O NOUĂ FILOSOFIE A MATEMATICII?[1]

Gabriel TÂRZIU*

Abstract: A significant work in recent philosophy of mathematics is focused lately on bringing to the forefront the practice of mathematics. Many philosophers of mathematics are arguing nowadays for replacing the old traditional purified special epistemology involving view on mathematics with a more down to earth perspective (i.e. one that takes seriously the traditionally discarded sociological, historical and empirical aspects of the mathematical enterprise) that pays a lot of attention to the mathematical practice. My aim in this paper is to draw a parallel between this new program and the mainstream philosophy of mathematics in order to see if they are compatible.

Keywords: the philosophy of mathematical practice, the history of mathematics, Imre Lakatos, Thomas Tymoczko, Penelope Maddy.

O tendință relativ nouă în filosofia contemporană a matematicii[2] este reprezentată de nemulțumirea manifestată de un număr din ce în ce mai mare de filosofi față de viziunea tradițională asupra matematicii ca având un statut special ce poate fi surprins doar cu ajutorul unei epistemologii speciale. Această nemulțumire i-a determinat pe mulți să propună o nouă perspectivă asupra matematicii – una care ia în serios aspecte până acum neglijate de filosofia matematicii, precum latura sociologică, istorică şi

---

[1] **ACKNOWLEDGEMENT:** This paper was made within The Knowledge Based Society Project supported by the Sectoral Operational Programme Human Resources Development (SOP HRD), financed from the European Social Fund and by the Romanian Government under the contract number POSDRU/89/1.5/S/56815.

* Gabriel Târziu, PhD, este bursier post-doctoral, Proiect POSDRU/89/1.5/S/56815 „Societatea Bazată pe Cunoaştere – cercetări, dezbateri, perspective”, Academia Română, Filiala Iaşi.

[2] Se consideră, de obicei, că în spatele acestei noi orientări stă, în principal, Lakatos cu celebra sa lucrare *Proofs and Refutations* (Cambridge University Press, 1976)*,* dar nu este de neglijat nici Georg Pólya a cărui discuție despre tehnicile de rezolvare a problemelor matematice din volumul *How to Solve It?* (Princeton University Press, 1945) a influențat, în parte, lucrarea lui Lakatos. De asemenea, Wittgenstein 2, prin rolul important pe care îl acordă practicii matematice (ca singur antidot împotriva pseudo-problemelor filosofice care apar în legătură cu această disciplină), poate fi luat ca făcând parte dintre inițiatorii acestei schimbari. Probabil că cel mai puternic factor din spatele acestei reorientări este reprezentat, însă, de ce se consideră a fi eşecul programelor fundaționaliste (dacă *Begriffsschrift* poate fi luată ca marcând începutul preocupărilor cu fundamentele matematicii, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* a lui Gödel poate fi luată ca marcând sfârşitul „perioadei clasice” a acestor preocupări).

empirică a cercetării matematice şi care acordă astfel o atenţie deosebită practicii matematice.

Desigur, nu numai filosofii sunt nemulţumiţi de viziunea tradiţională asupra matematicii. Odată cu apariţia sociologiei cunoaşterii ştiinţifice, putem vorbi despre o schimbare a atitudinii cu privire la matematică şi in sociologie. Unul dintre reprezentanţii de seamă ai acestui aşa-numit „program tare" din sociologia ştiinţei, David Bloor, argumentează plecând de la un exemplu discutat de Lakatos (teorema lui Euler) că anumite decizii în matematică pot fi puse pe seama contextului social şi instituţional în care lucrează matematicianul.

În istoria matematicii, după apariţia lucrării lui Kuhn (*Structura revoluţiilor ştiinţifice*) în 1962, tot mai multi istorici ai matematicii au început să-şi pună problema dacă viziunea acestuia asupra ştiinţei nu s-ar putea aplica şi în cazul matematicii. Nu a durat mult până la apariţia de studii în care diferite perioade din istoria matematicii au fost indicate ca revoluţionare (Joseph Dauben, Herbert Mehrtens, Judith Grabiner, Emily Grosholz, Jeremy Grey si Detlef Laugwitz sunt doar câţiva dintre istoricii matematicii care vorbesc despre astfel de revoluţii).

În pedagogia matematicii şi ştiinţele educaţiei găsim o nemulţumire cvasi-generalizată faţă de ce se consideră a fi caracterul infailibil şi static al cunoaşterii matematice, născută din problemele implicate de încercarea de a găsi un mod adecvat de a transmite elevilor / studenţilor această cunoaştere. O cale de a evita aceste dificultăţi este aceea de a renunţa la viziunea tradiţională asupra matematicii în favoarea unei poziţii mai bune din punct de vedere al pedagogiei matematicii. Printre opţiunile cele mai populare printre pedagogi este constructivismul radical al lui Ernst von Glasersfeld. Acesta se foloseşte de teoria dezvoltării cognitive a lui Piaget pentru a deriva următoarele principii care stau la baza teoriei sale constructiviste: (i) cunoaşterea nu este receptată pasiv prin simţuri sau alte căi, ci este activ construită de către subiectul cunoscator; (ii) funcţia cunoaşterii este adaptativă, în sensul biologic al termenului, şi astfel nu serveşte descoperirii unei realităţi independente de minte, ci organizării lumii aparenţelor senzoriale.[3] Constructivismul social al lui Paul Ernest este, de asemenea, o alternativă pe placul pedagogilor.

În antropologie, odată cu apariţia etnomatematicii (program demarat pe la jumătatea anilor '80 de Ubiratan D'Ambrosio) putem vorbi de asemenea despre o îndepărtare de viziunea tradiţională asupra matematicii. Conform acestei viziuni, adevărurile matematice sunt necesare şi astfel nu are sens să iei în serios posibilitatea dezvoltării de matematici alternative în societăţi diferite. Etnomatematicienii văd această credinţă în universalitatea matematicii ca pe un obstacol în calea recunoaşterii faptului că diferite tipuri de gândire sau culturi diferite conduc la forme diferite de

[3] Ernst von Glasersfeld, *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning* (London: Falmer Press, 1995), 51.

matematică. Sarcina etnomatematicienilor este ca, studiind matematica în relație directă cu contextul cultural, economic şi social în care este produsă, să scoată în evidență acest fenomen.

