# SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES Y CALCULO DE VARIACIONES EN LOS TRABAJOS DE L. EULER

JONATHAN TABORDA

*A Leonhard Euler, con motivo de su tricentenario 1707-2007*



RESUMEN. En las siguientes notas, se pretende realizar una pequeña digresión, relativa a los tópicos mencionados en el título de la misma; puesto que tales no fueron abordados en el pasado Homenaje realizado por el Instituto de Física, de la U de A. Consideramos más que perogrullo tratar de justificar la importancia y vigencia en el desarrollo de las Matemáticas y Física a lo largo del Siglo XVIII como en la actualidad de tales temas; por ende presentamos una breve descripción de los métodos y problemas atacados por Euler y sus contemporáneos empleando dicha Heurística.
De antemano señalamos que éstas, constituyen un intento vehementemente pauperrimo, para honrar la memoria de quien es considerado el Shakespeare de las Matemáticas: *Universal, rico en detalles e inagotable*.

## 1. LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN EL SIGLO XVIII.

**1.1. EDO de primer orden.** Los primeros trabajos en ED, como ocurrió con el cálculo infinitesimal a finales del Siglo XVII y comienzos del Siglo XVIII, vieron primero la luz en cartas de un matemático a otro, muchas de las cuales ya no están disponibles, o en publicaciones que a menudo repiten los resultados establecidos o reivindicados en cartas.

En las *Actas Eruditorum* de 1693[1] Huygens explícitamente habla de ED, y Leibnitz, en otro artículo de la misma revista y año[2] dice que las ED son funciones de elementos de triángulo característico.

Lo primero que normalmente aprendemos de las ED que aparecen al eliminar las constantes arbitrarias entre una función dada y sus derivadas, no se hizo hasta 1740, aproximadamente y se debe a Alexis Fontaine del Bertins.

Jacques Bernoulli fue de los primeros en utilizar el cálculo infinitesimal para resolver problemas de EDO; en mayo de 1690[3] publicó su solución al problema de la Isócrona, si bien Leibnitz ya había dado una solución analítica; este problema consiste en encontrar una curva a lo largo de la cual un péndulo tarde el mismo tiempo en efectuar una oscilación completa, sea grande o pequeño el arco que recorre; la ecuación, en los símbolos de Bernoulli, era

$$dy\sqrt{b^2y-a^3}=dx\sqrt{a^3} \tag{1}$$

*Date*: Mayo 22 de 2007.
2000 *Mathematics Subject Classification.* 00A30, 01A05, 58A05.

[1]Œuvres, 10, 512-514.

[2]Math.Schriften, 5, 306.

[3]Acta Erud., 1690, 217-219=Opera,1, 421-424.

Bernoulli concluía de la igualdad de diferencias que las integrales (la palabra se utilizaba por vez primera) han de ser iguales y dio como solución

$$\frac{2b^2y-2a^3}{3b^2}\sqrt{b^2y-a^3}=x\sqrt{a^3} \tag{2}$$

La curva es, por supuesto, la cicloide.

En el mismo artículo de 1690, Jacques Bernoulli planteó el problema de encontrar la curva que adopta una cuerda flexible e inextensible colgada libremente de dos puntos fijos, la curva que Leibnitz denominó catenaria.

En las *Acta* de junio de 1691, Leibnitz, Huygens y J. Bernoulli publicaron soluciones independientes.

Leibnitz descubrió la técnica de separación de variables y la comunicó en una carta de 1691 a Huygens; resolvió así una ecuación de la forma $y(dx/dy)=f(x)/g(y)$, escribiendo $dx/f(x)=g(y)/d(y)$ y consiguió integrar ambos miembros; no formuló el método general.

En 1694, Leibnitz y J. Bernoulli introdujeron el problema de encontrar la curva o familia de curvas que cortan con un ángulo dado a una familia de curvas dadas; J. Bernoulli trayectorias a las curvas secantes.

