Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en filosofía de la ciencia

Filosofía de las matemáticas y lógica de la ciencia

La crítica de Berkeley al cálculo de Newton

Tesis

que para optar por el grado de:

Maestro en filosofía de la ciencia

presenta:

Mauricio Algalan Meneses

Tutor:

Dr. Cristian Alejandro Gutiérrez Ramírez, FFyL UNAM

Comité tutoral:

Dr. Cristian Alejandro Gutiérrez Ramírez FFyL UNAM

Dra. Laura Benítez Grobet IIF UNAM

Dr. Leonardo Ruiz Gómez FF UP

Dr. Elías Fuentes Guillén FC UNAM

Dr. Alejandro Vázquez del Mercado FFyL UNAM

Ciudad Universitaria, CDMX, Noviembre 2019

Índice general

Índice de figuras

Prefacio

Agradezco a la Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca académica que me otorgó desde agosto de 2016 hasta agosto de 2018. Esta tesis es el producto de años de inquietud acerca de la naturaleza de las matemáticas. Hace ya bastantes años, estudiando Ingeniería en Computación, en la entonces ENEP Aragón, Luis Ramírez Flores, profesor muy querido por la ahora facultad, nos enseñaba de manera magistral matemáticas para ingeniería. Su apoyo y dedicación a los alumnos es legendario y siempre será uno de los profesores más recordados por parte del exalumnado. Parte de la dedicación que profesaba a sus cursos incluía explicar temas relacionados con las materias, pero que por el tipo de carrera no se incluían en el temario, como aritmética de infinitos, teoría del caos, entre otras cosas. Fueron estos temas los que siempre me dejaron la duda de qué eran las matemáticas en su conjunto y en su práctica. Años más adelante leí el libro *Understanding Infinity* (Gardiner 2002) que me hizo interesarme particularmente en la fundamentación del Cálculo de Newton y Leibniz, sin embargo yo no sabía que mi interés era filosófico. Fue mucho tiempo después, cuando me hice novio de mi ahora esposa Karen González Fernández, que finalmente supe qué era la filosofía de la ciencia y la filosofía de las matemáticas, y decidí entrar al Posgrado en Filosofía de la Ciencia impartido por la UNAM. Esta tesis es la culminación de varios años de interés filosófico, los cuales me han permitido tener un entendimiento más amplio de las matemáticas y las distintas razones por las cuales los matemáticos han estado interesados en desarrollar esta disciplina.

Quiero dedicar esta tesis a mi esposa Karen y a mi pequeña hija María. A mi familia, Servando, Blanca y Ma. Elia, que seguramente está muy contenta con su nieta. A mis tías y tíos, Beto, Eliverio, Hermila, Mica, Alicia, Paulina, Yolanda, Gerardo, Trini, Juan, Mariano; a mis primos Meneses, que siempre piensan en mi familia con cariño y amor. A la familia de mi esposa, Rocío, Manuel García, Alejandro, Cuquita, Mónica, Dalia y a su familia, a los primos González, ya que siempre nos reciben con alegría. A todos mis compañeros en la maestría, en especial a mis compañeros de filosofía de las matemáticas. De entre ellos me llevo especiales recuerdos de Angélica María Pena Martínez, Álvaro Ramiro Enríquez Espejel, Alberto Johan Sebastián Mayorga, Diego Arturo Moctezuma Solís, Hanzel Javier Silva Varela, José David García Cruz, César Manuel López Pérez, Elisángela Ramírez Cámara, Emiliano Enrique Serrano Lara, Alejandro Javier Solares Rojas, Manuel Eduardo Tapia Navarro, Fernando Cano Jorge, Juan Pablo Ahumada Castillo,

Moisés Macías Bustos, Agustín Alejandro Ojeda Aldariz. También quiero agradecer a mis compañeros de la Licenciatura Adán, Jonathan, Jesús, Claudia Vázquez, Farah. A mi asesor Cristian Gutiérrez, y mis revisores, el Dr. Leonardo Ruiz, Dr. Elías Fuentes y al Dr. Alejandro Vázquez. A la Dra. Laura Benítez todo mi aprecio. Su seminario ha sido inspiración importante de esta tesis. Y a todos los que me han apoyado a lo largo de mi vida académica.

Y a ti prof. Luis Ramírez, seguramente esta tesis sería mucho mejor con tus comentarios.

Mauricio Algalan.

Introducción

Este trabajo de investigación es el resultado de mi oposición a algunos elementos muy presentes en la historia, pero sobre todo en la divulgación de las ciencias y matemáticas: el realismo, que es la posición en filosofía de las matemáticas que propone que las matemáticas y sus objetos existen independientemente de nosotros. Tal posición tiene su correlato en historia de las matemáticas, en el presentismo (Barabashev 1997), el cual propone que el desarrollo matemático puede estudiarse con los elementos y herramientas disponibles hoy en día, ya que lo que se ha desarrollado en matemáticas anteriormente, es al menos similar a lo que conocemos actualmente. Esta posición muchas veces se menciona despectivamente como una posición *Whig* en historia y filosofía. Cuando un filósofo o historiador de la ciencia asume esta posición se concibe la historia como una sucesión directa de pasos dirigidos específicamente a una meta y se considera que dichos pasos deben ser vistos desde la perspectiva de la meta lograda (Alvargonzález 2013). Uno de los problemas de tener una posición *Whig* es que parece sostener que la historia y el desarrollo del pensamiento humano están determinados para obtener lo que se tiene hoy en día, lo que es problemático porque propone una teleología en el desarrollo de diversas disciplinas humanas. Considero que las posiciones *Whig* pueden ayudar a poner en un lenguaje contemporáneo los problemas que en otro momento histórico fueron parte importante del desarrollo del pensamiento humano; pero considero también que un estudio académico y de investigación en historia, historiografía y filosofía debería, al menos, suspender el juicio acerca de la posibilidad de que el desarrollo de las disciplinas humanas tenga una teleología, o desarrollo y/o avance que sea posible estudiar sin más desde el presente. Una posición *Whig* para estudiar la historia puede ser útil para entender de manera más sencilla un concepto desarrollado hace cientos de años, lo que ha hecho que diversos historiadores y filósofos consideren que es la única herramienta que puede dar cuenta del desarrollo del pensamiento humano; por ejemplo con una posición *Whig* es posible estudiar el inicio de la matematización de la física propuesta por Galileo, con la ventaja de la notación algebraica moderna, ya que la notación de Galileo y la notación algebraica contemporánea se consideran la misma; y de ahí realizar un estudio de las ventajas del sistema físico-matemático de Galileo sobre el sistema metafísico-físico Aristotélico[(1)]. Pero una de las posibles fallas de una posición *Whig* es que al utilizar un sistema de notación diferente al utilizado

[1]Si bien el sistema científico en aquella época se consideraba Aristotélico, esto no quiere decir que todos los científicos sostuvieran las ideas presentes en el libro de la *Física* de Aristóteles.

por Galileo, podríamos no considerar las limitaciones del sistema propuesto por Galileo, confundiendo un límite dado por la expresividad de un lenguaje, con una posición que consideremos extra científica, o desinterés por parte del pensador del Renacimiento. Otra de las desventajas es que al estudiar los textos originales de los pensadores de un momento histórico distinto al nuestro, como la Antigüedad, por ejemplo, podríamos no entender la argumentación principal, el objeto de una argumentación o los principios de los que parten. Para la época en que se desarrolló la polémica propuesta por Berkeley, discutida en esta tesis, por ejemplo, un recurso muy utilizado era Dios. Acudir a Dios como un principio del que parten las propiedades físicas, es un argumento recurrente en la modernidad. Spinoza, Descartes y Newton nos dicen que Dios pone las leyes del universo. Desde una posición *Whig* Dios es: a) una forma de decir las leyes del Universo, sin tener problemas con la Inquisición; b) un reducto de la Edad Media que se estaba remplazando; c) un viejo atavismo que los pensadores de la modernidad, aun cuando investigaban el mundo físico, no estaban dispuestos a dejar, porque no podían concebir a un mundo sin Dios, aun cuando éste ya no fuera una entidad teológica. Pero esto es parcialmente cierto para Spinoza y Descartes; mientras que para Newton es totalmente equivocado. Spinoza y Descartes tienen un pensamiento mucho más cercano al contemporáneo, en donde una entidad teológica no tiene cabida en el mundo empírico. En el sistema cartesiano una vez creado el Universo y el mundo, un Dios como el propuesto desde la teología ya no es necesario y cuando Descartes se refiere a Dios después de la creación del mundo, se refiere a las reglas que rigen la experiencia empírica. Muy probablemente Descartes está tratando de evitar a la Inquisición; pero este Dios no es un reducto medieval ni un atavismo, es una nueva concepción a la que se le está tratando de dar un nombre, el cual parece tener un parecido con algunas de las propiedades de un Dios basado en la tradición judeo-cristiana, el cual al momento de crear el mundo crea sus reglas y condiciones de posibilidad. Utilizar el concepto de Dios da dos ventajas a Descartes, a saber, evitar las complicaciones con las diversas iglesias que existían en aquella época, y llevar el concepto de las reglas del Universo y condición de posibilidad del mundo a otros interlocutores. Dios pasa de ser una figura de salvación a ser un garante del conocimiento y la experiencia humana. Esto, si bien parece obvio, considero que no es tan fácil de entender sin estudiar el contexto en que Descartes trabaja, ni las discusiones que el filósofo sostuvo con sus contemporáneos. Considero que la polémica que desata Berkeley acerca del Cálculo fluxional, desarrollado por Newton, es un buen ejemplo de los problemas de sostener una posición *Whig* en historia y filosofía. *Vox populi*, Newton inicia tajantemente con la separación entre la teología y el desarrollo científico. Pero esto sólo es cierto en parte: Newton sí separa el mundo físico del teológico y metafísico, pero no de manera tajante. Esto se debe a que, desde la perspectiva de Newton, somos capaces de entender el mundo de la experiencia empírica, y para encontrar este conocimiento no necesitamos a Dios como explicación primaria. Sin embargo Dios tiene dos papeles: permite garantizar que algo que se investigue con la experiencia sea cierto, de manera parecida a la propuesta cartesiana; e interviene de manera constante para garantizar el mundo y sus condiciones de posibilidad. Esto es completamente diferente a la propuesta cartesiana, en donde Dios se puede dejar de lado después de que este creó al mundo; aquí Dios es necesario en todo momento, porque de Él emana el espacio, y, con él, sus propiedades. Estas propiedades están basadas en la propia interpretación de Newton de las Escrituras Sagradas de la tradición judeo-cristiana. El concepto de Dios en Newton es completamente diferente al de la propuesta cartesiana. La idea de que Newton ha dejado de lado a Dios se da porque en la investigación desarrollada posteriormente a él dejó de lado el elemento metafísico-teológico, dejando intacta la parte en donde Newton dice que somos capaces de investigar el mundo y que nuestra investigación refleja algo real del mismo a partir de la experiencia empírica. Sin este componente obtenido fuera de la metodología Whig, podemos equiparar las nociones cartesiana y newtoniana de Dios, lo cual es un error; y, más común, podemos decir que Newton nunca utilizó a Dios como elemento en su investigación, lo cual también es un error. Considero además que dejando de lado la posición *Whig*, podemos entender mejor las críticas de Berkeley al Cálculo de Newton y el por qué de los cuestionamientos lanzados en *The Analyst*. Berkeley está estudiando al Cálculo de Newton desde la perspectiva de que las propiedades de una fluxión vienen dadas de la metafísica de Newton, y es a partir de esta perspectiva que lanza sus ataques, lo cual busco sustentar en este trabajo. El texto de *The Analyst* comúnmente se considera como un ataque de un hombre que no entiende la matemática y que yerra al realizar el estudio del Cálculo de Newton; pero esto muchas veces se estudia desde la perspectiva actual, en donde, gran parte de las problemáticas mostradas por Berkeley se han resuelto de diversas maneras y el principal problema, considero, es que no se estudia desde los textos de Newton. Esto hace que los juicios emitidos sobre el texto de Berkeley puedan equivocarse. Considero que, entre otras razones, la metodología *Whig* surge de la necesidad de estudiar los fenómenos del pasado, acortando las distancias entre el pensamiento desarrollado antes del sigo XX y el mundo contemporáneo; sin embargo, como dice Berkeley, los estudiosos "han confundido la utilidad de la regla con la verdad" *The Analyst*§10. Así, si bien, tener en lenguaje contemporáneo los escritos de diversos pensadores a lo largo de la historia facilita su acceso, el obviar que dichos escritos están hechos para un público diferente nos puede llevar a tener conclusiones equivocadas, como la conclusión de que Newton desarrolló su sistema físico sin metafísica oponiéndose a las diversas religiones que se profesaban en la Europa moderna. En palabras de Raymundo Morado, "el Renacimiento empezó cuando nos dimos cuenta de que los comentadores de los clásicos grecolatinos y los clásicos grecolatinos hablaban de cosas diferentes"[(II)]. Una metodología *Whig* mal llevada puede convertirnos en aquellos comentadores que los científicos tanto desprecian.

La presente tesis se compone de tres capítulos, el primero es un estudio preliminar de la matemática durante el Renacimiento y la edad moderna, hasta la publicación del libro de *La Géométrie*, el cual marca el inicio del uso del álgebra, en un principio aplicada a la geometría, tal y como la conocemos. Hasta antes de la publicación de *La Géométrie* el método matemático, o mas bien geométrico, más utilizado era la técnica *análisis-síntesis*, que básicamente consistía en una investigación geométrica, que se explica en la sección 1.4.4. Las pruebas matemáticas utilizaban los axiomas de la Geometría, definiciones de la Geometría, y las nociones comunes de Euclides, para obtener una conclusión, utilizando la lógica aristotélica. El libro I de los *Elementos* de Euclides era considerado como el canon que una prueba matemática debía alcanzar. Es por

[II] No hay referencia de este dicho porque Raymundo Morado lo dijo en una clase de Lógica.

esto que el libro *La Géométrie* de Descartes marca un antes y un después en la matemática, ya que ésta pasa de un modelo sintético de pruebas, al método de pruebas analíticas, que alcanza su esplendor en la llamada *aritmetización de las matemáticas*, en la cual puede utilizarse un lenguaje especialmente diseñado para realizar las pruebas matemáticas[(III)]. Uno de los temas que se deja de lado son los aportes de Pascal y Fermat, quienes también contribuyeron a las matemáticas mostradas en esta investigación, pero debido al tiempo y el espacio de esta tesis, estos aportes se han tenido que omitir. En la primera parte del segundo capítulo, se presenta brevemente la metafísica de Newton y la dependencia de dicha metafísica newtoniana de Dios. En palabras de Newton todo proviene de Dios, éste es un ser activo en el universo, que constantemente interviene en el mundo y establece las condiciones de posibilidad del universo. Para Newton el espacio es una *emanación* de Dios. Esta metafísica muchas veces se olvida por dos razones: 1) el propio Newton nunca facilitó todos sus escritos; y 2) los científicos posteriores a él eliminaron su metafísica conscientemente. Sin embargo en diversos escritos públicos, Newton habla de Dios y de cómo éste rige el Universo, por lo que consideré que era importante tener una sección específica para explorar algunos de estos supuestos metafísicos que dan pie al concepto de fluxón o fluxión. La segunda parte del capítulo dos se refiere brevemente a la posición de Berkeley con respecto a la metafísica de Newton y un estudio más detallado del texto *The Analyst*. Éste, a su vez, también se divide en dos. En la primera parte menciono las críticas que, desde mi punto de vista, considero más importantes del texto completo y en la segunda parte de esa sección exploro algunos de los puntos tratados por Berkeley en *The Analyst*, comparándolos con las secciones anteriores y el capítulo 1. En los capítulos 1 y 2 incluyo mis propias traducciones de algunas citas de interés para el texto, con algunas excepciones, como el texto *The Analyst* para el que me baso en la traducción hecha por el Dr. Robles, como se verá en la introducción del capítulo 2. Uno de los problemas con las citas incluidas fue la traducción; y es que algunos textos son tan antiguos que tanto la redacción como las grafías utilizadas difieren en algunos casos fuertemente de las reglas y grafías actuales, como el símbolo ∫ para indicar la "s" intermedia, por lo cual la redacción de los textos puede ser poco legible. En esos casos se decidió incluir el texto original a pie de página. Finalmente en el capítulo 3 doy mis conclusiones y mencionó lo que queda para un futuro trabajo de investigación.

Para las citas y referencias utilizó un formato parecido al APA (Autor(es) año[, parte referida]), con excepción de algunos trabajos filosóficos para los cuales establecí algunas abreviaturas que cito a continuación:

- *De gravitatione et æquipondio fluidorum* será abreviado como *Gravitatione* y citado como (*Gravitatione* 130) donde 130 es el número de página de la edición editada por Hall y Boas Hall (Newton 1962).

- *Introductio ad Quadraturam Curvarum* será abreviado como *Quadrature*. Como el texto no contiene

[III]Por ejemplo, para representar los números naturales, von-Newman utiliza los siguientes elementos, $\{,\}, \varnothing$, mediante la siguiente cadena $0 = \varnothing, 1 = \{\varnothing\}, 2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, 3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots$. Esta representación se utiliza para realizar pruebas aritméticas y puede diferir de otras representaciones. Debido a la manera en que están construidos los naturales, hemos prescindido de casi todos los elementos presentados en el libro I de los *Elementos* de Euclides. Las pruebas se dan utilizando las reglas del lenguaje y algunos axiomas que se incluyen con el fin de recrear los números naturales.

secciones, se utilizará la abreviatura como cita.

- *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, abreviado como *Principia*. Dado que solo se utilizan algunas partes de los *Principia* se citará (Newton 1687), en vez de la forma canónica habitual.
- *An Essay Towards a New Theory of Vision* abreviado como *TV*, y citado como (*TV* §3), donde §3 es el número que le asigna Berkeley al extracto citado.
- *A Treatise Concerning The Principles of Human Knowledge*, abreviado como *PHK*, citado como (*PHK* Introduction §2), donde Introduction es el nombre de la sección en inglés y §2 es el número que el propio Berekeley le asigna al extracto citado.
- *El analista* abreviado como *The Analyst* y citado como (*The Analyst §3*), donde §3 es el número que el propio Berkeley le asigna al tema abordado.
- *A Treatise of Human Nature* abreviado como *Treatise* y citado (*Treatise* §1 §§1 §§§1), donde § es el libro, §§ la parte del libro correspondiente y §§§ la sección correspondiente.

Capítulo 1

Antecedentes Históricos

> Once we begin to realise just how much *our own view* of mathematics has changed over the years, it should come as no surprise to learn that *mathematics itself* is also constantly changing.
>
> (Gardiner 2002, Pág. 14)

1.1. Introducción

En este primer capítulo se estudiarán algunos componentes de la práctica matemática anteriores al desarrollo del cálculo, tanto de Newton como de Leibniz. El objetivo es entender el contexto bajo el cual Newton inicia su trabajo. Si bien se puede considerar a muchos trabajos matemáticos de nuestra época como sucesores directos de la matemática de aquella época, la forma de trabajar difiere bastante de la actual. En esa época, se consideraba que la disciplina matemática por antonomasia era la geometría euclidiana y la forma de trabajar de los matemáticos era el método sintético. La geometría euclidiana sigue de cerca la definición de ciencia aristotélica, definida en los *Analíticos Posteriores*, que se compone de definiciones, primeros principios y axiomas (principios propios). El conocimiento se establece siguiendo las reglas de la lógica aristotélica deductiva a partir de las definiciones, primeros principios y axiomas.

En la primera sección del capítulo se verá el concepto intuitivo de *método sintético* o *síntesis*, si bien se buscó una definición de síntesis, solo se encontró una pequeña referencia en el trabajo introductorio de Heat a la reconstrucción de los *Elementos* de Euclides (Euclides 1956). En la siguiente sección se estudiará el desarrollo de la geometría hasta la aparición del libro cartesiano de *La Géométrie*. Esta sección estará basada en el libro de Bos (Bos 2001), quien reúne el trabajo anterior al libro cartesiano y algunas apreciaciones a *La Géométrie*. Ya que el objetivo final de este trabajo consiste en evaluar las críticas de Berkeley al cálculo de Newton, considero que es mejor utilizar dicho libro como canon histórico, que profundizar en dicho periodo el cual merece un trabajo aparte. En la siguiente sección se estudiará el desarrollo del álgebra desde su (re)introducción con el *Liber Abaci*[1] hasta *La Géométrie*. Cabe destacar que si bien algunos historiadores consideran a Viète el primero en utilizar el álgebra en el estudio de la geometría de una forma muy parecida a la actual, es el trabajo de Descartes el que finalmente dio validez y forma al álgebra en la época Moderna y cuya notación se sigue utilizando hoy en día en la preparación básica del alumnado. Los estudios realizados por Descartes son el punto de partida de los dos cálculos, el de Newton y el de Leibniz. Las últimas secciones son breves pero no por ello menos importantes, nuevamente parto de un texto que resume el periodo anterior al cálculo, (Jullien 2015a), que nos permite vislumbrar la forma de trabajar de los matemáticos de aquella época, en especial de los matemáticos ingleses. Un trabajo importante en la época, fue el desarrollo de la teoría de los indivisibles que junto a la geometría cartesiana son los antecedentes del cálculo. Los indivisibles, también conocidos como infinitesimales, son postulaciones de objetos matemáticos infinitamente pequeños que pueden tener medida o magnitud[2] y con la cual pueden guardar relaciones matemáticas con otros objetos matemáticos, como la proporción. Finalmente se hará notar la importancia de la teología en la Ilustración inglesa. A diferencia de la Ilustración en el continente [europeo], los ingleses estaban interesados en unir la teología con el naturalismo. Un ejemplo de esta *teología naturalizada*, es el pensamiento de Henry More, quien considera que Descartes se equivoca al eliminar a Dios, o al menos minimizar su participación al momento de la creación, en la investigación de los fenómenos naturales. Si bien la filosofía de More es mucho más compleja y en muchos aspectos retoma a Descartes, quiero puntualizar que More sí retoma una concepción metafísica/teológica de Dios en la *Filosofía Natural*, lo que hace que tanto la propuesta de More, como la de Descartes tomen caminos opuestos con respecto a la forma de realizar ciencia.

1.2. El método *sintético*

Una de las características más importantes de la práctica matemática de los siglos anteriores al siglo XVIII, es el uso del método *sintético* o *síntesis*. La síntesis es aquel procedimiento que parte de principios y procede en orden a fin de obtener un resultado (Heat 1956, Pág. 136). El método sintético más conocido aparece en el Libro I de los *Elementos* de Euclides (Euclides 1956), el cual parte de definiciones, postulados y nociones comunes, que se verán en la siguiente sección. En el libro I se derivan una serie de proposiciones que prueban una propiedad matemática de la geometría plana; y otras propiedades del espacio se derivan en los

[1]El libro *Liber Abaci*, escrito en el siglo XIII, es considerado el primer libro de álgebra en Europa del fin de la Edad Media y principios del Renacimiento. El libro retoma el álgebra desarrollada anteriormente por los árabes y la introduce a Europa. Desde la publicación del *Liber Abaci* hasta nuestros días el álgebra nunca ha dejado de estudiarse.

[2]Algunas definiciones desechan la magnitud como parte de las propiedades del infinitesimal/indivisible, pero permiten calcular medidas y relaciones de otros objetos matemáticos.

siguientes libros, así como otras propiedades matemáticas fuera de la geometría. En la actualidad, la palabra "sintético"puede significar muchas cosas diferentes, entre las cuales están (aunque no se limitan a), un objeto o sustancia producida por los humanos, un resumen, una investigación hecha a partir de conocimientos considerados de amplia difusión para, a partir de ellos, establecer una relación de dichos temas con un conocimiento o asunto particular. En esta tesis, el término *síntesis* se tomará en el sentido descrito por Heat. Un ejemplo de derivación[3] sintética es la proposición I.1:

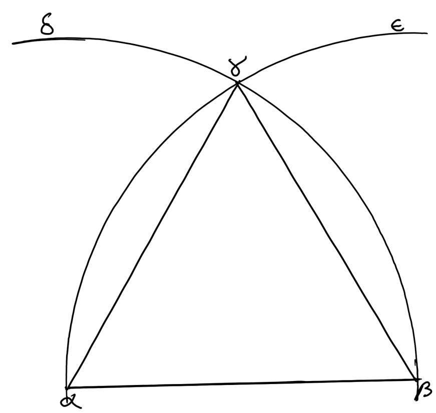


Figura 1.1: Proposición I.1 de Euclides

> *Dado un segmento de línea construya un triángulo equilátero.*
> Sea el segmento $\alpha\beta$ el segmento de línea dado.
> Con centro en α y radio $\alpha\beta$ trace el círculo $\beta\gamma\delta$ [Postulado 3].
> Con centro en β y radio $\beta\alpha$ trace el círculo $\alpha\gamma\epsilon$ [Postulado 3].
> Trace el segmento de recta $\alpha\gamma$ [Postulado 1].
> Trace el segmento de recta $\beta\gamma$ [Postulado 1].
> Dado que α es el centro del círculo $\beta\gamma\delta$ entonces, $\alpha\beta$ es igual a $\alpha\gamma$ [Definición 15].
> Dado que β es el centro del círculo $\alpha\gamma\epsilon$ entonces, $\alpha\beta$ es igual a $\beta\gamma$ [Definición 15].
> Dado que cosas iguales a una misma cosa, $\alpha\beta$, son iguales una a la otra, $\alpha\gamma$ es igual a $\beta\gamma$ [Noción Común 1].

[3]Se utiliza el término *derivación*, en vez de *deducción*, ya que el segundo término se refiere al uso contemporáneo de deducir en matemáticas, el cual se refiere a encontrar una expresión, que puede ser una propiedad matemática, a partir de las reglas de lenguaje y que no necesariamente parte de definiciones, o principios establecidos previamente. Un ejemplo de esto son las distintas reconstrucciones de la lógica clásica, que está en parte basada en la lógica aristotélica, la cual puede utilizarse solo a partir de axiomas, que se podrían interpretar como un principio en el método sintético, pero dichos axiomas no necesariamente definen los objetos de los que se habla o establecen una interpretación del objeto a que se refieren, para más información *cf.* (Shapiro y Kouri Kissel 2018). También se puede establecer una deducción a partir de los símbolos y sus reglas de conjugación. Un ejemplo de esto es:

> Sea A un conjunto formado por las letras minúsculas del alfabeto en inglés $A = a, b, c, \ldots$ y B el conjunto de los números naturales representados en notación indo-arábiga $B = -\infty, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \infty$. Una fórmula bien formada es:
>
> 1. Todos los elementos del conjunto A y B.
> 2. Todas las fórmulas de la forma A, AA, AAA como x, xx, xxx.
> 3. Todas las fórmulas del tipo A^B, B^A, [. . .]

Se puede definir el álgebra a partir de sus reglas de conjugación, sin que el sistema matemático incluya axiomas. Si bien el ejemplo anterior solo es una muestra, y se parece a la geometría euclidiana, en el sentido de que parte de una serie de reglas; difiere en otro aspecto, al evitar pronunciarse sobre los objetos y tratar de explicitar todas las reglas que usa. A esta forma de trabajar muchas veces se le asocia con el término *analítico* y con éste se asocia el término *deducción*. Uno de las objeciones a las derivaciones sintéticas es que no todas las reglas o axiomas que se usan en la prueba matemática se explicitan. Esto se verá en el ejemplo mostrado más adelante.

> Y dado que que las tres líneas $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ y $\beta\gamma$ son iguales entre sí entonces, el triángulo $\alpha\gamma\beta$ es equilátero y se construyó dado el segmento de línea $\alpha\beta$, que es lo que se había pedido construir. Proposición I.1 (Euclides 1956)

Como se verá en la siguiente sección, en la época de Berkeley, la geometría euclidiana era el parámetro a seguir para la práctica matemática. El álgebra, a pesar de contar ya con resultados importantes, solo era utilizada como una pequeña parte de la práctica matemática. Sin embargo esto cambiará con el tiempo, el método sintético dejará de utilizarse como parámetro en la pŕactica matemática y se sustituirá por los métodos que se basan en las reglas del lenguaje y axiomas que evitan suponer la naturaleza de los objetos matemáticos, o al menos no asumen la ontología de los objetos matemáticos (Weir 2015). Esta práctica se asocia con el término *analítico*, la llamada *aritmetización de la práctica matemática* y la filosofía de la matemática llamada formalismo[(4)]. Es a partir de la edad Moderna que se empieza a cuestionar el método sintético, una de las críticas que se le harán es que no incluye todas las reglas que se necesitan para derivar un resultado. En el ejemplo de la proposición I.1 de Euclides, se asume que dados dos círculos que no son concéntricos y cuya distancia entre sus centros no supere la suma de sus radios, existe al menos un punto de intersección. Si bien esto se podría considerar obvio, el problema radica en que es el diagrama y no las definiciones, postulados y nociones comunes quien proporciona esta información. Pero dado que solamente utilizando las definiciones, postulados y nociones comunes, es como se puede probar algo, la falta de una regla que indique que dados dos círculos que no son concéntricos y cuya distancia entre sus centros no supere la suma de sus radios, existe al menos un punto de intersección, se volverá un problema en la época Moderna. El descubrimiento del cálculo por ambos autores, Newton y Leibniz, y sus problemas de justificación o sus pruebas matemáticas, junto al descubrimiento de las geometrías no-euclidianas, hizo que los matemáticos dejaran de lado al método sintético.

1.3. La geometría

Cuando hablamos de geometría, en especial desde el siglo XVI hasta el XVIII, nos referimos a la geometría euclidiana. Dicha geometría era considerada como la forma más acabada de realizar matemáticas y parte importante de la práctica matemática (Bos 2001, Cap. 1). Se puede decir que la geometría gozaba de un estatus especial dentro y fuera de la práctica matemática, además de ser modelo de razonamiento para diversas actividades que ahora podemos catalogar como científicas[(5)].

[4]Existen tres filosofías de las matemáticas importantes, el logicismo, el intuicionismo y el formalismo que se describió en el párrafo que originó esta cita (Horsten 2019). El logicismo considera que la matemática puede reducirse de manera casi completa a la lógica clásica o alguna de sus extensiones. El intuicionismo considera que la matemática es la actividad de construir los objetos matemáticos y se asocia con la matemática constructivista; esta filosofía de las matemáticas rechaza la lógica clásica, ya que considera que no se puede probar algo a partir de una reducción al absurdo, y que todos los métodos matemáticos deben ser finitos (Horsten 2019). En general se considera que el formalismo se asocia con una filosofía instrumentalista de las matemáticas; el logicismo con una filosofía realista de las matemáticas y el intuicionismo tiene su propia concepción sobre la existencia o no de los objetos matemáticos, generalmente asociada a la filosofía transcendental kantiana (Horsten 2019). Se considera que la filosofía matemática que asumen los matemáticos *de facto* es el formalismo.

[5]En Inglaterra, en la época Moderna, siglos XVII y XVIII, había una preferencia por los métodos geométricos para hacer pruebas matemáticas. En (Guicciardini 2003, Pág. 37) se comenta que varios matemáticos y/o filósofos naturales, tenían una preferencia

La geometría euclidiana tiene como elementos varias definiciones, dentro de las que destacan los 3 objetos básicos de la geometría *el punto, la línea y el círculo*, 5 postulados y 5 *nociones comunes*(6) (Euclides 1956, Libro I)(7).

Los 3 objetos básicos(8) de la geometría se definen como:

- Def 1. El punto es lo que no tiene partes.
- Def 2. La línea es lo que no tiene anchura.
- Def 15. Círculo es aquella figura plana que es contenida por una *línea* (Euclides *dixit*) tal que todas las líneas que caen en un punto [llamado centro] de la figura son iguales entre sí(9).

Los postulados de la geometría euclidiana son:

1. Se puede dibujar una línea de un punto a cualquier otro.
2. Extender indefinidamente un segmento de recta dado.
3. Describir un círculo con cualquier centro y cualquier distancia.
4. Los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Que si una recta al incidir sobre otras dos rectas hace que los ángulos interiores de un mismo lado sean menores que dos ángulos rectos, al prolongar indefinidamente las dos líneas, éstas coincidirán del lado en que los ángulos son menores que dos rectos.

Las nociones comunes son:

1. Las cosas iguales que son iguales a una misma cosa son iguales una a la otra.
2. Si a iguales se añaden iguales, los totales son iguales.

inusitada por la geometría euclidiana (“a geometrical bias”). Mención especial merecen los llamados *Fluxionistas analíticos* quienes estudiaron y trataron de importar los trabajos desarrollados en el continente europeo al cálculo inglés; pero su trabajo fracasará a la postre (Guicciardini 2003, Cap. 6). Gucciardini comenta que aunque la idea de que Inglaterra se aisló completamente al desarrollo matemático es exagerada, hay que reconocer que había un grupo importante de pensadores que tenían una actitud *chauvinista* sobre el tema (Guicciardini 2003, Introduction).

6 Existe un debate acerca de si se deben considerar a las nociones comunes como *primeros principios* en el sentido aristotélico (*cf.* (Acerbi 2013)).

7 En el primer libro de Euclides se presenta de la misma forma: definiciones, postulados y nociones comunes.

8 En el sentido en que son las únicas figuras o medios de construcción, la regla no graduada y el compás, que son aceptados en una prueba geométrica.

9 Es importante hacer notar que: 1) Las definiciones de punto, línea y círculo se dan en términos de sus propiedades, que actualmente se consideran propiedades topológicas; en vez de hacerlo por los medios por los cuales son producidas: regla y compás. Esto ya era conocido por los matemáticos de la época *cf.* (Euclides 1576). 2) Que Euclides no distingue la línea de la curva en el sentido popular de ambas definiciones, en general decimos que algo es lineal solo si esta en línea recta. Para figuras que contengan arcos o semicírculos decimos que son curvos. En matemáticas las curvas tienen otra definición que se verá más adelante. 3) Estos eran los medios o figuras adecuadas para resolver los problemas matemáticos. 4) Es importante mencionar que estas definiciones no siempre son usadas en las pruebas presentadas y varias veces parecen tener un fin clarificador.

3. Si a iguales se le quitan iguales, los restantes son iguales.

4. Cosas que coinciden con otra cosa son iguales entre sí.

5. El total es mayor que la parte.

Gran parte del desarrollo matemático de los siglos xvi y xvii basaba sus soluciones en la aplicación de la geometría euclidiana. Es importante hacer notar también que los matemáticos consideraban únicamente válidas las pruebas que se podían realizar mediante una regla sin graduar y compás. Sin embargo en ese mismo periodo Descartes habrá de publicar un libro que cambiará tanto a la filosofía como a las matemáticas y las ciencias empíricas, en especial a la física, *La Géométrie*. Este libro es producto de 20 años de investigación por parte del filósofo francés (Bos 2001, Pág. 381) que incluía un capítulo introductorio llamado *Le Discours de la méthode*[10] en donde expone su forma de trabajar tanto para la filosofía como para las matemáticas. El libro de *La Géométrie* es para las matemáticas el inicio de la geometría analítica que posteriormente dará inicio al cálculo tanto de Newton como de Leibniz. Después del trabajo de Descartes, el álgebra se consolida como parte de la matemática. Para la filosofía el *Discours* muestra el proceder del filósofo para resolver diversos problemas filosóficos a los que se enfrenta. Probablemente es junto al texto de las *Meditationes de prima philosophia*[11] uno de los textos más estudiados del pensador francés. La historia de la ciencia también ha tenido especial interés por el *Discours* ya que lo considera como el origen del método científico.