> „Crearea unui pod între antropologi şi istoricii culturii şi matematicieni este un pas important spre recunoaşterea faptului că tipuri diferite de gândire pot conduce la tipuri diferite de matematică".[4]

Revenind acum la filosofie, un mod interesant şi revelator de prezentare a acestei noi orientări din filosofia actuală a matematicii ar fi în termenii distincției trasate de Reuben Hersh[5] între fațada şi culisele matematicii[6]: dacă filosofia tradițională a matematicii poate fi considerată ca filosofia fațadei matematicii, filosofia practicii matematice poate fi luată drept filosofia culiselor matematicii. Hersh pleacă de la împărțirea sociologului american Ervin Goffman a instituțiilor sociale în două regiuni (regiunea din față în care publicul este admis şi sunt furnizate servicii şi regiunea din spate în care se fac pregătirile pentru furnizarea serviciilor şi au acces doar persoanele calificate)[7] şi argumentează că putem înțelege matematica în aceeaşi termeni. O întrebare deloc banală în acest context este următoarea: ce anume din matematică poate fi înțeles în termenii acestei distincții? Desigur, în cazul unei instituții sociale cum este, de exemplu, restaurantul sau teatrul, regiunile pot fi localizate spațial (e.g. partea din față este scena sau partea restaurantului unde se serveşte mâncarea, iar culisele sau bucătăria restaurantului reprezintă partea din spate), dar acest lucru este exclus în cazul matematicii. Hersh rezolvă această problemă luând distincția ca aplicându-se activității matematice. Astfel, regiunea din față corespunde aspectului public al matematicii, iar regiunea din spate este reprezentată de matematica matematicienilor – i.e. matematica în cadrul informal al practicii matematice.

La prima vedere, o astfel de împărțire în regiuni nu pare a avea mult sens în cazul matematicii. Ideea din spatele distincției trasate de Goffman este aceea că între cele două regiuni avem o diferență structural-funcțională: regiunea din spate unde se fac pregătirile diferă semnificativ de spectacol şi de regiunea unde are loc acesta. Dar acest lucru pare a fi cât se poate de îndepărtat de felul în care funcționează matematica. Aici nu avem de-a face cu un spectacol în culisele căruia lucrurile sunt diferite de ce vedem pe scenă. Mare parte din activitatea matematicienilor constă în producerea / descoperirea de demonstrații pentru anumite teoreme, iar prezentarea

---

[4] Ubiratan D'Ambrosio 1997: 14.

[5] Reuben Hersh, „Mathematics has a front and a back," *Synthese* 88, nr. 2 (1991).

[6] O distincție oarecum similară găsim la David Corfield. În lucrarea sa *Towards a Philosophy of Real Mathematics* (Cambridge University Press, 2003) acesta distinge între filosofia matematicii reale şi restul filosofiei matematicii.

[7] A se vedea capitolul 3 al lucrării sale *The Presentation of Self in Everyday Life* (New York: Doubleday, 1956).

(în reviste de specialitate sau la conferințe) acestei activități (i.e. spectacolul) nu pare a diferi cu nimic de activitatea propriu-zisă (de ce se întâmplă în culise). Majoritatea filosofilor practicii matematice consideră această impresie ca fiind produsul unui program filosofic şi nu ca rezultând dintr-o cercetare atentă a matematicii sau a activității matematicienilor.[8] O astfel de cercetare oferă, în opinia lor, o cu totul altă imagine. După Hersh, ce observăm dacă privim atent felul în care se desfăşoară activitatea matematicienilor este că din față (din felul în care este prezentată) matematica pare precisă, ordonată, formală şi abstractă. În culise, însă, lucrurile stau cu totul altfel. Aici găsim o matematică fragmentată, intuitivă, neformală şi tentativă.[9]

Cel mai interesant aspect al acestei discuții este si cel mai inacceptabil din perspectiva viziunii tradiționale asupra matematicii. După Goffman,

> „Regiunea din spate sau culisele poate fi definită ca un loc, relativ la o anumită reprezentație, unde impresia transmisă de către reprezentație este în mod conştient contrazisă... Aici este locul unde proprietatea unei reprezentații de a transmite ceva mai mult decât ea este cu greu fabricată; aici sunt produse la vedere iluziile şi aparențele."[10]

Culisele nu au doar rolul de a permite persoanelor specializate să-şi desfăşoare activitatea fără a fi deranjate de cei din afară, ele ajută la păstrarea secretelor din spatele unui spectacol reusit. După Hersh, această „separare face posibilă păstrarea unui mit".[11]

Dar ce secrete se ascund în culisele matematicii, ce mit reuşesc acestea să păstreze? Nu este greu de sesizat cât de departe suntem cu această întrebare de zona de confort a filosofiei tradiționale a matematicii. Ce motive avem să părăsim această zonă şi să luăm în serios o astfel de întrebare? Printre argumentele în favoarea acestei reorientări către o filosofie a practicii matematice (sau, daca acceptăm împartirea în regiuni de mai sus, a culiselor matematicii), putem găsi următoarele[12]:

1. Probleme privitoare la verificabilitatea demonstrațiilor matematice: epistemologia specială a matematicii îşi întinde rădăcinile adânc în ceea ce pare să fie sursa obiectivității matematice – demonstrația matematică. Această tehnică specială, dacă este folosită corect, elimină orice dubiu şi odată cu asta orice posibilă dispută privind

---

[8] A se vedea Bernd Buldt, Benedikt Löwe & Thomas Müller, „Towards a New Epistemology of Mathematics," *Erkenntnis* 68, nr. 3 (2008): 315-318 pentru o analiză mai aprofundată a felului cum au contribuit anumite poziții filosofice la menținerea acestei impresii.

[9] Reuben Hersh, „Mathematics has a front and a back," 128.

[10] Goffman, *The Presentation,* 69, italicele mele.

[11] Hersh, „Mathematics has a front and a back," 129. Prin mit, Hersh înțelege "eşecul de a realiza că spectacolul văzut 'în față' este creat sau pus la cale 'în spatele scenei'."

[12] O tratare mai pe larg a acestor argumente poate fi găsită în Bart van Kerkhove, „Mathematical naturalism: Origins, guises, and prospects," *Foundations of Science* 11, nr. 1-2 (2006) şi Buldt, Löwe şi Müller, „Towards a New Epistemology of Mathematics."

