FICȚIONALISMUL ȘI PROBLEMA OBIECTIVITĂȚII MATEMATICII*

Iulian Dănuț Toader**

Întrebarea la care voi încerca să răspund în prezenta lucrare este următoarea: poate ficționalismul matematic, adică poziția conform căreia obiectele matematice nu există şi prin urmare enunţurile despre astfel de obiecte nu sunt propriu-zis adevărate, oferi o soluție convingătoare la problema obiectivității în matematică, adică o soluţie care să identifice condiţiile unor enunţuri matematice obiective? Dacă da, care sunt caracteristicile acestei soluţii? Dacă nu, de ce stau lucrurile aşa cu ficţionalismul, şi nu altfel?

Lucrarea este structurată în felul următor. În prima secţiune voi discuta argumentul principal prezentat în favoarea ficţionalismului matematic ca poziţie distinctă de platonismul matematic, precum şi de alte poziții ca nominalismul şi neo-Meinongismul. În secţiunea a doua voi articula întrebarea cu privire la obiectivitatea matematicii, iar în cea de a treia voi discuta răspunsul ficţionalist prin comparaţie cu cel nominalist, şi voi arăta de ce ambele sunt nesatisfăcătoare. Apoi, în secţiunea a patra, voi introduce răspunsul cel mai plauzibil pe care îl poate dezvolta un reprezentant al ficționalismului la această întrebare. El este departe de a fi unul definitiv, însă marchează, cred eu, un pas important şi necesar în dezbaterea contemporană asupra ficționalismului. Pe scurt, ideea pe care se bazează acest răspuns este că obiectivitatea matematicii necesită un anumit tip de invarianţă, şi anume invarianţa relaţiilor descrise de un enunţ matematic, ce poate fi definită cu ajutorul conceptului model-teoretic de categoricitate. Însă această idee are, după cum voi arăta, câteva consecinţe problematice, în măsura în care implică de pildă faptul că domenii extinse ale matematicii, precum algebra abstractă, nu conţin enunţuri obiective. Voi încheia prin a formula o întrebare care este deschisă de această lucrare, dar va fi adresată într-una viitoare.

---

* Această lucrare este dedicată Profesorului Ilie Pârvu, cu multă recunoştinţă pentru sprijinul si îndrumarea pe care mi le-a acordat cu generozitate până acum, şi cu speranţa că va continua să o facă şi de acum înainte.

** Research for this paper was supported by a Marie Curie Post-Doctoral Fellowship (CIG 293899) within the 7th European Community Framework Programme, and by the University of Bucharest.

1. Ficţionalismul matematic

Ficţionalismul matematic are o istorie care se întinde cel puţin până în filosofia modernă prekantiană. Leibniz, de exemplu, în ciuda unor ezitări iniţiale cu privire la statutul ontologic al infinitezimalilor, scria într-o scrisoare către Des Bosses din 11 Martie 1706 că aceştia nu sunt decât "ficţiuni mentale, moduri convenabile de a vorbi, potrivite pentru calcule, exact cum sunt rădăcinile imaginare în algebră".[1] Cu alte cuvinte, enunţurile care fac referire la numerele infinitezimale şi cele imaginare sunt admise într-o demonstraţie matematică ori o teorie ştiinţifică nu pentru adevărul lor, ci mai degrabă pentru utilitatea lor. Euler pare să fi susţinut o poziţie asemănătoare în măsura în care credea că "aceste numere ... există în imaginaţia noastră, şi noi avem o idee suficientă despre ele pentru că ştim că √-4 se referă la un număr care produce -4 când este multiplicat cu el însuşi. Pentru acest motiv, nimic nu ne împiedică să folosim aceste numere imaginare în calcule".[2] Euler a dovedit utilitatea numerelor imaginare, de pildă, în rezolvarea faimoasei dispute dintre Leibniz şi Johann Bernoulli cu privire la valoarea logaritmului unui număr negativ, arătând că această valoare nu este unică, ci poate fi oricare dintr-o infinitate de numere imaginare.[3]

În opoziţie cu acest ficţionalism timpuriu, alţi matematicieni, precum Wallis, susţineau ideea conform căreia enunţurile pe care Leibniz şi Euler le înţelegeau ca făcând referire la ficţiuni matematice nu se referă la nimic, ci sunt expresii non-referenţiale, pur simbolice. Această idee pare să fi fost împărtăşită, printre alţii, de Berkeley şi Cauchy, însă apoi vehement respinsă de Hermann Hankel, care vedea în ea o premisă a ideii că matematica este un simplu joc cu semne desenate pe hârtie.[4] Pentru el, ca şi pentru Leibniz şi Euler, simbolurile matematice denotă obiecte mentale ori intelectuale (*Gedankendinge*), ceea ce implică, în viziunea lui Hankel, că matematica nu poate fi un simplu *Gaukelspiel*. La începutul secolului 20, şi Hans Vaihinger scria că "numerele negative, fracţiile, numerele iraţionale şi cele imaginare ... sunt constructe ficţionale de mare valoare pentru progresul ştiinţei," subliniind oarecum în mod optimist că ele sunt "în mod universal recunoscute ca ficţionale".[5]

Ficţionalismul matematic, în forma sa modernă, a fost articulat de filosoful american

1 Pentru o discuție concentrată pe viziunea lui Leibniz asupra ficțiunilor matematice, vezi Jesseph 1998.
2 Vezi Euler 1765, 66.
3 Vezi Euler 1751.
4 Vezi Hankel 1867, 14.
5 Vezi Vaihinger 1911, cap. 12.

Hartry Field în cartea *Science Without Numbers*, publicată în 1980, şi în *Realism, Mathematics, and Modality*, publicată în 1989, dar a fost apoi preluat de alţi autori.[6] Un aspect important discutat în literatura recentă este cel al scopurilor epistemice ale utilizării ficţiunilor în matematică.[7] În viziunea ficţionalistă, enunțurile care fac referire la anumite obiecte, cum ar fi cele abstracte, cele non-actuale, ori cele neobservabile, sunt incluse în discursul matematic pentru utilitatea lor, adică în vederea facilitării unui calcul, a unei demonstraţii, ori a unei predicţii ori explicaţii ştiinţifice. Înainte de a evalua succesul ori insuccesul în atingerea acestor scopuri epistemice, cred că este profitabil să întrebăm ce anume justifică caracterul ficţional al acestor obiecte şi, prin urmare, ideea că enunţurile care fac referire la ele sunt propriu-zis false? Argumentul principal pentru ficţionalism, cu precădere pentru ficţionalismul matematic, a fost foarte clar expus de către Mark Balaguer într-o lucrare recentă:

1. Enunţurile matematice descriu natura anumitor obiecte.
2. Dacă enunţurile matematice descriu natura anumitor obiecte, atunci dacă aceste enunţuri sunt adevărate, acele obiecte există.
3. Prin urmare, dacă enunţurile matematice sunt adevărate, atunci acele obiecte există.
4. Dacă acele obiecte există, atunci ele sunt abstracte.
5. Nu există obiecte abstracte.
6. Prin urmare, obiectele descrise de enunţurile matematice nu există.
7. Prin urmare, enunţurile matematice sunt false.[8]

În această secţiune, voi analiza pe scurt acest argument, şi în special premisele 1, 2 şi 5, urmărind parţial discuţia oferită de Balaguer. Scopul meu este să prezint poziţia ficţionalismului matematic în mod suficient de clar pentru ca cititorul să perceapă imediat relevanţa întrebării referitoare la obiectivitatea matematicii pentru această poziţie, întrebare care va fi introdusă în secţiunea a doua. Răspunsul ficţionalist la această întrebare, prezentat în secţiunea a treia, ne va îndepărta de discuţia oferită de Balaguer, care după părerea mea este inadecvată, după cum vom vedea, datorită faptului că deşi preia ideea lui Field că un enunţ matematic este obiectiv numai dacă este "adevărat în naraţiunea matematicii" (*true in the story of mathematics*), lasă fără răspuns întrebarea cu privire la obiectivitatea acestui tip de naraţiune.

6 Pentru o listă de lucrări recente care apără ficţionalismul matematic, vezi Balaguer 2011.
7 Pentru discuţii referitoare la scopurile epistemice ale utilizării ficţiunilor in ştiinţele naturii şi în cele sociale, vezi Suarez 2009.
8 Vezi Balaguer 2011.

Să începem cu premisa 5, care neagă existenţa obiectelor abstracte. Motivaţia acestei negaţii poate veni din reticenţa cuiva de a se angaja ontologic cu privire la acest tip de obiecte, din ceea ce s-ar putea numi minimalism ontologic. Minimalismul ontologic, care se întinde în istoria filosofiei cel puţin până la Ockham, este însă dificil de apărat, în ciuda atractivităţii lui iniţiale. Am putea invoca, de pildă, ideea că un discurs care nu angajează ontologic cu privire la obiectele abstracte, non-actuale, ori neobservabile, este mai simplu, din punct de vedere epistemic, decât unul care o face. Dar nu este clar că această idee este lipsită de probleme, deoarece este plauzibil să credem că simplitatea unui discurs minimal ontologic poate fi mai redusă decât cea a unuia care postulează obiecte abstracte dar are în schimb reguli de raţionare mai simple.

Respingerea minimalismului ontologic caracterizează platonismul matematic, adică poziţia conform căreia obiectele la care se referă enunţurile matematice există în mod real, adică independent de mintea şi de limbajul nostru. Gödel pare să fi susţinut că matematicienii pot intui aceste obiecte în mod analog felului cum percep obiectele concrete.[9] Dar împotriva minimalismului ontologic s-ar putea invoca şi argumentul lui Leibniz conform căruia consistenţa unor lucruri poate fi un temei suficient pentru existenţa lor independentă de mintea şi de limbajul nostru: "Cel mai puternic criteriu pentru realitatea fenomenelor, suficient chiar dacă este luat de unul singur, este succesul în predicţia fenomenelor viitoare pe baza celor trecute ori prezente, unde predicţia este bazată pe un temei, pe o ipoteză anterior confirmată, ori pe consistenţa obişnuită a lucrurilor... Într-adevăr, chiar dacă am spune că această lume este doar un vis, iar lumea vizibilă doar o fantasmă, eu aş numi acest vis ori această fantasmă suficient de reală, dacă nu am fi niciodată înşelaţi de ea când folosim raţiunea bine."[10] Un argument analog pare să fi motivat poziţia timpurie a lui Leibniz cu referire la existenţa infinitezimalilor, dar această poziţie, după cum am notat deja, a fost abandonată ulterior în favoarea uneia ficţionaliste.

Dincolo de motivele care au justificat acest abandon, trebuie notat că reprezentanţii platonismului şi cei ai ficţionalismului matematic, deşi au păreri divergente cu privire la ontologia discursului matematic, sunt de acord cu privire la semantica acestui discurs, adică cu faptul că enunţurile matematice descriu natura anumitor obiecte, fapt exprimat de premisa 1 din argumentul de mai sus. Dar de ce am fi de acord cu ideea că enunţurile matematice

9 Vezi de pildă Gödel 1947. Pentru platonismul lui Gödel, vezi Parsons 1995, Potter 2001 şi Detlefsen 2011. Pentru o discuţie mai generală a platonismului matematic, vezi Linnebo 2011.

10 Vezi Leibniz 1683.

descriu natura anumitor obiecte? Poate fi justificată opinia că, dimpotrivă, enunţurile matematice *nu* descriu natura nici unui obiect, că de exemplu enunţul "pentru orice număr prim p şi orice număr întreg a, $a^p \equiv a \pmod p$" nu se referă la numere întregi şi la cele prime? Răspunsul afirmativ la această întrebare, caracteristic nominalismului matematic, este motivat de posibilitatea de a parafraza enunţurile matematice, aşa încât enunţul "pentru orice număr prim p şi orice număr întreg a, $a^p \equiv a \pmod p$" să fie interpretat ca un enunţ condiţional: "*dacă* există numere întregi şi numere prime, *atunci* pentru orice număr prim p şi orice număr întreg a, $a^p \equiv a \pmod p$." Potrivit acestei concepţii, toate enunţurile matematice asertorice, precum mica teoremă a lui Fermat luată aici ca exemplu, ar trebui interpretate ca enunţuri condiţionale, deşi cele dintâi sunt preferate celor din urmă din motive practice ori pur stilistice.

Problema imediată cu interpretarea nominalistă este că nu reprezintă cu acurateţe intenţiile matematicienilor, care atunci când formulează, de exemplu, mica teoremă a lui Fermat, o înţeleg ca făcând referire la numere întregi şi la numere prime. Într-adevăr, nimic nu pare a sugera că de fapt matematicienii nu intenţionează să se refere, în acest caz, la astfel de numere. Este adevărat că intenţiile cuiva sunt, în general, dificil de identificat, însă un nominalist ar putea nega (împotriva ficţionalismului) că ele sunt un ghid suficient de bun pentru semantica discursului matematic, exact cum un ficţionalist neagă (împotriva platonismului) că intenţiile sunt un ghid suficient de bun pentru ontologia acestui discurs.