También fueron identificadas las ED de primer orden exactas, i.e, las ecuaciones $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, para las cuales $Ndx+Ndy$ es la diferencia exacta de una función $z=f(x,y)$. Clairaut, célebre por su trabajo sobre la forma de la Tierra, había dado la condición $\partial M/\partial y=\partial N/\partial x$ para que la ecuación fuese exacta en sus artículos de 1739 y 1740, condición que también fue dada independientemente por Euler en un artículo escrito en 1734-35[4]

**1.2. Soluciones Singulares.** Las soluciones singulares no se obtienen de la solución general dando un valor concreto a la constante de integración; i.e, no son soluciones particulares.

Clairaut y Euler habían desarrollado un método para hallar la solución singular a partir de la propia ecuación, a saber, eliminando $y'$ de $f(x,y,y')=0$ y $\partial f/\partial y'=0$.

Este hecho y el de que las soluciones singulares no estén contenidas en la solución general intrigaron a Euler; en sus *Institutions* de 1768[5] dio un criterio para distinguir cuando no se conocía la solución general, criterio que fue mejorado por DÁlembert[6].

[4]Comm. Acad. Sci. Petrop., 7, 1734/35, 174-193, pub. 1740=Opera, (1), 22, 36-56.
[5]Volumen I, págs. 393 y ss.
[6]Hist. de lÁcad. des. Sci. Paris, 1768, 85 y ss., pub. 1772.

## 2. Ecuaciones de segundo orden.

Las ED de segundo orden aparecen en problemas físicos ya en 1691. J. Bernoulli se planteó el problema de la forma de una vela bajo la presión del viento, el problema de la velaria, lo que le llevó a la ecuación de segundo orden $d^2x/ds^2 = (dy/ds)^3$, donde s es la longitud de arco.

Tales ecuaciones aparecen a continuación al tocar el problema de determinar el perfil de una cuerda elástica que vibra, sujeta por los extremos-v.g una cuerda de violin.

Euler comenzó a considerar ED de segundo orden en 1728. Su interés en ellas fue suscitado en parte por sus trabajos en mecánica; [7] había trabajado, V.g, sobre el movimiento del péndulo en medios con rozamiento, lo que conduce a Ec. de segundo orden; trabajó para el Rey de Prusia sobre el efecto de la resistencia del aire sobre los proyectiles; en esto tomó el trabajo del Inglés Benjamin Robins, lo mejoró y escribió una versión en alemán (1745), la cual fué traducida al francés y al inglés e utilizada en artillería.

Consideró también una clase de Ec. de segundo orden que redujo mediante un cambio de variables a Ec. de primer orden. Consideró, V.g., la ecuación

$$ax^m dx^p = y^p dy^{p-2} d^2y \tag{3}$$

ó en la forma de derivadas,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{p-2} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ax^m}{y^n} \tag{4}$$

Euler introdujo las nuevas variables $t$ y $v$ por medio de las ecuaciones

$$y = e^v t(v), \quad x = e^{\alpha v} \tag{5}$$

donde $\alpha$ es una constante a determinar.

Las ecuaciones (5) se pueden contemplar como las Ec. paramétricas de $x$ e $y$ en términos de $v$, de modo que se pueden calcular $dx/dy$ y $d^2/dx^2$ y, sustituyendo en (4), obtener una Ec. de segundo orden en $t$ como función de $v$. Euler fija entonces $\alpha$ de modo que quede eliminado el factor exponencial y $v$ ya no aparezca explícitamente; una nueva transformación, a saber, $z = dv/dt$, reduce la Ec. de segundo orden a una de primero.

