 1,2 |

Vejamos agora como seria a prova de Nc3. Semelhantemente a Nc2, para provarmos Nc3, precisamos primeiro provar o converso de Nm7:

(32) $\vdash\neg(\alpha\wedge\beta)\to\neg\alpha\vee\neg\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(\neg\alpha\vee\neg\beta)\to\neg\neg(\alpha\wedge\beta)$ | Nm10 |
| 2. $\neg\neg\neg(\alpha\wedge\beta)\to\neg\neg(\neg\alpha\vee\neg\beta)$ | INm5 1 |
| 3. $\neg(\alpha\wedge\beta)\to\neg\neg\neg(\alpha\wedge\beta)$ | INm10 |
| 4. $\neg(\alpha\wedge\beta)\to\neg\neg(\neg\alpha\vee\neg\beta)$ | I4 3,2 |
| 5. $\neg\neg(\neg\alpha\vee\neg\beta)\to\neg\alpha\vee\neg\beta$ | (28) |
| 6. $\neg(\alpha\vee\beta)\to\neg\alpha\vee\neg\beta$ | I4 4,5 |

(Nc3) $\vdash\neg(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\neg\alpha\vee\neg\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(\alpha\wedge\beta)\to\neg\alpha\vee\neg\beta$ | (32) |
| 2. $\neg\alpha\vee\neg\beta\to\neg(\alpha\wedge\beta)$ | Nm7 |
| 3. $\neg(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\neg\alpha\vee\neg\beta$ | C3 1,2 |

Da mesma forma, Nc4 requer, para sua prova, a demonstração do converso de Ni4, o que é facilmente feito aplicando a regra ID6 à P11:

(33) $\vdash(\alpha\to\beta)\to\neg\alpha\vee\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\vee\neg\alpha$ | P11 |
| 2. $(\alpha\to\beta)\to(\neg\alpha\vee\beta)$ | ID6 1 |

(Nc4) $\vdash(\alpha\to\beta)\leftrightarrow\neg\alpha\vee\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $(\alpha\to\beta)\to\neg\alpha\vee\beta$ | (33) |
| 2. $\neg\alpha\vee\beta\to(\alpha\to\beta)$ | Ni4 |
| 3. $(\alpha\to\beta)\leftrightarrow\neg\alpha\vee\beta$ | C3 1,2 |

Para finalizar esta seção, provemos Nc6. Para tanto, provaremos cada um de seus componentes separadamente:

(34) $\vdash\neg(\alpha\to\beta)\to\alpha\wedge\neg\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg\alpha\vee\beta\to(\alpha\to\beta)$ | Ni4 |
| 2. $\neg(\alpha\to\beta)\to\neg(\neg\alpha\vee\beta)$ | INm5 1 |
| 3. $\neg(\neg\alpha\vee\beta)\leftrightarrow\neg\neg\alpha\wedge\neg\beta$ | Nm8 |
| 4. $\neg(\neg\alpha\vee\beta)\to\neg\neg\alpha\wedge\neg\beta$ | C1 3 |
| 5. $\neg(\alpha\to\beta)\to\neg\neg\alpha\wedge\neg\beta$ | I4 2,4 |
| 6. $\neg\neg\alpha\to\alpha$ | (28) |
| 7. $(\neg\neg\alpha\to\alpha)\to(\neg\neg\alpha\wedge\neg\beta\to\alpha\wedge\neg\beta)$ | IC9 |
| 8. $\neg\neg\alpha\wedge\neg\beta\to\alpha\wedge\neg\beta$ | MP 6,7 |
| 9. $\neg(\alpha\to\beta)\to\alpha\wedge\neg\beta$ | I4 5,8 |

(35) $\vdash\alpha\wedge\neg\beta\to\neg(\alpha\to\beta)$

| | |
|---|---|
| 1. $(\alpha\to\beta)\to\neg\alpha\vee\beta$ | (33) |
| 2. $\neg(\neg\alpha\vee\beta)\to\neg(\alpha\to\beta)$ | INm5 1 |
| 3. $\neg(\neg\alpha\vee\beta)\leftrightarrow\neg\neg\alpha\wedge\neg\beta$ | Nm8 |
| 4. $\neg\neg\alpha\wedge\neg\beta\to\neg(\neg\alpha\vee\beta)$ | C2 3 |
| 5. $\neg\neg\alpha\wedge\neg\beta\to\neg(\alpha\to\beta)$ | I4 4,2 |
| 6. $\alpha\to\neg\neg\alpha$ | INm10 |
| 7. $(\alpha\to\neg\neg\alpha)\to(\alpha\wedge\neg\beta\to\neg\neg\alpha\wedge\neg\beta)$ | IC9 |
| 8. $\alpha\wedge\neg\beta\to\neg\neg\alpha\wedge\neg\beta$ | MP 6,7 |
| 9. $\alpha\wedge\neg\beta\to\neg(\alpha\to\beta)$ | I4 8,5 |

Feito isso, a prova de Nc6 consiste em uma simples aplicação de C3 a (34) e (35):

(Nc6) $\vdash\neg(\alpha\to\beta)\leftrightarrow\alpha\wedge\neg\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(\alpha\to\beta)\to\alpha\wedge\neg\beta$ | (34) |
| 2. $\alpha\wedge\neg\beta\to\neg(\alpha\to\beta)$ | (35) |
| 3. $\neg(\alpha\to\beta)\leftrightarrow\alpha\wedge\neg\beta$ | C3 1,2 |

## 7.5 Um cálculo paraconsistente

Conforme mencionamos na seção 7.3, em virtude de possuir um único axioma para a negação, a saber, P11, no que se refere à negação $C_{\neg p-}$ é um cálculo extremamente fraco: boa parte das propriedades tradicionalmente associadas à negação não podem ser provadas em $C_{\neg p-}$. E é relevante notar que diversas propriedades da negação que não acarretam o princípio da explosão e, consequentemente, não interferem no aspecto paraconsistente de $C_{\neg p-}$, como as leis de De Morgan e a lei da dupla negação, por exemplo, não podem ser provadas em $C_{\neg p-}$. Isso sugere que talvez possamos fortalecer $C_{\neg p-}$ adicionando tais princípios como axiomas e obter assim um cálculo paraconsistente bem mais interessante. A título de ilustração, segue abaixo exemplo de como poderia ser tal cálculo:

**DEFINIÇÃO 2.12** Seja L uma linguagem lógica cujo alfabeto $A_L$ seja tal que $\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow\}\subseteq A_L$ e $\alpha,\beta\in L$ fórmulas quaisquer dessa linguagem. Nomeamos as fórmulas abaixo como segue:

P12. $((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\alpha)\rightarrow\alpha$

P13. $\neg(\alpha\rightarrow\beta)\leftrightarrow\alpha\wedge\neg\beta$

P14. $\neg(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\neg\alpha\vee\neg\beta$

P15. $\neg(\alpha\vee\beta)\leftrightarrow\neg\alpha\wedge\neg\beta$

P16. $\neg\neg\alpha\leftrightarrow\alpha$

Chamamos a forma esquemática de cada uma dessas fórmulas pelo mesmo nome.

**DEFINIÇÃO 2.13** O *cálculo paraconsistente* $C_{\neg p}$ é a tripla $<L_P,\Sigma_{MP},\Lambda_{P1\text{-}P8,P11\text{-}P16}>$.

Trivialmente, $C_{\neg p}$ é um cálculo paraconsistente, pois temos que o princípio da explosão

(2) $\alpha,\neg\alpha\vdash\beta$

não é válido em $C_{\neg p}$. No entanto, diferentemente de $C_{\neg p-}$, podemos provar em $C_{\neg p}$ muitas das propriedades tradicionalmente associadas à negação. Um exame mais detalhado de $C_{\neg p}$ se distanciaria por demais do escopo deste capítulo. Por conta disso, limitar-nos-emos aqui simplesmente a comentar rapidamente cada um dos axiomas que compõem $C_{\neg p}$.

Além dos axiomas P1-P8 e P11, introduzidos na definição 1.17, a axiomática de $C_{\neg p}$ é formada por cinco axiomas adicionais, todos relacionados com a negação. P12 é a lei de Peirce, que aparece no teorema 2.15 como Nc12. P13 é o teorema lógico Nc6 do teorema 2.15. Já P14 e P15 são as 1ª e 2ª leis de De Morgan, respectivamente, que aparecem como Nc3 no teorema 2.15, e como Nm8 no teorema 2.11, respectivamente. Finalmente, P16 é a lei da dupla negação (Nc1 do teorema 2.15).

## 7.6 Exercícios propostos

1. Responda as questões abaixo referentes ao teorema 2.10:
   a. Que relação há entre INm7 e INm5?
   b. Qual o significado de INm8 e INm9?
   c. Qual o significado de INm12, INm13 e INm14?
   d. Qual o significado de INm15, e qual a sua relação com I4?
   e. Qual o significado de INm16?
2. Faça o que é pedido a seguir em relação ao teorema 2.10:
   a. Prove INm3;
   b. Prove INm8 e INm9;
   c. Prove INm14, INm15 e INm16.
3. Responda as questões abaixo referentes ao teorema 2.11:
   a. Qual o significado de Nm5 e Nm6?
   b. Qual o significado de Nm9, Nm10 e Nm11?
4. Em relação ao teorema 2.11, prove Nm2, Nm6, Nm9 e Nm1.
5. Prove que P9 é um teorema lógico do cálculo $<L_P,\Sigma_{MP},\Lambda_{P1\text{-}P8,INm6,Nm1}>$.
6. Prove os corolários 2.8 e 2.9.
7. Prove que $C_{\neg m}$ é uma extensão conservativa de $C_{\neg m-}$.
8. Responda as questões abaixo referentes ao teorema 2.13:
   a. O que significa Ni5 e Ni6, e que relação há entre eles?
   b. Qual o significado de Ni8?
   c. Qual o significado de Ni11, Ni12 e Ni13?
9. Faça o que é pedido a seguir em relação ao teorema 2.13:
   a. Prove $\vdash\neg\alpha\vee\beta\rightarrow(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)$ a partir de Ni4 e INm6;
   b. Prove Ni6 (use Ni5 e INm13);
   c. Prove Ni8;
   d. Prove Ni11, Ni12 e Ni13.
10. Prove que P10 é um teorema lógico do cálculo $<L_P,\Sigma_{MP},\Lambda_{P1,P2,P6,Ni2}>$.
11. Prove os corolários 2.10 e 2.11.
12. Em relação ao teorema 2.14, diga o que significa Np2 e Np3.
13. Em relação ao teorema 2.14, prove Np3.
14. Responda as questões abaixo referentes ao teorema 2.15:
    a. O que significa Nc5, e que relação há entre ele e Nc6?
    b. O que significa Nc7?
    c. O que significam Nc8 e Nc9, e que relação há entre eles e Nc4?
    d. O que significam Nc10, Nc11 e Nc12?
15. Faça o que é pedido a seguir em relação ao teorema 2.15:
    a. Prove Nc5;
    b. Prove Nc7 (use De Morgan e P11);
    c. Prove Nc8 e Nc9;
    d. Prove Nc10, Nc11 e Nc12.

# 8
# Análise lógica de argumentos no cálculo proposicional

## 8.1 Novas regras de inferência

Nosso objetivo neste capítulo é usar os teoremas lógicos e regras derivadas provados nos dois últimos capítulos na análise lógica de argumentos. Para tanto, usaremos além, obviamente, dos teoremas lógicos e regras derivadas mostrados nos (meta) teoremas 2.1, 2.3, 2.4, 2.6, 2.7-2.11 e 2.13-2.15, algumas novas regras de inferência derivadas particularmente úteis na análise lógica de argumentos. Após isso, já na seção 8.3, apresentaremos um resultado do cálculo clássico proposicional análogo ao método semântico de prova por absurdo introduzido no capítulo 4 que será extremamente útil na tarefa de analisar logicamente a validade de argumentos. Paralelamente a isso, ilustraremos com exemplos o uso de tais regras e axiomas na efetiva análise de argumentos.

Comecemos então com as ditas novas regras de inferência. Na sua maioria, tais regras já foram vistas e, de uma forma ou de outra, mesmo que em versões condicionais, provadas por nós nos capítulos 6 e 7. O que faremos aqui será basicamente agrupar tais regras de uma forma um pouco diferente (o que acarretará uma nomenclatura também diferente), bem como exibir, quando necessário, suas respectivas derivações.

**Teorema 2.16** Sejam $\alpha,\beta,\varphi\in L_p$ fórmulas quaisquer. As relações abaixo são válidas em $C_p$.

*Regras da Implicação*

RI1. $\alpha\to\beta,\ \beta\to\varphi\vdash\alpha\to\varphi$

RI2. $\alpha\to\beta,\neg\beta\vdash\neg\alpha$

RI3. $\neg(\alpha\to\beta)\vdash\alpha$

RI4. $\neg(\alpha\to\beta)\vdash\neg\beta$

*Regras da Conjunção*

RC1. $\alpha\wedge\beta\vdash\alpha$

RC2. $\alpha\wedge\beta\vdash\beta$

RC3. $\alpha,\beta\vdash\alpha\wedge\beta$

RC4. $\neg(\alpha\wedge\beta),\alpha\vdash\neg\beta$

RC5. $\neg(\alpha\wedge\beta),\beta\vdash\neg\alpha$

*Regras da Disjunção*

RD1. $\neg(\alpha\vee\beta)\vdash\neg\alpha$

RD2. $\neg(\alpha\vee\beta)\vdash\neg\beta$

RD3. $\alpha\vee\beta,\neg\alpha\vdash\beta$

RD4. $\alpha\vee\beta,\neg\beta\vdash\alpha$

*Regras da Negação*

RN1. $\alpha\vdash\neg\neg\alpha$

RN2. $\neg\neg\alpha\vdash\alpha$

*Regras de De Morgan*

RM1. $\neg(\alpha\vee\beta)\vdash\neg\alpha\wedge\neg\beta$

RM2. $\neg\alpha\wedge\neg\beta\vdash\neg(\alpha\vee\beta)$

RM3. $\neg(\alpha\wedge\beta)\vdash\neg\alpha\vee\neg\beta$

RM4. $\neg\alpha\vee\neg\beta\vdash\neg(\alpha\wedge\beta)$

RI1 é a regra I4 (transitividade da implicação) do teorema 2.1, e RI2 é a regra INm4 (*modus tolens*) do teorema 2.10. Já RI3 e RI4 são consequências triviais de Nc6, do teorema 2.15, podendo ser vistas como versões inferenciais de tal teorema lógico. Segue abaixo suas respectivas provas:

(RI3) $\neg(\alpha\rightarrow\beta)\vdash\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(\alpha\rightarrow\beta)\leftrightarrow\alpha\wedge\neg\beta$ | Nc6 |
| 2. $\neg(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\alpha\wedge\neg\beta$ | C1 1 |
| 3. $\neg(\alpha\rightarrow\beta)$ | Premissa |
| 4. $\alpha\wedge\neg\beta$ | MP 3,2 |
| 5. $\alpha$ | C1 4 |

(RI4) $\neg(\alpha\rightarrow\beta)\vdash\neg\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(\alpha\rightarrow\beta)\leftrightarrow\alpha\wedge\neg\beta$ | Nc6 |
| 2. $\neg(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\alpha\wedge\neg\beta$ | C1 1 |

| | |
|---|---|
| 3. $\neg(\alpha\rightarrow\beta)$ | Premissa |
| 4. $\alpha\wedge\neg\beta$ | MP 3,2 |
| 5. $\neg\beta$ | C2 4 |

No que se refere às regras da conjunção, RC1, RC2 e RC3 são, respectivamente, as regras C1, C2 e C3 do teorema 2.3. RC4 pode ser derivada com o auxílio de alguns poucos princípios já provados por nós nos capítulos 6 e 7:

(RC4) $\neg(\alpha\wedge\beta),\alpha \vdash \neg\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(\alpha\wedge\beta)$ | Premissa |
| 2. $\neg(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\neg\alpha\vee\neg\beta$ | Nc3 |
| 3. $\neg(\alpha\wedge\beta)\rightarrow\neg\alpha\vee\neg\beta$ | C1 2 |
| 4. $\neg\alpha\vee\neg\beta$ | MP 1,3 |
| 5. $\neg\alpha\vee\neg\beta\rightarrow(\neg\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)$ | Ni2 |
| 6. $\neg\neg\alpha\rightarrow\neg\beta$ | MP 4,5 |
| 7. $\alpha\rightarrow\neg\neg\alpha$ | INm10 |
| 8. $\alpha\rightarrow\neg\beta$ | I4 7,6 |
| 9. $\alpha$ | Premissa |
| 10. $\neg\beta$ | MP 9,8 |

A prova de RC5 é quase que idêntica à de RC4, sendo a única diferença significativa que usamos Ni3 ao invés de Ni2:

(RC5) $\neg(\alpha\wedge\beta),\beta \vdash \neg\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(\alpha\wedge\beta)$ | Premissa |
| 2. $\neg(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\neg\alpha\vee\neg\beta$ | Nc3 |
| 3. $\neg(\alpha\wedge\beta)\rightarrow\neg\alpha\vee\neg\beta$ | C1 2 |
| 4. $\neg\alpha\vee\neg\beta$ | MP 1,3 |
| 5. $\neg\alpha\vee\neg\beta\rightarrow(\neg\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)$ | Ni3 |
| 6. $\neg\neg\beta\rightarrow\neg\alpha$ | MP 4,5 |
| 7. $\beta\rightarrow\neg\neg\beta$ | INm10 |
| 8. $\beta\rightarrow\neg\alpha$ | I4 7,6 |
| 9. $\beta$ | Premissa |
| 10. $\neg\alpha$ | MP 9,8 |

Passando para as regras da disjunção, RD1 e RD2 são consequências triviais da 2ª lei de De Morgan (Nm8), podendo ser vistas como formulações inferenciais da mesma:

(RD1) $\neg(\alpha\vee\beta)\vdash\neg\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(\alpha\vee\beta)$ | Premissa |
| 2. $\neg(\alpha\vee\beta)\leftrightarrow\neg\alpha\wedge\neg\beta$ | Nm8 |
| 3. $\neg(\alpha\vee\beta)\rightarrow\neg\alpha\wedge\neg\beta$ | C1 2 |
| 4. $\neg\alpha\wedge\neg\beta$ | MP 1,3 |
| 5. $\neg\alpha$ | C1 4 |

(RD2) $\neg(\alpha\vee\beta)\vdash\neg\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(\alpha\vee\beta)$ | Premissa |
| 2. $\neg(\alpha\vee\beta)\leftrightarrow\neg\alpha\wedge\neg\beta$ | Nm8 |
| 3. $\neg(\alpha\vee\beta)\rightarrow\neg\alpha\wedge\neg\beta$ | C1 2 |
| 4. $\neg\alpha\wedge\neg\beta$ | MP 1,3 |
| 5. $\neg\beta$ | C2 4 |

Já RD3 e RD4 são consequências, também triviais, de Ni2 e Ni3, respectivamente, podendo ser vistas como versões inferenciais de tais teoremas lógicos:

(RD3) $\alpha\vee\beta,\neg\alpha\vdash\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\vee\beta$ | Premissa |
| 2. $\alpha\vee\beta\rightarrow(\neg\alpha\rightarrow\beta)$ | Ni2 |
| 3. $\neg\alpha\rightarrow\beta$ | MP 1,2 |
| 4. $\neg\alpha$ | Premissa |
| 5. $\beta$ | MP 4,3 |

(RD4) $\alpha\vee\beta,\neg\beta\vdash\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\vee\beta$ | Premissa |
| 2. $\alpha\vee\beta\rightarrow(\neg\beta\rightarrow\alpha)$ | Ni3 |
| 3. $\neg\beta\rightarrow\alpha$ | MP 1,2 |
| 4. $\neg\beta$ | Premissa |
| 5. $\alpha$ | MP 4,3 |

As regras da negação são aplicações, também triviais, da lei da dupla negação Nc1:

(RN1) $\alpha\vdash\neg\neg\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg\neg\alpha\leftrightarrow\alpha$ | Nc1 |
| 2. $\alpha\rightarrow\neg\neg\alpha$ | C2 1 |
| 3. $\alpha$ | Premissa |
| 4. $\neg\neg\alpha$ | MP 3,2 |

(RN2) $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$ | Nc1 |
| 2. $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ | C1 1 |
| 3. $\neg\neg\alpha$ | Premissa |
| 4. $\alpha$ | MP 3,2 |

Por fim, as regras de Morgan são reformulações das 1ª e 2ª leis de De Morgan. RM1 e RM2, por exemplo, são versões inferenciais da 2ª lei de De Morgan (Nm8):

(RM1) $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(\alpha \vee \beta)$ | Premissa |
| 2. $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$ | Nm8 |
| 3. $\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$ | C1 2 |
| 4. $\neg\alpha \wedge \neg\beta$ | MP 1,3 |

(RM2) $\neg\alpha \wedge \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg\alpha \wedge \neg\beta$ | Premissa |
| 2. $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$ | Nm8 |
| 3. $\neg\alpha \wedge \neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$ | C2 2 |
| 4. $\neg(\alpha \vee \beta)$ | MP 1,3 |

Já NM3 e NM4 podem ser vistas como formulações inferenciais da 1ª Lei de Morgan (Nc3):

(RM3) $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(\alpha \wedge \beta)$ | Premissa |
| 2. $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$ | Nc3 |
| 3. $\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$ | C1 2 |
| 4. $\neg\alpha \vee \neg\beta$ | MP 1,3 |

(RM4) $\neg\alpha \vee \neg\beta \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg\alpha \vee \neg\beta$ | Premissa |
| 2. $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$ | Nc3 |
| 3. $\neg\alpha \vee \neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$ | C2 2 |
| 4. $\neg(\alpha \wedge \beta)$ | MP 1,3 |

## 8.2 Análise lógica de argumentos

Na tentativa de exemplificar o uso do cálculo clássico proposicional na análise lógica de argumentos, daremos a seguir alguns exemplos de argumentos seguidos de suas respectivas análises. Comecemos com um argumento dado por Peter Singer, um dos líderes do Movimento de Libertação dos Animais, em defesa dos direitos dos animais[56]:

(1) Se o racismo é incorreto, então é factualmente evidente que todas as raças têm habilidades iguais ou é moralmente claro que interesses similares de todos os seres vivos devem ser levados igualmente em consideração.

Não é factualmente evidente que todas as raças têm habilidades iguais.

Se é moralmente claro que interesses similares de todos os seres vivos devem ser levados igualmente em consideração, então é claro que interesses similares de animais e seres humanos devem ser igualmente levados em consideração.

O racismo é incorreto

∴ É claro que interesses similares de animais e seres humanos devem ser igualmente levados em consideração.

A tradução desse argumento para a linguagem proposicional, juntamente com o glossário usado, seria como segue:

| *Glossário* | *Tradução* |
|---|---|
| A: O racismo é correto. | $\neg A \rightarrow B \vee C$ |
| B: É factualmente evidente que todas as raças têm habilidades iguais. | $\neg B$ |
| C: É moralmente claro que interesses similares de todos os seres vivos devem ser levados igualmente em consideração. | $C \rightarrow D$ |
| | $\neg A$ |
| D: É claro que interesses similares de animais e seres humanos devem ser igualmente levados em consideração. | $\therefore D$ |

Para provar que (1) é um argumento válido, temos que provar a seguinte relação:

(2) $\neg A \rightarrow B \vee C, \neg B, C \rightarrow D, \neg A \vdash D$

o que é feito logo abaixo:

(2) $\neg A \rightarrow B \vee C, \neg B, C \rightarrow D, \neg A \vdash D$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg A \rightarrow B \vee C$ | Premissa |
| 2. $\neg A$ | Premissa |
| 3. $B \vee C$ | MP 2,1 |
| 4. $\neg B$ | Premissa |
| 5. $C$ | RD3 3,4 |
| 6. $C \rightarrow D$ | Premissa |
| 7. $D$ | MP 5,6 |

56. A maioria dos argumentos que usaremos como exemplos neste capítulo já apareceram como exercícios de análise lógica no Capítulo 4.

Segue abaixo um segundo exemplo:

(3) Seria igualmente errado para um sádico cegar uma pessoa permanentemente depois ou antes do seu nascimento [através, por exemplo, de uma injeção que lhe cegaria mas não machucaria sua mãe].

Se seria igualmente errado para um sádico cegar permanentemente uma pessoa depois ou antes do seu nascimento, então é falso que os direitos morais das pessoas começam apenas após o nascimento.

Se infanticídio é errado e aborto não é errado, então os direitos morais de uma pessoa começam apenas após o nascimento.

Infanticídio é errado.

∴ Aborto é errado.

Abaixo temos o glossário e a tradução de (3) para a linguagem proposicional:

| *Glossário* | *Tradução* |
|---|---|
| A: É igualmente errado para um sádico cegar uma pessoa permanentemente depois ou antes do seu nascimento.<br>B: Os direitos morais das pessoas começam apenas após o nascimento.<br>C: Infanticídio é errado.<br>D: Aborto é errado. | $A$<br>$A \rightarrow \neg B$<br>$C \wedge \neg D \rightarrow B$<br>$C$<br>$\therefore D$ |

Provar então que (3) é um argumento válido é provar que a relação abaixo é válida em $C_P$:

(4) $A, A \rightarrow \neg B, C \wedge \neg D \rightarrow B, C \vdash D$

o que é feito logo a seguir:

(4) $A, A \rightarrow \neg B, C \wedge \neg D \rightarrow B, C \vdash D$

| | |
|---|---|
| 1. $A$ | Premissa |
| 2. $A \rightarrow \neg B$ | Premissa |
| 3. $\neg B$ | MP 1,2 |
| 4. $C \wedge \neg D \rightarrow B$ | Premissa |
| 5. $\neg(C \wedge \neg D)$ | RI2 4,3 |
| 6. $C$ | Premissa |
| 7. $\neg\neg D$ | RC4 5,6 |
| 8. $D$ | RN2 7 |

Como terceiro exemplo, considere o argumento abaixo, dado por William Craig e James Moreland, que tenta mostrar que o universo teve um início no tempo:

(5) Sistemas fechados tendem em direção a maiores entropias [uma distribuição mais uniforme de energia; essa é a segunda lei da termodinâmica].

Se sistemas fechados tendem em direção a maiores entropias e o universo não teve um início no tempo, então o universo teria atingido um estado de quase completa entropia [por exemplo, tudo teria a mesma temperatura].

O universo não atingiu um estado de quase completa entropia.

$\therefore$ O universo teve um início no tempo.

A tradução desse argumento seria como segue:

| *Glossário* | *Tradução* |
|---|---|
| A: Sistemas fechados tendem em direção a maiores entropias.<br>B: O universo teve um início no tempo.<br>C: O universo atingiu um estado de quase completa entropia. | $A$<br>$A \wedge \neg B \to C$<br>$\neg C$<br>$\therefore B$ |

Para provar a validade de (5), temos que provar que $\{A, A\wedge\neg B\to C, \neg C\} \vdash B$ é o caso, o que é feito logo a seguir:

(6) $A, A\wedge\neg B\to C, \neg C \vdash B$

| | |
|---|---|
| 1. $A\wedge\neg B\to C$ | Premissa |
| 2. $\neg C$ | Premissa |
| 3. $\neg(A\wedge\neg B)$ | RI2 1,2 |
| 4. $A$ | Premissa |
| 5. $\neg\neg B$ | RC4 3,4 |
| 6. $B$ | RN2 5 |

É importante lembrar que o nosso objetivo neste capítulo é ilustrar o uso de toda e qualquer regra ou teorema lógico do cálculo clássico proposicional na análise lógica de argumentos. Introduzimos novas regras através do teorema 2.16 apenas porque tais regras são, em geral, mais convenientes na tarefa de analisar a validade lógica de alguns argumentos. Isso obviamente não significa que a validade de todo e qualquer argumento possa ser demonstrada apenas com o auxílio de tais regras, como aconteceu com os exemplos dados até agora. Segue abaixo argumento dado por Platão no *Meno*, cuja prova é mais convenientemente feita se fizermos uso de algumas regras mostradas nos capítulos anteriores:

(7) Se a virtude pode ser ensinada, então existem professores profissionais de virtude ou existem professores amadores de virtude.

Se existem professores profissionais de virtude, então os sofistas podem ensinar seus estudantes a serem virtuosos.

Se existem professores amadores de virtude, então os mais nobres dos atenienses podem ensinar os seus filhos a serem virtuosos.

Os sofistas não podem ensinar seus estudantes a serem virtuosos, e os mais nobres dos atenienses [tal qual o grande líder Péricles] não podem ensinar os seus filhos a serem virtuosos.

∴ A virtude não pode ser ensinada.

Segue abaixo glossário e tradução de (7):

| *Glossário* | *Tradução* |
|---|---|
| A: A virtude pode ser ensinada.<br>B: Existem professores profissionais de virtude.<br>C: Existem professores amadores de virtude.<br>D: Os sofistas podem ensinar seus estudantes a serem virtuosos.<br>E: Os mais nobres dos atenienses podem ensinar os seus filhos a serem virtuosos. | $A \to B \lor C$<br>$B \to D$<br>$C \to E$<br>$\neg D \land \neg E$<br>$\therefore \neg A$ |

Segue abaixo a prova de que (7), já representado na forma de relação entre fórmulas, é um argumento válido:

(8) $A \to B \lor C, B \to D, C \to E, \neg D \land \neg E \vdash \neg A$

| | |
|---|---|
| 1. $A \to B \lor C$ | Premissa |
| 2. $\neg(B \lor C) \to \neg A$ | INm5 1 |
| 3. $B \to D$ | Premissa |
| 4. $\neg D \to \neg B$ | INm5 3 |
| 5. $C \to E$ | Premissa |
| 6. $\neg E \to \neg C$ | INm5 5 |
| 7. $\neg D \land \neg E \to \neg B \land \neg C$ | IC10 4,6 |
| 8. $\neg D \land \neg E$ | Premissa |
| 9. $\neg B \land \neg C$ | MP 8,7 |
| 10. $\neg(B \lor C)$ | RM2 9 |
| 11. $\neg A$ | MP 10,2 |

Para finalizar esta seção, considere uma versão do famoso argumento do mal contra a existência de Deus:

(9) O mal existe.

Se o mal existe, então Deus não deseja impedir o mal ou Ele não pode impedir o mal.

Se Deus não deseja impedir o mal, então Ele não é onibenevolente.

Se Deus não pode impedir o mal, então Ele não é onipotente.

Se Deus existe, então Ele é onibenevolente e onipotente.

∴ Deus não existe.

Segue abaixo tradução de (9) para a linguagem proposicional seguida de sua prova:

| *Glossário* | *Tradução* |
|---|---|
| A: O mal existe. | $A$ |
| B: Deus deseja impedir o mal. | $A \rightarrow \neg B \vee \neg C$ |
| C: Deus pode impedir o mal. | $\neg B \rightarrow \neg D$ |
| D: Deus é onibenevolente. | $\neg C \rightarrow \neg E$ |
| E: Deus é onipotente. | $F \rightarrow D \wedge E$ |
| F: Deus existe. | $\therefore \neg F$ |

(10) $A, A \rightarrow \neg B \vee \neg C, \neg B \rightarrow \neg D, \neg C \rightarrow \neg E, F \rightarrow D \wedge E \vdash \neg F$

| | |
|---|---|
| 1. $A$ | Premissa |
| 2. $A \rightarrow \neg B \vee \neg C$ | Premissa |
| 3. $\neg B \vee \neg C$ | MP 1,2 |
| 4. $\neg B \rightarrow \neg D$ | Premissa |
| 5. $\neg C \rightarrow \neg E$ | Premissa |
| 6. $\neg B \vee \neg C \rightarrow \neg D \vee \neg E$ | ID5 4,5 |
| 7. $\neg D \vee \neg E$ | MP 3,6 |
| 8. $\neg(D \wedge E)$ | RM4 7 |
| 9. $F \rightarrow D \wedge E$ | Premissa |
| 10. $\neg F$ | RI2 9,8 |

Um detalhe importante sobre a derivação acima é que nela nós usamos uma regra – ID5 – (passo 6) cuja prova não foi exibida no capítulo 6. Assim, da maneira como está, a prova não é legítima. Para que ela possa ser tomada como tal, nós temos necessariamente que fornecer uma prova para ID5. Isso é feito logo a seguir:

(ID5) $\alpha\to\varphi,\beta\to\gamma\vdash\alpha\vee\beta\to\varphi\vee\gamma$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\to\varphi$ | Premissa |
| 2. $\beta\to\gamma$ | Premissa |
| 3. $\varphi\to\varphi\vee\gamma$ | P6 |
| 4. $\alpha\to\varphi\vee\gamma$ | I4 1,3 |
| 5. $\gamma\to\varphi\vee\gamma$ | P7 |
| 6. $\beta\to\varphi\vee\gamma$ | I4 2,5 |
| 7. $\alpha\vee\beta\to\varphi\vee\gamma$ | D3 4,6 |

A moral disso é que podemos usar nas nossas derivações a regra ou teorema lógico que quisermos, conquanto que tal regra ou teorema tenha sido previamente provado.

## 8.3 Redução ao absurdo, invalidade e mais análise lógica

No capítulo 4 falamos sobre o método de prova por *redução ao absurdo* e mostramos como seu uso pode ser, em alguns casos, mais eficiente do que o método de prova direta. Apenas relembrando, a ideia básica da prova por absurdo é provar uma tese qualquer T supondo que a sua negação ¬T é verdade; a partir daí chega-se a um absurdo ou contradição e conclui-se que ¬T é falso, o que tem como consequência óbvia que T é verdade. Nosso propósito nesta seção é mostrar como tal método pode também ser usado em conjunto com um cálculo axiomático, e exemplificar o seu uso na análise lógica de argumentos.

Já tivemos oportunidade de mencionar a prova por redução ao absurdo em conexão com o método axiomático várias vezes. No capítulo 5, por exemplo, provamos o que chamamos de uma representação intralógica do princípio da redução ao absurdo:

(11) $A\to C,A\to\neg C\vdash\neg A$

Mais na frente, ainda no capítulo 5, (11) aparece na forma de esquema de relação sob o nome de *redução ao absurdo*, bem como no capítulo 7, já com um nome bem menos sugestivo:

(INm1) $\alpha\to\beta,\alpha\to\neg\beta\vdash\neg\alpha$.

Finalmente, mencionamos nos capítulos 2, 6 e 7 (sendo neste último na forma de um metateorema – o teorema 2.12) o que pode ser chamado de a representação metalógica do princípio ou método da prova por redução ao absurdo:

(12) Se $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ e $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\neg\beta$, então $\Gamma\vdash\neg\alpha$

em que $\Gamma$ é um conjunto de fórmulas. Também enfatizamos nessas várias ocasiões que tais princípios dependem do axioma P9 que, conforme mencionamos, também pode ser visto como uma representação (axiomática) do princípio da redução ao absurdo.

Apesar de tais princípios poderem ser, como realmente o foram, considerados como versões do método de prova por redução ao absurdo, há um fator fundamental desse método que não é capturado nem por (11) nem por INm1 nem por (12). Tome (12), por exemplo. O que (12) nos garante é que, se derivarmos uma contradição a partir de $\Gamma$ e $\alpha$, então podemos derivar $\neg\alpha$ a partir de $\Gamma$. No entanto, a ideia completa presente no método de prova por absurdo é provar uma dada tese $\alpha$ derivando uma contradição a partir de $\neg\alpha$, chegando, ao final, à conclusão de que $\alpha$ é o caso. Apesar de (12) fazer uso da ideia de chegar a uma contradição a partir de uma dada fórmula, e tal fórmula poder ser a negação da tese $\alpha$ que queremos provar, do fato de que $\neg\alpha$ e $\Gamma$ geram uma contradição só nos permite concluir que $\neg\neg\alpha$ é deduzido a partir de $\Gamma$; e o que nós queremos realmente concluir é que $\alpha$ é deduzido a partir de $\Gamma$[57]. Assim, uma representação mais completa do método da redução ao absurdo seria como segue:

**TEOREMA 2.17** Seja $C=<L,\Sigma,\Lambda>$ uma extensão conservativa de $C_p$, $\Gamma\subseteq L$ um conjunto de fórmulas e $\alpha,\beta\in L$ duas fórmulas. Se $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\vdash\beta$ e $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\vdash\neg\beta$ em $C_p$, então $\Gamma\vdash\alpha$ em $C_p$.

Apesar da semelhança com (12), esse teorema nos diz algo bem diferente: que se a partir de $\Gamma$ e $\neg\alpha$ nós deduzimos tanto $\beta$ como $\neg\beta$, então podemos deduzir $\alpha$ a partir de $\Gamma$, o que, podemos dizer, é a representação plena do método da redução ao absurdo. Chamaremos a partir de agora o teorema 2.17 de *teorema da redução ao absurdo*.

É fácil ver como esse teorema pode nos auxiliar na análise lógica de argumentos. Suponha que queiramos provar que $\alpha$ é deduzido a partir de $\Gamma$; o que o teorema 2.17 nos diz é que, ao invés de exibirmos uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$, podemos simplesmente mostrar que é possível derivar uma contradição a partir de $\Gamma$ e $\neg\alpha$, o que, em alguns casos, é mais simples do que a prova direta. Para ilustrar isso, considere o argumento abaixo, dado pelo filósofo medieval William de Ockham:

(13) Deus é todo-poderoso.

Se Deus é todo-poderoso, então Ele poderia ter criado o mundo de qualquer maneira [seja lógica ou não].

57. O que, é fácil concluir, requer, além de P9, também Nc1, que por sua vez depende de P11.

Se Deus poderia ter criado o mundo de qualquer maneira, então o mundo tal qual ele é não tem nenhum tipo de necessidade.

Se o mundo tal qual ele é não tem nenhum tipo de necessidade, então nós não podemos conhecê-lo por mera especulação filosófica sem a ajuda da experiência.

$\therefore$ Nós não podemos conhecer o mundo tal qual ele é por mera especulação filosófica sem a ajuda da experiência.

cuja tradução e glossário são mostrados abaixo:

| *Glossário* | *Tradução* |
|---|---|
| A: Deus é todo-poderoso. | $A$ |
| B: Deus poderia ter criado o mundo de qualquer maneira. | $A \rightarrow B$ |
| C: Há um necessidade no mundo tal qual ele é. | $B \rightarrow \neg C$ |
| D: Nós podemos conhecer o mundo por mera especulação filosófica sem a ajuda da experiência. | $\neg C \rightarrow \neg D$ |
| | $\therefore \neg D$ |

Trivialmente, provar que (13) é um argumento válido é provar que a relação abaixo

(14) $A, A \rightarrow B, B \rightarrow \neg C, \neg C \rightarrow \neg D \vdash \neg D$

é o caso. O que o método da redução ao absurdo, representado pelo teorema 2.17, nos diz é que podemos provar (14) se mostrarmos que a partir do conjunto formado pelas suas premissas juntamente com a negação de sua conclusão podemos derivar uma contradição, ou seja, se provarmos, para uma fórmula qualquer $\beta$, que $\{A, A \rightarrow B, B \rightarrow \neg C, \neg C \rightarrow \neg D\} \cup \{\neg\neg D\} \vdash \beta$ e $\{A, A \rightarrow B, B \rightarrow \neg C, \neg C \rightarrow \neg D\} \cup \{\neg\neg D\} \vdash \neg\beta$. Segue abaixo tal prova para $\beta \equiv A$:

(15) $A, A \rightarrow B, B \rightarrow \neg C, \neg C \rightarrow \neg D, \neg\neg D \vdash A$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A$ | Premissa |

(16) $A, A \rightarrow B, B \rightarrow \neg C, \neg C \rightarrow \neg D, \neg\neg D \vdash \neg A$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\neg D$ | Premissa |
| 2. | $\neg C \rightarrow \neg D$ | Premissa |
| 3. | $\neg\neg C$ | RI2 2,1 |
| 4. | $B \rightarrow \neg C$ | Premissa |
| 5. | $\neg B$ | RI2 4,3 |
| 6. | $A \rightarrow B$ | Premissa |
| 7. | $\neg A$ | RI2 6,5 |

Como temos $\{A,A\rightarrow B,B\rightarrow\neg C,\neg C\rightarrow\neg D\}\cup\{\neg\neg D\}\vdash A$ (15) e $\{A,A\rightarrow B,B\rightarrow\neg C,$ $\neg C\rightarrow\neg D\}\cup\{\neg\neg D\}\vdash\neg A$ (16), pelo teorema 2.17, temos então $\{A,A\rightarrow B,B\rightarrow\neg C,$ $\neg C\rightarrow\neg D\}\vdash\neg D$, ou seja, (14).

Vejamos um segundo exemplo:

(17) Se a predestinação é verdade, então Deus é a causa de sermos pecadores.