statutul unei propoziții matematice. Bineînteles, pentru a şti că o demonstrație este corectă, ar trebui să fim capabili să o verificam. Dar, aşa cum ne arată practica matematică, acest lucru nu este mereu posibil, şi asta din diferite motive:

i) unele demonstrații sunt pur si simplu prea lungi pentru a fi verificate. Cineva poate intreba dacă avem în minte demonstrații umane, pentru că, dacă acesta este cazul, atunci această afirmație pare implauzibilă. Pentru a vedea de ce nu este implauzibilă, trebuie să admitem faptul că, in practică, demonstrațiile matematice seamănă foarte rar cu derivațiile formale riguroase pe care viziunea tradiționalistă asupra matematicii le prezintă a fi. De obicei, matematicienii folosesc demonstrații semi-formale condensate din care lipsesc paşi, fie pentru că sunt tratați in alta parte, fie pentru că sunt considerați suficient de clari pentru a fi lăsați la o parte. În acest context, a verifica o demonstrație nu echivalează pur și simplu cu a verifica dacă fiecare pas rezultă din cel sau cei anteriori, ci presupune (a) să cunoşti în detaliu tot ce a fost lăsat la o parte (pentru a fi tratat în altă parte) de către matematicianul care a făcut demonstrația şi (b) să fii capabil să înțelegi acei paşi considerați clari în mod intuitiv. Împovărată cu aceste două constrângeri, verificabilitatea demonstrațiilor nu mai pare o chestiune uşoară. Întorcându-ne acum la preocuparea privind implauzibilitatea afirmației de mai sus, putem spune: întotdeauna o demonstrație umană poate fi parcursă (poate fi citită de la un capat la celălalt) dar, având în vedere constrângerile (a) si (b) de mai sus, este posibil să nu poată fi întotdeauna verificabilă. Când spunem că unele demonstrații sunt *prea lungi* pentru a fi verificate, ceea ce vrem să subliniem este că, în unele cazuri, constrângerile (a) şi (b) nu pot fi (mulțumitor) satisfăcute.

ii) unele demonstrații implică folosirea calculatoarelor. Aceste demonstrații în mod clar nu pot fi parcurse, deci verificarea lor este... cel puțin o chestiune neplăcută. Nu putem spune că nu dispunem de nicio metodă de verificare pentru aceste cazuri, însă acestea sunt atât de departe de sensul tradițional al verificării unei demonstratii, încât este imposibil să le includem în aceeaşi categorie.

iii) de cele mai multe ori ne bazăm pe un grup mic de matematicieni experți pentru a verifica demonstrațiile. În unele cazuri, acest grup este cu adevărat mic (de exemplu, se consideră că doar aproximativ doisprezece matematicieni au fost capabili să înteleagă demonstrația lui Andrew Wiles pentru Teorema lui Fermat) şi, având în vedere amploarea unora dintre demonstrații, matematicienii nu fac verificarea în mod independent, ci împart aceasta sarcina între ei.

2. Probleme privitoare la continuitatea obiectului de studiu: în viziunea tradițională matematica este luată ca având acelaşi obiect de studiu de-a lungul aproape întregii sale istorii (mature). Dar, „cadrul conceptual al matematicii s-a schimbat atât de dramatic încât, de exemplu, identificarea numerelor aşa cum erau ele concepute de

greci cu descrieri axiomatice moderne pare de neacceptat. Că ar putea părea să fie altfel este practic produsul unui mit modern."[13]

3. Probleme privitoare la aprioricitate: o chestiune mai controversată privește posibilitatea existenței experimentelor în matematică.[14] Daca am arăta asta, distanța dintre matematică şi ştiința empirică s-ar micşora considerabil şi astfel s-ar îngropa statutul special pe care viziunea tradiționalistă o atribuie matematicii. Problema aici este că un experiment real (i.e. unul care este cât mai apropiat de sensul ştiințific al termenului) implică „un impact direct asupra unei situații empirice. Dar în vremuri în care cele mai interesante teorii matematice au atins un nivel uimitor de abstractizare, pare practic imposibil să le aplici la lumea empirică."[15] Şansele de dezamorsare a acestei probleme nu ne preocupă în aceasta lucrare, aşa că nu le vom discuta aici. Pentru scopul nostru este suficient să spunem că se fac încercari în această direcție.

Filosofia fațadei matematicii

Una dintre principalele nemulțumiri din spatele noii orientări din filosofia actuală a matematicii este aceea că, aşa cum este ea făcută în mod tradițional, filosofia matematicii are foarte puțin contact cu ceea ce se întâmplă în matematică. În cuvintele unora dintre inițiatorii acestei noi orientări, avem de-a face cu următoarea situație:

> „Filosofia matematicii pare a deveni un microcosmos pentru cele mai generale şi importante probleme din filosofie – probleme din epistemologie, metafizică şi filosofia limbajului – şi pentru studierea acelor părți ale matematicii la care apelează cel mai des filosofii (logica, teoria mulțimilor, aritmetica) părând a avea rolul de a testa meritele unor viziuni filosofice generale despre existența entităților abstracte sau plauzibilitatea unei anumite viziuni asupra cunoaşterii umane. Nu este nimic în neregula, desigur, cu o astfel de cercetare, chiar dacă este irelevantă pentru preocupările matematicienilor şi a istoricilor matematicii. Este pertinent, totuşi, să întrebăm dacă nu sunt şi alte sarcini pentru filosofia

---

[13] Buldt, Löwe şi Müller, „Towards a New Epistemology of Mathematics," 314.

[14] A se vedea de exemplu discuția din Jean Paul Van Bendegem, "Mathematical Experiments and Mathematical Pictures," în IgorDouven şi Leon Horsten (eds.), *Realism in the Sciences.Proceedings of the Ernan McMullin Symposium Leuven 1995* (Leuven: Leuven University Press, 1996), 203–216; Jean Paul Van Bendegem, "What, if anything, is an experiment in mathematics?" în D. Anapolitanos, A.Baltas, & S. Tsinorema (eds.), *Philosophy and the many faces of science* (London: Rowman & Littlefield, 1998); Bart Van Kerkhove şi Jean Paul Van Bendegem, "Pi on Earth, or Mathematics in the Real World," *Erkenntnis* 68, nr. 3 (2008).

[15] Bart van Kerkhove, „Mathematical naturalism: Origins, guises, and prospects," *Foundations of Science* 11, nr. 1-2 (2006) : 15.

matematicii, sarcini care apar fie în legătură cu practica actuală a matematicii, fie din istoria matematicii."[16]

Pentru o mai bună înțelegere a acestei nemulțumiri, cel mai potrivit este să ne uităm la felul în care sunt abordate (cât de multă importanță are în răspunsul la aceste probleme ce se întâmplă în matematică) două dintre problemele principale ale filosofiei tradiționale a matematicii: problema existenței entităților matematice şi problema cunoaşterii matematice.

Disputa realism / antirealism

Unul dintre cele mai cunoscute si mai puternice curente filosofice din filosofia occidentală a fost tradiția semantică[17] (plecând de la Bolzano şi Frege, trecând prin Wittgenstein şi culminând cu Cercul de la Viena). În ce priveste matematica, principala temă pe agenda filosofilor care au activat în această tradiție era aceea de a arăta că cel puțin unele dintre principiile fundamentale ale matematicii sunt analitice, i.e. că putem localiza sursa statutului special al matematicii (necesitatea adevărurilor matematice şi aprioricitatea cunoaşterii matematice) în felul în care este folosit limbajul. Acest program a condus la o orientare a atenției (în filosofia matematicii) către aspectele lingvistice ale cercetării matematice. Nu este locul aici pentru o prezentare detaliată a acestei tradiții, pentru preocupările noastre fiind suficientă o ilustrare a felului în care o problema din filosofia matematicii poate fi transformată intr-o problemă privitoare la limbaj şi în ce măsură mai este relevantă în acest context practica matematică. Găsim aşa ceva la Dummett, și anume în felul în care vede acesta disputa dintre realişti şi antirealişti din filosofia matematicii.