Después de haber abordado el tema de los sonidos musicales en el libro *Tentamen Novae Theoriae Musicae ex Certissimis Harmoniae Principiis Dilucide Expositae* (Investigación sobre una nueva teoría de la música, claramente expuesta a partir de incontestables principios de la armonía), escrito antes de 1731 y publicado en 1739 [8], Euler prosiguió el trabajo de Daniel Bernoulli, salvo que los argumentos matemáticos de éste son más claros. Para una forma de cadena

[7] Cr. C.H.Truesdell. *Ensayos sobre Historia de la Mecánica*

[8] Opera, (3),1,197-427

continua, a saber, el caso especial en que el peso es proporcional a $x^n$, Euler tuvo que resolver

$$\frac{x}{n+1}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+\frac{y}{\alpha}=0 \tag{6}$$

Obtiene la solución en serie que en notación moderna está dada por [9]

$$y = Aq^{-n/2} I_n(2\sqrt{q}), \quad q = -\frac{(n+1)x}{\alpha} \tag{7}$$

La $n$ es aquí general, por lo que Euler está introduciendo funciones de Bessel de índice real arbitrario. Da también la solución en forma integral

$$y = A\frac{\int_0^1 (1-t^2)^{(2n-1)/2}\cosh\left(2t\sqrt{\frac{(n+1)x}{\alpha}}\right)dt}{\int_0^1 (1-\tau^2)^{(2n-1)/2}d\tau} \tag{8}$$

Este es quizá el primer caso de solución de una ED de segundo orden expresada como integral.

En un artículo de 1739[10] Euler se ocupó de las ED del oscilador armónico, $\ddot{x}+Kx=0$, y de las oscilaciones forzadas del mismo

$$M\ddot{x}+Kx = F\sin w_\alpha t \tag{9}$$

obtuvo las soluciones por cuadraturas y descubrió (redescubrió, en realidad, ya que otros lo habían encontrado antes) el fenómeno de resonancia; a saber, que si $w$ es la frecuencia natural $\sqrt{K/M}$ del oscilador, que se obtiene cuando $F=0$, entonces, cuando $w_\alpha/w$ se aproxima a 1, la oscilación forzada tiene amplitud cada vez más grande y se hace infinita.

En 1760, Euler [11] consideró la ecuación de Riccati

$$dz/dx + z^2 = ax^n \tag{10}$$

y demostró que si se conoce una integral particular $v$, entonces la transformación

$$z = v + u^{-1} \tag{11}$$

convierte a aquella en una ecuación lineal. Además, si se conocen dos integrales particulares, la

[9] Para v arbitrario (incluyendo valores complejos):
$I_v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{v+2n}}{n!\Gamma(v+n+1)}$.
Los $I_v(z)$ reciben el nombre de funciones Bessel modificadas.

[10] Comm. Acad. Sci. Petrop., 1739, 128-149, publi. 1750=Opera, (2), 10, 78-97

[11] Novi Comm. Acad. Sci. Petrop., 9, 1760/61, publi. 1763=Opera, (1), 22, 334-394, y 9, 1762/63, 154-159, publi. 1764=Opera, (1), 22, 403-420

integración de la ecuación original se reduce a cuadraturas.

**2.1. Ecuaciones de Orden Superior.** En diciembre de 1734, Daniel Bernoulli escribió a Euler, quien estaba en San Petersburgo, que había resuelto el problema del desplazamiento transversal de una barra elástica (un cuerpo unidimensional de madera o de acero) fijada a una pared en uno de sus extremos y libre el otro. Bernoulli había obtenido la ED

$$K^4 \frac{d^4 y}{dx^4} = y \tag{12}$$

donde $K$ es una constante, $x$ es la distancia desde el extremo libre de la barra e $y$ el desplazamiento vertical en ese punto respecto a la posición sin pandeo de la barra.

Euler, en una réplica escrita antes de junio de 1735, afirmó que el tambén descubierto esta ecuación y que no era capaz de integrarla salvo utlizando series, y que había obtenido cuatro series distintas; estas series representaban funciones circulares y exponenciales; pero Euler no lo vío entonces.