Se Deus é a causa de sermos pecadores, mas ainda assim condena os pecadores ao castigo eterno, então Deus não é bom.

$\therefore$ Se Deus é bom, então a predestinação não é verdade ou Deus não condena os pecadores ao castigo eterno.

Aqui (17) seria traduzido para a linguagem proposicional como segue:

| *Glossário* | *Tradução* |
|---|---|
| A: A predestinação é verdade.<br>B: Deus é a causa de sermos pecadores.<br>C: Deus condena os pecadores ao castigo eterno.<br>D: Deus é bom. | $A\rightarrow B$<br>$B\wedge C\rightarrow\neg D$<br>$\therefore D\rightarrow\neg A\vee\neg C$ |

sendo nossa tarefa provar

(18) $A\rightarrow B,B\wedge C\rightarrow\neg D\vdash D\rightarrow\neg A\vee\neg C$

Usando o método da redução ao absurdo, tal tarefa se reduz a derivar uma contradição a partir de $\{A\rightarrow B,B\wedge C\rightarrow\neg D\}$ juntamente com a negação na nossa conclusão, ou seja, $\neg(D\rightarrow\neg A\vee\neg C)$, o que é feito logo abaixo:

(19) $A\rightarrow B,B\wedge C\rightarrow\neg D,\neg(D\rightarrow\neg A\vee\neg C)\vdash B\wedge C$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(D\rightarrow\neg A\vee\neg C)$ | Premissa |
| 2. $\neg(\neg A\vee\neg C)$ | RI4 1 |
| 3. $\neg\neg A\wedge\neg\neg C$ | RM1 2 |
| 4. $\neg\neg A$ | RC1 3 |
| 5. $\neg\neg C$ | RC2 3 |
| 6. $A$ | RN2 4 |
| 7. $C$ | RN2 5 |
| 8. $A\rightarrow B$ | Premissa |
| 9. $B$ | MP 6,8 |
| 10. $B\wedge C$ | RC3 9,7 |

(20) $A \rightarrow B, B \wedge C \rightarrow \neg D, \neg(D \rightarrow \neg A \vee \neg C) \vdash \neg(B \wedge C)$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(D \rightarrow \neg A \vee \neg C)$ | Premissa |
| 2. $D$ | RI3 1 |
| 3. $\neg\neg D$ | RN1 2 |
| 4. $B \wedge C \rightarrow \neg D$ | Premissa |
| 5. $\neg(B \wedge C)$ | RI2 4,3 |

Como então temos (19) e (20), pelo teorema da redução ao absurdo temos também (18).

Veja que nos exemplos dados até agora usamos apenas as regras do teorema 2.16. Isto não é coincidência: na maioria dos casos, o uso do teorema 2.17 facilita o uso das regras derivadas do teorema 2.16, o que, temos que admitir, torna a construção de derivações consideravelmente mais simples. Um exemplo disso é a relação

(10) $A, A \rightarrow \neg B \vee \neg C, \neg B \rightarrow \neg D, \neg C \rightarrow \neg E, F \rightarrow E \wedge D \vdash \neg F$

Que, na seção passada provamos através do método direto, o que acarretou o uso de um número considerável de princípios, inclusive de uma regra (ID5) cuja derivação não tínhamos exibido ainda e que, por conta disso, tivemos que provar. Como veremos logo a seguir, utilizando o método da redução ao absurdo podemos provar (10) utilizando apenas as regras do teorema 2.16.

Para usar o método da redução ao absurdo na prova de (10), devemos supor que sua conclusão é falsa, isto é, que $\neg\neg F$ é o caso e, juntamente com seu conjunto de premissas, provar que podemos chegar a $\beta$ e $\neg\beta$, para algum $\beta$. Segue abaixo tal prova para $\beta \equiv A$:

(21) $A, A \rightarrow \neg B \vee \neg C, \neg B \rightarrow \neg D, \neg C \rightarrow \neg E, F \rightarrow E \wedge D, \neg\neg F \vdash A$

| | |
|---|---|
| 1. $A$ | Premissa |

(22) $A, A \rightarrow \neg B \vee \neg C, \neg B \rightarrow \neg D, \neg C \rightarrow \neg E, F \rightarrow E \wedge D, \neg\neg F \vdash \neg A$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg\neg F$ | Premissa |
| 2. $F$ | RN2 1 |
| 3. $F \rightarrow E \wedge D$ | Premissa |
| 4. $E \wedge D$ | MP 2,3 |
| 5. $E$ | RC1 4 |
| 6. $D$ | RC2 4 |
| 7. $\neg C \rightarrow \neg E$ | Premissa |
| 8. $\neg\neg E$ | RN1 5 |
| 9. $\neg\neg C$ | RI2 7,8 |

| | |
|---|---|
| 10. $\neg B \rightarrow \neg D$ | Premissa |
| 11. $\neg\neg D$ | RN1 6 |
| 12. $\neg\neg B$ | RI2 10,11 |
| 13. $\neg\neg B \wedge \neg\neg C$ | RC3 12,9 |
| 14. $\neg(\neg B \vee \neg C)$ | RM2 13 |
| 15. $A \rightarrow \neg B \vee \neg C$ | Premissa |
| 16. $\neg A$ | RI2 15,14 |

Como então temos (21) e (22), pelo teorema da redução ao absurdo podemos concluir (10). Conforme prometemos, apesar de ser mais longa que a derivação exibida na seção 8.2, essa prova de (10) usa apenas regras listadas no teorema 2.16.

Até agora só temos nos debruçado sobre provas de validade de argumentos. Mas o que dizer sobre a invalidade de argumentos? Vimos no capítulo 4 que a definição semântica de consequência lógica pode ser usada tanto para determinar a validade como a invalidade de argumentos. No que se refere ao cálculo axiomático, não encontramos mais essa simetria entre validade e invalidade: enquanto o método axiomático é muito bom na determinação da validade de um argumento, caso o argumento seja inválido, nós não conseguiremos provar isso. E não é muito difícil de ver por quê. De acordo com a definição 1.14, $\Gamma \vdash \alpha$ sss existe uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$. Isso significa que para mostrarmos que $\Gamma \nvdash \alpha$ nós temos que provar que *não há nenhuma* derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$, ou seja, nós teríamos que examinar todas as derivações existentes e mostrar, para cada uma delas, que não se trata de uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$. Isso obviamente é impossível, pois o número de derivações é infinito. É por conta disso que, na prova da invalidade de argumentos, não temos escolha senão confiarmos exclusivamente na definição semântica da relação de inferência.

No entanto e apesar disso, de um ponto de vista prático, podemos sim usar o método axiomático, em especial o princípio da redução ao absurdo, conforme especificado no teorema 2.17, para mostrar que um determinado argumento é inválido. Tome o argumento abaixo como exemplo:

(23) Se a crença na existência de Deus tem base científica, então ela é racional.

Não há experimento científico concebível capaz de decidir se Deus existe ou não.

Se a crença na existência de Deus tem base científica, então há algum experimento científico concebível capaz de decidir se Deus existe ou não.

∴ A crença na existência de Deus não é uma crença racional.

Tal argumento seria traduzido para a linguagem proposicional como segue:

| *Glossário* | *Tradução* |
| --- | --- |
| A: A crença na existência de Deus tem base científica.<br>B: A crença na existência de Deus é racional.<br>C: Há algum experiemento científico concebível capaz de decidir se Deus existe ou não. | $A \to B$<br>$\neg C$<br>$A \to C$<br>$\therefore \neg B$ |

sendo a nossa tarefa mostrar se é o caso ou não que

(24) $A \to B, \neg C, A \to C \vdash \neg B$

Usando o método da redução ao absurdo, nós teríamos que mostrar que é possível chegar a uma contradição a partir de $\{A \to B, \neg C, A \to C\} \cup \{\neg\neg B\}$. Vejamos como seria uma tentativa de realizar tal empreitada:

(25) $A \to B, \neg C, A \to C, \neg\neg B \vdash$ ??

| | |
| --- | --- |
| 1. $A \to B$ | Premissa |
| 2. $\neg\neg B$ | Premissa |
| 3. $B$ | RN2 2 |
| 4. $A \to C$ | Premissa |
| 5. $\neg C$ | Premissa |
| 6. $\neg A$ | RI2 4,5 |

Poderíamos continuar a aplicar regras e usar os teoremas lógicos conhecidos indefinidamente, mas de um ponto de vista prático o exercício acima é suficiente para nos convencermos de que não é possível derivar uma contradição a partir de $\{A \to B, \neg C, A \to C\} \cup \{\neg\neg B\}$. Assim podemos concluir que (24) é um argumento inválido, ou seja, que a proposição (26) abaixo é verdadeira:

(26) $A \to B, \neg C, A \to C \nvdash \neg B$

Veja, no entanto, que esse nosso raciocínio, apesar de razoável, não estabelece ou prova (26). Na verdade, conforme mencionamos, de um ponto de vista formal, apenas usando o cálculo clássico proposicional é *impossível* provar (26). Para provar (26) teríamos primeiro que provar

(27) $A \to B, \neg C, A \to C \nvDash \neg B$

o que, como vimos no capítulo 4, é completamente exequível e, então, utilizando-se de um corolário da corretude da lógica clássica proposicional[58]:

(28) Seja $\Gamma \subseteq L_p$ e $\alpha \in L_p$. Se $\Gamma \nvDash \alpha$ então $\Gamma \nvdash \alpha$

**58.** Que, como já falamos, será visto no capítulo 12.

provaríamos (26).

Para finalizarmos este capítulo, lembremos que o que estamos chamando aqui de análise lógica de argumentos consiste apenas na verificação de se um dado argumento, conforme traduzido para a linguagem proposicional, é válido ou não (no cálculo $C_p$). Uma consequência disso é que nossa análise não diz nada a respeito de se as premissas do argumento em questão são verdadeiras ou não, o que obviamente é necessário para nos pronunciarmos sobre a veracidade de sua conclusão (supondo que o argumento em questão seja efetivamente um argumento válido).

Um ponto importante, no entanto, é que a determinação de se as premissas de um dado argumento são verdadeiras ou não envolve sutilezas cuja ciência requer certo grau de reflexão. Tome como exemplo o argumento (9), cuja conclusão é exibida logo abaixo:

(29) Deus não existe.

Dado que exibimos uma prova de validade para a representação de (9) na linguagem proposicional, e como as premissas de (9) são aparentemente verdadeiras, podemos concluir então que (29) também é verdade, resolvendo assim um dos problemas mais antigos da filosofia. Como seria de se esperar, entretanto, as coisas não são tão simples assim. É possível concluirmos, após uma breve reflexão, que uma das premissas de (9) afirma algo por demais forte, não possuindo assim o mesmo grau de razoabilidade das demais premissas. Estamos obviamente falando da segunda premissa de (9):

(30) Se o mal existe, então Deus não deseja impedir o mal ou Ele não pode impedir o mal.

Basicamente o que (30) afirma é que as proposições

(31) Deus não deseja impedir o mal.

e

(32) Deus não pode impedir o mal.

são as *únicas explicações* para a existência do mal; supondo que Deus existe, então se há o mal, é porque ou Deus não deseja impedir o mal ou porque ele não pode impedir o mal. Juntando isso com o fato de que Deus, se existe, é tanto onipotente como onipresente (quinta premissa), concluimos então (29).

Mas veja que não é de forma alguma trivial que (31) e (32) sejam as únicas explicações possíveis para a existência do mal dada a existência de Deus, como (30) proclama. Podemos, por exemplo, invocar a teoria do *karma* (que inclui uma teoria da transmigração da alma) para defender a ideia de que tudo o que acontece aos seres vivos, seja bom ou mal, é o resultado de suas ações passadas (que podem ter ocorrido tanto nessa como nas vidas passadas). Assim, todo o mal que acontece às pessoas seria nada mais do que o exercício da justiça divina de Deus. Também podemos, invocando um dos preceitos mais tradicionais das práticas *yóguicas* devocionais e de muitas teologias cristãs, supor que a existência do mal no mundo é algo necessário para o aprimoramento da alma, isto é, ao desenvolvimento de qualidades como compaixão, paciência e tolerância, que, em última instância, nos levam à comunhão ou *yoga* com o Ser Supremo; a menos, por exemplo, que realizemos que a tão buscada felicidade não pode ser encontrada neste mundo material (coisa que a existência do mal sugere), nunca voltaremos a nossa face para Deus com a intensidade necessária. Assim temos, no mínimo, que (30) não é algo autoevidente ou livre de controvérsias.

Essa nossa breve análise pode ser usada no refinamento, por assim dizer, do argumento (9), de forma a vermos exatamente onde reside o problema com a premissa (30). Mais especificamente, iremos supor que as duas hipóteses acima mencionadas (que podemos chamar, respectivamente, a hipótese ou teoria do *karma* e a hipótese de aprimoramento da alma) constituem, juntamente com (31) e (32), as únicas explicações disponíveis para a existência do mal dada a existência de Deus. Pelas mesmas razões dadas contra a veracidade de (30), tal suposição é questionável, sendo extremamente plausível que existam outras explicações para a existência do mal dada a existência de Deus. No entanto, como falamos, tal exercício pode nos ajudar a ver exatamente onde reside o problema com (30). Incorporando ao argumento (9) o que foi dito no parágrafo anterior temos o que segue:

(33) O mal existe.

Se o mal existe, então Deus não deseja impedir o mal ou Ele não pode impedir o mal ou o mal é necessariamente merecido a quem ele atinge ou o mal é necessário ao aprimoramento da alma.

Se Deus não deseja impedir o mal, então Ele não é onibenevolente.

Se Deus não pode impedir o mal, então Ele não é onipotente.

Se Deus existe, então Ele é onipotente e onibenevolente.

Se o mal é necessariamente merecido a quem ele atinge, então a teoria do *karma* é verdade.

∴ Se a teoria do *karma* é falsa, e é falso que o mal é necessário ao aprimoramento da alma, então Deus não existe.

Conforme pode ser constatado abaixo (usando o teorema da redução ao absurdo), o argumento (33) é válido:

| *Glossário* | *Tradução* |
|---|---|
| A: O mal existe. | $A$ |
| B: Deus deseja impedir o mal. | $A \to (\neg B \lor \neg C) \lor (G \lor H)$ |
| C: Deus pode impedir o mal. | $\neg B \to \neg D$ |
| D: Deus é onibenevolente. | $\neg C \to \neg E$ |
| E: Deus é onipotente. | $F \to E \land D$ |
| F: Deus existe. | $G \to I$ |
| G: O mal é necessariamente merecido a quem ele atinge. | $\therefore \neg I \land \neg H \to \neg F$ |
| H: O mal é necessário ao aprimoramento da alma. | |
| I: A teoria do *karma* é verdade | |

(34) $A, A \to (\neg B \lor \neg C) \lor (G \lor H), \neg B \to \neg D, \neg C \to \neg E, F \to E \land D, G \to I, \neg(\neg I \land \neg H \to \neg F) \vdash I$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(\neg I \land \neg H \to \neg F)$ | Premissa |
| 2. $\neg I \land \neg H$ | RI3 1 |
| 3. $\neg\neg F$ | RI4 1 |
| 4. $F$ | RN2 3 |
| 5. $F \to E \land D$ | Premissa |
| 6. $E \land D$ | MP 4,5 |
| 7. $E$ | RC1 6 |
| 8. $D$ | RC2 6 |
| 9. $\neg\neg E$ | RN1 7 |
| 10. $\neg\neg D$ | RN1 8 |
| 11. $\neg C \to \neg E$ | Premissa |
| 12. $\neg\neg C$ | RI2 11,9 |
| 13. $\neg B \to \neg D$ | Premissa |
| 14. $\neg\neg B$ | RI2 13,10 |
| 15. $\neg\neg B \land \neg\neg C$ | RC3 14,12 |
| 16. $\neg(\neg B \lor \neg C)$ | RM2 15 |
| 17. $A$ | Premissa |
| 18. $A \to (\neg B \lor \neg C) \lor (G \lor H)$ | Premissa |
| 19. $(\neg B \lor \neg C) \lor (G \lor H)$ | MP 17,18 |
| 20. $G \lor H$ | RD3 19,16 |
| 21. $\neg H$ | RC2 2 |
| 22. $G$ | RD4 20,21 |
| 23. $G \to I$ | Premissa |
| 24. $I$ | MP 22,23 |

(35) A, $A \rightarrow (\neg B \vee \neg C) \vee (G \vee H), \neg B \rightarrow \neg D, \neg C \rightarrow \neg E, F \rightarrow E \wedge D, G \rightarrow I, \neg(\neg I \wedge \neg H \rightarrow \neg F) \vdash \neg I$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg(\neg I \wedge \neg H \rightarrow \neg F)$ | Premissa |
| 2. $\neg I \wedge \neg H$ | RI3 1 |
| 3. $\neg I$ | RC1 2 |

Como então temos (34) e (35), temos pelo teorema da redução ao absurdo o que segue:

(36) A, $A \rightarrow (\neg B \vee \neg C) \vee (G \vee H), \neg B \rightarrow \neg D, \neg C \rightarrow \neg E, F \rightarrow E \wedge D, G \rightarrow I \vdash \neg I \wedge \neg H \rightarrow \neg F$

Assim, supondo a veracidade das premissas de (33), temos que se a teoria do *karma* é falsa e é falso que o mal é necessário ao aprimoramento da alma, então Deus não existe. Em outras palavras, para provar (29) o ateísta tem de provar que a teoria do *karma* e a teoria do mal enquanto elemento necessário ao aperfeiçoamento da alma são falsas, o que definitivamente não é uma tarefa trivial.

## 8.4 Exercícios de análise lógica

1. Traduza para a linguagem proposicional os argumentos abaixo (usando um glossário com os símbolos proposicionais usados) e após isso demonstre, utilizando o cálculo clássico proposicional, se tal argumento é válido ou não. Utilize, se achar conveniente, os teoremas da redução ao absurdo e da dedução.

a. Se conhecimento é sensação, então porcos têm conhecimento.
Porcos não têm conhecimento.
∴ Conhecimento não é sensação. [Este argumento foi dado por Platão.]

b. Se "bom" significa "socialmente aprovado", então o que é socialmente aprovado é necessariamente bom.
Não é verdade que o que é socialmente aprovado é necessariamente bom.
∴ "Bom" não significa "socialmente aprovado".

c. Se fosse possível ter uma prova absoluta da existência de Deus, então seria possível sermos irresistivelmente atraídos a fazer o bem.
Se fosse possível para nós sermos irresistivelmente atraídos a fazer o bem, então nós não teríamos livre-arbítrio.
Nós temos livre-arbítrio.
∴ Não é possível ter uma prova absoluta da existência de Deus.

d. O universo é ordenado [tal qual um relógio que obedece a leis complexas].
A maioria das coisas ordenadas que nós temos examinado tem por trás de sua criação seres inteligentes.
Nós examinamos uma quantidade grande e variada de coisas ordenadas.
Se a maioria das coisas ordenadas que nós temos examinado tem por trás de sua criação seres inteligentes e nós examinamos uma quantidade grande e variada de coisas ordenadas, então provavelmente a maioria das coisas ordenadas tem por trás de sua criação seres inteligentes.
Se o universo é ordenado e provavelmente a maioria das coisas ordenadas tem por trás de sua criação seres inteligentes, então o universo provavelmente tem por trás de sua criação um ser inteligente.
∴ O universo provavelmente tem por trás de sua criação um ser inteligente.

e. Se a pena capital é correta, então ela reforma o indivíduo punido ou diminui efetivamente a criminalidade.
A pena capital não reforma o indivíduo punido.
A pena capital não diminui efetivamente o crime.
∴ A pena capital não é correta.

f. Se maximizar o prazer humano é sempre bom e o sadista torturador de cachorro maximiza o prazer humano, então a ação do sadista é correta.
O sadista torturador de cachorro maximiza o prazer humano.
A ação do sadista não é correta.
∴ Não é verdade que maximizar o prazer humano é sempre bom.

g. Se existe conhecimento, então algumas coisas são conhecidas sem prova ou nós podemos provar toda premissa via argumentação indefinidamente.
Nós não podemos provar toda premissa via argumentação indefinidamente.

Existe conhecimento.

∴ Algumas coisas são conhecidas sem prova. [Este argumento é de Aristóteles.]

h. Se Deus muda, então ele muda para melhor ou para pior.

Se Deus muda para melhor, então ele não é perfeito.

Se Deus é perfeito, então ele não muda para pior.

∴ Se Deus é perfeito, então ele não muda.

i. O universo teve um início no tempo.

Se o universo teve um início no tempo, então houve uma causa para o início do universo.

Se houve uma causa para o início do universo, então um ser pessoal é a causa do universo.

∴ Um ser pessoal é a causa do universo. [Esse argumento é de William Craig e James Moreland.]

j. Se a palavra “bom” é definida em termos experimentais, então se julgamentos éticos são prováveis cientificamente a ética tem um fundamento racional.

Julgamentos éticos não são prováveis cientificamente.

∴ Se a palavra “bom” é definida em termos experimentais, então a ética não tem um fundamento racional.

k. Se o mundo contém bem moral, então o mundo contém criaturas livres e essas criaturas livres algumas vezes agem errado.

Se as criaturas livres algumas vezes agem errado, então o mundo é imperfeito.

Se o mundo é imperfeito, então o criador é imperfeito.

∴ Se o mundo contém bem moral, então o criador é imperfeito.

l. Se Sócrates tenta escapar da prisão, então ele deseja obedecer ao estado apenas quando lhe for conveniente.

Se Sócrates deseja obedecer ao estado apenas quando lhe for conveniente, então ele realmente não acredita nos seus próprios ensinamentos.

∴ Se Sócrates realmente acredita nos seus próprios ensinamentos, então ele não tentará escapar da prisão. [Esse argumento se encontra no *Crátilo* de Platão.]

m. A morte de Sócrates será um sono perpétuo ou será a entrada para uma vida melhor.

Se a morte de Sócrates será um sono perpétuo, então ele não tem porque temer a morte.

Se a morte de Sócrates será a entrada para uma vida melhor, então ele não tem porque temer a morte.

∴ Sócrates não tem porque temer a morte.

n. Se o monismo materialista [a visão de que apenas a matéria existe] é verdade, então o dualismo [visão segundo a qual, além da matéria, também existem mentes] não é verdade.

Se eventos mentais existem, então o dualismo é verdade.

Se o monista materialista *pensa* que sua teoria é verdade, então eventos mentais existem.

∴ Se o monista materialista *pensa* que sua teoria é verdade, então o monismo materialista não é verdade.

o. Se tentativas de provar que Deus existe falham da mesma forma que os melhores argumentos a favor de que existem outros seres conscientes além de mim, então a crença de que existem outros seres conscientes além de mim é plausível se e somente se a crença em Deus é plausível.

Tentativas de provar que Deus existe falham da mesma forma que os melhores argumentos a favor de que existem outros seres conscientes além de mim.

A crença de que existem outros seres conscientes além de mim é plausível.

∴ A crença em Deus é plausível. [Argumento dado por Alvin Plantinga.]

p. A verdadeira felicidade consiste na paz de espírito.

A confiança que temos no futuro é necessária à paz de espírito.

O conhecimento que devemos ter da natureza de Deus e da alma é necessário à confiança que temos no futuro.

∴ O conhecimento que devemos ter da natureza de Deus e da alma é necessário à verdadeira felicidade. [Este argumento é de Gottfried Leibniz.]

q. Se nós temos sensações de objetos materiais e mesmo assim os objetos materiais não existem, então Deus nos engana.

Nós temos sensações de objetos materiais.

Se Deus nos engana, então ele não é sumamente bom.

Deus é sumamente bom.

∴ Os objetos materiais existem. [Este argumento foi dado por René Descartes para provar a existência de um mundo exterior às nossas mentes.]

r. Se você é inteligente ao arrumar sua bolsa, então ou esse ursinho terá alguma utilidade na viagem, ou ele não será colocado na bolsa.

Esse ursinho não terá utilidade na viajem.

Esse ursinho não será colocado na bolsa.

∴ Você é inteligente ao arrumar sua bolsa.

s. Se a voz do povo é a voz de Deus, então Lampião é um herói.

Se a voz do povo é a voz de Deus, então Lampião é um assassino sanguinário.

Se Lampião é um assassino sanguinário, então ele não é um herói.

∴ Não é verdade que a voz do povo é a voz de Deus.

t. Se a ética depende do desejo de Deus, então algo é bom porque Deus assim deseja.

Não é verdade que algo é bom porque Deus assim deseja.

∴ A ética não depende do desejo de Deus. [Esse argumento aparece no *Eutífron* de Platão.]

u. A mutilação sexual de crianças [como ocorre, por exemplo, em algumas comunidades islâmicas do norte da África] é algo necessariamente imoral.

Se não existem leis morais objetivas, então a mutilação sexual de crianças não é algo necessariamente imoral.

Se existem leis morais objetivas, então existe uma origem dessas leis.

Se existe uma origem das leis morais, então tal origem é Deus ou a sociedade.

Se a origem das leis morais é a sociedade, então não existem leis morais objetivas.

∴ Deus é a origem das leis morais.

v. Se Deus existe, então Deus criou o universo.

Se Deus criou o universo, então houve um momento no qual não havia matéria.

A matéria sempre existiu.

Se a matéria sempre existiu, então não houve um momento no qual não havia matéria.

∴ Deus não existe.

w. Se o critério lógico-positivista de significação [que diz que um enunciado é significativo se e somente se ele é testável experimentalmente ou é verdadeiro por definição] é correto, então ou ele é testável experimentalmente ou é uma verdade analítica [verdade por definição].

O critério lógico-positivista de significação não é testável experimentalmente.

O critério lógico-positivista de significação não é uma verdade analítica.

∴ O critério lógico-positivista de significação não é correto.

x. Se Deus existe no nosso entendimento, mas não em realidade, então um ser superior a Deus pode ser concebido [a saber, um ser similar a Deus, mas que exista em realidade].

Deus é [por definição] o ser o qual nenhum ser superior a ele pode ser concebido.

Se Deus é o ser o qual nenhum ser superior a ele pode ser concebido, então é falso que um ser superior a Deus pode ser concebido.

Deus existe no nosso entendimento.

∴ Deus existe em realidade. [Esse é o famoso argumento ontológico de Santo Anselmo.]

y. Se existência é uma perfeição e Deus [por definição] tem todas as perfeições, então Deus deve existir.

A existência é uma perfeição.

Deus [por definição] tem todas as perfeições.

∴ Deus deve existir. [Essa é a versão do argumento ontológico dada por René Descartes.]

z. Se eu estou gripado e pratico exercício, então eu pioro e me sinto fraco.

Se eu não pratico exercício, então eu me torno sedentário e me sinto fraco

∴ Se eu estou gripado, então eu me sinto fraco.

aa. Se você sabe que você não existe, então você não existe.

Se você sabe que você não existe, então você sabe de alguma coisa.

Se você sabe de alguma coisa, então você existe.

∴ Se você sabe que você não existe, então você existe.

bb. Se Deus é perfeito, então ele não pode estar errado.

Se Deus é onisciente, então ele sabe que eu vou tomar a decisão X.

Se Deus não pode estar errado e ele sabe que eu vou tomar a decisão X, então é necessário que eu tome a decisão X.

Se é necessário que eu tome a decisão X, então não é possível que eu não tome a decisão X.

Se eu tenho livre-arbítrio, então é possível que eu não tome a decisão X.

∴ Ou Deus não é onisciente ou não é perfeito ou eu não tenho livre-arbítrio.

cc. O senso comum assume que nós temos conhecimento moral.

Não existe uma refutação para o conhecimento moral.

Se o senso comum assume que nós temos conhecimento moral, então se não existe uma refutação para o conhecimento moral nós devemos acreditar que nós temos conhecimento moral.

Qualquer prova para um princípio moral requer um princípio moral mais básico.

Nós não podemos provar princípios morais através de princípios mais básicos indefinidamente.

Se qualquer prova para um princípio moral requer um princípio moral mais básico e nós não podemos provar princípios morais através de princípios mais básicos indefinidamente, então se nós devemos acreditar que nós temos conhecimento moral, nós devemos aceitar princípios morais autoevidentes.

∴ Nós devemos aceitar princípios morais autoevidentes.

dd. Existem obrigações morais.

Se existem obrigações morais e obrigações morais são explicáveis, então existe uma explicação não teísta [que não pressupõe a existência de Deus] para as obrigações morais, ou a existência de Deus explica as obrigações morais.

A existência de Deus não explica as obrigações morais.

∴ As obrigações morais não são explicáveis, ou existe uma explicação não teísta para as obrigações morais.

ee. Se o determinismo é verdade e Madame A.D. Vinha prediz corretamente o que eu irei fazer, então se ela me diz sua predição eu irei fazer algo diferente.

Se Madame A.D. Vinha me diz sua predição e eu faço algo diferente, então Madame A.D. Vinha não prediz corretamente o que eu irei fazer.

∴ Se o determinismo é verdade, então Madame A.D. Vinha não prediz corretamente o que eu irei fazer ou ela não me diz sua predição.

ff. Se eu percebo algo, então minha percepção é enganadora ou verídica.

Se minha percepção é enganadora, então eu não percebo diretamente um objeto material.

Se minha percepção é verídica, então eu percebo diretamente um objeto material.

Se minha percepção é verídica e eu percebo diretamente um objeto material, então minha experiência em percepção verídica sempre difere qualitativamente da minha experiência em percepção enganadora.

Não é verdade que minha experiência em percepção verídica sempre difere qualitativamente da minha experiência em percepção enganadora.

Se eu percebo algo e eu não percebo diretamente um objeto material, então eu percebo diretamente apenas uma sensação.

∴ Se eu percebo algo, então eu percebo diretamente apenas uma sensação e não percebo diretamente um objeto material. [Esse é um argumento clássico contra a concepção segundo a qual nós percebemos diretamente os objetos materiais e não apenas sensações ou dados dos sentidos.]

gg. Se você segue o caminho religioso e Deus existe, então você ganha tudo [o reino de Deus, a vida eterna, etc.].

Se você segue o caminho religioso e Deus não existe, então você não perde nada [no mínimo você viveu uma vida virtuosa e livre de excessos].

Se você não segue o caminho religioso e Deus não existe, então você vive uma vida coerente, mas não ganha nada [após a morte].

Se você não segue o caminho religioso e Deus existe, então você perde tudo.

Se caso você siga o caminho religioso você ganha tudo ou não perde nada, e caso você não siga o caminho religioso você não ganha nada ou perde tudo, então seguir o caminho religioso é a atitude mais racional a se tomar.

∴ Seguir o caminho religioso é a atitude mais racional a se tomar. [Esta é uma versão do famoso argumento de Blaise Pascal conhecido como a aposta de Pascal.]

# Lógica de predicados

# 9
# Linguagem de predicados

## 9.1 Predicação e quantificação

Nos capítulos anteriores priorizamos a definição e o estudo de um sistema lógico específico: a lógica clássica proposicional. Como não poderia deixar de ser, uma das características fundamentais desse sistema é a sua linguagem, que temos até agora chamado simplesmente de linguagem proposicional. Essa linguagem é, na verdade, o representante mais famoso de toda uma classe de linguagens lógicas chamadas de *linguagens proposicionais*[59]. Como o próprio nome indica, a marca registrada desse tipo de linguagem é que as *proposições* ou enunciados elementares (que correspondem aos símbolos proposicionais) são tratadas como *entidades primitivas*, não passíveis de nenhum tipo de análise. Para ver isso mais claramente, considere o enunciado abaixo:

(1) Se a cadeira está ao lado da mesa e ao lado do armário, então ela está entre a mesa e o armário.

Traduzindo (1) para a linguagem proposicional nós teríamos algo como o que segue:

A: A cadeira está ao lado da mesa.

B: A cadeira está ao lado do armário.

C: A cadeira está entre a mesa e o armário.

(1') $(A \wedge B) \rightarrow C$

Essa tradução de (1) para a linguagem proposicional envolve, obviamente, um processo de análise. Vemos, por exemplo, que (1) contém certa estrutura lógica: ele é um condicional, em que a conjunção de duas proposições básicas implica outra proposição. Assim, após representarmos cada uma dessas proposições com o auxílio dos símbolos proposicionais, devemos usar os símbolos lógicos e parênteses para deixar explícita a estrutura lógica subjacente a (1). No entanto, se formos um pouco mais além nessa tare-

**59.** Tal nomenclatura obviamente nos forçaria a qualificar de alguma forma a linguagem introduzida no capítulo 3 – chamando-a, por exemplo, de linguagem proposicional clássica.

fa de análise, veremos que as proposições representadas por A, B e C fazem, todas elas, referência a relações espaciais de um determinado objeto, a saber, a cadeira. Isso, no entanto, a linguagem proposicional não é capaz de representar. Conforme mencionado antes, as proposições são tratadas na linguagem proposicional como entidades primitivas, o que implica que o que está além da proposição em termos de análise está também além do poder representacional da linguagem.

Essa limitação tem consequências drásticas tanto do ponto de vista representacional, conforme ilustrado no exemplo acima, como do ponto de vista inferencial. Considere, por exemplo, o argumento abaixo:

(2) Se um objeto está entre um segundo e um terceiro objeto, mas não está ao lado do segundo, então há um quarto objeto que está entre o primeiro e o segundo objeto.

A cadeira está entre a mesa e o armário.

A cadeira não está ao lado da mesa.

∴ Existe um quarto objeto que está entre a cadeira e a mesa.

Aqui, a razão pela qual podemos inferir a conclusão a partir das premissas é, além da relação lógica existente entre as proposições básicas, também a relação que há entre as *estruturas* de cada uma dessas proposições. Isso fica claro quando percebemos que a primeira premissa é uma proposição que *quantifica* tanto *universalmente* quanto *existencialmente* sobre objetos, afirmando que, para *todos* e quaisquer objetos $x$, $y$ e $z$, se $x$ está entre $y$ e $z$, e $x$ não está ao lado de $y$, então *existe* um objeto $w$ que está entre $x$ e $y$. E é apenas em função de tal quantificação, e do fato de a segunda e terceira premissas serem, por assim dizer, instâncias de "$x$ está entre $y$ e $z$" e "$x$ não está ao lado de $y$", respectivamente, que podemos inferir a conclusão. Dessa forma, como a linguagem proposicional é incapaz de representar a estrutura interna de uma proposição básica, e consequentemente incapaz de efetuar tal movimento quantificacional, ela não pode servir de base para uma teoria da inferência que contemple (2).

Como terceiro exemplo, compare os dois argumentos abaixo:

(3) Se Ricardo é alto, então Ricardo não é baixo.

Ricardo é alto.

∴ Não é o caso que Ricardo é baixo.

(4) Se alguém é alto, então alguém não é baixo.

Alguém é alto.

∴ Não é o caso que alguém é baixo.

Primeiro de tudo, (3) e (4) têm aparentemente a mesma estrutura lógica. Isso implica que, como (3) é claramente um argumento válido, (4) também deve ser um argumento válido. Mas diferentemente de (3), (4) parece encerrar algo extremamente desconcertante: a partir de premissas verdadeiras, chega-se à conclusão absurda, devemos admitir, de que não existem pessoas baixas. Mas se nós aceitamos suas premissas e admitimos que se trata de um argumento válido, então devemos também aceitar sua conclusão. Parece então estarmos diante de algo como um paradoxo.

Felizmente uma inspeção um pouco mais cuidadosa é suficiente para nos mostrar que tal paradoxo reside, na verdade, em uma ambiguidade em relação ao uso que se faz, no argumento (4), do termo "alguém". Grosso modo, o "alguém" que aparece nos enunciados que compõem (4) pode ser visto de duas maneiras diferentes. Primeiro, o "alguém" do antecedente da primeira premissa pode ser visto semanticamente como igual ao "alguém" da segunda premissa (como se referindo à mesma pessoa, digamos), mas diferente do "alguém" do seu consequente. Este, por sua vez, seria interpretado semanticamente de forma idêntica ao "alguém" da conclusão. Isso pode ser representado como segue:

(5) Se certo alguém é alto, então não é o caso que alguém é baixo.

Certo alguém é alto.

∴ Não é o caso que alguém é baixo.

Aqui, a primeira premissa afirma que o fato de haver um alguém específico que seja alto implica que é falso que alguém (agora entendido de uma maneira irrestrita, se aplicando a todas as pessoas) é baixo. Obviamente essa proposição é falsa; consequentemente, não temos mais a obrigação de aceitar a conclusão de que não é o caso que alguém é baixo.

A outra interpretação surge quando analisamos todas as ocorrências de "alguém" da mesma maneira, isto é, como se referindo à mesma pessoa:

(6) Se alguém é alto, então não é o caso que este alguém é baixo.

Alguém é alto.

∴ Não é o caso que este alguém é baixo.

Claramente aqui a primeira premissa é totalmente aceitável; mas agora sua conclusão já não possui o caráter paradoxal de (4).

O ponto que nos interessa aqui é que a representação de tais tipos de argumentos em geral, e a resolução das ambiguidades deles resultantes em particular, depende, além da capacidade de fazermos algum tipo de quantificação (como as que são feitas com expressões como "todos", "alguns" e "nenhum"), também da possibilidade de representarmos referências cruzadas, ou seja, de deixar explícito dentro do enunciado o *escopo*, por assim dizer, da quantificação (que as duas instâncias de "alguém", por exemplo, desempenham ou não o mesmo papel dentro do enunciado). Como já deve estar óbvio neste ponto, a linguagem proposicional não nos fornece tais recursos.

Grosso modo, uma *teoria da quantificação* é uma tentativa de incorporar em uma linguagem lógica tais recursos. Antes de qualquer coisa é necessário haver uma maneira de representar objetos e as propriedades ou predicados que eles possuem. Por exemplo, se quiséssemos representar o enunciado

(7) Ricardo é alto.

teríamos de ter um símbolo para representar Ricardo e outro para representar a propriedade de ser alto. Suponha que escolhêssemos o símbolo *a* para realizar a primeira tarefa e o símbolo *P* para realizar a segunda:

a: Ricardo;

P: ser alto.

Assim, (7) poderia ser representado como segue:

(7') P(a)

Aqui P(a) significa simplesmente que o objeto *a* possui a propriedade *P*. Representando a propriedade de ser baixo através do símbolo *Q*, o argumento (3) seria formalizado como segue:

(3') $P(a) \rightarrow \neg Q(a)$
$P(a)$
$\therefore \quad \neg Q(a)$

Essa nomenclatura, apesar de simples, permite-nos representar enunciados de forma que sua estrutura interna seja explicitada; no caso da primeira premissa de (3), por exemplo, isso significa deixar explícita certa relação lógica entre as predicações de duas propriedades específicas a um mesmo objeto. Assim, uma teoria da quantificação pressupõe uma *teoria da predicação* (no sentido lógico do termo). Chamamos os símbolos *P* e *Q*, cuja função é representar propriedades de objetos, de *símbolos predicativos*.

Mas veja que até agora tudo o que temos são símbolos para representar entidades particulares, a saber, propriedades e objetos. Mas a primeira premissa de (4) (e de suas variantes), por exemplo, é um enunciado universal, referindo-se não a um objeto específico, mas a *todos* os objetos; utilizando a interpretação contida em (6), por exemplo, tal premissa pode ser lida como significando que, para *toda* e qualquer pessoa, se essa pessoa é alta, então ela não é baixa. Para dar conta desse tipo de enunciado, o que é basicamente o objetivo de uma teoria da quantificação, precisamos de símbolos cuja referência ou valor semântico seja um objeto, mas tal que não esteja definido que objeto é esse. Em outras palavras, em oposição à *a* que tem tal valor semântico constante e por isso mesmo é chamado de um *símbolo constante* (ou simplesmente constante), nós precisamos de símbolos cuja referência não seja fixa, mas *variável*, ou seja, precisamos de o que chamamos de *símbolos variáveis* (ou simplesmente variáveis). Por exemplo, supondo *x* ser um tal símbolo,

(8) $P(x)\rightarrow\neg Q(x)$

poderia ser usado para representar a primeira premissa de (4), estabelecendo assim uma relação lógica entre os predicados *P* e *Q*, sem no entanto se referir a nenhum objeto específico.

Veja, no entanto, que representando a primeira premissa de (4) simplesmente desta forma, corremos o risco de novamente incorrer em ambiguidade. Primeiro, há ambiguidade no que se refere a que tipo de quantificação (8) deseja estabelecer. Por exemplo, enquanto a primeira premissa de (5) significa algo como

(9) Se *existe* alguém alto, então não é o caso que *existe* alguém baixo.

estabelecendo, portanto, o que podemos chamar de *quantificação existencial*, a primeira premissa de (6), conforme já mencionamos, significa mais ou menos que

(10) Para *todo* alguém, se este alguém é alto, então não é o caso que ele é baixo.

estabelecendo uma *quantificação universal*. Segundo, há ambiguidade no que se refere ao escopo ou alcance, dentro da sentença, destes quantificadores existenciais e universais. Por exemplo, apesar de em (9) encontrarmos apenas a quantificação existencial, ela aparece em dois lugares distintos – no seu antecedente e no seu consequente – sendo nesse caso duas quantificações existenciais diferentes, o que nos leva a inquirir se o alguém do antecedente de (9) é o mesmo ou é diferente do alguém de seu consequente.

