양상논리 맛보기

(v1.001.20240131)

들어가기 앞서

이 책자는 형식 논리의 일종인 양상논리에 입문하고 싶으신 분들을 위한 짧은 교재입니다. 양상논리는 수리 논리학, 철학, 컴퓨터 공학 등 다양한 분야에서 활용되는 논리 체계입니다. “양상논리 맛보기”라는 말마따나, 이 책자는 양상논리에 관심은 있지만 아직 본격적으로 공부를 시작하진 않은 분들께서 ‘맛보기’를 하기에 적합한 안내 책자입니다.

이 책자를 읽는데는 명제 논리(혹은 문장 논리) 및 술어 논리(혹은 양화 논리)의 기초 내용에 대한 이해가 필요합니다. 이 책자에서 직접적으로 등장할 기호 및 규칙은 그때 그때 간략히 언급하겠지만, 보다 자세한 내용을 공부하고자 하신다면 국내외의 여러 좋은 강의 및 교재를 참고하시길 권합니다.

본 책자는 Robert Trueman의 A Modal Logic Primer에 기초하여 Aaron Thomas-Bolduc 및 Richard Zach가 펴낸 *forall x: Calgary* Fall 2021+판의 8부 내용을 CC BY 4.0 라이선스에 의거하여 이찬우가 한국어로 편역 및 가필한 것입니다. (*forall x: Calgary*는 P. D. Magnus가 쓴 *forall x* 및 그에 기초한 Tim Button의 *forall x: Cambridge*를 토대로 쓰였으며, Cathal Woods와 J. Robert Loftis가 펴낸 *forall x: Lorain County Remix*의 내용을 포함하고 있습니다.) 본 책자 및 그 내용을 이용할 때에는 CC BY 4.0 라이선스를 준수하셔야 합니다.

아무쪼록 이 책자가 양상논리를 공부해나가시는데 유용한 첫 발판이 될 수 있기를 바랍니다.

이찬우

https://philpapers.org/rec/TRUTEK

Contents

1 양상논리란?

양상논리란 양상(혹은 양태) 개념을 다루는 논리 체계다. 양상 개념의 대표적 예시로는 **필연성**과 **가능성**이 있다. 참인 것 중에는 필연적으로 참인 것도 있는 반면, 그저 어쩌다 보니 참이 된 것도 있는 것 같다. 예를 들어 '최초로 동력 비행을 성공한 사람은 오빌 라이트다'는 역사적 참이지만, 필연적으로 참은 아닌 것 같다. 왜냐면 윌버와 오빌 라이트 형제는 누가 플라이어 1호 비행기를 몰 것인지 순서를 동전 던지기로 결정했기 때문이다. (첫 비행 시도 기회를 얻었던 것은 윌버였는데 그 첫 시도는 실패했다. 3일 뒤 오빌이 첫 성공을 거두었다.) 즉 '최초로 동력 비행을 한 사람은 오빌 라이트다'는 실제 역사에서는 참이지만 반드시 참이 되었으리라는 보장은 없으며, 반면에 '최초로 동력 비행을 성공한 사람은 윌버 라이트다'는 현실에선 참이 아니지만, 참이 되는 것이 가능했을 수도 있을 것이다. 이와는 반대로 $1 + 1 = 2$ 같은 수학에서의 참은 세계가 어떻게 흘러갔든지 반드시 참이 될 수 밖에 없으며, 거짓이 되는 것은 불가능한 것 같다.

양상논리에선 보통 필연성을 $\Box$, 가능성을 $\Diamond$로 나타낸다. 즉 $\Box\mathscr{A}$는 '$\mathscr{A}$임이 필연적이다', $\Diamond\mathscr{A}$는 '$\mathscr{A}$인 것이 가능하다' 같은 식으로 읽으면 된다.

필연성도 그 종류가 다양하다. 시속 160km로 달리는건 *인간으로서는 불가능하다*. 생물학적 특성상 인간은 그렇게 빨리 뛸 수 없기 때문이다. 하지만 시속 160km로 달리는게 *물리적으로 불가능한 것*은 아닐지도 모른다. 아직은 기술이 안 돼도, 언젠가는 시속 160km로 달리는 로봇 다리를 사람 몸에 다는게 가능해질지도 모르니 말이다. 반면에 빛의 속도보다 빠르게 뛰는건 물리적으로 불가능하다. 그건 물리 법칙을 위배하기 때문이다. 그런데 또 그게 *논리적으로 불가능한* 것은 아닐 수 있다. 현실과 다른 물리법칙을 상상하는 것은 모순 없이 충분히 가능한 것 같고, 곧 빛보다 빨리 가는 물체도 논리적 모순 없이 상정할 수 있을 법하기 때문이다.

양상논리는 이 가운데 어느 양상 개념을 다룰까? *전부 다!* 이처럼 양상논리는 지극히 유연한 도구다. 가장 기본이 되는 $\Box$와 $\Diamond$에 대한 기초 규칙을 시작으로, 어떤 양상 개념을 다루는지에 따라 그에 걸맞는 규칙을 차용하면 되기 때문이다. 양상논리의 포괄 범위는 여기에 그치지 않는다. $\Box$와 $\Diamond$이 꼭 필연성 및 가능성을 뜻할 필요는 없기 때문이다. 이를테면 $\Box$는 *증명가능성*을 뜻하는 것으로도 이해할 수 있다. 이러면 $\Box\mathscr{A}$는 '$\mathscr{A}$가 증명가능하다'로, $\Diamond\mathscr{A}$는 '$\mathscr{A}$는 반박불가능하다'로 읽을 수 있게 되는 것이다. 같은 맥락에서 $\Box\mathscr{A}$는 'S가 $\mathscr{A}$를 안다' 내지는 'S가 $\mathscr{A}$를 믿는다'로 읽는 것도 가능하다. 또 $\Box$는 *도덕적 의무*를 뜻하는 것으로 볼 수도 있다. 즉 $\Box\mathscr{A}$는 '$\mathscr{A}$인 것이 도덕적으로 마땅하다', $\Diamond\mathscr{A}$는 '$\mathscr{A}$

는 도덕적으로 허용된다'가 되는 것이다. 필요한 것은 그저 □랑 ◊에 대해 그 이해 방식에 따라 적절한 규칙을 매기는 것일 뿐이다.

양상 문장은 □나 ◊ 같은 양상 연산자를 포함한 문장이다. 양상연산자의 해석에 따라 양상 문장은 증명가능할 수도, 타당할 수도 있다. 양상 문장 $\Box\mathscr{A} \to \mathscr{A}$를 예로 들어보자. □를 필연성으로 해석할 경우 이 문장은 "만약 $\mathscr{A}$가 필연적이면, $\mathscr{A}$는 참이다"가 될 것이며, □를 참된 앎으로 해석한다면 이 문장은 "만약 $\mathscr{A}$를 안다면, $\mathscr{A}$는 참이다"가 되는 것이다. 이 두 경우 모두 $\Box\mathscr{A} \to \mathscr{A}$는 타당하다: 필연적 명제는 어떤 상황에서도 참이기에 곧 현실 세계에서도 참이 되고, 또 참임을 알고 있는 명제는 곧 참이 되어야 하기 때문이다. 반면에 □를 '-임을 믿는다', 내지는 '-임이 마땅하다'로 해석할 경우, $\Box\mathscr{A} \to \mathscr{A}$는 타당하다고 보기 힘들다: 거짓 명제를 믿는 것은 얼마든지 가능하고, 또 모든 참이 되어 마땅한 명제가 실제로 참이지는 않기 때문이다. 예를 들어 "모든 범죄자는 정의의 심판을 받는다"는 참이 되어야 마땅하겠으나, 안타깝게도 참이 아닌게 현실이다.

이 책자에서는 **K**, **T**, **S4**, 그리고 **S5**, 총 네 가지 양상논리 체계를 살펴볼 것이다. 각 체계마다 증명을 할 때 허용되는 규칙, 그리고 논리적 개념을 정의할 때 쓰는 의미론이 제각기 달라진다. 가장 기본이 되는 체계는 **K**다. **K**에서 타당하거나 증명가능한 것은 다른 체계들에서도 다 증명가능하다. **K**에서 증명할 수 없는 것도 있다. 문장 $\Box A \to A$이 그 한 예시다. 이는 곧 **K**가 필연성이나 가능성을 다루기엔 적합하지 않다는 것을 방증한다. 왜냐면 □를 필연성으로 해석할 경우 $\Box\mathscr{A} \to \mathscr{A}$는 마땅히 증명가능해야 하니까 말이다. 반면에 체계 **T**에선 해당 문장이 증명가능하므로, 곧 필연성이나 가능성을 다루는데 보다 적합하다는게 따라나온다. 그렇지만 바로 이 점 때문에 **T**는 믿음이나 의무를 다루는 데는 부적합하기도 하다. □를 믿음이나 의무로 해석할 경우, $\Box\mathscr{A} \to \mathscr{A}$가 반드시 증명가능해야한다고 보는 것은 부조리하기 때문이다. 필연성 및 가능성을 다루는데 통상 가장 적합하다고 여겨지는 체계는 곧 가장 강력한 체계이기도 한 **S5**다.

1.1 양상논리 언어

형식 논리는 특정한 형식 언어를 갖고 이루어진다. 양상논리 또한 양상논리 언어를 갖고 이뤄지며, 그 언어를 엄밀하게 정의해줄 필요가 있다.

양상논리 언어는 명제 논리나 술어 논리의 언어를 확장한 것이다. 술어 논리를 확장해서 만든 양상논리는 양상 술어 논리(혹은 양화 양상논리)라고 하는데, 이 책자에서는 다루지 않겠다. 이 책자에서는

보다 간단한 명제 논리를 확장해서 만든 명제 양상 논리에 집중할 것이다.