Cuatro años más tarde, en una carta a J. Bernoulli (15 de Septiembre de 1739), Euler indicaba que su solución se podía representar como

$$y = A\left[\left(\cos x/K + \cosh x/K\right) - \frac{1}{b}\left(\sin x/K + \sinh x/K\right)\right] \tag{13}$$

donde $b$ está determinado por la condición $y = 0$ cuando $x = l$, de modo que

$$b = \frac{\sin l/K + \sinh l/K}{\cos l/K + \cosh l/K} \tag{14}$$

Los problemas de elasticidad condujeron a Euler a considerar el problema matemático de la resolución de Ec. lineales generales con coeficientes constantes, y en una carta a Jean Bernoulli de septiembre de 1739 escribe que había tenido éxito.

Bernoulli le respondió afirmando que él ya había considerado tales ecuaciones en 1700 incluso con coeficientes variables.

En la publicación de su trabajo [12], Euler consideró la ecuación

$$0 = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + L\frac{d^ny}{dx^n} \tag{15}$$

donde los coeficientes son constantes; la ecuación se dice que es homogenea porque el término independiente de $y$ y sus derivadas es 0. Euler indica que la solución general ha de contener $n$ constantes arbitrarias y que su solución vendrá dada por la suma de $n$ soluciones particulares,

[12] Misc. Berolin., 7, 1743, 193-242=Opera, (1), 22, 108-149

cada una de ellas multiplicada por una constante; hace entonces la sustitución

$$y = \exp[\int r dx] \tag{16}$$

con $r$ constante, y obtiene la ecuación en $r$

$$A + Br + Cr^2 + \ldots + Lr^n = 0 \tag{17}$$

que se denomina ecuación característica o auxiliar. Cuando $q$ es una raíz real simple de esta ecuación, entonces

$$ae^{\int q dx} \tag{18}$$

es una solución de la ED original. Si la ecuación característica tiene una raíz múltiple $q$, Euler hace $y = e^{qx}u(x)$ y sustituye en la ED; obteniendo que

$$y = e^{qx}\left(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots\ldots + \varsigma x^{k-1}\right) \tag{19}$$

es una solución que contiene $k$ constantes arbitrarias si $q$ aparece $k$ veces como raíz de la ecuación característica. Trató también los casos de raíces complejas conjugadas y de raíces complejas múltiples, con lo que Euler resuelve completamente las Ec. lineales homogeneas con coeficientes constantes.

Algo más tarde [13] estudió la EDO lineal de orden $n$ no homogenea; su método consistió en multiplicar la Ec. por $e^{\alpha x}$, integrar ambos miembros y proceder a determinar $\alpha$ de modo que la Ec. se reduzca a una de orden inferior. Así, V.g, para resolver

$$C\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Ay = X(x), \tag{20}$$

multiplicada por $e^{\alpha x}dx$ y obtiene

$$\int \left[ e^{\alpha x}C\frac{d^2y}{dx^2} + e^{\alpha x}B\frac{dy}{dx} + e^{\alpha x}Ax \right] dx = \int e^{\alpha x}X dx \tag{21}$$

Pero, para $A', b'$ y $\alpha$ apropiados, el primer miembro ha de ser

$$e^{\alpha x}\left(A'y + B'dy/dx\right) \tag{22}$$

Derivando esta expresión y comparando con la ecuación original Euler obtiene que

$$B' = C, A' = B - \alpha C, A' = A/\alpha \tag{23}$$

con lo cual, de las últimas ecuaciones,

$$A - B\alpha + C\alpha^2 = 0 \tag{24}$$

[13] Novi Comm. Acad. Sci. Petrop., 3, 1750/51, 3-35, publi. 1753=Opera(1), 22, 181-213

Quedando, pues, determinados $\alpha$, $A'$ y $B'$ y la ecuación original se reduce a

$$A'y + B'dy/dx = e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx \tag{25}$$

Un factor integrante de esta ecuación es $e^{\beta x}dx$, donde $\beta = A'/B'$, de modo que por (23), se tiene $\alpha\beta = A/C$ y $\alpha + \beta = B/C$ y consecuentemente, por (24), $\alpha$ y $\beta$ son las raíces de $A - B\alpha + C\alpha^2 = 0$.