Dessa forma, para representarmos adequadamente o aspecto de quantidade presente em certas proposições, temos que dispor, além dos símbolos variáveis, de símbolos que, primeiro, diferenciem entre a quantificação universal e a existencial, e segundo, estabeleçam o alcance ou escopo da quantificação. Isso é feito com o auxílio de dois símbolos: $\forall$ e $\exists$, chamados, respectivamente, de *quantificador universal* e *quantificador existencial*. Se $\alpha$ é uma sentença qualquer e *x* é um símbolo variável, $\forall x\alpha$ e $\exists x\alpha$ significam, respectivamente, "para todo *x* $\alpha$" e "existe um *x* tal que $\alpha$". Por exemplo, com o auxílio de tais símbolos, (9) e (10) seriam representados como segue:

(9') $\exists x(P(x))\rightarrow\neg\exists x(Q(x))$

(10') $\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$

Enquanto que (9') significa "se existe um *x* tal que P(x), então não é o caso que existe um *x* tal que Q(x)", (10') significa "para todo *x*, se P(x) então não é o caso que Q(x)". Assim temos bem clara a distinção de que, enquanto na primeira proposição temos uma quantificação existencial, na segunda temos uma quantificação universal.

Em segundo lugar, através do uso dos parênteses podemos delimitar o *escopo* dos quantificadores ∀ e ∃. Por exemplo, enquanto em (9') o escopo do primeiro quantificador existencial é P(x) e o do segundo é Q(x), em (10') o escopo do quantificador universal é toda a proposição $P(x) \rightarrow \neg Q(x)$. Isso deixa explícita a diferença existente entre (9) e (10), a saber, que enquanto (9) estabelece a falsa ideia que a existência de alguém alto implica que não existe ninguém baixo, (10) diz simplesmente que, para toda e qualquer pessoa, se essa pessoa é alta, então ela não é baixa. Com isso podemos entender bem a diferença entre os argumentos (5) e (6):

(5') $\exists x(P(x)) \rightarrow \neg \exists x(Q(x))$
$\exists x(P(x))$
$\therefore$ $\neg \exists x(Q(x))$

(6') $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$
$\exists x(P(x))$
$\therefore$ $\exists x(\neg Q(x))$

Aqui, além da diferença formal entre (9') e (10'), temos uma diferença crucial entre as conclusões dos dois argumentos: enquanto a conclusão de (6') diz simplesmente que existe um alguém que não é baixo, a de (5') afirma que ninguém é baixo.

Em terceiro lugar, ∀ e ∃ são sempre usados seguidos de uma variável. Para ver a necessidade disso, considere como formalizaríamos o argumento (2):

(2) Se um objeto está entre um segundo e um terceiro objeto, mas não está ao lado do segundo, então há um quarto objeto que está entre o primeiro e o segundo objeto.

A cadeira está entre a mesa e o armário.

A cadeira não está ao lado da mesa.

∴ Existe um quarto objeto que está entre a cadeira e a mesa.

Diferentemente dos exemplos formalizados até agora, (2) contém termos como "ao lado de" e "entre" que, apesar de se referirem sem sombra de dúvidas a propriedades de objetos, seriam mais precisamente descritos como designando *relações* entre objetos. Assim, por exemplo, o termo "ao lado de" em "A cadeira não está ao lado da mesa", designa o fato de a cadeira não possuir uma determinada relação com a mesa.

Dessa forma, para representarmos (2) precisaríamos, além de símbolos constantes que representem a cadeira, a mesa e o armário:

b: cadeira;

c: mesa;

d: armário;

também de o que podemos chamar de *símbolos relacionais*:

R: estar ao lado de;

S: estar entre.

Aqui, o símbolo relacional *R* aplicado aos símbolos constantes *b* e *c* – R(b,c) – significaria algo como "b está ao lado de c"; já S(b,c,d) significaria "b está entre c e d". É digno de nota que, de acordo com esse formalismo, símbolos predicativos são nada mais do que tipos especiais de símbolos relacionais: se chamamos de *aridade* o número de constantes ou variáveis que aparecem entre os parênteses em um símbolo relacional ou predicativo, um símbolo predicativo é simplesmente um símbolo relacional de aridade 1. Dessa forma, dizemos que o símbolo predicativo *P*, por exemplo, é um símbolo relacional unário (de aridade 1); já *R* e *S*, tendo aridade 2 e 3, respectivamente, são símbolos relacionais binário e ternário. Continuando esse raciocínio, não é difícil de visualizar uma situação na qual temos símbolos relacionais n-ários, onde *n* é um número qualquer maior que 0.

Procedendo desta forma, (2) seria representado como segue:

(2') $\forall x \forall y \forall z(S(x,y,z) \wedge \neg R(x,y) \rightarrow \exists w(S(w,x,y)))$

$S(b,c,d)$

$\neg R(b,c)$

$\therefore \ \exists w S(w,b,c)$

Voltando então à necessidade de ∀ e ∃ terem sempre atrelados a si uma variável, temos na primeira premissa de (2') quatro quantificadores, sendo que a variável associada a cada um deles refere-se à mesma variável que aparece dentro do escopo do quantificador em questão. Isso nos permite representar de forma explícita a leitura que demos para essa premissa no início do capítulo: para todos e quaisquer objetos *x*, *y* e *z*, se *x* está entre *y* e *z* e *x* não está ao lado de *y*, então existe um objeto *w* que está entre *x* e *y*. O fato, por exemplo, de que *w* aparece ao lado de ∃ nos permite concluir que à mesma variável que aparece em S(w,x,y) deve ser dada uma interpretação existencial, e não universal, como ocorre com as demais. E note que a posição das variáveis nos símbolos predicativos desempenha um papel fundamental: o fato de *x* aparecer primeiro em S(x,y,z) indica, por exemplo, que é o elemento que está entre *y* e *z* que não está ao lado de *y* (¬R(x,y)).

Essa linguagem que estamos informalmente apresentando aqui, que na verdade já foi usada por nós nos capítulos 1 e 3, é chamada de *linguagem de predicados de primeira ordem*. A razão da qualificação feita com a expressão "de primeira ordem" vem do fato de que tanto a predicação como a quantificação são feitos exclusivamente sobre objetos. Não há, por exemplo, a predicação ou quantificação sobre propriedades, que seria necessária, por exemplo, na representação de

(11) Alexandre tinha todas as qualidades de um grande líder.

Ou ainda, não há predicação ou quantificação sobre propriedades de propriedades que, por exemplo, a sentença abaixo exigiria na sua formalização:

(12) De todas as virtudes cristãs, a compaixão é a mais bela.

Tais linguagens, que possuem predicação e quantificação sobre propriedades, e predicação e quantificação sobre propriedades de propriedades são chamadas, respectivamente, de linguagens de segunda e terceira ordem. Neste livro nos ateremos exclusivamente à linguagem de predicados de *primeira ordem*.

Para finalizarmos essa introdução informal da linguagem de predicados de primeira ordem, é mister falarmos sobre uma quarta classe de símbolos não lógicos (em adição aos símbolos constantes, variáveis e relacionais): os *símbolos funcionais*. Considere o enunciado abaixo:

(13) O irmão do pai de João é seu tio.

Usando o glossário abaixo,

a: João;

P: ser pai de;

Q: ser irmão de;

R: ser tio de;

representaríamos (13) como segue:

(13') $\forall x \forall y(P(x,a) \land Q(x,y) \rightarrow R(y,a))$

No entanto, é fato que existe apenas um objeto *x* tal que P(x,a), ou seja, existe apenas uma pessoa que possui a propriedade de ser pai de João. Assim, se dispuséssemos de um símbolo que se comportasse como uma função, ou seja, que recebesse um ou mais objetos como parâmetros e "retornasse" outro objeto, poderíamos representar (13) de uma maneira ligeiramente diferente de (13'). Suponha que *f* seja um símbolo tal que f(k) representa (ou "retorna") *o pai de k*, onde *k* é um símbolo constante ou variável. Assim, poderíamos representar (13) como segue:

(13'') $\forall x \forall y(I(f(a),x) \land Q(x,y) \rightarrow R(y,a))$

em que I significa "é idêntico a", ou seja, I representa a *relação de identidade*. Aqui, o que (13'') diz basicamente é que, para quaisquer $x$ e $y$, se $x$ é idêntico ao pai de $a$ e $x$ é irmão de $y$, então $y$ é tio de $a$. Semelhantemente a símbolos relacionais, símbolos funcionais também possuem aridade, correspondendo obviamente ao número de parâmetros que aparecem entre seus parênteses. No entanto, enquanto o valor semântico de P(x,y), por exemplo, é verdadeiro ou falso, o valor semântico de f(a) é um objeto. Em outras palavras, enquanto um símbolo relacional é, de um ponto de vista semântico, uma *função* que retorna um valor de verdade, um símbolo funcional é uma *função* que retorna um objeto.

Considere outro exemplo:

(14) O pai da esposa de João é o seu melhor amigo.

Usando o glossário abaixo,

a: João;

f: pai de;

g: esposa de;

h: o melhor amigo de;

I: é idêntico a;

podemos representar (14) como segue:

(14') I(f(g(a)),h(a))

Vejamos o (14') diz. Primeiro temos a relação de identidade aplicada a dois termos específicos: f(g(a)) e h(a). Assim o que (14') diz é que os objetos aos quais tais termos se referem são idênticos. E quem são esses objetos? h(a) significa o melhor amigo de João; já f(g(a)) significa o pai de g(a); mas como g(a) significa a esposa de João, f(g(a)) referencia o pai da esposa de João. Assim, (14') diz simplesmente que o pai da esposa de João é idêntico ao melhor amigo de João.

## 9.2 Definição da linguagem de predicados de primeira ordem

Apresentaremos nesta seção a definição formal da linguagem de predicados de primeira ordem. Começamos definindo a estrutura que contém os símbolos não lógicos da linguagem, chamada nesse caso de o *vocabulário* da linguagem:

**Definição 3.1** Um *vocabulário* é uma quádrupla $<K_C,K_V,K_F,K_R>$ em que:

(ii) $K_C$ é um conjunto contável de *símbolos constantes*;

(iii) $K_V$ é um conjunto contável de *símbolos variáveis*;

(iv) $K_F$ é um conjunto contável de *símbolos funcionais*;

(v) $K_R$ é um conjunto contável de *símbolos relacionais*.

Associado a cada $u \in K_F \cup K_R$ há um número $n \in \mathbb{N}$, $n>0$, chamado de *aridade* de *u*. Chamamos os símbolos relacionais de aridade 1 de *símbolos predicativos*.

Dado um vocabulário qualquer, definimos o que chamamos de *termo*, isto é, aquelas estruturas sintáticas que podem desempenhar a função de parâmetros em símbolos relacionais ou funcionais. De um ponto de vista semântico, um termo é basicamente uma estrutura sintática cuja interpretação é um objeto. De acordo com a explicação informal que demos na seção anterior, apenas três tipos de símbolos podem ser assim interpretados: um símbolo constante, um símbolo variável ou um símbolo funcional seguido de uma sequência de termos, que obviamente nesse caso desempenhariam o papel de parâmetros do símbolo funcional. Assim temos como segue:

**DEFINIÇÃO 3.2** Seja $K=<K_C,K_V,K_F,K_R>$ um vocabulário. Um *termo* de K é definido como segue:

(i) Se $c \in K_C$, então *c* é um termo de K;

(ii) Se $x \in K_V$, então *x* é um termo de K;

(iii) Se $t_1,\dots,t_n$ são termos de K e $f \in K_F$ é um símbolo funcional de aridade *n*, então $f(t_1,\dots,t_n)$ é um termo de K.

De posse dessas duas noções, podemos definir formalmente a linguagem de predicados de primeira ordem.

**DEFINIÇÃO 3.3** Seja $K=<K_C,K_V,K_F,K_R>$ um vocabulário. A *linguagem de predicados de primeira ordem* (ou simplesmente linguagem de predicados ou linguagem de primeira ordem) $L_1$ sobre K é definida como segue:

(i) Se $t_1,\dots,t_n$ são termos de K e $R \in K_R$ é um símbolo relacional de aridade *n*, então $R(t_1,\dots,t_n) \in L_1$;

(ii) Se $\alpha \in L_1$, então $(\neg\alpha) \in L_1$;

(iii) Se $\alpha,\beta \in L_1$, então $(\alpha\wedge\beta) \in L_1$;

(iv) Se $\alpha,\beta \in L_1$, então $(\alpha\vee\beta) \in L_1$;

(v) Se $\alpha,\beta \in L_1$, então $(\alpha\to\beta) \in L_1$;

(vi) Se $\alpha \in L_1$ e $x \in K_V$, então $(\forall x\alpha) \in L_1$;

(vii) Nada mais pertence à $L_1$.

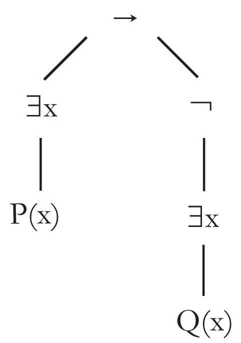
Apesar de aqui os itens (ii)-(v) serem praticamente idênticos aos da definição 1.1, em que é definida a linguagem proposicional $L_p$, há diferenças bastante significativas entre as duas definições. Primeiro, o item (i), que é onde definimos as fórmulas atômicas de $L_1$, permite que efetivamente façamos uso do vocabulário K. Assim, diferentemente do que acontece com $L_p$, podemos representar a estrutura interna das proposições elementares. Segundo, fazendo uso do quantificador universal e dos símbolos variáveis, podemos, através de (vi), representar enunciados universais. É digno de nota que, de acordo com a definição 3.3, o quantificador universal deve necessariamente aparecer seguido de uma variável. Conforme já mencionamos, isso é necessário para que seja precisado a que símbolos relacionais a quantificação está sendo aplicada. Assim, a quantificação propriamente dita é feita não por $\forall$ apenas, mas por $\forall$x. Por conta disso, muitas vezes nos referiremos a $\forall$x (onde *x* é uma variável qualquer) como um quantificador.

Semelhantemente ao que ocorre com a linguagem proposicional, a definição 3.3 recebe como parâmetro uma estrutura com os símbolos não lógicos da linguagem, a saber, um vocabulário K. Assim, como podemos usar diferentes vocabulários em conjunção com a definição 3.3, teremos, para cada um desses vocabulários, uma linguagem de predicados diferente. No entanto, à semelhança do que acontece com a linguagem proposicional, qual desses vocabulários é usado na definição de $L_1$ é irrelevante para o estudo que estamos realizando aqui. Assim, suporemos um vocabulário arbitrário K sendo usado em conjunto com a definição 3.3, e nos referiremos à linguagem obtida a partir daí simplesmente como linguagem de predicados de primeira ordem ou $L_{1.}$

Também de forma semelhante ao que fizemos na nossa exposição da linguagem proposicional, podemos usar a definição 3.3 para construir a árvore sintática de uma fórmula da linguagem de primeira ordem. Por exemplo, a árvore da fórmula

(9') $\exists x(P(x))\rightarrow\neg\exists x(Q(x))$

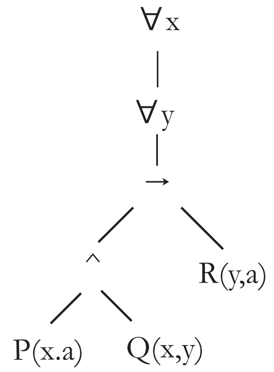
seria como segue:



Já a árvore de

(13') $\forall x \forall y(P(x,a) \wedge Q(x,y) \rightarrow R(y,a))$

seria como segue:




Como é de se esperar, as definições das noções de alfabeto, símbolo lógico, etc. e de subfórmula na linguagem de predicados são bastante similares às que demos no capítulo 3 para as noções correspondentes da linguagem proposicional:

**Definição 3.4** Chamamos o conjunto $A_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall\} \cup \{(,)\} \cup K_C \cup K_V \cup K_F \cup K_R$ de o *alfabeto* de $L_1$, sendo os membros de $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall\}$ chamados de *símbolos lógicos* de $L_1$, os de $K_C \cup K_V \cup K_F \cup K_R$ chamados de *símbolos não lógicos* de $L_1$, e os membros de $\{(,)\}$ de *símbolos de pontuação*.

**Definição 3.5** Seja $\varphi \in L_1$ uma fórmula da linguagem de primeira ordem.

(i) $\varphi$ é uma subfórmula de $\varphi$;

(ii) Se $\varphi \equiv (\neg\alpha)$, então $\alpha$ é uma subfórmula de $\varphi$;

(iii) Se $\varphi \equiv (\forall x\alpha)$, então $\alpha$ é uma subfórmula de $\varphi$;

(iv) Se $\varphi \equiv (\alpha \wedge \beta)$, então $\alpha$ e $\beta$ são subfórmulas de $\varphi$;

(v) Se $\varphi \equiv (\alpha \vee \beta)$, então $\alpha$ e $\beta$ são subfórmulas de $\varphi$;

(vi) Se $\varphi \equiv (\alpha \rightarrow \beta)$, então $\alpha$ e $\beta$ são subfórmulas de $\varphi$;

(vii) Se $\alpha$ é uma subfórmula de $\varphi$ e $\beta$ é uma subfórmula de $\alpha$, então $\beta$ é uma subfórmula de $\varphi$.

É digno de nota que definições como a definição 3.5 acima têm basicamente o propósito de, dado um tipo específico de entidade sintática, precisar quais desses tipos compõem uma dada fórmula. Por exemplo, uma característica essencial da definição 3.3 é que, entre outras coisas, podemos, através dela, construir fórmulas da linguagem de predicados a partir de outras fórmulas da linguagem de predicados. Assim, por exemplo, o item (v) nos diz que se $(P(x,a)\wedge Q(x,y))$ e $R(y,a)$ são fórmulas de $L_1$, então $((P(x,a)\wedge Q(x,y))\rightarrow R(y,a))$ também é uma fórmula de $L_1$. Assim, como $(P(x,a)\wedge Q(x,y))$ e $R(y,a)$ são, além de componentes de (13'), também eles mesmos fórmulas de $L_1$, nada mais justo do que classificá-las como subfórmulas de (13').

Mas veja que, diferentemente da linguagem proposicional, existe outro tipo não lógico de entidade sintática que participa na composição de uma fórmula: os termos. É, por exemplo, a partir de termos que construímos as fórmulas atômicas da linguagem proposicional (item (i) da definição 3.3). Mas semelhantemente a fórmulas, termos também podem ser formados a partir de outros termos. Assim, teremos uma noção correspondente à de subfórmula para termos: a noção de *subtermo*.

**DEFINIÇÃO 3.6** Seja *t* um termo qualquer de K.

(i) *t* é subtermo de *t*;

(ii) Se $t \equiv f(t_1,...,t_n)$, então $t_1,...,t_n$ são subtermos de t.

(iii) Se t' é subtermo de t'' e t'' é subtermo de t, então t' subtermo de t.

A partir das definições 3.5 e 3.6 podemos então definir a noção de *subexpressão* de uma fórmula:

**DEFINIÇÃO 3.7** Seja $\alpha\in L_1$ uma fórmula da linguagem de primeira ordem. Definimos a noção de *subexpressão* de como segue:

(i) $\alpha$ é subexpressão de $\alpha$;

(ii) Se $\alpha \equiv R(t_1,...,t_n)$, em que $R\in K_R$ é um símbolo relacional de aridade *n* e $t_1,...,t_n$ são termos, então $t_1,...,t_n$ são subexpressões de $\alpha$;

(iii) Se $\varphi$ é um subtermo de $\alpha$, então $\varphi$ é uma subexpressão de $\alpha$;

(iv) Se $\varphi$ é subfórmula de $\alpha$, então $\varphi$ é subexpressão de $\alpha$;

(v) Se $\rho$ é subexpressão de $\sigma$ e $\sigma$ é subexpressão de $\alpha$, então $\rho$ é subexpressão de $\alpha$.

A título de exemplo, segue abaixo a lista de subexpressões (com a qualificação de serem subfórmulas ou subtermos) das fórmulas (13'') e (14'):

(13'') $\forall x\forall y(I(f(a),y)\wedge Q(x,y)\rightarrow R(y,a))$

1. $\forall x\forall y(I(f(a),y)\wedge Q(x,y)\rightarrow R(y,a))$ subfórmula
2. $\forall y(I(f(a),y)\wedge Q(x,y)\rightarrow R(y,a))$ subfórmula

| | |
|---|---|
| 3. $I(f(a),y) \wedge Q(x,y) \rightarrow R(y,a)$ | subfórmula (também de 2) |
| 4. $I(f(a),y) \wedge Q(x,y)$ | subfórmula (também de 3 e 2) |
| 5. $R(y,a)$ | subfórmula (também de 3 e 2) |
| 6. $I(f(a),y)$ | subfórmula (também de 4, 3 e 2) |
| 7. $Q(x,y)$ | subfórmula (também de 4, 3 e 2) |
| 8. $f(a)$ | termo |
| 9. a | termo (também subtermo de 8) |

(14') $I(f(g(a)),h(a))$

| | |
|---|---|
| 1. $I(f(g(a)),h(a))$ | subfórmula |
| 2. $h(a)$ | termo |
| 3. $f(g(a))$ | termo |
| 4. $g(a)$ | termo (também subtermo de 3) |
| 5. a | termo (também subtermo de 4 e 3 (e 2)) |

Como o leitor já deve ter notado, estamos desde o início deste capítulo utilizando o mesmo procedimento de abreviação de parênteses que introduzimos no capítulo 3 com relação à linguagem proposicional. Para tornar tal procedimento explícito, seguem abaixo as regras de abreviação de parênteses que usaremos na linguagem de predicados. Seja $\varphi \in L_1$ uma fórmula da linguagem de predicados:

**REGRA 1** Os parênteses mais externos de $\varphi$ podem ser omitidos;

**REGRA 2** Os parênteses mais externos de uma subfórmula de $\varphi$ podem ser omitidos caso o uso da seguinte ordem de precedência entre conectivos seja capaz de restaurar o sentido original da fórmula:

| | |
|---|---|
| 1. $\rightarrow$ | (menor precedência) |
| 2. $\wedge$, $\vee$ | (precedência intermediária) |
| 3. $\neg$, $\forall$ | (maior precedência) |

O leitor também deve ter notado que não há na definição 3.3 nenhuma referência ao quantificador existencial que mencionamos na seção passada. Isso pode parecer paradoxal, pois naquela seção falamos de tal quantificador como tendo igual importância representacional à do quantificador universal $\forall$. A razão de tal omissão é que o quantificador existencial pode ser facilmente introduzido de forma derivada a partir do quantificador universal e da negação. Por exemplo, dizer que

(15) Duendes existem.

é trivialmente o mesmo que dizer que

(16) Não é o caso que toda entidade existente não possui a propriedade de ser um duende.

Em outras palavras, (15), que claramente contém uma quantificação existencial e pode ser representado como

(15') $\exists x(P(x))$

em que *P* significa "ser duende", pode ser representado de forma equivalente como

(16') $\neg\forall x(\neg P(x))$.

Assim, podemos dizer que $\neg\forall x(\neg P(x))$ diz exatamente a mesma coisa que $\exists x(P(x))$. Generalizando então, podemos, utilizando o recurso de abreviações introduzido no capítulo 3, definir $\exists x\alpha$ simplesmente como uma abreviação para $\neg\forall x\neg\alpha$. Segue abaixo tal definição, a qual é antecedida pela definição do bicondicional, que também usaremos na apresentação de fórmulas da linguagem de primeira ordem:

**DEFINIÇÃO 3.8** Sejam $\alpha,\beta\in L_1$ duas fórmulas quaisquer e $x\in K_V$ uma variável qualquer. Definimos os símbolos derivados $\leftrightarrow$ e $\exists$, significando, respectivamente, a dupla implicação ou *bicondicional* e o *quantificador existencial*, como segue:

(i) $(\alpha\leftrightarrow\beta) \overset{\text{def}}{=} ((\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha))$;

(ii) $(\exists x\alpha) \overset{\text{def}}{=} (\neg(\forall x(\neg\alpha)))$.

Mas agora que dispomos de dois símbolos derivados, $\exists$ e $\leftrightarrow$, os quais serão extensivamente usados por nós, teremos, à semelhança do que fizemos no capítulo 3, que reformular a nossa segunda regra de abreviação de forma a contemplar tais símbolos:

**REGRA 3** Os parênteses mais externos de uma subfórmula de $\varphi$ podem ser omitidos caso o uso da seguinte ordem de precedência entre conectivos seja capaz de restaurar o sentido original da fórmula:

1. $\rightarrow, \leftrightarrow$ (menor precedência)
2. $\wedge, \vee$ (precedência intermediária)
3. $\neg, \forall, \exists$ (maior precedência)

Para finalizar esta seção, vejamos como seria utilizada formalmente a noção de escopo, mencionada por nós na seção anterior, para falar sobre o alcance, por assim dizer, da quantificação em um enunciado. Como é fácil de ver, de um ponto de vista formal, o escopo de um quantificador $\forall x$ ou $\exists x$ é nada mais do que a fórmula que está sendo por ele quantificada:

**DEFINIÇÃO 3.9** Seja $\alpha \in L_1$ uma fórmula da linguagem de predicados. Se $(\forall x\varphi)$ é uma subfórmula de $\alpha$, dizemos então que $\varphi$ é o *escopo* de $\forall x$ em $\alpha$.

Por exemplo, em (9') abaixo, enquanto o escopo do primeiro $\exists x$ é $P(x)$, o escopo do segundo $\exists x$ é $Q(x)$:

(9') $\exists x(P(x)) \rightarrow \neg\exists x(Q(x))$

Já em (10'), o escopo de $\forall x$ é toda a fórmula $P(x) \rightarrow Q(x)$:

(10') $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

Veja que como $\exists$ é obtido derivadamente a partir de $\forall$ (definição 3.8), não precisamos, na definição 3.9, de uma definição separada do escopo de quantificadores existenciais.

De posse do conceito de escopo de um quantificador, podemos definir a ideia de uma variável ser *livre* ou *ligada* em uma dada fórmula:

**DEFINIÇÃO 3.10** Seja $\alpha \in L_1$ uma fórmula da linguagem de predicados e $x \in K_V$ uma variável qualquer. Se toda ocorrência de $x$ aparece dentro do escopo de um quantificador $\forall x$ em $\alpha$, dizemos que $x$ é *ligada* em $\alpha$. Caso contrário, dizemos que $x$ é *livre* em $\alpha$.

Tome (8), por exemplo:

(8) $P(x) \rightarrow \neg Q(x)$

Aqui, como $x$ não aparece dentro do escopo de nenhum quantificador (simplesmente porque não há quantificadores em (8)), dizemos que $x$ é livre em (8). No entanto, se colocarmos um quantificador no início de (8) e obtivermos (10'),

(10') $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$

teremos agora que $x$ é ligada em (10'), pois duas ocorrências suas aparecem dentro do escopo de $\forall x$ em (10'). Como (10') não possui nenhuma variável livre, dizemos que ela é uma fórmula fechada.

**DEFINIÇÃO 3.11** Seja $\alpha \in L_1$ uma fórmula da linguagem de predicados. Dizemos que $\alpha$ é uma fórmula *fechada* sss não existe nenhum $x \in K_V$ tal que $x$ é livre em $\alpha$. Caso contrário, dizemos que $\alpha$ é uma fórmula *aberta*.

A possibilidade de construirmos, na linguagem de predicados, fórmulas abertas como (8) – na verdade precisamos das fórmulas abertas para chegar às fórmulas fechadas (item (vi) da definição 3.3) – é algo que não encontra uma contrapartida em linguagem natural. Na verdade, em um sentido muito importante, fórmulas abertas carecem de inteligibilidade. No entanto, vemos que fórmulas abertas, como as duas expressões abaixo, são encontradas com bastante frequência em matemática:

(17) $x+y=y+x$

(18) $x+y=10$

Entretanto, apesar de (17) e (18) serem efetivamente abertas no sentido que estamos aqui usando o termo, há o que podemos chamar de uma interpretação padrão implícita na prática matemática que as torna fechadas e, portanto, inteligíveis. Por exemplo, quando escrevemos algo como (17) estamos claramente afirmando que, para quaisquer dois números, a soma do primeiro com o segundo é igual à soma do segundo com o primeiro. Em outras palavras, implicitamente interpretamos (17) universalmente. Já em (18) o que estamos afirmando é que existem dois números tal que a soma deles é igual a 10. Assim, (18) é implicitamente interpretado de um ponto de vista existencial.

No sistema lógico que é o foco do nosso estudo nesta unidade – a *lógica clássica de predicados de primeira ordem*, ou simplesmente *lógica de predicados* – também se adota um procedimento semelhante. Primeiro, no cálculo clássico de predicados de primeira ordem (que veremos no capítulo 11) pode-se optar, utilizando os recursos inferenciais do cálculo, por uma das duas "interpretações". A diferença em relação à prática utilizada, por exemplo, em aritmética, é que tal interpretação é explícita. Por exemplo, uma das regras de inferência que usaremos no capítulo 10 é

(18) $\alpha$ / $\forall x\alpha$

que diz basicamente que a partir de uma fórmula como (8), por exemplo, podemos inferir $\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$. Assim, fórmulas abertas são interpretadas universalmente no cálculo de predicados. Como veremos no próximo capítulo, o mesmo acontece na definição semântica de satisfatibilidade em um modelo. No entanto, para chegarmos a tal noção, passaremos por uma concepção de satisfatibilidade que utiliza explicitamente uma atribuição de valores para as variáveis, aproximando-se, portanto, de uma interpretação existencial.

## 9.3 Exercícios propostos

1. Enumere as limitações da linguagem proposicional que a impedem de funcionar como uma teoria da quantificação e da predicação.
2. Supondo o mesmo vocabulário arbitrário K utilizado por nós neste capítulo (suposição esta que vale também para as demais questões abaixo), use a definição 3.2 para mostrar que cada uma das expressões abaixo é um termo de K, explicitando a aridade de cada um dos símbolos funcionais usados.
   a. x
   b. f(x)
   c. a
   d. g(a,f(a))
   e. f(g(f(x),g(a,f(x))))
3. Diga, utilizando a definição 3.3, se as seguintes expressões pertencem ou não à linguagem de predicados de primeira ordem. Não leve em conta nem a convenção de abreviação de parênteses nem as abreviações da definição 3.8.
   a. $\forall$x,y tal que x,y$\in$N, x+y=y+x
   b. (P(x)$\to$($\forall$y(P(y)$\to$Q(a,y))))
   c. ($\neg$P(x)$\to$R(x,f(g(x,y))))
   d. ($\neg$($\neg$(P(f(x))$\to$Q(f(f(a))))
   e. ($\forall$x($\forall$y($\exists$zP(a))))
   f. ($\exists$w(P(x)$\to$($\forall$x,yQ(y))))
   g. P(a)$\to$($\forall$x$\to$P(y))
   h. (($\neg$($\forall$x($\forall$y(P(y,a)$\vee$R(y,y,y)))))$\to$($\exists$z(P(z,a)$\to$R(z,z,a))))
4. O que há de errado com as expressões abaixo? (Considere as regras de omissão de parênteses.)
   a. f(a,g(f(x)))
   b. $\exists$x(P(x)$\to\forall$y($\neg$P(y)$\vee$Q(x,y)$\to\forall$z$\forall$xQ(z,x)))
   c. $\forall$x$\forall$y(Q(x,a)$\to$P(x)$\vee$Q(a))
5. Mostre quais fórmulas podem ser construídas colocando-se parênteses nas expressões abaixo:
   a. $\forall$xP(x)$\to\neg$Q(x)
   b. $\exists$xP(x,y)$\vee\neg$Q(x)$\wedge$P(a,b)
   c. $\neg\neg$P(x)$\to\forall$xP(x)
   d. $\forall$x$\neg\exists$y$\neg$P(x,y)$\to$P(y,x)
6. Usando as regras de omissão de parênteses, elimine a maior quantidade possível de parênteses das fórmulas abaixo:
   a. (($\forall$x(P(x)$\vee$Q(a,x)))$\to$($\exists$y($\forall$xP(x))))
   b. (($\exists$xP(x,y))$\vee$(($\neg$Q(x))$\wedge$P(a,b)))
   c. ($\neg$($\forall$x($\neg$($\exists$y($\neg$P(x,y))))))
   d. P(f(g(a,h(f(h(a))))),z,g(a,f(x)))

7. Utilizando as regras de omissão de parênteses e a definição 3.8, restaure cada uma das fórmulas abaixo à sua forma original não abreviada:
   a. $\exists x \neg \exists y P(x,y)$
   b. $\forall x P(x) \rightarrow \exists y (P(y) \vee R(y,h(a)))$
   c. $\forall x P(x) \leftrightarrow \forall y (Q(y,x) \vee \neg P(f(x)))$
   d. $\exists y \exists x \neg (Q(x,y) \vee \neg Q(y,x))$
8. Construa a árvore sintática de cada uma das fórmulas da questão 3 que pertencem à linguagem de predicados, bem como das fórmulas das questões 5, 6 e 7.
9. Liste todas as subexpressões das fórmulas das questões 5, 6 e 7, dizendo, para cada uma das subexpressões, se se trata de uma subfórmula ou de um subtermo.
10. Utilizando as definições 3.9-3.11, identifique, para cada uma das fórmulas abaixo, o escopo de cada um de seus quantificadores, quais variáveis são livres e quais são ligadas, e se se trata de uma fórmula aberta ou fechada (considere as regras de omissão de parênteses).
   a. $\forall x P(x) \rightarrow \neg Q(x)$
   b. $\exists x (\forall y P(x,y) \vee \neg Q(x)) \wedge P(a,b)$
   c. $\forall x P(x) \rightarrow \exists y (P(y) \vee R(y,h(a)))$
   d. $\neg\neg P(x) \rightarrow \forall x P(x)$
   e. $\forall x \neg \exists y \neg \exists z (P(x,y,z) \rightarrow \neg P(z,y,x))$
   f. $\exists x (P(x) \rightarrow \forall y (\neg P(y) \vee Q(x,y) \rightarrow \forall z \forall w Q(z,w)))$

## 9.4 Exercícios de análise lógica

1. Traduza para a linguagem de predicados de primeira ordem os enunciados abaixo usando o seguinte glossário:

**Glossário**

P: ser louco;

Q: ser lógico;

R: ser feliz;

S: gostar de lógica;

T: praticar *yoga*;

   a. Alguém é louco.
   b. Ninguém é louco.
   c. Todos são loucos.
   d. Todo lógico é louco.
   e. Nenhum lógico é louco.
   f. Alguns lógicos são loucos mas felizes.
   g. Todos os lógicos são loucos ou felizes.
   h. Existem pessoas que não gostam de lógica e são felizes.
   i. Os lógicos que praticam *yoga* não são loucos.
   j. Quem pratica *yoga* ou é louco ou é lógico.
   k. Nem todo louco é lógico.

l. Nem todas as pessoas gostam de lógica.
m. Quem não gosta de lógica é louco.
n. Um lógico que não gosta de lógica é louco.
o. Os loucos são felizes.
p. Apenas os loucos são felizes.
q. Quem não gosta de lógica ou é louco ou é infeliz.
r. Todos os lógicos loucos são felizes.

2. Traduza para a linguagem de predicados de primeira ordem os enunciados abaixo (usando um glossário com os símbolos usados).
a. O pai de minha esposa é meu sogro.
b. Todo homem é mortal.
c. Nem todo pássaro voa.
d. Homens são mamíferos e tomates são vegetais.
e. O irmão da esposa de João é seu cunhado.
f. Todo político é desonesto.
g. Ainda existem políticos honestos.
h. Quem vota em político desonesto engana a si mesmo.
i. Toda pessoa ama alguém
j. Toda pessoa é amada.
k. Não há quem seja amado por todas as pessoas.
l. João ama Maria, que ama Antônio, que ama Ana, que não ama ninguém.
m. Quem ama a quem não lhe ama é infeliz.
n. Quem não se ama não ama ninguém.
o. Quem ama a quem lhe ama, ama a si mesmo.
p. Nenhum barbeiro barbeia a si mesmo.
q. Todo barbeiro só barbeia a quem não se barbeia.
r. Um barbeiro que só barbeia a quem não barbeia ninguém não barbeia a si próprio.
s. Não existe um conjunto que contenha a si próprio.
t. Quem com ferro fere com ferro será ferido.
u. O pai de Pedro é mais novo que o seu tio que mora em João Pessoa.
v. Jamil admira a cunhada de seu sogro que mora em Fortaleza.
w. Todo pai ama os seus filhos.
x. Alguns filhos não amam os seus pais.
y. De nada vale a vida de um homem que vive a vida envolvida na vida de uma mulher da vida.

# 10
# Semântica da lógica de predicados

## 10.1 Modelo e denotação

Na seção 4.4 do capítulo 4, mostramos como interpretar semanticamente as fórmulas da linguagem proposicional. Mais especificamente, definimos as noções de *modelo* e *satisfatibilidade* para a lógica clássica proposicional. De posse dessas noções, pudemos usar a definição 1.7 para conceitualizar a noção de consequência lógica de tal lógica. Nosso propósito neste capítulo é fazer algo semelhante para a lógica clássica de predicados de primeira ordem. Em outras palavras, queremos definir as noções de modelo e satisfatibilidade da lógica de predicados e assim poder usar as definições dadas na seção 4.3 para obter as noções de tautologia, contradição, contingência, equivalência semântica e, obviamente, a noção de *consequência lógica* da lógica clássica de predicados.

No entanto, nossa tarefa aqui será um pouco mais complexa do que a que demos cabo no capítulo 4. Primeiro, a estrutura das fórmulas atômicas da linguagem de predicados é bem mais complexa do que a da linguagem proposicional. Como sabemos, a ideia básica de um modelo é fixar semanticamente os símbolos não lógicos da linguagem de forma que suas fórmulas atômicas tenham um valor de verdade. Assim, a estrutura de modelos terá que levar em conta qualquer complexidade que eventualmente as fórmulas elementares de uma dada linguagem tenham. Segundo, a linguagem de predicados possui um novo tipo de fórmulas: as fórmulas universais que se utilizam de quantificadores. Naturalmente, a definição da noção de satisfatibilidade para a lógica de predicados terá que considerar também esse novo tipo de fórmula.

Seguindo o modelo de apresentação usado até agora, tentaremos dar, nesta seção, uma ideia intuitiva do aparato conceitual necessário à avaliação semântica das fórmulas da linguagem de predicados de primeira ordem. Após isso, na próxima seção, introduziremos formalmente as noções de modelo e satisfatibilidade na lógica de predicados. Na verdade, alguns dos elementos-chave desse aparato conceitual já foram introduzidos na seção 9.1, quando, na tentativa de explicar informalmente os princípios básicos da linguagem de predicados de primeira ordem, fizemos uso de alguns conceitos semânticos importantes. Dissemos, por exemplo, na seção 9.1, que um símbolo constante referencia ou *denota* um *objeto*. Por exemplo, na tentativa de representar formalmente o enunciado

(1) Ricardo é alto.

utilizamos os símbolos *a* e *P* de acordo com o seguinte glossário:

a: Ricardo;

P: ser alto;

de tal forma que (2) abaixo foi apresentado como a representação de (1) na linguagem de predicados:

(2) P(a)

Apesar de o que chamamos acima de glossário ser nada mais do que a porção de um texto escrito em português, claramente ele tem como objetivo estabelecer de alguma forma uma relação entre uma entidade linguística específica pertencente a uma linguagem particular, a saber, o símbolo constante *a* da linguagem de predicados de primeira ordem, e uma entidade concreta, pertencente ao mundo real, no caso o ser humano autor deste livro que é referenciado em um contexto particular pela expressão "Ricardo". Assim temos um movimento tipicamente *semântico*, isto é, um movimento visando relacionar a linguagem com o mundo, no caso específico de (2), dizer para um dado elemento da linguagem $L_1$ que ele significa ou *denota* um objeto físico específico.

Dessa forma concluímos que a primeira coisa da qual precisamos para avaliar semanticamente as fórmulas da linguagem de predicados é uma maneira de estabelecer, para todo símbolo constante de $L_1$, uma *relação de denotação* entre tais símbolos e certos objetos. Mas veja que antes de fazermos isso é necessário que saibamos de que classe ou conjunto de entidades tais objetos serão selecionados. Em outras palavras, é necessário que tenhamos ao nosso dispor um conjunto ou *domínio* de objetos a partir do qual as denotações das nossas constantes serão selecionadas. Dessa forma, o que temos até agora chamado de objetos serão necessariamente elementos pertencentes a um conjunto domínio D.