1.3.1. La geometría antes de Descartes

Como se ha mencionado, la geometría es parte del quehacer matemático y fuente de exactitud (Bos 2001, Pág. 3). De acuerdo al historiador Bos una posible interpretación de la *exactitud* para esa época es que "proveía de un canon aceptable de procedimientos a la práctica de resolución de problemas" (Bos 2001, Pág. 5), en este caso utilizar la geometría y restringirse a las figuras básicas permitidas. Los matemáticos modernos querían saber cuándo una entidad matemática era *conocida o dada*. Se puede considerar que:

> las figuras geométricas eran "conocidas" o "dadas" si podían construirse a partir de elementos que se consideraron dados desde el principio; de manera similar, un problema se consideró resuelto si la configuración requerida se construyó geométricamente (Bos 2001, Pág.3)

Una dificultad que enfrentaron los matemáticos modernos, al igual que los matemáticos antiguos, es ponerse de acuerdo sobre qué significa construir y qué medios son los adecuados para realizar dicha construcción. Así surge la pregunta ¿qué medios o figuras se pueden utilizar para resolver y construir las soluciones matemáticas? La respuesta más obvia es el punto, la línea y el círculo utilizando la geometría euclidiana. Sin embargo desde la antigüedad se sabe que muchos problemas quedan sin resolverse utilizando únicamente

[10] Originalmente el libro de Descartes incluía como apéndices, o ejemplos de aplicación del Método, los textos de *La Dioptrique, Les Météores* y *La Géométrie*.

[11] El título original es *Meditationes de prima philosophia, in qua Dei existentia et animæ immortalitas demonstrantur*, Meditaciones metafísicas en las que se demuestran la existencia de Dios y la inmortalidad del alma.

los elementos anteriores (Bos 2001, Pág. 4). Así los tres problemas clásicos de la geometría: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo, además de muchos otros, quedaban sin resolverse de manera exacta.

Esto derivó en tratar de entender qué significa *construir*. Los matemáticos en los siglos xvi y xvii parecen estar de acuerdo en que una construcción adecuada utiliza la geometría euclidiana y considera como sus objetos al punto, la línea (recta) y el círculo (Bos 2001, Pág. 4). La utilización de otros medios será parte de la discusión de los matemáticos para entender a qué se refiere que un objeto sea *construido [geométricamente]* y por lo tanto *exacto*.

Es importante tener en cuenta que tanto los matemáticos antiguos, como los de la modernidad, conocían la respuesta, mas no la solución, a los problemas irresolubles por la geometría euclidiana, anteriormente mencionados[12]. Arquímedes trabajó tanto los problemas clásicos de la geometría, como otros. Su respuesta utiliza, además de lo elementos básicos de la geometría, figuras o líneas especiales para solucionarlo[13]. Así los matemáticos se encontraron con un dilema. Por un lado si aceptaban otras figuras geométricas, se podían resolver muchos problemas matemáticos de la geometría, a costa de redefinir que son la exactitud y práctica matemática. Por otro lado, si continuaban con la práctica y exactitud aceptada hasta entonces, los problemas clásicos continuarían irresolubles desde el punto de vista de la geometría euclidiana.

Esta problemática aumentó con la publicación de la traducción al latín de los trabajos de Pappus en el año 1588 (Bos 2001, Pág. 37). Se calcula que los libros de Pappus se escribieron en algún momento del siglo iv A.C., contenían diferentes tópicos desde astronomía hasta geometría clásica[14] (Cuomo *et al.* 2000, Pág. 2,5). La primera publicación de los trabajos de Pappus se realiza a partir del trabajo de Federico Commandino (Cuomo *et al.* 2000, Pág. 7); existían 8 libros hechos por Pappus de los cuales se ha perdido el primero, la primera parte del libro segundo y la última parte del libro octavo (Jones 1986, §2.1) (Sefrin-Weis 2010, §1.2). El trabajo realizado por Pappus permitió a los matemáticos de la época reconocer, definir y entender de manera común los problemas geométricos (Bos 2001, Pág. 37). Una de las aportaciones de Pappus fue utilizar curvas[15] cónicas[16] como método de solución de problemas geométricos que no se podían resolver utilizando únicamente la línea y el círculo. Sin embargo las curvas cónicas no pertenecían a la práctica matemática aceptada, como lo eran la línea y el círculo. A partir de entonces se volvió necesario discutir acerca de qué elementos son necesarios para *construir* una solución a un problema geométrico. Bos comenta:

[12] Aquí se entenderá como respuesta a una construcción matemática que resuelve el problema pero que no es aceptada por los matemáticos. Solución será aquella respuesta que cuenta con una prueba matemática y es aceptada por los matemáticos. Ejemplo de respuesta es la cuadratura del círculo, los matemáticos podían cuadrar los círculos pero no estaban de acuerdo si era una solución. Una solución es la proposición I del libro I de Euclides, que cuenta con método de construcción, prueba y era aceptada por los matemáticos.

[13] Utilizaba cónicas y la espiral de Arquímedes (Bos 2001, Pág. 71,86).

[14] Aunque los autores no lo explican, la *geometría clásica* probablemente se refiere a los problemas que surgieron en la matemática griega antigua como la duplicación del cubo, la trisección del ángulo, entre otros; además de los problemas que se podían resolver con geometría euclidiana.

[15] Una curva es cualquier línea continua, *las líneas rectas son curvas sin curvatura*.

[16] Una curva o sección cónica es una línea generada por la intersección de un cono con un plano, más adelante se verá este concepto a profundidad.

> Después de 1590, y en gran medida por el texto de Pappus, la resolución geométrica de problemas se convirtió en un subcampo de la geometría reconocible y bien definido con una comprensión compartida de sus primeros objetivos y métodos principales. Y, aunque al principio no hubo una opinión común sobre la legitimidad de los medios de construcción más allá de líneas rectas y círculos, las discusiones sobre este tema fueron mucho más claras y objetivas de lo que habían sido antes. Tres temas fueron de particular importancia en este proceso de clarificación: la clasificación de problemas de Pappus, el uso de curvas [cónicas] en construcciones y construcciones a partir del neusis. (Bos 2001, Pág. 37)

La clasificación de Pappus de los problemas geométricos

Pappus clasifica de tres formas los problemas geométricos:

1. Problemas planos: aquellos que se pueden resolver con las figuras geométricas básicas.
2. Problemas sólidos: aquellos que se responden utilizando un *sólido ideal* que intersecta un plano[(17)].
3. Problemas de líneas o lineares: aquellos que necesitan una línea especial para encontrar la respuesta.

Los problemas sólidos en geometría se pueden responder mediante las secciones cónicas. Otra forma de responder los problemas sólidos es mediante el uso de un instrumento especial llamado neusis. El dispositivo nesusis consiste en una o más reglas graduadas que permiten encontrar un punto entre dos curvas llamadas *directriz* y *captriz*, dado un punto llamado polo, y una distancia dada o determinada. Un extremo del neusis debe seguir a la directriz girando alrededor del polo y cuando la distancia dada intersecte a la captriz se ha encontrado el punto buscado. Dado que este procedimiento solo se utilizó en la época Moderna no encontré ejemplos de su uso. Esto se debe a dos factores, falta de tiempo y algunas limitaciones de mi formación profesional. Una imagen del neusis se puede encontrar en las figuras 1.5a y en 1.5b. Los problemas de líneas o lineares son aquellos que necesitan una línea generada especialmente para poder resolverse. Se consideraba que esta línea era *mecánica debido a que necesitaba movimiento para su realización* [(18)].

La clasificación de Pappus[(19)] permitía catalogar a los distintos problemas y en cierta medida ordenarlos por dificultad y validez de las construcciones. Los problemas planos eran los aceptados dentro de la práctica matemática de la época y los problemas de líneas o lineares eran los más cuestionados. Esto se debe a que las figuras geométricas que se consideraban parte de la matemática sólo eran la línea y el círculo, y sus medios mecánicos, la regla no graduada y el compás. Al utilizar otro tipo de figuras geométricas, como las cónicas o las curvas mecánicas los matemáticos tenían duda de si se podían considerar tanto a las cónicas como a las curvas mecánicas como matemáticas.

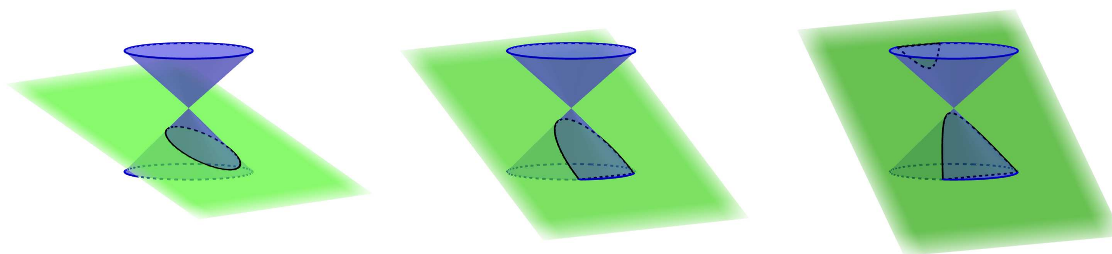
[17] Un sólido ideal no necesariamente es un sólido platónico, como se verá más adelante, las cónicas son la intersección de un plano con un cono ideal. Sin embargo el cono no se cuenta como un sólido platónico

[18] La discusión sobre si se debían aceptar los métodos de construcción propuestos por Pappus se centró en los problemas sólidos. Los métodos para resolución de problemas lineales no se aceptaron hasta tiempo después. Descartes también dirá que las líneas especiales no son geométricas y las clasificará como mecánicas. Tema que se verá en la sección siguiente.

[19] En (Meskens y Tytgat 2017, Cap. 1 §2) se comenta que esta clasificación corresponde a la jerarquía de Platón sobre la abstracción de las figuras geométricas, siendo los problemas planos los más abstractos.

Las secciones cónicas

Uno de los métodos de resolución de problemas en Pappus es utilizar las llamadas curvas o secciones cónicas o simplemente cónicas. Una cónica es el resultado de intersectar un plano con un cono ideal. Dado que el cono se considera un sólido, los problemas que se resolvían mediante cónicas se llamaron problemas sólidos. Existen 3 cónicas básicas: la elipse, la parábola y la hipérbola[20].



(a) Elipse (b) Parábola (c) Hipérbola

Figura 1.2: Cónicas

Dentro de los problemas que no se podían resolver mediante línea y círculo[21] está el problema de la proporcionalidad dados dos segmentos. El problema es el siguiente: Dados dos segmentos de recta a, b con $a > b$ encuentre otros dos segmentos x, y que cumplan con la siguiente propiedad $a : x = y : b$. Para resolverlo Menaechmus[22] utiliza la parábola y la hipérbola. Se construye la parábola con *latus rectum* a; y la hipérbola debe ser equilátera y pasar por un rectángulo tomando como la base a a y la altura como b. El punto donde se intersectan las cónicas nos da los segmentos de recta que buscamos[23].

Otros instrumentos de construcción

Se considera que la geometría es la *ciencia de la regla y el compás*[24]. Pero al descubrirse problemas que no pueden resolverse únicamente con línea y círculo se crearon otros instrumentos que permitieran dibujar otras curvas, entre ellas las cónicas (Meskens y Tytgat 2017, Cap. 2 §4).

[20] El círculo también puede considerarse como una sección cónica si el plano corta perpendicularmente al eje del cono.

[21] O como comúnmente se dice mediante regla y compás.

[22] Menaechmus, también conocido como Menecmo, fue un matemático griego discípulo de Eudoxo fundador de la astronomía griega. A Menaechmus se le considera como el matemático que definió las secciones cónicas como la intersección entre un cono y un plano. Posteriormente Apolonio les dio el nombre por el cual las conocemos hoy en día (Torretti 2014).

[23] Parte de este trabajo de investigación es verificar la información de la fuente de la que se habla. Este ejemplo de uso de cónicas para resolver la proporcionalidad *mean proportion* está en el capítulo 2 del libro de Bos (Bos 2001, Pág. 38-39). Sin embargo encontré un error dados los datos proporcionados por el mismo autor. En la nota 7 hay una discrepancia entre los datos proporcionados por la nota y la figura ilustrativa del problema. Existen dos soluciones dadas por Menaechmus la primera utiliza una parábola horizontal y una hipérbola equilátera positiva, en geometría analítica. La segunda solución es la intersección de las parábolas vertical y horizontal con *latus rectum* a y b respectivamente. Para el ejemplo mostrado en la figura se utilizó una parábola horizontal $y^2 = ax^2$ donde a es el primer segmento dado y *latus rectum* de la parábola; y una hipérbola equilátera positiva $y = \frac{k}{x} = \frac{ab}{x}$, donde b es el otro segmento dado (McKinney a) (McKinney b) (Sangaku 2018-04-27). Esta solución se puede consultar también en el trabajo de Arquímedes *Sobre la esfera y el cilindro* con comentarios de Eutocio (Arquímedes 2004, Pág. 297-298).

[24] Existe un debate acerca de si se debe considerar a los medios como matemáticos o solo a las propiedades de los elementos que representan, en este texto se toma la segunda postura.

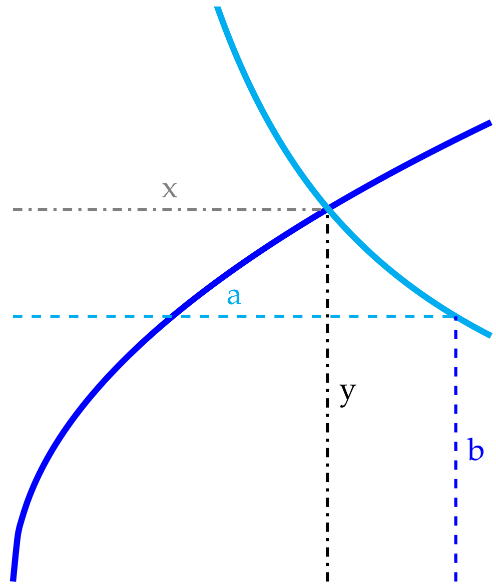


Figura 1.3: Solución de Menaechmus a la proporcionalidad

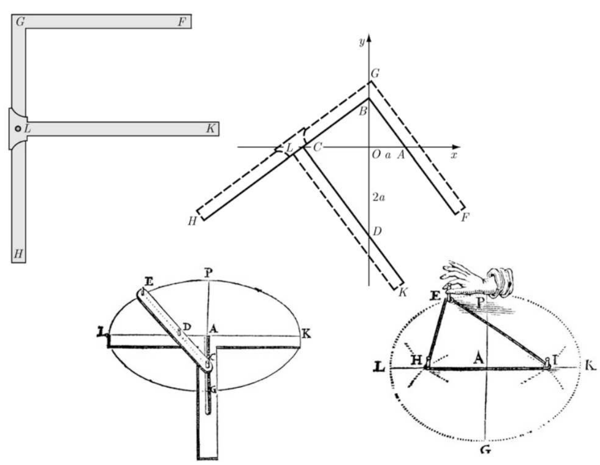
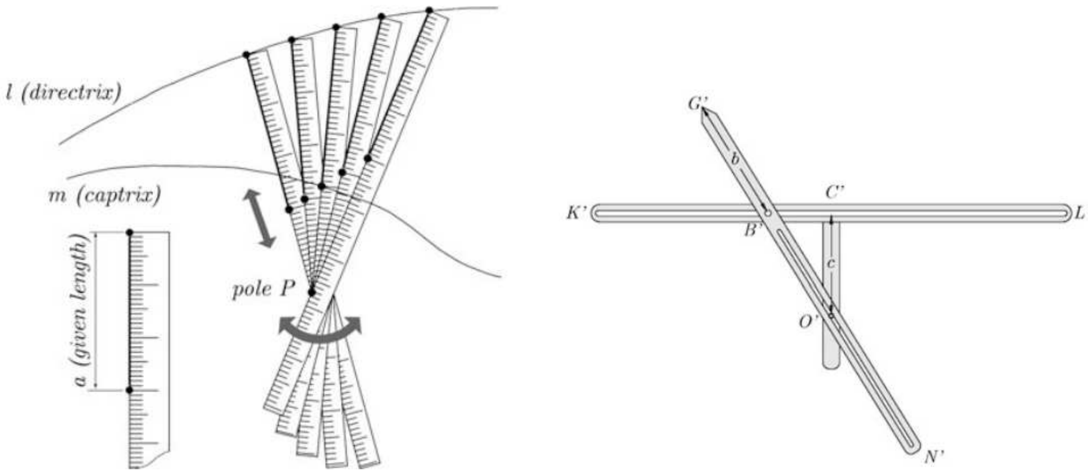


Figura 1.4: Instrumentos para realizar cónicas y raíces cúbicas.

El hecho de que se necesitara más instrumental para crear estas curvas llevó a cuestionar si se debía permitir el uso de los instrumentos en la práctica matemática o no. Entre más complejo era el instrumental que se necesitaba para dibujar o construir una curva, se llegó a considerar que estaba más alejado de la práctica matemática. Es por esto que la espiral, cisoide o cuadratriz se mantuvieron en el estatus de figuras mecánicas al menos hasta después de la publicación del trabajo de Descartes (*cf.* (Bos 2001, Cáp. 29 §4)).

De entre los instrumentos más aceptados para responder un problema se encontraba el neusis (Meskens y Tytgat 2017, Cap. 2 §5), que permite establecer una distancia y girarla con respecto a un punto. Tanto Pappus como Viète utilizan el neusis para resolver distintos problemas geométricos más allá de la línea y el círculo (Bos 2001, Cap. 3) (Bos 2001, Cap. 10).



(a) Neusis

(b) Otro tipo de neusis

Figura 1.5: El neusis

Las líneas *mecánicas*

Para resolver los problemas lineares o de línea se necesitan crear líneas especiales a fin de encontrar la respuesta a un problema geométrico. Hoy en día las matemáticas consideran a estas líneas como parte de las matemáticas. En aquel momento se rechazaban por las siguientes razones:

1. Se necesitaba un mecanismo o procedimiento especial para ser generadas.
2. Conceptualmente combinaban dos tipos de movimiento, en especial uno rectilíneo y otro circular[25].

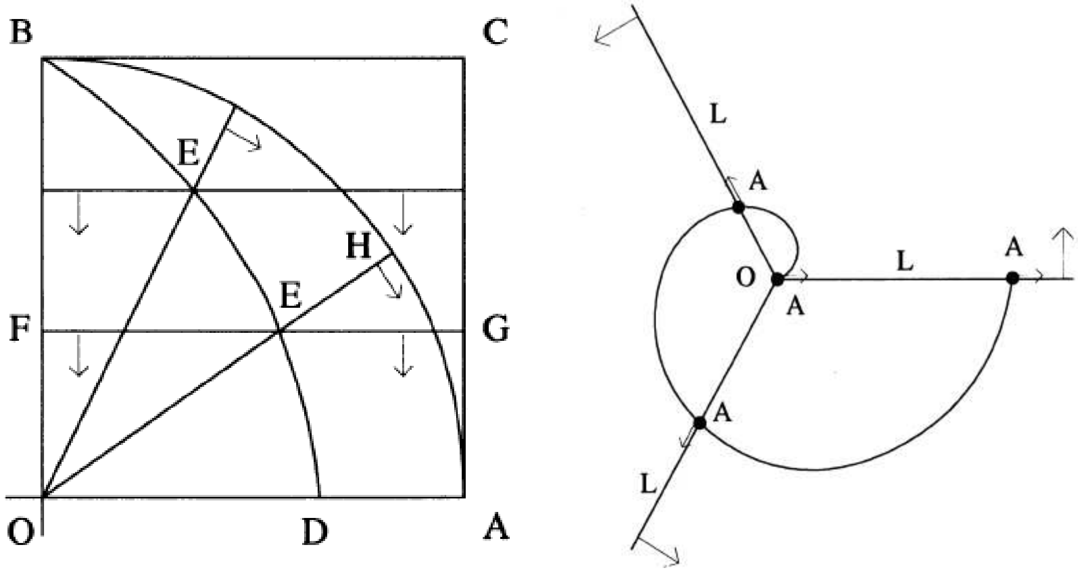
Las líneas mecánicas se utilizaban para cuadrar el círculo, en especial la cuadratriz[26] (Bos 2001, Pág. 42).

Los métodos aproximativos

Además de los métodos anteriormente vistos para la construcción de curvas consideradas mecánicas existían una serie de métodos que describían parcialmente una curva, los cuales se les puede denominar como métodos aproximativos. Estos son una serie de técnicas de construcción de una curva o la obtención de una propiedad matemática que se da a partir de otras curvas o propiedades que no la describen, construyen o dibujan completa y/o continuamente. Para la época se conocen al menos dos métodos aproximativos: los

[25] Tanto Pappus como Descartes argumentan en contra de las curvas que necesitan movimiento para definirse (Pappus 1982, Libro IV Proposiciones 31 y 33) (Bos 2001, Cap. 24 §2) (Descartes 1637, Pág. 317-319)

[26] La cuadratriz es una curva considerada en la época Moderna como mecánica, ya que dicha curva se obtiene mediante la intersección de uno de los extremos de un ángulo rectángulo, con una paralela del otro extremo del ángulo; la curva completa se obtiene girando el extremo que intersecta a la paralela del otro extremo y moviendo la paralela hasta que ambas rectas se unan al extremo opuesto del ángulo, que no se mueve. Una construcción de la cuadratriz se puede observar en la figura 1.6a y en la figura 1.7.



(a) Cuadratriz (b) Espiral de Arquímedes

Figura 1.6: Las curvas mecánicas (Bos 2001, Pág. 40–43)

métodos de construcción a partir de puntos y los métodos de comprensión que incluyen a la inscripción y circunscripción de polígonos. Los métodos aproximativos no se aceptaban como genuinamente geométricos pero ofrecían una ayuda práctica (Bos 2001, Pág. 6)[(27)].

El método de construcción a partir de puntos

El método de construcción a partir de puntos se aplica a la construcción de curvas. El método consiste en encontrar una serie de puntos que forman una figura geométrica dada y después trazar la curva deseada. El método se asemeja al juego de unir puntos. Existe un problema, no hay seguridad de que entre un punto y otro la curva que estamos construyendo, siga la ruta que estamos estableciendo. Este método era conocido para la época y en algún momento Clavius describió su funcionamiento y lo defendió (Euclides 1654, Pág. 648) (Bos 2001, Cap. 9). Clavius traza la cuadratiz al dividir una línea vertical en partes iguales y dividir un ángulo recto, un cuarto de círculo, en las mismas divisiones. Los puntos de la cuadratriz se obtienen cuando la perpendicular de las divisiones se intersecta con las bisecciones del ángulo recto. Tiempo después consideró que no era posible conciliar las construcciones de puntos con la geometría (Bos 2001, Pág. 164) (Clavius 1606, Pág. 320-323)[(28)].

[27]Su uso parece ser heurístico, ya que tanto las curvas como el método de comprensión son solo probables. En el caso de las curvas no se tiene seguridad que entre los puntos obtenidos exista otro punto que no sea representado. Con el método de compresión obtenemos las propiedades de un objeto, pero solo como una desigualdad. A la heurística se le ha cuestionado que genere *conocimiento verdadero, what ever that means*.

[28]El trabajo de (Euclides 1654) es una copia comentada por Clavius sobre el trabajo de Euclides. Una práctica común por parte de los matemáticos en la Grecia antigua y en la época Moderna era comentar un trabajo matemático previo; algunas veces además de los comentarios se traducía un trabajo. Las copias comentadas a veces se ponen como doble autoría, pero considero que esto es incorrecto. Aquí se dejará el autor original y en el título o en una nota se incluirá el comentarista. El trabajo de (Euclides 1654) parece ser anterior al

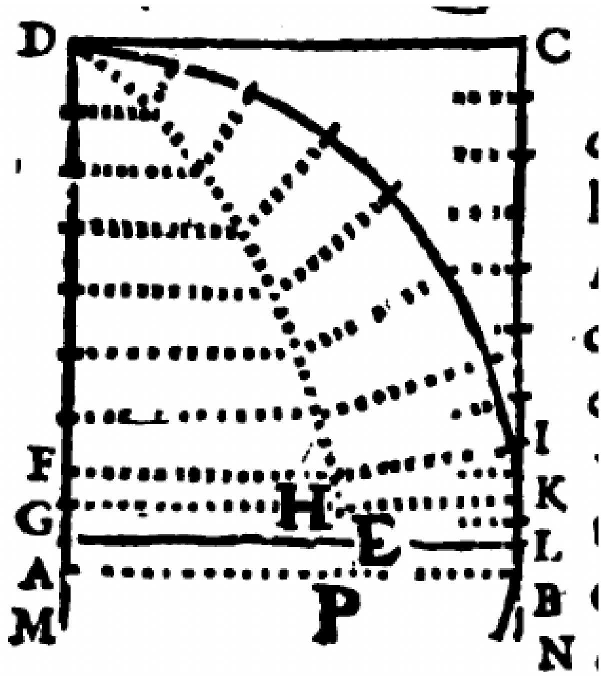


Figura 1.7: Construcción de una cuadratriz

El método de inscripción, circunscripción y exhaución

El método de inscripción, circunscripción y exhaución sirve para encontrar una propiedad geométrica como el área o una razón de proporción o constante. Este método consiste en utilizar polígonos regulares de los cuales ya sabemos los datos que queremos saber y aplicarlos a una figura geométrica de la cual desconocemos las propiedades que queremos saber. La forma en que utilizan los polígonos es la siguiente:

- Método de inscripción: Consiste en construir el polígono regular más grande posible sin que este sea más grande que la figura geométrica de la cual queremos determinar sus propiedades. Este método permite establecer una relación de desigualdad: *propiedad desconocida* > *propiedad conocida*.
- Método de circunscripción: Consiste en construir el polígono regular más pequeño posible sin que este sea más pequeño que la figura geométrica de la cual queremos determinar sus propiedades. Permite establecer la siguiente desigualdad: *propiedad conocida* > *propiedad desconocida*.
- Método de exhaución: Es la combinación de los dos anteriores. Establece que *propiedad conocida*$_1$ > *propiedad desconocida* > *propiedad conocida*$_2$[(29)].

Estos métodos se usaron para determinar las propiedades del círculo, en especial el área y el valor de π

de (Clavius 1606). Sobre la cuadratriz en (Euclides 1654, Pág. 648) habla sobre *la maravillosa naturaleza de la línea* cuadratriz. En (Clavius 1606, Pág. 320-323) ya nada más menciona el nombre de la cuadratriz para hablar del mismo tema.

[29]El método de inscripción a veces se llama método de agotamiento; al método de circunscripción se le llama también método de comprensión. Robles utiliza el término comprensión para referirse a la exhaución (Robles 1993).

(Meskens y Tytgat 2017, Cap. 6 §6) (Robles 1993). Para lograr una mayor precisión se puede variar tanto el número de lados de los polígonos como el tamaño de los mismos. En el caso del círculo, Arquímedes hizo una variación en el número de lados (Meskens y Tytgat 2017, Cap. 6 §6) (Robles 1993).

A partir del estudio del método de exhaución se logró conocer el área de figuras geométricas más allá del círculo y la línea. Diversos pensadores, como Kepler y Cavalieri establecieron diferentes métodos para el cálculo de áreas, basados en los métodos anteriormente descritos, mediante el uso de los *infinitesimales y/o indivisibles*[30].

Fermat, Pascal, Roberval entre otros utilizarán tanto el concepto de infinitesimal como el de polígonos regulares, específicamente el rectángulo para el cálculo de áreas de una curva. Ellos pensaban en las áreas como si estuvieran formadas por un número infinito de rectángulos [infinitesimales] cuya suma de áreas daba el área que se quería conocer. Este método inicia prácticamente los cálculos de Newton y Leibniz (Robles 1993, Pág. 237).

1.3.2. Situación general de la geometría

Como se mencionó anteriormente, la geometría era el interés principal de los matemáticos de la época. Sin embargo, como ésta era aplicada, variaba considerablemente, cada autor tenía su propia definición de exactitud y debatía con los demás las bondades de su propio método y las debilidades de los otros métodos. En la primera sección de (Bos 2001) se muestran los argumentos y contra-argumentos de los matemáticos y sus posturas[31].

Diversos matemáticos sostenían que se debían utilizar solo las figuras clásicas de la geometría en cualquier construcción, como Kepler (Bos 2001, Cap. 11); otros consideraban que se debían incluir algunos instrumentos, como el neusis, e incluir ayuda del álgebra para resolver los problemas geométricos, como Viète (Bos 2001, Cap. 10); los que sostenían que las cónicas eran los instrumentos adecuados para resolver los problemas geométricos clásicos, Pappus argumentara a favor; y aquellos que pensaban que se podían utilizar las líneas

[30] Una definición de infinitesimal y/o indivisible es aquella entidad con métrica que es menor a todas las demás pero diferente de cero. Un problema con este concepto es que los matemáticos de la época entendían de manera diferente estos conceptos e incluso consideraban que eran dos entidades diferentes. Un estudio más completo puede consultarse en (Jullien 2015a) .

[31] Específicamente Bos discute a Clavius, Viète, Kepler, Molther y Fermat. Clavius cambiará de opinión sobre los métodos de construcción más allá de la línea y el círculo. Asumirá una posición en que la exactitud y la constructibilidad se dan siguiendo las reglas de la geometría euclidiana y utilizando únicamente el círculo y la línea (Bos 2001, Cap. 9 §4). Viète sostendrá que las construcciones de la geometría euclidiana hechas con el círculo y la línea son defectuosas y abogará por la inclusión del uso del neusis mediante un postulado. Sin embargo Viète no desarrollará un argumento para escoger el uso del neusis sobre el método de las cónicas; ni tampoco desarrollará su método (Bos 2001, Cap. 10 §5). Kepler se pronunciará en contra de la utilización tanto del álgebra en la geometría, como de la utilización de otras figuras o elementos geométricos más allá del círculo y la línea. Considera que no hay manera de unir los problemas planos con los sólidos; para Kepler la autoridad máxima en geometría euclidiana está en Euclides y Proclo. Molther argumentará a favor de utilizar el neusis, ya que considera que hay una *idealización de la práctica*, derivada de abstraer los medios de las figuras geométricas. Así como una línea y un círculo necesitan movimiento para generarse, pero que en la práctica geométrica esto no se considera, el uso del neusis, aunque se base en movimiento también se puede abstraer solo al resultado. Sin embargo no desarrolla más su argumento (Bos 2001, Pág. 199 y Cap. 12 §5). La idealización del movimiento o la práctica también fue defendida por Rivault (Crippa 2014, Pág. 238) y por Snellius (Bos 2001, Pág. 218). Fermat considera que el análisis, que se verá en la sección 1.4.4, álgebra e infinitesimales, son un tópico separado de la geometría euclidiana (Bos 2001, Cap. 13 §2).

especiales, como Molther (Bos 2001, Cap. 12)[32].

El debate se centraba en estos puntos:

- ¿Qué era una figura geométrica básica? Se discutía si se debían aceptar, además de la línea y el círculo, las secciones cónicas.

- ¿Qué método de construcción se considera adecuado para construir una respuesta matemática y después considerarla como una solución matemática? Se discutía que instrumentos se podían utilizar además de la regla sin graduar, y el compás. Los que estaban a favor del uso de otros instrumentos además de la regla y el compás, comentaban que se aceptaba el círculo aun cuando se movía angularmente el compás para producir la línea de la circunferencia; por lo cual el movimiento no era pretexto para descartar un instrumento de construcción de curvas.

- ¿Qué entendemos por exactitud en matemáticas? Se hablaba de las reglas de construcción que eran necesarias para determinar si una respuesta era adecuada para ser una solución[33].

De estos debates surgió el trabajo de Descartes que marcará la práctica matemática durante mucho tiempo.

1.3.3. *La Géométrie* de Descartes

El trabajo de Descartes fue publicado en 1637 e impactó a la práctica matemática de la época al mismo tiempo que a la filosofía[34]. Este trabajo permitió incluir nuevas figuras geométricas como las cónicas a la práctica matemática, y que se considerará al álgebra como una teoría o rama matemática por sí misma.

De acuerdo a Bos, el éxito de Descartes sobre otros trabajos parecidos[35]; es que él parte desde un lugar muy diferente de sus contemporáneos, desde el principio tiene una postura filosófica clara que le permite estudiar a las matemáticas y a las ciencias de manera sistemática. Considera que su trabajo en *La Géométrie* es una nueva ciencia y que ésta se caracteriza por utilizar la mínima expresión posible en un problema

[32] Bos comenta que Molther tuvo muy poco impacto en matemáticas, sin embargo al parecer Mersenne lo conocía (Bos 2001, Cap. 12 Nota 17). Es posible que Descartes lo conociera ya que Mersenne y Descartes tuvieron un intenso intercambio epistolar cuyo resultado puede verse a lo largo de la sección II de (Bos 2001).

[33] A los matemáticos en esa época les interesaba más la construcción que las pruebas matemáticas tal y como las conocemos hoy en día. Un ejemplo de que los matemáticos estaban más interesados en los resultados es el llamado *último teorema de Fermat*, del cual Fermat solo anotó el resultado, mas no la prueba de éste.

[34] Los trabajos de Descartes en filosofía se consideran un antecedente necesario para estudiar y practicar filosofía, tanto su variante analítica, como en otras tradiciones como la continental.

[35] Viète y Fermat trabajaron el álgebra. Viète utiliza el álgebra como herramienta de análisis en la geometría (Bos 2001, Pág. 180) (*cf.* secciones 1.4.3 y 1.4.4). Fermat además trabajó los problemas de Pappus y tenían propuestas similares a las de Descartes (Bos 2001, Cap. 10 y 13).

matemático[(36)] [(37)] (Bos 2001, Cap. 15 §3)[(38)] (Bos 2001, Cap. 18)[(39)] (Bos 2001, Cap. 28 §2)[(40)].

Con el libro de *La Géométrie* Descartes logra lo siguiente:

- Clarificar el objetivo general de la resolución de problemas mediante la unificación, ordenación y extensión de los procedimientos de construcción de respuestas más allá de las líneas y círculos (Bos 2001, Cap. 28 §2) y dándoles la posibilidad de convertirlos en soluciones aceptables por la práctica matemática.
- Entender la relaciones entre los problemas geométricos, las ecuaciones y las construcciones, para establecer procedimientos en el análisis algebraico[(41)] (Bos 2001, Cap. 28 §2).
- Establecer una nueva interpretación de lo que significaba *construcción exacta* (Bos 2001, Cap. 28 §2).
- Crear un sistema geométrico de resolución de ecuaciones (Bos 2001, Cap. 26).
- Generalizar la solución al problema de Pappus. El problema de Pappus es identificar una curva de modo que todos los puntos de la curva satisfagan una relación específica con un número de líneas y ángulos dados (*cf.* (Bos 2001, Cap. 23)).
- Encontrar que los *locus*, plural *loci*, o lugares geométricos en Pappus eran ecuaciones algebraicas[(42)] y que se podían describir mediante *movimientos aceptables en geometría*[(43)] (Bos 2001, Cap. 28 §3).
- Encontrar que el problema de encontrar el lugar geométrico, *locus* o *loci* dado por tres o cuatro líneas se podía resolver mediante cónicas (Bos 2001, Cap. 23) (Descartes 1637, *La Géométrie*, Livre Second).

[36]Esto se puede ver en especial en la regla veintiuno en *Règles pour la direction de l'esprit* y en la parte dos del *Discours de la méthode*.