Michael Dummett consideră că, atunci când avem în vedere disputele metafizice, avem o dificultate în a înțelege conținutul acestor doctrine. În fiecare caz ni se prezintă o imagine alternativă. Dar conținutul non-pictorial al acestor imagini este neclar. Ne lovim astfel de următoarele dificultăți:

(i) nu ştim în ce parte înclină balanța, deoarece nu există un criteriu pe baza căruia să stabilim cine este victorios.

(ii) nu putem evalua argumentele metafizice, o astfel de evaluare presupunând o cunoaştere a conținutului tezelor opuse pe baza căreia să decizi care este adevărată. Dar cum nu putem explica în termeni „non-pictoriali” la ce conduce acceptarea uneia dintre aceste imagini, nu avem o astfel de cunoaştere.[18]

[16] William Asprey şi Philip Kitcher, *History of Philosophy of Modern Mathematics* (University of Minnesota Press, 1988), 17.
[17] Acest curent mai este cunoscut şi drept „cotitura lingvistică”.
[18] Dummett, *Frege and Other Philosophers* (Oxford: Clarendon Press, 1991), 12-13.

După Dummett, un mod de a scăpa de această dificultate ar fi retragerea pe un plan semantic. Astfel, după el, disputa dintre realişti şi oponenții lor este cel mai bine caracterizată nu ca privind existența unor entități de un anumit tip problematic, ci ca privind o clasă de enunțuri şi ce face un enunț din acea clasă adevărat atunci când este adevărat. Din această perspectivă, realismul este doctrina conform căreia enunțurile din clasa disputată au condiții de adevăr care transcend posibilitatea verificării, iar antirealismul este acea doctrină conform căreia enunțurile clasei disputate au doar condiții de adevăr verificaționiste.

Nu este deloc greu de realizat cam cât de irelevant este ce se întâmplă în matematică – activitatea de zi cu zi a matematicienilor – pentru părțile angajate în această dispută.

Cunoaşterea matematică

O altă problemă deosebit de importantă aflată pe agenda filosofiei contemporane a matematicii, în discutarea căreia practica matematică nu joacă niciun rol, este cea a accesului epistemic la obiectele abstracte (la lumea obiectelor matematice). Cei mai afectați de această problemă sunt (după cum este de aşteptat) realiştii matematici, care se văd nevoiți să furnizeze o epistemologie satisfăcătoare care să-i ajute în susținerea poziției lor ontologice. Dar, aşa cum este ea formulată de către Benacerraf[19], problema se extinde şi asupra nominaliştilor.[20] În celebra sa lucrare din 1973, acesta atrage atenția asupra următoarei dileme care apare în epistemologia matematicii atunci când avem în vedere adevărul şi cunoaşterea matematice: pe de o parte avem nevoie de obiectele abstracte deoarece se consideră în mod obişnuit că cea mai bună explicație a adevarului matematic este cea care face apel la acestea, pe de altă parte trebuie să le evităm deoarece nu putem obține o viziune satisfăcătoare asupra cunoaşterii matematice decât renunțând la orice referință la obiectele matematice. O foarte mare parte a filosofiei contemporane a matematicii este generată de încercările de rezolvare a acestei probleme.

Ca argument împotriva realismului matematic, problema poate fi formulată astfel: pentru a cunoaşte un anumit tip de obiecte, trebuie să existe o interacțiune cauzală între subiectul cunoscător şi cel puțin mostre ale obiectelor de acel tip; dar, cum o astfel de interacțiune cu obiectele matematice iese din discuție (deoarece, fiind abstracte, obiectele matematice nu sunt localizate în spațiu-timp şi nu interacționează cauzal), nu putem vorbi despre o cunoaştere a lor. Să examinăm mai atent acest argument:

---

[19] Benacerraf, „Mathematical Truth," *Journal of Philosophy* 70, nr.19 (1973): 661-679.

[20] După Burgess şi Rosen, „în timp ce Putnam (1971) a încurajat mai mult decât orice altă lucrare nemulțumirea față de orice nominalism doar negativ, Benacerraf (1973) a încurajat mai mult decât orice altă lucrare simpatia față de nominalism" (John P. Burgess şi Gideon Rosen, *A Subject with No Object. Strategies for Nominalistic Interpretations of Mathematics* (Oxford: Clarendon Press, 1997), 28).

P1: pentru ca opinia noastră că 7 + 3 = 10 să fie luată drept cunoaştere, trebuie să existe o relaţie potrivită între aceasta şi faptul că 7 adunat cu 3 fac 10;

P2: conform teoriei cauzale a cunoaşterii, această relaţie este considerată a fi interacţiunea cauzală;

P3:dar obiectele matematice sunt inerte cauzal;

C: deci nu putem avea o cunoaştere a acestora.

Există mai multe strategii de răspuns folosite de platonicieni pentru a respinge acest argument (cele mai multe privesc premisa P2). Pentru a vedea cât de irelevant este ce se întâmplă în matematică (atât sub aspectul practicii actuale a matematicii, cât şi a istoriei acestui domeniu) în contextul acestei discuţii, vom face o scurtă prezentare a celor mai cunoscute dintre aceste strategii.

(i) este acceptată premisa 2, dar este postulată o facultate epistemică, care le permite oamenilor să înţeleagă cum stau lucrurile pe tărâmul obiectelor matematice. O astfel de strategie este propusă de Gödel, care consideră că suntem înzestraţi cu o intuiţie matematică. Problema cu această strategie este că această facultate pare a fi la fel de misterioasă ca şi lumea obiectelor matematice.

(ii) se acceptă premisa 2 şi se argumentează că cel puţin unele obiecte matematice sunt concrete şi sunt cunoscute cu ajutorul percepţiilor senzoriale obişnuite.[21]

(iii) se respinge premisa 2. Dacă ne uităm la contextul în care apare pentru prima oară, dată de către Goldman, teoria cauzală a cunoaşterii[22], la motivaţia din spatele ei[23] şi la statutul ei[24], observăm nu numai că nu este nici pe departe o teorie general acceptată în literatura de specialitate, dar şi că nu este semnificativă pentru problema care ne interesează pe noi (viz. cunoaşterea matematică).