E o que dizer dos símbolos relacionais? Que um símbolo constante[60] deve denotar um objeto é algo mais ou menos óbvio. Mas como analisar de um ponto de vista semântico um símbolo que tem, de um ponto de visto pré-teórico, a intenção de representar propriedades e relações? Considerando que já temos ao nosso dispor um conjunto de objetos D, a maneira mais fácil de responder essa pergunta é dizer que um símbolo pre-

**60.** Que, como a nossa exposição informal do capítulo anterior já deixou transparecer, funciona mais ou menos como um nome próprio da linguagem natural.

dicativo, por exemplo, significa simplesmente um subconjunto específico de D. Em outras palavras, a denotação do símbolo predicativo *P* acima, por exemplo, seria, de acordo com essa ideia, um subconjunto específico de D, a saber, o conjunto dos elementos de D que satisfazem a propriedade de ser alto.

Isso é o que podemos chamar de uma análise *extensional* de um predicado: ao invés de responder à pergunta "O que significa ser alto?" dando, por exemplo, os critérios que uma pessoa deve satisfazer para possuir tal propriedade, simplesmente fornece-se a extensão de tal predicado, ou seja, o conjunto de todas as pessoas altas. O mesmo se aplica a propriedades como "ser amarelo", "ser brasileiro" e "ser mamífero"; de um ponto de vista extensional, o significado de tais expressões é, respectivamente, o conjunto de todas as coisas amarelas, o conjunto de todos os homens que possuem a cidadania brasileira, e o conjunto de todos os mamíferos. A peculiaridade da análise extensional que adotaremos aqui é que o significado de um símbolo predicativo tem de ser necessariamente um subconjunto de D.

Juntando isso com o que dissemos sobre o significado de constantes, é fácil imaginar então como iremos avaliar semanticamente enunciados como (2), ou, em outras palavras, como iremos dar cabo à tarefa de dizer se (2) é verdadeiro ou falso. Trivialmente, se *a* denota um objeto pertencente a D, e *P* referencia um subconjunto de D significando exatamente aqueles objetos que possuem a propriedade expressa por *P*, então P(a) é verdade se e somente se a denotação de *a* pertence a tal subconjunto. Apesar de tal ideia fazer referência apenas a símbolos relacionais de aridade 1 (ou seja, símbolos predicativos) e fórmulas atômicas compostas por tais símbolos, é fácil de ver como ela pode ser estendida a símbolos relacionais de aridade maior de 1. Considere, por exemplo, os enunciados abaixo:

(3) A cadeira está ao lado da mesa.

(4) A cadeira está entre a mesa e o armário.

que foram traduzidos para a linguagem de predicados no capítulo anterior como

(5) R(b,c)

(6) S(b,c,d)

de acordo com o seguinte glossário:

b: cadeira;

c: mesa;

d: armário;

R: estar ao lado de;

S: estar entre.

Sendo um símbolo relacional de aridade 1, de acordo com essa visão, nada mais que um conjunto de indivíduos, uma definição extensional de um símbolo relacional de aridade 2, por exemplo, seria simplesmente um conjunto de pares de indivíduos $<\rho,\sigma>$, onde $\rho$ e $\sigma$ são elementos de D. Assim, *R*, por exemplo, teria como seu significado um conjunto composto por todos e apenas todos os pares de objetos $<\rho,\sigma>$ tal que $\rho$ está ao lado de $\sigma$, de forma que (5) é verdade se e somente se $<\rho_b,\sigma_c>$ pertence a tal conjunto, onde $\rho_b$ é o objeto denotado por *b* e $\sigma_c$ é o objeto denotado por *c*. Similarmente, o significado de um símbolo relacional de aridade 3, como S, por exemplo, seria o conjunto de todas e apenas todas as triplas $<\rho,\sigma,\upsilon>$, sendo $\rho,\sigma,\upsilon \in D$ tais que o objeto $\rho$ está entre os objetos $\sigma$ e $\upsilon$. Dessa forma, (6) é verdade se e somente se $<\rho_b,\sigma_c,\upsilon_d>$ pertence a tal conjunto, onde $\rho_b$ é o objeto denotado por *b*, $\sigma_c$ é o objeto denotado por *c* e $\upsilon_d$ é o objeto denotado por *d*.

Generalizando então essa ideia, temos que o significado de um símbolo relacional *R* qualquer é um subconjunto de $D^n$, em que *n* é a aridade de *R*, e $D^n$ é o n-produto cartesiano de D, ou, equivalentemente, o conjunto de todas as n-tuplas formadas a partir dos elementos de D; e $R(t_1, ..., t_n)$ é verdade, onde $t_1, ..., t_n$ são *n* termos, se e somente se a n-tupla $<\sigma_1, ..., \sigma_n>$, onde $\sigma_1$ é a denotação de $t_1$, $\sigma_2$ é a denotação de $t_2$, ..., e $\sigma_n$ é a denotação de $t_n$, pertence a tal subconjunto de $D^n$.

Veja que até agora só falamos sobre a denotação de um tipo específico de termo, a saber, símbolos constantes. No entanto, como a definição acima do valor semântico de $R(t_1, ..., t_n)$ bem deixa transparecer, precisamos também falar a respeito da denotação dos outros elementos sintáticos usados na formação de termos, a saber, símbolos funcionais e símbolos variáveis. Considere a expressão abaixo:

(7) O pai da esposa de João.

Conforme vimos no último capítulo, (7) seria traduzido para a linguagem de predicados como segue:

(8) f(g(a))

em que *f* e *g* são símbolos funcionais significando, respectivamente, "o pai de" e "a esposa de", e *a* é um símbolo constante significando João. Já sabemos que, de um ponto de vista formal, *a* denota um elemento de D; mas como g(a) significa intuitivamente a esposa de João, que é um objeto da mesma forma que João é um objeto, então g(a) deve também denotar um elemento de D, o mesmo valendo para f(g(a)). Mas então qual seria, de um ponto de vista formal, o *significado* de *f* e *g*?

De acordo com a exposição intuitiva que temos feito até agora, podemos seguramente dizer que o significado de *f* e *g* deve ser algo que "recebe" um objeto como parâmetro e "retorna" outro objeto. No caso de *g* em (8) acima, o objeto parâmetro seria a denotação de *a*, ou seja, João, e o objeto retornado, que seria a denotação mesma de g(a), seria a esposa de João; já no caso de *f* o objeto parâmetro seria a denotação de g(a), ou seja, a esposa de João, e o objeto retornado o pai da esposa de João que, no caso, poderíamos tomar como sendo a denotação de f(g(a)). Isso obviamente nos leva a concluir algo que já mencionamos no capítulo anterior: que *f* e *g* significam ou são, de um ponto de vista semântico, *funções* que associam elementos de D a elementos de D.

Isso reflete perfeitamente, devemos admitir, a compreensão intuitiva que temos de expressões insaturadas como "o pai de ...", em que, ao substituirmos as reticências pela designação de um objeto qualquer, como "João", por exemplo, obtemos uma representação para um outro objeto, no caso a expressão "o pai de João", que designa um objeto específico, a saber o pai de João. Assim, a expressão "o pai de ...", ou seu correlato formal *f*, significa uma associação específica que se pode fazer entre elementos de D, ou seja, uma função da forma: $D \rightarrow D$. Generalizando isso para símbolos funcionais de qualquer aridade, o significado de um símbolo funcional de aridade *n* é uma função que associa n-tuplas de elementos pertencentes a D a elementos de D ou, de uma maneira mais formal, uma função da forma: $D^n \rightarrow D$.

Resumindo então o que concluímos até agora, temos que, para avaliarmos semanticamente fórmulas da linguagem de predicados de primeira ordem, precisamos de quatro itens: (1) um conjunto não vazio de objetos D chamado de *domínio*; (2) uma maneira de associar a cada símbolo *constante c* um objeto de D chamado de denotação de *c*; (3) uma maneira de atribuir, para cada *símbolo relacional* R de aridade *n*, um conjunto de n-tuplas de elementos de D; e (4) uma maneira de atribuir, para cada *símbolo funcional f* de aridade *n* uma função da forma: $D^n \rightarrow D$ que associa cada n-tupla de objetos de D a um objeto de D. Esses quatro itens acima compõem o que chamamos de um *modelo* na lógica de predicados de primeira ordem, ou seja, o tipo de estrutura capaz de fixar semanticamente os símbolos não lógicos da linguagem de predicados de primeira ordem $L_1$ de forma a podermos dizer se uma dada fórmula de $L_1$ é verdadeira ou falsa.

Mas veja que há algo sobre o qual não falamos ainda que pode comprometer seriamente nossas pretensões de, para *toda* fórmula $\alpha$ de $L_1$, dizermos se, dado um modelo M qualquer, $\alpha$ é verdade ou não em M (ou usando uma terminologia mais técnica, se M satisfaz ou não $\alpha$). Estamos falando do único tipo de símbolo lógico que nossa exposição deixou de fora: os *símbolos variáveis*. Naturalmente, um modelo não deve fixar o valor semântico dos símbolos variáveis; por razões óbvias, o propósito dos símbolos variáveis só pode ser satisfeito se a eles não tiver associado nenhum elemento semântico; de outra forma não se trataria de uma variável, mas de uma constante. No entanto, privar os símbolos variáveis de valor semântico limitaria por demais nosso poder de avaliação semântica, restringindo-a apenas a fórmulas fechadas. Somente se dispusermos daquilo que falta a um modelo – algum tipo de associação entre símbolos variáveis e objetos – é que seremos capazes de avaliar semanticamente tanto fórmulas fechadas como fórmulas abertas.

Assim, para que satisfaçamos nossas justas pretensões de universalidade em relação à avaliação semântica de fórmulas, precisaremos, além da noção de modelo, de um segundo componente capaz de estipular um valor semântico para cada um dos símbolos variáveis. Em outras palavras, precisaremos de uma maneira de, à semelhança do que fizemos com os símbolos constantes, associar a cada símbolo variável $x$ um objeto de D. Chamaremos tal componente de uma *atribuição de variáveis*.

Além de ser necessário como segundo componente na avaliação semântica de fórmulas, a noção de atribuição de variáveis também é indispensável na avaliação das fórmulas universais. Para dizermos que um dado predicado, por exemplo, é satisfeito por todos os objetos do domínio D, precisamos na avaliação das fórmulas universais de alguma maneira fazer referencia a possíveis valores semânticos dos símbolos variáveis. Para ver isso, considere a seguinte fórmula:

(9) $\forall xP(x)$

Intuitivamente, (9) é verdade se e somente se, para todo elemento do domínio $\sigma \in D$, P(x) é verdade, em que $\sigma$ é exatamente a denotação de $x$. De um ponto de vista formal, podemos expressar essa ideia dizendo que $\forall xP(x)$ é verdade (ou satisfeito) em um modelo M e uma atribuição de variáveis $s$ se e somente se P(x) é verdade em M e $s[x|\sigma]$, para todo $\sigma \in D$. Aqui, $s[x|\sigma]$ é uma atribuição idêntica a $s$, com a exceção de que, em $s[x|\sigma]$, a denotação de $x$ é $\sigma$. Assim, se consideramos todas as atribuições de variáveis $s[x|\sigma]$ possíveis, fazendo $\sigma$ assumir o valor de todos os elementos de D e exigindo que P(x) seja verdade em M e em todas essas atribuições, então temos a garantia de que $\forall xP(x)$ é verdade em M e $s$.

## 10.2 Modelo, satisfatibilidade e consequência lógica

Nesta seção apresentaremos de forma rigorosa as ideias introduzidas acima sobre avaliação semântica de fórmulas da lógica de predicados de primeira ordem. Comecemos definindo a estrutura básica na qual tais fórmulas serão avaliadas, isto é, a noção de modelo:

**DEFINIÇÃO 3.12** Em lógica de predicados de primeira ordem, um *modelo* M é uma quádrupla $\langle D, V_C, V_R, V_F \rangle$ em que

(i) D é um conjunto não vazio de objetos chamado *domínio*;

(ii) $V_C$ é uma função que atribui, para cada símbolo constante $c \in K_C$ um objeto $V_C(c) \in D$;

(iii) $V_R$ é uma função que atribui para cada símbolo relacional $R \in K_R$ de aridade *n* um conjunto $V_R(R) \subseteq D^n$;

(iv) $V_F$ é uma função que atribui para cada símbolo funcional $f \in K_F$ de aridade *n* uma função $V_F(f): D^n \rightarrow D$ que atribui para cada n-tupla de objetos um objeto.

Conforme adiantamos na seção passada, um modelo M é uma estrutura quádrupla contendo, antes de mais nada, um conjunto não vazio de objetos chamado de domínio. A partir desse conjunto, podemos definir os demais componentes de M. $V_C$ é uma função da forma: $K_C \rightarrow D$ que associa a cada símbolo constante *c* um objeto de D; tal objeto, que em símbolos é representado por $V_C(c)$, é o que chamamos na seção passada de a denotação de *c*. $V_R$ é uma função que atribui, para cada símbolo relacional *R* de aridade *n*, um conjunto de n-tuplas de elementos de D, isto é, um subconjunto de $D^n$. Assim, dado um símbolo relacional $R \in K_R$ qualquer de aridade *n*, $V_R(R)$ contém todas as n-tuplas de elementos de D que se relacionam conforme a relação R. Finalmente, $V_F$ atribui, para cada símbolo funcional *f* de aridade *n*, uma função da forma: $D^n \rightarrow D$ que associa, para cada n-tupla de objetos de D, um objeto de D.

Para melhor compreendermos cada um desses componentes, considere os enunciados abaixo:

(10) João, seu pai e seu único filho, Gustavo, estão em casa.

(11) João está sentado ao lado de sua esposa, Maria.

(12) Gustavo está sentado entre Maria e João.

(13) Todos estão em casa.

Se fôssemos traduzir esses enunciados para a linguagem de predicados, a primeira coisa que faríamos seria estipular, na composição do que temos chamado até agora de glossário, que constantes serão utilizadas e qual o significado de cada uma delas:

a: João;

b: Maria;

c: Gustavo.

Conforme alertamos na seção passada, essa estipulação é um movimento tipicamente semântico, estabelecendo uma relação entre componentes da linguagem de predicados de primeira ordem e objetos pertencentes ao mundo. Mas como vimos, estipular tal relação é exatamente a função do que estamos chamando aqui de modelo. Assim, podemos dizer que um glossário é nada mais do que uma apresentação informal e incompleta de um modelo; ou equivalentemente, que um modelo é uma apresentação formal e rigorosa da informação contida em um glossário.

Na porção de glossário acima, temos basicamente dois aspectos de um modelo específico – que referenciaremos daqui em diante simplesmente por M* – sendo introduzidos. Primeiro, temos a menção de três objetos específicos, a saber, João, Maria e Gustavo, o que pode ser tomado facilmente como uma especificação parcial do domínio D de M*. Assim temos que {João,Maria,Gustavo}$\subseteq$D. Mas veja que os enunciados (10)-(13) falam de outro objeto, a saber, o pai de João, cujo nome não nos é informado. Se decidirmos referenciar tal objeto pela expressão "pai_de_João", podemos considerar o domínio de M* como sendo o conjunto D={João,Maria,Gustavo,pai_de_João}.

O segundo aspecto mencionado no glossário é o significado ou denotação dos símbolos constantes M*. Sendo a porção de glossário acima basicamente uma associação entre constantes de $K_C$ e elementos de D, o que temos efetivamente aqui é a definição (parcial) da função $V_C$ de M*, o que pode ser representado formalmente como segue:

$V_C$(a)=João

$V_C$(b)=Maria

$V_C$(c)=Gustavo

Continuando nossa tarefa de precisar um glossário para (10)-(13), o próximo passo seria a estipulação dos símbolos relacionais juntamente com seus significados (a necessidade da relação de identidade I ficará clara mais adiante):

P: estar em casa;

R: estar ao lado de;

S: estar sentado entre;

I: ser idêntico à.

No entanto, conforme dito na seção passada, o que podemos chamar de o significado dos símbolos relacionais é dado, em um modelo, de forma *extensional*. De acordo com essa visão então, o significado de *P* é simplesmente o conjunto dos objetos que estão em casa; o significado de *R* é o conjunto de todos os pares $<\rho,\sigma>$ tal que $\rho$ está sentado ao lado de $\sigma$; o significado de *S* é o conjunto de todas as triplas $<\rho,\sigma,\upsilon>$ tal que $\rho$ está sentado entre $\sigma$ e $\upsilon$; e o significado de *I* é o conjunto de todos os pares de objetos $<\rho,\sigma>$ tal que $\rho$ é idêntico a $\sigma$.

Ao examinarmos a definição 3.12 vemos que é exatamente incumbência da função $V_R$ precisar tais significados para cada um dos símbolos relacionais. Assim, $V_R$(P) seria o conjunto dos objetos que estão em casa, $V_R$(R), o conjunto de todos os pares de objetos $<\rho,\sigma>$ tal que $\rho$ está sentado ao lado de $\sigma$, $V_R$(S), o conjunto de todas as triplas $<\rho,\sigma,\upsilon>$ tal que $\rho$ está sentado entre $\sigma$ e $\upsilon$, e $V_R$(I), o conjunto de todos os pares de objetos

$<\rho,\sigma>$ tal que $\rho$ é idêntico a $\sigma$. Uma (possível) especificação completa desses conjuntos (embora parcial da função $V_R$) é dada abaixo:

$V_R(P) = \{\text{João,Maria,Gustavo,pai\_de\_João}\}$

$V_R(R) =\{<\text{Gustavo, João}>,<\text{João, Gustavo}>,<\text{Gustavo, Maria}>,<\text{Maria, Gustavo}>\}$

$V_R(S) = \{<\text{Gustavo, Maria, João}>,<\text{Gustavo, João, Maria}>\}$

$V_R(I) = \{<\text{João,João}>,<\text{Maria,Maria}>,<\text{pai\_de\_João,pai\_de\_João}>,<\text{Gustavo,Gustavo}>\}$

Finalizando o nosso glossário, segue abaixo a estipulação do significado dos símbolos funcionais:

f: pai de;

g: esposa de;

h: filho único de.

Novamente, o significado dos símbolos funcionais em M também será dado de forma extensional, sendo incumbência de $V_F$ fazer isso. E como isso é feito? Conforme dissemos, $V_F$ atribui para cada símbolo funcional *f* de aridade *n* uma função da forma: $D^n \rightarrow D$; isso significa que a entidade retornada pela função $V_F$ aplicada a um símbolo funcional específico, como $V_F(f)$, por exemplo, é ela mesma uma função. Abaixo nós temos uma possível caracterização parcial das funções $V_F(f)$ e $V_F(g)$:

$V_F(f)(\text{João})=\text{pai\_de\_João}$;

$V_F(f)(\text{Gustavo})=\text{João}$;

$V_F(g)(\text{João})=\text{Maria}$;

$V_F(h)(\text{João})=\text{Gustavo}$.

Resumindo então, dado D, $V_C$, $V_R$ e $V_F$ conforme descritos acima, nós temos $M^*=<D,V_C,V_R,V_F>$ como um exemplar da noção de modelo introduzida na definição 3.12.

Para finalizarmos nossa análise, segue abaixo a tradução de (10)-(13) para a linguagem de predicados de primeira ordem de acordo com o glossário dado:

(14) $P(a)\wedge P(f(a))\wedge P(h(a))\wedge I(h(a),c)$

(15) $R(a,g(a))\wedge I(b,g(a))$

(16) $S(c,b,a)$

(17) $\forall xP(x)$

Veja que (14) pode equivalentemente ser representado sem usarmos o símbolo funcional *h*:

(18) $P(a)\wedge P(f(a))\wedge P(c)\wedge\forall y(I(f(y),a)\rightarrow I(y,c))$

Nesse ponto é natural indagarmos como M* será usado na avaliação semântica das fórmulas; em outras palavras, como seremos capazes de dizer que uma dada fórmula $\alpha$ é verdade em M*, ou equivalentemente, que M* satisfaz $\alpha$? Conforme adiantamos na seção passada, em função da existência, na linguagem de predicados, de fórmulas abertas e fórmulas com quantificadores como (17) e (18), precisamos, na avaliação das fórmulas, não apenas de um modelo M, mas também da noção de *atribuição de variáveis*, noção esta que é definida logo abaixo:

**DEFINIÇÃO 3.13** Seja $M=<D,V_C,V_R,V_F>$ um modelo. Uma *atribuição de variáveis* (ou simplesmente *atribuição*) em M é uma função s: $K_V \rightarrow D$ que atribui para cada símbolo variável $x \in K_V$ um objeto $s(x) \in D$.

Como é fácil de ver, uma atribuição *s* faz em relação às variáveis exatamente o que $V_C$ faz em relação às constantes: para cada símbolo variável $x \in K_V$ é associado um objeto do domínio D, formalmente representado por s(x). Juntando essas duas coisas, temos então uma maneira de associarmos para cada símbolo constante ou variável a sua *denotação*, ou seja, um elemento de D: enquanto $V_C$ nos dá a denotação de cada um dos símbolos constantes, uma atribuição *s* nos dá a denotação de cada um dos símbolos variáveis.

Veja, no entanto, que, para sermos capazes de fornecer uma denotação para todos os tipos de termos, nós temos ainda que contemplar termos compostos por *símbolos funcionais*. Como vimos acima, um dos componentes de M* é exatamente uma função $V_F$ que atribui, para cada símbolo funcional *f* de aridade *n*, uma função da forma: $D^n \rightarrow D$, isto é, uma função capaz de retornar, para cada n-tupla de objetos, um objeto do domínio D. Assim, a denotação de f(a), por exemplo, seria obtida da seguinte maneira: uma vez que sabemos que a denotação de *a*, dada pela função $V_C$, é João ($V_C$(a)=João), aplicamos tal denotação à função $V_F$(f) e obtemos o objeto pai_de_João ($V_F$(f)(João)=pai_de_João). Já a denotação de

(19) f(f(h(a))),

que sabemos ser o pai do pai do filho de João, ou seja, o pai de João, envolve uma quantidade maior de refinamentos. Como (19) é um termo construído a partir do símbolo funcional *f*, então sua denotação é $V_F(f)(\sigma)$, em que $\sigma$ é a denotação do parâmetro de *f* em (19), ou seja, f(h(a)). Utilizando o mesmo raciocínio, temos que $\sigma$, ou seja, a denotação de f(h(a)) é $V_F(f)(\rho)$, em que $\rho$ é a denotação de h(a), que por sua vez é $V_F(h)(\upsilon)$, em que $\upsilon$ é a denotação de *a* que é $V_C$(a)=João. Representado a denotação de um termo *t* por $\Phi$[t], esses passos podem ser resumidos como segue:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi[a]$ | = | $V_C(a)$ | = | João | | |
| $\Phi[h(a)]$ | = | $V_F(h)(\Phi[a])$ | = | $V_F(h)$(João) | = | Gustavo |
| $\Phi[f(h(a))]$ | = | $V_F(f)(\Phi[h(a)])$ | = | $V_F(f)$(Gustavo) | = | João |
| $\Phi[f(f(h(a))]$ | = | $V_F(f)(\Phi[f(h(a))])$ | = | $V_F(f)$(João) | = | pai_de_João |

Assim temos que para obtermos a denotação de f(f(h(a)) temos que usar a denotação de outro termo, a saber, f(h(a)), que por sua vez exige a obtenção da denotação de outro termo, a saber h(a), e assim por diante. Isso significa que, para definirmos formalmente a noção de denotação $\Phi$, temos que mencionar, dentro da própria definição, a noção $\Phi$ que é o objeto de nossa definição. Em outras palavras, temos que usar uma definição *recursiva*. A diferença em relação à explicação informal que demos acima é que essa *função denotação*, que é como chamaremos $\Phi$, tem, em adição à um termo, também um modelo e uma atribuição como parâmetros.

**DEFINIÇÃO 3.14** Seja $M=<D,V_C,V_R,V_F>$ um modelo e *s* uma atribuição em M. A *função denotação* $\Phi_{M,s}$ é definida como segue:

(i) Se $c \in K_C$ então $\Phi_{M,s}(c)=V_C(c)$;

(ii) Se $x \in K_V$ então $\Phi_{M,s}(x)=s(x)$;

(iii) Se $f \in K_F$ é uma função de aridade *n* e $t_1,\ldots,t_n$ são termos de K, então $\Phi_{M,s}(f(t_1,\ldots,t_n))=V_F(f)(\Phi_{M,s}(t_1), \ldots, \Phi_{M,s}(t_n))$.

Conforme mencionamos na seção anterior, um dos principais usos da noção de atribuição de variáveis será na avaliação de fórmulas universais. Diremos que $\forall xP(x)$, por exemplo, é verdade (ou satisfeito) em um modelo M e uma atribuição de variáveis *s* se e somente se, para todo $\sigma \in D$, P(x) é verdade em M e $s[x|\sigma]$. Aqui, $s[x|\sigma]$ é uma atribuição idêntica a *s*, com a exceção de que, em $s[x|\sigma]$, a denotação de *x* é $\sigma$. Assim, se P(x) for verdade em toda atribuição $s[x|\sigma]$, em que $\sigma$ assume o valor de cada um dos membros de D, então a propriedade expressa por P vale para todos os objetos de D, o que é o mesmo que dizer que $\forall xP(x)$ é verdade (em M). Segue abaixo a definição formal de $s[x|\sigma]$:

**DEFINIÇÃO 3.15** Seja $M=<D,V_C,V_R,V_F>$ um modelo, *s* uma atribuição em M, $x \in K_V$ uma variável e $\sigma \in D$ um elemento do domínio. $s[x|\sigma]$ é a atribuição em M que satisfaz as seguintes condições:

(i) Para todo $y \in K_V$ tal que y  x, $s[x|\sigma](y)=s(y)$;

(ii) $s[x|\sigma](x)=\sigma$.

De posse das noções introduzidas nas definições 3.12-3.15, podemos finalmente introduzir a noção de *satisfatibilidade* da lógica de predicados de primeira ordem:

**DEFINIÇÃO 3.16** Sejam $M=<D,V_C,V_R,V_F>$ um modelo, *s* uma atribuição em M, $<t_1,...,t_n>$ uma n-tupla de termos, $R\in K_R$ um símbolo relacional de aridade *n* e $\alpha,\beta\in L_1$ duas fórmulas. A relação de satisfatibilidade $\Vdash$ é definida como segue:

(i) $M,s\Vdash R(t_1, ..., t_n)$ sss $<\Phi_{M,s}(t_1),...,\Phi_{M,s}(t_n)>\in V_R(R)$;

(ii) $M,s\Vdash\neg\alpha$ sss $M,s\nVdash\alpha$;

(iii) $M,s\Vdash\alpha\wedge\beta$ sss $M,s\Vdash\alpha$ e $M,s\Vdash\beta$;

(iv) $M,s\Vdash\alpha\vee\beta$ sss $M,s\Vdash\alpha$ ou $M,s\Vdash\beta$;

(v) $M,s\Vdash\alpha\rightarrow\beta$ sss $M,s\nVdash\alpha$ ou $M,s\Vdash\beta$;

(vi) $M,s\Vdash\forall x\alpha$ sss $M,s[x|\sigma]\Vdash\alpha$, para todo $\sigma\in D$.

Conforme já dito, em lógica de primeira ordem usa-se na avaliação das fórmulas, além de um modelo M, também uma atribuição *s* em M. Assim dizemos que uma dada fórmula $\alpha\in L_1$ é satisfeita em M e *s*, o que representamos por $M,s\Vdash\alpha$ (caso $\alpha$ não seja satisfeita em M e s, nós escrevemos $M,s\nVdash\alpha$). Como seria de se esperar, a grande diferença entre a noção definida acima e o conceito de satisfatibilidade da lógica proposicional (definição 1.10) são as definições das condições de verdade das fórmulas atômicas e universais, respectivamente os itens (i) e (vi) da definição 3.16; grosso modo, os demais itens simplesmente reproduzem os seus pares da definição 1.10. (i) diz que uma fórmula atômica $R(t_1, ..., t_n)$ é satisfeita em M e *s* se e somente se a n-tupla composta pelas denotações de $t_1$, ... e $t_n$ ($<\Phi_{M,s}(t_1),...,\Phi_{M,s}(t_n)>$) pertence à extensão de R ($V_R(R)$). Já (vi) formaliza a interpretação de fórmulas universais explicada acima: $\forall x\alpha$ é satisfeita em M e *s* se e somente se, para todo objeto $\sigma$ pertencente ao domínio, $\alpha$ é satisfeita em M e $s[x|\sigma]$.

Vejamos como essa definição seria usada na avaliação semântica dos enunciados (14)-(17). Para isso, usaremos o modelo M* definido acima e uma atribuição de variáveis *s* qualquer. Supondo que o nosso vocabulário K contenha apenas as variáveis *x*, *y*, *z* e *w* ($K_V=\{x,y,z,w\}$), tal atribuição *s* poderia ser como segue:

s(x) = João;

s(y) = João;

s(z) = Maria;

s(w) = pai_de_João.

Comecemos por (16). Nesse caso a nossa tarefa será dizer se

(20) $M^*,s\Vdash S(c,b,a)$

é o caso ou não. De acordo com a definição 3.16, item (i),

(21) $M^*,s \Vdash S(c,b,a)$ sss $\langle \Phi_{M^*,s}(c), \Phi_{M^*,s}(b), \Phi_{M^*,s}(a) \rangle \in V_R(S)$.

Já sabemos que $V_R(S)=\{\langle \text{Gustavo},\text{Maria},\text{João} \rangle, \langle \text{Gustavo},\text{João},\text{Maria} \rangle\}$. Assim, para avaliarmos a veracidade de (20), resta-nos saber o que exatamente é a tripla $\langle \Phi_{M^*,s}(c), \Phi_{M^*,s}(b), \Phi_{M^*,s}(a) \rangle$. Utilizando a definição 3.14, nós temos como segue:

$\Phi_{M^*,s}(c)=V_C(c)=\text{Gustavo}$;

$\Phi_{M^*,s}(b)=V_C(b)=\text{Maria}$;

$\Phi_{M^*,s}(a)=V_C(a)=\text{João}$.

Assim temos que (21) pode ser reescrito como segue:

(22) $M^*,s \Vdash S(c,b,a)$ sss $\langle \text{Gustavo},\text{Maria},\text{João} \rangle \in \{\langle \text{Gustavo},\text{Maria},\text{João} \rangle, \langle \text{Gustavo},\text{João},\text{Maria} \rangle\}$.

Como $\langle \text{Gustavo}, \text{Maria}, \text{João} \rangle$ efetivamente pertence ao conjunto $\{\langle \text{Gustavo},\text{Maria},\text{João} \rangle, \langle \text{Gustavo},\text{João}, \text{Maria} \rangle\}$, temos então que (20) é o caso, ou seja, que (16) é satisfeito em M* e *s*.

Consideremos agora (15), caso no qual nossa tarefa será dizer se

(23) $M^*,s \Vdash R(a,g(a)) \wedge I(b,g(a))$

é o caso ou não. De acordo com a definição 3.16, item (iii) temos que

(24) $M^*,s \Vdash R(a,g(a)) \wedge I(b,g(a))$ sss $M^*,s \Vdash R(a,g(a))$ e $M^*,s \Vdash I(b,g(a))$

Aplicando raciocínio semelhante ao que usamos em (20), podemos concluir que $M^*,s \Vdash I(b,g(a))$ é efetivamente o caso. O mesmo, no entanto, não acontece com

(25) $M^*,s \Vdash R(a,g(a))$

Senão vejamos. De acordo com a definição 3.16, item (i),

(26) $M^*,s \Vdash R(a,g(a))$ sss $\langle \Phi_{M^*,s}(a), \Phi_{M^*,s}(g(a)) \rangle \in V_R(R)$.

$V_R(R)$, nós sabemos, é o conjunto $\{\langle \text{Gustavo},\text{João} \rangle, \langle \text{João},\text{Gustavo} \rangle, \langle \text{Gustavo},\text{Maria} \rangle, \langle \text{Maria}, \text{Gustavo} \rangle\}$. Vejamos o que é a dupla $\langle \Phi_{M^*,s}(a), \Phi_{M^*,s}(g(a)) \rangle$. Utilizando a definição 3.14 nós temos que

$\Phi_{M^*,s}(a)=V_C(a)=\text{João}$;

$\Phi_{M^*,s}(g(a))=V_F(g)(\Phi_{M^*,s}(a))=V_F(g)(\text{João})=\text{Maria}$.

Assim (26) pode ser reescrito como segue:

(27) $M^*,s \Vdash R(a,g(a))$ sss $\langle \text{João},\text{Maria} \rangle \in \{\langle \text{Gustavo}, \text{João} \rangle, \langle \text{João},\text{Gustavo} \rangle, \langle \text{Gustavo},\text{Maria} \rangle, \langle \text{Maria},\text{Gustavo} \rangle\}$

Como <João,Maria> não pertence à {<Gustavo,João>,<João,Gustavo>,<Gustavo,Maria>,<Maria, Gustavo>}, temos que (25) não é o caso, o que faz com que (23) também não seja o caso; em outras palavras nós temos o que segue:

(28) $M^*,s \nVdash R(a,g(a)) \wedge I(b,g(a))$

(29) $M^*,s \nVdash R(a,g(a))$

Vejamos agora como (17) seria analisada. Nesse caso queremos saber se

(30) $M^*,s \Vdash \forall x P(x)$

é o caso ou não. De acordo com a definição 3.16, item (vi),

(31) $M^*,s \Vdash \forall x P(x)$ sss $M^*,s[x|\sigma] \Vdash P(x)$, para todo $\sigma \in D$

Como D={João,Maria,Gustavo,pai_de_João}, temos que (31) pode ser reescrito como segue:

(32) $M^*,s \Vdash \forall x P(x)$ sss $M^*,s[x|\text{João}] \Vdash P(x)$ e $M^*,s[x|\text{Maria}] \Vdash P(x)$ e $M^*,s[x|\text{Gustavo}] \Vdash P(x)$ e $M^*,s[x|\text{pai\_de\_João}] \Vdash P(x)$

De acordo com a definição 3.15, temos que a atribuição s[x|Maria], por exemplo, é como segue:

s[x|Maria](x)=Maria;

s[x|Maria](y)=João;

s[x|Maria](z)=Maria;

s[x|Maria](w)=pai_de_João.

ou seja, s[x|Maria] é tal qual *s* com à exceção de que, em s[x|Maria], a denotação de *x* é Maria. De posse disso, podemos avaliar o componente correspondente de (32), isto é,

(33) $M^*,s[x|\text{Maria}] \Vdash P(x)$

De acordo com o item (i) da definição 3.16, nós temos que

(34) $M^*,s[x|\text{Maria}] \Vdash P(x)$ sss $\Phi_{M^*,s[x|\text{Maria}]}(x) \in V_R(P)$

De acordo com a definição 3.14, $\Phi_{M^*,s[x|\text{Maria}]}(x)=s[x|\text{Maria}](x)$ que, conforme vimos acima, é Maria. Assim, como Maria efetivamente pertence à $V_R(P)$={João,Maria,Gustavo,pai_de_João}, temos que (33) é o caso. Fazendo exercício similar concluímos que os outros membros de (32), isto é, $M^*,s[x|\text{João}] \Vdash P(x)$, $M^*,s[x|\text{Gustavo}] \Vdash P(x)$ e $M^*,s[x|\text{pai\_de\_João}] \Vdash P(x)$ também são o caso. Assim concluímos que (30) é o caso[61].

Obviamente que a *raison d'être* dessas definições é serem utilizadas juntamente com as definições 1.5-1.8 para obtermos as noções de tautologia, contradição, contingência,

**61.** Fica como exercício o leitor verificar se (14) e (18) são ou não satisfeitas em M* e *s*.

equivalência semântica e consequência lógica para a lógica de predicados. De um ponto de vista geral, tal uso é idêntico ao que fizemos no capítulo 4 para ilustrarmos tais noções aplicadas à lógica clássica proposicional. Dessa forma, com exceção de um comentário crucial que faremos logo abaixo, abster-nos-emos aqui de dar quaisquer explicações ou exemplos a respeito de tais noções na lógica de predicados.

É importante notar que as definições 1.5-1.8 assumem que a noção de satisfatibilidade é definida apenas em relação a um modelo e uma fórmula; não se contempla, nessas definições, uma relação de satisfatibilidade que use um terceiro componente, como é o caso de $\Vdash$ na lógica de predicados, que relaciona um modelo e uma atribuição de variáveis de um lado, e uma fórmula de outro. Assim, para aplicarmos tais definições à lógica de predicados precisamos reformular a definição de satisfatibilidade de forma a avaliarmos as fórmulas exclusivamente em função de um modelo semântico. Isso pode ser feito interpretando todas as fórmulas universalmente em relação às atribuições de variáveis:

**DEFINIÇÃO 3.17** Seja M um modelo e $\alpha \in L_1$ uma fórmula. Dizemos que M satisfaz $\alpha$ (em símbolos: $M \Vdash \alpha$) sss $M,s \Vdash \alpha$ para toda atribuição (em M) *s*.

Para finalizar este capítulo é imprescindível esclarecermos um aspecto extremamente importante da semântica da lógica de predicados. Conforme falamos no início do capítulo anterior, uma das diferenças mais fundamentais entre a linguagem proposicional e a linguagem de predicados de primeira ordem é a presença, nesta última, de fórmulas universais. Apesar de imprescindíveis na formalização de um número considerável de sentenças, esse tipo de fórmula encerra uma dificuldade de ordem prática. Conforme descrito na definição 3.16, para avaliarmos semanticamente fórmulas do tipo $\forall x\alpha$ temos que considerar todos os elementos do domínio. No caso de modelos como o que usamos aqui em que o domínio é *finito*, não há problema algum. No entanto, a maneira como definimos a noção de modelo aqui, que é necessária em muitas das aplicações clássicas da lógica de primeira ordem, contempla a possibilidade de domínios *infinitos*. Nesses casos, obviamente, a verificação de se $\forall x\alpha$ é satisfeita ou não em M se torna uma tarefa inexequível. Em função disso, nos absteremos de ilustrar o uso da semântica da lógica de predicados na análise lógica de argumentos, deixando tal tarefa a cargo exclusivo do cálculo de predicados de primeira ordem, a ser introduzido no próximo capítulo.

## 10.3 Exercícios propostos

1. Dada a lista de símbolos predicativos abaixo, traduza para linguagem de primeira ordem os enunciados abaixo e em seguida construa um modelo M e diga, para cada uma das fórmulas traduzidas, se ela é satisfeita ou não em M.

<u>Glossário</u>

P: ser louco;

Q: ser lógico;

R: ser feliz;

S: gostar de lógica;

T: praticar *yoga.*

a. Alguém é louco.
b. Ninguém é louco.
c. Todos são loucos.
d. Todo lógico é louco.
e. Nenhum lógico é louco.
f. Alguns lógicos são loucos mas felizes.
g. Todos os lógicos são loucos ou felizes.
h. Existem pessoas que não gostam de lógica e são felizes.
i. Os lógicos que praticam *yoga* não são loucos.
j. Quem pratica *yoga* ou é louco ou é lógico.
k. Nem todo louco é lógico.
l. Nem todas as pessoas gostam de lógica.
m. Quem não gosta de lógica é louco.
n. Um lógico que não gosta de lógica é louco.
o. Os loucos são felizes.
p. Apenas os loucos são felizes.
s. Quem não gosta de lógica ou é louco ou é infeliz.
t. Todos os lógicos loucos são felizes.

2. Elabore dois modelos M’ e M” para cada uma das sentenças abaixo de forma que M’ satisfaça a sentença e M” não a satisfaça. Detalhe todos os componentes dos modelos.

a. O pai de minha esposa é meu sogro.
b. Todo homem é mortal.
c. Nem todo pássaro voa.
d. Homens são mamíferos e tomates são vegetais.
e. O irmão da esposa de João é seu cunhado.
f. Todo político é desonesto.
g. Ainda existem políticos honestos.
h. Quem vota em político desonesto engana a si mesmo.
i. Toda pessoa ama alguém.
j. Toda pessoa é amada.
k. Não há quem seja amado por todas as pessoas.

l. João ama Maria, que ama Antônio, que ama Ana, que não ama ninguém.
m. Quem ama a quem não o ama é infeliz.
n. Quem não se ama não ama ninguém.
o. Quem ama a quem o ama, ama a si mesmo.
p. Nenhum barbeiro barbeia a si mesmo.
q. Todo barbeiro só barbeia a quem não se barbeia.
r. Um barbeiro que só barbeia a quem não barbeia ninguém não barbeia a si próprio.
s. Não existe um conjunto que contenha a si próprio.
t. Quem com ferro fere com ferro será ferido.
u. O pai de Pedro é mais novo que o seu tio que mora em João Pessoa.
v. Jamil admira a cunhada de seu sogro que mora em Fortaleza.
w. Todo pai ama os seus filhos.
x. Alguns filhos não amam os seus pais.