[37]Considero que es una interpretación posible ya que Descartes es un gran filósofo. Si bien se puede argumentar que el talento filosófico de Descartes no es suficiente para que sus estudios sean una nueva ciencia, hay que recordar que para aquella época ciencia era aquello que cumplía con el modelo geométrico, o se hacía *a là Euclides*. Descartes puede estar considerando que sus estudios en geometría y álgebra están hechos *a là Euclides*.

[38]Bos comenta: "Las matemáticas de Descartes eran las matemáticas de un filósofo. Desde la primera etapa documentada en su carrera intelectual, las matemáticas fueron una fuente de inspiración y un ejemplo para su filosofía, y, a la inversa, sus preocupaciones filosóficas influyeron fuertemente en su estilo y programa en matemáticas" (Bos 2001, Pág. 228).

[39]Bos analiza el trabajo hecho en *Règles*, el siguiente texto es de la sección 2: Las siguientes reglas (16-21) describen en términos generales la técnica de traducir un problema en una ecuación. Descartes explicó los pasos sucesivos de este proceso: usar símbolos cortos para denotar los elementos de un problema que deben tenerse en cuenta (16); ignorar si los términos son conocidos o desconocidos y encontrar sus interrelaciones (17); usar las cuatro operaciones de suma, resta, multiplicación y división al anotar estas interrelaciones como ecuaciones (18); buscar ecuaciones, tantas como palabras desconocidas (19); aplicar (20) un procedimiento adicional (Descartes señaló que explicaría este procedimiento más adelante, pero la versión existente de las Reglas no contiene tal explicación, lo más probable es que preveía un método para probar si la ecuación era reducible); reduzca las ecuaciones a una sola del grado más bajo posible (regla 21) ... Y aquí las Reglas se rompen. La secuela que uno esperaría, es decir, las reglas para derivar la solución del problema a partir de la ecuación a la que se llegó en la Regla 21, están ausentes.

[40]Cita de Bos:"En la geometría, Descartes propuso el siguiente canon de construcción [...]: las construcciones deberían realizarse mediante las curvas geométricas más simples posibles. Para ser aceptable, las curvas tenían que ser algebraicas; la simplicidad se midió por el grado. Las construcciones estándar de Descartes mostraron cómo, en principio, las construcciones adecuadas podían lograrse para cualquier problema, es decir, para cualquier ecuación con una variable desconocida" (Bos 2001, Cáp. 28 §2).

[41]Para entender qué es el análisis algebraico *cf.* sección 1.4.4.

[42]Los coeficientes de la ecuación son enteros.

[43]Recuérdese que parte importante de la discusión anterior a Descartes fue qué instrumentos se podían utilizar para dibujar figuras geométricas básicas. El círculo es una curva que tiene movimiento angular pero que aun así es aceptable. Después del trabajo de la geometría, toda curva algebraica es aceptable, aun cuando se aplique el concepto de movimiento a dicha ecuación.

- Establecer las bases de los sistemas coordenados modernos[(44)]. Descartes entró en contacto con los problemas de Pappus mediante un intercambio epistolar con Golius (Bos 2001, Cap. 19 §1) (Domski 2017, §3). Golius le envió el primer problema que consiste encontrar la relación solo con dos líneas que se intersectan que no sean co-lineales, y un par de ángulos. A partir de este problema se puede encontrar una relación tal que se pueden describir varias curvas. A las líneas dadas se les llama ejes coordenados y a la generalización de las líneas se le llamará sistema coordenado[(45)]. El sistema de coordenadas será parte importante del desarrollo y conceptualización del cálculo, tanto del cálculo de Newton, como el de Leibniz.

El libro de *La Géométrie* es uno de los libros más importantes dentro de las matemáticas, resume parte del conocimiento de las prácticas matemáticas de la Grecia antigua y sienta las bases de la práctica matemática como la conocemos hoy en día.

1.3.4. Los límites de *La Géométrie*

Si bien *La Géométrie* estableció la relación entre diversas curvas y su lugar en la geometría, no todas las curvas fueron aceptadas como verdaderamente geométricas, tanto por Descartes como por sus lectores. Toda curva no-algebraica fue considerada como fuera de la matemática. Esto incluye a las curvas trascendentes, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales entre otras. Así quedan fuera la espiral o la cuadratriz, entre otras curvas.

Las curvas que no se aceptaron se clasificaron como mecánicas y se consideraba que tenían al menos dos movimientos y que no era posible encontrar una ecuación o relación posible que pudiera dar cuenta de sus puntos (Bos 2001, Cap. 29 §2-5).

Una de las consecuencias de este pensamiento es que existió un grupo de los llamados *constructores de ecuaciones* (Bos 2001, Cap. 29 §3). Se trata de diversos autores que seguían una metodología que servía para encontrar dos curvas algebraicas, dadas ciertas condiciones como un punto de intersección. Los constructores de curvas en vez de asumir la metodología de Descartes, quien utilizaba los círculos como una posible solución, preferían asumir que las curvas tenían el mismo grado o casi el mismo grado. Bos considera que después de la publicación de *La Géométrie* la construcción de curvas tuvo una fuerte influencia de los trabajos de Viète y su metodología. Un representante importante de este movimiento es Newton, quien desde mi perspectiva utiliza el análisis de Viète[(46)]; pero con la notación y metodologías cartesianas para trabajar, tema que se verá en el siguiente capítulo.

[44] Los sistemas coordenados se conocían al menos desde Apolonio, sin embargo el trabajo de Descartes permitió relacionar ecuaciones con curvas (Grant y Kleiner 2015).

[45] Los ejes coordenados pueden estar en cualquier ángulo. Al sistema de ejes coordenados ortogonales, es decir perpendiculares, se les conoce como sistemas coordenados cartesianos.

[46] Para saber qué es el análisis de Viète *cf.* secciones 1.4.3 y 1.4.4.

Hay que aclarar que aun cuando Descartes utiliza el álgebra para su sistema, el énfasis cartesiano se da en la geometría. Las soluciones a los problemas presentados en *La Géométrie* se presentan de manera geométrica y durante años continuará aún como la práctica matemática más importante.

Finalmente el trabajo de Descartes sentará las bases de lo que Bos llama la *desgeometrización* de las matemáticas y los propios matemáticos explorarán las curvas más allá de las curvas algebraicas. La desgeometrización de las matemáticas se refiera al hecho de que las pruebas dejan de realizarse con geometría euclidiana y se utiliza la investigación en álgebra posterior a Descartes para realizar pruebas matemáticas(47). Esto desembocará en la matemática que conocemos hoy.

1.4. El álgebra

El álgebra es una rama matemática que permite la generalización de distintas operaciones dadas ciertas reglas. Existen diferentes tipos de álgebra que dan distintas teorías matemáticas. Para la época Moderna se trataba de una generalización de la aritmética que permitía el cálculo de ciertas cantidades desconocidas. El álgebra desarrollada en el Renacimiento y la edad Moderna, puede considerarse como el antecedente del álgebra que se estudia actualmente en la educación media.

Las operaciones matemáticas que ahora se conocen con el nombre de álgebra se estudiaron al menos desde la época de Mesopotamia y los egipcios (Alten *et al.* 2013, Cap. 1), si no es que antes. Los griegos también conocían las operaciones algebraicas pero en un principio se realizaban mediante la geometría (Turchin 1977, Pág. 186-188). El libro de Diofanto y sus ecuaciones diofantinas pueden considerarse un primer inicio del álgebra formal para algunos historiadores de las matemáticas (Alten *et al.* 2013, Cap. 2 §6).

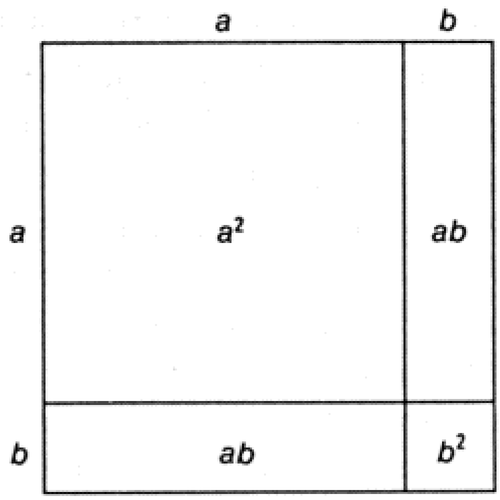
Generalmente se considera que el trabajo de *Al-Juarismi*(48), conocido como *Compendio de cálculo por compleción y comparación*, es uno de los primeros trabajos en álgebra(49) que utiliza el lenguaje como herramienta matemática, en vez de las figuras geométricas. Para mostrar cómo se podía calcular una ecuación Al-Juarismi utilizaba el lenguaje, indicando como *cuadrados* y *raíces*, los términos actuales de x^2 y x.

> “La mitad de un cuadrado y cinco raíces son igual a veintiocho dirhems”[. . .] Su primer procedimiento debe ser completar el cuadrado, para que su cantidad sea un solo cuadrado. Esto se hace doblando las cantidades. Entonces doble [el cuadrado], también lo que se añade y a lo que es igual. Ahora tiene un cuadrado y diez raíces igual a cincuenta y seis dirhems. Ahora divida las raíces, la mitad es cinco. Multiplique esto por sí mismo, el producto es veinticinco. Añada esto a cincuenta y seis, la suma es ochenta y uno. Extraiga la raíz de esto, es nueve. Substraiga de esto la mitad de las raíces, que es cinco; el resto es cuatro. Esta es la raíz que buscabas, el cuadrado es dieciséis y la mitad es ocho. (Khuwārizmī 1831, Pág. 10)

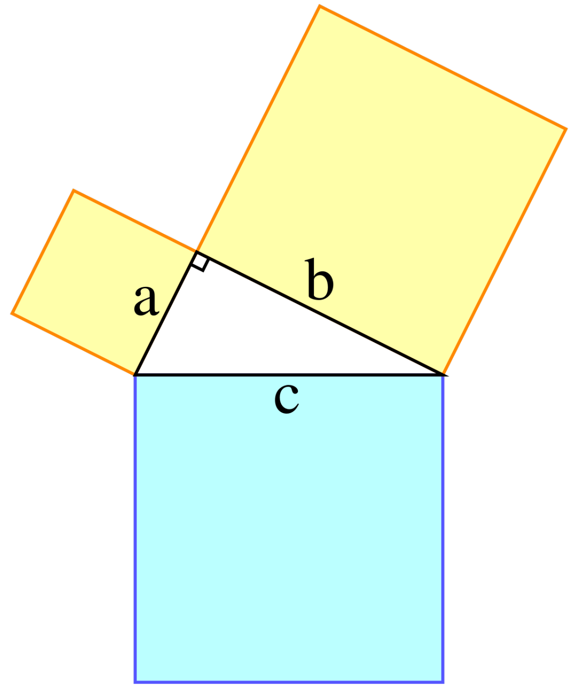
[47] Considere por ejemplo el teorema de Pitágoras. Antes de la desgeometrización de las matemáticas se consideraba al teorema de Pitágoras como la relación entre áreas a partir de los lados del triángulo. Actualmente consideramos que es una ecuación que nos da la relación entre los lados de un triángulo rectángulo.

[48] También conocido cómo *Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi* o *Abu Abdallah Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi*.

[49] Como extensión de la aritmética.



(a) El binómio $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



(b) Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Figura 1.8: Operaciones algebraicas mediante geometría

El ejemplo en notación moderna es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{2} + 5x &= 28 \\
\left[\frac{x^2}{2} + 5x\right] &= \left[28\right] * 2 \\
x^2 + 10x &= 56 \\
x = \sqrt{\frac{10}{2} * \frac{10}{2} + 56} &- \frac{10}{2} \\
x = \sqrt{25 + 56 = 81} &- 5 \\
x = 9 &- 5 \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

El trabajo de Al-Juarismi se dedicó a la enseñanza del álgebra aplicada, generalmente al comercio, utilizando el sistema posicional de numeración decimal creado por los hindúes y estudiado ampliamente por los árabes, lo que daría forma al sistema actual de numeración utilizado para la aritmética, conocido como el sistema indo-arábigo.

A partir del trabajo desarrollado por los árabes, el álgebra se considerará como una conocimiento técnico de los mercaderes, lo que posteriormente impedirá su uso como una herramienta matemática. Actualmente consideramos que estas aplicaciones al comercio son un antecedente directo del álgebra y de una práctica matemática reconocida, para la época esto está muy lejos de considerarse como una práctica matemática aceptable[(50)].

1.4.1. El álgebra antes de *La Géométrie*

El inicio del álgebra en Europa renacentista se da básicamente por la publicación del libro *Liber Abaci* de Leonardo de Pisa, mejor conocido como *Fibonacci* en el año 1202. Este escrito está basado en los textos aritméticos y algebraicos de los árabes. Incluía la información básica del sistema de numeración indo-arábigo y algunos problemas aritméticos y algebraicos relacionados con el comercio, así como algunas reglas de manipulación algebraica (Alten *et al.* 2013, P. 215) (Katz 2017, 342).

> Las nueve figuras indias son:
> 9,8,7,6,5,4,3,2,1.
> Con estas nueve figuras y con el signo 0 que los árabes llaman "zephir" cualquier número es escrito[. . .] Un número es una suma de unidades, o una colección de unidades, y por la adición de ellas los números incrementan por pasos sin parar. Primero, se componen las unidades que van del 1 al diez. Segundo, se componen las decenas que van del once al cien[. . .]
> (Pisano 2012, Pág. 17 (Pág. 2 de la edición original))

Fue principalmente el comercio lo que permitió al álgebra y la aritmética indo-arábica evolucionar en Europa. Los mercaderes se interesarán por tener mejores sistemas que les permitan realizar cálculos aritméticos complicados; y les permitan resolver problemas relacionados con el comercio, como el cálculo de ganancias, el cobro de mercancías, entre otras cosas (Katz 2017, Pág.342).

Un ejemplo de esto lo tenemos en el *Liber Abaci*, el cual para enseñar la regla de tres simple y compuesta utiliza ejemplos de comercio.

> Cien rollos son vendidos en XL libras, y es buscado cuánto valen 5 rollos; los tres números conocidos se ponen en las posiciones [. . .], dos de los cuales son de la misma clase, a saber los 100 y los 5 rollos. Verdaderamente el otro [número], a saber 40, es de otra clase, a saber el precio y es el precio de los dichos 100 rollos, entonces [. . .] los 100 rollos y las 40 libras se escriben en una línea, claramente escribiendo 100 después [de las 40 libras]; seguidamente se escriben los 5 rollos debajo de los 100 rollos [. . .] multiplique los números diagonalmente opuestos, a saber 5 por el 40, habrá 200 eso se divide por el 100, el cociente es 2 libras por el precio de 5 rollos.
> (Pisano 2012, Pág. 128-129 (Pág. 84-85 de la edición original))

[50] La razón por la cual no se considerará al álgebra como aceptable se verá en la sección 1.4.4. Por otro lado se considera que el trabajo de Al-Juarismi es un antecedente del álgebra por que tiene similitudes con el trabajo de *Fibonacci* quien es considerado el primer estudioso del álgebra en el continente europeo.

Libras		*Rollos*
40		100
	*	
	*	
$\boxed{2}$		5

Cuadro 1.1: Regla de tres por Fibonacci

El interés por estos problemas hace que existan diversos manuales que van evolucionando cada vez más hasta crear tratados algebraicos que además de incluir temas vistos por los árabes, crean conocimiento propio. Se empieza a desarrollar la notación algebraica, la teoría de ecuaciones, los símbolos aritméticos, las potencias, entre otras cosas (Katz 2017, Cap. 12 §1.2). Algunos de los algebristas que contribuyeron al establecimiento del álgebra en la época Moderna fueron Nicolas Chuquet que fue uno de los primeros algebristas que utilizó símbolos para representar algunas operaciones aritméticas como la raíz o la suma y resta (Katz 2017, Cap. 12 §2.1) (Alten *et al.* 2013, Cap. 4 §5.1); y Robert Recorde que trabajó con los símbolos de + − =[51] y desarrolló la teoría de las potencias (Katz 2017, Cap. 12 §2.2). Chuquet, en su libro *Triparty*, trabaja la suma vertical, con la barra horizontal como signo de igual; un símbolo para indicar raíces R, específicamente R^2 para raíces cuadradas (Chuquet 1881, Pág. 103); además de introducir el concepto de número negativo en Europa (Katz 2017, Pág. 391), $\bar{m}$.

> Uno debería conocer también que cada una de estas diversidades antes dichas, son números simples, primero, segundo u otros números; o segundas, terceras, cuartas u otras raíces; son siempre entendidas [estas diversidades] como positivas; a menos que expresamente sean notadas con esta palabra, menos. Como en: $\bar{m}12^0$ $\bar{m}12^1$ $\bar{m}R^2 12^3$, etcétera[52][53]. (Chuquet 1881, Pág. 153) (Flegg, Hay y Moss 1985, 147)

El texto está dividido en tres partes que tratan sobre los números, las raíces y los *primeros términos o las reglas de los primeros términos* (Flegg, Hay y Moss 1985, Pág. 26). Dentro de sus escritos, que parecen ser dedicados a la enseñanza del álgebra, también cuenta con un libro de *Aritmética Comercial* dedicado a los comerciantes (Flegg, Hay y Moss 1985, Cap. 8) tal como lo era él *Liber Abaci*.

$$\begin{array}{r} 70830 \\ 60730 \\ 30520 \\ \hline 162080 \end{array}$$

Figura 1.9: Ejemplo de suma (Chuquet 1881, Pág. 42).

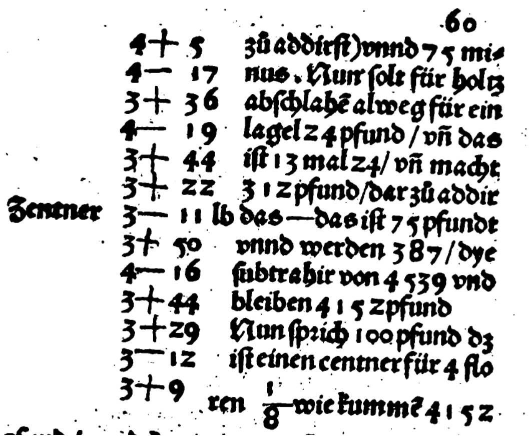
Al mismo tiempo que el álgebra se desarrollaba, la notación fue cambiando. Los símbolos de adición + y

[51] Los símbolos de + y − ya se habían introducido.

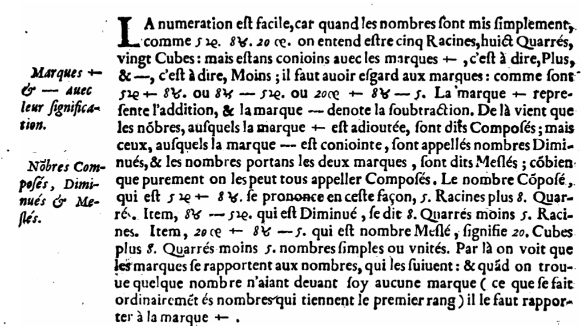
[52] Se introduce a continuación el texto original: *"Lon doit aussi scauoir que vne chascune des differances dessusdictes soient nombres simples p̃miers secondz ou aul̄t̄s ou racine seconde tierce quarte ou aul̄t̄s sont tousiours entendues estre plus si non quelles soient exp̄ssement notees de ceste diction. moins. come."* El francés utilizado no es exactamente igual al francés contemporáneo, para más información véase la §IV (Chuquet 1881, §IV (Pág. 32-36)).

[53] Cita original *"One should also know that each one of the diversities aforesaid, be they simple, first, second or other numbers, or second, third, fourth or other roots, are always understood to be plus unless they be expressly marked with this apellation minus, as "*

substracción − fueron introducidos por Johannes Widmann (Mazur 2014, Pág. 82). Tiempo después Simon Stevin también utiliza los operadores + y − en su libro de aritmética *Le primer livre D'Arithmetiqve* (Stevin 1634, Pág. 11)[54]. Stevin también desarrolló una forma de notación decimal (Katz 2017, Pág. 416). Chistopher Clavius también utilizaría los signos de + y −. Además los libros de Clavius fueron los libros utilizados por Descartes para el estudio del álgebra (Alten *et al.* 2013, Pág. 257).



.60
4+5 zu addirt/vnnd 75 mi-
4— 17 nus. Nun solt für holz
3+36 abschlahē alweg für ein
4— 19 lagel 24 pfund / vñ das
3+44 ist 13 mal 24/ vñ macht
3+22 312 pfund/dar zu addir
Zentner 3— 11 lb das—das ist 75 pfunde
3+50 vnnd werden 387/ dye
4— 16 subtrahir von 4539 vnd
3+44 bleiben 4152 pfund
3+29 Nun sprich 100 pfund dz
3— 12 ist einen centner für 4 flo
3+9 ren 1/8 wie kummē 4152



Marques + & — auec leur significa-tion.

Nõbres Composés, Diminués & Meslés.

LA numeration est facile, car quand les nombres sont mis simplement, comme 5. 8. 20. on entend estre cinq Racines, huict Quarrés, vingt Cubes: mais estans conioins auec les marques +, c'est à dire, Plus, & —, c'est à dire, Moins; il faut auoir esgard aux marques: comme sont 5 + 8. ou 8 — 5. ou 20 + 8 — 5. La marque + represente l'addition, & la marque — denote la soubtraction. De là vient que les nõbres, ausquels la marque + est adioutée, sont dits Composés; mais ceux, ausquels la marque — est coniointe, sont appellés nombres Diminués, & les nombres portans les deux marques, sont dits Meslés; cõbien que purement on les peut tous appeller Composés. Le nombre Cõposé, qui est 5 + 8. se prononce en ceste façon, 5. Racines plus 8. Quarré. Item, 8 — 5. qui est Diminué, se dit 8. Quarrés moins 5. Racines. Item, 20 + 8 — 5. qui est nombre Meslé, signifie 20. Cubes plus 8. Quarrés moins 5. nombres simples ou vnités. Par là on voit que les marques se rapportent aux nombres, qui les suiuent: & quãd on trouue quelque nombre n'aiant deuant soy aucune marque (ce que se fait ordinairemẽt és nombres qui tiennent le premier rang) il le faut rapporter à la marque +.

(a) El símbolo de la suma + y de la resta − (Widmann 1508, Pág. 60).
(b) El uso de + y − en Clavius (Clavius 1612, Pág. 64).

Figura 1.10: Los símbolos de + y −.

Robert Recorde introduce también el símbolo de igualdad =, para indicar que los términos antes y después del símbolo son idénticos.

> Y para evitar el tedioso trabajo de repetición de estas palabras: es igual a: estableceré, como en mi trabajo, un par de paralelas [. . .],= ,dado que no hay 2 cosas que puedan ser más iguales. (Record circa 1557, Cap. "The rule of equation, commonly called Algebers Rule.")

Para esa época ya se le daba el nombre de ecuaciones a la búsqueda de las incógnitas que resolvieran una operación general en el álgebra[55]. También se había desarrollado al menos la suma y resta algebraica de polinomios. El procedimiento es similar al nuestro, sumando o restando algebraicamente los coeficientes que sean del mismo tipo de elemento[56].

> En adicionar o substraer los números compuestos, simples[57], o mezclados[58], es necesario que "las variables"[59] sean de la misma denominación y se correspondan entre sí; siempre recuerde, cuando hay

[54] En varios idiomas romances las grafías "*u*" y "*v*" muchas veces se intercambiaban, esto se debe a que en latín la grafía "*u*" se consideraba que era una diferente grafía para una misma letra "*v*". El título del libro *D'Arithmetiqve* sigue esta convención antigua.

[55] Véase por ejemplo (Clavius 1612, Cap. 9).

[56] Se le llama suma algebraica al hecho de respetar la operación aritmética de dos elementos del mismo tipo: Sea $a = 7x^2$ y $b = -4x^2$ resuelva $a + b$. Como a y b son monomios del mismo tipo se pueden sumar; sus coeficientes son 7 y −4 por lo que aritméticamente corresponde a una resta cuyo resultado es 3. La respuesta es la suma [algebraica] de $a + b = 3x^2$. Se dice que se realiza una resta algebraica si se invierten los signos del segundo operador de acuerdo a las leyes de los signos: Sea $a = 7x^2$ y $b = -4x^2$ resuelva $a - b$. Como a y b son monomios del mismo tipo se pueden restar; sus coeficientes son 7 y −4, sin embargo debemos cambiar el signo de −4 ya que de acuerdo a la ley de los signos $(-) * (-) = +$, por lo que aritméticamente corresponde a una suma cuyo resultado es 11. La respuesta es la resta [algebraica] de $a - b = 11x^2$.

[57] Monomio.

[58] Polinomio.

[59] El término utilizado es *Cossiques* que se refiera a un elemento desconocido en este caso de la ecuación algebraica, proviene del italiano *cosa* (Pisano 2012, Pág. 5.) (Høyrup 2002). Énfasis mío.

algún defecto: ponga entonces cero con marca +, representará el numero faltante[(60)]. (Clavius 1612, Pág. 65)

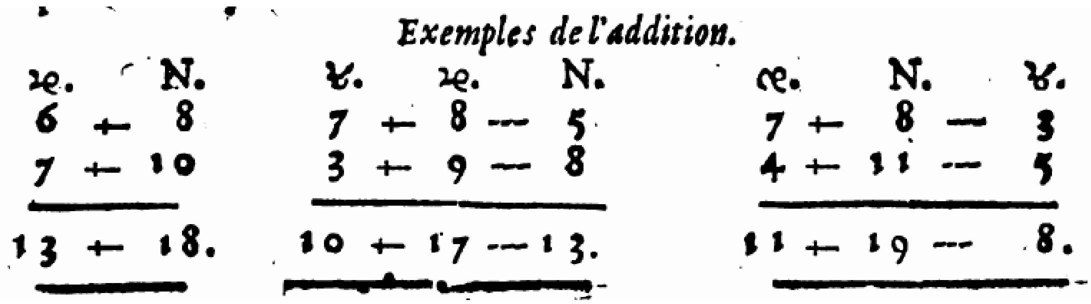


Figura 1.11: Suma de polinomios en Clavius

Con respecto a la resolución de ecuaciones y teoría de ecuaciones, existieron diversos algebristas que desarrollaron distintos métodos para resolver ecuaciones de hasta cuarto grado. Dentro de estos destacan Luca Pacioli, Gerolamo Cardano, Tartaglia, Lodovico Ferrari, entre otros. Quienes en sus distintos trabajos establecen los métodos de resolución de ecuaciones hasta tercer y cuarto grado[(61)] con métodos generales[(62)]. El trabajo de estos pensadores se concentró en el libro de Cardano llamado *Ars Magna* o *Artis Mangæ*[(63)], el cual recoge el desarrollo algebraico desarrollado en dicha época y pensamiento nuevo, como lo son la resolución con métodos generales de tercer y cuarto grado, debido sobre todo al trabajo de Tartaglia y de Lodovico Ferrari[(64)]. Cardano, Ferrari y posteriormente Bombelli empiezan a trabajar con los números complejos[(65)], lo que permitió resolver ecuaciones que antes parecían no tener solución (Alten *et al.* 2013, Cap. 5 §1) (Katz 2017, Cap. 12 §2).

Cardano en su trabajo de *Ars Magna* postula que se pueden resolver problemas que parecen imposibles con la adopción de las raíces de números negativos. Utiliza el siguiente ejemplo: *Divida 10 en dos partes, el producto de las cuales sea 30 o 40* (Cardano 1545, Cap. XXXVII) (Cardano 1993, Pág. 219). La ecuación equivalente en la notación actual es: $x(10-x) = 40$ (Bos 2001, Pág. 234). Cardano nos dice que las raíces de dicha ecuación son:

[60]Cita original *"En adioutant ou soubtraiát les nombres Composés, Diminués ou Meslés, faut que les nombres Cossiques de la mesme dénomination respondent l'vn à l'autre; reserué toutesfois quand il y a quelque defaillance: car pour lors Zéro auec la marque + representera la place"*. El francés utilizado por el traductor puede diferir del francés contemporáneo.

[61]Cuando se dice *grado de la ecuación* se refiere a cuando en una ecuación polinómica se ordenan los términos de las mismas empezando por la potencia más alta. Así una ecuación de primer grado, o lineal, es de la forma $ax + b = 0$, una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, etcétera.

[62]Un método general de resolución de ecuaciones permite encontrar las raíces de la ecuación únicamente con los coeficientes de la misma, como $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Solo es posible encontrar métodos generales de ecuaciones hasta ecuaciones de cuarto grado. La prueba de que más allá del cuarto grado no existe un método general fue desarrollada independientemente por Abel y Galois.

[63]Dependiendo de la edición y de la traducción del libro se puede encontrar bajo alguno de estos nombres.

[64]Tartaglia había compartido un método de resolución de ecuaciones de tercer grado con Cardano, pero pidió que no se publicara. Lodovico Ferrari posteriormente desarrolló un método más general, que abarcaba más casos, a partir del método de Tartaglia y también desarrolló métodos para las ecuaciones de cuarto grado. Tartaglia y Cardano mantuvieron una amarga disputa por la decisión de este último de publicar la investigación de Tartaglia. Probablemente la disputa se debió a que en aquella época los matemáticos se retaban a duelo, lo que significaba beneficios económicos y académicos a corto y largo plazo como dinero y/o puestos de trabajo. Sin su carta fuerte Tartaglia quedó en desventaja. (Alten *et al.* 2013, Cap. 5 §1) (Katz 2017, Cap. 12 §2)(Gindikin 2007, Pág. 3-5).

[65]Un número complejo sirve para representar raíces cuadradas de los números negativos, mediante dos números reales de la forma $(a + bi)$ ó $(a + bj)$; donde a representa *la parte real del número complejo* y son los números reales que conocemos; y *bi es la parte imaginaria del número complejo*, tiene la característica de que $i = \sqrt{-1}$ y $i^2 = -1$.

$(5+\sqrt{25-40})(5-\sqrt{25-40}) = (5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25+15 = 40$[66][67].

1.4.2. Diofanto y las *ecuaciones diofantinas*

Así como la geometría tuvo un renacimiento con la publicación de los textos de Pappus y la reconstrucción de los trabajos de Apolonio, el álgebra también se vio afectada por el descubrimiento por parte de los matemáticos modernos del tratado de *Aritmética* de Diofanto. Diofanto fue un matemático griego que vivió 80 años. Poco se sabe de su vida y del periodo en que desarrolló su trabajo. Se cree que su trabajo influyó a los matemáticos árabes y de ahí paso a los matemáticos del renacimiento como *Fibonacci*. Sin embargo el conocimiento de la existencia de un tratado específico para la aritmética y el álgebra por parte de los griegos se desconocía. Fueron los matemáticos Bombelli y Simon Stevin quienes difundieron su trabajo, que finalmente en 1585 se publicaron los primeros cuatro libros. De los trece libros originales del tratado sólo se han encontrado 6 libros. Un aspecto importante del libro *Aritmética* es que cambió los trabajos algebraicos posteriores sobre todo en la notación algebraica. Desde Bombelli, se trató de usar los símbolos de las potencias con el principio aditivo de Diofanto[68][69], así como se realizaron los trabajos con un lenguaje formal, propio del tratado diofantino (Bashmakova 1997, Cap. 8).

Hasta antes de la publicación de los problemas diofantinos, los matemáticos usaban símbolos o palabras que no necesariamente expresaban que las potencias se podían sumar. Si bien existían los conceptos como *bicuadrático* $x^4 = (x^2)^2$, las potencias mayores a tres se expresaban con nombres propios, generalmente las impares. Así la potencia 5, x^5, se expresaba con la palabra *surdo* o *sursolido* (*cf.* (Clavius 1612, Cap. 2)), también llamada *primer inexpresable* (Bashmakova 1997, Pág. 48).

Con el trabajo desarrollado por Diofanto, los matemáticos encontraron por primera vez evidencia de que el álgebra era una rama propia de la matemática principalmente por tres razones:

a) Los matemáticos griegos conocían del tema.

b) Los problemas algebraicos eran independientes del comercio y los sistemas contables[70].

c) Se puede expresar como un sistema formal.

Aunado a esto, de la misma manera que Pappus tiene una nueva forma de hacer análisis, también llamado

[66] En notación original 5.$\acute{p}$.R.$\bar{m}$.15&5.$\bar{m}$.R.$\bar{m}$.15. El símbolo de menos puede ser m con barra $\bar{m}$ ó m con tilde $\tilde{m}$. De acuerdo a (Cajori 1993, Pág. 117-118) la notación en la edición de 1545 no lleva tilde o barra. Gracias al Dr. Fuentes por la observación.

[67] El resultado de 15 se debe a que es un producto notable donde dados dos binomios con los mismos elementos, x, a, pero el segundo término con signos contrarios, $a, -a$, el producto de dichos binomios es el cuadrado de cada uno de los términos $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$.

[68] El principio aditivo de las potencias, al parecer propuesto por Diofanto, es aquel que nos dice que dados dos elementos algebraicos con el mismo componente, al multiplicarse se suman sus potencias, más adelante se definirá con exactitud lo que significa el principio aditivo.

[69] Viète utiliza solo una parte del sistema diofantino de potencias (*cf.* sección 1.4.3).

[70] Más adelante se verá el por qué esto es un problema.

análisis de Pappus; Diofanto tiene su propio *análisis diofantino*. Bashmakova comenta:

> Pero la "Aritmética" de Diofanto contenía una segunda serie de ideas, mucho más profundas, el análisis diofántico. Durante mucho tiempo estas ideas fueron completamente desconocidas. La situación paradójica que prevaleció en Europa en los siglos xv y xvi fue que los académicos utilizaron y desarrollaron el álgebra derivada de Diofanto, pero no sabían nada sobre sus obras. (Bashmakova 1997, Pág. 48)

Diofanto habla del sistema de potencias:

> "Es", observa Diophantus, "a partir de la suma, resta o multiplicación de estos números o de las proporciones que se relacionan entre sí o de sus propios lados, respectivamente, que se forman la mayoría de los problemas matemáticos" (Diofanto de Alejandría Circa siglo IV A.C., Pág. 130)

Un ejemplo de la notación usada por Diofanto:

> Definiciones:
> δύναμις $\Delta^Y \quad (x^2)$.
> κύβος[71] $K^Y \quad (x^3)$
> δυναμοδύναμισ $\Delta^Y\Delta \quad (x^4)$
> δυναμοκύβος $\Delta K^Y \quad (x^5)$
> κύβοκύβος $K^Y K \quad (x^6)$[72] (Diofanto de Alejandría Circa siglo IV A.C., Pág. 130) (Mazur 2014, Pág. 106)

1.4.3. El álgebra de Viète

Después de la publicación del trabajo de Diofanto la comunidad matemática empezó a cambiar su postura respecto al álgebra. Uno de los matemáticos que retomó la tarea de Diofanto fue Viète, quien publica su libro dedicado al tema del álgebra con el título de *Introducción a la nueva álgebra*[73], mejor conocido por los historiadores como *isagoge*, *Arte analítico*, *Nueva álgebra* o *Algebra nova*. Para Viète el trabajo de Diofanto está incompleto, y/o perdido, y pretende restaurarlo. Viète intenta crear, o más bien recrear, un método de análisis que pudiera no dejar ningún problema sin resolver (Bos 2001, Pág. 146). Viète propone un nuevo sistema de análisis dividido en tres partes (Viéte 1630, 2):

1. Fase *Zetética*: Consiste en pasar del problema original a su equivalente algebraico (Bos 2001, Pág. 146).

2. Fase *Porística*: Existen diversas interpretaciones de esta fase, pero la más plausible es que se trata de la transformación algebraica. Es la fase intermedia que trataba las técnicas de transformación de igualdades y las *proporcionalidades* algebraicas (Bos 2001, Pág. 147).