Premisa 2 în argumentul pentru ficţionalism spune că dacă enunţurile matematice descriu natura anumitor obiecte, atunci dacă aceste enunţuri sunt adevărate, atunci acele obiecte există. Cu alte cuvinte, dacă intenţiile matematicienilor sunt luate, în pofida criticii nominaliste, drept un ghid suficient de bun pentru semantica discursului matematic, atunci orice teoremă implică o poziţie ontologică realistă. Neo-Meinongismul respinge, însă, această poziţie în acelaşi timp cu cea nominalistă, şi susţine de exemplu că deşi mica teoremă a lui Fermat se referă la numere întregi şi la numere prime, astfel de numere nu există. Dar, desigur, dacă ele nu există, cum poate fi adevărat că pentru orice număr prim p şi orice număr întreg a, $a^p \equiv a \pmod p$? Ficţionalistul poate răspunde imediat: nici o teoremă nu este propriu-zis adevărată, tocmai pentru că obiectele la care se referă nu există, căci ele sunt doar ficţiuni. Însă cei ce apără neo-Meinongismul cred că un enunţ poate fi adevărat în ciuda faptului că obiectele la care se referă nu există, şi asta pentru că deşi nu există, ele pot avea proprietăţi (ca de pildă proprietatea de a fi inexistent).[11] Ideea aceasta ar implica, însă, că enunţul "Victor

11 Vezi, de exemplu, Priest 2005. Vezi şi Azzouni 2010, care neagă faptul că proprietăţile obiectelor inexistente determină valoarea de adevăr a unui enunţ care se referă la aceste obiecte (Azzouni 2010).

Petrini scrie o lucrare" este adevărat, chiar dacă filosoful Petrini, bineînţeles, nu există. Mai mult, ar implica şi că enunţul "Iulian Toader scrie o lucrare" ar fi adevărat chiar dacă eu nu aş exista.

Este destul de clar că nici una dintre premisele argumentului pentru ficţionalism, discutate mai sus, nu este nici respinsă, nici stabilită în mod definitiv. Nu este însă scopul meu să ofer aici o trecere în revistă a tuturor obiecţiilor şi a răspunsurilor la aceste obiecţii, care ar putea decide în privinţa ficţionalismului matematic. În schimb, în ceea ce urmează, mă voi concentra asupra unei singure obiecţii, bazată pe întrebarea cu privire la obiectivitatea matematicii. Voi începe prin a da o formulare cât se poate de clară şi succintă a acestei întrebări, precum şi a unora dintre abordările ei clasice.

2. Obiectivitatea matematicii

Întrebarea cu privire la obiectivitatea matematicii, aşa cum o înţeleg eu în această lucrare, se referă la condiţiile necesare pentru obiectivitatea enunţurilor matematice, unde un enunţ este obiectiv dacă exprimă relaţii care au loc în mod independent de mintea şi de limbajul matematicienilor. Această întrebare poate fi abordată în mod diferit de fiecare dintre poziţiile filosofice amintite în secţiunea precedentă. Spre exemplu, platonismul matematic, cel puţin în versiunea care îi este atribuită de obicei lui Gödel, susţine că existenţa obiectelor matematice este suficientă pentru obiectivitatea enunţurilor care se referă la ele: dacă obiectele matematice există în mod independent de mintea şi de limbajul matematicienilor atunci şi relaţiile dintre aceste au loc în mod independent de mintea şi de limbajul matematicienilor, şi prin urmare enunţurile matematice care exprimă aceste relaţii sunt obiective. Obiectivitatea enunţurilor matematice este secundară ontologiei lor, în sensul că este determinată de existenţa obiectelor matematice.

Fireşte, se poate întreba aici care sunt condiţiile în care enunţurile matematice pot exprima relaţii ce au loc în mod independent de mintea şi de limbajul matematicienilor. Recursul la ideea că matematicienii au capacitatea de a intui obiectele matematice în mod analog felului cum percep obiectele fizice pare pur şi simplu misterioasă, şi ca atare fără prea mare putere explicativă. Însă, această concepţie asupra obiectivităţii matematicii nu este împărtaşită de toţi reprezentanţii platonismului. Frege, de pildă, poate fi înţeles ca apărând un platonism *contextualist*, fiindcă respinge ideea că obiectivitatea matematicii poate fi deteminată de existenţa obiectelor matematice, şi crede că semantica enunţurilor matematice este în fapt prioritară pentru determinarea obiectivităţii. Cu alte cuvinte, Frege consideră că identificarea condiţiilor în care enunţurile matematice pot exprima relaţii ce au loc în mod independent de mintea şi de limbajul matematicienilor este esenţială pentru obiectivitatea matematicii, şi propune aşa numitul principiu al contextualităţii drept una dintre aceste condiţii.[12]

Spre deosebire de platonism, în oricare dintre versiunile sale, alţi matematicieni, dar în special apărătorii intuiţionismului lui Brouwer, neagă existenţa obiectelor matematice independentă de mintea matematicienilor, şi resping în această măsură ideea că matematica poate fi considerată obiectivă. Matematica este, în concepţia lor, o activitate pur subiectivă, iar enunţurile matematicii nu pot exprima decât relaţii între obiecte care sunt întotdeauna dependente de mintea noastră. Heyting scrie, de exemplu, că intuiţioniştii "nu atribuie numerelor întregi sau oricăror alte obiecte matematice o existenţă independentă de gândirea noastră, adică o existenţă transcendentală... Obiectele matematice sunt prin chiar natura lor dependente de gândirea noastră. Existenţa lor este garantată numai în măsura în care ele pot fi determinate de gândire. Ele au proprietăţi numai în măsura în care acestea pot fi distinse în ele de gândire."[13] A spune că obiectele matematicii şi proprietăţile lor există numai în măsura în care ele pot fi determinate de gândire înseamnă a spune că ele există numai daca pot fi construite în mintea matematicianului. Weyl, de exemplu, exprimă în repetate rânduri ideea că "numerele sunt ... o creaţie liberă a minţii".[14] Prin urmare, pentru intuiţionişti, enunţurile matematice sunt adevărate numai dacă obiectele şi proprietăţile lor, la care se referă aceste enunţuri, nu sunt nimic altceva decât construcţii ori creaţii mentale libere (adică neconstrânse de experienţa senzorială).