(iv) se acceptă o variantă a premisei 2 şi se arată că este compatibilă cu platonismul. Dacă adoptăm distincţia lui Davidson între relaţiile cauzale şi explicaţiile cauzale, putem da următoarea versiune a teoriei cauzale a cunoaşterii: nu putem cunoaşte că o anumită propoziţie este adevărată decât dacă acea propoziţie trebuie să fie folosită într-o explicaţie cauzală a cunoaşterii noastre că propoziţia este adevărată.[25] Dacă ţinem cont de faptul că matematica este parte a

---

[21] A se vedea de exemplu Maddy, *Realism in Mathematics* (Oxford University Prress, 1990).

[22] Sugestia lui Goldman privea cazuri de tipul exemplelor lui Gettier, i.e. cazuri de cunoaştere empirică a faptelor contingente despre entităţi concrete.

[23] Goldman urmărea să găsească un răspuns la problema de ce este nevoie pentru ca o opinie adevărată justificată să conteze drept cunoaştere, iar el a propus legăturile cauzale ca parte a unui răspuns la această întrebare şi nu la orice întrebare despre ce se cere pentru ca o opinie adevărată să fie justificată.

[24] Această teorie a început să întâmpine din ce în ce mai multe dificultăţi şi a ajuns să fie considerată mai puţin satisfăcătoare decât alte teorii non-cauzale ale cunoaşterii

[25] Mark Steiner, „Mathematics, explanation, and scientific knowledge," *Noûs* 12, nr. 1 (1978): 20.

oricărei teorii ştiinţifice, observăm că această variantă a teoriei cauzale este compatibilă cu platonismul, pentru că axiomele matematicii figurează în orice explicaţie a cunoaşterii noastre a acestor axiome.

(v) se arată că premisa 2 intră în conflict cu cunoaşterea ştiinţifică. Dacă plecăm de la relaţiile cauzale avem următoarea versiune a teoriei cauzale a cunoaşterii: nu putem cunoaşte nimic despre x- uri decât dacă această cunoaştere este cauzată de cel puţin un eveniment în care participă un x. O versiune mai tare ar fi: nu cunoaştem ceva despre x- uri decât daca însăşi un x participă în cauza acelei cunoaşteri.[26] Steiner argumentează că, daca luăm în calcul mecanica cuantică, observăm că această versiune a teoriei cauzale a cunoaşterii intră în conflict cu ceea ce se întâmplă în ştiinţă unde, în cazul neutronului de exemplu, nu avem de-a face cu o relaţie cauzală. Problema este, după Steiner, aceea că această teorie ia întreaga cunoaştere pe modelul percepţiei, iar inferenţa ştiinţifică nu poate fi privită aşa.

(vi) Putnam[27] deschide calea unei abordări indirecte a epistemologiei: succesul ştiinţei este luat ca justificând, pe lângă credinţa în entităţile teoretice, şi credinţa în entităţile matematice, i.e. aceleaşi criterii sunt luate ca justificând cele două tipuri de atitudini.

Începuturile filosofiei culiselor matematicii

Am văzut în secţiunea precedentă cum putem avea o filosofie a matematicii fără a ne preocupa foarte mult (aproape deloc) cu ce se întâmplă efectiv în matematică. Există şi un alt fel de a face filosofia matematicii – unul care să acorde o importanţă mai mare practicii matematice şi istoriei matematicii? Cu siguranţă că da. În continuare vom arăta în ce fel aceste două aspecte ale matematicii pot fi relevante filosofic, prezentând viziunea asupra matematicii a doi dintre principalii iniţiatori ai filosofiei practicii matematice: Lakatos şi Tymoczko.

Istoria matematicii

O primă încercare de a oferi o viziune filosofică diferită asupra matematicii (una în care este luată în serios istoria matematicii) găsim la Imre Lakatos[28]. În linii mari, acesta urmăreşte să arate că putem extinde failibilismul popperian în domeniul matematicii. El oferă două argumente în acest sens. Strategia sa constă, în primul

[26] Steiner, „Mathematics, explanation, and scientific knowledge," 20 – 22.

[27] Hilary Putnam, *Philosophy of Logic* (London: Allen and Unwin, 1971).

[28] Am aici în vedere argumentele oferite de Imre Lakatos în „A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics," *British Journal for the Philosophy of Science* 27, nr.3 (1976), 201-223 şi în *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery* (Cambridge University Press, 1976).

rând[29], în a distinge între două tipuri de teorii: teoriile euclidiene[30] şi teoriile cvasi-empirice. Teoriile euclidiene sunt sisteme deductive în care se pleacă de la un set de axiome astfel încât „adevărul, scurgându-se de sus în jos prin canalele sigure care prezervă adevărul ale inferenţelor valide, inundă întregul sistem."[31] Dezvoltarea unei astfel de teorii se face în trei stadii: stadiul pre-ştiinţific al încercării şi erorii; stadiul fundaţional – de reorganizare a disciplinei; stadiul rezolvării problemelor din interiorul sistemului. Metodologia, în cazul acestui tip de teorie, este una anti-speculativă – regula de bază aici fiind căutarea de axiome evidente.

În cazul teoriilor cvasi-empirice, spre deosebire de cele euclidiene, adevărul nu mai inundă sistemul scurgându-se de la axiome către restul enunţurilor teoriei. Aici „injectarea" valorilor de adevăr se face la baza sistemului. Problema e că adevărul curge numai de la vârf spre baza sistemului şi nu invers. Astfel, în aceste teorii nu avem de-a face cu „transmiterea adevărului, ci mai degrabă cu retransmiterea *falsităţii* – de la teoreme speciale aflate la baza sistemului în sus, spre setul de axiome."[32] Specificul dezvoltării unei astfel de teorii constă în aceea că se pleacă de la probleme ale căror soluţii sunt supuse unor teste severe, urmate de infirmări, de înlocuiri cu teorii rivale, totul petrecându-se într-un mediu speculativ, atitudinea generală fiind una critică. În cazul teoriilor cvasi-empirice, nu se mai pune problema unei metodologii anti-speculative, regula aici fiind găsirea unor ipoteze cu putere explicativă şi euristică mare – alegerea între acestea este ghidată de o atitudine critică severă.

Ce fel de teorie este matematica? Cu siguranţă pare a fi o teorie euclidiană. Lakatos ne atrage, însă, atenţia asupra programelor fundaţionaliste din filosofia matematicii. Eşecul acestora, consideră el, „a condus pe neaşteptate la concluzia că o reorganizare euclidiană a matematicii ca întreg ar putea fi imposibilă; că cel puţin cele mai bogate teorii matematice sunt, ca teoriile ştiinţifice, cvasi-empirice."[33] Cercetarea fundamentelor matematicii, aşa cum a fost ea întreprinsă de Russell sau de Hilbert[34], a avut drept obiectiv reorganizarea matematicii ca un sistem euclidian[35] în care

[29] Dacă este să ţinem cont de perioada publicării, ar fi mai corect să spunem „în al doilea rând", pentru că argumentul prezentat în continuare apare într-o lucrare a lui Lakatos publicată la treisprezece ani după ce a apărut „Proofs and Refutations", în care prezintă celălalt argument expus de noi. Din motive care ţin de economia prezentării, noi vom discuta aceste argumente în altă ordine decât cea cronologică.