3. Fase *Exegética*: Fase que consiste en establecer una solución mediante geométricos, principalmente, dadas las transformaciones anteriores (Bos 2001, Pág. 147).

[71] Dada la tipografía la letra ϰ, kapa, puede confundirse con la siguiente letra χ, Ji o Chi.
[72] Obsérvese que para definir x^6, reitera símbolos, lo que a la postre derivo en las reglas de la multiplicación de potencias.
[73] *In artem analyticem isagoge seorsim excussa ab Opere restitutæmathematicae analyseos, seu Algebra noua*.

El trabajo de Viète puede considerarse como el primer tratado de un álgebra simbólica[(74)]. La *Nueva álgebra* de Viète es un paso importante para el establecimiento del álgebra como disciplina matemática propia, permite manipular símbolos y obtener resultados de acuerdo a las reglas de operación establecidas para dichos símbolos; utiliza dichos símbolos de manera general, ya sea de manera numérica o geométrica; además de concentrarse en su aplicación a las matemáticas mismas, ya que no incluye ejemplos fuera de los geométricos o de las ecuaciones. Con su *Nueva álgebra* Viète logra:

- Establecer un sistema reconocido como algebraico, ya sea como extensión de la aritmética; o como un sistema algebraico contemporáneo.
- Utilizar símbolos para representar los elementos de un sistema algebraico, en especial los elementos desconocidos que buscamos determinar identificándolos por letras (Viéte 1630, Pág. 23).
- Utilizar el álgebra como una forma de relacionar ecuaciones con problemas geométricos, que después dará la idea a Descartes de utilizar el álgebra para relacionar los problemas de Pappus y sus soluciones, *loci*, con ecuaciones en especial las ecuaciones cuadráticas que se relacionarán con las cónicas, método empleado por Pappus para resolver problemas geométricos.

Aun así, el trabajo de Viète todavía pone límites al álgebra, en primer lugar, está destinada a ser parte del análisis de aquella época, y no se consideraba una rama propia de las matemáticas (*cf.* sección 1.4.4). El propio Viète no consideró que su trabajo fuera útil más allá de encontrar los elementos que le permitieran resolver o establecer un sistema de solución para problemas geométricos, su principal preocupación. Lo anterior hace que el sistema desarrollado por Viète solo reduzca el problema original a otro problema geométrico previamente resuelto. Probablemente debido a esto Viète utiliza un sistema de palabras para indicar las potencias, en vez de símbolos como Diofanto, limitando la expresividad y utilidad del sistema. Además utiliza únicamente los símbolos de + (más), − (menos) y — (barra de cociente) (Bos 2001, Pág. 153) (Viéte 1630, Cap. II-V). La siguiente tabla presenta las reglas de multiplicación de potencias en el sistema de Viète:

> Algo multiplicado por sí mismo produce el cuadrado (x^2).
> Algo por el cuadrado hace el cubo (x^3).
> Algo por el cubo hace el cuadrado cuadrado (x^4).
> Algo por el cuadrado cuadrado hace un cuadrado cúbico (x^5).
> Algo por el cuadrado cúbico hace un cubo cúbico (x^6). (Viéte 1630, Pág. 15)

Viète conserva de Diofanto el sistema de suma de potencias, el *cubo cúbico* es la multiplicación de un *cuadrado cúbico* por sí mismo, pero elimina los símbolos asociados a las potencias. Como se verá más adelante es

[74]Desligada de la práctica del comercio y en la que la naturaleza de sus objetos es general y puede interpretarse de manera geométrica y/o numérica. De acuerdo a Panza, existen dos interpretaciones de la *Nueva álgebra*: a)como la teoría de las ecuaciones polinómicas, lo que haría al álgebra una extensión de la aritmética; y b) como el sistema de manipulación y trasformación de símbolos referentes tanto a la aritmética como a la geometría. Panza considera que Bos solo considera la primera interpretación. Siguiendo la segunda interpretación dada por Panza a la *Nueva álgebra*, ésta sería entonces un sistema algebraico contemporáneo, ya que se pueden combinar elementos de una estructura cualquiera, pero dada, dados sus símbolos y reglas de operación. Para más información puede consultar (Bos 2001, Cap. 8 §2, §3 y §4) y (Panza 2007, §1, §2 y §4).

la aplicación de símbolos y el principio aditivo lo que permite entender de mejor forma las leyes de los exponentes.

1.4.4. Situación general del álgebra antes de *La Géométrie*

Se considera que la publicación del *Ars Magna* de Cardano, en el año de 1545, resume el saber algebraico de la época; y contiene conocimiento nuevo, como la resolución de ecuaciones de tercer y cuarto grado. Sin embargo en muchos aspectos, el estudio del álgebra se consideraba como un estudio separado de las matemáticas. Se les designaba con el nombre de algebristas a personas como Cardano.

Algunos matemáticos usan el álgebra para realizar *análisis*, como Viète. En aquella época el análisis era una serie de técnicas de investigación que buscaba encontrar si algún supuesto era verdadero. Se puede decir que el análisis formaba parte del instrumental mental de los pensadores de la época. De acuerdo con, (Panza 2007, §2) el método de análisis-síntesis consiste de los siguientes pasos:

1. Empezar por una hipótesis, asumida, para obtener y/o establecer las condiciones bajo las cuales hacemos a la hipótesis verdadera.

2. Argumentar por qué las condiciones a las cuáles llegamos son las que nos dan por verdadera la hipótesis, y no otras.

3. A partir de las condiciones dadas en 1 y 2, establecer un camino, por el cual vamos de las condiciones a la hipótesis. También en este paso se puede argumentar por la imposibilidad de la hipótesis en 1, dadas las condiciones obtenidas en 1 y 2. En general si se quiere argumentar por la negación de la hipótesis en 1 se recurre a una reducción al absurdo, *reductio ad absurdum*[(75)].

A partir de la publicación de los trabajos de Pappus y de Viète algunos historiadores consideran que los matemáticos ahora tenían a su disposición dos tipos de análisis, el *análisis de Pappus* y *el análisis de Viète*. El primero permitía una nueva clasificación de los problemas a resolver y el uso de cónicas para realizar el análisis; y el segundo el uso del álgebra. Aún así, tanto las cónicas como el álgebra no tenían un estatus de validez matemática, se consideraba que eran parte de la *heurística matemática*, pero no necesariamente parte de la prueba.

Una forma de entender el porque aún cuando una cónica o una ecuación algebraica se usaba dentro de la prueba, pero no formaba parte de la matemática, es ver otro ejemplo en filosofía de la lógica. En lógica[(76)] una prueba puede estar dividida en pruebas más pequeñas, conocidas como subpruebas. Una subprueba

[75] Muy probablemente este proceso se ve reflejado en la prueba por reducción al absurdo sobre la irracionalidad de $\sqrt{2}$.
[76] Existen varios tipos de lógica, sin embargo en varias de ellas existen los elementos de los que se hablará a continuación.

es parte de la prueba, pero lo que esté dentro de la subprueba no puede utilizarse fuera de ella. Del mismo modo, el análisis es una parte de la prueba, ejemplificado en las cónicas y el álgebra, pero no puede utilizarse en la síntesis. Dado esto las cónicas y el álgebra son parte de la heurística matemática, y como tal son parte de las pruebas matemáticas, pero estos elementos están fuera de la matemática en sí.

Un ejemplo de como se utilizan las subpruebas es el siguiente: Dado A , pruebe que podemos deducir que A *implica que no ocurra no* A, $A \to \neg\neg A$.

1. A	
2. ¬A	
3. A	**Reit:** 1
4. A ∧ ¬A	∧ **Intro:** 2,3
5. ⊥	⊥ **Intro:** 2, 3
6. ¬¬A	¬ **Intro:** 2–5

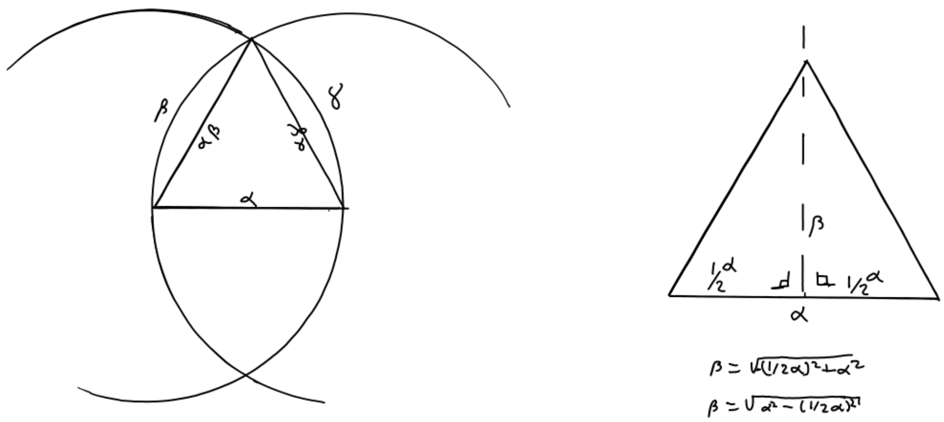
Tanto $\neg A$ como $A \wedge \neg A$ son inválidas fuera de la llamada subprueba lógica, su alcance deductivo está únicamente dentro de la subprueba lógica, que va de las líneas 2 a la 5[77]. Del mismo modo solo se podía usar una ecuación en el análisis, pero era inválido en la síntesis. Es por esto que Viète utiliza el álgebra como un camino de un problema geométrico desconocido a un problema ya resuelto.

Encontrar propiedades matemáticas con cónicas y/o ecuaciones algebraicas solo era una parte de una prueba matemática, pero eso no indicaba que fueran por sí mismos elementos matemáticos. Se consideraba que la verdadera prueba se da por medio de la *síntesis*, que consiste en el proceso opuesto, más no inverso, del análisis. En la síntesis ya se tienen los elementos básicos que nos permiten deducir una prueba matemática y se busca deducir las propiedades de ciertos objetos dados los elementos básicos disponibles.

Considere la prueba de *Euclides I,I*, construir un triángulo equilátero, suponiendo que la construcción es el

[77] Esta prueba lógica se puede considerar como la siguiente: Suponga A; ahora suponga *no* A, $\neg A$; de ahí se deduce una contradicción, $\bot$, por A *y no* A, $A \wedge \neg A$; por lo que es el caso que *no ocurre que, no* A, $\neg\neg A$.

análisis, nos aseguramos que la construcción de los lados mida lo mismo mediante el círculo; sin embargo la síntesis, se da mediante el uso de la *noción común 1*, cosas que coinciden con otra son iguales entre sí. En dado caso que la construcción, el análisis, se diera por otros medios, la parte de la síntesis seguiría siendo la misma. Por ejemplo utilizando el teorema de Pitágoras, en su forma algebraica para determinar la altura del triángulo que permite obtener como hipotenusa el lado dado. En ambos casos la prueba se puede establecer por la *noción común 1*; independientemente de cómo se hayan obtenido los lados faltantes del triángulo.



(a) Construcción de un triángulo equilátero.

(b) La altura adecuada para que los lados faltantes mida igual que α.

Figura 1.12: El uso de la *noción común 1* utilizando el método constructivo y el método algebraico.

Parte de las razones que explican el rechazo a considerar al álgebra como una herramienta matemática por sí misma, o parte de la matemática, probablemente se deban al antiguo sistema de división del estudio entre las llamadas *artes liberales* y las *artes serviles*. Se consideraba que las *artes liberales* daba conocimiento y eran aptas para el estudio más profundo. En contraste con las *artes serviles* que son mecánicas y cuyo estudio se da por parte de los artesanos, siervos y/o esclavos. Así, aun cuando en el *Ars Magna* se incluyen elementos que ahora consideramos matemáticos, en su época se consideraban más bien como un elemento que estaba fuera de la propia matemática[(78)]. Y es que desde la introducción del álgebra el comercio fue parte importante del estudio del álgebra, que se consideraba propio de las *artes serviles*. Así probablemente el álgebra forma parte de las *artes serviles* al estar ligada al comercio.

Para que el álgebra se considere como una rama de las matemáticas, es necesario que además de utilizarse en las demostraciones matemáticas, y en este caso aparte del análisis, los objetos y fenómenos del álgebra se conviertan en objetos de estudio de las matemáticas.

Otro impedimento para considerar el álgebra como parte de las matemáticas es su uso como *ciencia de los números*; en contra de la geometría, considerada como la ciencia *de la medida o de la métrica*. Para aquella época tanto número, como medida o métrica eran considerados elementos diferentes y muchas veces no

[78]Dado el planteamiento anterior surge la pregunta: ¿Puede considerarse esto como un antecedente de la discusión sobre la división de las matemáticas entre puras y aplicadas?

compatibles. Esto se puede ver en la división de las ciencias propuesta por Boecio o Boethius en la cual la aritmética tiene la característica ser discreta; mientras que la característica de la geometría es ser continua (Omodeo 2014, Table 1).

Antes de continuar con la siguiente sección mencionaré que el álgebra practicada en la época Moderna es una extensión de la aritmética. Sin embargo en la época Moderna no se consideraba de esta forma. Existían dos formas de aritmética, la escolástica basada en los trabajos de Boecio o Boethius y la *aritmética práctica* practicada por los comerciantes y basada en los libros de Al-Juarismi (Heeffer 2017). Así, aun cuando la aritmética es parte de la currícula de las universidades, el álgebra o la *aritmética práctica* no lo era y se enseñaba en otros centros de estudio (Heeffer 2017).

La ciencia de la medida vs. la ciencia de los números

Para la época Moderna la geometría es considerada como una *ciencia de la medida*[79]. Esto se debe a que trabajaba con segmentos de recta y/o figuras planas y espaciales que pueden guardar una relación de medida entre sí. Como ejemplo se puede decir que dados dos segmentos de recta, se puede obtener un tercero con la medida de los dos segmentos anteriores, en notación algebraica $c = a + b$.

Así dados los elementos geométricos más aceptados, línea y círculo, se puede establecer una serie de relaciones entre las construcciones formadas en la geometría, como adición y substracción, multiplicación y segmentación, así como una relación de proporción entre figuras. Sin embargo muchas de las operaciones geométricas implican un cambio de dimensión. Mientras que la adición y substracción de figuras geométricas se puede realizar sin cambio de dimensión, por ejemplo se puede producir una línea más larga o corta de acuerdo a la operación; para la multiplicación de segmentos de línea recta se necesita crear un rectángulo. Así muchas operaciones que ahora consideramos como correspondientes o iguales a las aritmético-algebraicas, en aquella época no se consideraban iguales, ya que lo producido eran figuras geométricas, que si bien tenían magnitud, muchas veces estas no se podían expresar mediante los números[80].

Aun cuando existía el problema de las relaciones entre figuras geométricas las cuales daban relaciones no conmensurables[81], como la diagonal de las figuras geométricas como el rectángulo, se consideraba que esto era un problema propio de las relaciones establecidas por las figuras y no por la figura geométrica obtenida.

[79] También puede considerarse como la ciencia de la métrica, si se desea separar o clasificar diferentes medidas

[80] Considérese por ejemplo la figura 1.8a, en el cual hacemos el cuadrado de una suma $(a + b)^2$. El resultado de utilizar líneas es una figura cuadrada. Ahora si consideramos números lo que obtenemos es otro número. Así $(2 + 3)^2 = 25$, lo cual *a prima facie* no parece poder asociarse con un área. Hasta la introducción de las *unidades cuadradas*, entre otros instrumentos matemáticos, no había correspondencia directa entre utilizar métodos geométricos y algebraicos. Así, si introducimos metros en la suma $(2m + 3m)^2 = 25m^2$ parece que los *metros cuadrados* son el equivalente numérico al área de cualquier superficie. Descartes es uno de los matemáticos que permiten relacionar el álgebra con las operaciones geométricas como el cuadrado de una suma.

[81] Por conmensurabilidad en geometría se entiende que dadas dos figuras geométricas existe una tercera que es común a las otras dos. Dicho de otra forma dos figuras son conmensurables si una tercera es submúltiplo a la vez de las dos anteriores. En el caso de la diagonal no se puede establecer un tercer segmento de recta que pueda ser una medida o submúltiplo de los segmentos que la originaron.

Se puede volver conmensurable si se utilizan múltiplos o submúltiplos de la figura obtenida y se establecen nuevas relaciones a partir de estos nuevos elementos geométricos.

Piense en la diagonal de un rectángulo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, ésta es conmensurable con su mitad $\frac{c}{2}$ ya que ambas expresiones pueden tener como término común $\frac{c}{4}$, ya que $\frac{2*c}{4} = \frac{c}{2}$ y $\frac{4*c}{4} = c$. En dado caso que $\sqrt{a^2 + b^2}$ fuera parte del análisis y dicha expresión no fuera necesaria en la síntesis, si en la síntesis no existe ningún procedimiento que produzca inconmensurabilidad, c sería conmensurable con todos los elementos de la síntesis a partir de ese momento.

Ejemplo: Dados dos segmentos de recta, produzca un tercer segmento conmensurable con la diagonal del rectángulo producido por los dos segmentos de recta originales:

Construcción:

1. Produzca el rectángulo a partir de los segmentos dados.
2. Trace la diagonal.
3. Si los lados del rectángulo son solución a una ecuación diofantina cuadrática[82] entonces:
   a) Solución: Los lados son conmensurables con la diagonal.
4. Divida la diagonal en partes iguales.
5. Solución: Cada una de las partes de la diagonal es conmensurable con la diagonal.

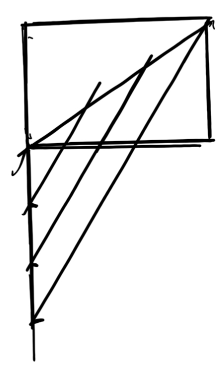


Figura 1.13: Diagonal conmensurable con sus divisiones.

Prueba:

> Sabemos que la diagonal es conmensurable con los lados si éstos son solución a una ecuación diofantina e inconmensurables en caso contrario. Si la diagonal y los lados son inconmensurables, la diagonal puede establecer una proporción con sus divisiones uniformes de acuerdo a la siguiente regla:

$$\frac{\textit{división}}{\textit{diagonal}} = \frac{1}{n}$$

[82] Una ecuación diofantina tiene la siguiente propiedad $x^n + y^n = z^n$, donde x, y, z son números naturales $\neq 0$ y n la potencia. Fermat encontró que no hay solución cuando $n > 2$. A esta propiedad se le conoce como *el último teorema de Fermat* y fue probado hasta 1995. Para una ecuación diofantina cuadrática una solución es 3 y 4 ya que se cumple que $3^2 + 4^2 = 5^2$.

> Donde n es el número de divisiones. Y dado que $\frac{1}{n}$ es conmensurable, entonces las divisiones y la diagonal son conmensurables, siendo una de las divisiones el tercer segmento buscado. *Q.E.D.*

En el caso de los números, la irracionalidad del número permanece en toda operación aritmética. Una vez introducida una expresión irracional, es muy posible que ésta se acarree hasta la solución final.

Otra característica de las inferencias en geometría, es el concepto de lo *dado*. Lo *dado* son diversos elementos en geometría que se consideran que se han establecido con anterioridad, como por ejemplo un segmento de línea. En general se considera que hay tres formas de entender *lo dado* en geometría (Sidoli 2018), sobre todo en los trabajos de Euclides:

- *Dado en magnitud*: Es cuando se ha establecido una figura geométrica con una magnitud. Como ejemplo podemos considerar en los *Elementos* I,I la primera proposición que dice *dado un segmento de recta*, lo que indica que se ha dado a un segmento una magnitud.
- *Dado en posición*: Es cuando se ha establecido una figura geométrica en relación con otra. Ejemplo trazar una línea sobre dos líneas paralelas *dado un ángulo* α (Sidoli 2018, Nota al pie 8).
- *Dado en forma y/o especie*: Cuando se ha establecido algún elemento de una figura geométrica. Ejemplo construir una figura geométrica *dados sus ángulos internos*.

De acuerdo con (Sidoli 2018, Pág. 2) *lo dado* puede aparecer en cualquier parte del problema. Desde mi perspectiva *lo dado* tiene un papel preponderante y cambiante de acuerdo al problema a resolver en geometría. Por ejemplo una vez probada la proposición I,I de Euclides, se puede decir que *se nos ha dado en especie un triángulo equilátero* ya que puede variar la magnitud, pero el resultado es el mismo, un triángulo cuya característica es que sus lados son iguales. Así aun sin tener explícitamente *lo dado*, se puede considerar como *dado* si se tiene los elementos geométricos que lo generan y se ha hecho una construcción y su prueba correspondiente antes[83].

En contraste, una ecuación algebraica se tiene que manipular de diversas formas y su solución puede variar de una ecuación a otra. Si bien se cuenta con métodos generales para las ecuaciones de hasta grado 4, x^4, el resto de las ecuaciones tiene que ser resuelta mediante las leyes generales del álgebra y cada ecuación puede utilizar solo algunas de las leyes del álgebra. Existen ecuaciones que por su complejidad utilizan métodos heurísticos para resolverse. Esto es una gran diferencia con las soluciones propuestas por la geometría, en las cuales independientemente de los elementos dados, una vez resueltos los problemas parece que siempre tienen la misma solución.

[83] Después de la publicación de los trabajos de Pappus, se encontró que hacía referencia a otros autores y suponía que el lector ya conocía otras obras que contenían diversos métodos con los que Pappus realizaba muchos procesos intermedios; varios matemáticos de la época trabajaron en encontrar tanto los supuestos, análisis, de los problemas dados por visto; así como su solución, síntesis. El trabajo más famoso de reconstrucción son *Las cónicas* de Apolonio. Teniendo en cuenta este aspecto, el trabajo de Viète sobre el álgebra cobra más sentido ya que puede estar tratando de reconstruir ciertos aspectos de la *Aritmética* de Diofanto no disponibles para el lector de la época Moderna.

Así, para los matemáticos antiguos calcular la altura de un triángulo dadas las magnitudes de sus lados mediante Aritmética y álgebra es más complicado: por un lado hay más operaciones que realizar; involucra operaciones sobre las cuales el estatus matemático se ha cuestionado, como la raíz cuadrada; y su relación con la altura geométrica no es directa (Bos 2001, Pág. 131).

Algoritmo para calcular la altura de un triángulo dados sus lados:

1. Calcule la semisuma de sus lados: $s = \frac{a+b+c}{2}$
2. Calcule el producto de las restas de la semisuma, por cada uno de los lados y a su vez multiplique el resultado por la semisuma: $s(s-a)(s-b)(s-c)$
3. Calcule la raíz del producto anterior y duplique el resultado: $2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
4. Divida lo anterior entre el tercer lado: $\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}$

Para construir la altura de un triángulo mediante métodos geométricos solo se necesita trazar una perpendicular de uno de los lados al vértice opuesto. La altura es el segmento de recta de la perpendicular del lado al vértice opuesto. En ambos casos solo se necesita utilizar los elementos más básicos y aceptados de la geometría, regla y compás, o círculo y líneas (Bos 2001, Pág. 131).

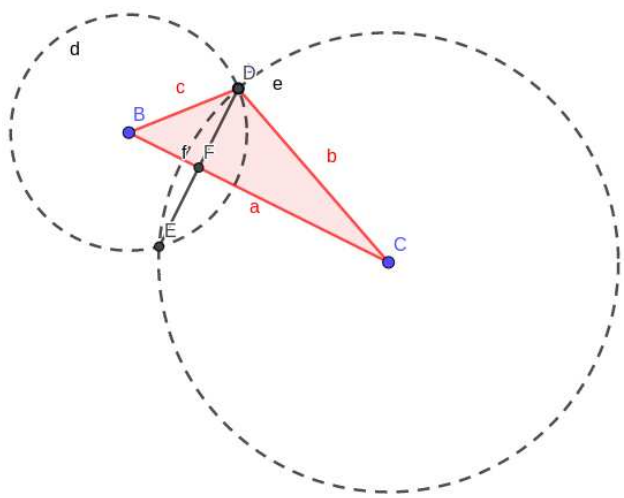


Figura 1.14: La altura de un triángulo.

La solución geométrica parece exacta y más sencilla, se puede decir que *dado el triángulo, se ha dado la altura*; en contraste con la solución aritmético-algebraica, que además introduce un elemento que genera números irracionales. El método algebraico puede considerarse como heurístico, variable e impreciso.

El papel que juega el concepto de lo *dado*, en geometría no parece tener un símil en las manipulaciones algebraicas. Desde la perspectiva de un matemático de aquella época utilizar un método donde solo existen unos cuantos métodos generales de resolución de ecuaciones, no parece la mejor idea, más aun cuando existen procedimientos equivalentes que cuentan con la *exactitud* de los procedimientos de *Los Elementos* ya que se producen mediante el círculo y la línea. Y si no se pueden producir de esta manera, algunas veces podemos probar su validez mediante la línea y el círculo.

En dado caso de que aún no se pudiera probar mediante el círculo y la línea, y se tuviera que recurrir ya sea al neusis o a las cónicas; se puede argumentar que la magnitud producida por los procedimientos geométricos es más exacta que los procedimientos algebraicos; ya que con la magnitud producida por el procedimiento geométrico siempre se pueden establecer relaciones de conmensurabilidad con otros elementos del procedimiento geométrico.

En cambio los procedimientos algebraicos introducen elementos que se consideran inexactos, ya que no se puede establecer una relación de proporción entre ellos. Aún cuando conservemos el valor de un irracional, manteniendo las raíces de una ecuación como $\sqrt{43(6689/10000)} + (33/100)$ fiorinis (Heeffer 2017) el matemático argumentará que dicho valor no es exacto porque no puede representarse como una proporción mediante la línea y el círculo.

Una de las dificultades de adoptar al álgebra como un método matemático es la propia naturaleza del número, como se conocía en aquella época. Para los matemáticos y estudiosos de la época, los números servían para contar y estaban asociados a la noción de multitud[(84)]. A los números se les consideraba como elementos discretos, que presentaban saltos entre un elemento y el que sigue, aun cuando las fracciones también eran consideradas números(Bos 2001, Pág. 120)[(85)].

Esto contrasta ampliamente con nuestra visión actual de considerar a un número y a la magnitud como iguales, una forma de ver a los números y las magnitudes como iguales es expresarlos mediante las rectas numéricas, que permiten asignar valores a magnitudes arbitrarias, todavía falta el trabajo de Descartes para que los ejes coordenados modernos formen parte de la matemática y con ella la representación de los valores negativos en una ecuación. Sin un eje en donde expresar los conceptos algebraicos de negativo y el cero en magnitudes, no parece directa la asociación entre magnitud y número. ¿Cómo se puede expresar el faltante de una cosa utilizando magnitudes, que por definición son positivas?

Resumiendo, se puede decir que la aceptación del álgebra en las matemáticas era cuestionada por las razones que se exponen a continuación:

[84] La multitud nos sirve para contar los elementos de un conjunto de cosas que queramos contar. La forma más sencilla de contar es determinar si un conjunto es más grande, igual o menor a otro. Si los elementos de un primer conjunto se toman uno a uno y se acaban los elementos del segundo antes del primero, el primero es mayor al segundo; si se acaban al mismo tiempo son iguales; y si se acaban primero los del primer conjunto, ese conjunto es menor al otro.

[85] Una forma de entender por qué a los números se les consideraba discretos aun cuando las fracciones formaban parte de los números, es pensar que no se podía expresar con números los irracionales como $\sqrt{2}$, pero en geometría al menos se podían *construir o expresar*. Una forma de definir a los irracionales es como *los hoyos entre dos racionales*, pero todavía estaba en discusión si los irracionales debían aceptarse como números y cuál era su relación con los números enteros y racionales.

- El álgebra se consideraba como un estudio fuera de la matemática ya que principalmente se aplicaba al comercio. Adicionalmente por algún tiempo el comercio fue considerado propio de los *siervos*, y por lo tanto dicho conocimiento estaba fuera de la ciencia.
- El resultado de las operaciones geométricas con magnitudes, muchas veces significaba cambiar de dimensión, de la línea al plano y del plano al espacio. Los resultados de una operación aritmética y/o algebraica parecen permanecer en un mismo nivel, $6 * 8 = 48$.
- Si bien se podía usar álgebra para ciertas partes de una investigación matemática, como en el análisis; esto no significaba que formara parte de una prueba matemática. Para la síntesis se podía usar otro camino que evitara el álgebra.
- La naturaleza aparentemente diferente entre la concepción de número y magnitud. Para aquella época los números eran elementos discretos que no podían expresar todos los valores posibles de una magnitud. Aun cuando los radicales y las raíces se trabajaron desde el libro de Al-Juarismi, todavía se seguía discutiendo si se podían entender estos elementos como números. Las diagonales y otros elementos inconmensurables no tenían correlato con los números, aun cuando ya se estaba formando el concepto de irracional[(86)].
- Se desconocía que el álgebra pudiera expresar figuras geométricas, tales como la línea $y = mx + b$.
- Se consideraba a la geometría como una ciencia exacta y sintética; en contra de la aritmética y álgebra que parecían ser heurísticas e imprecisas, ya que no podían expresar la inconmensurabilidad, o al menos no se había aceptado como número a los irracionales.

Es el conjunto de los puntos anteriores lo que no permitía considerar al álgebra como una práctica aceptada en la matemática y su uso se limitaba a ciertas fases de la investigación matemática como el análisis.

1.4.5. Impacto del trabajo de Descartes

El trabajo de Descartes, si bien no fue el primero ni el único que relacionó el álgebra con la geometría euclidiana y la resolución de los problemas de Pappus, si fue el primero en establecer una relación directa entre estas dos disciplinas y permitió considerar al álgebra como una disciplina matemática por derecho propio. Esto se debe a que Descartes sí crea un método general de resolución de ecuaciones, e incluso cuenta con algunos métodos para resolver algunas ecuaciones de grado 6. Su álgebra permite analizar los problemas de Pappus y el sistema cartesiano algebraico permite reducir una ecuación dada a su mínima expresión, que

[86] Si bien ya se conocía la prueba de la *irracionalidad de* $\sqrt{2}$, esto no necesariamente se refiere a un número, sino a la capacidad de encontrar un submúltiplo común con la unidad. La prueba puede referirse a la *inconmensurabilidad* de $\sqrt{2}$, que para esa época no necesariamente significaba lo mismo que irracionalidad, ya que inconmensurabilidad se asociaba a magnitudes e irracionalidad a números y la asociación número-magnitud era la excepción en esa época (Bos 2001, Pág. 120).

es obtener el grado mínimo de una ecuación cualquiera (Bos 2001, Cap. 20 §3 y Cap. 21) (Alten *et al.* 2013, Cap. 5 §2.2).

A partir del trabajo cartesiano los pensadores de la época verán en el álgebra una aplicación del pensamiento que no requiere a la experiencia sensible para trabajar y poco a poco se irá considerando superior a los métodos geométricos, ya que estos al depender en varias ocasiones del sentido de la vista, creerán que pueden ser objeto de errores propios de la percepción. Berkeley y Hume considerarán que las leyes del álgebra son de alguna manera superiores a los métodos geométricos.

Berkeley dirá que los geómetras realizan la mismas operaciones que los algebristas, ya que para el filósofo irlandés, cuando un geómetra está razonando sobre una figura geométrica, no habla sobre la que está en el diagrama propiamente dicho, ya que éste no tiene las propiedades de la geometría euclidiana, sino a las constricciones propias de sus elementos. El geómetra no atiende a dichas constricciones del diagrama, sino a las reglas de la geometría para derivar un teorema sobre dicho diagrama (*PHK* Introduction §12-16). Para Berkeley una línea al ser desprovista de su *particularidad* y utilizarse de manera *general*, se convierte en un signo:

> 12 [. . .] Para hacer esto sencillo por ejemplo, suponga a un geómetra que está demostrando el método, de cortar una línea en dos partes iguales. Él dibuja, por ejemplo, una linea negra de una pulgada de longitud, lo cual en sí mismo es una línea particular, lo cual es, sin embargo, de un significado general, dado que así es usada ahí, ella [la línea] representa cualquiera de todas las líneas particulares; por ello lo que se demuestra para ella, es demostrado de todas las líneas, o en otras palabras, una línea en general. Y como esa línea particular se convierte en general, siendo hecha un signo, entonces el nombre *línea* que es tomado absolutamente es particular, por hacerse un signo es hecho general. [. . .][(87)]. (*PHK* Introduction §12)

Berkeley además considera que la aritmética es el estudio de los signos (*PHK* Part I §122). Dados estos argumentos podemos considerar que Berkeley no ve diferencia entre un *signo geométrico*, representado por una línea y *signo aritmético-algebraico* representado por letras[(88)] y números. En resumen, Berkeley niega que haya alguna superioridad por parte de la geometría, al menos fehaciente, sobre el álgebra.

Hume, otro filósofo empirista escocés, va un poco más allá, considera que el álgebra es superior a la geometría, porque la geometría se debe atener a las apariencias, es decir para Hume nos debe ser aparente, al sentido de la vista, la conclusión de un teorema para que éste sea válido y dado que las apariencias nunca nos pueden aportar seguridad, la geometría entonces también tiene esa debilidad. Para el filósofo:

> [. . .] el álgebra y la aritmética son las únicas ciencias en las que podemos llevar a cabo una cadena de razonamiento en cualquier grado de complejidad o dificultad, y aun así preservar la exactitud y certeza perfectas [. . .] (*Treatise* §I §§III §§§I)

La publicación de *La Géométrie* supone un cambio en varios aspectos de la práctica matemática. Desde mi perspectiva, este trabajo hace que el álgebra logre lo siguiente:

[87]Cita original *"12 [. . .] To make this plain by an example, suppose a geometrician is demonstrating the method, of cutting a line in two equal parts. He draws, for instance, a black line of an inch in length, this which in it self is a particular line is nevertheless with regard to its signification general, since as it is there used, it represents all particular lines whatsoever; for that what is demonstrated of it, is demonstrated of all lines or, in 10 other words, of a line in general. And as that particular line becomes general, by being made a sign, so the name line which taken absolutely is particular, by being a sign is made general. [. . .]"* En la traducción se trató de respetar la redacción original del autor.

[88]Específicamente Berkeley habla del álgebra y su uso de letras para marcar cantidades en (*PHK* Introduction §19).

- Que el álgebra tenga una notación común para su desarrollo. Si bien todavía falta el desarrollo de los signos de agrupación, (), y utiliza un signo de igualdad diferente ∞, a partir de su libro, los símbolos como $+, -$ serán ampliamente aceptados. También se considerará a las últimas letras del alfabeto como variables y a las primeras como constantes. La multiplicación se indicara juntando símbolos $xy = x * y$ y la división se representará con la barra de cociente —. Los exponentes ahora se indicarán con un superíndice numérico x^2. También utiliza el símbolo de raíz o radical que utilizamos actualmente $\sqrt{}$. Casi todas las notaciones cartesianas han sobrevivido hasta la actualidad cuando se estudia el álgebra que es extensión de la Aritmética.