Tensiunea aparentă dintre concepţia intuiţionistă a matematicii şi sentimentul că matematica are totuşi de a face cu relaţii care par a avea loc în mod independent de mintea noastră este descrisă de alţi apărători ai constructivismului matematic, precum Josiah Royce, în felul următor: "Domeniul matematicianului este, într-un sens, libera sa creaţie. Într-un alt sens, este o lume în care apar la lumină lucruri pe care el, în calitatea sa privată, nici nu le-a intenţionat, nici nu le-a anticipat. În acea lume el poate face greşeli, poate avea opinii false cu privire la propriile sale creaţii şi, de parcă ar lucra într-un laborator, îşi poate corecta aceste

12 Vezi Ricketts 1986 pentru discuţia legăturii dintre principiul contextualităţii al lui Frege şi problema obiectivităţii matematice. De asemenea, vezi Reck 1997 pentru o comparaţie a răspunsului lui Frege cu cel al lui Wittgenstein din perioada sa târzie.
13 Vezi Heyting 1931, 52sq, citat în Shapiro 2007, 337.
14 Vezi Weyl 1927, 19. Pentru discuţia detaliată a acestei idei, vezi Toader 2011, cap. 2.7.

opinii pe baza unei experienţe ulterioare planificate cu atenţie, experienţă a cărei instrucţie o aşteaptă supus de parcă el nu ar fi în nici un sens creatorul vreunui obiect prezent."[15] În lumina acestei tensiuni, şi dincolo de soluţia (lipsită de claritate) a dizolvării ei propusă de Royce, pare legitimă întrebarea ce soluţie ar putea oferi un constructivist la problema obiectivităţii matematicii?

Această întrebare este relevantă pentru discuţia mea în această lucrare întrucât un eventual răspuns ar putea arunca lumină şi asupra întrebării care ne preocupă aici, anume ce soluţie ar putea oferi un ficţionalist la problema obiectivităţii matematicii (ori în cazul în care această problemă pare a fi insolubilă pentru ficţionalist, care sunt motivele pentru care lucrurile par a sta aşa şi nu altfel). La prima vedere, problema obiectivităţii pare într-adevăr insolubilă pentru ficţionalist, dar pentru alte motive decât cele care par a o face insolubilă pentru constructivist. După cum am văzut, pentru constructivist, enunţurile matematice sunt adevărate numai dacă se referă la construcţii mentale, dar exact din acest motiv ele nu pot fi obiective. Pentru ficţionalist, enunţurile matematice sunt propriu-zis false pentru că obiectele matematice nu există, ci sunt doar ficţiuni, şi ca atare sunt dependente de mintea şi de limbajul matematicienilor. Din acest motiv, enunţurile matematice nu pot fi obiective.

Deşi susţin poziţii opuse cu privire la valoarea de adevăr a enunţurilor matematice, ficţionalismul şi constructivismul pot oferi, cred eu, aceeaşi soluţie la problema obiectivităţii matematicii. Aceasta este diferită de soluţiile propuse deja de unii ficţionalişti precum Field şi Balaguer, întrucât prevede că obiectivitatea matematicii necesită un anumit tip de invarianţă, şi anume invarianţa relaţiilor descrise de un enunţ matematic. Acest tip de invarianţă poate fi definită, după cum vom vedea mai jos, cu ajutorul conceptului model-teoretic de categoricitate.

3. Ficţionalismul şi obiectivitatea matematică

Înainte de a prezenta soluţia cea mai plauzibilă pe care ficţionalismul matematic o poate oferi, cred eu, problemei obiectivităţii matematicii, şi de a arăta care sunt dificultăţile pe care această soluţie le întâmpină, vreau să discut pe scurt două încercări de a rezolva această problemă, care aparţin unor reprezentanţi ai ficţionalismului pe care i-am amintit deja mai sus, Field şi Balaguer, şi care sunt după părerea mea nesatisfăcătoare.

---

15 Vezi Royce 1901.

Pentru a explica poziţia lui Field, să pornim de la analiza lui a ideii că, în ciuda eliminării angajării ontologice faţă de obiectele abstracte, unul dintre avantajele parafrazei nominaliste este că ar putea oferi o soluţie la problema obiectivităţii matematicii.[16] Care ar fi această soluţie? Pe scurt, aceasta prevede că un enunţ matematic este obiectiv numai dacă poate fi dedus logic într-un sistem formal, precum teoria mulţimilor a lui Zermelo şi Fraenkel (ZF). Această condiţie presupune, bineînţeles, că axiomele sistemului sunt ele însele enunţuri obiective, pentru că altfel obiectivitatea matematicii ar fi redusă la obiectivitatea logicii. Obiectivitatea axiomelor nu poate însă necesita adevărul lor, deoarece acest fapt ar angaja ontologic faţă de obiectele abstracte şi ar constitui în fapt o respingere a poziţiei nominaliste. Cum ar putea înţelege un nominalist obiectivitatea axiomelor unui sistem formal?

Răspunsul la această întrebare depinde de felul în care nominalistul înţelege parafrazarea enunţurilor matematice, mai precis, de felul în care este înţeleasă relaţia dintre un enunţ matematic şi parafraza lui nominalistă. Dacă această relaţie nu este o relaţie de echivalenţă logică, aşa încât este posibil ca o parafrază să fie adevărată în ciuda faptului că enunţul matematic este fals (deoarece obiectele la care se referă nu există), atunci axiomele unui sistem formal pot fi obiective chiar în cazul în care nu sunt adevărate, dacă obiectivitatea lor este înţeleasă ca necesitând doar adevărul *parafrazelor* lor. Acest fapt nu ar angaja ontologic faţă de obiectele abstracte şi deci nu ar constitui o respingere a poziţiei nominaliste.

Prin urmare, această soluţie nominalistă la problema obiectivităţii matematicii prevede că un enunţ matematic este obiectiv numai dacă poate fi dedus logic într-un sistem formal ale cărui axiome sunt obiective, în sensul că parafrazele lor sunt adevărate. Este de notat faptul că această soluţie nu implică imediat faptul că un enunţ matematic este obiectiv numai în cazul în care parafraza lui este adevărată. De exemplu, nu implică faptul că enunţul "pentru orice număr prim p şi orice număr întreg a, $a^p \equiv a \pmod{p}$" este obiectiv doar dacă parafraza "dacă există numere întregi şi numere prime, atunci pentru orice număr prim p şi orice număr întreg a, $a^p \equiv a \pmod{p}$" este adevărată. Acesta este cazul doar dacă se presupune că, întocmai logicii aritmeticii modulare, derivarea acestei parafraze din parafrazele axiomelor aritmeticii modulare urmează o logică obiectivă.

După cum am văzut deja mai sus, în secţiunea a doua, poziţia nominalistă poate fi criticată pentru că nu reprezintă cu acurateţe intenţiile matematicienilor, care sugerează faptul

16 Vezi Field 1989, 272-294.

că enunţurile matematice descriu anumite obiecte. Prin urmare, se poate spune despre soluţia nominalistă la problema obiectivităţii matematicii că este deficientă întrucât ignoră semantica standard a discursului matematic aşa cum este el folosit şi înţeles de cei ce practică matematica. Poate că aceasta nu este o deficienţă majoră, însă este clar că ar fi raţional să preferăm o soluţie mai bună, dacă ea ar exista.