## 3. EL CÁLCULO DE VARIACIONES EN SIGLO XVIII.

**3.1. La teoría de Superficies.** Como la teoría de curvas en el espacio, la teoría de superficies tuvo un inicio lento. Empezó con el estudio de las geodésicas sobre superficies, con las geodésicas sobre la Tierra como precaución principal. En el *Journal des Scavans* de 1697, J. Bernoulli propuso el problema de encontrar mínimo entre dos puntos sobre una superficie convexa [14] Le escribió a Leibnitz en 1698 para señalarle que el plano osculador (el plano del círculo osculador) en cualquier punto de una geodésica es penperdicular a la superficie en ese punto. En 1698 Jacques Bernoulli resolvió el problema de las geodésicas sobre cilindros, conos y superficies de revolución. El método era limitado, a pesar de que en 1728 Jean Bernoulli [15] tuvo éxito con el método y encontró las geodésicas sobre otros tipos de superficies.

En 1728 Euler [16] proporcionó las ED para las geodésicas sobre superficies. Euler usó el método que había introducido en el cálculo de variaciones. En 1760, en su
*Recherches sur courbore des surfaces* (Investigaciones sobre la curvatura de las superficies) [17], Euler estableció la teoría de superficies. Este trabajo es la contribución más importante de Euler a la geometría diferencial y un punto culminante de la materia. Euler representa una superficie por $z = f(x, y)$ e introduce la actual notación

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \tag{26}$$

Más adelante dice:

> *Empiezo por determinar el radio de curvatura de cualquier sección plana de una superficie; entonces aplico esta solución a secciones que son perpendiculares a la superficie en cualquier punto dado, comparo los radios de curvatura de estas secciones con respecto a su mutua inclinación, lo que nos coloca en situación de establecer una idea adecauda de la curvatura de superficies.*

**3.2. Los primeros trabajos de Euler.** En 1728, Jean Bernoulli propuso a Euler el problema de obtener geodésicas sobre superficies aplicando la propiedad de que los planos osculadores de las

[14] Opera, 1, 204-05.
[15] Opera, 4, 108-128.
[16] Comon. Acad. Sci. Petrop. 3, 1728, 110-124, pub. 1732=Opera(1), 25, 1-12.
[17] Mém. de. lÁcad. de Berlin, 16, 1760, 119-143, publ. 1767=Opera(1), 28. 1-22.

geodésicas cortan la superficie en ángulos rectos. Este problema inició a Euler en el cálculo de variaciones. Lo resolvió en 1728 [18] En 1734 Euler generalizó el problema de la braquistócrona para minimizar cantidades diferentes de tiempo, y tomando en cuenta un medio resistente [19]

Más adelante, Euler se propuso encontrar una aproximación más general a problemas en este terreno. Su método, que fue una simplificación del de Jacques Bernoulli; consistió en reemplazar la integral de un problema por una suma y reemplazar las derivadas en el integrando por coeficientes diferenciales, haciendo la integral una función de número finito de ordenadas del arco $y(x)$. Más adelante, varió uno o más de las ordenadas seleccionadas arbitrariamente y calculó la variación en la integral. Igualando la variación de la integral a cero y usando un proceso de paso al límite muy tosco para transformar las ED resultantes, obtuvo la ED que debía ser satisfecha por el arco minimizante.

Por el método descrito con anterioridad, aplicado a integrales de la forma

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx \tag{27}$$

Euler tuvo éxito al demostrar que la función $y(x)$ que minimiza o maximiza el valor de $J$ debe satisfacer la EDO

$$f_y - \frac{dy}{dx}(f_{y'}) = 0 \tag{28}$$

Consideremos ahora una curva regular $\mathcal{G}$ sobre una superficie y que pasa por dos puntos A y B. Sea $F(t, x^1, x^2, x^3, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$ una función con derivadas parciales en un cierto abierto de $\mathbb{R}^7$. Consideremos

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x^i, \dot{x}^i)dt$$

Podemos pensar en la siguiente función:

$$J : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x^i(t) \longrightarrow J\big(x^i(t)\big) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x^i, \dot{x}^i)dt$$

$\mathcal{G}$ es el cojunto de curvas regulares que unen A con B. La función $J$ se denomina un funcional.