# 11
# Cálculo de predicados

## 11.1 Cálculo de predicados de primeira ordem

Neste capítulo introduziremos a definição sintática da relação de inferência da lógica de predicados de primeira ordem. Seguindo o padrão já estabelecido, chamaremos tal sistema de *cálculo de predicados de primeira ordem* (ou simplesmente cálculo de predicados). Semelhantemente à semântica da lógica de predicados vista no capítulo anterior, a definição do cálculo de predicados envolve um grau de sofisticação bem maior do que o encontrado na definição do cálculo proposicional, vista no capítulo 5. No entanto, e apesar disso, tal cálculo de predicados é também uma instância do que chamamos naquele capítulo de cálculo axiomático. Em função disso, à semelhança do que fizemos na definição do cálculo proposicional, utilizar-nos-emos, na definição do cálculo de predicados, das definições 1.11-1.16. Antes, porém, de fazermos isso, devemos introduzir alguns conceitos preliminares.

**DEFINIÇÃO 3.18** Seja $\alpha \in L_1$ uma fórmula, $x \in K_V$ um símbolo variável e $t$ um termo de K. Tomando $\alpha(x)$ como significando que a fórmula $\alpha$ contém (possivelmente zero) ocorrências livres de $x$, $\alpha(t)$ denota a fórmula que é exatamente como $\alpha$, com a exceção de que todas as ocorrências livres de $x$ são substituídas por $t$. Dizemos nesse caso que $\alpha(t)$ é uma *substituição* em $\alpha(x)$.

Primeiro de tudo, dada uma fórmula $\alpha$ qualquer, escrevemos $\alpha(x)$ para significar que $\alpha$ pode ter zero ou mais ocorrências livres da variável $x$. Veja que com isso não estamos querendo dizer que $\alpha$ contém ocorrências livres de $x$, nem que $\alpha$ contém ocorrências livres de outras variáveis. Mas se isso é o caso, ou seja, se $\alpha(x)$ não nos dá nenhuma informação a respeito das ocorrências livres de $x$ em $\alpha$, por que então escrever $\alpha(x)$? Porque após $\alpha(x)$, e esse é o propósito de estarmos usando tal notação, devemos encontrar $\alpha(t)$, em que $t$ é um termo qualquer. Fazendo isso, ou seja, marcando uma variável específica $x$ (que, novamente, pode não correr livre em $\alpha$) sabemos que a fórmula

$\alpha(t)$ é exatamente igual à $\alpha(x)$, com a exceção de que todas as ocorrências livres de *x*, se houver, são substituídas por *t*. Caso não haja tais ocorrências, então trivialmente $\alpha(t)$ será idêntica a $\alpha(x)$. Considere a fórmula abaixo.

(1) $\neg Q(x,y) \vee P(x) \rightarrow \forall x(\neg R(x) \rightarrow \neg P(y))$

Se tomarmos (1) como sendo $\alpha(x)$ e *t* como sendo *a*, $\alpha(t)$, ou equivalentemente $\alpha(a)$, será a fórmula

(2) $\neg Q(a,y) \vee P(a) \rightarrow \forall x(\neg R(x) \rightarrow \neg P(y))$

ou seja, o resultado da substituição de todas as ocorrências livres de *x* em (1) pelo termo *a*. (Repare que as ocorrências ligadas de *x* em (1) não foram substituídas.) Dessa forma, a menção da variável *x* em $\alpha(x)$ tem como propósito apenas deixar claro que, quando escrevermos $\alpha(t)$, são as ocorrências livres de *x* que devem ser substituídas por *t* em $\alpha$.

Nem toda substituição $\alpha(t)$ em $\alpha(x)$, no entanto, é *admissível*. Por exemplo, suponha que $\alpha(x)$ seja a fórmula

(3) $\exists y Q(x,y)$

Aqui, a quantificação de (3) se aplica apenas ao segundo parâmetro do símbolo relacional Q, fato esse que é obviamente indicado pela variável da quantificação *y* estar ocupando a segunda posição na ordem dos parâmetros. Assim, qualquer substituição que fizermos em $\alpha(x)$ não deve mudar isso, a saber, que a quantificação se aplica apenas ao segundo parâmetro. Mas considere qual seria a fórmula resultante da substituição de todas as ocorrências livres de *x* em $\alpha$ por f(*y*), em que *f* é um símbolo funcional qualquer:

(4) $\exists y Q(f(y),y)$

Mas aqui, (4) muda o sentido original de (3): a quantificação nessa nova fórmula é aplicada aos dois parâmetros do símbolo relacional Q, o que, conforme frizamos acima, não acontece em (3). A razão disso, obviamente, é que o termo f(*y*) contém uma variável que é ligada em (3) (ou seja, em $\alpha$), a saber, *y*. Com o intuito de proibir tais substituições, definimos abaixo a noção de *substituição admissível* em $\alpha(x)$:

**DEFINIÇÃO 3.19** Seja $x \in K_V$ um símbolo variável, $\alpha(x) \in L_1$ uma fórmula e *t* um termo de K. $\alpha(t)$ é uma *substituição admissível* em $\alpha(x)$ se e somente se nenhuma ocorrência livre de *x* em $\alpha$ se encontra dentro do escopo de $\forall z$, em que $z \in K_V$ é uma variável ocorrendo em *t*.

Como há uma ocorrência livre de *x* em (3) que se encontra dentro do escopo $\forall y$, e essa variável *y* ocorre em f(y), temos que $\alpha(f(y))$ não é uma substituição admissível em $\alpha(x)$, em que $\alpha$ é a fórmula (3).

Na definição do conjunto de axiomas do cálculo de predicados, utilizar-nos-emos dos mesmos axiomas usados na definição do cálculo clássico proposicional, ou seja, os axiomas P1-P11 da definição 1.17. Como o leitor deve lembrar, em tal definição são introduzidos tais axiomas para uma linguagem arbitrária qualquer; em outras palavras, podemos ver a definição 1.17 como definindo esquemas de axiomas passíveis de serem usados em qualquer linguagem contendo os símbolos lógicos $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$ e $\vee$. Assim, se usarmos, na definição 1.17, $L_1$ como a linguagem de referência, obteremos os (conjuntos de) axiomas P1-P11 na linguagem de predicados de primeira ordem. As fórmulas abaixo, por exemplo, são instâncias de alguns de tais (esquemas de) axiomas:

(5) $\forall xP(x)\rightarrow(\neg(\exists yQ(a,y)\wedge P(a))\rightarrow\forall xP(x))$ P1

(6) $P(a)\wedge\neg(\exists yQ(a,y)\wedge P(a))\rightarrow P(a)$ P3

(7) $\neg(\exists yQ(a,y)\wedge P(a))\rightarrow(\exists yQ(a,y)\wedge P(a)\rightarrow\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x,x)))$ P10

Além dos axiomas P1-P11, o cálculo de predicados terá dois novos axiomas, que definimos logo abaixo:

**DEFINIÇÃO 3.20** Seja $x\in K_V$ um símbolo variável e $\alpha,\beta\in L_1$ duas fórmulas. Nomeamos as fórmulas abaixo como segue:

P12. $\forall x\alpha(x)\rightarrow\alpha(t)$, em que $\alpha(t)$ — em que $\alpha(t)$ é uma substituição admissível em $\alpha(x)$.

P13. $\forall x(\alpha\rightarrow\beta(x))\rightarrow(\alpha\rightarrow\forall x\beta(x))$, — em que *x* não é livre em $\alpha$.

Chamamos a forma esquemática de cada uma dessas fórmulas pelo mesmo nome.

P12 é o axioma que nos permite inferir enunciados particulares de enunciados universais. Considere a fórmula abaixo:

(8) $\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$

que diz que para todo e qualquer objeto *x*, se *x* possui a propriedade *P*, então *x* não possui a propriedade *Q*. Agora suponha que um dado objeto *a* possua a propriedade *P*. De acordo com (8), é natural então que *a* não possua a propriedade *Q*. Tal raciocínio é formalmente possível por conta do axioma P12:

(9) $\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x)),P(a)\vdash\neg Q(a)$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$ | Premissa |
| 2. | $\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))\rightarrow(P(a)\rightarrow\neg Q(a))$ | P12 |
| 3. | $P(a)\rightarrow\neg Q(a)$ | MP 1,2 |
| 4. | $P(a)$ | Premissa |
| 5. | $\neg Q(a)$ | MP 4,3 |

Já P13 nos permite concluir $\alpha\rightarrow\forall x\beta(x)$ a partir de $\forall x(\alpha\rightarrow\beta(x))$. Considere a seguinte versão modificada de (8):

(10) $\forall x(P(a)\rightarrow\neg Q(x))$

Aqui, (10) diz que para todo objeto *x*, se o objeto *a* possui a propriedade *P*, então *x* não possui a propriedade *Q*. Mas como o fato de *a* possuir a propriedade *P* independe de quem é *x*, então caso *a* possua de fato a propriedade *P*, podemos dizer que para todo objeto *x*, *x* não possui a propriedade *Q*. Esse raciocínio, que depende diretamente do axioma P13, é formalizado logo abaixo:

(11) $\forall x(P(a)\rightarrow\neg Q(x)),P(a)\vdash\forall x\neg Q(a)$

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x(P(a)\rightarrow\neg Q(x))$ | Premissa |
| 2. $\forall x(P(a)\rightarrow\neg Q(x))\rightarrow(P(a)\rightarrow\forall x\neg Q(x))$ | P13 |
| 3. $P(a)\rightarrow\forall x\neg Q(x)$ | MP 1,2 |
| 4. $P(a)$ | Premissa |
| 5. $\forall x\neg Q(x)$ | MP 4,3 |

Mas note que, diferentemente de P1-P11, os axiomas P12 e P13 têm restrições em relação a que fórmulas podem ocupar o lugar de $\alpha$. Enquanto que em P12 $\alpha(t)$ tem de ser uma substituição admissível em $\alpha(x)$, em P13 *x* não pode ser livre em $\alpha$. Naturalmente, o uso que fizemos de P12 de P13 em (9) e (11) satisfaz tais restrições. Explicaremos a razão por trás dessas restrições um pouco mais na frente.

No que se refere às regras de inferência do cálculo de predicados, além da regra *modus ponens* introduzida na definição 1.19, também usaremos uma nova regra de inferência: a chamada *regra de generalização*.

**DEFINIÇÃO 3.21** Seja $x\in K_V$ um símbolo variável e $\alpha\in L_1$ uma fórmula. Nomeamos a inferência em $L_1$ abaixo como segue:

$$G: \frac{\alpha}{\forall x\alpha}$$

Como o próprio nome indica, o que a regra G faz é permitir com que, a partir de uma fórmula qualquer $\alpha$, concluamos a sua generalização $\forall x\alpha$, isso nos permite tratar as fórmulas abertas como fórmulas universais[62]. Por exemplo, caso tenhamos

(12) $P(x)\rightarrow\neg Q(x)$

62. Já tivemos oportunidade de mencionar isso no final do capítulo 9.

G permite que, a partir de (12), infiramos (8), interpretando assim tal fórmula aberta universalmente. Segue abaixo a definição formal do cálculo clássico de predicados de primeira ordem:

**DEFINIÇÃO 3.22** O cálculo clássico de predicados de primeira ordem (ou simplesmente *cálculo de predicados*) $C_1$ é a tripla $<L_1,\Sigma_{MP,G},\Lambda_{P1\text{-}P13}>$.

Temos então que o cálculo de predicados $C_1$ é a tripla composta pela linguagem de predicados $L_1$, as inferências admissíveis em $L_1$ instâncias das regras MP e G, e os axiomas (em $L_1$, obviamente) P1-P13. Veja que aqui estamos usando, além das definições 1.17 e 1.19 do capítulo 5, que definem os axiomas P1-P11 e a regra de inferência *modus ponens*, respectivamente, também as definições 1.18 e 1.20, que permitem a construção do conjunto de inferências admissíveis $\Sigma_{MP,G}$ e do conjunto de axiomas $\Lambda_{P1\text{-}P13}$ a partir dos esquemas de inferências MP e G e dos esquemas de axiomas P1-P13, respectivamente.

Voltemos agora para os axiomas P12 e P13 e expliquemos as restrições contidas na definição 3.20. Em P12 há a restrição de que $\alpha(t)$ seja uma substituição admissível em $\alpha(x)$. Assim, só são instâncias de P12 fórmulas da forma

(13) $\forall x\alpha(x)\rightarrow\alpha(t)$

tais que $\alpha(t)$ é uma substituição admissível em $\alpha(x)$. Já vimos que substituições não admissíveis podem mudar o sentido original de uma fórmula. Naturalmente, então, o uso de tais substituições em (13) pode ser fonte de problemas. Para instanciar isso, vejamos o que pode acontecer caso relaxemos essa restrição e aceitemos como instâncias de P12 quaisquer fórmulas que satisfaçam (13), independentemente de $\alpha(t)$ ser ou não uma substituição admissível em $\alpha(x)$. Considere a seguinte fórmula:

(14) $\exists y\neg I(x,y)$

Tomando (14) como sendo $\alpha$, a fórmula $\alpha(y)$ abaixo não é uma substituição admissível em $\alpha(x)$:

(15) $\exists y\neg I(y,y)$

Agora considere a seguinte derivação, feita usando a substituição $\alpha(y)$ em P12:

(16) $\forall x\exists y\neg I(x,y)\vdash\exists y\neg I(y,y)$

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x\exists y\neg I(x,y)$ | Premissa |
| 2. $\forall x\exists\neg I(x,y)\rightarrow\exists y\neg I(y,y)$ | P12 |
| 3. $\exists y\neg I(y,y)$ | MP 1,2 |

Se, por exemplo, I significa a relação de identidade, (16) nos permite, a partir de $\forall x\exists y\neg I(x,y)$, que é a assunção extremamente razoável de que para todo e qualquer objeto *x* existe um objeto *y* diferente de *x*, concluir a asserção absurda de que existe um objeto *y* que não é idêntico a ele mesmo ($\exists y \neg I(y,y)$).

Já em relação à P13, a restrição é que *x* não deve ser livre em $\alpha$. Em outras palavras, apenas as instâncias de

(17) $\forall x(\alpha \rightarrow \beta(x)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x \beta(x))$

tais que *x* não é livre em $\alpha$ é que são instâncias de P13. A razão de tal restrição é, na verdade, bastante óbvia. De um ponto de vista inferencial, (17) permite que, a partir de

(18) $\forall x(\alpha \rightarrow \beta(x))$

concluamos

(19) $\alpha \rightarrow \forall x \beta(x)$,

eliminando, por assim dizer, a quantificação de $\alpha$. Mas caso *x* seja livre em $\alpha$, então teremos feito algo ilegítimo, pois tal eliminação só pode ser feita caso a quantificação presente em (18) se aplique exclusivamente à $\beta$, e não à $\alpha$; e isso obviamente requer que todas as ocorrências de *x* em $\alpha$ apareçam dentro do escopo de um quantificador $\forall x$ em $\alpha$, o que é o mesmo que dizer que *x* não deve ser livre em $\alpha$. Reproduzindo o exercício que fizemos com P12, relaxar essa restrição significa permitir absurdos como, por exemplo, o de deduzir $\forall x P(x)$ a partir de $\exists x P(x)$:

(20) $\exists x P(x) \vdash \forall x P(x)$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg P(x) \rightarrow \neg P(x)$ | I3 |
| 2. $\forall x(\neg P(x) \rightarrow \neg P(x))$ | G 1 |
| 3. $\forall x(\neg P(x) \rightarrow \neg P(x)) \rightarrow (\neg P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x))$ | P13 |
| 4. $\neg P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$ | MP 2,3 |
| 5. $\neg \forall x \neg P(x) \rightarrow \neg\neg P(x)$ | INm5 4 |
| 6. $\neg \forall x \neg P(x)$ | Premissa |
| 7. $\neg\neg P(x)$ | MP 6,5 |
| 8. $P(x)$ | RN2 7 |
| 9. $\forall x P(x)$ | G 8 |

Aqui o movimento decisivo está no item 3, em que P13 é usado, mas a restrição de que *x* não seja livre em $\alpha$ não é satisfeita: *x* é livre em $\neg P(x)$.

## 11.2 Teorema da dedução e outros metateoremas

Muito da prática e resultados utilizados por nós na prova de teoremas lógicos e regras derivadas no cálculo proposicional serão mantidos neste capítulo. Primeiro, fazendo referência ao teorema 2.5, também usaremos resultados provados previamente na construção de nossas derivações. Isso obviamente é possível porque tal teorema, e isso o leitor pode facilmente constatar, se aplica a todo e qualquer cálculo axiomático, independentemente da linguagem, axiomas e regras derivadas que compõem esse cálculo.

Segundo, em consonância com tal método de construção de derivações, estaremos livres para usar qualquer um dos teoremas lógicos e regras derivadas provados por nós nos capítulos 6, 7 e 8. Isso na verdade já foi feito na prova de (20) acima, na qual usamos o teorema lógico I3 e as regras derivadas INm5 e RN2. Segue abaixo mais um exemplo de uma derivação em $C_1$ que se utiliza de regras provadas por nós na unidade anterior.

(21) $\vdash \alpha(t) \rightarrow \exists x \alpha(x)$

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x \neg\alpha(x) \rightarrow \neg\alpha(t)$ | P12 |
| 2. $\neg\neg\alpha(t) \rightarrow \neg\forall x \neg\alpha(x)$ | INm5 1 |
| 3. $\neg\neg\alpha(t) \leftrightarrow \alpha(t)$ | Nc1 |
| 4. $\alpha(t) \rightarrow \neg\neg\alpha(t)$ | C2 3 |
| 5. $\alpha(t) \rightarrow \neg\forall x \neg\alpha(x)$ | I4 4,2 |

Veja, no entanto, que todas essas relações da unidade anterior foram provadas como valendo exclusivamente para o cálculo clássico proposicional e cálculos mais fracos que o cálculo proposicional. Como então, o leitor pode perguntar, podemos dizer que todas essas relações são válidas também no cálculo de predicados?

O leitor com certeza deve se lembrar que as muitas páginas que dedicamos nos capítulos 5, 6, 7 e 8 à construção de derivações se centraram na prova de *esquemas de derivações*. Assim, a demonstração de I4, por exemplo,

(I4) $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \varphi \vdash \alpha \rightarrow \varphi$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha \rightarrow \beta$ | Premissa |
| 2. $\beta \rightarrow \varphi$ | Premissa |
| 3. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi))$ | P2 |
| 4. $(\beta \rightarrow \varphi) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi))$ | P1 |
| 5. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi))$ | MP 2,4 |
| 6. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi)$ | MP 5,3 |
| 7. $(\alpha \rightarrow \varphi)$ | MP 1,6 |

no contexto do capítulo 6, prova, na verdade, toda uma classe de relações do cálculo proposicional, a saber, a classe de todas as relações instâncias de I4. Por exemplo, de posse da derivação acima nós temos automaticamente provada a validade das relações abaixo:

$A \to B \vee C, B \vee C \to \neg D \vdash A \to \neg D$

$\neg B \vee C \to A, A \to (B \to \neg C) \vdash \neg B \vee C \to (B \to \neg C)$

$(\neg A \to \neg B) \to A \vee C, A \vee C \to C \vdash (\neg A \to \neg B) \to C$

É exatamente esse raciocínio que, conforme formalizado no teorema 2.5, permite-nos usar relações como I4 como regras de inferência.

Mas veja que, enquanto esquemas de axiomas e esquemas de inferências admissíveis, respectivamente, todos os axiomas e regras de inferência usadas na prova de I4 são também axiomas e regras de inferência do cálculo de predicados de primeira ordem. Assim, usando então o mesmo raciocínio que usamos acima, podemos dizer que a derivação exibida para I4 acima também prova automaticamente a validade das relações do *cálculo de predicados* abaixo:

$\forall x P(x) \to Q(a), Q(a) \to \exists x \neg R(x) \vdash \forall x P(x) \to \exists x \neg R(x)$

$\neg \forall x (P(x) \to Q(x)) \to R(a), R(a) \to \neg P(a) \vdash \neg \forall x (P(x) \to Q(x)) \to \neg P(a)$

$\forall x \forall y (S(x,y) \to S(y,x)) \to \forall x S(x,x), \forall x S(x,x) \to \exists x \forall y \neg S(x,y)$
$\vdash \forall x \forall y (S(x,y) \to S(y,x)) \to \exists x \forall y \neg S(x,y)$

Generalizando, a derivação de I4 prova a validade de todas as relações de $C_1$ que possuam a mesma *forma* do esquema de relação I4, o que nos permite então usá-la como regra de inferência nas derivações futuras em $C_1$. Mas lembre-se, e isso obviamente é algo pressuposto no nosso raciocínio acima, que o cálculo de predicados $C_1$ contém todos os esquemas de axiomas (P1-P11) e esquema de inferências (MP) de $C_p$. Assim, generalizando ainda mais esse resultado, temos que toda e qualquer prova de um esquema de relação feita em $C_p$ é automaticamente uma prova para o mesmo esquema de relação em $C_1$. Dessa forma, podemos usar todos os esquemas de relação mencionados (e provados) nos capítulos 5, 6, 7 e 8 como teoremas lógicos ou regras de inferências na construção de nossas derivações no cálculo de predicados de primeira ordem.

Terceiro, além do teorema 2.5, também usaremos os outros metateoremas introduzidos nos capítulos 6, 7 e 8. Conforme mencionamos, o uso do teorema 2.5, e consequentemente do corolário 2.3, no cálculo de predicados é automático, pois esse teorema estabelece um resultado específico para todo e qualquer cálculo axiomático, independentemente das peculiaridades de seus componentes. No entanto, o mesmo não pode ser dito a respeito do teorema 2.12, por exemplo. Esse teorema afirma algo extremamente relevante, a saber, que se $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ e $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \neg\beta$, então $\Gamma \vdash \neg\alpha$; mas ele o faz para uma classe específica de cálculos, a saber, os cálculos que são *extensões conservativas de* $C_{\neg m-}$. De acordo com a definição 2.1, C'' é uma extensão conservativa de C' quando $\Gamma \vdash \alpha$ em C'' sempre que $\Gamma \vdash \alpha$ em C', em que C' e C'' têm necessariamente a mesma linguagem e o mesmo conjunto de inferências admissíveis. Mas como a linguagem e o conjunto de inferências admissíveis de $C_1$ são diferentes da linguagem e inferências admissíveis de $C_{\neg m-}$, respectivamente, trivialmente então $C_1$ não é uma extensão conservativa de $C_{\neg m-}$, o que faz com que o resultado descrito no teorema 2.12 não seja aplicável à $C_1$. Na verdade, de acordo com nossa definição, $C_1$ não é uma extensão de nenhum dos cálculos proposicionais introduzidos na unidade anterior, o que implica que não apenas o teorema 2.12, mas também os teoremas 2.2 e 2.17 não se aplicam ao cálculo de predicados $C_1$.

No entanto, e apesar disso, em um sentido muito importante, $C_1$ pode ser visto como uma extensão conservativa de todos os cálculos proposicionais introduzidos na unidade anterior: para um cálculo proposicional qualquer C introduzido nos capítulos 5, 6 ou 7, todos os *esquemas* de axiomas de C são também esquemas de axiomas de $C_1$; todos os esquemas de inferência de C são também esquemas de inferência de $C_1$; e, como uma consequência desses dois pontos, todos os esquemas de relação válidos em C (teoremas lógicos e regras derivadas), conforme mostrado acima, são também esquemas de relação válidos em $C_1$[63]. Assim, é natural esperarmos que, em algum sentido, os teoremas 2.2, 2.12 e 2.17 sejam também válidos em $C_1$. Por exemplo, os teoremas 2.12 e 2.17 podem ser reformulados em termos do cálculo de predicados praticamente sem alteração alguma em relação às suas formulações originais:

**TEOREMA 3.1** Seja $\Gamma\subseteq L_1$ um conjunto de fórmulas e $\alpha,\beta\in L_1$ duas fórmulas. Se $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ e $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\neg\beta$, então $\Gamma\vdash\neg\alpha$ em $C_1$.

**TEOREMA 3.2** Seja $\Gamma\subseteq L_1$ um conjunto de fórmulas e $\alpha,\beta\in L_1$ duas fórmulas. Se $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\vdash\beta$ e $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\vdash\neg\beta$ então $\Gamma\vdash\alpha$.

A mesma coisa, no entanto, já não pode ser dita com respeito ao teorema da dedução (teorema 2.2). No cálculo de predicados, o uso irrestrito do teorema da dedução conforme descrito no capítulo 6 pode ser fonte de problemas. Considere a relação abaixo

(22) $P(x)\vdash\forall xP(x)$

| | |
|---|---|
| 1. $P(x)$ | Premissa |
| 2. $\forall xP(x)$ | G 1 |

**63.** Na verdade, poderíamos ter formulado nossa definição de extensão conservativa de forma a contemplar essa cumulatividade que indubitavelmente há entre $C_1$ e os cálculos proposicionais vistos nos capítulos anteriores. No entanto, em função da peculiaridade que há em relação ao teorema da dedução no cálculo de predicados, decidimos restringir a noção de extensão conservativa e, consequentemente a aplicação dos metateoremas acima mencionados, apenas para cálculos com a mesma linguagem e o mesmo conjunto de inferências admissíveis, e fornecer uma nova formulação para tais metateoremas no cálculo de predicados.

Trivialmente, (22) é fruto de uma simples aplicação da regra G à única premissa do argumento. Conforme já mencionamos, no cálculo de predicados, as fórmulas abertas são interpretadas universalmente. Assim, de P(x) podemos inferir que P(x) vale para todo x, ou seja, $\forall x P(x)$. Agora considere o que aconteceria se usássemos o teorema da dedução conforme descrito no teorema 2.2. Apenas lembrando, esse teorema foi apresentado como segue:

(23) Se $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ então $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

Como temos (22), ou seja, $P(x) \vdash \forall x P(x)$, de acordo com esse teorema nós temos também

(24) $\vdash P(x) \rightarrow \forall x P(x)$

ou seja, que é um teorema lógico que, para todo *x*, se P(x) é o caso então $\forall x P(x)$ também o é[64]. Supondo que P é a propriedade de ser um número primo, por exemplo, como (24) vale para todo *x*, ela também vale para o número 2, o que nos leva à conclusão absurda de que se 2 é número primo então todo e qualquer número também é um número primo:

(25) $\vdash P(2) \rightarrow \forall x P(x)$

O problema com essa aplicação do teorema da dedução está obviamente relacionado com a regra de generalização. Conforme já mencionado, o propósito da regra G é explicitar a interpretação universal que estamos dando a fórmulas abertas. Assim, quando escrevemos P(x), sem nenhuma qualificação, estamos na verdade dizendo que a propriedade P vale para todos os objetos, o que é explicitado em (22), em que usamos G para inferir $\forall x P(x)$ a partir de P(x). O ponto crucial, no entanto, é que tal relação inferencial não pode ser expressa através da implicação material, conforme especificado em (24), pois ao escrevermos $P(x) \rightarrow \forall x P(x)$ estamos, devido à presença de variáveis livres, também assumindo essa mesma interpretação universal e, consequentemente, dizendo algo não contido, em absoluto, em (22), a saber, que se algum *x* tem a propriedade P, então todo *x* tem essa propriedade.

Assim, o teorema da dedução no cálculo de predicados deve ser restringido de forma a não poder ser usado em casos como esse. Mas para fazermos isso precisamos identificar a característica geral que faz com que o uso do teorema da dedução em (22) seja problemático. Uma breve inspeção é suficiente para nos convencermos de que a razão de tal uso ser problemático é que P(x) possui como variável livre a mesma variável que é o objeto da aplicação de G a partir da qual $\forall x P(x)$ é obtida. Fazendo referência à descri-

**64.** Essa leitura universal pode ser explicitada usando-se mais uma vez a regra da generalização e concluindo-se $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow \forall x P(x))$.

ção do teorema da dedução dada em (23), isso pode ser generalizado dizendo que, em usos problemáticos do teorema da dedução, a fórmula $\alpha$ possui como variável livre a mesma variável objeto da aplicação de G da qual a obtenção de $\beta$ depende.

Portanto, se quisermos evitar anomalias como (24) no uso do teorema da dedução no cálculo de predicados, devemos, na sua formulação, impedir que ele seja aplicado em situações como as descritas acima, ou seja, situações nas quais a conclusão $\beta$ seja obtida, direta ou indiretamente, através da aplicação da regra de generalização, e $\alpha$ tenha como variável livre a mesma variável objeto dessa aplicação. Veja que, para fazermos isso, teremos que mencionar derivação de $\beta$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$ que justifica $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$. Para isso, introduziremos a noção de uma derivação ser *G-livre* com respeito a uma dada fórmula.

**DEFINIÇÃO 3.23** Seja $\Gamma\subseteq L_1$ um conjunto de fórmulas, $\alpha,\beta\in L_1$ duas fórmulas e $<\alpha_1,...,\alpha_n>$ uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$. $<\alpha_1,...,\alpha_n>$ é G-livre com respeito à $\beta$ sss não existir $\alpha_j\equiv\forall x\alpha_k$ e $\alpha_i\equiv\beta$ tal que k<j, i<k e $x$ é uma variável livre em $\beta$.

Se uma derivação $<\alpha_1,...,\alpha_n>$ de $\alpha$ a partir de $\Gamma$ é G-livre com respeito à $\beta$, isso significa que não há um $\alpha_j$ que apareça após $\beta$ na derivação ($\alpha_i\equiv\beta$ tal que i<j), que seja obtido através do uso da regra G ($\alpha_j\equiv\forall x\alpha_k$ tal que k<j) de tal forma que a variável objeto dessa aplicação de G seja uma variável livre em $\beta$.

De posse dessa noção, podemos definir então nossa versão do teorema da dedução para o cálculo de predicados de primeira ordem:

**TEOREMA 3.3** Seja $\Gamma\subseteq L_1$ um conjunto de fórmulas e $\alpha,\beta\in L_1$ duas fórmulas. Se $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$, em que existe uma derivação de $\beta$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$ que seja G-livre com respeito à $\alpha$, então $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta$.

Para melhor entender esse teorema, em especial a noção de uma derivação ser G-livre com respeito a uma dada fórmula, considere a derivação abaixo[65]:

(26) $\forall xP(x)\vdash\exists xP(x)$

| | |
|---|---|
| 1. $\forall xP(x)$ | Premissa |
| 2. $\forall xP(x)\rightarrow P(x)$ | P12 |
| 3. $P(x)$ | MP 1,2 |
| 4. $P(x)\rightarrow\exists xP(x)$ | (21) |
| 5. $\exists xP(x)$ | MP 3,4 |

65. Aqui estamos fazendo uso do teorema lógico (21) provado no início desta seção.

Essa derivação é G-livre com respeito à $\forall xP(x)$, pois não existe nenhuma fórmula $\alpha_j$ membro da derivação aparecendo após $\forall xP(x)$, que ocupa o primeiro lugar na derivação, que seja obtido através do uso da regra G de tal forma que a variável objeto dessa aplicação de G seja uma variável livre em $\forall xP(x)$. Obviamente que isso é caso apenas em virtude de não haver em (26) nenhuma aplicação de G. De qualquer forma, como temos (26) e como há uma derivação de $\exists xP(x)$ a partir de $\forall xP(x)$ G-livre com respeito a $\exists xP(x)$, podemos então usar o teorema 3.3 e concluir

(27) $\vdash \forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$

Considere outro exemplo:

(28) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall xP(x) \vdash \forall xQ(x)$

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ | Premissa |
| 2. $\forall xP(x)$ | Premissa |
| 3. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow Q(x))$ | P12 |
| 4. $P(x) \rightarrow Q(x)$ | MP 1,3 |
| 5. $\forall xP(x) \rightarrow P(x)$ | P12 |
| 6. $P(x)$ | MP 2,5 |
| 7. $Q(x)$ | MP 6,4 |
| 8. $\forall xQ(x)$ | G 7 |

Novamente, tal derivação é G-livre com respeito à $\forall xP(x)$, pois não existe nenhuma fórmula $\alpha_j$ membro dessa derivação aparecendo após $\forall xP(x)$, que aqui já ocupa o segundo lugar na derivação, que seja obtido através do uso da regra G de tal forma que a variável objeto dessa aplicação de G seja uma variável livre em $\forall xP(x)$. Diferentemente, no entanto, de (26), isso não se dá devido à ausência de aplicações de G, que acontece no último passo da derivação, mas sim devido ao fato de não existirem variáveis livres em $\forall xP(x)$. Dessa forma, podemos usar o teorema 3.3 e concluir

(29) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$

Se quisermos utilizar (28) para concluir

(30) $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x))$

teremos que usar a versão generalizada do teorema da dedução que segue abaixo:

**TEOREMA 3.4** Seja $\Gamma \subseteq L_1$ um conjunto de fórmulas e $\alpha, \beta \in L_1$ duas fórmulas. Se $\Gamma \cup \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \beta$, em que existe uma derivação de $\beta$ a partir de $\Gamma \cup \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ que seja G-livre com respeito à $\alpha_1$, ... e $\alpha_n$, então $\Gamma \vdash (\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow (... \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta)...)))$[66].

**66.** Vale a pena ressaltar que poderíamos facilmente ter formulado uma versão semelhante do teorema da dedução para o cálculo clássico proposicional.

Assim, como temos (28), como a derivação de (28) é G-livre com respeito a $\forall xP(x)$ e a $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$ temos que, de acordo com o teorema 3.4, (30) também é o caso.

## 11.3 Teoremas lógicos

Nesta seção exibiremos alguns dos teoremas lógicos mais importantes do cálculo de predicados. Como seria de se esperar, utilizaremos aqui os teoremas da dedução acima descritos bem como os esquemas de relações provados na unidade anterior. Comecemos pelos teoremas lógicos contendo apenas quantificadores e implicação:

**TEOREMA 3.5** Sejam $\alpha,\beta,\varphi\in L_1$ fórmulas quaisquer. As relações abaixo são válidas em $C_1$.

QI1. $\vdash\alpha(t)\rightarrow\exists x\alpha(x)$ em que $\alpha(t)$ é uma substituição admissível em $\alpha(x)$

QI2. $\vdash\forall x\alpha\rightarrow\exists x\alpha$

QI3. $\vdash\forall x(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\forall x\alpha\rightarrow\forall x\beta)$

QI4. $\vdash\forall x(\alpha(x)\rightarrow\beta)\rightarrow(\exists x\alpha(x)\rightarrow\beta)$ em que $x$ não é livre em $\beta$

QI5. $\vdash\forall x(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\exists x\alpha\rightarrow\exists x\beta)$

QI6. $\vdash\forall x\forall y\alpha\leftrightarrow\forall y\forall x\alpha$

QI7. $\vdash\exists x\exists y\alpha\leftrightarrow\exists y\exists x\alpha$

QI8. $\vdash\exists x\forall y\alpha\rightarrow\forall y\exists x\alpha$

QI9. $\vdash\exists x(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\forall x\alpha\rightarrow\exists x\beta)$

QI1, que já foi provado na seção anterior como a regra (21), afirma basicamente que se uma fórmula $\alpha$, com suas possíveis instâncias livres de $x$ sendo substituídas pelo termo $t$, é o caso, então também é o caso que existe ao menos um $x$ tal que $\alpha(x)$. Veja que, como na derivação de QI1 nós usamos o axioma P12, que, como sabemos, tem a restrição de que $\alpha(t)$ seja uma substituição admissível em $\alpha(x)$, temos que QI1 deve também ser usado de acordo com tal restrição.

Enquanto QI2 é o equivalente sintático à proibição semântica de domínios vazios, QI3 explicita a distribuição de $\forall x$ em relação à $\rightarrow$. As provas de QI2 e QI3 já foram, em um sentido muito importante, exibidas na seção anterior. Enquanto QI2 é nada mais do que a versão em termos de esquema de relação de (27), QI3 é tal versão de (30). A única coisa que devemos fazer para transformar as provas de (27) e (30) em provas de QI1 e QI2, respectivamente, é substituir $P(x)$ por $\alpha$, na prova de (27), e substituir $P(x)$ por $\alpha$ e $Q(x)$ por $\beta$, respectivamente, na prova dada para (30), bem como realizar os devidos ajustes na justificativa do uso do teorema da dedução.

Já QI4 é mais ou menos a versão de P13 em termos do quantificador existencial. Segue abaixo sua prova:

(31) $\forall x(\alpha(x)\rightarrow\beta),\exists x\alpha(x)\vdash\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x(\alpha(x)\rightarrow\beta)$ | Premissa |
| 2. $(\alpha(x)\rightarrow\beta)\rightarrow(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha(x))$ | INm6 |
| 3. $\forall x((\alpha(x)\rightarrow\beta)\rightarrow(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha(x)))$ | G 2 |
| 4. $\forall x((\alpha(x)\rightarrow\beta)\rightarrow(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha(x)))\rightarrow(\forall x(\alpha(x)\rightarrow\beta)\rightarrow \forall x(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha(x)))$ | QI3 |
| 5. $\forall x(\alpha(x)\rightarrow\beta)\rightarrow\forall x(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha(x))$ | MP 3,4 |
| 6. $\forall x(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha(x))$ | MP 1,5 |
| 7. $\forall x(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha(x))\rightarrow(\neg\beta\rightarrow\forall x\neg\alpha(x))$ | P13 |
| 8. $\neg\beta\rightarrow\forall x\neg\alpha(x)$ | MP 6,7 |
| 9. $\neg\forall x\neg\alpha(x)\rightarrow\neg\neg\beta$ | INm5 8 |
| 10. $\neg\forall x\neg\alpha(x)$ | Premissa |
| 11. $\neg\neg\beta$ | MP 10,9 |
| 12. $\beta$ | RN2 11 |

Como a derivação acima é G-livre com respeito a $\forall x(\alpha(x)\rightarrow\beta)$ e $\exists x\alpha(x)$[67], de acordo com o teorema 3.4 então temos QI4. Veja que como usamos no passo 7 da derivação de (31) o axioma P13 que, como sabemos, só pode ser usado se a restrição de que $x$ não seja livre em $\beta$ for satisfeita, tal restrição também se aplica a (31) e, consequentemente, a QI4.

QI5 faz algo bastante semelhante à QI3, mas com $\forall x$ se transformando, por assim dizer, em $\exists x$. Segue abaixo sua prova:

(32) $\forall x(\alpha\rightarrow\beta)\vdash\exists x\alpha\rightarrow\exists x\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x(\alpha\rightarrow\beta)$ | Premissa |
| 2. $\forall x(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$ | P12 |
| 3. $\alpha\rightarrow\beta$ | MP 1,2 |
| 4. $\beta\rightarrow\exists x\beta$ | QI1 |
| 5. $\alpha\rightarrow\exists x\beta$ | I4 3,4 |
| 6. $\forall x(\alpha\rightarrow\exists x\beta)$ | G 5 |
| 7. $\forall x(\alpha\rightarrow\exists x\beta)\rightarrow(\exists x\alpha\rightarrow\exists x\beta)$ | QI4 |
| 8. $\exists x\alpha\rightarrow\exists x\beta$ | MP 6,7 |

**67.** Daqui em diante deixaremos a cargo do leitor checar que essa e as demais derivações a serem exibidas no restante deste capítulo são realmente G-livres com respeito a uma dada fórmula.

Como a derivação acima é G-livre com respeito à $\forall x(\alpha\rightarrow\beta)$, de acordo com o teorema 3.3 temos QI5.