- Utilizar el principio aditivo de Diofanto para las potencias. Como se ha comentado anteriormente, los antiguos algebristas indicaban las potencias con nombres, sin embargo esto dificulta entender cómo funcionan los exponentes. Con el principio aditivo enseñar a multiplicar potencias es mucho más fácil. Los matemáticos pueden simplemente seguir usando las leyes de la Aritmética que ya se conocen. El principio aditivo de Diofanto se aplica de la siguiente forma: Multiplique x^2 por x^3. Solución $x^2 * x^3 = x^{2+3} = x^5$. Prueba: sabemos que $x^2 = xx$ y $x^3 = xxx$, al aplicar la operación multiplicación se tiene que $xx * xxx = xxxxx = x^5$, entonces $x^2 * x^3 = x^5$. En el caso de la división es más claro que $\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$ ya que $\frac{xxxxx}{xx}$, al eliminar los términos comunes, que son dos, nos queda $xxx = x^3$.

- Asociar las cónicas con ecuaciones cuadráticas, lo cual las introdujo plenamente a ambas a la práctica matemática. Si bien ya se habló de este tema en secciones anteriores, el punto aquí es que dada la ecuación de una cónica se puede construir independientemente de sus medios de construcción y/o trazado. Además se puede dar un valor arbitrariamente preciso de un número y la ecuación dará de vuelta otro número asociado a la cónica[(89)]. Después del trabajo cartesiano las ecuaciones aseguran que para cada valor de una de las variables de la cónica existe otro asociado que satisface la ecuación correspondiente, siempre y cuando se respete el dominio de una de las variables y se ponga a la otra variable en relación con la anterior. Así, una cónica es el resultado de asociar una ecuación con una figura geométrica, pero que no precisa de ningún instrumento para ser manejada, por lo que deja de ser contingente.

- Mostrar que los métodos algebraicos forman parte de las pruebas matemáticas y no solo son una herramienta del análisis.

- Establece la teoría de ecuaciones como un campo de estudio matemático.

- Pone a disposición de los matemáticos herramientas que les permitirán crear los siguientes desarrollos matemáticos: la geometría analítica, el cálculo y el análisis matemático clásico.

[89] La idea original de que un elemento matemático se acepta por una precisión arbitraria se desarrolló en la disertación doctoral del Dr. Fuentes Guillén, el cual expone la tesis de que el concepto de límite tomó su forma contemporánea al renunciar a su fundamento geométrico y optar por una formulación basada en la precisión arbitraria (Fuentes Gullén 2017). Considero que lo mismo se aplica para el caso de las cónicas. El debate que hubo a principios del siglo XIX en torno a los infinitesimales, que se verán a continuación, derivó en formulaciones de tales elementos alternas a la habitual y el abandono de las características geométricas sintéticas. Dentro de los matemáticos que estudiaron los infinitesimales de la época Moderna están Bolzano, Cauchy entre otros.

1.5. Los indivisibles.

El concepto de infinitesimal y/o indivisible[(90)], se refiere a la medida o cantidad infinitamente pequeña pero diferente de cero. En otras palabras dado un elemento con magnitud, al añadirle un infinitesimal, lo que se obtiene es la magnitud original, pero los valores de los sumandos ambos difieren de cero.

Ejemplo: Sean a y b dos sumandos, se dice que b es infinitesimal si $c = a + b, c \neq 0, c = a$ y $a, b \neq 0$.

De acuerdo con (Jullien 2015b, Pág. 4), existen dos tipos de indivisibles: a) heterogéneos, son aquellos que son menores a cualquier unidad de medición o métrica posible; y los b) homogéneos, aquellos que su unidad de métrica o medición es la menor posible del elemento a ser medido. Sin embargo, si bien se puede identificar definiciones de infinitesimales y/o indivisibles homogéneos y heterogéneos en diversos autores, los mismos parecen hacer uso de ambos conceptos indistintamente a lo largo de sus diversos trabajos e incluso en el mismo trabajo. Además de la clasificación como homogéneo/heterogéneo de los infinitesimales/indivisibles, la cantidad de ellos también se discutía, los infinitesimales/indivisibles son muy grandes, humanamente, pero finitos, o son infinitos.

El concepto de infinitesimal y/o indivisible ya se estudiaba por parte de los filósofos griegos, en especial Aristóteles y Demócrito. Para la filosofía aristotélica, la materia, el tiempo y el espacio son continuos, por lo que no pueden estar conformados por infinitesimales y/o indivisibles[(91)]. Para algunos filósofos árabes que tenían puntos en común con Demócrito, el espacio, el tiempo y las figuras geométricas están compuestas por una cantidad finita o infinita de átomos, representables como puntos geométricos y el movimiento se da por saltos de un átomo espacial, o indivisible espacial, a otro en un instante indivisible de tiempo. Cada uno de estos saltos eran discontinuos, es decir el objeto se paraba entre salto y salto (Celeyrette 2015, Pág. 19 y 20).

El uso de los indivisibles supone un problema para la geometría euclidiana, ya que ésta sigue el llamado *Axioma de Arquímedes*[(92)] el cual se puede formular de diversas formas, pero cuyo resultado es el mismo, prohíbe los infinitesimales y/o indivisibles, así como los elementos extremadamente grandes o infinitos. En una de sus formulaciones, dice que el resultado de una suma y/o el producto de dos magnitudes diferentes de cero, puede ser más grande que las magnitudes originales y siempre es más grande que cero. Dada la definición del infinitesimal y/o indivisible, puede ser que el producto o la suma de una cantidad indivisible con otra, sea igual o menor a las magnitudes originalmente dadas o cero[(93)].

Existen al menos dos problemas con los infinitesimales. El primero, precisamente, es no cumplir con el axioma de Arquímedes. El segundo es la cantidad o momento en que se alcanza la división que convierte

[90]Puede ser que para algunos matemáticos e historiadores no necesariamente signifique lo mismo.
[91]Pero esto no significa negar su existencia.
[92]Que no es de Arquímedes, si no de Eudoxo de Cnido.
[93]Dependiendo de la definición que usemos en nuestro infinitesimal y/o indivisible, puede ser que el producto de dos infinitesimales sea cero: Sea a, b dos infinitesimales, que tienen la propiedad $a, b \neq 0$, el resultado del producto $a * b$ es 0, que es menor a un infinitesimal.

una magnitud en infinitesimal. Se requiere una cantidad infinita para convertir una magnitud en un indivisible/infinitesimal. Pero el infinito no es algo que pueda abordarse fácilmente, este puede crear paradojas como la paradoja de Galileo. Dicha paradoja consiste en asociar cada uno de los números naturales con los números pares. Cuando el conjunto es finito habrá menos números pares que números naturales. Cuando el conjunto es infinito habrá la misma cantidad de números naturales que números pares. Dada esta paradoja los infinitesimales eran cuestionados.

Se puede ejemplificar la propiedad de Arquímedes realizando un rectángulo de una fracción de un segmento dado, independientemente de la longitud del segmento dado, el rectángulo puede ser muy pequeño, pero $\neq 0$.

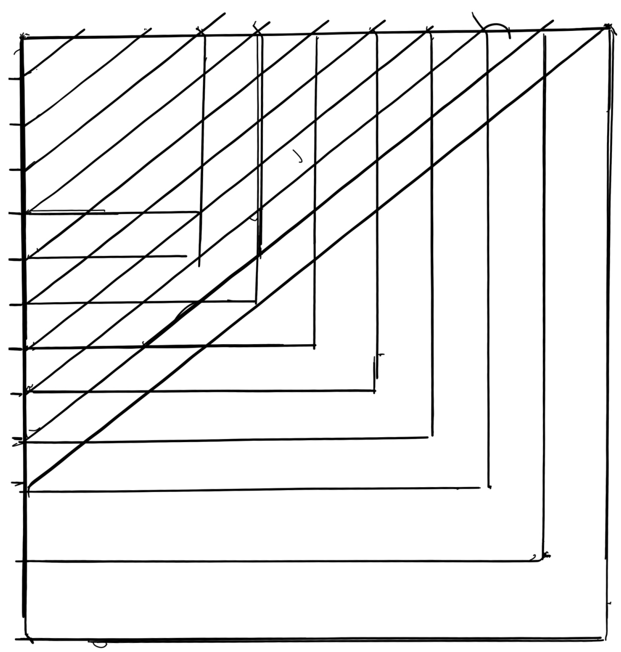


Figura 1.15: Submúltiplos.

El axioma de Arquímedes impide que las divisiones se vuelvan cero, por más pequeña que sea la división de un área geométrica siempre es posible dividir dicha figura una vez más, al menos teóricamente. El concepto de infinitesimal viene de la suposición de alcanzar en algún momento o con algún procedimiento una longitud en la que ya no sea posible seguir dividiendo una figura geométrica y/o magnitud. Una de las consecuencias de ya no poder dividir una figura o magnitud es que no se pueda cuadrar[(94)] dicha figura o magnitud.

Los detractores de los indivisibles/infinitesimales, utilizaron la geometría y el movimiento para indicar los problemas que veían en ellos. Uno de los argumentos más utilizados es el de dos círculos infinitesi-

[94]Por cuadrar en geometría euclidiana se entiende encontrar un cuadrado con un área equivalente al área de la figura original. Cuando se cuadra una línea es encontrar el cuadrado dado un segmento de recta. ¿Asociar el nombre de cuadrado a la multiplicación de un número consigo mismo viene de cuadrar una línea?

males/indivisibles concéntricos de diferente tamaño, unidos por una línea que va desde un extremo de la circunferencia mayor al centro de los círculos. La línea toca únicamente un infinitesimal en cada circunferencia. Al aplicar movimiento a la línea surgen las siguientes preguntas: ¿se mueven a la misma velocidad?, ¿son sus continuos del mismo tamaño?, ¿se pasa por todos los infinitesimales/indivisibles en ambas circunferencias?, entre otras preguntas. Las respuestas dependen de la forma de definir los indivisibles/infinitesimales, sin embargo no todas las versiones son capaces de responder a todas las preguntas satisfactoriamente.

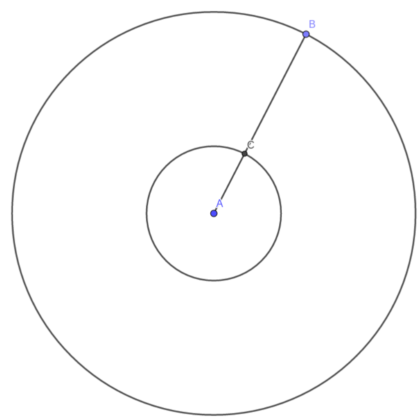


Figura 1.16: Rueda de Al-Ghazâlî.

Por ejemplo, si respondemos, tal vez por obviedad, que el continuo de la circunferencia más grande es mayor, ¿cómo es posible que la línea recorra todos los infinitesimales de ambas circunferencias? Considerando la opción de decir que el continuo en ambas circunferencias es el mismo, ¿cómo es posible tener dos circunferencias de distintos tamaños con continuos iguales?, ¿se puede considerar que los infinitesimales de ambas circunferencias cambian de tamaño?

Los indivisibles/infinitesimales llegaron a la filosofía europea cerca del renacimiento con las discusiones entre Henry of Harclay, Walter Chaton (quienes defienden los infinitesimales/indivisibles, pero sus versiones difieren una de otra) y William of Ockham, quien considera que los infinitesimales no existen en el continuo potencial y/o actual. Ellos discutieron la posibilidad de los infinitesimales/indivisibles y su naturaleza, ya sea finita o infinita, o si los indivisibles son posibles en el mundo físico y sus dificultades (Celeyrette 2015). Para Harclay, la posibilidad de la existencia de los indivisibles/infinitesimales se da de la misma manera que la posibilidad de la intervención divina en el mundo físico. Actualmente consideramos que la intervención divina es milagrosa e ilimitada, pero en la filosofía de aquella época se considera que la intervención divina está limitada al *primer principio*. Básicamente *el primer principio* nos indica que Dios no puede contradecirse [a sí mismo]. Dios no puede darle propiedades contradictorias a un objeto, o crear propiedades contradictorias (Celeyrette 2015, Pág. 23)[(95)].

[95]Esto no significa que un objeto no pueda tener propiedades contrarias entre sí. Un ejemplo es la propiedad del frío o el calor, un objeto está frío o caliente, lo que el *primer principio* nos dice es que el objeto no puede tener la propiedad frío-caliente o que este frío y caliente al mismo tiempo. La doctrina del *primer principio* es compatible con la *omnipotencia* de Dios.

Para justificar el uso de los infinitesimales/indivisibles, los autores de la época deben superar tres dificultades:

1. Mostrar que las objeciones hechas por la filosofía aristotélica están mal formuladas, o se aplican a otros objetos y no a los infinitesimales/indivisibles.

2. Hacer compatibles los infinitesimales/indivisibles con la geometría euclidiana, o mostrar que la geometría euclidiana puede seguirse aun sin la propiedad de Arquímedes.

3. En caso de justificar a los infinitesimales/indivisibles en el espacio/tiempo físico, y que es producto de la intervención divina, mostrar que son compatibles con el *primer principio* de Dios.

Harclay abordó alguna de estas cuestiones, sin embargo sus detractores como Ockham y otros consideraron que no había superado estas dificultades, por lo que los infinitesimales/indivisibles casi no se estudiaron después de que la visión de Ockham sobre los tratados aristotélicos se difundiera en Europa (Celeyrette 2015, Pág. 30).

1.5.1. Los infinitesimales/indivisibles de Cavalieri

Si bien el concepto de infinitesimal/indivisible ya se conocía en Europa, el uso por parte de los matemáticos comienza con Cavalieri. Cavalieri fue un matemático italiano radicado en Boloña cerca de 1598, el cual implementó los infinitesimales/indivisibles en las matemáticas. El trabajo de Cavalieri le permitió calcular los cubos de las secciones cónicas; así como los volúmenes de las mismas, como los paraboloides (Andersen, Giusti y Jullien 2015, Pág. 32). También le permitió comparar dos volúmenes, aun cuando estos no son regulares (Andersen, Giusti y Jullien 2015, Pág. 32).

Los infinitesimales ya se habían trabajado por los matemáticos griegos en especial por Arquímedes y su trabajo en el método de *compresión*[(96)]. La principal aportación de Cavalieri, fue convertir la prueba infinitesimal/indivisibles de una prueba indirecta en una prueba directa.

El método de *compresión* por parte de Arquímedes consistía de los siguientes pasos:

1. El método de *compresión*, propiamente dicho: Como se ha mencionado anteriormente, consiste en inscribir y circunscribir polígonos regulares alrededor de un objeto geométrico a determinar. En el caso de Arquímedes los valores de π y el área del círculo.

[96]Entendido *à la* Robles, el cual dice que el método *comprime* a la figura de la cual buscamos calcular el área entre dos áreas ya conocidas.

2. La prueba de reducción al absurdo para probar la igualdad de una propiedad: Dado que el paso anterior sólo establece una desigualdad, se necesita probar que el valor o propiedad obtenida anteriormente conduce a una igualdad.

Una de las desventajas de este método es que la prueba es indirecta, por la reducción al absurdo; además de que la complejidad de los cálculos se incrementa, cada nuevo polígono tiene más lados que el anterior. El método debe ser hecho de esta forma, sin el cálculo de los polígonos, es imposible saber las propiedades que buscamos; sin la prueba al absurdo, no se tiene la seguridad que la propiedad que obtuvimos sea el caso para el resto de las figuras geométricas del mismo tipo.

El método de Cavalieri también consiste en comparar dos continuos, mediante la comparación de sus indivisibles (Andersen, Giusti y Jullien 2015, Pág. 34). Dependiendo de la dimensión será el indivisible a comparar, en el caso de las figuras planas, se utilizan *todas las líneas*; y en el caso de los sólidos se comparan *todos los planos* (Andersen, Giusti y Jullien 2015, Pág. 34,35). Para establecer la igualdad Cavalieri utiliza el método de los *algebristas*, calculando una parte de un problema y suponiendo después el valor del resto del problema (Andersen, Giusti y Jullien 2015, Pág. 38)[(97)].

Si bien el método de Cavalieri también consiste en dos partes, primero establecer *todas las líneas* o *todos los planos*, y después el cálculo de *los algebristas*; se vuelve más sencillo trabajar con los indivisibles/infinitesimales. En primer lugar Cavalieri muestra que no es necesario utilizar diferentes figuras geométricas para determinar una propiedad matemática puede utilizarse la misma, esto permite que el cálculo de la propiedad buscada sea mucho más sencillo. También utiliza técnicas algebraicas para determinar la igualdad buscada, lo que convierte a este método en una prueba directa, en vez de una prueba indirecta por reducción al absurdo.

A partir del siglo XVII el método de Cavalieri pasa a ser parte importante de la práctica matemática y fue utilizado en el inicio del cálculo como disciplina matemática, tanto por Newton como por Leibniz (Muntersbjorn 2003) (Andersen, Giusti y Jullien 2015).

1.6. La *Ilustración inglesa* y la teología

Al recuperarse los escritos de Newton en siglo XX, se observó que Newton trabajó principalmente en Teología, alquimia entre otros estudios considerados actualmente como no-científicos (Keynes 1956). El estudio de la Teología como justificación del mundo físico fue una corriente filosófica estudiada en la Inglaterra de la Ilustración.

Cuando se piensa en el época de la Ilustración generalmente se asocia con una división entre los pensadores

[97]Dependiendo del historiador será la interpretación matemática contemporánea del trabajo de Cavalieri, puede ser una integral, $\int$, un límite, lím, entre otras formas de notación moderna, $\sum$, lím $\sum$, . . . (Muntersbjorn 2003, Pág. 168).

y el poder eclesiástico. Así surge una imagen de que la filosofía y posteriormente la ciencia se distancian y en algunos casos son opuestas al pensamiento religioso. Sin embargo, esto solo es así para ciertas regiones de Europa, particularmente en Francia (Gascoigne 2002, Introduction).

En la Inglaterra anglicana, la vida intelectual de los pensadores ingleses y escoceses formaba parte de un estado clerical que defendía una filosofía y ciencia ligadas a la religión y la fe, especialmente la fe anglicana (Gascoigne 2002, Introduction). Se puede considerar que de hecho la filosofía, y con ello la metafísica, y la ciencia están al servicio de la teología practicada en Inglaterra en los siglos xvii, xviii y parte del siglo xix.

Uno de los centros más importantes de la unión de la teología con el pensamiento de la Ilustración inglesa fue Cambridge, que vio surgir a los llamados *platonistas de Cambridge* (Hutton 2013), algunos de los cuales se les llamo *hombres latitudinales*[(98)]. El latitudiniarismo se considera aquella actitud teológica que trata de minimizar el dogma y la doctrina cristiano-católica haciendo énfasis en la *teología naturalizada o natural*[(99)] (Henry 2016, §4) (Gascoigne 2002, Pág. 27).

Es decir que en el contexto de la Inglaterra moderna, una parte de la investigación experimental nunca estuvo destinada a ver el mundo como un mecanismo en el cual Dios se deja de lado, sobre todo aquella que se apegaba al pensamiento de los platonistas de Cambridge. Más bien la intención de los pensadores de la época fue mostrar los límites del mecanicismo. Fuera de estos límites se podía encontrar a Dios como sustento del mundo y el conocimiento. Dios es el garante tanto de nuestro conocimiento como del mundo.

Muchos pensadores considerados platonistas de Cambridge y/o latitudinarios se opondrán al sistema cartesiano de ciencia. Este rechazo se da principalmente porque el sistema cartesiano puede ser explicado sin la necesidad de Dios. Si bien Dios es necesario para crear al mundo y ponerlo en movimiento, después de este momento puede desaparecer sin afectar al mundo o la forma en que lo conocemos. Como analogía al sistema cartesiano, pensemos en un reloj, en el cual sigue funcionando su mecanismo una vez su creador ha puesto en marcha dicho mecanismo. La postura cartesiana en la cual es posible prescindir de Dios es completamente opuesta a la postura de los platonistas, como de los hombres latitudinales, en la cual si bien el mundo puede ser explicado de manera mecánica, el filósofo y el filósofo natural no pueden prescindir de Dios pues es el sustento de incluso las condiciones de posibilidad de la existencia del mundo, como lo son el tiempo y el espacio (Gascoigne 2002, Introduction y Cap. 3) (Henry 2016, §3,§4,§6).

> . . . Como ejemplo, cuando yo considero la distancia del Sol [a la Tierra], yo no concibo que su calor no se ha puesto tan bajo como la Luna, o tan alto como las Estrellas fijas, [este] era un gran argumento de Providencia, porque puede responderse, que es necesario que él [el Sol] debe estar entre esas dos distancias, de lo contrario la Tierra no sería habitable, y entonces la humanidad podría haber esperado a un ser, hasta que la agitación de la materia haya forjado cosas en una más tolerable aptitud o postura para su producción [de la humanidad].

[98] En inglés latitude-men. Curioso nombre para un grupo que incluye una mujer como filósofa.

[99] Cuando en filosofía se utiliza la palabra natural o naturalismo, se refiere a investigar experimentalmente un campo de estudio. Así una teología naturalizada se refiere al hecho de establecer las propiedades de Dios mediante la investigación experimental del mundo, o estudiando simplemente *la naturaleza* (Henry 2016, §2).

> El Movimiento anual del Sol, o más bien la Tierra, no es simplemente cualquier argumento de la Divina Providencia, pero es necesario como una pieza de madera siendo llevada por la corriente, o como pedazos alrededor del remolino. Pero las Leyes de su Movimiento son tales que ellas muy manifiestamente nos convencen de una Providencia;[(100)] [. . .] (More 1662, Pág. 5)

La preocupación de estos grupos por la metodología cartesiana de la ciencia, que conocían ampliamente, es que a partir del sistema cartesiano, los ateos podían tener un sistema que explicara al mundo, sin la intervención divina (Henry 2016, §2, §6). Henry More considerado dentro de la tradición platonista de Cambridge y latitudinario, será uno de los primeros entusiastas del sistema cartesiano (Henry 2016, §2) (Gascoigne 2002, Pág. 52). Su estudio del cartesianismo desatará un amplio debate sobre el papel del mecanicismo y la *Filosofía Natural*; y el papel que juega la concepción cartesiana en la teología protestante de Inglaterra y más específicamente, en la *teología naturalizada* estudiada por estos pensadores de la isla británica (Gascoigne 2002, Cap. 3).

Se puede considerar que la forma de trabajar de Newton es el pináculo de la *teología naturalizada* practicada en las tierras inglesas. En el siguiente capítulo se desarrollará el papel de Dios en el sistema newtoniano y el recurso de la *teología naturalizada newtoniana* en el desarrollo de la matemática y la física de Newton.

1.7. Conclusiones

En este capítulo se estudió el momento histórico previo al desarrollo del cálculo de Newton. De este periodo podemos concluir:

(a) La geometría euclidiana es considerada la práctica matemática por excelencia y tendrá este estatus hasta tiempo después de la publicación de *La Géométrie*.

(b) El álgebra se convierte en un área de estudio de la matemática después de la publicación de *La Géométrie*, sin embargo para algunos matemáticos sigue siendo una herramienta para la geometría.

(c) La principal herramienta de investigación de los matemáticos es la técnica del *Análisis-Síntesis*. El análisis permite obtener los supuestos necesarios para resolver un problema; y la síntesis es la aplicación de dichos principios para resolver un problema.

(d) Se desarrolla ampliamente el análisis. Para la época Moderna se conocen el análisis de Pappus; el análisis Diofantino y Viète crea una serie de técnicas algebraicas que se pueden considerar como un

[100] Incluyo cita original: "As for example, When I consider'd the distance of the Sun, I did not conceive that his not being plac'd so low as the Moon, or so high as the fixed Stars, was any great argument of Providence, because it might be reply'd, that it was necessary it should be betwixt those two distances, else the Earth had not been habitable, and so mankinde might have waited for a Being, till the agitation of the Matter had wrought things into a more tolerable fitness or posture for their production. Nor simply is the annual Motion of the Sun, or rather of the Earth, any argument of Divine Providence, but as necessary as a piece of wood's being carried down the stream, or straws about a whirl-pool. But the Laws of her Motion are such that they very manifestly convince us of a Providence; [. . .]"

análisis de Viète. Posteriormente Descartes dará inicio a lo que se conocerá como análisis matemático clásico.

(e) Los infinitesimales se retomaran en la época Moderna, primero por la filosofía y después por los matemáticos, siendo uno de los antecedentes del cálculo de Newton y Leibniz.

(f) En Inglaterra es común asociar la Teología con la experiencia fenoménica del mundo. Muchos pensadores propondrán estudiar tanto la Teología como la *Filosofía Natural* desde una *Teología naturalizada*.

Capítulo 2

La crítica de Berkeley al cálculo de Newton

Hay veces que hacer matemáticas es hacer filosofía.

Luis Ramírez Flores *in memoriam*

2.1. Introducción

Una vez establecidos los antecedentes anteriores, se puede realizar el estudio de la crítica de Berkeley al cálculo de Newton. Se verán algunos aspectos relevantes del sistema newtoniano. En primer lugar se busca entender el papel de Dios en el sistema newtoniano. Después se estudiarán y discutirán los elementos principales, o al menos de los que sustentarán al trabajo en el cálculo de Newton. Para esta sección utilizaré los textos de *Gravitatione* (Newton circa 1684), *Quadrature* (Newton 1710) y *Principia* (Newton 1687). Finalmente haré una breve introducción a la filosofía de Berkeley, para después desarrollar las críticas vertidas en el texto *The Analyst*. Para la sección 2.3 utilizaré las traducción del Dr. Robles *The Analyst* (Berkeley 1734), *TV* (Berkeley 1707), *PHK* (Berkeley 1710) y los libros antes mencionados. De manera tangencial utilizaré el libro de Hume *Teatrise* (Hume 2015).

2.2. Newton

Newton sin duda es uno de los pensadores más influyentes en el desarrollo de la física desde la época moderna hasta principios del siglo xx. Su forma de investigación empírica ha sido mostrada por los historiadores, divulgadores y filósofos de la ciencia como un adelanto al retrógrado sistema aristotélico de ciencia. Esto se puede ver reflejado en el mito de que Newton eliminó a Dios de la cosmología mecanicista (Davis 2009).

A partir de este pensamiento, las críticas hechas a los sistemas desarrollados por Newton se desecharon rápidamente, hasta el punto en que hoy dichas críticas son prácticamente desconocidas. Sin embargo, hay distintas evidencias de que la forma descrita de trabajar de Newton en realidad es una reconstrucción. Los filósofos franceses del siglo xviii crearon su propia visión de Newton (Davis 2009, Pág. 121). También está la incorporación al continente europeo de los trabajos de Newton, donde se concentraron en los trabajos matemáticos eliminando su metafísica (Maronne y Panza 2014).

Es a partir de la recuperación de los manuscritos newtonianos por parte de Keynes[(101)], que dicha reconstrucción se comienza a cuestionar. Y es que, si una profesión se midiera a partir de las horas dedicadas a un tema o proyecto; entonces Newton es un teólogo/alquimista[(102)]. Para Newton el estudio de la ciencias físicas y matemáticas ocupaba un papel importante en el entendimiento de la naturaleza y por lo tanto de Dios mismo, pero esta verdad está ligada a la naturaleza física del espacio. Para entender la naturaleza divina, se debe recurrir a otro tipo de saberes, como la teología y/o la alquimia [(103)] Este interés por la teología/alquimia ha hecho que a Newton se le catalogue como *el último de los magos*[(104)] (Keynes 1956).

En esta sección se intentará estudiar y argumentar en contra de la interpretación más común, y en algunos casos considerada canónica, de la metodología newtoniana. El problema con esta interpretación es que no toma en cuenta la forma de trabajar de la época ni al propio Newton. Después de que se sitúe la forma de trabajo de Newton, podremos evaluar de mejor manera las críticas de Berkeley y su razón de ser.

2.2.1. Los elementos metafísicos en el trabajo de Newton y su interpretación por los filósofos

La física y matemática actual son producto de los trabajos realizados en la época Moderna. Esto ha hecho suponer a diversos divulgadores, historiadores y filósofos de la ciencia que se puede analizar cualquier periodo histórico científico con los cánones actuales de científicidad. Determinados a encajar dichos cánones, suelen obviar el papel de distintos elementos metafísicos presentes en la práctica matemática y de la *Filosofía*

[101] John Maynard Keynes el famoso economista. Para conocer las impresiones de Keynes sobre los escritos recuperados *cf.* (Keynes 1956).
[102] Se cálcula que Newton paso 24 años investigando la alquimia (Marquina 2006, Pág. 100 y 101).
[103] Para un estudio extensivo de estas relaciones *cf.* (Marquina 2006) en especial el capítulo iii.
[104] En el sentido esotérico de la palabra.

Natural presentes en la modernidad. Uno de estos elementos es Dios como garante del conocimiento y el universo.

La interpretación actual de los diversos historiadores, divulgadores y filósofos de la ciencia es que a falta de una palabra mejor, los diversos pensadores de la época moderna consideraron que Dios se podía interpretar como el sustento material y de las reglas que rigen al mundo físico. Es decir que es el preámbulo para una postura filosófica realista no causada[(105)]. Dicha postura considera que el mundo material existe independientemente de los humanos y su capacidad de percibir el mundo[(106)] Por ejemplo para el historiador Richard S. Westfall, Newton no contribuye a las disputas deístas de la época, ya que sus escritos y tendencias teológicas solo son conocidas por un círculo pequeño de seguidores (Westfall 2000, Pág. 114). Para Davis, Westfall sigue viendo a Newton desde una perspectiva que Newton no tiene, si bien Newton no es deísta, Westfall mal entiende la característica de la religión en Newton, ya que éste toma muchos escritos bíblicos literalmente (Davis 2009, Pág. 118). La separación de la religión de la ciencia puede ser cierta para ciertos pensadores modernos, como Spinoza o Descartes. Para dichos pensadores y en especial para Descartes, el Dios cristiano y el Dios que sustenta su sistema metafísico son diferentes, o al menos *a prima facie* no puede asumirse que son el mismo Dios. En Descartes el papel de Dios creador es indispensable en el momento de la creación. Pero después de ese momento el papel de Dios parece relegarse y el mundo puede funcionar sin Dios. Sin embargo en el caso del desarrollo de la *Filosofía Natural* realizado en Inglaterra, esta interpretación puede ser errónea, ya que como se ha mencionado en el capítulo anterior, existen una serie de pensadores que consideran que el verdadero sustento del mundo es el Dios Cristiano[(107)]. Newton puede considerarse dentro de los pensadores que trabajaron con el concepto de Dios como sustento del mundo y de las reglas que lo dirigen. Pero dado que la *mecánica newtoniana o clásica*, es incausada y ateleológica se considera que el sistema desarrollado por Newton también lo es. La recuperación de los manuscritos newtonianos ha permitido ampliar el entendimiento del papel de Dios en el sistema newtoniano, por lo que actualmente se puede considerar que hay varias interpretaciones del papel que Dios juega en el sistema originalmente desarrollado por Newton. Las tres interpretaciones son:

1. *Newton se concentra en los tópicos empíricos y matemáticos que se pueden resolver mediante métodos científicos modernos y/o contemporáneos*: Basada en el eslogan metodológico *hypotheses non fingo*, esta interpretación postula que Newton tenía un agnosticismo metafísico acerca de la naturaleza del mundo material.

[105] Metafísica o teológicamente

[106] Existen diversas posturas realistas, la mayoría de ellas concuerda con la existencia del mundo externo. Aun así pueden existir posturas realistas que maticen la existencia del mundo externo. El realismo teorético sostiene que la ciencia puede hacer juicios verdaderos o falsos. El realismo acumulativo sostiene que las últimas teorías científicas son el caso límite de las teorías anteriores del mismo dominio. El realismo progresivo sostiene que la ciencia progresa hacia la verdad, cosa que no es implícita en otros realismos. El realismo mínimo sostiene que una sentencia o proposición es verdadera si es el caso de que las cosas sobre las cuales predica es el caso. El realismo escolástico considera que hay algunas cosas en el mundo que son independientes a nuestras categorías (Haack 1987). Estas son solo algunas posturas realistas.

[107] La interpretación de qué es un Dios Cristiano varía de acuerdo a la postura teológica que se profese. Una posible interpretación de lo que es el Dios Cristiano es la Trinidad, elemento presente en la Iglesia Anglicana. Newton considera que el *verdadero Dios cristiano* es *uno solo*. En términos prácticos Newton está en contra de la Trinidad en especial de la Trinidad desarrollada por la Iglesia Católica Apostólica Romana (de Pater 2005, Pág. 471) (Davis 2009, Pág 171) (Westfall 2000, Pág 110 y 111).

Newton introduce ciertas nociones metafísicas pero son un remanente que no juegan un rol importante en el trabajo newtoniano (Janiak 2010, Pág. 12). Se considera a ésta como la interpretación clásica. El problema es que a partir de la recuperación de los manuscritos originales por parte del economista Keynes, se descubrió que Newton dedicó más tiempo a la teología y a la alquimia, por lo que su dedicación y extensión de trabajos sobre estos temas no cuadra con la visión clásica. Esta visión parece venir de la creación de una mecánica incausada, ateológica y ateleológica, que se desarrolló a partir de la interpretación de los trabajos de Newton por parte de otros pensadores posteriores a Newton como Euler (Maronne y Panza 2014), lo que a la postre se conocería como *mecánica clásica* o *mecánica newtoniana*.

2. *Newton convierte los a priori de la ciencia aristotélica y/o cartesiana en problemas empíricos* (Janiak 2010, Pág. 12): Bajo esta interpretación, Newton además de resolver los problemas empíricos, debe discutir algunas cuestiones metafísicas que sus predecesores consideraron importantes, y el por qué se puede estudiar un sistema atendiendo únicamente a la experimentación empírica de la naturaleza y/o el mundo material. Al estudiar de esta forma a Newton, se toman en cuenta sus escritos teológicos y alquímicos. Esta interpretación tiene la ventaja de conservar el nexo científico que tienen algunos de los escritos de Newton como el *Principia* con la física clásica. Un posible autor de esta interpretación es Marquina, quien propone que los escritos de Newton se pueden dividir de tres formas, la teología como el conocimiento de Dios; la física como el conocimiento del mundo y la alquimia que es un nexo entre ambos mundos(Marquina 2006, Cap. II y III). Dios, como sustento del mundo, es un componente exclusivamente teológico en esta interpretación. Una de las debilidades de estudiar a Newton de esta forma es el rechazo de Newton a la metafísica cartesiana. Este rechazo sólo se puede explicar si revisamos la propia metafísica de Newton y el papel de Dios en el sistema newtoniano (Janiak 2010, Pág. 13). Si bien esta interpretación permite entender mejor la relación entre los estudios y escritos de Newton con su trabajo considerado científico, no deja de entender el trabajo de Newton en términos de la ciencia como la conocemos hoy en día. Considerar que la ciencia realizada por Newton es la misma que la ciencia contemporánea, o al menos que Newton realizaba física clásica, puede suponer un problema ya que lo que Newton entendía por ciencia y lo que nosotros entendemos por ciencia puede ser diferente[108]. Para Marquina, aun cuando existe un interés genuino por parte de Newton en la teología y en la alquimia, se puede identificar el programa científico de Newton (Marquina 2006, Cap. V). Pero la pregunta pertinente es: ¿Marquina ha identificado el programa científico de Newton desde la perspectiva que sostiene Newton, o es una identificación del programa científico de la física clásica que tiene su origen en Newton?

[108]Considero que se puede defender que la ciencia como la entiende Newton y la noción contemporánea de ciencia guardan diferencias importantes. La diferencia más importante es que la ciencia contemporánea no tiene un fin manifiesto, ni un componente teológico. Mientras que la ciencia en Newton es teológica, por estar fundamentada en Dios y teleológica ya que Dios es una parte de su sistema y una de las finalidades de dicho Dios es lograr nuestra salvación, lo cual es un fin. En las siguientes secciones se continuará con esta línea de pensamiento.