[30] Sunt numite astfel deoarece exemplul paradigmatic de astfel de teorie este geometria euclidiană.

[31] Lakatos, „A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics," 205.

[32] Lakatos, „A Renaissance," 205 – 205.

[33] Lakatos, „A Renaissance," 207.

[34] Lakatos consideră că intuiţionismul nu a urmărit reorganizarea matematicii şi, de aceea, nu îl ia în discuţie.

[35] Editorii articolului lui Lakatos (J. Worrall şi G. Currie) atrag atenţia ca filosofia lui Hilbert nu este cel mai bine încadrată în euclidianism deoarece metamatematica nu are structura deductivă cerută pentru a fi considerată un sistem euclidian.

adevărul, injectat la vârful sistemului (prin axiome), îl inundă în întregime. Lakatos nici nu explică de ce aceste programe au fost de la bun început destinate eşecului, nici nu argumentează pentru imposibilitatea realizării unui astfel de program, ci se mulţumeşte să treacă în revistă dificultăţile care au condus în cele din urmă la abandonarea logicismului, respectiv a formalismului şi să semnaleze înclinaţia din ce în ce mai accentuată a unor filosofi de a privi matematica mai degrabă ca cvasi-empirică.

Plecând de la dihotomia amintită mai sus şi de la eşecul încercărilor de a reorganiza matematica după modelul euclidian, Lakatos conchide că matematica este cvasi-empirică. În acest punct, trebuie să menţionăm că prin conceptul „cvasi-empiric" Lakatos are în vedere doar felul în care are loc transferul valorilor de adevăr într-un sistem şi nu are nici o legătură cu sensul obişnuit al conceptului „empiric". El atenţionează că „o teorie care este cvasi-empirică în sensul meu poate fi fie empirică, fie neempirică în sensul obişnuit..."[36] Pentru a determina dacă o teorie cvasi-empirică este sau nu empirică în sensul obişnuit, trebuie să cunoşti natura falsificatorilor săi potenţiali: dacă aceştia sunt enunţuri empirice, atunci teoria este empirică. Daca matematica este cvasi-empirică, atunci trebuie sa existe numiţi falsificatori potenţiali care să funcţioneze în cadrul acesteia. Care este natura lor? Dacă avem în vedere teoriile matematice formale, atunci avem de-a face cu nişte *falsificatori euristici*. Aceştia apar în situaţia în care se observă că rezultatele obţinute într-o teorie formală intră în conflict cu cele ale teoriei informale. Acesta nu reprezintă, însă, un răspuns la întrebarea de mai sus, ci doar transferul ei la un alt nivel. Ce ne interesează pe noi este natura falsificatorilor potenţiali ai matematicii informale. Lakatos nu răspunde la această întrebare, ci spune doar că „studiile istorico-critice vor conduce probabil la o soluţie sofisticată şi compusă."[37]

Acest argument este departe de a fi convingător. În primul rând, eşecul celor două programe fundaţionaliste luate în discuţie nu spune nimic în legătură cu posibilitatea sau imposibilitatea unei reorganizări euclidiene a matematicii, ci doar că această reorganizare nu poate fi întreprinsă în felul în care au gândit-o Russell şi Hilbert. În al doilea rând, pentru a accepta că matematica este failibilă, trebuie să se indice falsificatorii potenţiali, dar am văzut că Lakatos nu face acest lucru. Mai găsim, însă, la Lakatos[38] un argument pentru failibilitatea matematicii, care poate fi luat în completarea primului. În acesta se pleacă de la istoria matematicii şi de la dinamica dezvoltării acesteia. Spre deosebire de primul argument, în care Lakatos se opune înţelegerii matematicii ca fiind o teorie euclidiană, în acest argument el se opune unei viziuni formaliste asupra matematicii, care urmăreşte curăţarea acesteia de orice

[36] Lakatos, „A Renaissance," 206.

[37] Lakatos, „A Renaissance," 218.

[38] Imre Lakatos, „Proofs and Refutations (I)," *British Journal for the Philosophy of Science* 14, nr. 53 (1963), 1-25.

incertitudine şi înlocuirea ei cu anumite sisteme formale. O astfel de viziune este departe de a fi corectă, iar pentru a vedea asta, nu trebuie decât să ne uităm la istoria matematicii şi la metodologia acesteia. În urma acestei cercetări, nu putem decât să conchidem că „Istoria matematicii şi logica descoperirii matematice... nu pot fi dezvoltate fără a critica şi, în cele din urmă, respinge formalismul.”[39] Asta deoarece sunt două lucruri pe care sigur le vom observa de aici. În ceea ce priveşte istoria matematicii, vom observa că formaliştii „neagă statutul de matematică unei mari părți din ce s-a considerat de obicei ca fiind matematică şi nu pot spune nimic despre creşterea acesteia.”[40] În ce priveşte metodologia matematicii, vom observa că, dacă identificăm matematica cu matematica formalizată, nu mai putem vorbi decât de două tipuri de descoperiri: în primul rând se pot descoperi soluții la problemele pe care le poate rezolva şi o maşină Turing; în al doilea rând putem descoperi soluții la probleme pentru care nu există altă metodă de rezolvare decât prin ghicire. Dar, ne atrage atenția Lakatos, „această alternativă între raționalismul unei maşini şi iraționalismul ghicirii oarbe nu ține pentru matematica vie: o cercetare a matematicii *informale* va scoate la iveală o logică situațională mai bogată pentru matematicieni...”[41]

Istoria matematicii ne prezintă o disciplină cu totul diferită de pretențiile formaliste. Aici nu sunt de găsit teorii matematice curățate de orice impuritate sau incertitudine ca în „raiul formalist”, ci conjecturi aflate într-un lung proces de încercare şi eroare care implică contraexemple care infirmă primele încercări de demonstrare. Istoria matematicii ne prezintă o disciplină care creşte printr-o îmbunătățire continuă a încercărilor speculative şi a criticismului, după logica demonstrațiilor şi infirmărilor.