Nos interesan las curvas $x^i(t)$ que hagan mínima a $J$. Este problema es un problema del cálculo Variacional.

Sea $x^i(t)$ una curva que hace máx(mínima) a

$$\int_{t_o}^{t_1} F(t, x^i, \dot{x}^i)dt$$

[18]Íbid. nota 17.

[19]Comm. Acad. Sci. Petrop, 7, 1734/35, 135-149. Opera(1), 25, 41-53.

Esa curva se llamará una curva extremal del funcional $J$.

Sea Veamos que la curva de Ecuaciones paramétricas $\xi^i(t)$ pasa por A y B.

$$\xi^i(t_0) = x^i(t_0) + \varepsilon\mathcal{H}^i(t_0) = T^{-1}(a^i) \qquad \therefore T\big(\xi^i(t_0)\big) = a^i.$$

igualmente se prueba para $b^i$.

Sea

$$J\big(\xi^i(t)\big) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, \xi^i, \dot{\xi}^i)dt = J(\varepsilon)$$

$$= \int_{t_o}^{t_1} F(t, x^i + \varepsilon\mathcal{H}^i, \dot{x}^i + \varepsilon\dot{\mathcal{H}}^i)dt$$

$$J(0) = J\big(x^i(t)\big) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x^i, \dot{x}^i)dt$$

$$J(\varepsilon) - J(0) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x^i + \varepsilon\mathcal{H}^i, \dot{x}^i + \varepsilon\dot{\mathcal{H}}^i dt) - \int_{t_0}^{t_1} F(t, x^i, \dot{x}^i)dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \big\{F(t, x^i + \varepsilon\mathcal{H}^i, \dot{x}^i + \varepsilon\dot{\mathcal{H}}^i) - F(t, x^i, \dot{x}^i)\big\}dt \tag{29}$$

Ahora $F$ es una función de $(t, x^1, x^2, x^3, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$

Para estimar la expresión (29) debemos recordar la F. de Taylor de $2^{do}$-orden.

Sea $\quad f : B_{(a)} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow f(x) = f(x^1, \ldots, x^n)$$

un campo escalar cuyas derivadas parciales mixtas $\dfrac{\partial f}{\partial x^i \partial y^j}, i, j = 1, 2, \ldots, n$ existen y son continuas en la $B_{(a)}$.

Entonces $\forall y \in \mathbb{R}^n$ tal que $a + y \in B_{(a)}$, si consideramos el siguiente conjunto $(a, a+y), \exists\, 0 < c < 1$ tal que

$$f(a+y) = f(a) + \langle \nabla f(a), y \rangle + \frac{1}{2} y^t H(a + cy) y$$

donde

$$H(a+cy)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^1\partial x^1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2\partial x^1} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^n\partial x^1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^1\partial x^n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2\partial x^n} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^n\partial x^n}\end{pmatrix}_{a+cy}$$

En nuestro caso

$$F(t_{+0},x^i+\varepsilon\mathcal{H}^i,\dot{x}^i+\varepsilon\dot{\mathcal{H}}^i)=$$

$$F(t,x^i,\dot{x}^i)+\left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial t},\frac{\partial F}{\partial x^i},\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right),(0,\varepsilon\mathcal{H}^i,\varepsilon\dot{\mathcal{H}}^i)\right\rangle+\frac{1}{2}(0,\varepsilon\mathcal{H}^i,\varepsilon\dot{\mathcal{H}}^i)^t H_c\begin{pmatrix}0\\ \varepsilon\mathcal{H}^i\\ \varepsilon\dot{\mathcal{H}}^i\end{pmatrix}$$

$$=F\big(t_{+0},x^i+\varepsilon\mathcal{H},\dot{x}^i+\varepsilon\dot{\mathcal{H}}^i\big)-F(t,x^i,\dot{x}^i)$$

$$=\varepsilon\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\mathcal{H}^i+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\dot{\mathcal{H}}^i\right)+\underbrace{\varepsilon^2(0,\mathcal{H}^i,\dot{\mathcal{H}}^i)H_c\begin{pmatrix}0\\ \mathcal{H}^i\\ \dot{\mathcal{H}}^i\end{pmatrix}}_{\overset{\|}{0}}$$