Conform ficţionalismului propus de Field, această soluţie există. După părerea lui, un enunţ matematic este obiectiv numai dacă poate fi dedus logic într-un sistem formal ale cărui axiome sunt obiective, dar obiectivitatea lor nu necesită adevărul parafrazelor lor, fiindcă ficţionalistul respinge ideea parafrazării. Prin urmare, pentru ficţionalist, un enunţ este obiectiv numai dacă este *adevărat în naraţiunea matematicii* ("true in the story of mathematics"), adică *adevărat într-un sistem formal* acceptat în mod curent de matematicieni (de pildă, *adevărat în ZF*).[17] De pildă, chiar dacă este propriu-zis falsă deoarece obiectele la care se referă nu există, mica teoremă a lui Fermat este obiectivă numai în cazul în care este derivabilă în sistemul aritmeticii modulare, adică doar dacă este *adevărată în aritmetica modulară*. În mod similar, enunţul "Petrini scrie o lucrare," deşi este fals fiindcă Petrini nu există, este obiectiv numai dacă este *adevărat în "Cel mai iubit dintre pământeni"*.

Două dificultăţi apar în acest moment pentru ficţionalismul lui Field. Prima este indicată de existenţa enunţurilor care nu pot fi deduse logic într-un sistem formal. Ipoteza continuumului a lui Cantor, spre exemplu, este nedecidabilă în teoria mulţimilor (adică într-un sistem acceptat în mod curent în matematică, precum ZF), şi prin urmare, după Field, nu este un enunţ obiectiv.[18] Însă nimic nu pare a sugera că matematicienii nu ar putea descoperi că această ipoteză poate fi dedusă într-un sistem formal care este deocamdată necunoscut, dar care ar putea fi formulat prin identificarea unor noi axiome. Dificultatea pentru poziţia lui Field pare a fi că, dacă obiectiv înseamnă decidabil într-un sistem formal acceptat în mod curent în matematică, şi prin urmare, dacă obiectiv înseamnă *adevărat în naraţiunea matematicii*, atunci această soluţie este prea îngustă ca să dea un criteriu adecvat pentru obiectivitatea întregii matematici.

Această dificultate poate fi, însă, uşor înlăturată prin extinderea, propusă de Balaguer, a noţiunii de *adevărat în naraţiunea matematicii*, aşa încât nu doar sistemele formale acceptate în mod curent în matematică să constituie naraţiunea matematicii, ci şi alte sisteme care vor fi formulate în viitor. În principiu, Balaguer consideră că soluţia ficţionalistă la

17 Vezi Field 1998.
18 Vezi Balaguer 2009.

problema obiectivităţii matematicii se bazează pe aceeaşi idee a lui Field. Un enunţ matematic este obiectiv, după Balaguer, numai dacă poate fi dedus într-un sistem acceptat în mod curent în matematică ori într-altul care ar putea fi acceptat de matematicieni în viitor, adică numai în cazul în care este *adevărat în naraţiunea extinsă a matematicii*.

Dar dificultatea majoră care rămâne, cred eu, este indicată de întrebarea referitoare la obiectivitatea axiomelor, la care ficţionalistul trebuie să răspundă dacă nu vrea să reducă obiectivitatea matematicii la cea a logicii. Cum ar putea înţelege un ficţionalist obiectivitatea axiomelor unui sistem formal? Pe de o parte, ficţionalistul nu poate accepta răspunsul nominalist că axiomele unui sistem formal sunt obiective doar dacă parafrazele lor sunt adevărate, pentru că el respinge parafrazarea. Pe de altă parte, ficţionalistul nu poate propune că axiomele unui sistem formal sunt obiective doar dacă ele însele sunt adevărate, deoarece acest fapt ar angaja ontologic faţă de obiectele abstracte. Dar ficţionalistul îşi poate însuşi răspunsul constructivist, conform căruia, după cum vom vedea, axiomele unui sistem formal sunt obiective doar dacă acel sistem este categoric.

4. Obiectivitate şi categoricitate

În această secţiune voi discuta următorul criteriu pentru obiectivitate: "Obiectivitatea [unei teorii] înseamnă invarianţa [acestei teorii] faţă de grupul automorfismelor [ei]" şi voi arăta că el poate fi folosit de către ficţionalist în suportul soluţiei la problema obiectivităţii matematicii descrise în secţiunea precedentă. Mai exact, el poate fi baza unui răspuns la întrebarea referitoare la obiectivitatea axiomelor unui sistem formal, care poate evita atât necesitatea parafrazării specifice nominalismului, cât şi angajările ontologice care caracterizează platonismul.

Acest criteriu a fost propus de Weyl, unul dintre reprezentanţii cei mai de marcă ai constructivismului matematic.[19] Un pic mai precis, el spune că o teorie este obiectivă numai dacă relaţiile exprimate de axiomele ei rămân invariante faţă de transformările unu-la-unu ale unei interpretări în domeniul de obiecte al teoriei. Un enunţ derivat din axiomele teoriei este obiectiv numai dacă relaţiile exprimate de acesta rămân invariante faţă de transformările unu-

19 Vezi Weyl 1952, 132. Ideea că invarianţa unei teorii este necesară pentru obiectivitatea ei a fost preluată astăzi în filosofia ştiinţei; vezi Nozick 2001, Kosso 2003, ori Debs and Redhead 2007. În ciuda rădăcinilor ei istorice, care se întind cel puţin până la matematica secolului 17, această idee pare însă a fi ignorată în filosofia contemporană a matematicii.

la-unu ale unei interpretări în domeniul de obiecte al teoriei faţă de care rămân invariante şi relaţiile exprimate de axiome. De exemplu, un enunţ aritmetic este obiectiv numai în cazul în care exprimă relaţii ce rămân invariante faţă de transformările unu-la-unu ale unei interpretări în domeniul numerelor întregi faţă de care rămân invariante şi relaţiile exprimate de axiomele aritmeticii.

Înainte de a vedea cum poate fi exprimat mai riguros acest criteriu, trebuie să întrebăm dacă el este cu adevărat adecvat. Cu alte cuvinte, poate invarianţa unei teorii faţă de grupul *automorfismelor* ei fi luată drept criteriu al obiectivităţii? Aceasta pare a presupune fie că există un domeniu unic de obiecte în care acea teorie poate fi interpretată, fie că un domeniu unic poate fi identificat drept cel prin raport cu care invarianţa va fi măsurată. În primul caz, presupunerea ar fi falsă deoarece o teorie matematică poate, de obicei, fi interpretată în domenii distincte de obiecte. În al doilea caz, nu este clar care ar fi criteriul după care se poate alege, dintre domeniile în care teoria poate fi interpretată, acela relevant ori necesar pentru determinarea invarianţei.