Practica matematică

După Kripke,

> „oricine a lucrat cu o maşină de calcul ştie că maşina poate să dea un răspuns la întrebarea dacă cutare şi cutare număr este prim. Nimeni nu a calculat şi nici nu a demonstrat că numărul este prim; dar maşina a dat răspunsul: acest număr este prim. Atunci, dacă noi credem că numărul este prim, credem aceasta pe baza cunoaşterii pe care o avem despre legile fizicii, construcția maşinii ş.a.m.d. Aşadar, noi nu credem asta pe baza unor dovezi pur *a priori*. Noi credem că numărul este prim (dacă ceva este în general *a posteriori*) pe baza unor dovezi *a posteriori*. Totuşi, poate că aceasta ar putea să fie cunoscută *a priori* de către cineva care a făcut calculul corespunzător.”[42]

---

[39] Lakatos, „Proofs and Refutations (I),” 5 – 6.

[40] Lakatos, „Proofs (I),” 2.

[41] Lakatos, „Proofs (I),”5.

[42] Saul Kripke, *Numire si necesitate* (Bucuresti: Editura All, 2001), 37.

Acceptarea acestei situații nu este de natură să-i pună prea multe probleme unui susținător al statutului special al matematicii. Ce ar fi, însă, dacă am lua în calcul cazul unei teoreme matematice care a fost demonstrată de un computer, dar a cărei demonstrație este imposibil de verificat de către un matematician? Ne-ar face apariția unui astfel de caz în cadrul matematicii şi acceptarea lui de către matematicieni ca reprezentând o extindere veritabilă a cunoaşterii matematicii pure să ne revizuim poziția în legătură cu distincția dintre matematică şi științele naturii? Thomas Tymoczko consideră că da, iar cazul pe care îl ia în discuție este cel al teoremei celor patru culori.

Conform acestei teoreme, orice hartă de pe un plan sau o sferă poate fi colorată doar cu ajutorul a patru culori în aşa fel încât să nu existe regiuni învecinate care să fie colorate cu aceeaşi culoare. În ciuda aparentei simplități a acestei probleme, ea s-a dovedit foarte rezistentă la încercările matematicienilor de a o demonstra. Asta până în 1977, când K. Appel, W. Haken şi J. Koch publică o demonstrație a ei. Până aici, nimic surprinzător; surpriza apare când aflăm că în unul dintre paşii esențiali pentru demonstrație, cei trei s-au folosit de un IBM 370 – 160A, şi că fără ajutorul computerului nu s-ar fi putut ajunge la demonstrația teoremei. În mare, demonstrația este una prin inducție matematică în care se pleacă de la trei cazuri, dintre care primul este banal, al doilea cuprinde câteva subcazuri, iar al treilea are peste o mie de subcazuri, pentru tratarea majorității dintre acestea fiind nevoie de ajutorul computerului.[43] Acceptarea acestei teoreme de către matematicieni este problematică, după părerea lui Tymoczko, deoarece ea nu a avut parte de o demonstrație în sensul tradițional al cuvântului – „nici un matematician nu a văzut o demonstrație a 4CT şi nici măcar o demonstrație că aceasta ar avea o demonstrație"[44] La baza admiterii ei au stat considerații de altă natură decât cele obişnuite: rezultatul unui experiment empiric.

Morala la care ajunge Tymoczko în urma analizei acestui caz este aceea că demonstrațiile asistate de computer „aduc un nou tip de failibilitate în matematică, dar acesta este prețul progresului."[45] La baza argumentului său stă următoarea viziune cu privire la demonstrația matematică. El distinge între trei caracteristici ale demonstrațiilor: sunt convingătoare, sunt formalizabile şi sunt verificabile. Cea mai importantă dintre acestea este ultima, deoarece de ea depinde cunoaşterea matematică – nu putem spune că avem cunoaştere în legătură cu o teoremă matematică până nu (producem sau) verificăm o demonstrație a ei – precum şi statutul special al acesteia – „Dacă există o demonstrație a unui enunț matematic, atunci din moment ce o

[43] Thomas Tymoczko, „The Four-Color Problem and its Philosophical Significance," *Journal of Philosophy* 76, nr. 2 (1979), 68.
[44] Tymoczko, „The Four-Color Problem," 58.
[45] Thomas Tymoczko, „Computers, Proofs and Mathematicians: A Philosophical Investigation of the Four-Collor Proof," *Mathematics Magazine* 53, nr. 3 (1980), 136.

demonstrație este riguroasă, enunțul este adevărat în mod absolut,”[46] dar o demonstrație neverificabilă nu poate conta ca demonstrație. Strategia sa este să arate că în cazul teoremei celor patru culori nu avem de-a face cu o demonstrație în sensul tradițional, pentru că cea propusă de Appel, Haken şi Koch nu este verificabilă. Nefiind verificabilă, acceptarea ei se face printr-un soi de apel la autoritate.

Pentru a ilustra mai bine distanțarea față de concepția obişnuită de demonstrație pe care o implică teorema celor patru culori, Tymoczko introduce parabola matematicianului marțian Simon. Acesta este un geniu matematic a cărei capacitate de a rezolva probleme matematice i-a dus un prestigiu incredibil în ochii matematicienilor marțieni. El a ajuns chiar la demonstrații pe care ceilalți matematicieni de pe Marte nu le-au putut verifica, dar pe care aceştia le-au acceptat totuşi pe baza încrederii în capacitățile extraordinare ale lui Simon.[47] Este clar că în acest caz avem o distanțare față de modul standard de a face matematică. Apelul matematicienilor la autoritatea lui Simon pentru acceptarea unor teoreme nu este foarte diferit, în viziunea lui Tymoczko, de apelul la autoritatea computerelor. „Dacă alegem să privim unul dintre apeluri ca bizar iar pe celălalt ca legitim, nu poate fi decât deoarece avem o evidență puternică pentru a avea încredere în ultimul şi nici una pentru primul.”[48] Cum evidența de care ne folosim pentru a justifica încrederea în computere este de natură empirică (priveşte aspecte ale construirii computerelor) atunci matematicienii se bazează, în ultimă instanță, pe considerații empirice în acceptarea teoremei celor patru culori. De aici decurg două consecințe: cunoaşterea matematică este failibilă – computerele pot greşi – şi metodele de a obține cunoaştere în matematică nu mai pot fi considerate atât de deosebite de cele din ştiințele naturii – putem înțelege verificarea computerizată a subcazurilor celui de al treilea caz ca pe un experiment empiric.