명제 논리 언어는 다음과 같은 요소들로 구성된다: 먼저 무한히 많은 원자 문장이 있는데, 로마자 대문자에 필요하다면 아래 첨자로 아라비아 숫자를 붙여서 쓴다. $A, B, \ldots, A_1, B_1, \ldots$ 등이 다 원자 문장이다. 또 다른 요소는 명제 논리 연산자다. 이 책자에서는 $\neg$(부정), $\vee$(선언), $\wedge$(연언), $\rightarrow$(조건문), $\leftrightarrow$(쌍조건문), 이 다섯가지 명제 논리 연산자를 사용할 것이다. 더불어 문장들의 메타 변항으로는 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 같은 필기체 로마자 대문자를 쓸 것이다.

양상논리 언어는 위 요소들에 딱 양상 연산자인 $\Box$랑 $\Diamond$만 추가한 것이다. 양상논리 문장은 아래 규칙들을 통해 재귀적으로(recursively)[1] 정의하는데, 1-6행 및 9행은 명제 논리 언어 정의 규칙과 똑같다. 양상논리 언어는 여기에 7-8행만 추가한 것이다.

1. 양상논리의 모든 원자 문장은 양상논리 문장이다.
2. 만약 $\mathscr{A}$가 양상논리 문장이면, $\neg\mathscr{A}$도 양상논리 문장이다.
3. 만약 $\mathscr{A}$와 $\mathscr{B}$가 양상논리 문장이면, $(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})$도 양상논리 문장이다.
4. 만약 $\mathscr{A}$와 $\mathscr{B}$가 양상논리 문장이면, $(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$도 양상논리 문장이다.
5. 만약 $\mathscr{A}$와 $\mathscr{B}$가 양상논리 문장이면, $(\mathscr{A} \rightarrow\mathscr{B})$도 양상논리 문장이다.
6. 만약 $\mathscr{A}$와 $\mathscr{B}$가 양상논리 문장이면, $(\mathscr{A} \leftrightarrow\mathscr{B})$도 양상논리 문장이다.
7. 만약 $\mathscr{A}$가 양상논리 문장이면, $\Box\mathscr{A}$도 양상논리 문장이다.
8. 만약 $\mathscr{A}$가 양상논리 문장이면, $\Diamond\mathscr{A}$도 양상논리 문장이다.
9. 그 외의 양상논리 문장은 없다.

양상논리 문장의 예시로는 다음과 같은 예문들이 있다:

$$A, P \vee Q, \Box A, C \vee \Box D, \Box\Box(A \rightarrow R), \Box\Diamond(S \wedge (Z \leftrightarrow (\Box W \vee \Diamond Q)))$$

[1] “Recursive”는 “회귀적”으로도 번역된다.

2 양상논리의 자연연역 체계

양상논리 문장을 만드는 방법을 살펴봤으니, 양상논리로 증명을 해볼 차례가 왔다. 증명가능성을 나타내는 기호로는 $\vdash$를 사용하겠다. 요컨대 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{C}$가 뜻하는 바는 $\mathscr{C}$가 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$로부터 증명가능하다는 것이다. 다만 양상논리에는 여러 체계가 있으므로, 이게 어떤 체계에서의 증명가능성인지 표시하기 위하여 위 기호에다가 아래 첨자를 덧붙여 사용하겠다. 이를테면 $\mathscr{C}$를 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$로부터 증명하는게 체계 **K**에서 가능하다고 말하고 싶으면 이렇게 쓰면 된다: $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{K}} \mathscr{C}$.

본 책자에서 활용할 증명 체계는 피치(Fitch)식 자연연역 체계다. 피치식 자연연역 증명의 간단한 예시를 살펴보자:

$$
\begin{array}{l|l|l}
1 & P & \\
\hline
2 & \quad Q & \\
3 & \quad P \wedge Q & \wedge\mathrm{I}\ 1, 2 \\
4 & Q \to (P \wedge Q) & \to\mathrm{I}\ 2\text{–}3
\end{array}
$$

해당 증명은 전제 P에서 결론 $Q \to (P \wedge Q)$을 도출해낸 것이다. 피치식 증명에서 각 행은 행 번호, 문장, 그리고 그 문장을 도출하는데 쓰인 도출 규칙 및 그 규칙이 적용된 행 번호로 이뤄져있다. 이를테면 3행이 말하는 바는 1행 및 2행에 $\wedge$I 규칙을 적용함으로써 문장 $P \wedge Q$를 도출해낼 수 있다는 것이다. 1행 및 2행에는 도출 규칙이나 행 번호호가 없고 각각 아래에 가로줄이 쳐져 있는데, 그 까닭은 1행 및 2행이 현 증명에서 가정으로 활용되고 있기 때문이다. 특히 2행에선 세로줄을 한 겹 긋고 그 오른쪽에 문장이 쓰여있는데, 이 세로줄은 2-3행이 하나의 부분증명(subproof)을 이루고 있다는 것을 뜻한다. 그리고 증명 마지막 행엔 그 증명의 결론이 들어간다.

본 책자에서는 R(반복), $\wedge$I(연언 도입), $\to$I(조건 도입), $\to$E(조건 제거), $\neg$E(부정 제거), IP(간접 증명) 규칙 같은 명제 논리 규칙을 쓸 것이다. 이런 규칙들에 대해서는 부록인 4.2절에 소개된 기본 명제 논리 규칙들, 혹은 *forall x: Calgary* 같은 기초 논리학 교재를 참조하면 좋다.

2.1 체계 K

처음 살펴볼 양상논리 체계는 논리학자이자 철학자인 솔 크립키(Saul Kripke)의 이름을 따서 만들어진 체계 **K**로, 여러 양상논리 체계 가운데서도 특히 간단한 체계라 할 수 있다. **K**에는 명제 논리 규칙들에 더하여 $\Box$I와 $\Box$E라는 두 가지 규칙이 추가된다. 이 두 규칙은 보통의 부분증명과 비슷하게 생긴 엄밀

부분증명(strict subproof)를 중심으로 돌아간다. 보통의 부분증명이

$$
\begin{array}{rll}
1 & \vert\ \ \vert\ \underline{A} & \\
2 & \vert\ \ \vert\ A & \text{R } 1 \\
3 & \vert\ A \to A & \to\text{I } 1\text{–}2
\end{array}
$$

같은 형식을 띤다면, 엄밀 부분증명의 가장 두드러지는 특징은

$$
\begin{array}{rl}
1 & \vert\ \ \vert\ \underline{\Box} \\
2 & \vert\ \ \vert\ \ldots.
\end{array}
$$

처럼 가정 문장 A가 들어가던 자리에 대신 $\Box$가 들어간다는 것이다.

또 다른 주요 특징으로는 (규칙에 따라 명시된 몇몇 예외를 제외하면) 주어진 엄밀 부분증명 안에서는 그 바깥의 가정 일체를 사용할 수 없다는 점이 있다. 이 특징은 $\Box$I의 정의에서 잘 드러난다.

필연 도입 규칙 ($\Box$I):

$$
\begin{array}{rll}
m & \vert\ \ \vert\ \underline{\Box} & \\
n & \vert\ \ \vert\ \mathscr{A} & \\
 & \vert\ \Box\mathscr{A} & \Box\text{I } m\text{–}n
\end{array}
$$

(규칙에 따라 명시적으로 허용된 경우를 제외하면) m행에서 시작하는 엄밀 부분증명 안에서는 m행보다 위에 있는 그 어떤 행도 이용할 수 없다.

옳은 사례 하나와 그른 사례 하나를 대조해보자. 먼저 다음 증명에서는 $\Box$I가 올바르게 쓰였다.

$$
\begin{array}{rll}
1 & \vert\ \ \vert\ \underline{\Box} & \\
2 & \vert\ \ \vert\ \ \vert\ \underline{A} & \\
3 & \vert\ \ \vert\ \ \vert\ A & \text{R } 2 \\
4 & \vert\ \ \vert\ A \to A & \to\text{I } 2\text{–}3 \\
5 & \vert\ \Box(A \to A) & \Box\text{I } 1\text{–}4
\end{array}
$$

이 증명에서 등장하는 엄밀 부분증명은 1-4행에 걸쳐 있는데, 3행 및 4행에서 도출시 이용하고 있는 행은 각각 2행 및 2-3행이므로 그 엄밀 부분증명 밖으로 벗어나지 않는다. 반면 다음 증명은 □I가 잘못 쓰인 사례다.

$$
\begin{array}{lll}
1 & \vert\; \underline{A} & \\
2 & \vert\; \vert\; \underline{\Box} & \\
3 & \vert\; \vert\; A & \text{오류: R 1} \\
4 & \vert\; \Box A & \Box\text{I } 2\text{–}3
\end{array}
$$

이 증명에서 등장하는 엄밀 부분증명은 2-3행에 걸쳐 있는데, 3행에서는 1행에 규칙 R을 적용하고 있다. 그런데 1행은 엄밀 부분증명 바깥에 있으므로 문제가 발생하는 것이다.

이런 규칙을 받아들일 이유가 무엇인가? 그 핵심 발상은 다음과 같다: 엄밀 부분증명 안쪽은 그 바깥 증명의 가정으로부터 자유롭다! 증명이 있고 그 증명이 어떤 가정을 취할 경우, 그 가정은 대개 주어진 증명에 '현 상황은 이러저러하다'는 일종의 제약을 건다고 볼 수 있다. 예를 들어 '사과가 눈 앞에 있다'고 가정한다면, 사과가 눈 앞에 있지 않은 모든 임의의 상황은 배제되는 것이다. 엄밀 부분증명 안에서 바깥의 가정을 이용할 수 없다는 규칙은 곧 엄밀 부분증명 안에서는 그런 제약에서 자유로워진다는 것을 뜻한다. 요컨대 엄밀 부분증명 안에서는 '현 상황은 이러저러하다'는 바깥의 제약을 벗어난 가능성, 즉 주어진 가정이 성립하지 않는 임의의 대안적 가능성을 따져볼 수 있다는 것이다. 예를 들어 '사과가 눈 앞에 있다'고 앞에서 가정했다 한들, 엄밀 부분증명 안에서는 사과가 눈 앞에 있는 상황이든 눈 앞에 없는 상황이든 모두를 고려해야만 한다. 이처럼 엄밀 부분증명 안에서 어떤 문장을 증명할 수 있다는 것은 그 문장의 참이 임의의 모든 가능한 상황에서 성립한다는 것을 뜻하며, 이는 곧 그 참이 필연적이라는 말이다.