Prin urmare, mi se pare mai adecvat să spunem că o teorie este obiectivă numai dacă relaţiile exprimate de axiomele ei rămân invariante faţă de transformările *izomorfice*, si nu doar faţă de cele automorfice, ale unei interpretări a teoriei. Astfel înţeles, criteriul lui Weyl este suficient de larg pentru a permite faptul că o teorie matematică este interpretabilă în domenii distincte de obiecte. Dar dacă această observaţie este corectă, atunci acest criteriu spune că o teorie matematică este obiectivă doar dacă este *categorică*.

Noţiunea de categoricitate a fost introdusă în aşa numita Şcoală a Postulaţioniştilor Americani, la începutul secolului 20, deşi ideea este prezentă, desigur, încă la Dedekind.[20] Ea poate fi considerată ca un anumit tip de completitudine, aşa fiind de fapt felul în care o înţelege Weyl: "Este nevoie doar ca [oricare] două interpretări concrete ale unui sistem de axiome complet să fie izomorfice una cu cealaltă ... Această înţelegere a completitudinii se desemnează drept categoricitate a sistemului".[21] Aceeaşi idee este mai târziu propusă ca alternativă la o înţelegere a completitudinii conform căreia un sistem este complet dacă are un domeniu de interpretare unic: "Am fi putut numi un sistem complet dacă sensul conceptelor

20 Edward Huntington foloseşte de fapt termenul de "suficienţă" pentru a exprima o part a unei noţiuni mai comprehensive de completitudine, chiar acea parte numită "categoricitate" după ce Oswald Veblen a introdus acest termen dând credit pentru el lui John Dewey (vezi Huntington 1902, 264, Veblen 1904, 346). Pentru o analiză a noţiunii de categoricitate, vezi Awodey and Reck 2002.

21 Vezi manuscrisul Hs91a din colecţia Weyl păstrată în arhiva *Institutului Federal al Tehnologiei* (ETH) din Zurich.

lui de bază ar fi fixat în mod unic ca urmare a cerinţei de validitate a axiomelor. Dar acest ideal nu poate fi realizat, deoarece fiecare reprezentare izomorfică a unei interpretări concrete este desigur o altă interpretare concretă. Formularea finală este aceasta: Un sistem de axiome este complet, ori *categoric*, [dacă şi numai] dacă oricare două dintre interpretările lui concrete sunt izomorfice."[22]

Această noţiune de categoricitate poate fi invocată de constructivist în sprijinul unei soluţii la problema obiectivităţii matematicii. După cum am văzut în secţiunea a treia, constructivismul susţine că obiectele matematicii şi proprietăţile lor există numai în măsura în care ele pot fi construite ori create liber în mintea matematicianului. Acest tip de existenţă este, desigur, insuficient pentru obiectivitatea enunţurilor matematice care se referă la ele, dar asta nu implică imediat că astfel de enunţuri nu pot fi obiective, ci doar dacă se asumă în plus că orice enunţ matematic care se referă la creaţii ale minţii matematicianului poate exprima numai relaţii dependente de mintea matematicianului. În orice caz, un constructivist poate adăuga că pentru a fi obiectiv, este necesar ca un enunţ matematic care se referă la astfel de creaţii să exprime relaţii invariante, în sensul explicat mai sus prin recurs la noţiunea de categoricitate. Cu alte cuvinte, pentru constructivist, un enunţ matematic poate fi obiectiv în ciuda faptului că se referă la creaţii ale minţii matematicianului, dar numai dacă acest enunţ este derivat într-un sistem de axiome categoric.[23]

Fără îndoială că această soluţie la problema obiectivităţii matematicii nu ar satisface un platonist, pentru care existenţa independentă de mintea şi de limbajul matematicianului a obiectelor matematice este o condiţie fără de care obiectivitatea unui enunţ matematic nu poate fi atinsă. Însă, cred eu, ea ar putea fi utilizată de ficţionalist ca bază pentru înlăturarea celei de-a doua dificultăţi menţionate mai sus la sfârşitul prezentării ideilor lui Field, dificultate indicată de întrebarea cu privire la obiectivitatea axiomelor unui sistem formal. Ficţionalistul ar putea susţine, aşadar, că un enunţ matematic este obiectiv numai dacă este *adevărat în naraţiunea matematicii*, adică numai în cazul în care poate fi dedus logic într-unul din sistemele acceptate de matematicieni în prezent ori în viitor. Presat fiind de întrebarea referitoare la obiectivitatea acestei naraţiuni, adică a axiomelor acestor sisteme, ficţionalistul ar putea răspunde, în modul cel mai plauzibil, invocând noţiunea de categoricitate: axiomele unui sistem formal sunt obiective numai dacă ele constituie un sistem categoric.

Această soluţie la problema obiectivităţii matematicii, oricât de plauzibilă şi de

22 Vezi Weyl 1949, 25.
23 Pentru o discuţie mai detaliată a relaţiei dintre obiectivitate şi categoricitate, vezi Toader 2011, cap. 4.

interesantă, nu este lipsită de dificultăţi. Voi nota aici doar câteva dintre ele. În primul rând, trebuie observat faptul că, pentru a fi categoric, un sistem formal necesită o logică de ordin superior, adică una care permite cuantificarea nu doar asupra variabilelor care stau pentru obiecte, ci şi asupra celor care stau pentru mulţimi de obiecte (şi prin urmare, pentru funcţii şi proprietăţi). După cum se ştie, teoriile de ordinul întâi cu interpretări infinite au interpretări neizomorfice. Acest fapt este, bineînţeles, o consecinţă a teoremei Loewenheim-Skolem. În 1922, Skolem a demonstrat că teoria mulţimilor a lui Zermelo nu este categorică, fiindcă pot fi construite interpretări concrete neizomorfice.[24] Von Neumann, care a încercat mai târziu să formuleze noi axiome în speranţa că va obţine un sistem categoric, ajunge la concluzia că "nu pare să existe nici o axiomatizare categorică a teoriei mulţimilor" şi că "sisteme infinite axiomatizate categoric probabil nu pot exista".[25]