Segue abaixo a prova de QI7:

(33) $\vdash\exists x\exists y\alpha\rightarrow\exists y\exists x\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\rightarrow\exists x\alpha$ | QI1 |
| 2. $\exists x\alpha\rightarrow\exists y\exists x\alpha$ | QI1 |
| 3. $\alpha\rightarrow\exists y\exists x\alpha$ | I4 1,2 |
| 4. $\forall y(\alpha\rightarrow\exists y\exists x\alpha)$ | G 3 |
| 5. $\forall y(\alpha\rightarrow\exists y\exists x\alpha)\rightarrow(\exists y\alpha\rightarrow\exists y\exists x\alpha)$ | QI4[68] |
| 6. $\exists y\alpha\rightarrow\exists y\exists x\alpha$ | MP 4,5 |
| 7. $\forall x(\exists y\alpha\rightarrow\exists y\exists x\alpha)$ | G 6 |
| 8. $\forall x(\exists y\alpha\rightarrow\exists y\exists x\alpha)\rightarrow(\exists x\exists y\alpha\rightarrow\exists y\exists x\alpha)$ | QI4[69] |
| 9. $\exists x\exists y\alpha\rightarrow\exists y\exists x\alpha$ | MP 7,8 |

A prova de

(35) $\vdash\exists y\exists x\alpha\rightarrow\exists x\exists y\alpha$

pode ser construída simplesmente substituindo-se *x* por *y* e *y* por *x* na prova de (33) acima. Feito isso, só nos resta então, através de um uso trivial de C3, provar QI7:

(QI7) $\vdash\exists x\exists y\alpha\rightarrow\exists y\exists x\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\exists x\exists y\alpha\rightarrow\exists y\exists x\alpha$ | (33) |
| 2. $\exists y\exists x\alpha\rightarrow\exists x\exists y\alpha$ | (34) |
| 3. $\exists x\exists y\alpha\leftrightarrow\exists y\exists x\alpha$ | C3 1,2 |

O teorema abaixo lista alguns teoremas lógicos do cálculo de predicados contendo o símbolo da negação e apenas um quantificador:

**TEOREMA 3.6** Sejam $\alpha,\beta,\varphi\in L_1$ fórmulas quaisquer. As relações abaixo são válidas em $C_1$.

QN1. $\vdash\exists x\alpha\leftrightarrow\neg\forall x\neg\alpha$

QN2. $\vdash\forall x\alpha\leftrightarrow\neg\exists x\neg\alpha$

QN3. $\vdash\neg\forall x\alpha\leftrightarrow\exists x\neg\alpha$

---

**68.** Podemos aqui usar QI4, pois *y* não é livre em $\exists y\exists x\alpha$.

**69.** Novamente, podemos usar QI4 porque aqui *x* não é livre em $\exists y\exists x\alpha$.

QN4. $\vdash\neg\exists x\alpha\leftrightarrow\forall x\neg\alpha$

QN1 apenas especifica na forma de teorema lógico a definição de $\exists x$ dada por nós no capítulo 9 (definição 3.8); como $\exists x\alpha$ é nada mais do que uma abreviação para $\neg\forall x\neg\alpha$, sua prova é uma instância trivial da lei da reflexividade da equivalência (BC1: $\alpha\leftrightarrow\alpha$). Já QN2, apesar de envolver um raciocínio relativamente simples na sua prova, tem uma derivação mais sofisticada[70]:

(36) $\vdash\forall x\alpha\rightarrow\neg\exists x\neg\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\rightarrow\neg\neg\alpha$ | INm10 |
| 2. $\forall x(\alpha\rightarrow\neg\neg\alpha)$ | G 1 |
| 3. $\forall x(\alpha\rightarrow\neg\neg\alpha)\rightarrow(\forall x\alpha\rightarrow\forall x\neg\neg\alpha)$ | QI3 |
| 4. $\forall x\alpha\rightarrow\forall x\neg\neg\alpha$ | MP 2,3 |
| 5. $\forall x\neg\neg\alpha\rightarrow\neg\neg\forall x\neg\neg\alpha$ | INm10 |
| 6. $\forall x\alpha\rightarrow\neg\neg\forall x\neg\neg\alpha$ | I4 4,5 |

(37) $\vdash\neg\exists x\neg\alpha\rightarrow\forall x\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\neg\neg\alpha\leftrightarrow\alpha$ | Nc1 |
| 2. $\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha$ | C1 1 |
| 3. $\forall x(\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha)$ | G 2 |
| 4. $\forall x(\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha)\rightarrow(\forall x\neg\neg\alpha\rightarrow\forall x\alpha)$ | QI3 |
| 5. $\forall x\neg\neg\alpha\rightarrow\forall x\alpha$ | MP 3,4 |
| 6. $\neg\neg\forall x\neg\neg\alpha\leftrightarrow\forall x\neg\neg\alpha$ | Nc1 |
| 7. $\neg\neg\forall x\neg\neg\alpha\rightarrow\forall x\neg\neg\alpha$ | C1 6 |
| 8. $\neg\neg\forall x\neg\neg\alpha\rightarrow\forall x\alpha$ | I4 7,5 |

Tendo provado então (36) e (37), a prova de QN2 é trivial:

(QN2) $\vdash\forall x\alpha\leftrightarrow\neg\exists x\neg\alpha$

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x\alpha\rightarrow\neg\exists x\neg\alpha$ | (36) |
| 2. $\neg\exists x\neg\alpha\rightarrow\forall x\alpha$ | (37) |
| 3. $\forall x\alpha\leftrightarrow\neg\exists x\neg\alpha$ | C3 1,2 |

Segue abaixo alguns dos mais importantes teoremas lógicos do cálculo de predicados relacionados com a conjunção e disjunção:

**70.** Lembre-se que $\neg\exists x\neg\alpha$ é uma abreviação para $\neg\neg\forall x\neg\neg\alpha$.

**TEOREMA 3.7** Sejam $\alpha,\beta,\varphi\in L_1$ fórmulas quaisquer. As relações abaixo são válidas em $C_1$.

QCD1. $\vdash\forall x(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\forall x\alpha\wedge\forall x\beta$

QCD2. $\vdash\forall x\alpha\vee\forall x\beta\to\forall x(\alpha\vee\beta)$

QCD3. $\vdash\exists x(\alpha\vee\beta)\leftrightarrow\exists x\alpha\vee\exists x\beta$

QCD4. $\vdash\exists x(\alpha\wedge\beta)\to\exists x\alpha\wedge\exists x\beta$

Basicamente QCD1 explicita a possibilidade de internalização ($\forall x(\alpha\wedge\beta)\to\forall x\alpha\wedge\forall x\beta$) e externalização ($\forall x\alpha\wedge\forall x\beta\to\forall x(\alpha\wedge\beta)$) de $\forall x$ em relação à conjunção. Já em relação à disjunção, apenas a externalização de $\forall x$ é possível, o que é explicitado em QCD2. Segue abaixo a prova de QCD2:

(QCD2) $\vdash\forall x\alpha\vee\forall x\beta\to\forall x(\alpha\vee\beta)$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\to\alpha\vee\beta$ | P6 |
| 2. $\forall x(\alpha\to\alpha\vee\beta)$ | G 1 |
| 3. $\forall x(\alpha\to\alpha\vee\beta)\to(\forall x\alpha\to\forall x(\alpha\vee\beta))$ | QI3 |
| 4. $\forall x\alpha\to\forall x(\alpha\vee\beta)$ | MP 2,3 |
| 5. $\beta\to\alpha\vee\beta$ | P7 |
| 6. $\forall x(\beta\to\alpha\vee\beta)$ | G 5 |
| 7. $\forall x(\beta\to\alpha\vee\beta)\to(\forall x\beta\to\forall x(\alpha\vee\beta))$ | QI3 |
| 8. $\forall x\beta\to\forall x(\alpha\vee\beta)$ | MP 6,7 |
| 9. $\forall x\alpha\vee\forall x\beta\to\forall x(\alpha\vee\beta)$ | D3 4,8 |

Algo semelhante acontece em relação à QCD3 e QCD4, mas agora com respeito à quantificação existencial. Enquanto QCD3 representa a internalização ($\exists x(\alpha\vee\beta)\to\exists x\alpha\vee\exists x\beta$) e externalização ($\forall x\alpha\wedge\forall x\beta\to\forall x(\alpha\wedge\beta)$) de $\exists x$ em relação à disjunção, QCD4 representa apenas a internalização de $\exists x$ em relação à conjunção. Como é de se esperar, o converso de QCD4, isto é, a externalização de $\exists x$ em relação à conjunção não é possível. Segue abaixo a prova de QCD3:

(38) $\vdash\exists x(\alpha\vee\beta)\to\exists x\alpha\vee\exists x\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\to\exists x\alpha$ | QI1 |
| 2. $\exists x\alpha\to\exists x\alpha\vee\exists x\beta$ | P6 |
| 3. $\alpha\to\exists x\alpha\vee\exists x\beta$ | I4 1,2 |
| 4. $\beta\to\exists x\beta$ | QI1 |
| 5. $\exists x\beta\to\exists x\alpha\vee\exists x\beta$ | P7 |
| 6. $\beta\to\exists x\alpha\vee\exists x\beta$ | I4 4,5 |

| | |
|---|---|
| 7. $\alpha\vee\beta\rightarrow\exists x\alpha\vee\exists x\beta$ | D3 3,6 |
| 8. $\forall x(\alpha\vee\beta\rightarrow\exists x\alpha\vee\exists x\beta)$ | G 7 |
| 9. $\forall x(\alpha\vee\beta\rightarrow\exists x\alpha\vee\exists x\beta)\rightarrow(\exists x(\alpha\vee\beta)\rightarrow\exists x\alpha\vee\exists x\beta)$ | QI4 |
| 10. $\exists x(\alpha\vee\beta)\rightarrow\exists x\alpha\vee\exists x\beta$ | MP 8,9 |

(39) $\vdash\exists x\alpha\vee\exists x\beta\rightarrow\exists x(\alpha\vee\beta)$

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha\rightarrow\alpha\vee\beta$ | P6 |
| 2. $\forall x(\alpha\rightarrow\alpha\vee\beta)$ | G 1 |
| 3. $\forall x(\alpha\rightarrow\alpha\vee\beta)\rightarrow(\exists x\alpha\rightarrow\exists x(\alpha\vee\beta))$ | QI5 |
| 4. $\exists x\alpha\rightarrow\exists x(\alpha\vee\beta)$ | MP 2,3 |
| 5. $\beta\rightarrow\alpha\vee\beta$ | P7 |
| 6. $\forall x(\beta\rightarrow\alpha\vee\beta)$ | G 5 |
| 7. $\forall x(\beta\rightarrow\alpha\vee\beta)\rightarrow(\exists x\beta\rightarrow\exists x(\alpha\vee\beta))$ | QI5 |
| 8. $\exists x\beta\rightarrow\exists x(\alpha\vee\beta)$ | MP 6,7 |
| 9. $\exists x\alpha\vee\exists x\beta\rightarrow\exists x(\alpha\vee\beta)$ | D3 4,8 |

Tendo provado (38) e (39), basta usarmos C3 para provarmos QCD3:

(QCD3) $\vdash\exists x(\alpha\vee\beta)\leftrightarrow\exists x\alpha\vee\exists x\beta$

| | |
|---|---|
| 1. $\exists x(\alpha\vee\beta)\rightarrow\exists x\alpha\vee\exists x\beta$ | (38) |
| 2. $\exists x\alpha\vee\exists x\beta\rightarrow\exists x(\alpha\vee\beta)$ | (39) |
| 3. $\exists x(\alpha\vee\beta)\leftrightarrow\exists x\alpha\vee\exists x\beta$ | C3 1,2 |

## 11.4 Exercícios propostos

1. Faça o que é pedido a seguir referente ao teorema 3.5:
   a. Diga o que significa os teoremas lógicos QI6, QI7, QI8 e QI9;
   b. Diga por que o inverso de QI8 não é válido;
   c. Prove QI6, QI7 e QI8.
2. Prove QN3 e QN4 (teorema 3.6).
3. Faça o que é pedido a seguir referente ao teorema 3.7:
   a. Explique por que o converso de QCD2, $\forall x(\alpha\vee\beta)\rightarrow\forall x\alpha\vee\forall x\beta$, não é válido;
   b. Explique por que o converso de QCD4, $\exists x\alpha\wedge\exists x\beta\rightarrow\exists x(\alpha\wedge\beta)$, não é válido;
4. Prove QCD1 e QCD4 (teorema 3.7).

## 11.5 Exercícios de análise lógica

1. Traduza para a linguagem de predicados de primeira ordem os argumentos abaixo (usando um glossário com os símbolos usados) e, após isso, demonstre, utilizando o cálculo clássico de predicados de primeira ordem, se tal argumento é válido ou não.
   a. Todos as pessoas que deliberam sobre alternativas acreditam [ao menos implicitamente] no livre-arbítrio.
      Todas as pessoas deliberam sobre alternativas.
   ∴ Todas as pessoas acreditam no livre-arbítrio. [Este argumento foi dado por William James.]
   b. Nenhum sentimento de felicidade é publicamente observável.
      Todo processo químico é publicamente observável.
   ∴ Nenhum sentimento de felicidade é um processo químico.
   c. Todas as leis do universo se baseiam na vontade de Deus.
      Os princípios morais são leis do universo.
   ∴ Os princípios morais se baseiam na vontade de Deus.
   d. Se alguém é onisciente, então esse alguém é Deus.
      Para alguém provar que Deus não existe, esse algúem tem que ser capaz de conhecer cada “canto” do universo.
      Se alguém é capaz de conhecer cada “canto” do universo, então esse algúem é onisciente.
   ∴ Para alguém provar que Deus não existe, esse alguém tem de ser Deus. [Esse argumento foi dado por Howard J. Resnick.]
   e. Todo enunciado significativo é ou experimentalmente testável ou analítico.
      Nenhum enunciado religioso é experimentalmente testável.
      Nenhum enunciado religioso é analítico.
   ∴ Nenhum enunciado religioso é significativo.
   f. Todo aquele que pensa claramente é potencialmente um bom lógico.
      Toda pessoa que é potencialmente um bom lógico deve estudar lógica.
      Todo aquele que não pensa claramente deve estudar lógica.
   ∴ Todos devem estudar lógica.

g. Tudo tem uma causa.
Se Deus existe, então há algo que não tem uma causa [a saber, Deus].
∴ Deus não existe.

h. Tudo que teve um início tem uma causa.
O mundo teve um início.
Se o mundo teve um início, então Deus [que não teve um início] é a causa do mundo.
Se Deus é a causa do mundo, então Deus existe.
∴ Deus existe.

i. Tudo que pode ser explicado pode ser explicado ou como causado por leis científicas, ou como o resultado de uma escolha livre de um ser racional.
A totalidade das leis científicas não pode ser explicada como causada por leis científicas [pois isso seria circular].
∴ Ou a totalidade das leis científicas não pode ser explicada, ou ela pode ser explicada como o resultado de uma escolha livre de um ser racional [Deus].

j. Se todas as pessoas forem professores de filosofia, então todos morrerão de fome.
∴ Toda pessoa que for professor de filosofia morrerá de fome.

k. Toda crença não refutada e de prático valor para a vida das pessoas deve ser tomada como verdade.
A crença na existência de Deus não foi refutada.
∴ Se a crença na existência de Deus é de prático valor para a vida das pessoas então ela deve ser tomada como verdade.

l. Se tudo é material, então tudo é composto de partículas físicas.
Não é verdade que o número $\pi$ é composto de partículas físicas.
∴ Não é verdade que tudo é material.

m. Toda pessoa consistente que pensa que o aborto é normalmente permitido consentirá com a ideia de ter sido abortado em circunstâncias normais.
Ninguém consentiria com a ideia de ter sido abortado em circunstâncias normais.
∴ Nenhuma pessoa consistente pensa que o aborto é normalmente permitido. [Este argumento foi dado por Harry Gensler.]

n. Não devemos fazer a nenhum ser vivo o que não queremos que seja feito a nós mesmos.
∴ Se não desejamos ser enganados, então não devemos enganar os outros.

# Apêndices

# 12
# Metalógica

## 12.1 Lógica e metalógica

Neste capítulo nos dedicaremos à subárea da lógica conhecida como metalógica ou metateoria. Conforme já mencionamos, os diversos teoremas, ou metateoremas para ser mais preciso, e corolários que introduzimos do decorrer dos vários capítulos anteriores pertencem à metalógica. Também podemos falar em metalógica ou metateoria de um sistema lógico específico. Por exemplo, à descrição e ao estudo (o que inclui a demonstração) dos mais importantes metateoremas do cálculo proposicional nós damos o nome de metateoria do cálculo clássico proposicional. De forma semelhante temos a metateoria da semântica da lógica proposicional, a metateoria da lógica proposicional (que obviamente inclui a metateoria de tal cálculo e semântica), a metateoria da lógica de primeira ordem, a metateoria dos cálculos axiomáticos, e assim por diante. Assim, a metalógica seria a área que se dedica ao estudo e demonstração das diversas propriedades-chave de sistemas lógicos ou de classes de sistemas lógicos.

A fim de ilustrarmos em que consiste a prática da metalógica, considere a definição das noções de cálculo axiomático e derivação e dedução dadas por nós na seção 5.2. Independentemente de que linguagem, regras admissíveis e axiomas um dado cálculo possa ter, dado o quadro conceitual construído através de nossas definições, sua relação de dedução sempre satisfará no mínimo três propriedades. Primeiro de tudo, em qualquer cálculo, se uma dada fórmula $\alpha$ pertence a um conjunto $\Gamma$, então $\alpha$ é deduzido a partir de $\Gamma$ nesse cálculo. Trata-se do que chamamos no capítulo 2 de a *reflexividade da relação de dedução*.

A despeito da possível trivialidade que tal afirmação possa ter para alguns de nós, a menos que provemos para além de qualquer dúvida que efetivamente o que estabelecemos nas nossas definições implica tal resultado, não poderemos aceitar essa proposição como verdadeira. Em outras palavras, precisamos provar ou demonstar a veracidade do teorema da reflexividade. De fato, a prova das diversas propriedades dos sistemas lógicos enunciadas na forma de metateoremas é uma das tarefas mais importantes da metalógica. Vejamos então como seria a prova desse teorema da reflexidade da relação de dedução:

**TEOREMA 4.1** Seja $C=<L,\Sigma,\Lambda>$ um cálculo axiomático, $\Gamma\subseteq L$ um conjunto de fórmulas e $\alpha\in L$ uma fórmula. Se $\alpha\in\Gamma$, então $\Gamma\vdash\alpha$ em C.

**Prova** Conforme enunciado acima, o teorema da reflexidade nada mais é do que um condicional afirmando que se certas condições antecedentes são satisfeitas, isto é, se $\alpha$ pertence a $\Gamma$, então o consequente do condicional, isto é, que $\alpha$ é deduzido a partir de $\Gamma$, é o caso. Assim, para provarmos a veracidade desse teorema, devemos, supondo nada mais além do que é dito no antecedente ($\alpha\in\Gamma$), mostrar que o consequente ($\Gamma\vdash\alpha$) é o caso. Supondo então que $\alpha$ pertence a $\Gamma$, temos que trivialmente $\Gamma\vdash\alpha$, pois podemos facilmente construir uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$, a saber, a sequência unitária de fórmulas $<\alpha>$. É fácil ver aqui que $<\alpha>$ é, de acordo com a definição 1.13, efetivamente uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$: primeiro, o seu último membro é igual à conclusão do argumento; segundo, todos os seus membros, que na verdade são apenas um, satisfazem no mínimo uma das condições exigidas na mencionada definição, a saber, a condição (a) de que o elemento pertença ao conjunto de premissas ($\alpha\in\Gamma$). **CQD**[71]

Vale à pena observar que, na prova acima, nós não supomos nada além do que foi estabelecido nas definições; agir de outra forma poderia ter comprometido a validade de nossa demonstração.

Uma consequência do teorema 4.1 é que, se dois conjuntos de fórmulas $\Gamma$ e $\Delta$ são tais que $\Delta\subseteq\Gamma$, então $\Gamma\vdash\Delta$. Temos então o seguinte corolário do teorema 4.1:

**COROLÁRIO 4.1** Seja $C=<L,\Sigma,\Lambda>$ um cálculo axiomático e $\Gamma,\Delta\subseteq L$ dois conjuntos de fórmulas. Se $\Delta\subseteq\Gamma$ então $\Gamma\vdash\Delta$ em C.

**Prova** A prova desse corolário é uma aplicação trivial do teorema 4.1. Supondo que $\Delta\subseteq\Gamma$, como todo $\alpha\in\Delta$ é tal que $\alpha\in\Gamma$ (definição 1.15), pelo teorema 4.1 temos que $\Gamma\vdash\alpha$. Mas como isso vale para todo $\alpha\in\Delta$, de acordo com a definição 1.15, temos que $\Gamma\vdash\Delta$. **CQD**

A segunda propriedade geral de cálculos axiomáticos que iremos mencionar aqui é o que chamamos no capítulo 2 de *transitividade* da relação de dedução: se três conjuntos de fórmulas $\Gamma$, $\Delta$ e $\Phi$ são tais que $\Delta$ é deduzido a partir de $\Gamma$ e $\Phi$ é deduzido a partir de $\Delta$,

---

71. Seguindo prática comum, marcaremos o fim de nossas demonstrações de metateoremas ou corolários utilizando a sigla **CQD**, que significa **C**onforme **Q**ueríamos **D**emonstrar.

então $\Phi$ é deduzido a partir de $\Gamma$. Segue abaixo a descrição formal dessa propriedade seguido de sua prova:

**Teorema 4.2** Seja $C=<L,\Sigma,\Lambda>$ um cálculo axiomático e $\Gamma,\Delta,\Phi\subseteq L$ três conjuntos de fórmulas. Se $\Gamma\vdash\Delta$ e $\Delta\vdash\Phi$ em C, então $\Gamma\vdash\Phi$ em C.

**Prova** Novamente temos aqui um condicional. Devemos então, para provarmos esse teorema, supor a veracidade do antecedente e, em seguida, amparados nessa suposição, mostrar que o consequente é o caso. Executando a parte primeira dessa tarefa, suponhamos que $\Delta$ é deduzido a partir de $\Gamma$ e que $\Phi$ é deduzido a partir de $\Delta$. Seja $\Delta=\{\gamma_1,\gamma_2, ...,\gamma_k\}$. Se $\Gamma\vdash\Delta$, de acordo com a definição 1.15 todo $\gamma_i\in\Delta$ é tal que $\Gamma\vdash\gamma_i$. Isso por sua vez nos permite concluir, de acordo com a definição 1.14, que para todo $\gamma_i\in\Delta$ existe uma derivação de $\gamma_i$ a partir de $\Gamma$. Seja $<\gamma_{11},\gamma_{12},...,\gamma_1>$ tal derivação de $\gamma_1$ a partir de $\Gamma$, $<\gamma_{21}, \gamma_{22}, ..., \gamma_2>$ tal derivação de $\gamma_2$ a partir de $\Gamma$, ..., e $<\gamma_{k1},\gamma_{k2}, ...,\gamma_k>$ tal derivação de $\gamma_k$ a partir de $\Gamma$. Como $\Delta\vdash\Phi$, seguindo o mesmo raciocínio, temos que para todo $\phi\in\Phi$ existe uma derivação de $\phi$ a partir de $\Delta$. Seja $\phi\in\Phi$ um membro arbitrário de $\Phi$ e $<\phi_1,\phi_2,...,\phi>$ uma tal derivação de $\phi$ a partir de $\Delta$. A sequência de fórmulas $\vartheta=<\gamma_{11},\gamma_{12},...,\gamma_1,\gamma_{21},\gamma_{22},...,\gamma_2,...,\gamma_{k1},\gamma_{k2},...,\gamma_k,\phi_1,\phi_2,...,\phi>$ então é uma derivação de $\phi$ a partir de $\Gamma$, pois, em primeiro lugar, como as sequências de fórmulas $<\gamma_{11},\gamma_{12},...,\gamma_1>$, $<\gamma_{21},\gamma_{22},...,\gamma_2>$, etc. são derivações a partir de $\Gamma$, temos a garantia de que cada uma das fórmulas $\gamma_{11}, \gamma_{12}, ..., \gamma_1, \gamma_{21}, \gamma_{22}, ..., \gamma_2, ..., \gamma_{k1}, \gamma_{k2}, ..., \gamma_k$ satisfazem no mínimo um dos requerimentos da definição 1.13. Segundo, cada uma das fórmulas $\phi_1, \phi_2, ..., \phi$ satisfaz no mínimo um dos requerimentos da definição 1.13, pois como $<\phi_1,\phi_2,...,\phi>$ é uma derivação de $\phi$ a partir de $\Delta$ e como todos os membros de $\Delta=\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_k\}$ estão presentes em $\vartheta$, o elemento $\phi_i$ que tiver sua presença na derivação original de $\phi$ a partir de $\Delta$ justificada de acordo com o item (a) da definição 1.13 ($\phi_i\in\Delta$) terá sua presença justificada em $\vartheta$ da mesma forma que o seu elemento de $\Delta$ correspondente ($\gamma\in\Delta$ tal que $\gamma\equiv\phi_i$). Finalmente, o último membro de $\vartheta$, a saber $\phi$, é idêntico à conclusão do argumento. Logo, existe uma derivação de $\phi$ a partir de $\Gamma$, o que, de acordo com a definição 1.14, implica que $\Gamma\vdash\phi$. Como supomos inicialmente um membro arbitrário de $\Phi$, temos que isso vale para todo e qualquer $\phi\in\Phi$. Assim, de acordo com a definição 1.15 temos que $\Gamma\vdash\Phi$ em C. **CQD**

O leitor deve ter notado que o teorema acima difere consideravelmente da versão que demos no capítulo 2 para a transitividade da relação de dedução. Sendo construída em termos de relação de dedução entre conjuntos de fórmulas, a formulação acima é, na verdade, mais geral que a originalmente dada naquele capítulo, sendo esta última nada mais do que uma consequência ou corolário desse teorema 4.2. Segue abaixo a descrição formal seguida da prova desta versão original do teorema da transivitidade, antecedida por uma terceira versão que representa um meio termo em termos de generalidade entre o teorema 4.2 e essa versão inicial.

**COROLÁRIO 4.2** Seja $C=<L,\Sigma,\Lambda>$ um cálculo axiomático, $\Gamma,\Delta\subseteq L$ dois conjuntos de fórmulas e $\alpha\in L$ uma fórmula. Se $\Gamma\vdash\Delta$ e $\Delta\vdash\alpha$ em C, então $\Gamma\vdash\alpha$ em C.

**Prova** Como a maioria dos corolários, esse corolário é uma consequência trivial do seu teorema correspondente, isto é, o teorema 4.2. Suponha que $\Gamma\vdash\Delta$ e $\Delta\vdash\alpha$. Como $\Delta\vdash\alpha$, de acordo com a definição 1.15 temos que $\Delta\vdash\{\alpha\}$. Logo, de acordo com o teorema 4.2, temos que $\Gamma\vdash\{\alpha\}$. Mas novamente, de acordo com a definição 1.15, isso implica que $\Gamma\vdash\alpha$. **CQD**

**COROLÁRIO 4.3** Seja $C=<L,\Sigma,\Lambda>$ um cálculo axiomático, $\Gamma\subseteq L$ um conjunto de fórmulas e $\alpha,\beta\in L$ duas fórmulas. Se $\Gamma\vdash\beta$ e $\{\beta\}\vdash\alpha$ em C, então $\Gamma\vdash\alpha$ em C.

**Prova** Como $\{\beta\}$ é obviamente um conjunto, esse corolário é simplesmente uma instância particular do corolário 4.2: supondo que $\Gamma\vdash\beta$ e $\{\beta\}\vdash\alpha$, de acordo com o corolário 4.2 temos que $\Gamma\vdash\alpha$. **CQD**

Um terceiro corolário que podemos obter a partir do teorema 4.2 é uma versão preliminar do teorema da regra derivada que mostramos no capítulo 6[72]: se dois conjuntos de fórmulas $\Gamma$ e $\Delta$ e uma fórmula $\alpha$ são tais que $\Delta$ é deduzido a partir de $\Gamma$ e $\alpha$ é deduzido a partir de $\Gamma$ e $\Delta$, então $\alpha$ é deduzido a partir de $\Gamma$. Além do teorema 4.2 (na forma do corolário 4.2), também utilizamos na prova desse novo corolário o corolário 4.1 do teorema 4.1:

**COROLÁRIO 4.4** Seja $C=<L,\Sigma,\Lambda>$ um cálculo axiomático, $\Gamma,\Delta\subseteq L$ dois conjuntos de fórmulas e $\alpha\in L$ uma fórmula. Se $\Gamma\vdash\Delta$ e $\Gamma\cup\Delta\vdash\alpha$ em C, então $\Gamma\vdash\alpha$ em C.

**Prova** Supondo a veracidade do antecedente desse corolário, isto é, que $\Gamma\vdash\Delta$ e $\Gamma\cup\Delta\vdash\alpha$, nós temos o que segue. Primeiro, de acordo com o corolário 4.1, temos que $\Gamma\vdash\Gamma$. Mas se $\Gamma\vdash\Delta$ e $\Gamma\vdash\Gamma$, então de acordo com a definição 1.15, $\Gamma\vdash\Gamma\cup\Delta$, pois se todo $\alpha\in\Gamma$ e todo $\beta\in\Delta$ são tais que $\Gamma\vdash\alpha$ e $\Gamma\vdash\beta$, então todo $\varphi\in\Gamma\cup\Delta$ é tal que $\Gamma\vdash\varphi$. Mas se $\Gamma\vdash\Gamma\cup\Delta$ e $\Gamma\cup\Delta\vdash\alpha$, então de acordo com o corolário 4.2, temos que $\Gamma\vdash\alpha$. **CQD**

A terceira e última propriedade dos sistemas lógicos que vamos mostrar aqui é o que chamamos no capítulo 2 de *monotonicidade* da relação de dedução ou, em outras palavras, a conservação da relação de inferência entre uma fórmula $\alpha$ e um conjunto de fór-

---

**72.** Que o corolário 4.4 é efetivamente uma versão preliminar do teorema da regra derivada ficará claro quando, na seção 12.3, usarmos tal corolário para provarmos o mencionado teorema.

mulas $\Gamma$ quando adicionamos novas fórmulas à $\Gamma$. Se $\alpha$ é deduzido a partir de $\Gamma$, então $\alpha$ é deduzido também a partir de qualquer conjunto que contenha $\Gamma$. Formalmente nós temos como segue:

**TEOREMA 4.3** Seja $C=<L,\Sigma,\Lambda>$ um cálculo axiomático, $\Gamma,\Delta\subseteq L$ dois conjuntos de fórmulas e $\alpha\in L$ uma fórmula. Se $\Gamma\subseteq\Delta$ e $\Gamma\vdash\alpha$ em C então $\Delta\vdash\alpha$ em C.

**Prova** Seguindo a mesma prática das provas anteriores, para provarmos esse teorema suporemos que $\Gamma\subseteq\Delta$ e $\Gamma\vdash\alpha$ e então mostraremos que disso segue que $\Delta\vdash\alpha$. Fazendo então as mencionadas suposições, temos, de acordo com a definição 1.14, que existe uma derivação $\Omega$ de $\alpha$ a partir de $\Gamma$. Trivialmente então, tal derivação também será uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Delta$, pois como todos os elementos de $\Gamma$ são também elementos de $\Delta$, para todo elemento $\varphi$ de $\Omega$ cuja presença é justificada através do item (a) da definição 1.13 ($\varphi\in\Gamma$), temos que o mesmo item é satisfeito em relação à $\Delta$ ($\varphi\in\Delta$). Logo, de acordo com a definição 1.14, $\Delta\vdash\alpha$. **CQD**

## 12.2 Corolários semânticos e sintáticos

Dando continuidade a nossa introdução à metalógica e à prova de metateoremas, daremos início à prova dos teoremas e corolários que introduzimos e utilizamos nos capítulos 4, 6, 7, 8 e 11. Começaremos, nesta seção, pelos corolários dos capítulos 4, 6 e 7, visto que as provas de tais resultados envolvem um grau menor de dificuldade que as provas dos demais resultados.

No capítulo 4, na definição 1.5, nós definimos uma tautologia como sendo uma fórmula $\alpha$ tal que, para todo modelo M, $M\Vdash\alpha$; e na definição 1.7 nós definimos $\alpha$ como sendo uma consequência lógica de $\Gamma$ se e somente se, para todo modelo M tal que $M\Vdash\Gamma$, $M\Vdash\alpha$. Então no corolário 1.1, nós estabelecemos uma relação importante entre essas duas noções de um sistema semântico: toda tautologia $\alpha$ é tal que $\alpha$ é uma consequência lógica do conjunto vazio, e vice-versa. Obviamente que apenas enunciar tal resultado não é suficiente: nós temos que demonstrar ou provar que o que é dito no corolário 1.1 é realmente o caso; isso que é feito logo a seguir:

**COROLÁRIO 1.1** Seja L uma linguagem lógica, $\Vdash$ uma relação de satisfatibilidade em L, e $\alpha\in L$ uma fórmula. $\alpha$ é uma tautologia se e somente se $\varnothing\vDash\alpha$ (caso no qual escrevemos simplesmente $\vDash\alpha$).

**Prova** O que o corolário 1.1 afirma na verdade são duas proposições condicionais: que, dada uma linguagem L, uma relação de satisfatibilidade em L $\Vdash$ e uma fórmula

$\alpha \in L$, (1) se $\alpha$ é uma tautologia, então $\varnothing \vDash \alpha$, e (2) se $\varnothing \vDash \alpha$, então $\alpha$ é uma tautologia. Assim, para provarmos tal corolário, temos que provar cada uma dessas duas proposições. Comecemos por (1). Novamente, o que temos de fazer é supor que $\alpha$ é uma tautologia e, a partir daí, concluirmos que $\varnothing \vDash \alpha$. Fazendo tal suposição, de acordo com a definição 1.5, temos que para todo modelo M, $M \Vdash \alpha$. Mas de acordo com a definição 1.7, $\varnothing \vDash \alpha$ se e somente se, para todo modelo M tal que $M \Vdash \varnothing$, $M \Vdash \alpha$. Mas quais são esses modelos que satisfazem $\varnothing$ ($M \Vdash \varnothing$)? De acordo com a definição 1.6, item (i), um modelo M satisfaz um conjunto de fórmulas $\Gamma$, em símbolos $M \Vdash \Gamma$, se e somente se, para todo $\beta \in \Gamma$, $M \Vdash \beta$. Mas veja que $\varnothing$ não contém membro algum. Qual seriam então os modelos que satisfariam $\varnothing$? Isso pode ser respondido quando lemos tal item da definição 1.6 de uma maneira equivalente, mas um pouco diferente: $M \nVdash \Gamma$, se e somente se, para algum $\beta \in \Gamma$, $M \nVdash \beta$. Vendo dessa forma, um modelo M não satisfaz $\varnothing$ ($M \nVdash \varnothing$) quando há um elemento $\beta \in \varnothing$ tal que $M \nvDash \beta$. Mas trivialmente $\varnothing$ não contém elemento algum; consequentemente não há modelo que não o satisfaça, o que é o mesmo que dizer que todos os modelos satisfazem o conjunto vazio. Assim temos que o conjunto vazio é tal que, para todo e qualquer modelo M, $M \Vdash \varnothing$. Assim, reescrevendo a definição 1.7 aplicada ao conjunto vazio e já incorporando essa nossa conclusão, temos que $\varnothing \vDash \alpha$ se e somente se, para todo modelo M, $M \Vdash \alpha$. Mas de acordo com a nossa suposição, sendo $\alpha$ uma tautologia, $\alpha$ é tal que para todo modelo M, $M \Vdash \alpha$. Logo $\alpha$ também é tal que $\varnothing \vDash \alpha$, ou seja, $\alpha$ é uma consequência lógica de $\varnothing$. Assim provamos (1). Dado isso, a prova de (2) é trivial. Supondo que $\varnothing \vDash \alpha$, de acordo com o exposto acima temos que para todo modelo M, $M \Vdash \alpha$. Disso segue, de acordo com a definição 1.5, que $\alpha$ é uma tautologia. **CQD**

A prova do corolário 1.2 segue a mesma lógica usada na prova acima para reescrever o item (i) da definição 1.6: na definição 1.6 temos explicitado um caso positivo, a saber, as condições nas quais M satisfaz $\Gamma$; mas como, por conta do uso da expressão "se e somente se", tal definição exaure todas as possibilidades nas quais M satisfaz $\Gamma$, está automaticamente presente na definição também a especificação do caso negativo, a saber, as condições nas quais M não satisfaz $\Gamma$, que obviamente consistem na não satisfação das condições para o caso positivo (se não é verdade que para todo $\beta \in \Gamma$, $M \Vdash \beta$, então é por que há no mínimo um $\beta \in \Gamma$ tal que $M \nVdash \beta$, e vice-versa). A maneira como tal raciocínio é aplicado ao corolário 1.2, que é bastante simples, é exibida logo abaixo.

**COROLÁRIO 1.2** Seja M um modelo, $p \in P$ um símbolo proposicional qualquer e $\alpha,\beta \in L_P$ duas fórmulas quaisquer.

(i) $M \nVdash p$ sss $M(p)=F$;

(ii) $M \Vdash\!\!\!\!/ \neg\alpha$ sss $M \Vdash \alpha$;

(iii) $M \Vdash\!\!\!\!/ \alpha\wedge\beta$ sss $M \Vdash\!\!\!\!/ \alpha$ ou $M \Vdash\!\!\!\!/ \beta$;

(iv) $M \Vdash\!\!\!\!/ \alpha\vee\beta$ sss $M \Vdash\!\!\!\!/ \alpha$ e $M \Vdash\!\!\!\!/ \beta$;

(v) $M \Vdash\!\!\!\!/ \alpha\rightarrow\beta$ sss $M \Vdash \alpha$ e $M \Vdash\!\!\!\!/ \beta$.

**Prova** A definição 1.10, da qual o resultado acima é um corolário, contém cinco itens estabelecendo definições positivas semelhantes aos da definição 1.6. Assim, para construirmos os seus respectivos casos negativos, que é o conteúdo do corolário 1.2, basta considerarmos a não satisfação de suas respectivas condições. Por exemplo, o item (v) da definição 1.10 diz que $M \Vdash \alpha\rightarrow\beta$ se e somente se $M \Vdash\!\!\!\!/ \alpha$ ou $M \Vdash \beta$. De posse dessa informação, sabemos de forma trivial em que condições $M \Vdash\!\!\!\!/ \alpha\rightarrow\beta$: quando não é o caso que $M \Vdash\!\!\!\!/ \alpha$ ou $M \Vdash \beta$, ou seja, quando $M \Vdash \alpha$ e $M \Vdash\!\!\!\!/ \beta$. Assim $M \Vdash\!\!\!\!/ \alpha\rightarrow\beta$ sss $M \Vdash \beta$ e $M \Vdash\!\!\!\!/ \beta$. Procedendo dessa forma provamos facilmente os demais itens do corolário, coisa que, dada sua trivialidade, podemos nos abster de detalhar. **CQD**

O leitor talvez tenha estranhado a nossa omissão, na demonstração acima, em relação aos itens (i)-(iv) do corolário 1.2. Tal fato, no entanto, é plenamente justificável, conforme mencionamos no próprio texto, pela demonstração que fornecemos do item (v) do corolário e consequente trivialidade em relação à prova dos demais itens. Adotaremos procedimento semelhante sempre que a demonstração do resultado em questão não envolver maiores dificuldades em relação à sua compreensão, seja porque o raciocínio a ser usado na sua prova já foi usado em outra demonstração ou em virtude da trivialidade mesma intrínseca à sua demonstração[73]. Consideremos agora os corolários 2.1 e 2.2:

**COROLÁRIO 2.1** $C_P$ é uma extensão conservativa de $C_\rightarrow$.

**Prova** De acordo com a definição 2.1, o cálculo C'' é uma extensão conservativa de outro cálculo C' se eles compartilham a mesma linguagem L e o mesmo conjunto de inferências admissíveis $\Sigma$ e para todo $\Gamma\subseteq L$ e todo $\alpha\in L$, se $\Gamma\vdash\alpha$ em C' então $\Gamma\vdash\alpha$ em C''. Assim, dado que dois cálculos C' e C'' satisfazem esse primeiro requisito, tudo o que temos que fazer para provar que C'' é uma extensão conservativa de C' é, supondo que $\Gamma\vdash\alpha$ em C', para um $\Gamma$ e $\alpha$ quaisquer, provar que $\Gamma\vdash\alpha$ em C''. Veja que enquanto o cálculo proposicional $C_P$ é definido como sendo $<L_P,\Sigma_{MP},\Lambda_{P1\text{-}P11}>$ (definição 1.21), o cálculo da implicação material $C_\rightarrow$ é definido como sendo a tripla $<L_P,\Sigma_{MP},\Lambda_{P1\text{-}P2}>$. Assim, eles efetivamente compartilham a mesma linguagem lógica e o mesmo conjunto de inferências admissíveis. Agora suponha que, para um dado conjunto de fórmulas $\Gamma$ e uma dada

73. Poderíamos, por exemplo, sem prejuízo nenhum para a clareza e rigor de nossa exposição, ter omitido as provas dos corolários da seção passada.

fórmula $\alpha$ arbitrários, $\Gamma\vdash\alpha$ em $C_{\rightarrow}$. De acordo com a definição 1.14, se $\Gamma\vdash\alpha$ em $C_{\rightarrow}$ então existe uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$ em $C_{\rightarrow}$. Por sua vez, a definição 1.13 nos diz que se há uma derivação $<\beta_1,...,\beta_n>$ de $\alpha$ a partir de $\Gamma$ em $C_{\rightarrow}$, então cada $\beta_i$ é tal que (a) $\beta_i\in\Gamma$, (b) $\beta_i\in\Lambda$ ou (c) existe uma inferência admissível $\beta j_1,...,\beta j_n$ / $\beta_i\in\Sigma$ tal que $j_1, ..., j_n<i$. Veja, no entanto, que como todos os axiomas e inferências admissíveis de $C_{\rightarrow}$ também são axiomas e inferências admissíveis de $C_P$, $<\beta_1,...,\beta_n>$ também é, de acordo com a definição 1.13, uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$ em $C_P$. Assim, de acordo com a definição 1.14, temos que $\Gamma\vdash\alpha$ em $C_P$, o que implica que $C_P$ é uma extensão conservativa de $C_{\rightarrow}$. **CQD**

Apesar da elaboração textual da demonstração acima, uma breve inspeção nas definições envolvidas e no fato de o conjunto de axiomas de $C_{\rightarrow}$ estar contido no conjunto de axiomas de $C_P$ é suficiente para nos convencermos da veracidade do corolário 2.1. Mais trivial ainda é a prova do corolário 2.2.