3. *Las cuestiones metafísicas juegan un papel importante en el sistema newtoniano y la concepción de Dios es central en dicho sistema*: El sistema metafísico newtoniano consta de dos partes interrelacionadas, pero distintas. La primera es la concepción de Dios como elemento activo en el mundo natural y/o material. Esta concepción metafísica es fundamental en el sistema y no está sujeta a revisión empírica. Para Newton es un hecho que el Dios Cristiano existe y es el sustento del mundo y de sus reglas. La segunda parte concierne al mundo material que habitamos, que puede ser caracterizado por la investigación empírica y una teoría física que describa el mundo (Janiak 2010, Pág. 13). La metafísica del mundo material siempre está sujeta a revisión y debe establecerse después de la experimentación (Janiak 2010, Pág. 45 y 47)[(109)]. Si bien es la interpretación menos conocida, puede dar cuenta por un lado del extenso trabajo newtoniano sobre diversos temas que ahora se consideran no-científicos[(110)]; y por otro lado explica la forma en que Newton entiende y utiliza el concepto de Dios en el mundo físico[(111)]. Después de estudiar estos principios, se puede comprender la metodología de Newton. Este trabajo pretende mostrar las ventajas de interpretar de esta manera el pensamiento de Newton, para también poder entender mejor la postura de sus críticos[(112)]. Huelga decir que esta interpretación tiene sus propias deficiencias, como la facilidad que implica pasar de una ciencia causada por Dios, a una ciencia incausada en Newton, hecho que parece ser explicado por la primera interpretación. Mi pretensión no es defender filosóficamente esta postura, sino mostrar las ventajas de realizar un análisis filosófico desde ella.

Dadas estas interpretaciones, se puede argumentar a favor y en contra de cada una de ellas[(113)]. Considero que la tercera interpretación es la mejor para evaluar las críticas de Berkeley al trabajo de Newton por los siguientes motivos:

1. Permite entender por qué Newton no trabajó más en los fundamentos de su cálculo fluxional. Esto se da así porque cree que Dios justifica su cálculo y no necesita profundizar en algo ya dado y/o probado.

2. Permite entender por qué en especial en Inglaterra la crítica de Berkeley fue difundida y respondida.

[109] Esta separación también puede considerarse como una separación entre la *metafísica divina* y la *metafísica mundana, Janiak dixit*. Como su nombre lo indica, la metafísica divina permite entender la naturaleza de Dios y está establecida *a priori*. La metafísica mundana es aquella que habla del mundo físico. Newton considera que también podemos estudiar a Dios mediante el estudio de la metafísica mundana, que utiliza la experimentación, para refinar la metafísica divina. De acuerdo con Janiak la teoría física de Newton no presupone los elementos básicos de su metafísica mundana, al menos en el sentido de establecer como falsos estos elementos básicos (Janiak 2010, Pág 45 a 47).

[110] Habrá que analizar si para Newton estos estudios no forman parte de la ciencia, pero *prima facie* parece considerarlos dentro de la ciencia.

[111] Cosa que se estudia en el presente capítulo.

[112] He de decir, *sin modestia alguna*, que estudiando a Newton había llegado a una conclusión parecida por cuenta propia, pero la clasificación de Janiak es más amplia y me permite contrastar entre otras interpretaciones ya establecidas previamente. Desde mi perspectiva, Newton utiliza a Dios como sustento del mundo, como origen del mundo físico y las leyes que lo rigen, postura que también sostiene Janiak.

[113] Queda como trabajo a futuro evaluar cada una de las interpretaciones en diversos trabajos de Newton para decidir cuál se ajusta a su obra completa de mejor manera. Aunque claro, ésta es una pretensión desde la filosofía analítica y no tiene porque llevarse a cabo necesariamente.

3. Berkeley está mostrando los problemas del cálculo fluxional, que no profundiza en sus justificaciones, porque se ha considerado como ya probado.

2.2.2. El papel de *Dios* en el trabajo de Newton

Como se ha mencionado, yo optaré por la interpretación que sostiene que Dios es un elemento esencial en los trabajos de Newton. ¿Entonces cuál es la razón de que Dios parezca no intervenir en el mundo físico? La principal razón de esto es la separación de la física, o experiencia empírica, de la metafísica. La metafísica de Newton aunque mínima, contiene a Dios y su visión del espacio y tiempo, que no puede ser revisada por la experiencia (Janiak 2010, Pág 13) (de Pater 2005, Pág 465).

Newton habla de Dios de la siguiente forma:

> Así, antes de que Dios hubiese decretado algo acerca de la creación del mundo (si es que hubo algún tiempo en el que no lo hubiese hecho), la cantidad de la materia, el número de estrellas y todas las demás cosas serían indefinidas; fueron definidas una vez que el mundo fue creado. (*Gravitatione* 135)

> 10. 6. Finalmente, el espacio es eterno en duración porque es un efecto emanativo de un ser eterno e inmutable. (*Gravitatione* 137)

> [. . .] debe considerarse que Dios, mediante la sola acción de pensar o querer [. . .] puede impedir que un cuerpo penetre cualquier espacio definido por ciertos límites. (*Gravitatione* 139)

> [. . .] ciertamente, lo que no puede existir independientemente de Dios, no puede entenderse, verdaderamente, con independencia de la Idea de Dios. (*Gravitatione* 144)

> Este muy elegante sistema del Sol, planetas, y cometas no pudo surgir sin el diseño[(114)] y dominio de un inteligente y poderoso ser [. . .] Él gobierna todas las cosas, no como el alma del mundo sino como el señor de todo. Y es por causa de su dominio que él es llamado Señor Dios Παντοκρατορ [. . .] El supremo Dios es eterno, infinito, y un ser absolutamente perfecto [. . .] Y por su verdadera señoría se sigue que el verdadero Dios está vivo, es inteligente, y poderoso; de otras perfecciones, él es supremo, o supremamente perfecto. Él es eterno e infinito, omnipotente y omnisciente, esto es, él dura de la eternidad a la eternidad, y él está presente de lo infinito a lo infinito, él gobierna todas las cosas, y él conoce todas las cosas que que pasan o pueden pasar. Él no es eternidad e infinitud, pero es eterno e infinito, él no es duración y espacio, pero él perdura y está presente. Él perdura siempre y está presente en todos lados, y por existir siempre y en todo lugar él constituye duración y espacio. Dado que todas y cada una de las partículas del espacio son *siempre*, y todos y cada uno de los momentos indivisibles de duración están *en todos lados*, ciertamente el creador y señor de todas las cosas no estará *nunca* o *en ninguna parte*. [. . .] Se llega al acuerdo de que el supremo Dios existe, y por la misma necesidad él es *siempre* y *en todo lugar* [. . .] Esto concluye la discusión de Dios y tratar al Dios de los fenómenos es ciertamente una parte de la filosofía natural[(115)]. (Newton 1687, Pág 90 a 92)

[114] La palabra *design*, se puede entender como diseñado, o bosquejado; pero también como creado específicamente para ser de esa forma (*cf*. Cambridge Dictionary). Interesante elección de palabra, que puede interpretarse también como designio, ya que tienen la misma raíz etimológica latina *designare*.

[115] "This most elegant system of the sun, planets, and comets could not have arisen without the design and dominion of an intelligent and powerful being [. . .] He rules all things, not as the world soul but as the lord of all. And because of his dominion he is called Lord God Pantokrator [i.e. universal ruler] [. . .] The supreme God is an eternal, infinite, and absolutely perfect being [. . .] And from true

Sobre el trabajo experimental, Newton comenta en el extracto quizás más conocido del Escolio General de los *Principia*:

> Yo no he podido ser capaz de deducir de los fenómenos, las razones para estas propiedades de la gravedad, y *yo no invento hipótesis*. Todo lo que no es deducido del fenómeno debe llamarse hipótesis; e hipótesis, sean metafísicas o físicas, o basadas en propiedades ocultas, o mecánicas, no tienen lugar en la filosofía experimental[(116)]. (Newton 1687, Pág. 92)

De las citas anteriores podemos decir lo siguiente:

- Dios define cómo es el mundo cuando lo crea.
- El tiempo es una *emanación divina*. Dios es entonces la causa del espacio.
- En el espacio hay momentos indivisibles de duración *en todos lados*.
- Todo debe entenderse a partir de la idea de Dios[(117)].
- Dios es parte de la filosofía natural.
- Sin embargo, en la filosofía experimental, solo se puede afirmar algo, si se ha deducido a partir de la experimentación.

Desde mi perspectiva Newton puede trabajar con el mundo empírico, porque Dios es garante del espacio, tiempo, y de todas las demás creaciones. Newton puede alcanzar el conocimiento del mundo físico porque se nos ha hecho a imagen y semejanza de Él, *cf.* Génesis 1:26 y (*Gravitatione* 141),. Newton a diferencia de Descartes, no necesita resolver el reto escéptico, Dios es sustento de las reglas del universo y el mundo físico, como en Descartes. Pero a diferencia de Descartes, Newton considera que puede obtener conocimiento a través de la experiencia empírica, ya que Dios garantiza tanto el conocimiento, como el acceso al mundo. Lo anterior explica en parte por qué Newton nunca desarrolla un sistema como otros filósofos, como Descartes, quien parte de algunos principios mínimos para desarrollar un tratado filosófico[(118)].

lordship it follows that the true God is living, intelligent, and powerful; from the other perfections, that he is supreme, or supremely perfect. He is eternal and infinite, omnipotent and omniscient, that is, he endures from eternity to eternity, and he is present from infinity to infinity; he rules all things, and he knows all things that happen or can happen. He is not eternity and infinity, but eternal and infinite; he is not duration and space, but he endures and is present. He endures always and is present everywhere, and by existing always and everywhere he constitutes duration and space. Since each and every particle of space is *always*, and each and every indivisible moment of duration is *everywhere*, certainly the maker and lord of all things will not be *never* or *nowhere* [. . .] It is agreed that the supreme God necessarily exists, and by the same necessity he is *always* and *everywhere* [. . .] This concludes the discussion of God, and to treat of God from phenomena is certainly a part of natural philosophy."

[116]"I have not as yet been able to deduce from phenomena the reason for these properties of gravity, and I do not feign hypotheses. For whatever is not deduced from the phenomena must be called a hypothesis; and hypotheses, whether metaphysical or physical, or based on occult qualities, or mechanical, have no place in experimental philosophy". Énfasis mío. En latín la frase es la siguiente "hipotheses non fingo" que se traduce como "fingir". En una de las traducciones al inglés, Newton utiliza [feign], *cf. (Koyré 1957, Cap. X)*. Si bien "fingir", "feign" y "fingo" parecen tener la misma raíz etimológica, feign tiene más significados (Lexico Dictionaries 2019-07-24) (Dictionary by Merriam-Webster 2019-07-24). Dentro de los significados más frecuentes se encuentran "inventar", "imaginar", "pretender ser afectado por algo", "dar una falsa apariencia". Considero que debe usarse una palabra que denote la crítica de Newton a la metafísica y física de Descartes, e "inventar" parece una crítica al sistema cartesiano sobre que sus resultados son invenciones, con toda la intención de engañar a sus lectores, por parte de los autores cartesianos.

[117]Para que algo pueda entenderse sin Dios, esto debe existir sin Él, pero todo lo que existe depende de Dios, por lo cual nada puede entenderse sin Dios.

[118]Janiak se pregunta por qué Newton no desarrolla un sistema filosófico como Descartes (Janiak 2010, Pág. 1). El párrafo anterior es mi respuesta.

Considero que Newton tiene la confianza de que el mundo existe y está garantizado por Dios y que nos es posible entender dicho mundo porque compartimos algunas propiedades de Dios, aunque todas las propiedades que compartimos con Él son finitas y limitadas. Así cuándo investigamos, es posible entender la obra del Creador, aun cuando nuestra investigación no se ajuste completamente al fenómeno observado. Los principios y derivaciones en los *Principia*, pueden desarrollarse en el mundo físico y sus explicaciones también. Sin embargo como justificación última, Dios es el que garantiza que lo descrito por los *Principia* suceda. Dios es el origen de las distintas propiedades y reglas del espacio y tiempo.

De acuerdo a la interpretación sostenida en esta tesis Newton tiene una metafísica mínima, que no es revisable. Esta metafísica mínima, basada en Dios, permite entender el prefacio escrito por Newton en la primera edición de los *Principios* en 1687, donde habla de establecer los principios matemáticos de la *Filosofía Natural*, *cf.* (Newton 1687, Pág. 40). Dado que son principios matemáticos, se puede interpretar que Newton habla únicamente de las leyes que describen el universo, sin que estas tengan un origen divino, tal como lo proponen los primeros intérpretes de la metafísica de Newton. Sin embargo existen varios indicios de que esto solo es una parte del trabajo newtoniano. Para Roger Cotes, editor de la segunda edición y quien realiza el prefacio de dicha edición, Newton critica a Descartes (aunque no lo menciona por su nombre), por proponer que el mundo surge por la perfecta y libre voluntad de Dios que gobierna todas las cosas, pero al mismo tiempo sostiene que la filosofía debe ser atea, *cf.* (Newton 1687, Pág. 57 y 58). Para Cotes, todos los filósofos que no vean la bondad y sabiduría de Dios están ciegos; y locos aquellos que refutan estas propiedades divinas y las estructuras creadas por Dios, *cf.* (Newton 1687, Pág. 58).

Si bien durante mucho tiempo se consideró que el papel de Dios en el sistema de Newton era menor y que el trabajo principal se había desarrollado únicamente de los principios geométricos y la investigación empírica que necesitaba para describir los fenómenos de la física ahí tratados, ahora sabemos que Newton efectivamente creía en un Dios Único, en un Cristo Arriano[(119)]; y que los métodos de la ciencia y la teología son paralelos, o incluso puede que haya un solo método. Dios justifica el razonamiento inductivo en los libros de la naturaleza y de los profetas (de Pater 2005). De este modo las secciones de los *Principia* en los cuales se menciona a Dios, sobre todo en la primera y segunda versión, adquieren una relevancia aún más importante. Por lo que el desentendimiento de Dios como origen de la física y matemáticas, dado lo

[119] El arrianismo es una posición teológica que niega la Trinidad, en la teología cristiana. El concepto de Trinidad sostiene que hay un único Dios con tres personas o aspectos diferentes: Padre, Hijo, y Espíritu Santo. El arrianismo considera que Dios es único y que no tiene personas o aspectos diferentes. En el arrianismo el hijo de Dios entonces no es Dios. El hijo al no ser Dios puede ser creado. Bajo arrianismo se agrupan muchas creencias que niegan la Trinidad y tienen como dogma el Dios sin personas o aspectos. La iglesia Católica Apostólica Romana profesa el *Credo* afirmando el dogma de la Trinidad: "Creo en un solo Dios Padre todopoderoso, Creador del Cielo y de la Tierra, de todo lo visible y lo invisible. *Creo en un solo Señor, Jesucristo, Hijo único de Dios, nacido del Padre antes de todos los siglos: Dios de Dios, Luz de Luz, Dios verdadero de Dios verdadero, engendrado, no creado, de la misma naturaleza del Padre*, por quien todo fue hecho; que por nosotros, los hombres, y por nuestra salvación bajó del cielo, y por obra y gracia del Espíritu Santo se encarnó de María, la Virgen, y se hizo hombre; y por nuestra causa fue crucificado en tiempos de Poncio Pilato; padeció y fue sepultado, y resucitó al tercer día, según las Escrituras, y subió al cielo, y está sentado a la derecha del Padre; y de nuevo vendrá con gloria para juzgar a vivos y muertos, y su reino no tendrá fin. Creo en el Espíritu Santo, Señor y dador de vida, que procede del Padre y del Hijo, que con él Padre y el Hijo recibe una misma adoración y gloria, y que habló por los profetas. Creo en la Iglesia, que es una, santa, católica y apostólica. Confieso que hay un solo bautismo para el perdón de los pecados. Espero la resurrección de los muertos y la vida del mundo futuro. Amén. ".

anteriormente expuesto, es erróneo.

Hypotheses non fingo y la metafísica en Newton.

Uno de los puntos fuertes de la primera interpretación metafísica de Newton, es el hecho de que nuestro autor considera que él no inventa hipótesis, lo que consideran que implica que Newton tenía una posición agnóstica acerca de la metafísica, limitándose al tratamiento matemático y empírico de los fenómenos estudiados por él. Esto es cierto solo de manera parcial, Newton tiene una metafísica; pero considera que no debe asumirse principio alguno cuando hablamos del mundo o de la experiencia empírica. Esto va en contra de Descartes que quiere una metafísica *a priori*, y de ella deducir las propiedades del mundo.

Newton piensa que para pronunciarse sobre una propiedad física debe haber evidencia empírica que la sustente. Es por esto que Cotes considera que la forma de trabajar de Descartes y Leibniz es hipotética, ya que no hay evidencia empírica independiente del fenómeno descrito (Janiak 2010, Pág. 18). Esto no quiere decir que Newton no acepta hipótesis, o que no trabaje con ellas, sino que para pronunciarse sobre una propiedad física, se debe antes tener evidencia fenoménica de tal propiedad.

De acuerdo a lo anterior, la interpretación correcta del dicho newtoniano *hypotheses non fingo* sería que Newton no quiere hablar de una explicación causal de algún fenómeno, sin antes tener acceso empírico a dicha causa. En especial Newton no dará una explicación causal de la gravedad en los *Principia* (Janiak 2010, Pág. 19), dado que solo tiene acceso empírico a los fenómenos provocados por la gravedad, pero no a la gravedad misma. Sin embargo puede decir que la gravedad es real (Janiak 2010, Pág. 16), dado que existe evidencia empírica de la misma; pero no podemos decir lo mismo de la causa de la gravedad.

Si tomamos la primera interpretación metafísica, puede surgir un problema, ya que como Newton solo describe matemáticamente la gravedad, pero no da su causa, parece que la gravedad, *actúa a distancia* (Janiak 2010, Pág. 17). De esta manera Newton podía encontrar el rechazo a su teoría si se consideraba que ocurría dicho caso (Janiak 2010, Pág. 31). Además Newton mismo parece estar en contra de que la acción a distancia ocurra (Janiak 2010, Pág. 39 y 173). Así la primera interpretación metafísica de Newton llega a una contradicción, por un lado no hay medio material que transmita la gravedad, por otro lado existe un rechazo general, hasta ese entonces[(120)], de que los objetos actúen a distancia. ¿Cómo resuelve entonces esto Newton? Para Newton, Dios sostiene al mismo mundo físico a través del espacio-tiempo, o mediante las propiedades de Dios, y es erróneo considerar excluir a Dios del cosmos (de Pater 2005, Pág. 455,466). Considera que puede descubrir las leyes del mundo físico y sus propiedades establecidas por Dios en la

[120] Al establecerse la *mecánica newtoniana* el hecho de que no hay medio de transmisión para la gravedad dejó de ser un problema. En el sistema de la mecánica newtoniana, la gravedad es además hiperlumínica, ya que su efecto es inmediato en todo el universo. Actualmente se está trabajando para eliminar la acción a distancia en la gravedad y limitar su velocidad a la velocidad de la luz. En física cuántica se busca una partícula elemental llamada *gravitón*, que transmite la gravedad y en otras áreas de la física contemporánea se trabaja en las *ondas gravitacionales* que es una perturbación del espacio-tiempo dado un objeto masivo. En ambos casos hay un medio de transmisión de la gravedad y la gravedad solo puede viajar a la velocidad de la luz.

creación con su *Filosofía Natural*, basada en principios matemáticos. Aun cuando desconocemos la causa física de la gravedad, conocemos la causa metafísica de la misma, la cual es Dios. Y dado que Dios es infinito y omnipresente, Dios puede intervenir y actuar sobre cualquier objeto localmente[121] (Janiak 2010, Pág. 39). La gravedad, entonces puede actuar a distancia, porque ésta está sustentada por alguna propiedad de Dios, o alguna causa física aún no conocida, pero también sustentada en Dios; y dado que Dios siempre actúa localmente, la gravedad actúa solo empíricamente a distancia, pero una vez que conozcamos la propiedad o causa de la gravedad, ésta actuará ya sea causalmente o localmente.

Newton, si bien no *inventa hipótesis*, en el mundo físico, considera que todo tiene origen en Dios. Esto es de especial importancia para comprender mejor cómo trabaja Newton; pues desde esta perspectiva, la primera interpretación metafísica de Newton, dada por los intérpretes, es irrelevante. Pero como se ha visto, esto choca con el hecho de que sin la intervención divina, Newton no puede sostener la descripción de la gravedad, sin que ésta actúe a distancia.

Dado que Dios es el sustento del mundo físico y sus descripciones, Newton puede estar seguro de que: a) la gravedad no actúa a distancia, porque es una propiedad o fenómeno desconocido, que tiene su origen en Dios, y dado que Dios siempre actúa localmente la gravedad también actúa localmente; y b) que el conocimiento obtenido es real, dadas las propiedades que Dios nos confiere.

Dios le permite a Newton tratar a los fenómenos físicos de manera matemática, sin hacer alguna proclamación sobre su naturaleza física causal, lo cual requiere una metafísica mucho más robusta, desde mi perspectiva, como la de Descartes.

2.2.3. La ciencia en Newton

Otro punto fuerte de la primera interpretación metafísica de Newton, es considerar los objetivos *científicos* de nuestro autor. Varios intérpretes de Newton, consideran que existe una separación entre sus objetivos científicos. Sin embargo esto solo es viable si consideramos la interpretación de Newton por científicos posteriores, que cómo se comentó anteriormente, separaron definitivamente la metafísica basada en Dios, propuesta por Newton, quedándose únicamente con la parte en la cual Newton renuncia a hacer pronunciamientos sin evidencia empírica sobre el mundo físico.

Newton tiene una concepción diferente de lo que es ciencia. Para Newton, un convencido arriano, la teología ha sido corrompida por la cábala, el platonismo[122] y el gnosticismo (de Pater 2005, Pág. 471). El problema con la corrupción de la teología, es que también corrompe la concepción de Dios. Y dado que Dios es la fuente de la ciencia, al tener una concepción errónea de Dios, la ciencia ha sido corrompida, transitivamente

[121] Ya que Dios está presente en todos lados, puede actuar en lugares distantes sin que esto sea acción a distancia, porque todos están contenidos en Dios mismo.

[122] Interesante aseveración, ya que Newton al parecer estudió a los neo-platónicos y a los estoicos (de Pater 2005, Pág. 468).

(de Pater 2005, Pág. 471). El monoteísmo es la única fuente de buena ciencia, con la cual se puede encontrar y unificar todos los fenómenos naturales (de Pater 2005, Pág. 471). Y dado que el verdadero monoteísmo está en el pasado, en este caso las sectas que siguen en parte a Arrio, la ciencia también debe encontrarse en el pasado (de Pater 2005, Pág. 471). Newton considera que debe luchar en contra de Descartes por partida doble, por un lado su interpretación física y metafísica de la ciencia y el mundo que deja a un lado a Dios en el mundo físico, lo cual fue criticado tanto por Newton como un error, o corrupción (de Pater 2005, Pág. 471), como por otros pensadores ingleses en especial los platonistas de Cambridge[(123)]; además para Newton los métodos desarrollados por Descartes se alejan de la práctica geométrica sintética, que Newton consideraba superior (de Pater 2005, Pág. 478). Para Newton la práctica matemática de los griegos es un modelo a seguir. Newton consideraba que el análisis ayudó a los antiguos a descubrir nuevas cosas en las matemáticas; pero sus pruebas siempre fueron realizadas con la síntesis[(124)] (de Pater 2005, 478). Tanto las matemáticas, como la ciencia deben partir de definiciones, primeros principios/axiomas y postulados para después probar sus propiedades mediante la síntesis tal como lo hacen los trabajos matemáticos de los griegos antiguos, en especial Euclides. La ciencia además debe incorporar al Dios Único, ya que es fuente de verdadero conocimiento, sostiene al universo al establecer tanto el espacio, como el tiempo (Janiak 2010, Pág. 141 y 147)[(125)]. Para Newton tanto las leyes de la naturaleza, junto con su descripción matemática son inconcebibles sin Dios, ya que Él opera *regularmente*[(126)] en la naturaleza que ha creado (de Pater 2005, Pág. 479).

Si bien Newton considera que el método sintético de los antiguos es el más indicado para realizar pruebas matemáticas, la geometría que utiliza es diferente a la geometría euclidiana. Puede considerarse que Newton crea una geometría fluxional y/o fluyente, que además de la geometría sintética de los griegos incluye nociones cinemáticas, es decir movimiento, junto a la noción de lo infinitamente pequeño o infinitesimal (Marquina *et al.* 1996, §3.3) (de Pater 2005, §6). Newton no formula una justificación para todos los principios de movimiento que utiliza, o al menos no lo justifica en los trabajos *Gravitatione, Principia* y *Quadrature*. Esto puede deberse a que Newton considera que el origen de las matemáticas está en Dios, o al menos

[123] *cf.* §1.5 de este trabajo.

[124] Es probable que también considerara que el análisis cartesiano puede formar parte de las matemáticas, pero no de las pruebas matemáticas.

[125] Para ver como Dios es la condición de posibilidad del tiempo y el espacio *cf.* (Janiak 2010, Cap. 5)

[126] Se puede cuestionar si realmente Dios opera regularmente, sin embargo considero que existen elementos para sostener que Dios opera de manera regular o al menos permite establecer una regularidad en la naturaleza, yo me inclino por la primera opción. Para Newton el movimiento circular o las órbitas de los planetas se dan por las propiedades matemáticas que tiene el espacio y/o la matemática sintética. Esto se puede ver en en la Proposición I, Teorema I, Sección II del Libro I en donde describe el movimiento de un cuerpo sujeto a una fuerza centrípeta. En su demostración utiliza el movimiento rectilíneo que cambia cada cierto periodo de tiempo creando distintos triángulos en distintas posiciones. Finalmente supone que el número de triángulos aumenta al infinito mientras que su altura disminuye también al infinito convirtiéndose en la curva deseada, *cf.* el pasaje citado en los *Principia* y (Marquina *et al.* 1996, Pág. 1056 y 1057). Este pasaje se puede interpretar de distintas formas, o bien Dios, a través de sus leyes mantiene sujeto al objeto para que siga la trayectoria de la cónica, en vez de seguir la línea recta; o bien, son las propiedades del espacio y/o de la matemática las que permiten tener un número infinito de triángulos de altura *evanescente* y que el movimiento se ajuste a la cónica, pero dichas propiedades tienen su fundamento en Dios, ya que Dios es quien permite que exista un número infinito de triángulos de altura *evanescente*, ya sea en el espacio y/o en la matemática. En cualquier caso, Dios es quien permite que esto ocurra regularmente, o quien permite establecer una ley de la naturaleza que es regular. Resumiendo Dios permite que la naturaleza sea regular o Dios interviene en el espacio a través de sus leyes ya que el espacio es una emanación de Dios. La posibilidad de crear figuras infinitas *evanescentes* y que el espacio sea una emanación de Dios se ve a lo largo de la sección dedicada a Newton.

de las propiedades que tiene Dios y como ha conformado el universo dadas dichas propiedades (de Pater 2005, §6). Nuevamente Newton considera que Dios tiene un papel fundamental en el universo, no solo a nivel físico, sino en el matemático. Su investigación, tanto empírica, como matemática, tiene su origen y fundamentación en Él. La matemática de Descartes, al no aceptar los movimientos mecánicos y realizar parte de la prueba vía el análisis [127]; ha rechazado a Dios y el método de síntesis, desde la perspectiva de Newton. Esta forma de realizar ciencia se puede ver en los escritos de Newton *De Gravitatione et æquipondio fluidorum* y los *Principia*[128]. Así, la ciencia para Newton es sintética, basada en la geometría fluyente, euclidiana+Apolonio+Pappus+movimiento+infinitesimal, con origen y sustento en Dios, que además es origen de todo en el universo incluyendo el espacio-tiempo.

2.2.4. La metodología newtoniana, invirtiendo a Descartes

Como se mostró en las secciones anteriores, Dios es parte fundamental del sistema newtoniano, es condición de posibilidad, tanto del espacio-tiempo, como de las matemáticas. Él sustenta la creación en un sentido amplio y fuerte. Estos principios forman parte de la metafísica divina, que no es revisable. Aun así, es posible investigar empíricamente el mundo fenoménico, dicha investigación empírica siempre es revisable. Esta investigación no debe adivinar hipótesis, sino avanzar a partir de la evidencia de la investigación realizada. Considero que uno de los aportes principales de Newton a la ciencia, es poder realizar una investigación empírica con relativamente una exigua metafísica.

Invirtiendo la investigación empírica

Descartes es conocido por formular un sistema de investigación que durante algún tiempo fue uno de los principales sistemas de investigación científica, hasta que el sistema newtoniano y posteriormente el sistema de la mecánica newtoniana suplantaron al sistema cartesiano.

El sistema cartesiano de investigación partía de un lugar muy diferente al newtoniano. Por un lado Descartes quiere partir de un sistema metafísico *a priori* de investigación; la segunda interpretación parte de la idea de que Newton está trabajando en convertir los *a priori* cartesianos en *a posteriori* newtonianos. Por otro lado, el sistema cartesiano puede interpretarse como un sistema que considera que la explicación tiene una posición superior en la justificación de un fenómeno empírico, más que la simple descripción matemática. Uno de los

[127] En el sentido de análisis matemático clásico que se conoce hoy en día. Newton conoce el álgebra y los métodos del análisis cartesiano, *cf. Quadrature*. Considero que el uso del análisis matemático parece limitarlo en especial en las pruebas matemáticas. Para las pruebas prefiere la síntesis.

[128] Aun cuando no existe evidencia directa de que Newton utilizó la definición aristotélica de ciencia, Newton pudo establecer sus criterios de ciencia basado en la definición de Aristóteles en los *Analíticos*. Dependiendo de la postura filosófica que uno quiera asumir, se puede decir que el sistema euclidiano es el ejemplo de ciencia aristotélica, dado que Newton utiliza el sistema euclidiano en los *Principia*, se puede argumentar que Newton está siguiendo la definición aristotélica de ciencia dada en los *Analíticos*. Uno de los problemas que presenta el estudio de Newton es que nunca reveló las fuentes de su investigación, excepto a Isaac Barrow.

posibles motivos de esta postura, además de la metafísica *a priori* (que dichos *a priori* no tienen por qué ser matemáticos), es que Descartes considera que la descripción matemática es limitada para dar cuenta de un fenómeno (Nelson 2017).

Newton, por otro lado, considera que la descripción matemática es suficiente para describir y dar por real un fenómeno, como se vio en la sección anterior. Al menos en la investigación empírica, la metafísica es revisable, mínima, *a posteriori* y matemáticamente describible; exactamente lo opuesto a lo descrito anteriormente. Así, Newton está invirtiendo la investigación cartesiana, que si bien la metafísica cartesiana es mecánica, la investigación no lo es, ya que debe partir de los principios de la metafísica; mientras que la metafísica newtoniana, no es mecanicista, porque en su centro y origen se encuentra Dios. La investigación sí puede considerarse mecanicista en el sentido contemporáneo de la palabra ya que trata de investigar de manera matemática los fenómenos del mundo, sin asumir una causa física, pero dentro de una teoría física. Para Newton las propiedades del mundo físico son determinadas por una teoría física, ya que no percibimos sus propiedades reales, dichas propiedades deben ser determinadas por la teoría física después de una investigación empírica del fenómeno. Esta forma de investigación se parece a la investigación que se desarrolla en los principios del siglo xx (Janiak 2010, Pág. 126)[(129)].

Usando la maquinaria de Descartes en el análisis de Viète

Con respecto a la investigación matemática newtoniana, Newton considera que Descartes está pervirtiendo la investigación matemática al usar el análisis matemático en las pruebas, en vez de la síntesis geométrica; por lo cual Newton rechaza la forma de hacer matemáticas de Descartes, pero no sus desarrollos matemáticos. Newton encuentra la relación entre los problemas de las tangentes y el área bajo la curva mediante las ecuaciones polinomiales interpretadas en un sistema cartesiano (Panza 2012, Pág. 220 y §3). Newton también considera que las ecuaciones polinomiales son una vía privilegiada para expresar las curvas, con respecto al sistema cartesiano de coordenadas (Panza 2012, Pág. 252). Tanto el sistema coordenado, como la representación de ecuaciones que usa Newton son los sistemas cartesianos[(130)] y es con esos sistemas que desarrolla parte del cálculo fluxional.

Dado que Descartes empieza una nueva forma de hacer matemáticas, en donde el análisis matemático, entendido como el estudio de un problema en donde el álgebra es parte fundamental de él, Newton considera que no puede utilizar dicha herramienta para realizar sus estudios matemáticos, por lo que va a optar por

[129]De acuerdo a Janiak, Newton rechaza la filosofía mecanicista sin invertirla: "Newton ocupa una posición intermedia entre estos extremos: rechaza la filosofía mecánica sin invertirla, y sostiene que algunas de las propiedades de la materia son semi-técnicas, es decir, explotables en los términos disponibles a través de la teoría física. Pero esas propiedades son semi-técnicas en el sentido de que también están disponibles para nosotros a través de la experiencia perceptual ordinaria; ésta última debe simplemente hacerse más precisa. Desde el punto de vista de Newton, entonces, la imagen manifiesta de los cuerpos es a la vez incompleta e imprecisa, pero la imagen científica de los cuerpos comienza con la imagen manifiesta, complementándola y haciéndola más precisa" (Janiak 2010, Pág. 127). Sin embargo considero que la forma de investigación sí se invierte por lo anteriormente expuesto.

[130]Recuérdese que a partir de la publicación de *La Géométrie* los matemáticos adoptaron la notación cartesiana para representar ecuaciones, dadas las propiedades que ésta presenta, como la posibilidad de hacer operaciones con potencias fácilmente.

regresar a lo antiguo utilizando el análisis aristotélico cuando se trata de encontrar los principios o supuestos que se necesitan para resolver un problema y el análisis de Viète cuando necesita resolver un problema matemático (Panza 2012). Éste último método trataba de resolver un problema mediante ecuaciones, hasta que era posible identificarlo con otro problema geométrico y resolverlo sintéticamente, justo lo que Newton consideraba correcto para una prueba matemática. Aun así, Newton utiliza la notación cartesiana algebraica en el análisis[131], ya que Viète aun utiliza el viejo sistema de palabras para representar las potencias, lo cual limitaría ampliamente a Newton.

De esta forma es posible explicar, por qué, por un lado, utiliza la notación algebraica en el cálculo fluxional, pues considera que la notación cartesiana puede expresar de mejor manera la naturaleza de la curva, en este caso la naturaleza del fluxón; mientras que la explicación del sustento se da de manera sintética con geometría fluxional, como en el tratado de las curvas, *Quadrature*.

2.2.5. *De Gravitatione* y *Quadrature*, el movimiento, el punto, la divisibilidad infinita, infinito en Newton

Como se comentó en las secciones anteriores, la matemática de Newton es diferente a la práctica matemática aceptada hasta Descartes. Los elementos que diferencian a la matemática fluxional son:

1. Dios. Él permite que existan los momentos indivisibles de duración y la divisibilidad infinita.
2. Aprecio del método sintético: Newton considera que debe partir de principios y/o axiomas, definiciones, y otros elementos definidos ya sea por Aristóteles y/o en los libros de Euclides, Apolonio y otros; para probar algo basado en alguna lógica, generalmente la lógica aristotélica, utilizando los elementos anteriores o algo que ya hubiera sido probado, para probar los problemas que se le presenten.
3. Movimiento. Newton considera que el movimiento, líneas que se cortan entre sí, triángulos que se encogen, entre otras cosas, forman parte de la matemática.