În acest context, propunerea de a folosi ideea de categoricitate drept criteriu pentru obiectivitatea matematicii este destul de curioasă. Reacţia imediată ar fi, în mod natural, adoptarea unei logici de ordin superior pentru axiomatizarea formală a matematicii. Dar această reacţie nu pare a fi permisă de constructivist, care respinge în mod consecvent o astfel de logică. De pildă, în critica îndreptată împotriva teoriei tipurilor a lui Russell, Weyl scrie că "o versiune 'ierarhică' a analizei este artificială şi inutilă. Ea pierde din vedere obiectul ei propriu-zis, adică numărul. În mod evident, trebuie să urmăm cealaltă cale, adică să limităm conceptul de existenţă la categoriile de bază (numerele naturale şi cele raţionale) şi să nu îl aplicăm în legătură cu sistemul proprietăţilor şi relaţiilor (ori al mulţimilor, numerelor reale, şamd, care corespund acestora)."[26] Motivaţia acestei limitări este dată de faptul că în vreme ce numerele naturale şi cele raţionale pot fi create în mintea matematicianului, urmând principiile indicate de constructivist, numerele reale nu pot fi astfel create. După părerea lui Weyl, cuantificarea asupra variabilelor care stau pentru proprietăţi ori relaţii transformă logica într-o doctrină metafizică. De aceea, în sistemul prezentat în *Principia Matematica*, scria el mai târziu, "matematica nu mai este fundată pe logică, ci pe un fel de paradis al logicianului... Opinia că această lume transcendentală există reprezintă pentru credinţa noastră o încercare nu mai mică decât cea pusă de doctrinele timpurii ale Părinţilor Bisericii ori ale filosofilor scolastici ai Evului Mediu."[27]

Tensiunea dintre ideea de categoricitate şi respingerea constructivistă a logicii de ordin

24 Vezi Skolem 1922, 298.
25 Vezi von Neumann 1925, 412.
26 Vezi Weyl 1918, 32.
27 Vezi Weyl 1946, 272.

superior este, desigur, pusă şi mai bine în evidenţă de prima teoremă de incompletitudine a lui Gödel. Aceasta arată că orice teorie de ordinul întâi, cel puţin la fel de puternică precum aritmetica lui Peano, conţine o propoziţie nedecidabilă *p*, adică arată că într-o astfel de teorie nici *p,* nici *~p* nu poate fi derivată. Cu alte cuvinte, teorema arată că orice teorie de ordinul întâi, cel puţin la fel de puternică precum aritmetica lui Peano, este incompletă din punct de vedere sintactic. Acest fapt implică, dacă asumăm completitudinea logicii acestei teorii, că teoria nu este categorică, pentru că are cel puţin două interpretări neizomorfice.[28]

Cu toate acestea, ceea ce este important de remarcat este faptul că această tensiune nu există pentru ficţionalist. Acesta, spre deosebire de constructivist, nu respinge cuantificarea asupra variabilelor care stau pentru proprietăţi şi relaţii. În analiză, de exemplu, aplicarea conceptului de existenţă, aşa cum este el înţeles de ficţionalist, nu este limitată la categoriile de bază ale analizei, ci poate fi extins şi la sistemul proprietăţilor lor şi al relaţiilor dintre ele. Pentru ficţionalist, atât numerele naturale ori cele raţionale, cât şi numerele reale, sunt doar ficţiuni. Pentru ficţionalist, "paradisul logicianului" nu este o lume transcendentală, cum susţinea Weyl, ci o lume fictivă. Prin urmare, în vreme ce utilizarea de către constructivist a ideii de categoricitate drept criteriu pentru obiectivitatea matematicii este problematică, utilizarea ei în acelaşi scop de către ficţionalist pare lipsită de dificultăţi.

Aceasta este, însă, o concluzie prematură. Dificultatea majoră pe care, cred eu, o întâmpină ficţionalistul care adoptă acest criteriu este reprezentată de non-categoricitatea teoriilor algebrice. Pentru a da un singur exemplu, axiomele teoriei corpurilor pot fi interpretate, după cum se ştie, în multe corpuri de numere care nu sunt izomorfe unele cu celelalte, de pildă corpul numerelor raţionale, corpul numerelor reale, corpul numerelor algebrice, etc. Din acest motiv, chiar dacă toate aceste obiecte matematice sunt considerate ficţiuni, utilizarea ideii de categoricitate drept criteriu pentru obiectivitatea matematicii este problematică pentru ficţionalist deoarece despre o mare parte a matematicii ar trebui să spunem că nu este obiectivă. Cu alte cuvinte, această idee este prea îngustă ca să dea un criteriu pentru obiectivitatea matematicii.

În faţa acestei dificultăţi, ficţionalistul poate oferi, după părerea mea, câteva

---

28 S-ar putea argumenta că noţiunea de izomorfism poate fi definită în acord cu principiile constructiviste şi că, prin urmare, ideea de categoricitate poate fi folosită drept criteriu pentru obiectivitate, chiar dacă logica de ordin superior este respinsă. În sprijinul acestui argument, vreau doar să menţionez aici că o teorie de ordinul întâi poate fi categorică în sensul următor: dacă o astfel de teorie are o interpretare (unică până la isomorfism) de o anumită cardinalitate *k*, atunci ea este categorică pentru toate cardinalităţile nenumărabile (vezi Morley 1965, Shelah 1974, şi pentru o prezentare recentă, Hedman 2006, 205-211).

răspunsuri, din care voi prezenta pe scurt doar două. Primul dintre ele ar spune pur şi simplu că aceasta este nu este o dificultate specifică ficţionalismului, ci una comună tuturor celor care adoptă categoricitatea drept criteriu pentru obiectivitate. Nici un răspuns de acest tip, însă, nu poate satisface pe deplin. Al doilea răspuns se bazează pe ideea că, deşi multe teorii algebrice sunt într-adevăr non-categorice, asta nu înseamnă că nu pot fi identificate unele care *sunt* categorice. În fapt, chiar axiomele teoriei corpurilor pot fi făcute categorice dacă restrângem domeniile lor de interpretare considerând invarianţa relaţiilor exprimate de ele numai faţă de închiderile algebrice ale corpurilor de numere, pentru că aceste închideri sunt întotdeauna izomorfe, conform teoremei care spune că dacă K_1 şi K_2 sunt două închideri algebrice ale unui corp F, atunci funcţia identitate pe F defineşte un izomorfism $\varphi: K_1 \rightarrow K_2$.[29] Prin urmare, dacă acceptăm categoricitatea drept criteriu pentru obiectivitate, atunci un enunţ matematic despre corpuri este obiectiv numai dacă se referă la proprietăţile închiderilor lor algebrice. Desigur, întrebarea evidentă care trebuie pusă aici este, la fel ca mai sus, una referitoare la obiectivitatea enunţurilor matematice despre corpuri care nu se referă la proprietăţile închiderilor lor algebrice. Ce anume le face pe acestea, şi mai general, ce anume face sistemele de axiome non-categorice, obiective?