**COROLÁRIO 2.2** As relações mencionadas no teorema 2.1 também são válidas em $C_P$.

**Prova** Como $C_P$ é uma extensão conservativa de $C_{\rightarrow}$, para todo $\Gamma$ e $\alpha$, se $\Gamma\vdash\alpha$ em $C_{\rightarrow}$ então $\Gamma\vdash\alpha$ em $C_P$. Dessa forma, trivialmente todas as relações exibidas no teorema 2.1, que dizem respeito à $C_{\rightarrow}$, também são válidas em $C_P$. **CQD**

Com exceção do corolário 2.3, as provas dos demais corolários dos capítulos 6 e 7 utilizam o mesmo raciocínio e apresentam o mesmo grau de trivialidade das demonstrações dos corolários 2.1 e 2.2 acima. Assim não nos daremos ao trabalho de exibir suas provas. A prova do corolário 2.3 é dada na seção que segue.

## 12.3 Teoremas da dedução, da regra derivada e da redução ao absurdo

Nesta seção provaremos os três meta-resultados fundamentais exibidos nos capítulos 6, 7, 8 e 11: o teorema da dedução, o teorema da regra derivada e os teoremas da redução ao absurdo. Comecemos pelo teorema da dedução:

**TEOREMA 2.2** Seja $C=<L,\Sigma,\Lambda>$ uma extensão conservativa de $C_{\rightarrow}$, $\Gamma\subseteq L$ um conjunto de fórmulas e $\alpha,\beta\in L$ duas fórmulas. Se $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ em C, então $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta$ em C.

**Prova** Seguindo nossa prática padrão, para provarmos esse teorema nós temos que, supondo que $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ em C, provar que $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta$ em C. Fazendo então tal suposição, temos que, pela definição 1.14, há uma derivação $\Omega$ de $\alpha$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$ em C. Assim, para provarmos a partir disso que $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta$, basta que, de acordo com a mesma definição, consigamos de alguma forma transformar $\Omega$ em uma derivação de $\alpha \rightarrow \beta$ a partir de $\Gamma$. Nós faremos isso usando uma das mais tradicionais técnicas de prova matemática: a chamada prova por indução[74]. Mais especificamente, faremos uma prova por indução pelo tamanho da derivação. Provaremos primeiro que o resultado vale para o caso mais simples, isto é, para casos com derivação de tamanho 1. Após isso, provaremos que se o resultado vale para derivações de tamanho menor que *n*, sendo *n* um número natural arbitrário maior que zero, então ele vale para derivações de tamanho *n*. Juntando essas duas coisas, temos então que, como o resultado vale para derivações de tamanho 1, ele vale também para derivações de tamanho 2 e, como vale para derivações de tamanho 2, vale também para derivações de tamanho 3 e, como vale para derivações de tamanho 3, vale também para derivações de tamanho 4, e assim por diante, o que significa obviamente que o resultado vale para derivações de qualquer tamanho. Comecemos então pelo caso mais simples, supondo que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ e que há uma derivação $\Omega$ de $\beta$ a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ de tamanho 1. Nesse caso, pela definição 1.13, a derivação $\Omega = \{\beta\}$ é tal que ou (1.a) $\beta$ é um axioma ou $\beta$ é uma das premissas, caso no qual ou (1.b) $\beta \in \Gamma$ ou (1.c) $\beta \equiv \alpha$. Em cada um desses três casos, podemos construir uma derivação de $\alpha \rightarrow \beta$ a partir de $\Gamma$ como segue:

(1.a) $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\beta$ | axioma |
| 2. | $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ | P1 |
| 3. | $\alpha \rightarrow \beta$ | MP 1,2 |

(1.b) $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\beta$ | premissa |
| 2. | $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ | P1 |
| 3. | $\alpha \rightarrow \beta$ | MP 1,2 |

(1.c) $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\beta \rightarrow \beta$ | I3 |

Dessa forma, provamos que, para o caso mais simples de derivações de tamanho 1, se $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ então $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Agora nós iremos supor que se $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ e há uma derivação de tamanho menor que *n* de $\beta$ a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$, então $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, suposição esta que damos o nome de *hipótese de indução*. Suponhamos agora que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ e que há uma derivação $\Omega = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1}, \beta\}$ de tamanho *n* de $\beta$ a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$. Conside-

74. Veja que apesar do uso da palavra "indução", tal método não tem nada a ver com a noção de inferência indutiva introduzida no capítulo 1; o que temos aqui é nada mais do que a mesma palavra – indução – sendo usada com dois sentidos diferentes.

rando isso, então pela definição 1.13, $\beta$ é tal que ou (2.a) $\beta$ é um axioma, ou $\beta$ é uma das premissas, caso no qual ou (2.b) $\beta\in\Gamma$ ou (2.c) $\beta\equiv\alpha$, ou $\beta$ é obtida via MP a partir de dois membros anteriores da derivação, o que significa que (2.d) existem $\beta_k$ e $\beta_j$ ($k,j<n$) tal que $\beta_j\equiv\beta_k\rightarrow\beta$. Nossa tarefa agora é mostrar que, para cada uma dessas possibilidades, podemos construir uma derivação de $\alpha\rightarrow\beta$ a partir de $\Gamma$. Para os casos (2.a), (2.b) e (2.c), o procedimento é idêntico, respectivamente, ao que fizemos acima para os casos (1.a), (1.b) e (1.c). Resta-nos então considerar o caso (2.d). Como $\beta_j$ e $\beta_k$ são membros de $\Omega$, que é uma derivação de tamanho *n* de $\beta$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$, então $\beta_k$ e $\beta_j$ são tais que $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta_k$ e $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta_j$. Mas como *k* e *j* são menores que *n*, temos que a derivação de $\beta_k$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$ e a derivação de $\beta_j$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$ são de tamanho menor que *n*. De acordo então com a hipótese de indução, temos que $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta_k$ e $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta_j$, que por sua vez é o mesmo que $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow(\beta_k\rightarrow\beta)$. Assim temos que há uma derivação $\Omega_k$ de $\alpha\rightarrow\beta_k$ a partir de $\Gamma$, e uma derivação $\Omega_j$ de $\alpha\rightarrow(\beta_k\rightarrow\beta)$ a partir de $\Gamma$. A partir dessas duas derivações, podemos então construir uma derivação de $\alpha\rightarrow\beta$ a partir de $\Gamma$:

(2.d) $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta$

| | | |
|---|---|---|
| | ... | <cópia dos membros de $\Omega_k$> |
| k. | $\alpha\rightarrow\beta_k$ | <justificativa de $\alpha\rightarrow\beta_k$ em $\Omega_k$> |
| | ... | <cópia dos membros de $\Omega_j$> |
| k+j. | $\alpha\rightarrow(\beta_k\rightarrow\beta)$ | <justificativa de $\alpha\rightarrow\beta_j$ em $\Omega_j$> |
| k+j+1. | $(\alpha\rightarrow(\beta_k\rightarrow\beta))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta_k)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta))$ | P2 |
| k+j+2. | $(\alpha\rightarrow\beta_k)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$ | MP k+j,k+j+1 |
| k+j+3. | $\alpha\rightarrow\beta$ | MP k,k+j+2 |

Assim provamos que se $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ em C, então $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta$ em C. **CQD**

É interessante observar que há uma versão semântica para o teorema da dedução, a menção do qual nós aproveitaremos para ilustrar como o método de prova por redução ao absurdo pode ser usado na prova de metateoremas:

**TEOREMA 4.4** Seja $\Gamma\subseteq L_p$ um conjunto de fórmulas, $\alpha,\beta\in L_p$ duas fórmulas e $\vDash\alpha$ relação de consequência lógica da lógica clássica proposicional. Σε $\Gamma\cup\{\alpha\}\vDash\beta$ então $\Gamma\vDash\alpha\rightarrow\beta$.

**Prova** Queremos aqui provar que se $\beta$ é uma consequência lógica de $\Gamma\cup\{\alpha\}$ então $\alpha\rightarrow\beta$ é uma consequência lógica de $\Gamma$. Conforme adiantamos, faremos isso utilizando a ideia já mencionada por nós diversas vezes da prova por redução ao absurdo. A ideia aqui é supormos que $\Gamma\cup\{\alpha\}\vDash\beta$ mas que $\Gamma\nvDash\alpha\rightarrow\beta$ e daí chegarmos a alguma contradição, o que nos permitirá concluir que $\alpha\rightarrow\beta$ é efetivamente uma consequência lógica de $\Gamma$. Fazendo então nossa primeira suposição, temos que, de acordo com a definição 1.7, para todo e qualquer modelo M tal que $M\Vdash\Gamma\cup\{\alpha\}$, $M\Vdash\beta$. De acordo com a mesma definição, temos para a segunda suposição que existe um modelo M tal que $M\Vdash\Gamma$ e $M\nVdash\alpha\rightarrow\beta$. De acordo com a definição 1.10, como $M\nVdash\alpha\rightarrow\beta$, então temos que $M\Vdash\alpha$ e $M\nVdash\beta$. Mas se M satisfaz $\Gamma$ e $\alpha$ ($M\Vdash\Gamma$ e $M\Vdash\alpha$) então M trivialmente satisfaz o conjunto $\Gamma\cup\{\alpha\}$ ($M\Vdash\Gamma\cup\{\alpha\}$). Assim temos que existe um modelo M tal que $M\Vdash\Gamma\cup\{\alpha\}$ e $M\nVdash\beta$. Mas isso contradiz a nossa suposição inicial de acordo com a qual para todo e qualquer modelo M tal que $M\Vdash\Gamma\cup\{\alpha\}$, $M\Vdash\beta$. Assim temos que não há um modelo M tal que $M\Vdash\Gamma$ e $M\nVdash\alpha\rightarrow\beta$. Logo, para todo e qualquer modelo M tal que $M\Vdash\Gamma$, $M\Vdash\alpha\rightarrow\beta$. Portanto, de acordo com a definição 1.7, $\Gamma\vDash\alpha\rightarrow\beta$. **CQD**

Agora podemos ir para a prova do teorema da regra derivada, a qual é seguida da prova do corolário 2.3:

**TEOREMA 2.5** Seja $C=<L,\Sigma,\Lambda>$ um cálculo axiomático, $\Gamma,\Delta_1, ...,\Delta_n\subseteq L$ $n+1$ conjuntos de fórmulas e $\alpha,\beta_1,...,\beta_n\in L$ $n+1$ fórmulas. Se, no cálculo C, $\Delta_1\vdash\beta_1,..., \Delta_n\vdash\beta_n$ e $\Gamma\vdash\Delta_1,..., \Gamma\vdash\Delta_n$ e $\Gamma\cup\{\beta_1,...,\beta_n\}\vdash\alpha$, então $\Gamma\vdash\alpha$ em C.

**Prova** Diferentemente do teorema da dedução, que se aplica apenas a extensões conservativas do cálculo da implicação material, o teorema da regra derivada é um resultado que se aplica a todo e qualquer cálculo axiomático. Basicamente ele diz que, dado um cálculo axiomático $C=<L,\Sigma,\Lambda>$, n+1 conjuntos de fórmulas $\Gamma,\Delta_1, ...,\Delta_n\subseteq L$ e n+1 fórmulas $\alpha,\beta_1,...,\beta_n\in L$, se $\Delta_1\vdash\beta_1,..., \Delta_n\vdash\beta_n$ e $\Gamma\vdash\Delta_1,..., \Gamma\vdash\Delta_n$ e $\Gamma\cup\{\beta_1,...,\beta_n\}\vdash\alpha$, então $\Gamma\vdash\alpha$. Assim, para provarmos tal teorema, tudo o que devemos fazer é, supondo que $\Delta_1\vdash\beta_1,..., \Delta_n\vdash\beta_n$, $\Gamma\vdash\Delta_1,..., \Gamma\vdash\Delta_n$ e $\Gamma\cup\{\beta_1,...,\beta_n\}\vdash\alpha$, mostrar que $\Gamma\vdash\alpha$. Fazendo então tal suposição, temos primeiramente que, como $\Gamma\vdash\Delta_1,..., \Gamma\vdash\Delta_n$, $\Gamma\vdash\Delta_1\cup...\cup\Delta_n$ (definição 1.15). Segundo, como $\Delta_1\vdash\beta_1,..., \Delta_n\vdash\beta_n$, temos que $\Delta_1\cup...\cup\Delta_n\vdash\{\beta_1,...,\beta_n\}$. Juntando essas duas coisas, ou seja, que $\Gamma\vdash\Delta_1\cup...\cup\Delta_n$ e que $\Delta_1\cup...\cup\Delta_n\vdash\{\beta_1,...,\beta_n\}$, de acordo com o teorema 4.2, nós temos que $\Gamma\vdash\{\beta_1,...,\beta_n\}$. Finalmente, como $\Gamma\vdash\{\beta_1,...,\beta_n\}$ e como $\Gamma\cup\{\beta_1,...,\beta_n\}\vdash\alpha$, de acordo com o corolário 4.4 nós temos que $\Gamma\vdash\alpha$ em C. **CQD**

**COROLÁRIO 2.3** Seja $C=<L,\Sigma,\Lambda>$ um cálculo axiomático, $\Gamma\subseteq L$ um conjunto de fórmulas e $\alpha,\beta_1,...,\beta_n\in L$ $n+1$ fórmulas. Se, no cálculo C, $\vdash\beta_1,..., \vdash\beta_n$ e $\Gamma\cup\{\beta_1,..., \beta_n\}\vdash\alpha$, então $\Gamma\vdash\alpha$ em C.

**Prova** O colorolário 2.3, conforme observamos no capítulo 6, é nada mais do que um caso particular do teorema 2.5. De acordo com o seu antecendente, $\varnothing\vdash\beta_1,...,$

$\varnothing\vdash\beta_n$ e $\Gamma\cup\{\beta_1,..., \beta_n\}\vdash\alpha$. No entanto, conforme observado no capítulo 5, de acordo com a definição 1.15, $\Delta\vdash\varnothing$ para todo e qualquer conjunto $\Delta$; em particular temos que $\Gamma\vdash\varnothing$. Assim temos que $\varnothing\vdash\beta_1$,..., $\varnothing\vdash\beta_n$ e $\Gamma\vdash\varnothing$ e $\Gamma\cup\{\beta_1,...,\beta_n\}\vdash\alpha$. Logo, de acordo com o teorema 2.5, temos que $\Gamma\vdash\alpha$ em C. **CQD**

Para finalizar os teoremas da lógica proposicional, temos abaixo a prova dos dois teoremas de redução ao absurdo:

**TEOREMA 2.12** Seja $C=\langle L,\Sigma,\Lambda\rangle$ uma extensão conservativa de $C_{\neg m-}$, $\Gamma\subseteq L$ um conjunto de fórmulas e $\alpha,\beta\in L$ duas fórmulas. Se $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ e $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\neg\beta$, então $\Gamma\vdash\neg\alpha$ em C.

**Prova** Nesse teorema, que vale apenas para extensões conservativas do cálculo fraco da negação minimal, é afirmado que se $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ e $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\neg\beta$, então $\Gamma\vdash\neg\alpha$. Assim, o que temos que fazer para prová-lo é, supondo que $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ e $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\neg\beta$, mostrar que $\Gamma\vdash\neg\alpha$. Fazendo então tal suposição, temos que há uma deriação $\Omega_1$ de $\beta$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$ e uma derivação $\Omega_2$ de $\neg\beta$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$. Seja *n* seja o número de elementos da derivação $\Omega_1$ e *m* o número de elementos de $\Omega_2$. Dessa forma, podemos a partir de $\Omega_1$ e $\Omega_2$ construir uma derivação de $\neg\alpha$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$ como segue:

| | | |
|---|---|---|
| | ... | <cópia dos membros de $\Omega_1$> |
| n. | $\beta$ | <justificativa de $\beta$ em $\Omega_1$> |
| | ... | <cópia dos membros de $\Omega_2$> |
| n+m. | $\neg\beta$ | <justificativa de $\neg\beta$ em $\Omega_2$> |
| n+m+1. | $\beta\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$ | P1 |
| n+m+2. | $\alpha\rightarrow\beta$ | MP n,n+m+1 |
| n+m+3. | $\neg\beta\rightarrow(\alpha\rightarrow\neg\beta)$ | P1 |
| n+m+4. | $\alpha\rightarrow\neg\beta$ | MP n+m,n+m+3 |
| n+m+5. | $(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\neg\alpha)$ | P9 |
| n+m+6. | $(\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\neg\alpha$ | MP n+m+2,n+m+5 |
| n+m+7. | $\neg\alpha$ | MP n+m+4,n+m+6 |

Assim temos que $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\neg\alpha$. Mas de acordo com o teorema da dedução, nós temos que $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\neg\alpha$. Dessa forma temos que existe uma derivação $\Omega_3$ de $\alpha\rightarrow\neg\alpha$ a partir de $\Gamma$. Semelhantemente a como fizemos acima, e chamando de *k* o número de elementos de $\Omega_3$, é possível construir a partir de $\Omega_3$ uma derivação de $\neg\alpha$ a partir de $\Gamma$:

| | | |
|---|---|---|
| | ... | <cópia dos membros de $\Omega_3$> |
| k. | $\alpha\rightarrow\neg\alpha$ | <justificativa de $\alpha\rightarrow\neg\alpha$ em $\Omega_3$> |

k+1. $\alpha\rightarrow\alpha$ I3

k+2. $(\alpha\rightarrow\alpha)\rightarrow((\alpha\rightarrow\neg\alpha)\rightarrow\neg\alpha)$ P9

k+3. $(\alpha\rightarrow\neg\alpha)\rightarrow\neg\alpha$ MP k+1,k+2

k+4. $\neg\alpha$ MP k,k+3

Assim temos que $\Gamma\vdash\neg\alpha$ em C. **CQD**

**TEOREMA 2.17** Seja $\Gamma\subseteq L_p$ um conjunto de fórmulas e $\alpha,\beta\in L_p$ duas fórmulas. Se $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\vdash\beta$ e $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\vdash\neg\beta$ em $C_p$ então $\Gamma\vdash\alpha$ em $C_p$.

**Prova** Como seria de se esperar, a prova do teorema 2.17 é bastante semelhante à prova do teorema 2.12. Na verdade, nós podemos fazer uso de tal teorema para provar o teorema 2.17, visto que o teorema 2.17 se aplica ao cálculo clássico proposicional, que é uma extensão conservativa do cálculo fraco da negação minimal. Supondo que $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\vdash\beta$ e $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\vdash\neg\beta$, temos então, de acordo com o teorema 2.12, que $\Gamma\vdash\neg\neg\alpha$, o que significa que há uma derivação $\Omega$ de $\neg\neg\alpha$ a partir de $\Gamma$. Seja *n* o tamanho dessa derivação. Podemos então facilmente, a partir dessa derivação, construir uma derivação de $\alpha$ a partir de $\Gamma$:

… <cópia dos membros de $\Omega$>

n. $\neg\neg\alpha$ <justificativa de $\neg\neg\alpha$ em $\Omega$>

n+1. $\neg\neg\alpha\leftrightarrow\alpha$ Nc1

n+2. $\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha$ C1 n+1

n+3. $\alpha$ MP n,n+3

Portanto, temos que $\Gamma\vdash\alpha$. **CQD**

No que se refere aos teoremas do cálculo de primeira ordem, temos primeiramente que as provas dos teoremas da redução ao absurdo (teoremas 3.1 e 3.2) são idênticas, respectivamente, às provas dos teoremas 2.12 e 2.17 que demos na seção anterior. Apenas chamamos atenção para o uso do teorema da dedução na prova do teorema 2.12. Como sabemos, no cálculo de primeira ordem, o teorema da dedução tem uma restrição: para que possamos concluir $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$, deve existir uma derivação de $\beta$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$ que seja G-livre com respeito à $\alpha$. No entanto, como veremos na prova desse teorema, a ser exibida logo abaixo, tal restrição só se aplica nos casos em que $\beta$ é da forma $\forall x\varphi$, o que não pode ser o caso no uso que faremos de tal teorema na prova do teorema 3.1, visto que se trata na verdade de uma fórmula do tipo $\neg\varphi$. Assim, nos absteremos de exibir as provas dos teoremas 3.1 e 3.2. Segue abaixo as provas dos teoremas 3.3 e 3.4:

**TEOREMA 3.3** Seja $\Gamma\subseteq L_1$ um conjunto de fórmulas e $\alpha,\beta\in L_1$ duas fórmulas. Se $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$, em que existe uma derivação de $\beta$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$ que seja G-livre com respeito à $\alpha$, então $\Gamma\vdash\rightarrow\beta$.

**Prova** A prova desse teorema segue o mesmo raciocínio usado na prova do teorema 2.2. A partir da suposição de que $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ e que existe uma derivação de $\beta$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$ que seja G-livre com respeito à $\alpha$, temos que provar que $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta$. Fazendo tal suposição, temos, de acordo com a definição 1.14, que há uma derivação $\Omega$ de $\alpha$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$ em C. Assim, para provarmos o teorema 3.3, basta que transformemos $\Omega$ em uma derivação de $\alpha\rightarrow\beta$ a partir de $\Gamma$. Novamente aqui nós teremos que fazer uma prova por indução pelo tamanho da derivação. No que se refere ao caso mais simples, ou seja, ao caso em que $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ e que existe uma derivação de $\beta$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$ de tamanho 1 que seja G-livre com respeito à $\alpha$, a prova de que existe uma derivação de derivação de $\alpha\rightarrow\beta$ a partir de $\Gamma$ é idêntica ao respectivo caso da prova do teorema 2.2; assim nos absteremos de exibi-la. Dessa forma então, temos provado que, para o caso mais simples de derivações de tamanho 1, se $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ e existe uma derivação de $\beta$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$ que seja G-livre com respeito à $\alpha$, então $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta$. Façamos agora a nossa hipótese de indução: suponhamos que se $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ e há uma derivação de $\beta$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$ de tamanho menor que *n* que seja G-livre com respeito à $\alpha$, então $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta$. Suponhamos em adição a isso que $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ e que há uma derivação $\Omega=<\beta_1,\beta_2,...,\beta_{n-1},\beta>$ de tamanho *n* de $\beta$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$ que seja G-livre com respeito à $\alpha$. Considerando isso, pela definição 1.13, $\beta$ é tal que ou (a) $\beta$ é um axioma, ou $\beta$ é uma das premissas, caso no qual ou (b) $\beta\in\Gamma$ ou (c) $\beta\equiv\alpha$, ou $\beta$ é obtida via MP a partir de dois membros anteriores da derivação, o que significa que (d) existem $\beta_k$ e $\beta_j$ (k,j<n) tal que $\beta_j\equiv\beta_k\rightarrow\beta$, ou $\beta$ é obtida via G a partir de um membro anterior da derivação, o que significa que (e) existe $\beta_j$ (j<n) tal que $\beta\equiv\forall x\beta_j$. Nossa tarefa então é mostrar que, para cada uma dessas possibilidades, podemos construir uma derivação de $\alpha\rightarrow\beta$ a partir de $\Gamma$. Para os casos (a), (b) e (c), o procedimento de prova é idêntico à prova do caso mais simples de derivação de tamanho 1. Para o caso (d), a prova de que podemos construir uma derivação de $\alpha\rightarrow\beta$ a partir de $\Gamma$ é idêntica à prova do caso (2.d) do teorema 2.2. Resta-nos então considerar o caso (e). Repetindo, em tal caso $\beta$ é obtida via G a partir de um membro anterior da derivação $\Omega$, significando então que existe $\beta_j\in\Omega$ (j<n) tal que $\beta\equiv\forall x\beta_j$. Aqui consideraremos as duas possibilidades da posição de $\beta_j$ em relação à $\alpha$ em $\Omega$. A primeira é que $\alpha$ não aparece na derivação antes que $\beta_j$. Isso significa que se existir l n tal que $\alpha\equiv\beta_l$, então j<l. Outra consequência disso é que $\Gamma\vdash\beta_j$, pois a sequência de fórmulas $\Omega_j=<\beta_1,\beta_2,...,\beta_j>$, que não contém $\alpha$, é uma derivação de $\beta_j$ a partir de $\Gamma$. Temos então que $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\forall x\beta_j$, ou equivalentemente, que $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta$, pois $\Omega_j$ pode ser estendida de forma a obtermos a seguinte derivação de $\alpha\rightarrow\forall x\beta_j$ a partir de $\Gamma$:

| | | |
|---|---|---|
| | ... | <cópia dos membros de $\Omega_j$> |
| j. | $\beta_j$ | <justificativa de $\beta_j$ em $\Omega_j$> |
| j+1. | $\forall x\beta_j$ | G j |
| j+2. | $\forall x\beta_j\to(\alpha\to\forall x\beta_j)$ | P1 |
| j+3. | $\alpha\to\forall x\beta_j$ | MP j+1,j+2 |

A segunda possibilidade é que $\alpha$ apareça antes de $\beta_j$ em $\Omega$, ou seja, que $\Omega=<\beta_1,\beta_2,...,\beta_i,...,\beta_j,...,\beta_{n-1},\beta>$, em que $\beta_i\equiv\alpha$ e i<j. Mas como $\beta\equiv\forall x\beta_j$ e i<j, então *x* não é livre em $\alpha$, pois $\Omega$ é G-livre com respeito à $\alpha$. Mas como $\Omega_j=<\beta_1,\beta_2,...,\beta_j>$ é obviamente uma derivação de $\beta_j$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$, então temos que $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta_j$. Como $\Omega$ é G-livre com respeito à $\alpha$, temos então que $\Omega_j$ também é G-livre com respeito à $\alpha$. Assim, como $\Omega_j$ é uma derivação de tamanho menor que *n*, de acordo com a nossa hipótese de indução, temos que $\Gamma\vdash\alpha\to\beta_j$. Chamando essa derivação de $\Omega_k$, onde *k* é o tamanho de $\Omega_k$, podemos estender $\Omega_k$ de forma a obtermos uma derivação de $\alpha\to\beta$ a partir de $\Gamma$:

| | | |
|---|---|---|
| | ... | <cópia dos membros de $\Omega_k$> |
| k. | $\alpha\to\beta_j$ | <justificativa de $\alpha\to\beta_j$ em $\Omega_k$> |
| k+1. | $\forall x(\alpha\to\beta_j)$ | G k |
| k+2. | $\forall x(\alpha\to\beta_j)\to(\alpha\to\forall x\beta_j)$ | P13 |
| k+3. | $\alpha\to\forall x\beta_j$ | MP k+1,k+2 |

Repare que pudemos usar o axioma P13 em k+2 pois, como concluímos acima, *x* não é livre em $\alpha$. Assim temos que $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$. **CQD**

**Teorema 3.4** Seja $\Gamma\subseteq L_1$ um conjunto de fórmulas e $\alpha,\beta\in L_1$ duas fórmulas. Se $\Gamma\cup\{\alpha_1,...,\alpha_n\}\vdash\beta$, em que existe uma derivação de $\beta$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ que seja G-livre com respeito à $\alpha_1$, ... e $\alpha_n$, então $\Gamma\vdash(\alpha_1\to(\alpha_2\to(...\to(\alpha_n\to\beta)...)))$.

**Prova** A prova desse teorema segue do fato óbvio de, no caso de $\Gamma\cup\{\alpha_1,...,\alpha_n\}\vdash\beta$ e existir uma derivação de $\beta$ a partir de $\Gamma\cup\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ que seja G-livre com respeito à $\alpha_1$, ... e $\alpha_n$, podermos usar o teorema 3.3 *n* vezes para concluirmos $\Gamma\vdash(\alpha_1\to(\alpha_2\to(...\to(\alpha_n\to\beta)...)))$. **CQD**

## 12.4 Teoremas da corretude e completude

Conforme dito no capítulo 2 e ilustrado no decorrer dos demais capítulos, a relação de inferência de um sistema lógico pode ser definida de duas maneiras distintas: sintaticamente e semanticamente. Decidimos representar o primeiro tipo de formulação da relação de inferência através do símbolo $\vdash$, e o segundo através do símbolo $\vDash$. Um sistema lógico então seria definido como uma tripla <L,$\vdash$, $\vDash$> onde L é sua linguagem lógica, $\vdash$ sua relação de inferência definida sintaticamente e $\vDash$ sua relação de inferência definida semanticamente. Essa formulação obviamente levanta a seguinte questão: como saber se a definição sintática $\vdash$ e a definição semântica $\vDash$ definem realmente a mesma coisa? Em outras palavras, como saber se é o caso que, para um conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq L$ e uma fórmula $\alpha \in L$ quaisquer, se (1) $\Gamma \vdash \alpha$ então $\Gamma \vDash \alpha$ e (2) se $\Gamma \vDash \alpha$ então $\Gamma \vdash \alpha$. Conforme já mencionamos, chamamos (1) corretude e (2) a completude do sistema lógico em questão. Uma consequência óbvia de um sistema lógico ser correto e completo é que haverá uma equivalência entre suas tautologias e seus teoremas lógicos; em outras palavras, se $\alpha \in L$ é um teorema lógico ($\vdash \alpha$), então $\alpha$ também é uma tautologia ($\vDash \alpha$), e se $\alpha$ é uma tautologia, então $\alpha$ também é um teorema lógico. Também chamamos esses dois resultados, respectivamente, de corretude e completude restritas. Conforme já falamos, a prova da corretude e completude de sistemas lógicos é um dos resultados mais importantes da metalógica.

Considere por exemplo a lógica clássica proposicional. Definimos nos capítulos 4 e 5, respectivamente, a relação de consequência lógica da lógica proposicional e a relação de dedução do cálculo clássico proposicional. Assim, o sistema lógico que estamos chamando de lógica clássica proposicional será correto e completo se e somente se os dois metateoremas abaixo forem verdadeiros:

**TEOREMA 4.5** Seja $\Gamma \subseteq L_p$ um conjunto de fórmulas e $\alpha \in L_p$ uma fórmula. Se $\Gamma \vdash \alpha$ então $\Gamma \vDash \alpha$.

**TEOREMA 4.6** Seja $\Gamma \subseteq L_p$ um conjunto de fórmulas e $\alpha \in L_p$ uma fórmula. Se $\Gamma \vDash \alpha$ então $\Gamma \vdash \alpha$.

Esses por sua vez terão como casos especiais os dois teoremas abaixo:

**TEOREMA 4.7** Seja $\alpha \in L_p$ uma fórmula. Se $\vdash \alpha$ então $\vDash \alpha$.

**TEOREMA 4.8** Seja $\alpha \in L_p$ uma fórmula. Se $\vDash \alpha$ então $\vdash \alpha$.

Conforme já deve estar claro neste ponto, os teoremas 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8 são, respectivamente, o teorema da corretude, o teorema da completude, o teorema da corretude restrita e o teorema da completude restrita da lógica clássica proposicional. Na tentativa de ilustrar a prova dessa importante classe de metateoremas, exibiremos a seguir as provas desses teoremas. Começaremos pelos teoremas da corretude. Antes, porém, de exibirmos as provas dos teoremas 4.5 e 4.7, provaremos dois metarresultados que ajudarão a encurtar as mencionadas provas, sendo o primeiro o metateorema que diz que todo axioma do cálculo proposicional é uma tautologia, e o segundo o que estabelece que a regra de *modus ponens* preserva a relação de consequência lógica.

**TEOREMA 4.9** Seja $\alpha \in L_p$ uma fórmula. Se $\alpha$ é um axioma do cálculo clássico proposicional (em símbolos: $\alpha \in \Lambda_{P1\text{-}P11}$) então $\vDash \alpha$.

**Prova** Sabemos pelo corolário 1.1 que se $\vDash \alpha$ então $\alpha$ é uma tautologia. Assim o que o teorema 4.9 nos diz é que todo axioma do cálculo proposicional é uma tautologia. Para provarmos esse teorema, devemos examinar cada um dos 11 axiomas do cálculo proposicional e mostrar que cada um deles é uma tautologia. Em todos esses casos utilizaremos o método de prova por absurdo: suporemos que o axioma $\alpha$ é tal que $\nvDash \alpha$ e daí tentaremos chegar a uma contradição. Um resultado que será usado em todos os casos é o seguinte: se $\nvDash \alpha$, então, de acordo com o corolário 1.1, $\alpha$ não é uma tautologia, o que de acordo com a definição 1.5, permite-nos afirmar que há um modelo M tal que $M \nVdash \alpha$. Em relação às inferências que faremos sobre a satisfatibilidade ($M \Vdash \alpha$) e a insatisfatibilidade ($M \nVdash \alpha$) de uma fórmula $\alpha$ em um modelo M, estaremos nos apoiando na definição 1.10 e no corolário 1.2, respectivamente. Sejam $\alpha, \beta, \varphi \in L_p$ três fórmulas quaisquer da linguagem proposicional:

P1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$. Suponha que $\nvDash \alpha \to (\beta \to \alpha)$. Dessa forma, há um modelo M tal que $M \nVdash \alpha \to (\beta \to \alpha)$. Como então $M \nVdash \alpha \to (\beta \to \alpha)$, temos que $M \Vdash \alpha$ e $M \nVdash \beta \to \alpha$, o que por sua vez implica que $M \Vdash \beta$ e $M \nVdash \alpha$. Mas então temos aqui uma contradição: $M \Vdash \alpha$ e $M \nVdash \alpha$. Logo, $\vDash \alpha \to (\beta \to \alpha)$.

P2. $(\alpha \to (\beta \to \varphi)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \varphi))$. Suponha que $\nvDash (\alpha \to (\beta \to \varphi)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \varphi))$. Assim temos que há um modelo M tal que $M \nVdash (\alpha \to (\beta \to \varphi)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \varphi))$, o que implica que (1) $M \Vdash \alpha \to (\beta \to \varphi)$ e (2) $M \nVdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \varphi)$. Por sua vez, se (2) $M \nVdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \varphi)$ nós temos então que (2.1) $M \Vdash \alpha \to \beta$ e (2.2) $M \nVdash \alpha \to \varphi$. Mas se (2.2) $M \nVdash \alpha \to \varphi$, então temos que $M \Vdash \alpha$ e $M \nVdash \varphi$. Resolvendo então os demais passos, nós temos que se (1) $M \Vdash \alpha \to (\beta \to \varphi)$, então $M \nVdash \alpha$ ou $M \Vdash \beta \to \varphi$. Como nós já sabemos que $M \Vdash \alpha$, não pode ser o caso que $M \nVdash \alpha$. Logo, $M \Vdash \beta \to \varphi$ deve ser o caso. Assim temos que $M \nVdash \beta$ ou $M \Vdash \varphi$. Como nós já sabemos que $M \nVdash \varphi$, então deve ser o caso que $M \nVdash \beta$. Como (2.1) $M \Vdash \alpha \to \beta$, então temos que $M \nVdash \alpha$ ou $M \Vdash \beta$. Mas como já sabemos que $M \Vdash \alpha$, então deve ser o caso que $M \Vdash \beta$. Mas isso é uma contradição, visto que já tínhamos concluído que $M \nVdash \beta$. Logo $\vDash (\alpha \to (\beta \to \varphi)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \varphi))$.

P3. $\alpha \wedge \beta \to \alpha$. Supondo que $\nvDash \alpha \wedge \beta \to \alpha$, temos que há um modelo M tal que $M \Vdash \alpha \wedge \beta$ e $M \nVdash \alpha$. Se, no entanto, temos que $M \Vdash \alpha \wedge \beta$, temos também que $M \Vdash \alpha$ e $M \Vdash \beta$, o que contradiz $M \nVdash \alpha$. Logo, $\vDash \alpha \wedge \beta \to \alpha$.

P4. $\alpha\wedge\beta\rightarrow\beta$. Supondo que $\nvDash\alpha\wedge\beta\rightarrow\beta$, temos que há um modelo M tal que $M\Vdash\alpha\wedge\beta$ e $M\nVdash\beta$. Se, no entanto, temos que $M\Vdash\alpha\wedge\beta$, temos também que $M\Vdash\alpha$ e $M\Vdash\beta$, o que contradiz $M\nVdash\beta$. Logo, $\vDash\alpha\wedge\beta\rightarrow\beta$.

P5. $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha\wedge\beta)$. Suponha que $\nvDash\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha\wedge\beta)$. Assim temos que há um modelo M tal que $M\nVdash\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha\wedge\beta)$, o que equivale dizer que M é tal que $M\Vdash\alpha$ e $M\nVdash\beta\rightarrow\alpha\wedge\beta$. Como $M\nVdash\beta\rightarrow\alpha\wedge\beta$, temos que $M\Vdash\beta$ e $M\nVdash\alpha\wedge\beta$. Finalmente, como $M\nVdash\alpha\wedge\beta$, $M\nVdash\alpha$ ou $M\nVdash\beta$. Se $M\nVdash\alpha$ então temos uma contradição com a proposição de que $M\Vdash\alpha$; se por outro lado $M\nVdash\beta$, entramos em contradição com a conclusão anterior de que $M\Vdash\beta$. Logo, $\vDash\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha\wedge\beta)$.

P6. $\alpha\rightarrow\alpha\vee\beta$. Supondo que $\nvDash\alpha\rightarrow\alpha\vee\beta$, temos que existe um modelo M tal que $M\nVdash\alpha\rightarrow\alpha\vee\beta$. Isso significa que M é tal que $M\Vdash\alpha$ e $M\nVdash\alpha\vee\beta$. Mas se $M\nVdash\alpha\vee\beta$, então $M\nVdash\alpha$ e $M\nVdash\beta$, o que contradiz a conclusão de que $M\Vdash\alpha$. Logo, $\vDash\alpha\rightarrow\alpha\vee\beta$.

P7. $\beta\rightarrow\alpha\vee\beta$. Supondo que $\nvDash\beta\rightarrow\alpha\vee\beta$, temos que existe um modelo M tal que $M\nVdash\beta\rightarrow\alpha\vee\beta$. Isso significa que M é tal que $M\Vdash\beta$ e $M\nVdash\alpha\vee\beta$. Mas se $M\nVdash\alpha\vee\beta$, então $M\nVdash\alpha$ e $M\nVdash\beta$, o que contradiz a conclusão anterior de que $M\Vdash\beta$. Logo, $\vDash\alpha\rightarrow\alpha\vee\beta$.

P8. $(\alpha\rightarrow\varphi)\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\vee\beta\rightarrow\varphi))$. Suponha que $\nvDash(\alpha\rightarrow\varphi)\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\vee\beta\rightarrow\varphi))$. Se isso é o caso, então existe um modelo M tal que $M\nVdash(\alpha\rightarrow\varphi)\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\vee\beta\rightarrow\varphi))$, o que implica que M é tal que (1) $M\Vdash\alpha\rightarrow\varphi$ e (2) $M\nVdash(\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\vee\beta\rightarrow\varphi)$. Mas se (2) $M\nVdash(\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\vee\beta\rightarrow\varphi)$ então temos que (2.1) $M\Vdash\beta\rightarrow\varphi$ e (2.2) $M\nVdash\alpha\vee\beta\rightarrow\varphi$. Por sua vez, se (2.2) $M\nVdash\alpha\vee\beta\rightarrow\varphi$ então $M\Vdash\alpha\vee\beta$ e $M\nVdash\varphi$. Finalmente, como $M\Vdash\alpha\vee\beta$, então (2.2.1) $M\Vdash\alpha$ ou (2.2.2) $M\Vdash\beta$. Resolvamos agora os passos pendentes de acordo com essas duas possibilidades. Primeiramente, como (2.1) $M\Vdash\beta\rightarrow\varphi$, temos que $M\nVdash\beta$ ou $M\Vdash\varphi$. Como já sabemos que $M\nVdash\varphi$, então temos que $M\nVdash\beta$. Segundo, como (1) $M\Vdash\alpha\rightarrow\varphi$, temos que $M\nVdash\alpha$ ou $M\Vdash\varphi$. Supondo que (2.2.1) $M\Vdash\alpha$, temos que $M\nVdash\alpha$ não pode ser o caso; logo temos que $M\Vdash\varphi$. Mas isso contradiz a nossa conclusão anterior que $M\nVdash\varphi$. Supondo que (2.2.2) $M\Vdash\beta$, temos outra contradição, visto que concluímos anteriormente que $M\nVdash\beta$. Logo $\vDash(\alpha\rightarrow\varphi)\rightarrow((\beta\rightarrow\varphi)\rightarrow(\alpha\vee\beta\rightarrow\varphi))$.