달리 표현하자면, 위 규칙은 $\mathscr{A}$가 정리일 경우 $\Box\mathscr{A}$도 정리라는 함축을 갖는다. 왜냐면 '$\mathscr{A}$는 정리다'라는 말은 무전제로부터 $\mathscr{A}$를 도출할 수 있다는 의미이기 때문이다.

다른 한편, 위와 같이 □I가 임의의 가능한 상황에서 필연성을 끌어내는 규칙이라면, □E는 반대로 필연적인 참으로부터 임의의 상황에서 성립하는 바를 끌어내는 규칙이라고 할 수 있다.

필연 제거 규칙 (□E):

$$
\begin{array}{r|l}
m & \Box\mathscr{A} \\
 & \begin{array}{|l} \Box \\ \hline \end{array} \\
n & \begin{array}{|l} \mathscr{A} \qquad \Box\mathrm{E}\ m \end{array}
\end{array}
$$

> *□E를 적용하려면 n행이 위치한 엄밀 부분증명 바깥에 (□𝒜가 있는) m행이 있어야 한다. 단, 이 n행이 위치한 엄밀 부분증명은 m행을 포함하지 않는 또다른 엄밀 부분증명의 부분이어서는 안된다.*

쉽게 말해서 엄밀 부분증명 바깥에 □𝒜가 있는 경우, 엄밀 부분증명 안에서 𝒜라고 해도 된다는 것이다. 그 아래 제약사항이 뜻하는 바는 이게 바로 한 겹 아래의 엄밀 부분증명에만 통한다는 것이지, 엄밀 부분증명 안에 또 다른 엄밀 부분증명이 겹친 경우에는 통하지 않는다는 것이다. 이를테면 다음 증명은 틀렸다:

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \Box\mathscr{A} \\
2 & \begin{array}{|l} \Box \\ \hline \end{array} \\
3 & \begin{array}{|l} \begin{array}{|l} \Box \\ \hline \end{array} \end{array} \\
4 & \begin{array}{|l} \begin{array}{|l} \mathscr{A} \qquad \text{오류: } \Box\mathrm{E}\ 1 \end{array} \end{array}
\end{array}
$$

이 증명에는 엄밀 부분증명 두 개가 겹쳐져 있다. 첫 번째 엄밀 부분증명은 2-4행에 걸쳐있으며, 두 번째 엄밀 부분증명은 3-4항에 걸쳐 있고 첫 번째 엄밀 부분증명에 포함된다. □E 규칙이 등장하는 4행은 두 번째 엄밀 부분증명에 속해 있는데, 4행이 이용하고자 하는 1행은 그 바로 바깥인 첫 번째 엄밀 부분증명 안에 포함된 것이 아니라, 아예 한 겹 더 밖에 있다는 것이 문제다. 따라서 4행에서 □E 규칙을 적용하는 것은 틀렸다.

다른 예제도 살펴보자.

$$
\begin{array}{rlll}
1 & \mid & \Box A & \\
2 & \mid & \Box B & \\
  & \mid & \text{———} & \\
3 & \mid & \quad\mid\ \Box & \\
  & \mid & \quad\mid\ \text{——} & \\
4 & \mid & \quad\mid\ A & \Box\mathrm{E}\ 1 \\
5 & \mid & \quad\mid\ B & \Box\mathrm{E}\ 2 \\
6 & \mid & \quad\mid\ A \wedge B & \wedge\mathrm{I}\ 4,\ 5 \\
7 & \mid & \Box(A \wedge B) & \Box\mathrm{I}\ 3\text{–}7
\end{array}
$$

보통 부분증명이랑 엄밀 부분증명을 섞어서 사용할 수도 있다.

$$
\begin{array}{rlll}
1 & \mid & \Box(A \to B) & \\
  & \mid & \text{————} & \\
2 & \mid & \quad\mid\ \Box A & \\
  & \mid & \quad\mid\ \text{——} & \\
3 & \mid & \quad\mid\quad\mid\ \Box & \\
  & \mid & \quad\mid\quad\mid\ \text{——} & \\
4 & \mid & \quad\mid\quad\mid\ A & \Box\mathrm{E}\ 2 \\
5 & \mid & \quad\mid\quad\mid\ A \to B & \Box\mathrm{E}\ 1 \\
6 & \mid & \quad\mid\quad\mid\ B & \to\mathrm{E}\ 4,\ 5 \\
7 & \mid & \quad\mid\ \Box B & \\
8 & \mid & \Box A \to \Box B & \to\mathrm{I}\ 2\text{–}7
\end{array}
$$

이 마지막 결과는 **분배 규칙**이라고도 부른다. □를 조건문 전건 후건에 분배하기 때문이다.

2.2 가능성

앞에서 소개한 내용은 **K**의 기본 규칙만을 다루고 있다. 이 기본 규칙들은 □만을 다루고 있다는걸 눈치챘을 수도 있을텐데, ◊는 □를 통해 파생적으로 정의할 수 있다:

$$\Diamond\mathscr{A} =_{df} \neg\Box\neg\mathscr{A}$$

요컨대 $\mathscr{A}$가 **참일 수 있다**는 것은 $\mathscr{A}$가 **반드시 거짓은 아니라는** 말이다. 이처럼 ◊는 **K**에서 파생적으로 정의할 수 있으므로 꼭 별도로 추가할 필요는 없지만, 그래도 편의상 다음과 같은 규칙들을

추가하겠다:

가능성 정의 규칙 (Def$\Diamond$):

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\Box\neg\mathscr{A} & \\ & \Diamond\mathscr{A} & \text{Def}\Diamond\ m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \Diamond\mathscr{A} & \\ & \neg\Box\neg\mathscr{A} & \text{Def}\Diamond\ m \end{array}$$

이 규칙들은 **K**에 아예 새로이 추가되는 내용이 아님을 유의할 필요가 있다. 이 규칙들은 그냥 $\Diamond$의 정의를 나타내는 것이다.

여기에 더해서 $\Box$와 $\Diamond$사이를 간편히 왔다갔다 할 때 도움이 되는 파생 규칙들 또한 도입하도록 하자.

양상 전환 규칙 (MC):

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\Box\mathscr{A} & \\ & \Diamond\neg\mathscr{A} & \text{MC}\ m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \Diamond\neg\mathscr{A} & \\ & \neg\Box\mathscr{A} & \text{MC}\ m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\Diamond\mathscr{A} & \\ & \Box\neg\mathscr{A} & \text{MC}\ m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \Box\neg\mathscr{A} & \\ & \neg\Diamond\mathscr{A} & \text{MC}\ m \end{array}$$

이 양상 전환 규칙 또한 **K**에 새로이 더해지는 내용은 아님을 유의하라.

체계 **K**에서는 $\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$를 증명할 수 있다. 위에서 살펴본 것처럼 **K**에서는 $\Box$를 기초 양상 연산자로 삼아서 $\Diamond$를 정의하지만, 반대로 $\Diamond$를 기초 연산자로 삼고 다음과 같이 $\Box$를 정의하는 방식도 있을 수 있다: $\Box\mathscr{A} =_{df} \neg\Diamond\neg\mathscr{A}$. 그런 의미에서 적어도 형식적인 측면에서 보자면 필연성과 가능성은 동등하게 근본적이다.

2.3 체계 T

이번엔 **K**보다 좀더 강력한 양상논리 체계를 살펴보겠다. 다음과 같은 한국어 문장을 생각해보자.

- 인간은 필연적으로 포유류다.
- 이번에 던지는 동전은 반드시 앞면이 나올 수 밖에 없다.

이들 문장이 참이라고 해보자. 그렇다면 '인간은 파충류다', '이번에 던지는 동면은 뒷면이 나온다' 같은 문장은 거짓이며, '인간은 포유류다', '이번에 던지는 동면은 앞면이 나온다' 같은 문장은 참이 되는 것 같다. 즉 만일 $\mathscr{A}$가 **필연적으로 참**이라면, $\mathscr{A}$가 **참**이라는 것 또한 받아들여야만 할 것 같다. 그런데 **K**만 갖고서는 이런 추론을 받아들일 근거가 없다. 이런 이유 때문에 **K**에 다음 추론 규칙을 추가한 체계 **T**를 고려할 이유가 생긴다.

RT 규칙:

$$\begin{array}{r|ll} m & \Box\mathscr{A} & \\ n & \mathscr{A} & \quad \mathrm{R}\mathbf{T}\ m \end{array}$$

R**T** *규칙이 적용되는* n*행이* m*행 뒤에 나오는 엄밀 부분증명 안에 포함되어서는 안된다.*

위 제약사항은 어떤 의미에선 □E에 걸렸던 제약사항과는 정반대다. 왜냐면 □E는 안쪽의 엄밀 부분증명*에서만* 쓸 수 있지만, R**T**는 안쪽의 엄밀 부분증명에서는 쓸 수 없기 때문이다.

T는 **K**에선 증명할 수 없었던 것을 증명할 수 있다는 점에서 보다 강력하다 (예. $\Box A \to A$).

2.4 체계 S4

체계 **T**에서는 □를 '벗겨낼' 수 있다. $\Box\mathscr{A}$에서 $\mathscr{A}$를 도출해낼 수 있다는 점에서 말이다. 그렇다면 □를 추가로 더할 수도 있을까? 이를테면 $\Box\mathscr{A}$에서 $\Box\Box\mathscr{A}$를 도출하는 것처럼 말이다.