Întrebarea despre obiectivitatea teoriilor matematice non-categorice rămâne să fie adresată într-o lucrare viitoare. Vreau totuşi să menţionez, în încheiere, un argument care sugerează o direcţie posibilă pentru abordarea acestei întrebări. Acest argument apără ideea că obiectivitatea matematicii presupune fecunditatea ori productivitatea ei: "această formă de obiectivitate... deşi nu are de a face cu adevăruri despre o ontologie matematică, are totuşi de a face cu anumite fapte, ca de pildă faptul exprimat de ideea că conceptul de grup deschide drumul spre numeroase rezultate matematice profunde."[30] Dacă această formă de obiectivitate poate fi apărată cu success în faţa posibilelor obiecţii, atunci sensul în care un sistem de axiome poate fi obiectiv, chiar dacă este non-categoric, poate fi dat de fecunditatea lui. Am putea spune, de exemplu, că axiomele teoriei corpurilor sunt obiective, chiar dacă au interpretări neizomorfice, deoarece conceptul de corp este unul fecund ori productiv din punct de vedere matematic.

5. Bibliografie

Artin, M. (1991) *Algebra*, Prentice Hall.

29 Vezi, de exemplu, Artin 1991, 528.
30 Vezi Maddy 2011, 116.

Awodey, S. and E. Reck (2002) "Categoricity and completeness. Part I: Nineteenth-century Axiomatics to Twentieth-century Metalogic. Part II: Twentieth-Century Metalogic to Twenty-first-Century Semantics," *History and Philosophy of Logic*, 23, 1-30, 77-94.

Azzouni, J. (2010) *Talking about Nothing*, Oxford University Press.

Balaguer, M. (2009) "Fictionalism, Theft, and the Story of Mathematics," *Philosophia Mathematica* 17, 131–62.

Balaguer, M. (2011) "Fictionalism in the Philosophy of Mathematics", The Stanford Encyclopedia of Philosophy, E. N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/fictionalism-mathematics/>

Debs, T. A. and M. Redhead (2007) *Objectivity, Invariance, and Convention*, Harvard University Press.

Detlefsen, M. (2011) "Discovery, invention, and realism: Gödel and others on the reality of concepts," J. Polkinghorne (ed.) *Meaning in Mathematics*, Oxford University Press, 73-94.

Euler, L. (1751) "Über die Kontroverse zwischen den Herren Leibniz und Bernoulli über die Logarithmen negativer und imaginärer Zahlen," H. Wussing (ed.) *Zur Theorie komplexer Funktionen*, Verlag Harri Deutsch, 1996, 54-100.

Euler, L. (1765) Elements of Algebra, Longman, 1797.

Field, H. (1980) *Science Without Numbers*, Princeton University Press.

Field, H. (1989) *Realism, Mathematics, and Modality*, Basil Blackwell.

Field, H. (1998) "Mathematical Objectivity and Mathematical Objects," C. MacDonald and S. Laurence (eds.) *Contemporary Readings in the Foundations of Metaphysics*, Basil Blackwell, 387–403.

Gödel, K. (1947) "What is Cantor's continuum problem?," *American Mathematical Monthly*

54, 515–525.

Hankel, H. (1867) *Vorlesungen ueber die complexen Zahlen und ihre Functionen*, Leopold Voss.

Hedman, S. (2006) *A First Course in Logic. An introduction to model theory, proof theory, computability, and complexity*, Oxford University Press.

Heyting, A. (1931) "The Intuitionistic Foundations of Mathematics," Benacerraf, P. and H. Putnam (eds.) *Philosophy of Mathematics, Cambridge University Press,* 52–61.

Huntington, E. (1902) "A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude," *Transactions of the American Mathematical Society* 3, 264-279.

Jesseph, D. M. (1998) "Leibniz on the Foundations of the Calculus: The Question of the Reality of Infinitesimal Magnitudes," *Perspectives on Science* 6, 6-40.

Kosso, P. (2003) "Symmetry, Objectivity, and Design," K. Brading and E. Castellani (eds.) *Symmetries in Physics: Philosophical Reflections*, Cambridge University Press, 413-424.

Leibniz, G. (1683) "On the Method of Distinguishing Real from Imaginary Phenomena," L. E. Loemker (ed.) *Philosophical Papers and Letters*, Reidel, 363-366.

Linnebo, O. (2011) "Platonism in the Philosophy of Mathematics," The Stanford Encyclopedia of Philosophy, E. N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/platonism-mathematics/>.

Maddy, P. (2011) *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*, Oxford University Press.

Morley, M. (1965) "Categoricity in Power," *Transactions of the American Mathematical Society* 114, 514-538.

Nozick, R. (2001) *Invariances. The Structure of the Objective World*, Harvard University Press.

Parsons, Ch. (1995) "Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel's thought," *Bulletin of Symbolic Logic* 1, 44–74.

Potter, M. (2001) "Was Gödel a Gödelian Platonist?," *Philosophia Mathematica* 9, 331-346.

Priest, G. (2007) *Towards Non-Being: The Logic and Metaphysics of Intentionality*, Oxford University Press.

Reck, E. (1997) "Frege's Influence on Wittgenstein: Reversing Metaphysics via the Context Principle," W.W. Tait (ed.) *Early Analytic Philosophy,* Open Court, 123-185.

Ricketts, Th. (1986) "Objectivity and Objecthood: Frege's Metaphysics of Judgment," L. Haaparanta and J. Hintikka (eds.) *Frege Synthesized*, Reidel, 65-95.

Royce, J. (1901) *The World and the Individual*, Macmillan.

Shapiro, S. (2007) "The Objectivity of Mathematics" *Synthese* 156, 337–381.

Shelah, S. (1974) "Categoricity of uncountable theories," *Proceedings of the Tarski Symposium*, American Mathematical Society, 187-203.

Skolem, L. (1922) "Some remarks on axiomatized set theory," J. van Heijenoort (ed.) *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 1967, 290-301.

Suarez, M. (2009) *Fictions in Science*, Routledge.

Toader, I. D. (2011) *Objectivity Sans Intelligibility: Hermann Weyl's Symbolic Constructivism*, PhD Dissertation, University of Notre Dame.

Vaihinger, H. (1911) *Die Philosophie des Als Ob*, Felix Meiner.

Veblen, O. (1904) "A System of Axioms for Geometry," *Transactions of the American Mathematical Society* 5, 343-384.

von Neumann, J. (1925) "An axiomatization of set theory," J. van Heijenoort (ed.) *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 1967, 393-413.

Weyl, H. (1918) *Das Kontinuum und andere Monographien,* Chelsea Publishing Company, 1960.

Weyl, H. (1927) *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften*, Oldenbourg,

Weyl, H. (1946) "Review: The Philosophy of Bertrand Russell," *The American Mathematical Monthly* 53, 208-214.

Weyl, H. (1949) *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press.

Weyl, H. (1952) *Symmetry*, Princeton University Press.