Así las cosas

$$J(\varepsilon)-J(0)=\int_{t_0}^{t_1}\varepsilon\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\mathcal{H}^i+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\dot{\mathcal{H}}^i\right)dt$$

$$\frac{J(\varepsilon)-J(0)}{\varepsilon}=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\mathcal{H}^i+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\dot{\mathcal{H}}^i\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial F}{\partial x^i}\mathcal{H}^i dt+\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\dot{\mathcal{H}}^i dt$$

$$\int_{t_o}^{t_1}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\dot{\mathcal{H}}^i dt=\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\mathcal{H}^i\Bigg]_{t_o}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right)\right]\mathcal{H}^i dt$$

$$=\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\underbrace{\left(\mathcal{H}^i(t_1)-\mathcal{H}^i(t_0)\right)}_{\overset{\|}{0}}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right)\mathcal{H}^i dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial F}{\partial x^i}\mathcal{H}^i dt-\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right)\right]\mathcal{H}^i dt$$

Finalmente

$$\frac{J(\epsilon)-J(0)}{\varepsilon}=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial F}{\partial x^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right)\right]\mathcal{H}^i dt$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J(\varepsilon)-J(0)}{\varepsilon}=\frac{dJ}{d\varepsilon}=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial F}{\partial x^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right)\right]\mathcal{H}^i dt=0$$

Luego, el siguiente conjunto de ecuaciones, se conocen como las Ecuaciones de Euler del Cálculo Variacional

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x^1}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}^1}\right)=0\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x^2}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}^2}\right)=0\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x^3}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}^3}\right)=0\end{cases}$$

**Lema 1 (lema fundamental del Cálculo de Variaciones).** *Sea $\phi(x)$ una función continua en $[x_0, x_1]$. Si $\forall\eta(x)$; diferenciable con derivadas continuas en $[x_0, x_1]$ tal que $\eta(x_0)=\eta(x_1)$ se cumple que*

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\phi(x)dx=0,$$

*entonces $\phi=0$.*

*Demostración.* Razonemos por Reducción al Absurdo.

Supongamos que $\phi\neq 0$, entonces $\exists\xi\in[x_0,x_1]$ tal que $\phi(\xi)>0$.

Ahora, como $\phi$ es continua y $\phi(\xi)>0$, $\exists[\xi_0,\xi_1]$ vecindad de $\xi$ tal que $\phi(x)>0, x\in[\xi_0,\xi_1]$.

Definamos ahora

$$\eta:[x_0,x_1]\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$x\longrightarrow\eta(x)$$

$$\begin{cases}=(x-\xi_0)^4(x-\xi_1)^4, & \text{si } x\in[\xi_0,\xi_1]\\ =0, \text{en otro caso}\end{cases}$$

De acuerdo a esto tenemos lo siguiente:

$\eta(x_0) = 0$
$\eta(x_1) = 0$

$\eta'(x) = 4(x-\xi_0)^3(x-\xi_1)^4 + 4(x-\xi_0)^4(x-\xi_1)^3$

$x \in (\xi_0, \xi_1) = 4(x-\xi_0)^3(x-\xi_1)^3(x-\xi_1+x-\xi_0)$

$= 4(x-\xi_0)^3(x-\xi_1)^3\left[2x-(\xi_1+\xi_0)\right]$

$$\begin{cases} \eta'(\xi_0) = 0 \\ \eta'(\xi_1) = 0 \end{cases} \qquad \star$$

La función $\eta$ satisface $\star$, por lo tanto

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\phi(x)dx = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \eta(x)\phi(x)dx > 0 \quad (\rightarrow\leftarrow)$$

Luego $\phi = 0$.