Forța argumentului lui Tymoczko depinde de înțelegerea verificabilității ca fiind o caracteristică esențială a demonstrațiilor. Dacă am putea arăta că această înțelegere este greşită, atunci am putea sa argumentăm că nu avem de-a face cu o distanțare de concepția tradițională de demonstrație, în cazul teoremei celor patru culori, şi astfel am scăpa de implicațiile supărătoare care decurg de aici. Un argument de acest tip găsim la Paul Teller. După acesta, în cazul teoremei celor patru culori, „ce avem este un nou mod de a verifica, nu o noutate cu privire la ce este verificat.” (Teller 1980: 799). Teller îl acuză pe Tymoczko că a înțeles greşit relația dintre verificabilitate şi demonstrație. În nici un caz nu putem spune, după Teller, că dacă nu este verificabilă, o demonstrație nu este demonstrație. Verificabilitatea nu face parte din demonstrație, ci ne ajută doar să vedem dacă este corectă. Cum aceasta este

[46] Tymoczko, „Computers, Proofs and Mathematicians,” 132.
[47] Tymoczko, „The Four-Color Problem,” 71–72.
[48] Tymoczko, „The Four-Color Problem,” 71.

graduală – capacitatea de a verifica o demonstrație diferind de la om la om (există cazuri de demonstrații pe care numai un număr foarte mic de matematicieni le poate verifica) şi variind în funcție de instrumentele folosite – nu avem nimic deosebit în cazul teoremei celor patru culori. Dacă înțelegem corect rolul verificabilității în raport cu demonstrațiile, ne dăm seama că utilizarea computerului pentru a demonstra o problemă matematică nu este decât o extindere a mijloacelor folosite în mod obişnuit pentru verificare şi nu un nou tip de demonstrație.

Există, însă, o altă cale pe care o poate urma cineva pentru a argumenta că în matematică sunt folosite considerații empirice, fără a trebui să apeleze la imposibilitatea verificării demonstrațiilor asistate de computer. Detlefsen şi Luker identifică o astfel de cale. Ei argumentează că „folosind un raționament analog cu cel folosit de Tymoczko în analiza sa a demonstrației teoremei celor patru culori, cineva poate arăta că o mare parte din matematica tradițională – matematica bazată pe demonstrații „verificabile" – are un caracter empiric." (Detlefsen şi Luker 1980: 804). Am spus ceva mai sus că Tymoczko distinge între trei caracteristici ale demonstrației – sunt convingătoare, sunt formalizabile şi sunt verificabile – şi am văzut că în argumentul său pleacă de la ultima dintre acestea. Detlefsen şi Luker pleacă, în argumentul lor, de la prima caracteristică: de la faptul că demonstrațiile trebuie să fie convingătoare. Ei disting patru asumpții de care este nevoie pentru încrederea în rezultatul unui calcul: (a) algoritmul folosit este corect din punct de vedere matematic; (b) programul folosit este o implementare corectă a acestui algoritm; (c) cel care calculează execută corect programul; (d) rezultatul prezentat chiar a fost obținut (ibidem, pg. 808). Nu este greu de sesizat că, pentru a evalua validitatea punctelor (c) şi (d), trebuie să ne folosim de considerații empirice. Dacă înțelegem demonstrațiile matematice ca implicând astfel de calcule, atunci trebuie să acceptăm că punctele de mai sus fac parte din demonstrații şi că, astfel, există un ingredient empiric care se furişează în majoritatea acestora.

Daca acceptăm rezultatele lui Detlefsen şi Luker, atunci trebuie sa acceptăm că cele două consecințe scoase în evidență de Tymoczko în contextul discuției despre demonstrațiile asistate de computer se aplică şi unei părți mari din matematica tradițională.

O nouă filosofie a matematicii?

O problemă importantă pe care ne-o putem pune în acest context este următoarea: este filosofia practicii matematice o extindere a filosofiei tradiționale a matematicii sau este ceva cu totul diferit? O altă intrebare, sugerată de prima, este aceasta: dacă sunt diferite, sunt compatibile? Unii susținători ai acestui nou program din filosofia matematicii consideră că cele două perspective sunt incompatibile.[49] Corfield[50], de exemplu, consideră că aplicând „filtrul fundaționalist" nu putem obține o filosofie a matematicii reale şi că, astfel, orice proiect dedicat înțelegerii felului in care funcționează matematica trebuie să se distanțeze de modul tradițional de a face filosofia matematicii. De asemenea, din felul în care am ales să prezentăm, la începutul acestei lucrări, diferența dintre cele două programe din filosofia matematicii (viz. ca filosofia fațadei matematicii şi filosofia culiselor matematicii), reiese că avem de-a face cu două lucruri diferite. O poziție diferită găsim la Ferreiros şi Gray.[51] Aceştia consideră că „a *depăşi* studiile fundaționaliste nu este în niciun fel acelaşi lucru cu a le *respinge*."[52]

Cea mai interesantă ilustrare a felului în care luarea în serios a practicii matematice ne îndepărtează de felul tradițional de a face filosofia matematicii o găsim la Maddy.

După cum se ştie, proiectul susținut de Penelope Maddy în filosofia matematicii este acela de a extinde naturalismul lui Quine astfel încât să cuprindă şi matematica. Maddy consideră că metodologia matematicii este cel mai corect evaluată, aparată sau criticată de pe pozițiile matematicii, nu ale filosofiei sau ştiinței. Spre deosebire de Quine, care vede justificarea ultimă a practicii matematice ca stând în aplicarea acesteia în ştiință, Maddy atrage atenția asupra aparatului justificatoriu propriu matematicii şi militează pentru o concentrare a atenției – atunci când se pune problema justificării – exclusiv asupra considerațiilor intra-matematice.

Judecând în acord cu propria sa viziune naturalistă, Quine ia enunturile matematice ca fiind justificate doar dacă sunt susținute de metode ştiințifice, i.e. daca sunt aplicate în ştiință, şi astfel, pentru el, matematica justificată este echivalentă cu matematica aplicată, partea neaplicata fiind o recreație matematică. După Maddy, „matematica nu răspunde în fața niciunui tribunal extra-matematic şi nu are nevoie de alte justificări în afara demonstrațiilor şi a metodei axiomatice."[53] Din această perspectivă, filosoful trebuie să urmeze matematica oriunde îl conduce aceasta: „dacă vrei să găseşti un răspuns la o problemă legată de metodologia matematicii, nu are rost să te uiți la chestiunile filosofice tradiționale privitoare la natura entităților matematice, ci la nevoile şi scopurile matematicii însăşi."[54]

[49] Lakatos (a se vedea discuția de mai sus) şi Kitcher, de exemplu, argumentează împotriva programelor fundaționaliste.

[50] Corfield, *Towards a Philosophy of Real Mathematics.*

[51] Jeremy Gray & Jose Ferreiros, "Introduction," în Jeremy Gray & Jose Ferreiros (eds.) *Architecture of Modern Mathematics* (Oxford University Press, 2006). A se vedea, de asemenea, şi Paolo Mancosu, "Introduction," in Paolo Mancosu, *The Philosophy of Mathematical Practice* (OUP Oxford, 2008).

[52] Ferreiros şi Gray, "Introduction," 5.

[53] Penelope Maddy, *Naturalism in Mathematics* (Oxford University Press, 1997), 184.

[54] Maddy, *Naturalism,* 191.