Newton utiliza el movimiento para justificar parte de la matemática en la que se basa el cálculo fluxional. Además del movimiento, Newton utiliza una concepción diferente de punto a la tradicionalmente utilizada por la geometría euclidiana.

El punto y la línea en en geometría euclidiana pueden considerarse como lo que no tiene partes, Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν; y lo que no tiene anchura, Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές; (Euclides 1956, Libro I, Definiciones). El término griego para punto con esta definición es Σημεῖόν; y el término griego de línea es Γραμμὴ.

[131] Entendido como el estudio de las condiciones que debía tener un problema para ser resuelto por la síntesis.

Pero para Newton, el punto y la línea pueden guardar alguna relación de medida y/o magnitud con algún otro elemento geométrico[(132)]. Estos puntos con medida son producto del movimiento límite de un plano intersectándose con otro, línea con medida; o de dos líneas intersectándose, punto con medida.

En el escrito de *Gravitatione*, Newton habla de las fronteras comunes que crean diferentes figuras geométricas cuando se conjuntan mediante movimiento:

> 5. 1. Por doquier, el espacio puede distinguirse en partes cuyos límites comunes [*terminos communes*] usualmente denominamos superficies y éstas, por doquier, pueden distinguirse en partes, cuyos límites denominamos líneas y, asimismo, éstas, por doquier, las podemos distinguir en partes que denominamos puntos. Y, por tanto, las superficies no tienen profundidad, ni las líneas ancho, ni los puntos dimensiones, *a menos que se diga que los espacios bordeantes [spatia contermina] se penetran mutuamente en toda la profundidad de la superficie entre ellos, esto es, a la que he dicho que es la frontera entre ambos o su extremidad común y lo mismo para líneas y puntos. Más aún, los espacios están, por doquier, contiguos a los espacios y la extensión está, por doquier, situada junto a la extensión y así, por doquier hay fronteras comunes a partes contiguas; esto es, por doquier hay superficies con bordes divisorios de sólidos y, por doquier, líneas que se tocan, entre sí, las partes de las superficies y, por doquier, hay puntos en los que las partes continuas de las líneas se conjuntan. Y, por tanto, por doquier, hay todo tipo de figuras, por doquier hay esferas, cubos, triángulos, líneas rectas, y aquéllas de todas las figuras y magnitudes aun cuando no se muestren a la vista*[(133)][. . .] (*Gravitatione* 132 y 133)

En la cita anterior se puede observar que Newton conoce la definición de Σημεῖόν y Γραμμὴ tradicionales, que no tienen partes, no tienen anchura; *a menos que los bordes que generan dichas figuras geométricas se penetren*, es decir, que cuando dichas figuras son producto de un movimiento, sus propiedades cambian y pueden tener una relación de medida, magnitud y/o métrica. Es más, en el escrito de *Gravitatione* parece ser que no solo formarían un punto con medida, ni una línea con medida, sino todo tipo de figuras geométricas. Es decir el movimiento genera figuras geométricas existentes, que no se muestran a la vista; pero que pueden tener una relación de medida, magnitud y/o métrica con otros elementos geométricos.

Estos *límites comunes* son muy parecidos a la concepción pitagórica de lo qué es un punto, que también tiene medida y/o magnitud llamado μονάδος. La o el μονάδος se menciona en escritos anteriores a los *Elementos* de Euclides (Euclides 1956). También forma parte de la filosofía de los pitagóricos y neo-pitagóricos. Jámblico escribe sobre la o el μονάδος (Iamblichus 1988, P. 35):

> Sobre la mónada
>
> [1] La mónada es la fuente de número no espacial. Se llama 'mónada' debido a su estabilidad, ya que conserva la identidad específica de cualquier número con el que se combina. Por ejemplo, 3x1 = 3, 4x1 = 4: vea cómo el acercamiento de la mónada a estos números conserva la misma identidad y no produce un número diferente.
>
> Todo ha sido organizado por la mónada, porque contiene todo potencialmente: incluso si aún no son reales, la mónada contiene, de manera seminal, los principios que están dentro de todos los números, incluidos los que están dentro de la díada. Porque la mónada es par e impar y par impar [Ejemplo 1+1=2, par; 2+1=3 impar]; lineal y plano y sólido (cúbico y esférico y en forma de pirámides desde aquellos con cuatro ángulos hasta aquellos con un número indefinido de ángulos); perfecto y sobre-perfecto[(134)] y defectuoso; proporcional y armónico; primo no compuesto, y secundario; diagonal y lateral; y es la fuente de toda relación, ya sea de igualdad o desigualdad, [. . .] Además, es demostrable tanto el punto como el ángulo

[132] Es importante hacer notar que dicho punto por sí mismo no tiene medida, magnitud o métrica, pero que la relación sintética y algebraica con otros elementos geométricos se mantiene.

[133] Énfasis mío.

[134] *over-perfect*. Habrá que revisar el texto original, pero en este lugar solo tomo la traducción del inglés.

> (con todas las formas de ángulo), y el comienzo, el medio y el final de todas las cosas, ya que, si [2] al disminuirlo, limita la disección infinita de lo que es continuo, y si lo aumenta, define el aumento como el mismo que los dividendos (y esto se debe a la disposición de su naturaleza divina, no humana)(135). [. . .] (Iamblichus 1988, P. 35)

Parece ser que tanto el límite que penetra a otras figuras, como la o el μονάδος son principios de otras figuras u objetos y por lo cual tienen alguna medida o métrica, en el caso de la o el μονάδος, y una relación de medida, magnitud y/o métrica en los *límites comunes*. Dado que el proceso de movimiento puede convertirse en un proceso infinito, Newton necesita dar cuenta de dicho proceso matemáticamente. Newton conocía las distintas técnicas matemáticas con las cuales los matemáticos de la época calculaban el área de una figura geométrica con indivisibles, que suponía un proceso infinito, como se vio en §1.4.

Sobre los procesos infinitos, que son parte del método de Newton, comenta en (*Gravitatione* 135):

> 6. [. . .] Añádase que los geómetras conocen con precisión cantidades positivas y finitas de muchas superficies infinitas en longitud y, por esto, puedo, positiva y precisamente, determinar las cantidades sólidas de muchos sólidos infinitos en largo y ancho y compararlos en sólidos finitos dados. Pero esto no es aquí pertinente. (*Gravitatione* 135)

Estas ideas forman lo que es un fluxón o fluxión que se define en su tratado de *Introductio ad Quadraturam Curvarum* (Newton 1710):

> Aquí no consideraré a las Cantidades Matemáticas como compuestas por Partes *extremadamente pequeñas*, si no como *generadas por un movimiento continuo.* Las líneas se describen y al describir se generan, no por una conjunción continua(136) de Partes, sino por un movimiento continuo de Puntos. Las superficies se generan por el movimiento de las Líneas, los Sólidos por el movimiento de las Superficies, los Ángulos por la Rotación de sus lados [o brazos], el Tiempo por un flujo continuo, y así en el resto. Estas Génesis se basan en la Naturaleza, [. . .] (137) *Quadrature*

El texto mostrado empieza estableciendo que el concepto de fluxión o fluxón está basado en el movimiento; a fin de diferenciarlo del infinitesimal usado por el cálculo de Leibniz. Este pasaje guarda relación con lo mostrado en la cita de *Gravitatione*, en el cual el movimiento genera distintas figuras geométricas. Newton añade además el tiempo como elemento del fluxón o la fluxión. Continuando con la cita:

> Y de esta manera, los Antiguos llevando líneas móviles y correderas a lo largo de las [líneas] inmóviles en una Posición o Situación Normal, nos han enseñado las Génesis de los Rectángulos(138). *Quadrature*

[135] "[1] The monad is the non-spatial source of number. It is called 'monad' because of its stability, since it preserves the specific identity of any number with which it is conjoined. For instance, 3x 1 =3, 4x1=4: see how the approach of the monad to these numbers preserved the same identity and did not produce a different number.

Everything has been organized by the monad, because it contains everything potentially: for even if they are not yet actual, nevertheless the monad holds seminally the principles which are within all numbers, including those which are within the dyad. For the monad is even and odd and even-odd; 2 linear and plane and solid (cubical and spherical and in the form of pyramids from those with four angles to those with an indefinite number of angles); perfect and over-perfect and defective; proportionate and harmonic; prime and incomposite, and secondary; diagonal and side; and it is the source of every relation, whether one of equality or inequality, [. . .]. Moreover, it is demonstrably both point and angle (with all forms of angle), and beginning, middle and end of all things, since, if you [2] decrease it, it limits the infinite dissection of what is continuous, and if you increase it, it defines the increase as being the same as the dividends (and this is due to the disposition of divine, not human, nature.)"

[136] La traducción utiliza "apposition" que de acuerdo al diccionario de inglés Oxford significa: *poner o posicionar cosas lado a lado o juntas.*

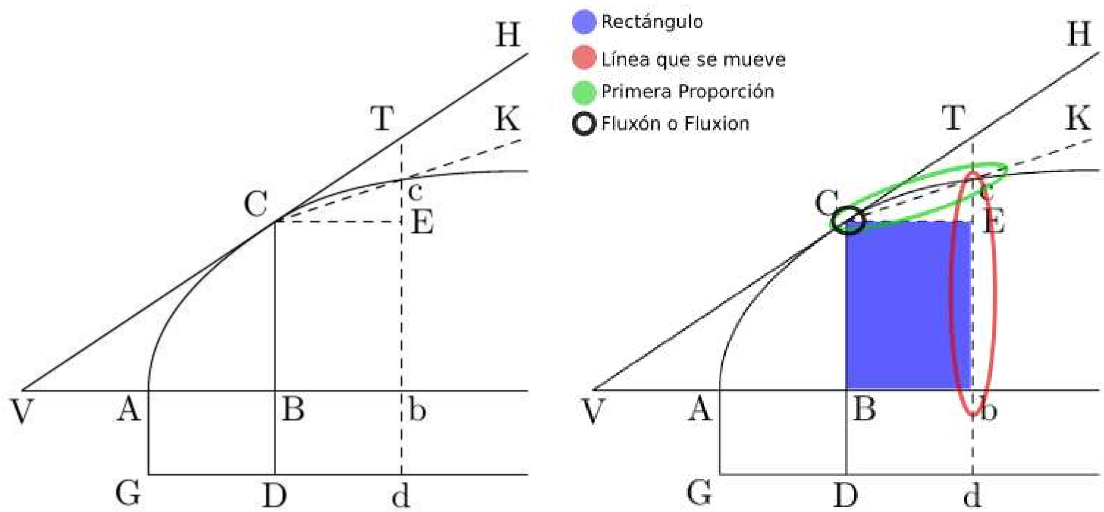
[137] "I don't here consider Mathematical Quantities as composed of Parts *extremely small*, but as *generated by a continual motion*. Lines are described, and by describing are generated, not by any apposition of Parts, but by a continual motion of Points. Surfaces are generated by the motion of Lines, Solids by the motion of Surfaces, Angles by the Rotation of their Legs, Time by a continual flux, and so in the rest. These *Geneses* are founded upon Nature, [. . .]"

[138] And after this manner the Ancients by carrying moveable right Lines along immoveableones in a Normal Position or Situation, have taught us the Geneses of Rectangles

En esta parte del texto hace referencia al origen de su método, considerando que el movimiento de un rectángulo esta dado ya por los *los Antiguos*, refiriéndose a los textos griegos sintéticos[(139)] Newton comenta en *Quadrature*:

> Los fluxones son casi como los Aumentos de los Fluentes, generados en partes iguales, pero infinitamente pequeñas del Tiempo; y para hablar exactamente, están en la *Proporción Principal*[(140)] de los incrementos nacientes [. . .][(141)] *Quadrature*

Newton presenta, a continuación, una figura con la cual muestra el método de fluxiones:



(a) Fluxión o Fluxón (b) Elementos de una Fluxión

Figura 2.1: La Fluxión o el Fluxón

El procedimiento para obtener la tangente de la curva mostrada es (Newton 1710)[(142)]:

---

[139]Debe tenerse especial cuidado, porque aunque Newton considere que su método está basado en los textos geométricos griegos antiguos, estos no incluían el movimiento, que está presente en el pasaje. Véase por ejemplo §1.3 en especial §1.3.1. El problema es justo que el trazado de cónicas dependía del movimiento, el cual es contingente. Si bien los griegos consideraron el movimiento en sus soluciones, para la época inmediatamente anterior a Newton se consideraba que estas soluciones no seguían el riguroso trabajo de Euclides que nunca utilizó el movimiento en sus soluciones. Véase también §1.4.5 en donde se detalla que aún cuando Descartes da su carta de ciudadanía matemática a las ecuaciones con coeficientes enteros, las demás curvas seguían considerándose fuera de la matemática, ya que dependían del movimiento. Utilizar el movimiento en la síntesis es un aporte exclusivo de Newton y de quienes siguieron su método sintético para realizar pruebas. Pero al utilizar el movimiento como parte de la prueba matemática posiblemente las curvas no-algebraicas se empezaron a ver dentro de la matemática y sus pruebas.

[140]O Primera Proporción “*Prime Ratio*”.

[141]“Fluxions are very nearly as the Augments of the Fluents, generated in equal, but infinitelysmall parts of Time; and to speak exactly, are in the *Prime Ratio* of the nascent Augments”

[142]Interpretación mía. A continuación pongo el texto original: “Fluxions, which I here make use of in the Quadrature of Curves. Fluxions are very nearly as the Augments of the Fluents, generated in equal, but infinitely small parts of Time; and to speak exactly, are in the Prime Ratio of the nascent Augments: but they may be expounded by any Lines that are proportional to 'em. As if the Areas *ABC*, *ABDG* be described by the Ordinates *BC*, *BD*, moving with an uniform motion along the Base A B, the Fluxions of these Areas will be to one another as the describent Ordinates *BC* and *BD*, and may be expounded by those Ordinates; for those Ordinates are in the same Proportion as the Nascent Augments of the Areas. Let the Ordinate *BC* move out of its place *BC* into any new one *bc*: Compleat the Parallelogram *BCEb*, and let the Right Line *VTH* be drawn which may touch the Curve *C* and meet *bc* and *BA* produced in *T* and *V*; and then the just now generated Augments of the Abscissa *AB*, the Ordinate *BC*, and the Curve Line *ACc*, will be *Bb*, *Ec* and *Cc*; and the Side of the Triangle *CET*, are in the Prime Ratio of these Nascent Augments, and therefore the Fluxions of *AB*, *BC* and *AC* are as the Sides *CE*, *ET* and *C T* of the Triangle *CE T* and may be expounded by those Sides, or which is much at one, by the Sides of the Triangle *VBC* similar to it. 'Tis the same thing if the Fluxions be taken in the ultimate Ratio of the Evanescent Parts. Draw the Right Line *Cc*, and produce the same to *K*. Let the Ordinate *bc* return into its former place *B C*, and the points *C* and *c* coming together, the Right Line *CK* co-incides with the Tangent *CH*, and the Evanescent Triangle *CEc* in its ultimate form becomes similar to the Triangle

1. Mover la línea BC a una nueva posición bc. c debe estar sobre la curva.
2. Trazar un paralelogramo $BCEb$.
3. Trazar la línea VTH, que debe de tener las siguientes características:
   a) Tocar C.
   b) Encontrarse con bc.
4. Establecer una relación de triángulos similares CET y VBC.
5. Dibujar Cc y producir K.
6. Regresar bc a su posición original. Esto permite que CK coincida con CH, *y el triángulo evanescente CEc en su última forma se vuelve similar al triángulo CET.*, y las relaciones de CE, Ec, y Cc, puedan ser establecidas. Los puntos C y c entonces coinciden. Cuando esto ocurre, se ha calculado el fluxón y/o la fluxión.

Posteriormente, Newton muestra el método o técnica analítica[143] para determinar la fluxión de x^n:

> *Dejar que la Cantidad x fluya uniformemente, y dejar que el Fluxón o la Fluxión de x^n sea encontrada* Al mismo tiempo que al fluir la cantidad x se torna x+o, la cantidad cantidad x^n se convertirá en $\overline{x + o}|^{n}$,[144] esto es, por el Método de Series Infinitas:
>
> $$x^n + nox^{n-1} + \frac{nn - n}{2} oox^{n-2} + \&c$$
>
> Y los Aumentos:
>
> $$o \text{ y } nox^{n-1} + \frac{nn - n}{2} oox^{n-2} + \&c$$
>
> Son uno al otro como:
>
> $$1 \text{ y } nx^{n-1} + \frac{nn - n}{2} ox^{n-2} + \&c$$
>
> Ahora deje que esos Aumentos se desvanescan y la última Proporción será la Proporción 1 a nx^{n-1}[145] *Quadrature*

CET, and its Evanescent Sides CE, Ec and Cc will be ultimately to one another as are CE, ET and CT the Sides of the other Triangle CET, and therefore the Fluxions of the Lines AB, BC and AC are in the same Ratio. If the Points C and c be at any small distance from one another, then will CK be at a small distance from the Tangent CH. As soon as the Right Line CK coincides with the Tangent CH, and the ultimate Ratio's of the Lines $C\,E$, Ec and Cd be found, the Points C and c ought to come together and exactly to coincide. For errours, tho' never so small, are not to be neglected in Mathematics."

143 En el sentido de que es expresada mediante álgebra.

144 El símbolo $\overline{}|$ se utiliza como signo de agrupación, el equivalente a los paréntesis ().

145 *Let the Quantity x flow uniformly, and let the Fluxion of x^n be to be found*. In the same time that the Quantity x by flowing becomes $x + o$, the Quantity x^n will become $\overline{x + o}|^{n}$, that is, by the Method of Infinite Series's

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{nn - n}{2} oox^{n-2} + \&c$$

and the Augments

$$o \text{ and } nox^{n-1} + \frac{nn - n}{2} oox^{n-2} + \&c$$

are to one another as

Sobre las técnicas sintética y analítica que presenta Newton, y que considera que no son infinitesimales, hay que hacer notar:

1. La técnica analítica de fluxión o fluxón no necesariamente refleja su característica básica que es el movimiento que sucede en el tiempo.

2. Los *incrementos* o *aumentos o* se comportan como indivisibles, aun cuando Newton considera que no es así. Esto ocurre porque, como comenté en el punto anterior, la técnica analítica no puede reflejar el movimiento en el tiempo como quiere Newton; además las reglas que utilizan los *incrementos* o *aumentos* son parecidas a la definición de indivisible y/o infinitesimal (*cf.* la sección 1.5 de este trabajo).

3. En la técnica sintética con movimiento, el fluxón o la fluxión se obtiene cuando los puntos C y c se unen en uno solo, en un instante de tiempo, pero guardan relación con los triángulos asociados, ya sea que dichos triángulos también se unan a dichos puntos, o mantengan su tamaño; lo cual se puede considerar como un infinitesimal dependiendo de las reglas que se establezcan para obtener una métrica y/o relación con el método anteriormente mostrado[(146)].

Bajo la primera interpretación, se puede argumentar, que la justificación sintética y la técnica analítica, son la aplicación de un pre-límite matemático. En contra de esto se puede argumentar:

1. El límite es considerado una técnica analítica, lo cual es contrario a la preferencia de Newton por los métodos geométricos-sintéticos.

2. El movimiento permite sustituir al límite.

3. Newton pone el resultado en ecuaciones, ya que considera que expresan correctamente la naturaleza de la curva, pero esto no significa que utilizó las técnicas analíticas desarrolladas por Descartes.

Aun cuando tenga el movimiento para calcular un fluxón y/o fluxión, el proceso por el cual se genera es un proceso infinito. Newton considera que puede realizar operaciones con el infinito:

> Cuando los hombres argumentan en contra de la divisibilidad infinita de la magnitud, diciendo que si una pulgada puede ser dividida en un número infinito de partes, la suma de esas partes será una pulgada; y si un pie se puede dividir en un número infinito de partes, la suma de esas partes debe ser un pie, y dado que todos los infinitos son iguales, esas sumas deben ser iguales, esto es, que una pulgada es igual a un pie.

$$1 \text{ and } nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ox^{n-2} + \&c$$

Now let those Augments vanish and their ultimate Ratio will be the Ratio of 1 to nx^{n-1} ; and therefore the Fluxion of the Quantity x is to the Fluxion of the Quantity x^n as 1 to nx^{n-1}.

[146]Para conocer cómo las distintas formas de calcular una fluxión o fluxón que se pueden considerar un infinitesimal y/o indivisible, así como otras técnicas de Newton que utilizan infinitesimales y/o indivisibles *cf.* (Malet y Panza 2015a).

> La falsedad de esta conclusión muestra un error en las premisas, y el error está, en que todos los infinitos son iguales. Existe otra forma de considerar a los infinitos, usada por los matemáticos, y es, bajo determinadas restricciones y limitaciones, donde los infinitos están determinados para tener ciertas diferencias o proporciones de uno a otro. Así el Dr. Wallis los considera a ellos en su *Arithmetica Infinitorum*, donde él reúne varias magnitudes infinitas de distintas proporciones: cuyo camino de argumentar es generalmente aceptado por los matemáticos, y no deja que todos los infinitos sean iguales[(147)]. *Segunda carta a Bentley 17 de enero de 1692 ó 1693* (Newton 1692 ó 1693, Pág. 99)

> Los órganos de los sentidos no están para habilitar al alma, para percibir las especies de cosas en su sensorio, sino solo para transportarlas allá y Dios no necesita de dichos órganos, el está en todos lados presente para todas las cosas en sí mismas. Y dado que el espacio es divisible *in infinitum*, y la materia no está presente necesariamente en todos lados, se puede permitir también que Dios puede crear partículas de materia, de distintos tamaños y figuras, y en varias porciones del espacio, y tal vez de diferentes densidades y fuerzas, y de este modo variar las leyes de la naturaleza, y hacer mundos de distintos tipos, en distintas partes del universo. [(148)] *Cuestión 31 de la Óptica* (Newton 1721, Pág. 138 y 139)

La postura de Newton sobre el punto, la línea y el movimiento es la siguiente:

1. El movimiento es parte importante del razonamiento matemático en Newton.
2. Se puede dividir infinitamente y sumar infinitamente. Las sumas de infinitos dan diferentes resultados.
3. Las matemáticas no pueden concebirse sin el movimiento y sin Dios ya que Él es el origen de la materia, espacio y las leyes de la naturaleza.
4. Por lo tanto el movimiento está garantizado por Dios.
5. Newton considera que existen dos tipos de puntos y dos tipos de líneas:
    a) El punto y la línea cuando son límites estáticos, los elementos que los producen son estáticos, no tienen magnitud, ni anchura. Estos puntos y línea son lo que en Euclides se conoce como Σημεῖόν y Γραμμὴ.
    b) El punto y la línea cuando son producto del movimiento, en un tiempo o instante de tiempo, guardan relación con los elementos que los originaron. Estos elementos se parecen al concepto de μονάδος desarrollado por los neo-pitagóricos como Iamblico.
6. De acuerdo a Newton, el fluxón o la fluxión está basado en el movimiento.

[147] "So when men argue against the infinite divisibility of magnitude, by saying that if an inch may be divided into an infinite number of parts, the sum of those parts will be an inch; and if a foot may be divided into an infinite number of parts, the sum of those parts must be a foot, and therefore since all infinites are equal, those sums must be equal, that is, an inch equal to a foot. The falseness of the conclusion shows an error in the premises, and the error lies in the position, that all infinites are equal. There is therefore another way of considering infinites used by mathematicians, and that is, under certain definite restrictions and limitations, whereby infinites are determined to have certain differences or proportions to one another. Thus Dr. Wallis considers them in his Arithmetica Infinitorium, where by the various proportions of infinite sums, he gathers the various proportions of infinite magnitudes: which way of arguing is generally allowed by mathematicians, and yet would not be good were all infinites equal. "

[148] "The organs of sense are not for enabling the soul to perceive the species of things in its sensorium, but only for conveying them thither; and God has no need of such organs, he being everywhere present to the things themselves. And since space is divisible in infinitum, and matter is not necessarily in all places, it may be also allowed that God is able to create particles of matter of several sizes and figures, and in several proportions to space, and perhaps of different densities and forces, and thereby to vary the laws of nature, and make worlds of several sorts in several parts of the universe."

7. El cálculo del fluxón o de la fluxión está basado en un infinitesimal, y por lo tanto está sujeto a sus mismas críticas; aun cuando Newton considera que el movimiento en el tiempo evite los problemas del infinitesimal, o que este sea de otra naturaleza.

Aun cuando Newton consideró que la mejor forma de realizar matemáticas era la vía sintética, también trabajó métodos analíticos, un ejemplo del método analítico para el calculo de la fluxión es el siguiente:

> 2. Ejemplo I. Si la Relación de las Cantidades que fluyen x y y sea $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ primero disponga los Términos según x, y luego según y y multiplíquelos de la siguiente manera:
>
> | | |
> |---|---|
> | Mul. $x^3 - ax^2 + axy - y^3$ | $-y^3 + axy - ax^2 + x^3$ |
> | por $\frac{3\dot{x}}{x} \bullet \frac{2\dot{x}}{x} \bullet \frac{\dot{x}}{x} \bullet 0$ | $\frac{3\dot{y}}{y} \bullet \frac{\dot{y}}{y} \bullet 0 \bullet 0$ |
> | hace $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y\star$ | $-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x\star$ |
>
> La suma de los productos es $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$, cuya ecuación da la relación entre las fluxiones x y y. Si tomas x a gusto, la ecuación $x^3 - ax^2 + ax - y^3 = 0$ dará y. Una vez determinado, será $x : y :: 3y^2 - ax : 3x^2 - 2ax + ay$[149] (Newton 1736, Pág. 21)

También Newton trabajará con los incrementos de las variables involucradas en la ecuación a los que Newton llamará o:

> 16. Por lo tanto sea cualquier Ecuación $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, y substituida por $\dot{x} + o$ para x, y $\dot{y} + o$ para y, y se convertirá:
> $x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2oox + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2oo + axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}oo - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2ooy - \dot{y}^3o^3 = 0.$
> 17. Ahora por suposición $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, será eliminada, y los Términos restantes serán divididos por o, ahí quedarán $3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3oo - 2a\dot{x}x - a\dot{x}^2o + a\dot{x}y + a\dot{y}x + a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3oo = 0$. Pero mientras o es supuesto que es infinitamente pequeño, eso puede representar Momentos de Cantidades; los términos que están multiplicando por ellos [los momentos infinitamente pequeños o] se volverán nada con respecto al resto. Entonces los rechazo, y permanecen $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$.[150][151] (Newton 1736, Pág. 24 y 25)

Se puede considerar que para Newton, el movimiento es una técnica matemática apropiada para la investigación de su cálculo. Sin embargo, después la matemática irá en contra de esta noción utilizando solo técnicas analíticas para la justificación de lo que se conoce como cálculo Diferencial e Integral. Además Newton considera que Dios es el origen de todo, incluso de las matemáticas. Esto, como se ha mencionado antes, le permite investigar la naturaleza vía las matemáticas.

[149] 2. Example I. If the Relation of the flowing Quantities x and y be $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ first dispose the Terms according to x, and then according to y and multiply them in the following manner.

Mul. $x^3 - ax^2 + axy - y^3$	$-y^3 + axy - ax^2 + x^3$
by $\frac{3\dot{x}}{x} \bullet \frac{2\dot{x}}{x} \bullet \frac{\dot{x}}{x} \bullet 0$	$\frac{3\dot{y}}{y} \bullet \frac{\dot{y}}{y} \bullet 0 \bullet 0$
makes $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y\star$	$-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x\star$

The Sum of the Products is $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$, which Equation gives the Relation between the Fluxions x and $y - 4$. For if you take x at pleasure, the Equation $x^3 - ax^2 + ax - y^3 = 0$ will give y. Which being determined, it will be $x : y :: 3y^2 - ax : 3x^2 - 2ax + ay$

[150] 16. Therefore let any Equation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ be given, and substitute $\dot{x} + o$ for x, and $\dot{y} + o$ for y, and there will arise $x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2oox + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2oo + axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}oo - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2ooy - \dot{y}^3o^3 = 0$

17. Now by Supposition $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ which there fore being expunged, and the remaining. Terms being divided by 0, there will remain $3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3oo - 2a\dot{x}x - a\dot{x}^2o + a\dot{x}y + a\dot{y}x + a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3oo = 0$. But whereas o is supposed to be infinitely little, that it may represent the Moments of Quan tities ; the Terms that are multiply'd by it will be nothing in respect of the rest. Therefore I reject them, and there remains $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$ as above in Examp. 1.

[151] El texto usado (Newton 1736) puede diferir de la notación usual usada por Newton ya que no fue un trabajo que Newton considerara que podía publicarse.

Fases del método de fluxiones

A continuación propondré una división del método de fluxiones, una interpretación mía con el fin de mostrar cómo considero que Newton usa su metafísica en el método de fluxiones. Desde mi perspectiva Newton utiliza su metafísica para justificar el método de fluxiones o para algún procedimiento interno en dicho método.

Las fases para el método sintético son:

1. *Fase de relaciones*: Dada una curva cualquiera, se propone una o varias figura geométricas que me permiten establecer una relación con dicha curva. En el caso del texto de *Quadrature* se utiliza un triángulo que es *evanescente*. Dicho triángulo, me permiten establecer una relación entre los lados del triángulo para encontrar la ecuación de la recta que pasa por la hipotenusa del triángulo que he supuesto que es la tangente de la curva, para el caso mostrado en *Quadrature*.
2. *Fase metafísica*: Se disminuye la figura geométrica hasta quitarle una dimensión, de planos a líneas, de líneas a puntos, *conservando las relaciones geométricas establecidas en la fase de relaciones*. Esta fase se basa en la idea de que aun cuando un punto y/o línea haya perdido una dimensión, puede conservar sus relaciones de proporcionalidad anteriores. Newton considera que las relaciones de proporcionalidad se mantienen en un punto o línea si se establece a partir de otra figura que va disminuyendo continuamente. Esto le permite establecer relaciones de proporcionalidad con un triángulo, y disminuirlo hasta que se convierta en un *límite contermina*[(152)]. Dicho *límite contermina* le permite dos cosas a Newton: primero asegurarse que la línea encontrada es una tangente, ya que el *límite contermina* es lo suficientemente pequeño para ser equivalente al punto; y encontrar la ecuación de la recta a través de las relaciones establecidas por el triángulo, para el caso presentado en el texto de *Quadrature*. Considero que esta fase es metafísica porque se basa en las propiedades que Dios le da al espacio: el *límite contermina*; la posibilidad de tener objetos infinitamente pequeños, figuras *evanescentes*; y la división infinita del espacio.
3. *Procedimiento matemático convencional*: Se termina el procedimiento utilizando las técnicas matemáticas de la época.

Las fases para el método analítico:

1. *Fase diferencias*: Dada una ecuación se propone un incremento cualquiera, o, para cada una de las variables: en caso x el incremento es $\dot{x} + o$; en caso y el incremento es $\dot{y} + o$. Se sustituye en la ecuación

[152]Recuérdese que para Newton los límites [geométricos] son las figuras geométricas consideradas básicas, como el punto y la línea. Estos límites no tiene dimensión, ni forma *a menos que se penetren mutuamente los espacios bordeantes, spatia contermina* (*Gravitatione* 132-133). Cuando me refiero a un *límite contermina* quiero señalar que es aquel límite [geométrico], producto de la penetración de espacios bordeantes, y que le permite tener forma aunque no se muestre a la vista (*Gravitatione* 132-133).

y se resuelve normalmente.

2. *Fase metafísica*: Se elimina el incremento o de dos formas: se considera que dicho incremento $o \neq 0$, lo que permite trabajar con el incremento o en las multiplicaciones y divisiones; se considera al incremento $o = 0$ lo que permite eliminarlo si está sumando o restando. Newton considera que dicho incremento o se comporta de esta manera porque *fluye hasta convertirse en cero*. Mientras fluye se puede multiplicar y dividir; y cuando deja de fluir se convierte en cero. De nueva cuenta esto se basa en la idea de que las figuras geométricas pueden *fluir o moverse*.

3. *Procedimiento matemático convencional*: Se termina el procedimiento con las técnicas matemáticas de la época.

Tanto en la técnica sintética como en la analítica, Newton utiliza su propia interpretación metafísica del espacio y del infinito. Sin los *límite contermina* Newton no podría reducir las figuras geométricas y conservar las relaciones geométricas. Y sin su propia interpretación del infinito, Newton no podría hacer que las cantidades *fluyentes* o *evanescentes* se comportaran como cantidades distintas de cero en la multiplicación y división; y como cero para las demás leyes de la aritmética. En ambos casos considero que esta parte del método de las fluxiones es metafísico. Esta fase es donde sus críticos harán las preguntas más polémicas.

Desde mi punto de vista, Newton trabaja con lo que actualmente se considera isomorfismo y homemorfismo. El ismomorfismo y homemorfismo son relaciones que se establecen entre al menos dos *objetos matemáticos*([153]); los objetos matemáticos son isomorfos si no es posible distinguirlos, más que por sus elementos contingentes, dos círculos son isomorfos y solo pueden distinguirse por el radio dado; los objetos matemáticos son homemorfos si es posible establecer una relación entre algunos elementos de los objetos, como lo son el cuadrado y el círculo, en los cuales podemos hacer que todos los puntos del círculo puedan relacionarse con todos los puntos del cuadrado. El homomeorfismo es más amplio que el isomorfismo.

Newton considera que los límites especiales, *límites contermina*, son isomorfos con las figuras que las crearon, en el caso del texto de *Quadrature* el triángulo, por lo cual puede guardar todas las relaciones de proporción propias de un triángulo. El *límite contermina* puede establecer una relación de homomeorfismo con el punto, y si no se distinguen entre el punto y la figura geométrica, se puede asumir homemorficamente que dicho *límite contermina* no tiene magnitud.

Hay que señalar que el texto de *Gravitatione* y *Quadrature* se separan con respecto al tema de la magnitud. En el texto de *Gravitatione* los *límites contermina* tienen magnitud: "Y, por tanto, por doquier, hay todo tipo de figuras, por doquier hay esferas, cubos, triángulos, líneas rectas, y aquéllas de todas las figuras y

[153]Dependiendo de la postura matemática, se habla de la *existencia de objetos matemáticos*, como si el concepto círculo y los elementos matemáticos que lo conforman, como las ecuaciones, existieran, *cf.* (Linnebo 2018). Existen otras posturas que no aceptan, o son agnósticas sobre, la existencia de los *objetos matemáticos*, *cf.* (Weir 2015). Esta tesis intenta escribirse de la segunda forma.

magnitudes[(154)] aun cuando no se muestren a la vista [. . .] ” (*Gravitatione* 133). En el texto de *Quadrature* ya no menciona a la magnitud y se posiciona en contra de lo *infinitamente pequeño*: “Estaba dispuesto a mostrar que en el Método de las fluxiones no hay necesidad de introducir *Figuras infinitamente pequeñas*[(155)] en Geometría[(156)]”. Considero que cuando esta en contra de lo infinitamente pequeño, se refiere aquello infinitamente pequeño en magnitud.