이게 되는 경우도 있긴 하다: 엄밀 부분증명에서 $\mathscr{A}$를 도출했고 이때 □E는 쓰지 않았다고 해보자. 이때 □I를 쓰면 $\Box\mathscr{A}$가 도출된다. 그런데 이건 곧 $\mathscr{A}$가 동어반복(tautology)인 상황이므로, 엄밀 부분증명 안에 엄밀 부분증명을 또 한 겹 쌓은 뒤 □I를 두 번 연속으로 써서 $\Box\Box\mathscr{A}$를 증명하는 것도 가능하다. 예를 들어 $\Box\Box(P \to P)$는 다음과 같이 증명된다:

$$
\begin{array}{rll}
1 & \mid\ \underline{\mid\ \Box} & \\
2 & \mid\ \mid\ \underline{\mid\ \Box} & \\
3 & \mid\ \mid\ \mid\ \underline{\mid\ P} & \\
4 & \mid\ \mid\ \mid\ \mid\ P & \text{R } 3 \\
5 & \mid\ \mid\ \mid\ P \to P & \to\text{I } 3\text{–}4 \\
6 & \mid\ \mid\ \Box(P \to P) & \Box\text{I } 2\text{–}5 \\
7 & \mid\ \Box\Box(P \to P) & \Box\text{I } 1\text{–}6
\end{array}
$$

이 경우, $\Box\mathscr{A}$가 증명가능하고 또 $\Box\Box\mathscr{A}$도 증명가능하니만큼 $\Box$를 추가로 더했다고 할 수도 있겠다. 근데 이건 워낙 특수한 경우고, 좀더 일반적인 경우라면 어떨까? 이를테면 $\mathscr{A}$의 엄밀 부분증명에서 $\Box$E가 쓰였다면? 아니면 $\Box\mathscr{A}$가 아예 처음부터 그냥 가정으로 등장했다면? 이런 일반적인 경우에는 체계 **T**에선 $\Box\Box\mathscr{A}$를 도출할 수 있다는 보장이 없다. 예를 들어 $\Box$를 '-가 필연적이다' 혹은 '반드시 -다'로 이해할 경우, **T**에 따르자면 다음 두 문장이 서로 논리적 모순이라고 볼 근거가 없다.

1. 인간은 필연적으로 포유류다.
2. 반드시 인간이 필연적으로 포유류인 것은 아니다.

혹시 체계 **T**의 이런 특성이 불만족스럽게 느껴지는가? 충분히 근거가 있는 얘기다. 왜냐면 $\mathscr{A}$가 필연적으로 참일 경우, $\mathscr{A}$가 필연적 참이 *되지 못할 수는 없다*는 말은 꽤 직관적인 얘기 같기 때문이다.

이런 불만에 부응하는 것이 체계 **S4**다. 얘는 **T**의 기존 규칙들에 다음 규칙 R**4**를 추가해서 나온다.

R4 규칙:

$$
\begin{array}{rll}
m & \mid\ \Box\mathscr{A} & \\
 & \mid\ \underline{\mid\ \Box} & \\
n & \mid\ \mid\ \Box\mathscr{A} & \text{R}\mathbf{4}\ m
\end{array}
$$

R**4**를 *적용하려면* n*행이 위치한 엄밀 부분증명 바깥에* ($\Box\mathscr{A}$*가 있는*) m*행이 있어야 한다. 단, 이* n*행이 위치한 엄밀 부분증명은* m*행을 포함하지 않는 또다른 엄밀 부분증명의 부분이어서는 안된다.*

R4 규칙은 엄밀 부분증명 안에 $\mathscr{A}$ 대신 $\Box\mathscr{A}$를 넣는 점만 제외하면 $\Box$E와 거의 같다. 그 제약 또한 거의 같다: 엄밀 부분증명 바깥에 있던 $\Box\mathscr{A}$를 그 안쪽으로 '끌어들일' 수 있지만, 한 단계 건너뛰고 그 안의 또다른 엄밀 부분증명 안으로 곧바로 끌어들일 수는 없다. 물론 필요하다면 R**4**를 여러 번 적용해서 같은 결과를 얻어낼 수 있기는 하지만 말이다.

다음은 체계 **S4**를 활용한 증명의 한 사례다:

$$\begin{array}{rllll}
1 & \mid & \mid\ \underline{\Box A} & & \\
2 & \mid & \mid & \mid\ \underline{\Box} & \\
3 & \mid & \mid & \mid\ \Box A & \text{R}\mathbf{4}\ 1 \\
4 & \mid & \mid\ \Box\Box A & & \Box\text{I } 2\text{–}3 \\
5 & \mid\ \Box A \to \Box\Box A & & & \to\text{I } 1\text{–}4
\end{array}$$

이렇듯 $\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$도 비슷한 방식으로 증명할 수 있다. 즉 **S4**에선 $\Box$가 있을 때 거기에 $\Box$를 추가할 수 있는 것처럼, $\Diamond$가 여럿 있을 때 여분의 $\Diamond$를 *삭제할* 수도 있다. 요컨대 $\Diamond\Diamond\mathscr{A}$로부터 항상 $\Diamond\mathscr{A}$를 도출할 수 있는 것이다.

2.5 체계 S5

S4에선 $\Box$ 앞에 $\Box$를 추가할 수 있지만, $\Diamond$ 앞에 $\Box$를 추가할 수는 없다. 요컨대 $\Diamond\mathscr{A}$로부터 $\Box\Diamond\mathscr{A}$를 일반적으로 도출할 수는 없다는 것이다. 앞에서랑 마찬가지로 이게 **S4**의 한계점이라는 생각이 들지도 모른다. 특히나 $\Box$와 $\Diamond$이 각각 *필연성*과 *가능성*을 뜻한다고 본다면 말이다. $\mathscr{A}$가 참인게 가능하다면, $\mathscr{A}$가 참인게 가능하지 *않을 수 없다*는 얘긴 꽤 직관적으로 들리기 때문이다.

이런 직관을 반영하는게 우리가 살펴 볼 마지막 양상 체계인 **S5**다. 얘는 **S4**에 다음 규칙을 더해서 나온다:

R5 규칙:

$$\begin{array}{rllll}
m & \mid\ \neg\Box\mathscr{A} & & & \\
 & \mid & \mid\ \underline{\Box} & & \\
n & \mid & \mid\ \neg\Box\mathscr{A} & & \text{R}\mathbf{5}\ m
\end{array}$$

> R**5**를 *적용하려면* n*행이 위치한 엄밀 부분증명 바깥에* ($\neg\Box\mathscr{A}$*이 있는*) m*행이 있어야 한다. 단, 이* n*행이 위치한 엄밀 부분증명은* m*행을 포함하지 않는 또다른 엄밀 부분증명의 부분이어서는 안된다.*

이 규칙을 갖고 보일 수 있는 예시로는 $\Diamond\Box A \vdash_{\mathbf{S5}} \Box A$ 가 있다:

1	$\mid\ \Diamond\Box A$	
2	$\mid\ \neg\Box\neg\Box A$	Def$\Diamond$ 1
3	$\mid\ \mid\ \neg\Box A$	
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \Box$	
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\Box A$	R**5** 3
6	$\mid\ \mid\ \Box\neg\Box A$	$\Box$I 4–5
7	$\mid\ \mid\ \bot$	$\neg$E 2, 6
8	$\mid\ \Box A$	IP 3–7

즉, $\Diamond$앞에 $\Box$를 추가할 수 있는 것과 마찬가지로 $\Box$앞에 있는 $\Diamond$들을 삭제할 수도 있는 것이다.

그런데 **S4**에 규칙 R**5**를 추가해서 **S5**를 얻는 대신, 사실 R**4** 없이 **T**에 R**5**를 추가하기만 해도 **S5**를 얻을 수 있기는 하다. R**4**로 증명할 수 있는 내용 일체는 R**T**와 R**5**를 써서도 증명할 수 있기 때문이다.

예를 들자면 $\Box A \vdash_{\mathbf{S5}} \Box\Box A$를 R**4** 없이 다음과 같이 증명할 수 있다:

1	$\Box A$	
2	$\mid\ \Box\neg\Box A$	
3	$\mid\ \neg\Box A$	R**T** 2
4	$\mid\ \bot$	¬E 1, 3
5	$\neg\Box\neg\Box A$	¬I 2–4
6	$\mid\ \Box$	
7	$\mid\ \mid\ \neg\Box A$	
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \Box$	
9	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\Box A$	R**5** 7
10	$\mid\ \mid\ \Box\neg\Box A$	□I 8–9
11	$\mid\ \mid\ \neg\Box\neg\Box A$	R**5** 5
12	$\mid\ \mid\ \bot$	¬E 10, 11
13	$\mid\ \Box A$	IP 7–12
14	$\Box\Box A$	□I 6–13

S5는 **S4**보다 엄밀한 의미에서 *강력하다*: **S5**에선 증명할 수 있지만 **S4**에선 증명할 수 없는 것도 있기 때문이다 (e.g., $\Diamond\Box A \to \Box A$).

S5의 의의는 다음과 같다고 말할 수 있겠다: $\Box$랑 $\Diamond$가 길게 이리저리 뒤엉켜 있다고 해보자. **S5**에서라면 그 어떤 경우에든 가장 마지막 연산자만 제외한 나머지는 싹 날려버릴 수 있다. 예를 들어 $\Diamond\Box\Diamond\Diamond\Box\Box\Diamond\Box A$가 있으면 $\Box A$로 확 줄여버릴 수 있는 것이다.