P9. $(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\neg\alpha)$. Supondo que $\nvDash(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\neg\alpha)$, nós temos que há um modelo M tal que $M\nVdash(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\neg\alpha)$, o que significa que (1) $M\Vdash\alpha\rightarrow\beta$ e (2) $M\nVdash(\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\neg\alpha$. Como (2) $M\nVdash(\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\neg\alpha$, temos que (2.1) $M\Vdash\alpha\rightarrow\neg\beta$ e (2.2) $M\nVdash\neg\alpha$, o que implica que $M\Vdash\alpha$. Como (2.1) $M\Vdash\alpha\rightarrow\neg\beta$, então $M\nVdash\alpha$ ou $M\Vdash\neg\beta$, o que equivale a $M\nVdash\beta$. Como já sabemos que $M\Vdash\alpha$, então $M\nVdash\alpha$ não pode ser o caso; logo, $M\nVdash\beta$. Finalmente, devido a (1) $M\Vdash\alpha\rightarrow\beta$ temos que $M\nVdash\alpha$ ou $M\Vdash\beta$. Supondo que $M\nVdash\alpha$ nós chegamos a uma contradição, pois já tínhamos concluído que $M\Vdash\alpha$. Por outro lado, $M\Vdash\beta$ contradiz $M\nVdash\beta$, ou seja, algo que já tínhamos concluído previamente. Logo, $\vDash(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\neg\alpha)$.

P10. $\neg\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$. Suponha que $\nvDash\neg\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$. Nesse caso temos que há um modelo M tal que $M\nVdash\neg\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$. Isso implica que $M\Vdash\neg\alpha$, ou equivalentemente $M\nVdash\alpha$, e $M\nVdash\alpha\rightarrow\beta$. Por sua vez, como $M\nVdash\alpha\rightarrow\beta$, temos que $M\Vdash\alpha$ e $M\nVdash\beta$. Mas isso é uma contradição, visto que já concluímos que $M\nVdash\alpha$. Portanto, $\vDash\neg\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$.

P11. $\alpha\vee\neg\alpha$. Supondo que $\nvDash\alpha\vee\neg\alpha$, temos que há um modelo M tal que $M\nVdash\alpha\vee\neg\alpha$. Isso significa que $M\nVdash\alpha$ e $M\nVdash\neg\alpha$, o que por sua vez implica que $M\Vdash\alpha$. Logo temos uma contradição. Portanto, $\vDash\alpha\vee\neg\alpha$. **CQD**

**TEOREMA 4.10** Seja $\alpha,\beta\in L_p$ duas fórmulas e $\Gamma\subseteq L_p$ um conjunto de fórmulas. Se $\Gamma\vDash\alpha$ e $\Gamma\vDash\alpha\rightarrow\beta$, então $\Gamma\vDash\beta$.

**Prova** Supondo que $\Gamma\vDash\alpha$ e $\Gamma\vDash\alpha\rightarrow\beta$, pela definição 1.7 temos que para todo M tal que $M\Vdash\Gamma$, $M\Vdash\alpha$ e $M\Vdash\alpha\rightarrow\beta$. Neste último caso, como $M\Vdash\alpha\rightarrow\beta$, temos pela definição 1.10 que $M\nVdash\alpha$ ou $M\Vdash\beta$. Como não pode ser o caso que $M\nVdash\alpha$, visto que $M\Vdash\alpha$, temos que $M\Vdash\beta$. Mas como isso vale para todo e qualquer M, temos que, para todo modelo M, se $M\Vdash\Gamma$ então $M\Vdash\beta$. Logo, pela definição 1.7, $\Gamma\vDash\beta$. **CQD**

Podemos agora então exibir a prova do teorema da corretude da lógica clássica proposicional, após o que provamos o teorema restrito da corretude.

**TEOREMA 4.5** Seja $\Gamma\subseteq L$ um conjunto de fórmulas e $\alpha\in L$ uma fórmula. Se $\Gamma\vdash\alpha$ então $\Gamma\vDash\alpha$.

**Prova** Temos que provar que se $\alpha$ é deduzido a partir de $\Gamma$ ($\Gamma\vdash\alpha$), então $\alpha$ é uma consequência lógica de $\Gamma$ ($\Gamma\vDash\alpha$). Semelhantemente a como fizemos nas provas dos teoremas da dedução exibidas na seção anterior, para provar esse teorema devemos realizar uma prova por indução no tamanho da derivação. Supondo então que $\Gamma\vdash\alpha$, nós temos que existe uma derivação $\Omega$ de $\alpha$ a partir de $\Gamma$. Vamos agora provar o teorema 4.5 para o caso mais simples em que $\Omega$ tem tamanho 1. Supondo então que $\Omega=<\alpha>$, temos, de acordo com a definição 1.13, que ou $\alpha\in\Gamma$ ou $\alpha$ é um axioma. Se $\alpha\in\Gamma$, então trivialmente $\Gamma\vDash\alpha$, pois como $M\vDash\Gamma$ se e somente se, para todo $\beta\in\Gamma$, $M\Vdash\beta$ (definição 1.6), então para todo modelo M tal que $M\Vdash\Gamma$, $M\Vdash\alpha$. Se, por sua vez, $\alpha$ é um dos axiomas P1-P11, então de acordo com o teorema 4.9, temos que $\varnothing\vDash\alpha$, o que trivialmente, de acordo com a definição 1.7, implica $\Gamma\vDash\alpha$, pois o conjunto vazio é tal que, para todo modelo M, $M\Vdash\varnothing$. Suponha agora que o teorema 4.5 vale para casos nos quais o tamanho da derivação é menor do que *n*, ou seja, que se $\Gamma\vdash\alpha$ e existe uma derivação de tamanho menor que *n* de $\alpha$ a partir de $\Gamma$, então $\Gamma\vDash\alpha$; essa é a nossa hipótese de indução. Supondo agora que $\Gamma\vdash\alpha$ e que há uma derivação $\Omega=<\alpha_1,...,\alpha_{n-1},\alpha>$ de $\alpha$ a partir de $\Gamma$ de tamanho *n*, nós temos o que segue. De acordo com a definição 1.13, $\alpha$ é tal que (a)

$\alpha\in\Gamma$, (b) $\alpha$ é um axioma ou (c) Existe uma inferência admissível $\alpha_i,\alpha_j/\alpha\in\Sigma_{MP}$ tal que i,j<n e $\alpha_j\equiv\alpha_i\rightarrow\alpha$. Já vimos que nos dois primeiros casos temos que $\Gamma\vDash\alpha$; basta então examinarmos o caso (c). Como $\alpha_i$ e $\alpha_i\rightarrow\alpha$ pertencem a $\Omega$, então trivialmente há uma derivação $\Omega_i$ de $\alpha_i$ a partir de $\Gamma$ e uma derivação $\Omega_j$ de $\alpha_j\equiv\alpha_i\rightarrow\alpha$ a partir de $\Gamma$, de forma que, pela definição 1.14, temos que $\Gamma\vDash\alpha_i$ e $\Gamma\vdash\alpha_i\rightarrow\alpha$. Mas como os tamanhos tanto de $\Omega_i$ como de $\Omega_j$ são menores que *n*, de acordo com a nossa hipótese de indução, temos que $\Gamma\vDash\alpha_i$ e $\Gamma\vDash\alpha_i\rightarrow\alpha$. Mas então, de acordo com o teorema 4.10, temos que $\Gamma\vDash\alpha$. **CQD**

**TEOREMA 4.7** Seja $\alpha\in L_p$ uma fórmula. Se $\vdash\alpha$ então $\vDash\alpha$.

**Prova** Supondo que $\vdash\alpha$, que sabemos é uma abreviação para $\varnothing\vdash\alpha$, temos pelo teorema 4.5 que $\varnothing\vDash\alpha$, o que é o mesmo que $\vDash\alpha$. **CQD**

Passemos agora para os teoremas da completude. Aqui será útil provarmos primeiro o teorema restrito da completude, para então provarmos o teorema 4.6. Para isso, no entanto, teremos que provar os três teoremas auxiliares abaixo, os quais são precedidos pela definição 4.1:

**DEFINIÇÃO 4.1** Seja M um modelo e $\alpha\in L_p$ uma fórmula. A função F: $\mathcal{M}\text{x}L_p\rightarrow L_p$, em que $\mathcal{M}$ é o conjunto de todos os modelos da lógica clássica proposicional, é definida como segue:

(i) $F(M,\alpha)=\alpha$ sss $M\Vdash\alpha$;

(ii) $F(M,\neg\alpha)=\neg\alpha$ sss $M\nVdash\alpha$.

Representamos $F(M,\alpha)$ por $\alpha^M$.

**TEOREMA 4.11** Sejam $\alpha,\beta\in L_p$ duas fórmulas e $\Gamma,\Delta\subseteq L_p$ dois conjuntos de fórmulas. As proposições abaixo são verdadeiras:

(i) Se $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta$ então $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$;

(ii) Se $\Gamma\vdash\alpha$ e $\Delta\vdash\beta$, então $\Gamma\cup\Delta\vdash\alpha\wedge\beta$;

(iii) Se $\Gamma\vdash\neg\alpha$ ou $\Delta\vdash\neg\beta$, então $\Gamma\cup\Delta\vdash\neg(\alpha\wedge\beta)$;

(iv) Se $\Gamma\vdash\neg\alpha$ e $\Delta\vdash\neg\beta$, então $\Gamma\cup\Delta\vdash\neg(\alpha\vee\beta)$;

(v) Se $\Gamma\vdash\alpha$ ou $\Delta\vdash\beta$, então $\Gamma\cup\Delta\vdash\alpha\vee\beta$;

(vi) Se $\Gamma\vdash\neg\alpha$ ou $\Delta\vdash\beta$, então $\Gamma\cup\Delta\vdash\alpha\rightarrow\beta$;

(vii)Se $\Gamma\vdash\alpha$ e $\Delta\vdash\neg\beta$, então $\Gamma\cup\Delta\vdash\neg(\alpha\rightarrow\beta)$;

**Prova** A prova do item (i) consiste basicamente no uso de *modus ponens*: Se $\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta$, então há uma derivação $<\varphi_1,...,\varphi_n,\alpha\rightarrow\beta>$ de $\alpha\rightarrow\beta$ a partir de $\Gamma$; assim, temos que $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$, pois $<\varphi_1,...,\varphi_n,\alpha\rightarrow\beta,\alpha,\beta>$ é uma derivação de $\beta$ a partir $\Gamma\cup\{\alpha\}$, a justificativa para $\alpha$ sendo $\alpha$ pertencer ao conjunto de premissas e para $\beta$ a regra MP aplicada a $\alpha$ e $\alpha\rightarrow\beta$. Já em relação ao item (ii), se $\Gamma\vdash\alpha$ e $\Delta\vdash\beta$, então há uma derivação $<\varphi_1,...,\varphi_n,\alpha>$ de $\alpha$ a partir de $\Gamma$ e uma derivação $<\gamma_1,...,\gamma_m,\beta>$ de $\beta$ a partir de $\Delta$. Dessa forma, $\Gamma\cup\Delta\vdash\alpha\wedge\beta$, pois $<\varphi_1,...,\varphi_n,\alpha,\gamma_1,...,\gamma_m,\beta,\alpha\wedge\beta>$ é a forma abreviada, baseada no teorema 2.5, de uma derivação de $\alpha\wedge\beta$ a partir de $\Gamma\cup\Delta$, a justificativa para a presença de $\alpha\wedge\beta$ sendo a regra C3 aplicada a $\alpha$ e $\beta$. As provas dos demais items seguem a mesma linha de raciocínio da prova do item (ii), em que através do uso de uma ou mais regras derivadas e/ou teoremas lógicos a partir de derivações existentes obtém-se a derivação que prova o resultado desejado. Deixamos a cargo do leitor fazer a prova dos demais itens. **CQD**

**TEOREMA 4.12** Seja $\alpha\in L_P$ uma fórmula e $p_1,...,p_n\in P$ os símbolos proposicionais que ocorrem em $\alpha$. Para todo modelo M, $\{p_1^M,...,p_n^M\}\vdash\alpha^M$.

**Prova** Faremos a prova desse teorema por indução sobre o número *n* de ocorrências de conectivos lógicos em $\alpha$. Se $\alpha$ é, por exemplo, $((A\rightarrow B)\vee\neg B)\wedge C$, então n=4, pois $\alpha$ tem exatamente 4 ocorrências de símbolos lógicos. Considerando o caso mais simples, se n=0, isto é, se $\alpha$ não contém nenhum símbolo lógico, então $\alpha$ é um símbolo proposicional, isto é, $\alpha\in P$. Nesse caso, o teorema 4.12 se reduz ao resultado trivial de que $\alpha^M\vdash\alpha^M$, que no caso de $M\Vdash\alpha$, a definição 4.1 nos diz, é o mesmo que $\alpha\vdash\alpha$ e, no caso de $M\nVdash\alpha$, é o mesmo que $\neg\alpha\vdash\neg\alpha$. Suponhamos agora que o teorema 4.12 vale para fórmulas cujo número de ocorrências de conectivos lógicos seja menor que *n*, em adição a que supomos que a fórmula $\alpha$ tem exatamente *n* de ocorrências de conectivos lógicos. Nesse caso, $\alpha$ pode ter uma das quatro formas abaixo:

Caso 1: $\alpha\equiv\neg\beta$. Seja M um modelo qualquer. Como o número de ocorrências de conectivos lógicos em $\beta$ é menor que *n*, pela hipótese da indução temos que $\{p_1^M,...,p_k^M\}\vdash\beta^M$, em que $p_1,...,p_k\in P$ são os símbolos propositionais que ocorrem em $\beta$, que trivialmente são idênticos aos símbolos proposicionais que ocorrem em $\alpha$. No que se refere ao valor semântico de $\alpha$ em M, temos duas possibilidades. Primeiro, pode ser que $M\Vdash\beta$, o que implica, de acordo com a definição 1.10, que $M\nVdash\alpha$. Assim, de acordo com a definição 4.1, $\alpha^M\equiv\neg\alpha$ e $\beta^M\equiv\beta$. Dessa forma, temos que $\{p_1^M,...,p_k^M\}\vdash\beta$. Mas como temos $\vdash\beta\rightarrow\neg\neg\beta$ (INm10 do teorema 2.10), pelo teorema 4.3, temos que $\{p_1^M,...,p_k^M\}\vdash\beta\rightarrow\neg\neg\beta$, o que por sua vez, implica, de acordo com o teorema 4.11, item (i), que $\{p_1^M,...,p_k^M,\beta\}\vdash\neg\neg\beta$. Mas se $\{p_1^M,...,p_k^M,\beta\}\vdash\neg\neg\beta$ e $\{p_1^M,...,p_k^M\}\vdash\beta$, pelo teorema 2.5 temos que $\{p_1^M,...,p_k^M\}\vdash\neg\neg\beta$, o que é o mesmo que $\{p_1^M,...,p_k^M\}\vdash\alpha^M$, pois $\neg\neg\beta\equiv\neg\alpha\equiv\alpha^M$. A segunda possibilidade é que $M\nVdash\beta$, o que implica que $M\Vdash\alpha$. Assim, de acordo com a definição 4.1, $\alpha^M\equiv\alpha$ e $\beta^M\equiv\neg\beta$. Mas como, pela hipótese de indução $\{p_1{}^M,...,p_k{}^M\}\vdash\neg\beta$, temos automaticamente que $\{p_1{}^M,...,p_k{}^M\}\vdash\alpha^M$, pois $\neg\beta\equiv\alpha\equiv\alpha^M$.

Caso 2: $\alpha\equiv\beta\wedge\varphi$. Seja M um modelo qualquer. Como o número de ocorrências de conectivos lógicos em $\beta$ e $\varphi$ é menor que *n*, pela hipótese da indução temos que $\{p_1{}^M,...,p_k{}^M\}\vdash\beta^M$, em que $p_1,...,p_k\in P$ são os símbolos propositionais que ocorrem em $\beta$, e $\{q_1{}^M,...,q_m{}^M\}\vdash\varphi^M$, em que $q_1,...,q_m\in P$ são os símbolos propositionais que ocorrem em $\varphi$. Trivialmente, $p_1,...,p_k,q_1,...,q_m$ são todos os símbolos propositionais que ocorrem em $\alpha$. No que se refere ao valor semântico de $\alpha$ em M, temos duas possibilidades relevantes. Primeiro, pode ser que $M\Vdash\alpha$. Nesse caso, temos, de acordo com a definição 1.10, que $M\Vdash\beta$ e $M\Vdash\varphi$. Assim, de acordo com a definição 4.1, $\alpha^M\equiv\alpha$, $\beta^M\equiv\beta$ e $\varphi^M\equiv\varphi$. Pela hipótese de indução temos que $\{p_1{}^M,...,p_k{}^M\}\vdash\beta$ e $\{q_1{}^M,...,q_m{}^M\}\vdash\varphi$. Mas se isso é o caso, pelo teorema 4.11, item (ii), temos que $\{p_1{}^M,...,p_k{}^M,q_1{}^M,...,q_m{}^M\}\vdash\beta\wedge\varphi$, o que obviamente é o mesmo que $\{p_1{}^M,...,p_k{}^M,q_1{}^M,...,q_m{}^M\}\vdash\alpha^M$, pois $\beta\wedge\varphi\equiv\alpha\equiv\alpha^M$. Segundo, pode ser que $M\nVdash\beta$ ou $M\nVdash\varphi$, o que implica, de acordo com a definição 1.10, que $M\nVdash\alpha\wedge\beta$. Portanto, de acordo com a definição 4.1, $\alpha^M\equiv\neg\alpha$, e $\beta^M\equiv\neg\beta$ ou $\varphi^M\equiv\neg\varphi$. De acordo então com a hipótese de indução, temos que $\{p_1{}^M,...,p_k{}^M\}\vdash\neg\beta$ ou $\{q_1{}^M,...,q_m{}^M\}\vdash\neg\varphi$. Mas se isso é o caso, então, pelo teorema 4.11, item (iii), temos que $\{p_1{}^M,...,p_k{}^M,q_1{}^M,...,q_m{}^M\}\vdash\neg(\beta\wedge\varphi)$, o que é o mesmo que $\{p_1{}^M,...,p_k{}^M,q_1{}^M,...,q_m{}^M\}\vdash\alpha^M$, pois $\neg(\beta\wedge\varphi)\equiv\neg\alpha\equiv\alpha^M$.

Caso 3: $\alpha\equiv\beta\vee\varphi$. Seja M um modelo qualquer. Como o número de ocorrências de conectivos lógicos em $\beta$ e $\varphi$ é menor que *n*, pela hipótese da indução temos que $\{p_1{}^M,...,p_k{}^M\}\vdash\beta^M$, em que $p_1,...,p_k\in P$ são os símbolos propositionais que ocorrem em $\beta$, e $\{q_1{}^M,...,q_m{}^M\}\vdash\varphi^M$, em que $q_1,...,q_m\in P$ são os símbolos propositionais que ocorrem em $\varphi$. Trivialmente, $p_1,...,p_k,q_1,...,q_m$ são todos os símbolos propositionais que ocorrem em $\alpha$. No que se refere ao valor semântico de $\alpha$ em M, temos duas possibilidades relevantes. Primeiro, pode ser que $M\nVdash\alpha$. Nesse caso, temos, de acordo com a definição 1.10, que $M\nVdash\beta$ e $M\nVdash\varphi$. Assim, de acordo com a definição 4.1, $\alpha^M\equiv\neg\alpha$, $\beta^M\equiv\neg\beta$ e $\varphi^M\equiv\neg\varphi$. Pela hipótese de indução temos que $\{p_1{}^M,...,p_k{}^M\}\vdash\neg\beta$ e $\{q_1{}^M,...,q_m{}^M\}\vdash\neg\varphi$. Mas se isso é o caso, pelo teorema 4.11, item (iv), temos que $\{p_1{}^M,...,p_k{}^M,q_1{}^M,...,q_m{}^M\}\vdash\neg\beta\vee\varphi)$, o que obviamente é o mesmo que $\{p_1{}^M,...,p_k{}^M,q_1{}^M,...,q_m{}^M\}\vdash\alpha^M$, pois $\neg(\beta\vee\varphi)\equiv\neg\alpha\equiv\alpha^M$. Segundo, pode ser que $M\Vdash\beta$ ou $M\Vdash\varphi$, o que implica, de acordo com a definição 1.10, que $M\Vdash\alpha\vee\beta$. Portanto, de acordo com a definição 4.1, $\alpha^M\equiv\alpha$, e $\beta^M\equiv\beta$ ou $\varphi^M\equiv\varphi$. De acordo então com a hipótese de indução, temos que $\{p_1{}^M,...,p_k{}^M\}\vdash\beta$ ou $\{q_1{}^M,...,q_m{}^M\}\vdash\varphi$. Mas se isso é o caso, então, pelo teorema 4.11, item (v), temos que $\{p_1{}^M,...,p_k{}^M,q_1{}^M,...,q_m{}^M\}\vdash\beta\vee\varphi$, o que é o mesmo que $\{p_1{}^M,...,p_k{}^M,q_1{}^M,...,q_m{}^M\}\vdash\alpha^M$, pois $\beta\vee\varphi\equiv\alpha\equiv\alpha^M$.

Caso 4: $\alpha\equiv\beta\rightarrow\varphi$. Seja M um modelo qualquer. Como o número de ocorrências de conectivos lógicos em $\beta$ e $\varphi$ é menor que *n*, pela hipótese da indução temos que

$\{p_1^M,...,p_k^M\}\vdash\beta^M$, em que $p_1,...,p_k\in P$ são os símbolos propositionais que ocorrem em $\beta$, e $\{q_1^M,...,q_m^M\}\vdash\varphi^M$, em que $q_1,...,q_m\in P$ são os símbolos propositionais que ocorrem em $\varphi$. Trivialmente, $p_1,...,p_k,q_1,...,q_m$ são todos os símbolos propositionais que ocorrem em $\alpha$. No que se refere ao valor semântico de $\alpha$ em M, temos duas possibilidades relevantes. Primeiro, pode ser que $M\nVdash\beta$ ou $M\Vdash\varphi$. Nesse caso, temos, de acordo com a definição 1.10, que $M\Vdash\alpha$. Assim, de acordo com a definição 4.1, $\alpha^M\equiv\alpha$, $\beta^M\equiv\neg\beta$ e $\varphi^M\equiv\varphi$. Pela hipótese de indução temos que $\{p_1^M,...,p_k^M\}\vdash\neg\beta$ ou $\{q_1^M,...,q_m^M\}\vdash\varphi$. Mas se isso é o caso, pelo teorema 4.11, item (vi), temos que $\{p_1^M,...,p_k^M,q_1^M,...,q_m^M\}\vdash\beta\to\varphi$, o que obviamente é o mesmo que $\{p_1^M,...,p_k^M,q_1^M,...,q_m^M\}\vdash\alpha^M$, pois $\beta\to\varphi\equiv\alpha\equiv\alpha^M$. Segundo, pode ser que $M\Vdash\beta$ e $M\nVdash\varphi$, o que implica, de acordo com a definição 1.10, que $M\nVdash\beta\to\varphi$. Portanto, de acordo com a deinição 4.1, $\alpha^M\equiv\neg\alpha$, e $\beta^M\equiv\beta$ ou $\varphi^M\equiv\neg\varphi$. De acordo então com a hipótese de indução, temos que $\{p_1^M,...,p_k^M\}\vdash\beta$ ou $\{q_1^M,...,q_m^M\}\vdash\neg\varphi$. Mas se isso é o caso, então, pelo teorema 4.11, item (vii), temos que $\{p_1^M,...,p_k^M,q_1^M,...,q_m^M\}\vdash\neg(\beta\to\varphi)$, o que é o mesmo que $\{p_1^M,...,p_k^M,q_1^M,...,q_m^M\}\vdash\alpha^M$, pois $\neg(\beta\to\varphi)\equiv\neg\alpha\equiv\alpha^M$. **CQD**

**TEOREMA 4.13** Sejam $\alpha,\beta\in L_p$ duas fórmulas e $\Gamma\subseteq L_p$ um conjunto de fórmulas. Se $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$ e $\Gamma\vdash\neg\alpha\to\beta$ então $\Gamma\vdash\beta$.

**Prova** Suponha que $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$ e $\Gamma\vdash\neg\alpha\to\beta$. Assim, há uma derivação $\Omega_1$ de $\alpha\to\beta$ a partir de $\Gamma$ e uma derivação $\Omega_2$ de $\neg\alpha\to\beta$ a partir de $\Gamma$. Chamando *n* o número de elementos da derivação $\Omega_1$ e *m* o número de elementos de $\Omega_2$, podemos construir uma derivação de $\beta$ a partir de $\Gamma$ como segue:

| | | |
|---|---|---|
| | ... | <cópia dos membros de $\Omega_1$> |
| n. | $\alpha\to\beta$ | <justificativa de $\alpha\to\beta$ em $\Omega_1$> |
| | ... | <cópia dos membros de $\Omega_2$> |
| n+m. | $\neg\alpha\to\beta$ | <justificativa de $\neg\alpha\to\beta$ em $\Omega_2$> |
| n+m+1. | $(\alpha\to\beta)\to((\neg\alpha\to\beta)\to(\alpha\vee\neg\alpha\to\beta))$ | P8 |
| n+m+2. | $(\neg\alpha\to\beta)\to(\alpha\vee\neg\alpha\to\beta)$ | MP n,n+m+1 |
| n+m+3. | $\alpha\vee\neg\alpha\to\beta$ | MP n+m,n+m+2 |
| n+m+4. | $\alpha\vee\neg\alpha$ | P11 |
| n+m+5. | $\beta$ | MP n+m+4,n+m+3 |

Assim, temos que $\Gamma\vdash\beta$. **CQD**

**TEOREMA 4.8** Seja $\alpha\in L_p$ uma fórmula. Se $\Vdash\alpha$ então $\vdash\alpha$.

**Prova** Suponha que $\vDash\alpha$. Isso significa que para todo modelo M, $M\Vdash\alpha$. Sejam $p_1$, ..., $p_n\in P$ os símbolos proposicionais que ocorrem em $\alpha$. De acordo com o teorema 4.12, para um modelo arbitrário qualquer M, $\{p_1^M,...,p_n^M\}\vdash\alpha^M$. Considere agora dois modelos M' e M'' que sejam idênticos a M com relação à avaliação dos símbolos proposicionais $p_1$, ..., $p_n$ com exceção do último simbolo proposicional: enquanto $M'\Vdash p_n$, $M''\nVdash p_n$. Em outras palavras, M' e M'' são tais que $M\Vdash p_1$ sss $M'\Vdash p_1$ sss $M''\Vdash p_1$; $M\Vdash p_2$ sss $M'\Vdash p_2$ sss $M''\Vdash p_2$; ...; $M\Vdash p_{n-1}$ sss $M'\Vdash p_{n-1}$ sss $M''\Vdash p_{n-1}$; e $M'\Vdash p_n$ e $M''\nVdash p_n$. Pelo teorema 4.12, $\{p_1^M,...,p_{n-1}^M, p_n^M\}\vdash\alpha^M$, $\{p_1^{M'},...,p_{n-1}^M,p_n^{M'}\}\vdash\alpha^{M'}$ e $\{p_1^{M''},...,p_{n-1}^{M''},p_n^{M''}\}\vdash\alpha^{M''}$. Mas como $p_1^M= p_1^{M'}= p_1^{M''}$, ..., $p_{n-1}^M= p_{n-1}^{M'}= p_{n-1}^{M''}$ e como $\alpha^M=\alpha^{M'}=\alpha^{M''}$ (pois $M\Vdash\alpha$ para todo modelo M) e $p_n^{M'}=p_n$ e $p_n^{M''}=\neg p_n$ (pois $M'\Vdash p_n$ e $M''\nVdash p_n$), nós temos o que segue:

(1) $\{p_1^M,...,p_{n-1}^M,p_n\}\vdash\alpha$

(2) $\{p_1^M,...,p_{n-1}^M,\neg p_n\}\vdash\alpha$.

Aplicando o teorema da dedução à (1) e (2) temos que

(1') $\{p_1^M,...,p_{n-1}^M\}\vdash p_n\to\alpha$

(2') $\{p_1^M,...,p_{n-1}^M\}\vdash\neg p_n\to\alpha$

De acordo então com o teorema 4.13, temos que $\{p_1^M,...,p_{n-3}^M,p_{n-2}^M,p_{n-1}^M\}\vdash\alpha$. Como o modelo M usado acima foi um modelo arbitrário qualquer, podemos repetir esse procedimento para provar $\{p_1^M,...,p_{n-3}^M,p_{n-2}^M\}\vdash\alpha$; repeti-lo mais uma vez para provar $\{p_1^M,...,p_{n-3}^M\}\vdash\alpha$, e assim por diante até que provamos $\{p_1^M\}\vdash\alpha$, e finalmente $\vdash\alpha$. **CQD**

Agora podemos provar facilmente o teorema 4.6:

**TEOREMA 4.6** Seja $\Gamma\subseteq L_P$ um conjunto de fórmulas e $\alpha\in L_P$ uma fórmula. Se $\Gamma\vDash\alpha$ então $\Gamma\vdash\alpha$.

**Prova** Supondo que $\Gamma\vDash\alpha$ e considerando $\Gamma=\{\beta_1,\beta_2, ...,\beta_n\}$, nós temos que $\{\beta_1,\beta_2, ...,\beta_{n-1}\}\cup\{\beta_n\}\vDash\alpha$. Mas como $\{\beta_1,\beta_2, ...,\beta_{n-1}\}\cup\{\beta_n\}\vDash\alpha$, de acordo com o teorema semântico da dedução (teorema 4.4) então nós temos que $\{\beta_1,\beta_2, ...,\beta_{n-1}\}\vdash\beta_n\to\alpha$. Realizando esse procedimento mais uma vez, nós obtemos $\{\beta_1,\beta_2, ...,\beta_{n-2}\}\vDash\beta_{n-1}\to(\beta_n\to\alpha)$, e assim por diante até que tenhamos $\vDash\beta_1\to(\beta_2\to(...\to(\beta_n\to\alpha)...)$. De acordo com o teorema restrito da completude então temos que $\vdash\beta_1\to(\beta_2\to(...\to(\beta_n\to\alpha)...)$. Pelo teorema 4.11, item (i), então temos que $\{\beta_1\}\vdash\beta_2\to(...\to(\beta_n\to\alpha)...)$. Aplicando-o mais uma vez temos $\{\beta_1,\beta_2\}\vdash\beta_3\to(...\to(\beta_n\to\alpha)...)$ e assim por diante, até que finalmente obtemos $\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\}\vdash\alpha$. **CQD**

# 13
# Leitura adicional e bibliografia

## 13.1 Livros

Existem bons livros de lógica em português. O clássico livro de Irving Copi (1974) é uma boa introdução à lógica e à filosofia da lógica; apesar de conter um mínimo de formalização, ele é bastante abrangente, contendo tópicos de filosofia da linguagem, história da lógica e análise de argumentos. Também podemos mencionar os excelentes livros de Banson Mates (1967) e Newton-Smith (1988), os quais priorizam o método de dedução natural e contêm uma boa dose de metateoria, valendo a pena mencionar que, enquanto o primeiro faz uma breve incursão na história da lógica, o segundo elabora de forma bastante competente tópicos-chave em filosofia da lógica e filosofia da linguagem. Entre os livros de autores brasileiros podemos citar os livros de Cézar Mortari (2001), Guido Imaguire (2006), João Nunes de Souza (2002) e Marcelo Finger (2006), os quais introduzem a lógica matemática de maneira bastante competente e com o rigor formal necessário, muito embora tenham direcionamentos diferentes em termos de conteúdo; enquanto que Imaguire, por exemplo, faz sua apresentação com a filosofia como pano de fundo, os dois últimos direcionam o conteúdo para o contexto da lógica na computação.

Entre os grandes clássicos de lógica (em inglês) temos os livros de Stephen Kleene (1952), Herbert Enderton (1972) e Elliott Mendelson (1979). Também não podemos deixar de mencionar os livros de Joseph Shoenfield (1967) e Rayond Smullyan (1968). Dado o grau de rigor formal e ênfase na metalógica e aplicações matemáticas, tais livros são certamente mais indicados para estudantes de matemática e computação. Outro clássico, este já extremamente útil para o acadêmico de filosofia e que contempla de forma bastante satisfatória o aspecto formal, é o livro de Howard DeLong (1970); além de apresentar os sistemas proposicional e de ordem superior, ele contém uma introdução extremamente rica e esclarecedora à história da lógica.

Para livros com menos carga de rigor formal, mas que introduzem de forma competente o leigo à lógica, podemos mencionar os livros de Graham Priest (2002) e Desidério Murcho (2003). Outro livro, este já em inglês, com carga reduzida de rigor formal e muito acessível e interessante para o estudante de filosofia é o livro de Harry Gensler (2010); a ênfase que ele dá à análise de argumentos, fornecendo extensas listas de exercícios para os vários sistemas lógicos abordados, é um estímulo valioso para o estudante em relação à aplicação da lógica na filosofia. Há obviamente livros dedicados exclusivamente à análise e avaliação de argumentos, muitos dos quais dão valiosas informações acerca de muitos conceitos-chave da lógica; entre estes podemos mencionar os livros de Anthony Weston (1996) e Alec Fisher (2008).

Há atualmente bastante material didático sobre lógicas não clássicas. Alguns dos livros mencionados acima (como, por exemplo, os livros de Imaguire e Mortari) contêm capítulos sobre lógicas não clássicas. Para livros mais especializados, podemos mencionar as coletâneas editadas por Grahan Priest, Routley e Norman (1989) e por Jean-Yves Beziau, Carnielli e Gabbay (2007), que se centram em tópicos diversos acerca das lógicas paraconsistentes. Sobre lógica intuicionista, há o livro do Gregori Mints (2000). O livro do Graham Priest (2008) é uma excelente introdução à grande diversidade de lógicas não clássicas existentes hoje, abordando lógica modal, lógica paraconsistente, lógica relevante e lógica intuicionista, por exemplo.

Sobre história da lógica, em português, há o livro clássico de William e Marta Kneale (1968) e o livro de Robert Blanche e Jacques-Paul Dubuc (2001). Para um estudo mais aprofundado, recomendamos os oito volumes do *handbook* de história da lógica editados por Dov Gabbay e John Woods (2004-2008).

Finalmente, uma ferramenta extremamente valiosa para o estudante de lógica, que virtualmente engloba todos os tópicos acima mencionados, são os diversos *companions*, *guides* e *handbooks* de lógica disponíveis no mercado. Trata-se de livros com capítulos independentes escritos por especialistas sobre os mais importantes tópicos da lógica. Entre tal literatura, os dois *handbooks* editados por Dov Gabbay: Gabbay, Hogger e Robinson (1993-1998) e Gabbay e Guenthner (2001-2005) ocupam lugar de destaque; enquanto o primero (em cinco volumes) se centra na lógica aplicada à inteligência artificial e programação lógica, o segundo (em treze volumes) enfatiza o que é conhecido hoje como lógica filosófica. Também podemos mencionar os excelentes compêndio e guia de lógica filosófica da Blackwell, editados respectivamente por Dale Jacquette (2006) e Lou Goble (2001).

## 13.2 Recursos na internet

Há atualmente material de lógica de excelente qualidade disponível gratuitamente na internet. Há, por exemplo, o excelente livro *on-line* de Vilnis Detlovs e Karlis Podnieks (http://www.ltn.lv/~podnieks/mlog/ml.htm).

Também podemos citar o livro de George Willian Stock (http://www.gutenberg.org/etext/6560), o site mantido pela PUC de São Paulo (http://www.pucsp.br/~logica/) e a revista on-line de ensino de filosofia crítica na rede, que contém bons artigos sobre lógica (http://criticanarede.com/logica.html).

Finalmente, há diversos verbetes na Enciclopédia de Filosofia da Universidade de Stanford escritos por alguns dos melhores lógicos do mundo, entre os quais podemos mencionar os verbetes sobre sistemas semânticos (ou teoria dos modelos) (http://stanford.library.usyd.edu.au/entries/model-theory/ e http://stanford.library.usyd.edu.au/entries/modeltheory-fo/), lógica paraconsistente (http://stanford.library.usyd.edu.au/entries/logic-paraconsistent/), lógica intuicionista (http://stanford.library.usyd.edu.au/entries/logic-intuitionistic/), lógica modal (http://stanford.library.usyd.edu.au/entries/logic-modal/), lógica relevante (http://stanford.library.usyd.edu.au/entries/logic-relevance/), lógicas de ordem superior (http://stanford.library.usyd.edu.au/entries/logic-higher-order/) e lógica não monotônica (http://stanford.library.usyd.edu.au/entries/reasoning-defeasible/).

## 13.3 Bibliografia


BEZIAU, J.Y.; CARNIELLI, W. & GABBAY, D. (orgs.) (2007). *Handbook of Paraconsistency*. Londres: College.

BLANCHE, R. & DUBUS, J. (2001). *História da lógica*. Lisboa: Ed. 70.

COPI, M.I. (1974). *Introdução à lógica*. São Paulo: Mestre Jou.

DELONG, H. (1970). *A Profile of Mathematical Logic*. Nova York: Dover.

DE SOUZA, J.N. (2002). *Lógica para a Ciência da Computação*. Rio de Janeiro: Campus.

ENDERTON, H.B. (1972). *A Mathematical Introduction to Logic*. Londres: Academic Press.

FINGER, M.; SILVA, F. & MELO, A. (2006). *Lógica para computação*. São Paulo: Pioneira Thomson.

FISHER, A. (2008). *A lógica dos verdadeiros argumentos*. São Paulo: Novo Conceito.

GABBAY. D. & GUENTHNER, F. (2001-2005). *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. 1 a 13. Berlim/Nova York: Heidelberg/Springer.

GABBAY, D. & WOODS, J. (2004-2008). *History of Logic*. Vols. 1 a 8. Oxford: Elsevier.

GABBAY, D.; HOGGER, D. & ROBINSON, J. (1993-1998). *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*. Vol. 1 a 5. Oxford: Oxford University Press.

GENSLER, H. (2001). *Introduction to Logic*. 2. ed. Londres: Routledge.

GOBLE, L. (2001). *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*. Oxford: Blackwell.

IMAGUIRE, G. & BARROSO, C. (2006). *Lógica*: os jogos da razão. Fortaleza: UFC.

JACQUETTE, D. (2006). *A Companion to Philosophical Logic*. Oxford: Blackwell.

KLEENE, S.C. (1952). *Introduction to Metamathematics*. Princeton: Van Nostrand.

KNEALE, W. & KNEALE, M. (1968). *O desenvolvimento da lógica*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

MATES, B. (1967). *Lógica elementar*. São Paulo: Nacional/Edusp.

MENDELSON, E. (1979). *Introduction to Mathematical Logic*. 2. ed. Nova York: D. Van Nostrand.

MINTS, G. (2000). *A Short Introduction to Intuitionistic Logic*. Nova York: Springer.

MORTARI, C. (2001). *Introdução à lógica*. São Paulo: Unesp.

MURCHO, D. (2003). *O lugar da lógica na filosofia*. Lisboa: Plátano.

NEWTON-SMITH, W. (1988). *Lógica*: um curso introdutório. Lisboa: Gradiva.

PRIEST, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*: From If to Is. Cambridge: Cambridge University Press.

______ (2002). *Lógica*. Lisboa: Temas e Debates.

PRIEST, G.; ROUTLEY, R. & NORMAN, J. (orgs.) (1989). *Paraconsistent Logic* – Essays on the Inconsistent. Munique: Philosophia.

SHOENFIELD, J. (1967). *Mathematical logic*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.

SMULLYAN, R. (1968). *First-order logic*. Berlim/Nova York: Heidelberg/Springer.

WESTON, A. (1996). *A arte de argumentar*. Lisboa: Gradiva.