$\square$

Sabido es por todos, que la originalidad y productividad del Suizo, le han otorgado un lugar en la Historia de las Matemáticas y en la ciencia en general; la cual sería una utopía de no ser gracias a su exagerada Brillantez.

Euler, hoy 300 años después de su Natalicio, vive en todos los rincones de las Matemáticas y Física; inclusive en la moderna teoría de las *Superstrings* le encontramos. Tal teoría ha estado evolucionando hacia atrás desde su descubrimiento accidental en 1968. Esta es la razón de que la teoría parezca tan extraña y poco familiar para la mayoría de los físicos.

Ella nació casi por casualidad en 1968 cuando dos jóvenes físicos teóricos, Gabriel Veneziano y Mahiko Suzuki, estaban hojeando independientemente libros de matemáticas, buscando funciones matemáticas que describieran las interacciones de partículas fuertemente interactivas. Mientras estudiaban en el CERN, tropezaron independientemente con la función beta de Euler, una función desarrollada en el siglo XVIII por el Suizo. Se quedaron sorprendidos al descubrir que la función beta ajustaba casi todas las propiedades requeridas para describir las interacciones fuertes de partículas elementales. Hoy, esta función beta se conoce en física con el nombre de modelo de Veneziano, que ha inspirado varios miles de artículos de investigación, iniciado una escuela importante en física y ahora tiene la pretensión de unificar todas las leyes físicas.

Se llama *beta de Euler* (o integral euleriana de primera especie) a la función $(p., q) \mapsto B(p,q)$, continua en su campo de definición, que viene dada por la expresión:

$$B(p,q) = \int_{\to 0}^{\to 1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad \forall p,q \in ]0,+\infty[ \tag{30}$$

Mediante el cambio de variable $x \mapsto y = 1-x$, se obtiene que $B(p,q) = B(q,p)$.

Otras expresiones interesantes de $B(p,q)$ son:

$$B(p,q) = \int_{\to 0}^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = \int_{\to 0}^{1} \frac{u^{p-1} + u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}} du = 2 \int_{\to 0}^{\to \pi/2} (\sin^{2p-1}\theta)(\cos^{2q-1}\theta) d\theta$$

De esta última se obtiene en particular que $B(1/2, 1/2) = \pi$.

Se verifican las siguientes relaciones de recurrencia:

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p,q) \quad \text{y} \quad B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p,q)$$

con ellas, si se conociera $B(p,q)$ para $p, q \in ]0,1]$, se conocería $B(p,q)$ para cualesquiera $p, q > 0$. Como $B(1,1) = 1$, resulta que

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Las funciones $\Gamma$ y $B$ están ligadas mediante la relación

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

De esta fórmula se desprende que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ y que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1/2\sqrt{\pi}$.

Finalizamos estas notas, con un aforismo Euleriano:

*"Ya que la fábrica del universo es más que perfecta y es el trabajo de un Creador más que sabio, nada en el universo sucede en el que alguna regla de máximo o mínimo no aparezca".*

## REFERENCIAS

[1] Chica E. Jaime. *Lecturas sobre Geometría Diferencial Clásica.* Notas de Clase. Universidad de Antioquia. Facultad de Matemáticas. 2003. No publicadas.

[2] de Burgos Juan. *Cálculo infinitesimal de varias variables.* MaGraw-Hill. 1995.

[3] Kaku Michio. *Hiperespacio.* Traducción de Javier García Sanz. Crítica. 1996.

[4] Kline Morris. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, vol. I, II.* Alianza Universidad 1992.

[5] Peterson Peter. *Riemannian Geometry.* Graduate Text in Mathematics 171. Springer-Verlag. 1998.

[6] Ratcliffe G. Jhon. *Foundations of Hyperbolic Manifolds.* Graduate Text in Mathematics 149. Springer-Verlag. 1994

*E-mail address:* taborda50@gmail.com