2.6 연습 문제

(ㄱ) 다음을 증명하라:

1. $\Box(A \land B) \vdash_{\mathbf{K}} \Box A \land \Box B$
2. $\Box A \land \Box B \vdash_{\mathbf{K}} \Box(A \land B)$
3. $\Box A \lor \Box B \vdash_{\mathbf{K}} \Box(A \lor B)$

4. $\Box(A \leftrightarrow B) \vdash_{\mathbf{K}} \Box A \leftrightarrow \Box B$

(ㄴ) 다음을 증명하라 (단, 양상 전환 규칙을 쓰지 말고!):

1. $\neg\Box A \vdash_{\mathbf{K}} \Diamond\neg A$
2. $\Diamond\neg A \vdash_{\mathbf{K}} \neg\Box A$
3. $\neg\Diamond A \vdash_{\mathbf{K}} \Box\neg A$
4. $\Box\neg A \vdash_{\mathbf{K}} \neg\Diamond A$

(ㄷ) 다음을 증명하라 (이번엔 양상 전환 규칙을 맘껏 써도 된다!):

1. $\Box(A \to B), \Diamond A \vdash_{\mathbf{K}} \Diamond B$
2. $\Box A \vdash_{\mathbf{K}} \neg\Diamond\neg A$
3. $\neg\Diamond\neg A \vdash_{\mathbf{K}} \Box A$

(ㄹ) 다음을 증명하라:

1. $P \vdash_{\mathbf{T}} \Diamond P$
2. $\vdash_{\mathbf{T}} (A \wedge B) \vee (\neg\Box A \vee \neg\Box B)$

(ㅁ) 다음을 증명하라:

1. $\Box(\Box A \to B), \Box(\Box B \to C), \Box A \vdash_{\mathbf{S4}} \Box\Box C$
2. $\Box A \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\Box A \vee B)$
3. $\Diamond\Diamond A \vdash_{\mathbf{S4}} \Diamond A$

(ㅂ) 다음을 **S5**에서 증명하라:

1. $\neg\Box\neg A, \Diamond B \vdash_{\mathbf{S5}} \Box(\Diamond A \wedge \Diamond B)$
2. $A \vdash_{\mathbf{S5}} \Box\Diamond A$
3. $\Diamond\Diamond A \vdash_{\mathbf{S5}} \Diamond A$

3 가능세계 의미론

위에서 살펴본 양상논리의 자연연역 체계는 한 문장으로부터 또다른 문장이 어떻게 '따라나오는지', 즉 문장을 어떻게 *증명*할 수 있는지에 관한 내용이었다. 문장의 참거짓, 즉 진리치를 따지기 위해서는 **의미론**이 필요하다. 형식언어가 있으면 그 의미론의 역할은 그 형식언어 문장에 진리치를 매기는 것이다. 지금부터 살펴볼 가능세계 의미론은 양상논리 언어의 의미론이다. 이 가능세계 의미론을 통해 양상논리 문장에 참거짓을 매기는 방법을 살펴보도록 하자.

3.1 양상논리에서의 해석

양상논리 의미론의 핵심적 발상은 '문장은 그 자체로 참이나 거짓이 아니다'라는 생각이다. 문장은 어느 *세계에선* 참이 될 수도, 또 다른 어느 세계에선 거짓이 될 수도 있다. 이런 관점에서 다음과 같이 말할 수 있다: $\Box\mathscr{A}$는 $\mathscr{A}$가 *모든* 세계에서 참인 경우 오직 그 경우에만 참이다. 그리고 $\Diamond\mathscr{A}$는 $\mathscr{A}$가 최소 *어느 한* 세계에서 참인 경우 오직 그 경우에만 참이다.

대강을 살펴봤으니 이제 좀더 세세하게 따져보자. 그 첫 단계는 양상논리 언어의 해석(interpretation)을 제시하는 것이다. 그 해석에 꼭 포함되어야 하는 요소로는 **가능세계**의 집합이 있다. 이 시점에서 자연스레 나올 질문은 '근데 그 가능세계라는게 뭐야?'일 것이다. 이건 아주 중요한 철학적 질문이지만, 현 시점에선 대충 '우리 세계가 달리 될 수 있었던 바' 정도로 적당히 대답하도록 하자. 적어도 형식논리에 있어 중요한 점은 그게 뭐가 되었든 '가능세계'라는 것들이 있어서 각 해석마다 (공집합이 아닌) 가능세계의 집합을 갖추고 있어야 한다는 것이다.

그 다음에 할 것은 각 가능세계마다 어느 문장이 참이고 어느 문장이 거짓인지 결정해주는 것이다. 여기에 필요한게 값매김 함수(valuation function)다. 수학 시간 때 배웠던 '함수' 개념을 다시 한번 떠올려보자. 함수의 역할은 특정한 논항(argument)을 받아 하나의 값, 즉 함수값을 내놓는 것이라 할 수 있다. 이를테면 함수 $x + 1$은 한 수를 논항으로 받아 그보다 1만큼 큰 수를 함수값으로 내놓는다. 1을 받으면 2, 2를 받으면 3을 내놓는 식으로 말이다. 또 다른 예시인 함수 $x+y$는 두 개의 논항을 받는다는 점에서 차이가 난다. 이를테면 1과 2를 함께 논항으로 받아 3을 내놓는 식으로 말이다.

양상논리의 값매김 함수는 한 문장과 한 세계를 논항으로 받아 한 진리값을 그 함수값으로 내놓는 함수라고 할 수 있다. ν가 값매김 함수, w가 가능세계라고 해보자. $\nu_w(\mathscr{A})$는 곧 ν가 $\mathscr{A}$와 w를 논항으로 받아 내놓는 진리값이다: $\nu_w(\mathscr{A}) = F$는 곧 값매김 함수 ν에 따라 $\mathscr{A}$가 세계 w에서 거짓이라는 것이며,

$\nu_w(\mathscr{A}) = T$는 곧 곧 값매김 함수 ν에 따라 $\mathscr{A}$가 세계 w에서 참이라는 것이다.

값매김 함수가 되기 위한 조건은 무엇인가? 첫째, 논항으로 받는 문장 $\mathscr{A}$가 원자 문장이라고 해보자. 값매김 함수는 임의의 $\mathscr{A}$ 및 임의의 세계 w에 대해서 T가 됐든 F가 됐든 특정한 진리값을 내놓을 수 있어야 한다. 둘째, $\mathscr{A}$가 복합 문장이라고 해보자. 이 경우에 값매김 함수는 다음과 같은 일련의 규칙을 준수해야만 한다. 먼저 명제 논리 양상자들에 관해선 다음 규칙을 준수해야 한다:

(1) $\nu_w(\neg\mathscr{A}) = T$ iff: $\nu_w(\mathscr{A}) = F$

(2) $\nu_w(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) = T$ iff: $\nu_w(\mathscr{A}) = T$이고 $\nu_w(\mathscr{B}) = T$

(3) $\nu_w(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) = T$ iff: $\nu_w(\mathscr{A}) = T$이거나 $\nu_w(\mathscr{B}) = T$

(4) $\nu_w(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) = T$ iff: $\nu_w(\mathscr{A}) = F$이거나 $\nu_w(\mathscr{B}) = T$

(5) $\nu_w(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) = T$ iff: $\nu_w(\mathscr{A}) = T$이고 $\nu_w(\mathscr{B}) = T$이거나, $\nu_w(\mathscr{A}) = F$이고 $\nu_w(\mathscr{B}) = F$

명제 논리를 공부해보신 적이 있다면 다들 익숙하실 규칙들이다. 기본적으로 명제 논리에서 쓰는 진리표랑 그 내용은 같기 때문이다. 유일한 차이점은 이게 다 특정한 가능세계, 즉 위 규칙 표기에 따르면 w라는 세계 *안에서* 돌아간다는 점이다.

양상 연산자 $\Box$랑 $\Diamond$에 대해선 어떤 규칙을 준수해야 하는가? 먼저 다음과 같은 직관적인 안부터 생각해보자.

$$\nu_w(\Box\mathscr{A}) = T \text{ iff } \forall w'(\nu_{w'}(\mathscr{A}) = T)$$

$$\nu_w(\Diamond\mathscr{A}) = T \text{ iff } \exists w'(\nu_{w'}(\mathscr{A}) = T)$$

술어 논리를 공부해보신 적이 있다면 아시겠지만 그냥 $\Box\mathscr{A}$는 $\mathscr{A}$가 *모든* 세계에서 참인 경우 오직 그 경우에만 참이 된다는 얘기이고, $\Diamond\mathscr{A}$는 $\mathscr{A}$가 최소 *하나*의 세계에서 참인 경우 오직 그 경우에만 참이 된다는 얘기다.

이 규칙안이 간단해서 좋긴 한데, 사실 문제점이 좀 있다. 앞에서 언급했다시피 양상논리는 다양한 종류의 양상을 다룰 수 있을만큼 유연해야만 한다. 그런데 위 규칙안은 좀더 유연해질 필요가 있다. 이 문제를 해결해주는 것이 접근가능성 관계(accessibility relations)다.

접근가능성 관계 R은 가능세계 간에 성립한다. Rw_1w_2, 즉 세계 w_1이 세계 w_2에 접근가능하다는 말은 대략 w_2가 w_1*에서 봤을 땐* 가능하다는 말로 이해할 수 있다. 즉 접근가능성 관계를 도입함으로써 다음과 같은 발상을 살릴 수 있다: 한 가능세계가 있다고 할 때, 이게 어느 한 세계에서 봤을 땐 가능하지만 또다른 어느 세계에서 봤을 땐 가능하지 않을 수도 있다는 것이다. 이를 반영해서 □와 ◊의 의미론적 규칙을 다음과 같이 제시할 수 있다:

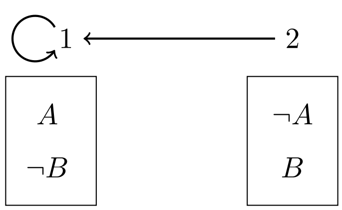
(6) $\nu_{w_1}(\Box\mathscr{A}) = T$ iff $\forall w_2(Rw_1w_2 \rightarrow \nu_{w_2}(\mathscr{A}) = T)$

(7) $\nu_{w_1}(\Diamond\mathscr{A}) = T$ iff $\exists w_2(Rw_1w_2 \wedge \nu_{w_2}(\mathscr{A}) = T)$

풀어서 얘기하자면, $\Box\mathscr{A}$는 w_1에서 봤을 때 가능한 모든 세계에서 $\mathscr{A}$가 참일 경우 오직 그 경우에만 w_1에서 참이다. 그리고 $\Diamond\mathscr{A}$는 w_1에서 봤을 때 가능한 세계들 가운데 $\mathscr{A}$가 참인 세계가 최소한 하나 있을 경우 오직 그 경우에만 w_1에서 참이다.

이로써 양상논리의 해석을 정의해 볼 수 있다. 그 구성요소는 가능세계의 집합인 W, 접근가능성 관계 R, 그리고 값매김 함수 ν 세 가지다. '가능세계'의 집합은 사실 공집합만 아니면 그 어떤 집합이어도 상관없다. (다만 수의 집합으로 두는게 편하다.) R 또한 가능세계 간에 성립할 수만 있다면 아무 상관없다. W에 속하는 모든 가능세계가 서로 간에 전부 관계 R을 맺을 수도 있고, 아니면 그 어느 가능세계도 R을 맺지 않아도 무방하다. 마지막으로 ν는 양상논리 원자 문장들에 그 어떤 진리값을 매겨도 무방하다. 중요한 것은 복합 문장들이 상기한 규칙 (1)–(7)을 준수해야한다는 것이다.

예시를 하나 살펴보자. 양상논리 해석은 흔히 그림으로 표현한다:



이 그림은 다음과 같이 이해할 수 있다: 먼저 가능세계는 1과 2, 두 개가 있다. 화살표는 접근가능성 관계를 나타낸다. 즉 1은 1과 2 양쪽 모두로부터 접근가능하지만, 2는 1은 물론 2 그 자신에서부터도 접근불가능하다. 각 세계 밑에 딸린 상자는 어느 원자 문장이 참인지를 알려주는 역할을 한다. 즉 위 그림에 따르면 A는 1에선 참이지만 2에서는 거짓이고, B는 1에서는 거짓이지만 2에서는 참이다. 이를 토대로 각각의 세계에서 어떤 복합 문장이 참이 되는지를 판정할 수 있다. 예를 들어 위 그림에 따르면 이하 문장들은 모두 w_1에서 참이다:

$A \wedge \neg B,\ B \rightarrow A,\ \Diamond A,\ \Box\neg B$

이처럼 해석을 그림으로 표현하는게 잘 와닿지 않는다면, 아래와 같이 수식으로 나타낼 수도 있다:

W: $1, 2$

R: $\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle$

$\nu_1(A) = T, \nu_1(B) = F, \nu_2(A) = F, \nu_2(B) = T$

이렇듯 해석을 직접 만드는 것은 뒤에서 살펴보겠지만 반해석(counter-interpretations)을 만드는데 필수적이다.

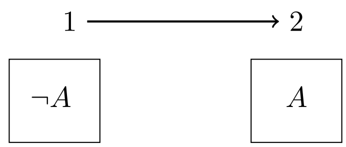
3.2 체계 K의 의미론

자연연역 체계의 핵심 주제가 증명가능성 $\vdash$이라면 의미론에서 그에 상응하는 개념은 논증의 *타당성*, 즉 전제들이 참일 경우 결론도 반드시 참이 된다는 것이다. 타당성은 기호 $\vDash$로 나타낸다. 요컨대 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash \mathscr{C}$가 뜻하는 바는 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$가 모두 참일 경우 $\mathscr{C}$도 반드시 참이 된다는 것이다.

양상논리에서 문장의 참거짓은 세계에 따라 상대적으로 정해진다. 그렇다면 '타당성'을 비롯한 의미론의 여러 기초 개념들은 양상논리에서 어떻게 정의해야할까? 다음과 같은 안을 고려해보자:

- $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \therefore \mathscr{C}$는 **타당**하다 iff $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$이 모두 참인데 $\mathscr{C}$는 거짓인 세계는 그 어떤 해석에서도 없다.
- $\mathscr{A}$는 **논리적 참**이다 iff $\mathscr{A}$는 어떤 해석이 되었든 모든 세계에서 참이다.
- $\mathscr{A}$는 **모순**이다 iff $\mathscr{A}$는 어떤 해석이 되었든 모든 세계에서 거짓이다.
- $\mathscr{A}$는 **만족가능**하다 iff $\mathscr{A}$가 참이 되는 세계가 있는 해석이 있다.

예를 들어 $\neg A$가 전제고 $\neg\Diamond A$가 결론인 논증이 있다고 해보자. 이 논증이 타당하다는 말은 $\neg A$가 참인데 $\neg\Diamond A$는 거짓인 세계는 그 어떤 해석에서도 없다는 말이다. 따라서 이 논증이 타당하지 않다, 즉 *부당*하다는 것을 보이고 싶다면 $\neg A$가 참인데 $\neg\Diamond A$는 거짓인 세계가 있는 해석을 제시하면 된다. 예를 들어 아래 해석을 살펴보자.



여기서 세계 1에 주목해보자. $\neg A$은 세계 1에서 참이다. 반면 $\neg\Diamond A$는 세계 1에서 거짓이 된다. 왜냐면 세계 2는 세계 1에서 접근가능한데 A가 세계 2에선 참이므로 $\Diamond A$가 세계 1에서 참이 되기 때문이다. 따라서 본 해석은 $\neg A$가 전제고 $\neg\Diamond A$가 결론인 논증이 부당함을 입증하는 반해석이 된다. 즉 ‘ $\neg A$가 전제고 $\neg\Diamond A$가 결론인 논증이 타당하다’는 거짓이 된다.

이처럼 ‘ $\neg A$가 전제고 $\neg\Diamond A$가 결론인 논증이 타당하다’는 (거짓임이 판명된) 문장을

$$\neg A \vDash_{\mathbf{K}} \neg\Diamond A$$

라고 나타내겠다. 즉, 보다 일반적으로 논증 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \therefore \mathscr{C}$이 타당하다는 말은 다음과 같이 나타낼 수 있다: $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{K}} \mathscr{C}$.

잠깐, 근데 $\vDash_{\mathbf{K}}$는 뭔가? 갑자기 $\vDash$에 아래 첨자 **K**는 왜 붙인건가? 그 까닭은 방금 본 ‘타당성’ 개념의 정의가 2.1절에서 살펴봤던 자연연역 체계 **K**와 긴밀히 연결된다는 점에 있다. 보다 구체적으로 타당성 $\vDash_{\mathbf{K}}$과 **K**에서의 증명가능성 $\vdash_{\mathbf{K}}$에 대해선 다음 두 성질이 성립한다:

- (**건전성**) 만약 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{K}} \mathscr{C}$면, $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{K}} \mathscr{C}$다.
- (**완전성**) 만약 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{K}} \mathscr{C}$면, $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{K}} \mathscr{C}$다.

K가 건전하다는 것은 **K**의 도출 규칙이 ‘좋다’ 내지는 ‘건전하다’는 말이다. 요컨대 논증이 타당한지 알고 싶다면 **K**를 써서 전제로부터 결론을 증명해내는 것만으로도 충분하다는 것이다.

K가 완전하다는 것은 임의의 타당한 논증이 있을 경우 **K**를 통하여 그 전제로부터 결론을 증명할 수 있다는 말이다. 즉 잘만 쓴다면 **K**의 도출 규칙들만으로도 모든 타당한 논증을 ‘남김없이’, ‘완전하게’ 판명할 수 있다는 것이다.

그런데 **K**가 건전하고 또 완전하다는 것은 어떻게 아는가? 물론 증명이 필요하지만, 그건 ‘맛보기’를 넘어가는 일이므로 여기서는 넘어가도록 하겠다. 다만 이해를 돕기 위해 건전성 증명을 하는데 쓰이는 핵심적인 직관을 살짝 짚고 넘어가는걸로 마무리를 하겠다:

$\Box$I는 **K**를 구성하는 기본 도출 규칙이다. 이 $\Box$I가 건전하다는 것은 대체 무엇인가?

$$
\begin{array}{r|l}
m & \quad \begin{array}{|l} \Box \\ \hline \end{array} \\
n & \quad \begin{array}{|l} \mathscr{A} \end{array} \\
 & \Box\mathscr{A} \qquad \Box\mathrm{I}\ m\text{–}n
\end{array}
$$

□I가 말하는 바는 얼추 다음과 같다: '엄밀 부분증명 안에 $\mathscr{A}$라는 임의의 문장이 나타날 경우, 그 바깥에서 $\Box\mathscr{A}$라는 문장을 도출시켜도 된다.' □I가 건전하다면 그 도출되는 결론인 $\Box\mathscr{A}$가 반드시 참이 되어야 한다. 근데 정의상 $\Box\mathscr{A}$가 참이 되기 위해선 접근가능한 세계들에서 $\mathscr{A}$가 참이어야 하는데, 이건 어떻게 아는가? 엄밀 부분증명 안에 $\mathscr{A}$가 나타난다는게 바로 이를 보장해준다. 왜냐면 엄밀 부분증명 안의 $\mathscr{A}$는 (□E 규칙을 통해 '□'를 떼어서 들여온 것을 제외하면) 그 바깥의 가정을 참조해서 나온게 아니기 때문이다. 요컨데 2.1절에서 말했듯이 "엄밀 부분증명 안에서 어떤 문장을 증명할 수 있다는 것은 그 문장의 참이 임의의 모든 가능한 상황에서 성립한다는 것"을 뜻하며, 이는 다른 말로 그 문장이 모든 접근가능한 세계에서 참이라는 것이다. 그렇기에 "엄밀 부분증명 안에 $\mathscr{A}$라는 임의의 문장이 나타날 경우" $\Box\mathscr{A}$는 반드시 참이 되며, 이로써 □I가 건전하다는 것을 보일 수 있는 것이다.

3.3 체계 T의 의미론

자, 체계 **K**가 건전하며 완전하다고 했으니, 다른 양상논리 체계들, 즉 **T**, **S4** 및 **S5**는 어떤가? 앞에서 제시한 '타당성' 정의에 따르면 **T**, **S4** 및 **S5**는 건전하지 않다. 예를 들어 A로부터 $\Box A$를 도출해내는 것은 **T**, **S4** 및 **S5**에서 모두 허용되지만, $\Box A \vDash_{\mathbf{K}} A$는 거짓이기 때문이다.

그렇다면 **T**, **S4** 및 **S5**는 글러먹은 것인가? 천만의 말씀. 이들 체계는 그저 앞에서 제시했던 하나의 '타당성' 정의에 비춰보았을 때 불건전할 뿐이다. 양상논리 체계가 달라지면 '타당성'의 정의도 달라져야 한다. 괜히 앞에서 정의한 '타당성' 개념을 '$\vDash_{\mathbf{K}}$'라고 굳이 아래 첨자를 붙여서 표기한게 아니다. 지금부터 살펴보겠지만 **K** 자리에 대신 다른 양상논리 체계를 집어넣을 수도 있기 때문이다.

드디어 접근가능성 관계 R을 유용하게 써먹을 때가 왔다. 지금까지 접근가능성 관계는 그냥 가능세계 간에 성립하는 관계로 정의했을 뿐, 그 어떤 형식적 제약도 두지 않았다. 모든 가능세계가 서로서로 접근가능하다고 보든, 그 어떤 가능세계도 서로 간에 접근할 수 없다고 하든 무방했다. 그렇기에 해석을 만들 때에도 접근가능성 관계를 원하는대로 마음껏 설정할 수 있었던 것이다. 이게 $\vDash_{\mathbf{K}}$를 다룰 때까지는 통하던 얘기였다. 하지만 이제부터는 접근가능성 관계에 제약을 가해보겠다. 이를테면 접근가능성

관계가 **반사적**(reflexive)[2]이어야 한다는 제약을 걸어보자:

- $\forall wRww$

한국어로 하자면, 모든 세계는 그 스스로에 접근할 수 있어야 한다는 것이며, 달리 표현하자면 모든 세계는 *그 스스로의 관점에서 봤을 때* 가능해야 한다는 것이다. 이런 제약에 기초하여 새로운 '타당성' 개념 $\vDash_{\mathbf{T}}$를 다음과 같이 정의할 수 있다:

> $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{T}} \mathscr{C}$ iff $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$이 모두 참인데 $\mathscr{C}$는 거짓인 세계는 *접근가능성 관계가 반사적인* 그 어떤 해석에서도 없다.

아래 첨자 **T**를 $\vDash$에 붙인 까닭은 체계 **T**가 이 새로운 '타당성' 정의에 비춰봤을 때 건전하고 완전하다는 점에 있다:

- 만약 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{T}} \mathscr{C}$면, $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{T}} \mathscr{C}$다.
- 만약 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{T}} \mathscr{C}$면, $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{T}} \mathscr{C}$다.

앞에서도 그러했듯 건전성 및 완전성 증명은 넘어가겠지만, 사실 접근가능성 관계가 반사적이라고 가정할 경우 규칙 R**T**이 왜 건전해지는지 설명하는 건 그리 어렵지 않다:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \Box\mathscr{A} & \\
 & \mathscr{A} & \text{R}\mathbf{T}\ m
\end{array}
$$

그냥 다음 주장에 대한 반모형을 짜내는걸 시도한다 쳐보자.

$$\Box\mathscr{A} \vDash_{\mathbf{T}} \mathscr{A}$$

반모형에 필요한 것은 $\Box\mathscr{A}$은 참이 되는데 $\mathscr{A}$는 거짓이 되는 세계다. 얘를 w라고 하자. $\Box\mathscr{A}$가 w에서 참이라면 $\mathscr{A}$는 w에서 접근가능한 모든 세계에서 참이어야 한다. 근데 접근가능성 관계가 반사적이라고 가정했으므로 w는 w에서 접근가능하다. 그렇기에 $\mathscr{A}$는 w에서 참이어야 하는데, 다른 한편으로 $\mathscr{A}$는 w

[2] "Reflexive"는 "재귀적"으로도 번역된다.

에서 거짓이 되어야 한다는게 당초의 가정이었다. 즉 $\mathscr{A}$는 w에서 참인 동시에 거짓이어야 한다. 모순 발견!

3.4 체계 S4의 의미론

자, ‘타당성’ 정의를 또 달리 비틀어보도록 할까? 이번에는 접근가능성 관계가 **전이적**(transitive)[3]이어야 한다는 제약을 걸어보자:

- $\forall w_1 \forall w_2 \forall w_3 ((Rw_1w_2 \wedge Rw_2w_3) \rightarrow Rw_1w_3)$

한국어로 하자면, 만약 w_1에서 w_2에 접근할 수 있고, 또 w_2에서 w_3에 접근할 수 있다면, 곧 w_1에서 w_3에도 접근할 수 있다는 것이다. 달리 말하자면, w_3이 w_2에서 봤을 때 가능하고, 또 w_2가 w_1에서 봤을 때 가능하다면, 곧 w_3이 w_1에서 봤을 때도 가능해진다는 것이다. 이런 접근가능성 제약을 토대로 $\vDash_{\mathbf{S4}}$를 다음과 같이 정의해볼 수 있다:

> $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S4}} \mathscr{C}$ iff $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$이 모두 참인데 $\mathscr{C}$는 거짓인 세계는 *접근가능성 관계가 반사적이며 전이적인* 그 어떤 해석에서도 없다.

아래 첨자 **S4**를 $\vDash$에 붙인 까닭은 체계 **S4**가 이 새로운 정의에 비춰봤을 때 건전하고 완전하다는 점에 있다:

- 만약 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{S4}} \mathscr{C}$면, $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S4}} \mathscr{C}$다.
- 만약 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S4}} \mathscr{C}$면, $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{S4}} \mathscr{C}$다.

이번에도 건전성 및 완전성 증명은 넘어가자. 그럼에도 접근가능성 관계가 전이적이라는 제약을 걸 경우 **S4** 규칙이 건전해진다는건 비교적 쉽게 보일 수 있다:

$$
\begin{array}{r|l}
m & \Box\mathscr{A} \\
 & \begin{array}{|l}
\Box \\ \hline
\Box\mathscr{A} \qquad \text{R}\mathbf{4}\ m
\end{array}
\end{array}
$$

[3] “Transitive”는 “추이적”, “이행적”으로도 번역된다.

엄밀 부분증명은 모든 접근가능한 세계에서 참인 것을 증명하는데 써먹는다는 것을 다시 떠올려보자. 즉 R**4** 규칙이 말하는 바는 얼추 $\Box\mathscr{A}$이 참일 경우 $\Box\mathscr{A}$가 모든 접근가능한 세계에서 반드시 참이 되어야 한다는 이다. 요컨대 $\Box\mathscr{A} \vDash_{\mathbf{S4}} \Box\Box\mathscr{A}$가 되어야 한다.

이게 왜 성립하는지 알아보려면 그에 대한 반모형을 짜내는 걸 시도해볼 수 있다:

$$\Box\mathscr{A} \vDash_{\mathbf{S4}} \Box\Box\mathscr{A}$$

반모형에 필요한건 $\Box\mathscr{A}$이 참이되 $\Box\Box\mathscr{A}$는 거짓이 되는 세계 w_1다. 자, $\Box\Box\mathscr{A}$가 w_1에서 거짓이라면, w_1에서 접근가능한 세계 w_2가 있고 거기에서 $\Box\mathscr{A}$이 거짓이 되야만 한다. 그리고 $\Box\mathscr{A}$가 w_2에서 거짓이면, 또 w_2에서 접근가능한 w_3가 있고 거기에서 $\mathscr{A}$가 거짓이 되어야 한다. 근데 이렇듯 w_1에서 w_2가 접근가능하고, 또 w_2에서 w_3가 접근가능하다면, w_1에서 w_3도 접근가능해야 한다. 접근가능성이 전이적이라는 제약을 걸었었기 때문이다. 따라서 $\Box\mathscr{A}$가 w_1에서 참이고 w_3가 w_1에서 접근가능하기에 $\mathscr{A}$가 w_3에서 참이어야 한다는게 따라나온다. 그러므로 $\mathscr{A}$는 w_3에서 참인 동시에 거짓이어야 한다는 결론에 봉착했다. 모순 발견!

3.5 체계 S5의 의미론

접근가능성 관계에 제약을 하나 더 걸어보자. 이번에 걸 제약은 접근가능성 관계가 **대칭적**(symmetric)이어야 한다는 것이다:

- $\forall w_1 \forall w_2 (Rw_1w_2 \to Rw_2w_1)$

한국어로 하자면, w_1 에서 w_2에 접근할 수 있을 때엔 w_2에서 w_1도 접근할 수 있다는 것이다. 달리 말하자면, w_2가 w_1에서 봤을 때 가능할 때엔 w_1도 w_2에서 볼 때 가능하다는 것.

지금까지 고려한 제약들을 다 합쳐보자. 반사적이고 대칭적인 동시에 전이적인 관계를 두고 **동치 관계**라고 부른다. 이를 토대로 또다른 '타당성' 관계인 $\vDash_{\mathbf{S5}}$를 다음과 같이 정의하자:

> $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S5}} \mathscr{C}$ iff $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$이 모두 참인데 $\mathscr{C}$는 거짓인 세계는 *접근가능성 관계가 동치관계인* 그 어떤 해석에서도 없다.

$\vDash$에 **S5**를 아래 첨자로 단 까닭은 자연연역 체계 **S5**가 이 $\vDash_{\mathbf{S5}}$ 관계에 비춰봤을 때 건전하고 완전하다는 점에 있다.

- 만약 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{S5}} \mathscr{C}$면, $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S5}} \mathscr{C}$다.
- 만약 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S5}} \mathscr{C}$면, $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{S5}} \mathscr{C}$다.

앞에서랑 마찬가지로 건전성 및 완전성 증명은 넘어가겠지만, 접근가능성 관계가 동치 관계라는 제약을 걸 때 R**5** 규칙이 건전해진다는걸 보이는건 이번에도 썩 어렵지 않다.

$$
\begin{array}{r|l}
m & \neg\Box\mathscr{A} \\
 & \begin{array}{|l} \Box \\ \hline \neg\Box\mathscr{A} \qquad \mathrm{R}\mathbf{5}\ m \end{array}
\end{array}
$$

R**5** 규칙이 말하는 바는 곧 $\mathscr{A}$가 필연적이지 않을 경우, 즉 거짓이 되는 접근가능한 가능세계가 있을 경우, $\mathscr{A}$는 어떤 가능한 세계에서도 필연적일 수 없다는 것이다. 그렇다면 곧 $\neg\Box\mathscr{A} \vdash_{\mathbf{S5}} \Box\neg\Box\mathscr{A}$가 되어야 한다.

이게 왜 성립하는지 보려면 한번 반모형을 짜내는걸 시도해볼 수 있다.

$$\neg\Box\mathscr{A} \vDash_{\mathbf{S5}} \Box\neg\Box\mathscr{A}$$

자, 만들어볼 것은 $\neg\Box\mathscr{A}$는 참이지만 $\Box\neg\Box\mathscr{A}$이 되는 거짓인 세계 w_1이다. 만약 $\neg\Box\mathscr{A}$가 w_1에서 참이라면, $\mathscr{A}$가 거짓이 되는 세계 w_2가 있어서 w_1에서 접근가능해야한다. 마찬가지로, 만약 $\Box\neg\Box\mathscr{A}$가 w_1에서 거짓이라면, w_1에서 접근가능하며 $\neg\Box\mathscr{A}$가 거짓인 세계 w_3이 있어야 한다. 이때 우리 접근가능성 관계가 동치관계라고 가정했음을 잊지 말자. 즉 w_3는 w_1에서 접근가능하므로, 대칭성에 의거하여 w_1이 거꾸로 w_3에서 접근가능하기도 하다. 그리고 w_1에서 w_2가 접근가능하므로, 전이성에 의해 w_3에서 w_1 또한 접근할 수 있다. 그런데 $\neg\Box\mathscr{A}$가 w_3에서 거짓이므로, w_3에서 접근가능한 모든 세계에서 $\mathscr{A}$는 참이어야 한다. 즉 w_2에서 A는 참이 되어야 하는데, 앞에서 봤듯이 w_2에서 A는 거짓이기도 하다. 모순 발견!

한편 $\vDash_{\mathbf{S5}}$를 정의할 때 앞에서는 그 접근가능성 관계가 동치관계가 되어야 한다는 제약을 걸었으나, **S5**에 걸맞는 타당성 개념은 또 다른 방식으로도 정의할 수 있다. 동치관계 대신, 접근가능성 관계가 **보편 관계**(universal relation)여야 한다는 제약을 거는 방식도 있기 때문이다:

- $\forall w_1 \forall w_2 R w_1 w_2$

한국어로 말하자면, 모든 세계에서 모든 세계에 접근할 수 있다는 것이다. 달리 말하자면, 그 어떤 세계에서 보든 간에 임의의 모든 세계가 다 가능하다는 것이다. 이와 같은 접근가능성 관계 제약을 토대로 $\vDash_{\mathbf{S5}}$는 다음과 같이 정의할 수 있다:

> $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S5}} \mathscr{C}$ iff $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$이 모두 참인데 $\mathscr{C}$는 거짓인 세계는 *접근가능성 관계가 보편 관계인* 그 어떤 해석에서도 없다.

이렇게 $\vDash_{\mathbf{S5}}$를 정의해도 체계 **S5**의 건전성 및 타당성은 여전히 증명할 수 있다. 여기서 얻을 수 있는 교훈은 뭘까? 하나를 꼽자면, '그 어떤 세계에서 보든 간에 임의의 모든 세계가 다 가능하다'는 생각에 입각하여 필연성 개념을 따지고 싶다면 **S5**를 써야 한다는 것이다. 더욱이 철학자들이 흔히 관심을 갖고는 하는 *논리적 필연성* 내지는 *형이상학적 필연성* 개념은 바로 이러한 유형의 필연성 개념에 부합한다고 여겨지고는 한다. 그렇기에 **S5**는 많은 철학자들이 가장 흔하게 쓰는 양상논리 체계라고 할 수 있다.

3.6 연습 문제

(ㄱ) 다음 거짓 문장들에 대한 반모형을 제시하라

1. $\neg P \vDash_{\mathbf{K}} \neg\Diamond P$
2. $\Box(P \vee Q) \vDash_{\mathbf{K}} \Box P \vee \Box Q$
3. $\vDash_{\mathbf{K}} \neg\Box(A \wedge \neg A)$
4. $\Box A \vDash_{\mathbf{K}} A$

(ㄴ) 다음 거짓 문장들에 대한 반모형을 제시하라

1. $\Diamond A \vDash_{\mathbf{S4}} \Box\Diamond A$
2. $\Diamond A, \Box(\Diamond A \to B) \vDash_{\mathbf{S4}} \Box B$

(ㄷ) 다음 거짓 문장들에 대한 반모형을 제시하라

1. $\Box(M \to O), \Diamond M \vDash_{\mathbf{T}} O$
2. $\Box A \vDash_{\mathbf{T}} \Box\Box A$

4 부록

4.1 더 읽어볼만한 책

지금까지 우리가 한 것은 양상논리의 맛을 살짝 본 것이다. 좀더 본격적인 입문 교과서로는 다음과 같은 교재를 참조하라.

- Hughes, G. E., & Cresswell, M. J. (1996). *A New Introduction to Modal Logic*, Oxford: Routledge.
- Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press.
- Garson, J. W. (2013). *Modal Logic for Philosophers*, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press.

이들 교재에서 쓰이는 증명 체계는 본 책자와 다 제각기 다르지만, 그 가운데 Garson의 체계가 그래도 가장 비슷하다.

4.2 명제 논리 자연연역 체계 기본 규칙

아래 내용은 *forall x: Calgary* 15장에 수록된 명제논리 자연연역 체계의 기본 규칙에 대한 정의를 요약하여 옮겨놓은 것입니다. 자세한 내용은 해당 교재나 다른 여러 기초 교재를 참조하십시오.

반복 규칙 (R):

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} & \\ & \mathscr{A} & \text{R } m \end{array}$$

연언 도입 규칙 (∧I):

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} & \\ n & \mathscr{B} & \\ & \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \wedge\text{I } m, n \end{array}$$

연언 제거 규칙 (∧E):

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \\ & \mathscr{A} & \wedge\text{E } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \\ & \mathscr{B} & \wedge\text{E } m \end{array}$$

조건 제거 규칙 (→E):

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \to \mathscr{B} & \\ n & \mathscr{A} & \\ & \mathscr{B} & \to\text{E } m, n \end{array}$$

조건 도입 규칙 (→I):

$$
\begin{array}{r|ll}
i & \mid \underline{\mathscr{A}} & \\
j & \mid \mathscr{B} & \\
 & \mathscr{A} \to \mathscr{B} & \to\mathrm{I}\ i\text{–}j
\end{array}
$$

쌍조건 도입 규칙 (↔I):

$$
\begin{array}{r|ll}
i & \mid \underline{\mathscr{A}} & \\
j & \mid \mathscr{B} & \\
k & \mid \underline{\mathscr{B}} & \\
l & \mid \mathscr{A} & \\
 & \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} & \leftrightarrow\mathrm{I}\ i\text{–}j,\ k\text{–}l
\end{array}
$$

쌍조건 제거 규칙 (↔E):

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} & \\
n & \mathscr{A} & \\
 & \mathscr{B} & \leftrightarrow\mathrm{E}\ m,\ n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} & \\
n & \mathscr{B} & \\
 & \mathscr{A} & \leftrightarrow\mathrm{E}\ m,\ n
\end{array}
$$

선언 도입 규칙 (∨I):

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A} & \\
 & \mathscr{A} \lor \mathscr{B} & \lor\mathrm{I}\ m
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A} & \\
 & \mathscr{B} \lor \mathscr{A} & \lor\mathrm{I}\ m
\end{array}
$$

선언 제거 규칙 (∨E):

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A} \lor \mathscr{B} & \\
i & \mid \underline{\mathscr{A}} & \\
j & \mid \mathscr{C} & \\
k & \mid \underline{\mathscr{B}} & \\
l & \mid \mathscr{C} & \\
 & \mathscr{C} & \lor\mathrm{E}\ m,\ i\text{–}j,\ k\text{–}l
\end{array}
$$

부정 제거 규칙 (¬E):

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \neg\mathscr{A} & \\
n & \mathscr{A} & \\
 & \bot & \neg\mathrm{E}\ m,\ n
\end{array}
$$

부정 도입 규칙 (¬I):

$$
\begin{array}{r|ll}
i & \mid \underline{\mathscr{A}} & \\
j & \mid \bot & \\
 & \neg\mathscr{A} & \neg\mathrm{I}\ i\text{–}j
\end{array}
$$

간접 증명 규칙 (IP):

$$
\begin{array}{r|ll}
i & \mid \underline{\neg\mathscr{A}} & \\
j & \mid \bot & \\
 & \mathscr{A} & \mathrm{IP}\ i\text{–}j
\end{array}
$$

폭발 규칙 (X):

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \bot & \\
 & \mathscr{A} & \mathrm{X}\ m
\end{array}
$$