En resumen, Newton considera que:

1. Las figuras geométricas pueden moverse o *fluir*.
2. Cuando disminuyen pierden dimensiones, del plano a la línea y/o el punto, pero conservan todas las relaciones geométricas que establecieron antes de disminuir. Esto se basa en su propia interpretación metafísica del espacio y las matemáticas.
3. Al conservarse sus relaciones geométricas puede trabajar con dichas figuras como si fueran figuras geométricas o como puntos o líneas.
4. Que el concepto de *fluir* o *evanescer* se puede utilizar en la técnica analítica, dígase álgebra, y por lo tanto puede comportarse como algo distinto de cero o como cero según convenga.
5. Que las fluxiones, cantidades *evanecentes* o *fluyentes* no se basan en lo infinitamente pequeño, ya que esto podría confundirse con los infinitesimales, algo que Newton considera incorrecto en geometría.
6. Finalmente al no incluir lo infinitamente pequeño, y con ello respetar el axioma de Arquímedes, está de acuerdo con la geometría de los antiguos, *cf. Quadrature*, por lo que es válido su método para las matemáticas.

Con estas consideraciones cerraré el estudio de la parte de Newton para proseguir con el texto de Berkeley. En la siguiente sección se presentará la filosofía de Berkeley, quien en varios puntos estará en contra de Newton, en especial en considerar a Dios como el origen y la justificación del mundo físico y las matemáticas.

2.3. Berkeley

El Obispo de Cloyne, George Berkeley fue un filósofo irlandés que desarrolló una filosofía empirista. Considera que la experiencia sensible es la forma en que conocemos. Para Berkeley, la percepción es finita, por lo que existe un mínimo que los sentidos pueden percibir. Toda sensación, ya sea visible o tangible está

[154] Énfasis mío.
[155] Énfasis mío.
[156] “I was willing to shew, that in the Method of Fluxions there’s no need of introducing Figures infinitely small into Geometry.”

compuesta por una cantidad inmensamente grande, pero finita, de mínimos visibles, *Minimum Visibile*, o tangibles, *Minimum Tangibile*. Considera, además, que la mente es el órgano que nos permite conocer. Al haber un mínimo en nuestra sensibilidad, y dado que nuestra mente crea conceptos, a partir de la repetición, nuestra experiencia siempre será expuesta e identificará algo a partir de lo inmensamente grande pero finito; impidiendo así, la divisibilidad infinita (*TV* §54). Estos conceptos estarán presentes en varias de sus obras. Su filosofía muchas veces se definirá a partir del *motto: esse est percipi aut percipere* "ser es ser percibido o percibir". Algo importante en la propuesta de Berkeley, es que considera que las matemáticas están separadas de la realidad. En (*TV* §14) menciona que la geometría es solo una *hipótesis* que los matemáticos introducen para tratar geométricamente la óptica. Berkeley dice que durante siglos, y aún en su época se piensa que las matemáticas describen al mundo de algún modo. La postura de Berkeley al respecto era bastante original para su época, recuérdese por ejemplo, la famosa frase de Galileo: *el libro de la naturaleza está escrito en caracteres matemáticos*. Se puede decir, que la postura mantenida por Berkeley, es opuesta a varios tipos de *realismo matemático*, en especial a aquellos que consideran que hay *objetos matemáticos*. Berkeley piensa que no hay cosas fuera de la mente; está en contra de las propuestas que consideran a las matemáticas como una forma de conocer el mundo de manera exacta y real. Esto porque éstas solo son *hipótesis* para que el científico pueda trabajar y su estatus no cambia, aun cuando el conocimiento nos permita dar cuenta de algo en la experiencia empírica.

Desde la postura de Berkeley Dios existe, pero éste no tiene el mismo papel que el Dios de Newton. En primer lugar Berkeley es un obispo de la Iglesia de Inglaterra, lo cual hace que acepte la Trinidad; segundo, aunque, tanto para Berkeley como para Newton, Dios es el sustento del mundo y de las leyes en él, para Berkeley, Dios no interviene en el mundo como lo sostiene Newton. Dios es el sustento del mundo en el que nuestras mentes perciben, pero lo percibido por ellas no tiene que corresponder con algo que de hecho exista fuera de nuestra mente y más bien las reglas que postulamos son *hipótesis* para entender los fenómenos que percibimos. Es decir, las matemáticas siempre están en nuestra mente, y ahí operan, no tienen ninguna existencia fuera de ella; además las reglas de la naturaleza también están en nuestra mente. Dios ha hecho el mundo en que las mentes perciben, pero Dios no está obligado a proveernos de las percepciones de lo que es el mundo; y nuestras mentes tampoco tienen la capacidad de percibir lo que Dios hace.

Un punto importante que se contrapone a la postura de Newton, es que Berkeley considera que las leyes de la aritmética[157] son útiles para computar, *lo que se necesite computar*. Esta postura puede considerarse mucho más abierta a la de Newton quien limitaba el uso del álgebra al análisis matemático. Puede argumentarse que, para Berkeley, el álgebra puede usarse en la matemática siempre y cuando sea para computar algo. La aritmética, desde el punto de vista de Berkeley, son símbolos y como tales se pueden comparar con las palabras y/o el lenguaje (*PHK* I §122 e Introduction §19). Aun cuando Berkeley considera que el álgebra es útil, limita su uso y considera que cuando un hombre estudia la aritmética por sí misma, pasa el tiempo en

[157] Yo agregaría el álgebra.

razonamientos y controversias puramente verbales (*PHK* I §122).

Para Berkeley existe poca o ninguna diferencia entre los métodos geométricos y los métodos algebraicos, porque para Berkeley decir que "*triángulo* es definido por ser una *superficie plana comprendida por tres líneas rectas*", no nos dice nada de las otras características del triángulo, como su color o tamaño (*PHK* Introduction §18); de modo similar a como una letra en álgebra no siempre sugiere una cantidad particular al manipularla (*PHK* Introduction §19). Así cuando el matemático trabaja de manera sintética, o analítica, el matemático trabaja con las leyes a las cuales está sujeto la figura, o letra, y no con el objeto mismo, o con una cantidad estipulada. Ambas formas de trabajar dejan de lado algunas características que se presentan cuando los observamos, como el color y el grosor de las líneas en la geometría, y la cantidad en el álgebra. Aun cuando encuentra similitudes en la forma de trabajar tanto sintética como analítica, considera que el álgebra puede hablar de cosas sin significado y podemos caer en el error de querer estudiar las reglas de cosas sin significado lo cual convierte a dicho estudio en algo puramente verbal (*PHK* I §122), como se mencionó anteriormente.

Considero que la renuencia de Berkeley a estudiar únicamente las reglas del álgebra se debe a que probablemente se dio cuenta de que dichas reglas no establecen ninguna ontología o cualidad de los objetos de los que habla. Por ejemplo la reconstrucción de los números por von-Newman utiliza los siguientes elementos, $\{,\},\varnothing$, mediante la siguiente cadena $0 = \varnothing, 1 = \{\varnothing\}, 2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, 3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots$. Esta cadena no habla de nada de lo que tengamos experiencia, solo hace referencia a sí misma. Pero, ¿cómo podemos estar seguros que dicha cadena representa a los números? Probablemente Berkeley quería evitar este tipo de preguntas.

Una última observación pertinente, es que en matemáticas, Newton y Berkeley son opuestos. Primero porque Newton considera que Dios es el origen del universo y las matemáticas y no pueden concebirse sin Él; mientras que Berkeley considera que las matemáticas solo están en nuestras mentes, Dios no tiene porque pensar de la misma manera que nosotros. Segundo, mientras que Newton considera que el método sintético es el óptimo para hacer una prueba matemática; Berkeley no se pronuncia sobre esto, es más para Berkeley probablemente la única diferencia significativa es que en geometría se conserva un significado a través de las operaciones geométricas. Finalmente Dios no da sustento a las matemáticas ni a la física, como lo propone Newton, estas son *hipótesis* que los científicos postulan para tratar de manera matemática un fenómeno empírico.

En resumen, Berkeley fundamenta las matemáticas en las reglas del lenguaje que lo describen. Dado que el lenguaje es una etiqueta a la cual le asignamos un significado y dado que en matemáticas realizamos la misma operación de asignar a una etiqueta un significado, se puede considerar que las matemáticas son un lenguaje. Por ejemplo, la mente asocia nuestra repetida exposición empírica a un árbol, que está dada por una multiplicidad de sensaciones, a un concepto y posteriormente a una etiqueta bajo las cuales agrupamos dicho cúmulo de sensaciones. Con dichas etiquetas logramos articular un lenguaje con el cual podemos trasmitir ideas. Del mismo modo la repetida exposición a los elementos u objetos que conforman las matemáticas nos permiten conocer las propiedades de dichos objetos al seguir las reglas matemáticas propuestas junto a la experiencia empírica. Dicho de otra manera, mi percepción de la línea me permite conocer el objeto matemático línea y las definiciones, postulados y nociones comunes de la geometría euclidiana me permiten derivar las proposiciones como la proposición I.1; tal cual lo haría con el lenguaje y el concepto del árbol. Si conozco el significado del árbol y conozco las reglas del lenguaje, puedo utilizar dicho concepto, árbol, en una frase y darle significado. Para el caso del álgebra solo necesito las reglas del lenguaje para trabajar, las etiquetas en este caso puede significar cualquier cosa, altura, peso, tamaño, etcétera. Sin embargo, al final, toda etiqueta debe tener un significado, por lo que Berkeley dice que el álgebra no se puede estudiar por sí misma, limitando el uso del álgebra. Estudiar solo el comportamiento de las etiquetas, sin significado, no tiene sentido, ya que solo se hablaría de la nada y hablar de la nada parece no tener sentido alguno, desde la perspectiva de Berkeley.

2.3.1. La postura de Berkeley

En la siguiente sección se mostrará la postura de Berkeley, con un poco mas de detalle, con respecto a la metafísica de Newton. La intención es mostrar las principales diferencias entre las propuestas metafísicas de Newton y Berkeley.

- Dios es el sustento del mundo: De la misma manera que Newton considera que Dios es el origen del mundo, Berkeley comparte esta postura. Sin embargo el papel de Dios en la naturaleza es diferente:

  > Sobre todo, creo que podemos justamente concluir que los objetos propios de la visión constituyen un lenguaje universal del Autor de la naturaleza, por lo cual estamos instruidos sobre cómo regular nuestras acciones en orden a atender las cosas que son necesarias para la preservación y el porvenir de nuestros cuerpos, así como para evitar cualquier cosa que nos dañe y destruya. Es por su información que nosotros nos guíamos en todas las transacciones y preocupaciones de la vida. Y la manera en que ellos significan y nos marcan a nosotros los objetos que están a la distancia, es la misma manera que la de los lenguajes y signos del nombrar humano, el cual no sugiere que las cosas signifiquen por alguna semejanza o identidad de la naturaleza, pero solo por la habitual conexión que la experiencia lo ha hecho para nosotros para observar entre ellas[(158)]. (*TV* §147)

  En el texto anterior, Berkeley considera que Dios[(159)] permite a nuestros ojos ver mediante su poder y sus reglas. En este punto Berkeley y Newton tendrían la misma postura. Para Berkeley lo que nosotros consideramos que es el caso en la naturaleza, solo lo es por una *conexión habitual*[(160)] que nuestra

[158]"Upon the whole, I think we may farly conclude that the proper objects of the vision constitute an universal language of the Author of nature, whereby we are instructed how regulate our actions in order to attain those things that are necessary to the preservation and well-being of our bodies, as also to avoid whatever may be hurtfull and destructive of them. It is by they information that we are principally guided in all the transactions and concers of life. And the manner wherein they signify and mark unto us the objects which are at the distance is the same with that languages and signs of human appointment, which do not suggest the things signified by any likeness or identity of nature, but only by habitual connexion that experience has made us to observe between them."

[159]Berkeley utiliza varios nombres que se consideran equivalentes entre ellos *Autor de la naturaleza* y *Dios*. De la misma manera que Newton utiliza nombres como *señor Dios, supremo Dios, señor de todo*.

[160]La *conexión habitual* a la que se refiere Berkeley posiblemente sea un antecedente de la *conexión necesaria* o *última* planteada por Hume. Para Hume dos fenómenos A y B, que se presentan a una mente humana y se dan uno después del otro en una *conexión conjunta*,

mente hace; y aun cuando encontremos algo que explique dicha *conexión habitual*, esta explicación no necesariamente es la misma para Dios o una regla que Dios ha dispuesto para seguirse. En este punto Newton y Berkeley empiezan a diferir, ya que si bien Newton también considera que los sentidos no pueden captar todo lo que puede ser el caso (*cf.* sección 2.2.5) considera que la explicación a la que llegamos da cuenta de las propiedades de Dios.

Para Berkeley las condiciones de posibilidad de nosotros como seres pensantes son totalmente dependientes de Dios:

> Es entonces claro, que nada puede ser más evidente para cualquiera que es capaz de la última reflexión, que la existencia de Dios, o un espíritu que está íntimamente presente en nuestras mentes, produciendo en todas ellas toda una variedad de ideas o sensaciones, que continuamente nos afectan, de quien tenemos absoluta y entera dependencia, en corto, *en quien vivimos, nos movemos y tenemos nuestro ser* [. . .][(161)] (*PHK* I §149)

Dios nos provee de un lenguaje universal de la naturaleza, pero que solo provee información para evitar el daño y no sugiere algún parecido o identidad con la naturaleza:

> En general, creo que podemos concluir, que los propios objetos de visión constituyen el lenguaje universal de la naturaleza, por el cual se nos instruye cómo regular nuestras acciones, para lograr esas cosas, que son necesarias para la preservación y el bienestar de nuestros cuerpos, como también para evitar cualquier cosa que pueda ser hiriente y destructiva para ellos. Es por su información que nos guiamos principalmente en todas las transacciones y preocupaciones de la vida. Y la manera en que significan, y nos señalan los objetos que están a distancia, es la misma que la de los idiomas y los signos del designar humano; que no sugieren las cosas significadas, por ninguna semejanza o identidad de la naturaleza, sino solo por una conexión habitual, que la experiencia nos ha hecho observar entre ellas[(162)]. (*TV* 147)

Dios es quien continuamente produce las sensaciones que percibimos, esto con el fin de permitirnos actuar de acuerdo a las impresiones constituidas por un lenguaje universal creado por Él[(163)]; pero estas impresiones siguen las reglas del lenguaje humano caracterizado por signos, y no tienen una relación directa con la naturaleza. Esto va en contra de la suposición de Newton de que podemos acceder de cierta forma a la naturaleza porque Dios hizo las cosas de manera real y existen y nos hizo a su semejanza para investigar la naturaleza.

---

terminan siendo asociados por la mente, si estos se repiten a dicha mente varias veces, haciendo de esta *conexión conjunta* algo necesario en el sentido de que *si se da A necesariamente se debe dar B* (Morris y Brown 2019, §4, §5 y §6), (*Treatise* §ɪ §§ɪ §§§ɪᴠ), (*Treatise* §ɪ §§ɪɪɪ §§§ɪɪ), (*Treatise* §ɪ §§ɪɪɪ §§§ɪᴠ), (*Treatise* §ɪ §§ɪɪɪ §§§xɪᴠ). Un posible ejemplo es el de *si hay fuego, necesariamente hay calor*, sin embargo, ésta es una inferencia inválida, ya que el fuego puede ser simplemente una idea y como tal, esta idea puede ser pensada de otra forma sin contradicción. Puedo pensar en un *fuego que no queme o que no dé calor*. De hecho, muchos mitos hacen uso de este recurso como el *fuego frío*. Al no haber una contradicción en *fuego frío*, como idea, la *conexión necesaria* o *última* del *fuego caliente* se da solo por el hábito de asociar A, el fuego, con B, el calor. Pero un hábito y una justificación son dos cosas diferentes. El problema de la *conexión necesaria* o *última* forma parte del *problema de la inducción*, el cual considera que dada la repetición de un fenómeno, no tenemos justificación para pensar que dicho fenómeno se repetirá de la misma forma (Henderson 2019). Si bien es un tema aparte, en la filosofía analítica es de especial importancia *el problema de la inducción*.

161 "It is therefore plain, that nothing can be more evident to any one that is capable of the least reflexion, than the existence of God, or a spirit who is intimately present to our minds, producing in them all that variety of ideas or sensations, which continually affect us, on whom we have an absolute and entire dependence, in short, *in whom we live, and move, and have our being*. [. . .]"

162 "Upon the whole, I think we may fairly conclude, that the proper objects of vision constitute the universal language of nature, whereby we are instructed how to regulate our actions, in order to attain those things, that are necessary to the preservationand well-being of our bodies, as also to avoid whatever may be hurtful and destructive of them. It's by their information that we are principally guided in all the transactions and concerns of life. And the manner wherein they signify, and mark out unto us the objects which are at a distance, is the same with that of languages and signs of human appointment; which do not suggest the things signified, by any likeness or identity of nature, but only by an habitual connexion, that experience has made us to observe between them."

163 Se puede considerar que cuando Berkeley habla del Autor de la naturaleza se está refiriendo a Dios.

- La geometría y las matemáticas son herramientas humanas para entender el mundo, pero no tienen una existencia real:

> La verdad de esta afirmación [de que las líneas y los ángulos no pueden ser percibidos por la vista] será más evidente para cualquiera que considere que esas líneas y ángulos no tienen existencia real en la naturaleza, siendo únicamente una hipótesis formulada por los matemáticos, y por ello son introducidas en la óptica, para que ellos puedan tratar dicha ciencia en una forma geométrica[(164)]. (*TV* §14)

En esa época se creía que había una *geometría Natural* innata a los humanos. Esta geometría Natural sigue las leyes de la óptica, que son geométricas, y permitía, mediante diversos reflejos internos, evitar el efecto de la cámara obscura en los ojos. Además se creía que dado el ángulo en que la geometría Natural mostraba una imagen a la retina, se podía calcular la distancia de un objeto. La cita de Berkeley se refiere a que las leyes de la geometría nos ayudan a entender lo que pasa dentro del ojo, pero dicha formulación geométrica tiene únicamente el estatus de hipótesis.

Para Berkeley se debe distinguir entre nuestras postulaciones, que pueden ser matemáticas, y lo que es el caso en la naturaleza. La óptica se nutre de la geometría, pero esto no significa que la geometría pueda explicar todo, ni que lo que postulamos matemáticamente necesariamente exista. Para la época Moderna y en la actualidad, existen posturas filosóficas en matemáticas que consideran que los objetos matemáticos, como los ángulos, son reales. Pero para Berkeley las matemáticas son herramientas que utilizamos para tratar ciertos fenómenos.

Una posible crítica a Berkeley es decir que la geometría en la visión es hipotética, pero la geometría en sí misma es real. Berkeley podría responder que los ángulos siguen siendo hipotéticos ya que estos se trabajan de manera general, en vez de trabajarse de manera particular; es decir, supongo que trabajo para encontrar propiedades de todos los ángulos, en vez de encontrar elementos distintivos del ángulo que tengo enfrente. Esto hace que dichos ángulos se trabajen a través de la experiencia y como tal, esta experiencia está en mi mente, no en el mundo. Ésta crítica se verá en las secciones subsecuentes.

Berkeley también negará que el número y/o cantidad sea una propiedad de los objetos:

> Pero para una ilustración más completa de esta materia, se debe considerar que el número (que sin embargo algunos lo reconocen [al número] entre las propiedades primarias) no es nada fijo y arreglado, realmente existente en las cosas por sí mismo. Él es enteramente una criatura de la mente, considerado [el número] ya sea como una idea por sí misma, o como cualquier combinación de ideas para darles un nombre, y esto se hace pasar por una unidad. De acuerdo a lo cual la mente, combinando variadamente esas ideas, hace que la unidad varíe: y la unidad, y entonces, el número, el cual es solo una colección de unidades, también varía. Podemos nombrar una ventana [como] uno, a una chimenea [como] uno, a la casa en la cual hay muchas ventanas y muchas chimeneas tiene el derecho de llamarse uno, y muchas casas hacen una ciudad. En esos casos es evidente que la unidad constantemente relaciona representaciones particulares con los que la mente hace ideas, a las que agrega nombres, e incluye a la unidad más o menos en donde mejor se ajuste a sus propios fines y propósitos. Lo que sea que la mente considere como uno, entonces, eso es una unidad [. . .][(165)] (*TV* §109)

[164]"The truth of this assertion will be, yet, farther evident to any one that considers those lines and angles have no real existence in nature, being only an hypothesis framed by mathematicians, and by them introduced into optics, that they might treat of that science in a geometrical way."

[165]"But for a fuller illustration of this matter it ougth to be considered that number (however some reckon it amongst the primary qualities). It is entirely the creature of the mind, considering either an idea by itself, or any combination of ideas to which it gives

La mente, considera Berkeley, es la que asigna a diferentes cosas nombres, incluidas las consideradas *propiedades primarias*, incluso a la cantidad, porque esta no tiene un correlato directo con algún objeto físico. Más bien es un instrumento mental que nos permite contar. Esto también es una diferencia con Newton que puede deducir propiedades de la naturaleza dada una experimentación. Dado que la naturaleza y la matemática tienen el mismo origen, y dada la formulación matemática que describe un fenómeno, podemos decir que el fenómeno es real, así como la matemática que lo describe. En Berkeley, Dios nos afecta a todos con sensaciones, lo que hace algo perceptible para todos, pero lo que postulamos y lo que es, no necesariamente tienen una identidad. Además como las descripciones matemáticas son formulaciones hipotéticas hechas por la mente, la existencia de los objetos matemáticos se puede cuestionar, cosa que no sucede en Newton.

- No hay superioridad entre la geometría y la aritmética y/o álgebra[166]. La única diferencia es que en el caso de la aritmética/álgebra al ser un lenguaje que puede trabajar sin referencia a particulares, su estudio puede volverse una controversia puramente verbal:

> 12 Para hacer esto sencillo, por ejemplo, suponga a un geómetra que está demostrando el método de cortar una línea en dos partes iguales. Él dibuja, por ejemplo, una línea negra de una pulgada de longitud, lo cual en sí mismo es una línea particular, lo cual es sin embargo de un significado general, dado que así es usada ahí, ella [la línea] representa cualquiera de todas las líneas particulares; por ello lo que se demuestra para ella, es demostrado de todas las líneas, o en otras palabras, una línea en general. Y como esa línea particular se convierte en general, siendo hecha un signo, entonces el nombre *línea*, que es tomado absolutamente, es particular, por hacerse un signo es hecho general.
> [. . .]
> 19 Pero para dar una mejor cuenta de como las palabras producen la doctrina de ideas abstractas, debe observarse que eso es una opinión recibida, que el lenguaje no tiene otro fin que el de comunicarnos nuestras ideas, y que todo nombre significante se pone para una idea. Siendo así, y siendo con seguridad, que esos nombres, de los cuales no han sido pensados del todo insignificantes, no siempre marcan ideas particulares concebibles, en forma concluyentemente directa que ellas se propongan para nociones abstractas. Entonces hay muchos nombres en uso entre los hombres especulativos, los cuales [los nombres] que no siempre sugieren a otros determinadas ideas particulares, es algo que nadie puede negar. Y con un poco de atención, que no es necesario (incluso en el razonamiento estricto) que nombres significativos que se proponen para las ideas, deban todo el tiempo que son usadas, excitar el entendimiento de las ideas por las cuales se nombraron: en lectura y disertación, los nombres son en mayor parte usados como letras en *álgebra*, en la cual una cantidad particular es marcada con cada letra, y aun para proceder correctamente no es requisito en que cada paso cada letra sugiera a tus pensamientos, esa cantidad particular que le fue asignada para representar[167]. (*PHK* Introduction §12 y §19)

one name, and so makes it pass for an unit. According as the mind variously combine its ideas the unit varies: and as the unit, so the number, wich is only a collection of units, doth also vary. We call a window one, a chimney one, and yet a house in which there are many windows and many chimney hath an equal right to be called one, and many houses go to making of one city. In these and the like instances it is evident the unit constantly relate to the particular draughts the mind makes of its ideas, to which it affixes names, and wherein it includes more or less as best suits its own means and purposes. Whatever, therefore, the mind considered as one, that is an unit [. . .]"

[166]Cabe aclarar que en Berkeley parece no haber distinción clara entre aritmética y álgebra, ya que los dos hablan de nombres que pone la mente para referirse a algo, pero en ambos el referente siempre puede ser cambiado aleatoriamente. Dependiendo de la postura filosófica que se tenga, se puede considerar que la aritmética habla de los números en sí, y por lo tanto habría una referencia a objetos existentes. Pero como vimos en el apartado anterior, la unidad es un nombre puesto por la mente, por lo que en última instancia, la aritmética hablaría de los nombres impuestos por la mente y no de un objeto del cual se pueda obtener una experiencia. Aun suponiendo que existen los números, sin conceder que realmente existan, Berkeley puede decir que la aritmética habla de los números en sí mismos; y no de su uso en la experiencia, lo que hace a la aritmética solo una expresión, aunque tenga referencia, hable de sí misma y no de la experiencia de usar los números. Específicamente en (*PHK* I §121), menciona que los teoremas y las verdades de la aritmética son nombres, refiriéndose a los números; y caracteres, probablemente haciendo referencia a las variables algebraicas. Si bien el nombre que utiliza es *aritmética*, se puede estar refiriendo al *álgebra*.

[167]"12 By observing how ideas become general, we may the better judge how words are made so. And here it is to be noted that I do

Berkeley considera, que la acción de ignorar la particularidad de una línea y utilizar los postulados de la geometría, es etiquetar con un signo a la línea. Dicho signo sigue las reglas del lenguaje, del mismo modo en que el álgebra y la aritmética lo hacen.

> En *aritmética* entonces, no consideramos las *cosas* sino los *signos*, los cuales sin embargo no son considerados por sí mismos, esto es porque ellos nos indican cómo actuar con relación a las cosas, y a disponer correctamente de ellas. Ahora de lo que antes hemos observado, de las palabras en general (Introducción. §19) sucede aquí igualmente, que las ideas abstractas son pensamientos que son significados por un nombre numeral o con caracteres, mientras que ellos no sugieren ideas de cosas particulares en nuestras mentes. No entraré en la presente [entrada] en una disertación más particular de este tema; pero haré la observación de que es evidente de lo que ha sido dicho, esas cosas que pasan por verdades abstractas y teoremas concernientes a los números, son, en realidad, [cosas que] hablan sobre un objeto no distinto de cosas numerables particulares, excepto que solo son nombres y caracteres; los cuales originalmente vinieron considerados, con ningún otra consideración sino por ser signos, o capaces de representar aptamente, cualesquiera cosas particulares que los hombres necesiten computar. De esto se deduce, que ese estudio de ellos por su sí mismos sería tan de buen juicio como sabio, y con buen propósito, como lo sería si un hombre, negando el uso original o su intención original y subordinando el lenguaje, pasara su tiempo en impertinentes criticismos sobre palabras, o razonamientos puramente verbales[(168)]. (*PHK* I §122)

Desde mi perspectiva, Berkeley está siguiendo la postura de que un universal existe solo sí hay un particular que sea instancia de dicho universal. Recordemos que en (*PHK* Introduction §12) el matemático trabaja con una línea particular, pero razona de manera universal. Sin embargo, considera que esto no pasa en la aritmética/álgebra. Dado que la aritmética y el álgebra pueden ser sólo reglas del lenguaje sin referentes no podemos acudir a la experiencia de un particular para encontrar las propiedades que son universales. Y dado que Berkeley considera que todo está en la mente, no existe el mundo de las ideas, considera que el matemático no puede razonar sin referentes. En el caso de la

not deny absolutely there are general ideas, but only that there are any *abstract general ideas*: for in the passages above quoted, wherein there is mention of general ideas, it is always supposed that they are formed by *abstraction*, after the manner set forth in Sect. 8 and 9. Now if we will annex a meaning to our words, and speak only of what we can conceive, I believe we shall acknowledge, that an idea, which considered in itself is particular, becomes general, by being made to represent or stand for all other particular ideas of the same sort. To make this plain by an example, suppose a geometrician is demonstrating the method, of cutting a line in two equal parts. He draws, for instance, a black line of an inch in length, this which in itself is a particular line is nevertheless with regard to its signification general, since as it is there used, it represents all particular lines whatsoever; for that what is demonstrated of it, is demonstrated of all lines or, in other words, of a line in general. And as that particular line be comes general, by being made a sign, so the name *line* which taken absolutely is particular, by being a sign is made general. And as the former owes its generality, not to its being the sign of an abstract or general line, but of all particular right lines that may possibly exist, so the latter must be thought to derive its generality from the same cause, namely, the various particular lines which it indifferently denotes.

19 But to give a farther account how words came to produce the doctrine of abstract ideas, it must be observed that it is a received opinion, that language has no other end but the comunicating our ideas, and that every significant name stands for an idea. This being so, and it being with all certain, that names, which yet are not thought altogether insignificant, do not always mark out particular conceivable ideas, it is straightway concluded that they stand for abstract notions. That there are many names in use amongst speculative men, which do not always suggest to others determinate particular ideas, is what nobody will deny. And a little attention will discover, that it is not necessary (even in the strictest reasonings) significant names which stand for ideas should, every time they are used, excite in the understanding the ideas they are made to stand for: in reading and discoursing, names being for the most part used as letters are in *algebra*, in which though a particular quantity be marked by each letter, yet to proceed right it is not requisite that in every step each letter suggest to your thoughts, that particular quantity it was appointed to stand for."

[168] "In *arithmetic* therefore we regard not the *things* but the *signs*, which nevertheless are not regarded for their own sake, but because they direct us how to act with relation to things, and dispose rightly of them. Now agreeably to what we have before observed, of words in general (Sect. 19. Introd.) it happens here likewise, that abstract ideas are thought to be signified by numeral names or characters, while they do not suggest ideas of particular things to our minds. I shall not at present enter into a more particular dissertation on this subject; but only observe that it is evident from what hath been said, those things which pass for abstract truths and theorems concerning numbers, are, in reality, conversant about no object distinct from particular numerable things, except only names and characters; which originally came to be considered, on no other account but their being *signs*, or capable to represent aptly, whatever particular things men had need to compute. Whence it follows, that to study them for their own sake would be just as wise, and to as good purpose, as if a man, neglecting the true use or original intention and subserviency of language, should spend his time in impertinent criticisms upon words, or reasonings and controversies purely verbal."

geometría euclidiana siempre hay un particular con el cual trabajamos y aunque una línea se vuelva signo, dicho signo siempre hace referencia directa a un particular. Considero que ésta es la ventaja que Berkeley le da a la geometría, que siempre hay un particular al cual podemos acudir para encontrar una propiedad universal. Pero esta ventaja solo es epistemológica y no metafísica, ya que si el álgebra conserva los referentes entonces parece que ambos procedimientos tienen el mismo estatus metafísico, metodológico y epistemológico.

Para finalizar quiero destacar que, a pesar de que Newton y Berkeley parten del mismo principio: Dios es el sustento del mundo; desarrollan una metafísica y ontología diferentes. Newton tiene la seguridad de que el mundo físico existe y que es posible conocerlo matemáticamente. Es posible postular la existencia tanto del fenómeno físico, como de la matemática que lo describe[169]. Mientras que para Berkeley, la matemática solo designa nombres para algo que percibimos y el fundamento de las matemáticas es entonces la mente humana mediante las reglas del lenguaje. Aún cuando Dios es el sustento del lenguaje universal de la naturaleza, éste solo puede ser captado por nuestra mente, a través de los sentidos, y por lo tanto este lenguaje siempre está mediado. Al estar mediado no podemos asegurar semejanza o identidad de lo que capta nuestra mente con el lenguaje universal de la naturaleza sustentado por Dios. Esta es una diferencia importante con respecto a Newton que considera que nuestra mente sí puede asegurar una semejanza o identidad con el mundo sustentado por Dios.

En resumen Berkeley considera que:

1. Dios es condición de posibilidad de nosotros.
2. Él es el sustento del lenguaje universal de la naturaleza.
3. Pero dicho lenguaje siempre está mediado por nuestras mentes, por lo cual no podemos asegurar una semejanza o identidad con dicho lenguaje, sino solo una *conexión habitual*.
4. Al no haber identidad o semejanza con el lenguaje universal de la naturaleza, las matemáticas solo son hipotéticas.
5. Al ser hipotéticas las matemáticas, éstas solo operan en nuestra mente.
6. Al operar en nuestra mente tanto la geometría, como la aritmética y el álgebra son equiparables y el matemático las utiliza de manera similar, como signos, razonando de acuerdo a lo que dicho signo representa.
7. Pero dicho signo siempre debe hacer referencia a algo, ya que no puede establecerse una regla general, si no hay un particular que represente dicha regla general.

[169] Habría que investigar si para Newton hay una identidad fuerte, en el sentido de que es lo mismo, entre la descripción matemática del fenómeno y el fenómeno físico mismo.

En las siguientes secciones abordaré las críticas más importantes que Berkeley hace al cálculo desarrollado por Newton y Leibniz; concentrándome específicamente en la propuesta de Newton.

2.3.2. El Analista

La presente sección se dividirá en dos partes:

1. En la primera parte argumentaré que la crítica principal de *The Analyst* al cálculo de Newton es que éste depende de la metafísica propuesta por Newton. Derivado de esta crítica también se mostrará que el fluxón es un concepto que puede llevar a contradicciones, ya que se utiliza de dos formas; la primera forma de utilizarse es considerar que tiene magnitud y/o métrica medible, o en términos de Berkeley *que es finito el fluxión o finita la magnitud de éste*; la segunda forma de utilizarlo es considerar que el fluxón no tiene medida y/o métrica, pero que puede mantener relaciones de proporcionalidad. El problema con este comportamiento es que no sabemos como puede tener dos comportamientos distintos sin que ambos *exploten*(170). Por último se mostrará que Berkeley considera que el método es adecuado y da verdad, pero que mostrar el método para calcular las fluxiones y justificar las fluxiones son dos cosas diferentes.

   De las tres críticas mostradas, la segunda se ha considerado que es la principal del texto de *The Analyst*, pero desde mi perspectiva depende de la primera crítica; la primera crítica se ha desechado y considero que es la más difícil de probar; y la tercera depende de las dos anteriores críticas. El principal problema para estudiar el texto *The Analyst*, es que comúnmente se considera que Berkeley ha atacado a ambos cálculos. Considero que Berkeley muestra que aunque ambos cálculos funcionen, aún no se ha entendido como es que esto sucede y se ha supuesto sus principios mediante la práctica y no mediante un sistema científico que en ese entonces debía seguir los principios de ciencia aristotélica mostrados en los *Segundos Analíticos*; o los principios de la ciencia cartesiana mostrados en *Le Discours*, *Las meditaciones* y los *Principios de la filosofía*(171); ni en un sistema axiomático como el de Euclides.

2. En la segunda parte mostraré la crítica vertida en *The Analyst* al cálculo de Newton *in extenso*. En esta parte mostraré mis propias apreciaciones del texto, junto a fragmentos del texto original.

La intención de la primera parte es mostrar de manera sucinta los argumentos principales de Berkeley sobre el cálculo de Newton; mientras que en la segunda parte mostraré los puntos de la crítica de manera más detallada.

[170] En lógica se llama *explosión* al hecho de que dos elementos contradictorios como A, A, y *no* A, $\neg A$, sean utilizados conjuntamente, A *y no* A, $A \wedge \neg A$ y que de ellos se puedan introducir cualquier expresión arbitraria que no esté en las premisas. El problema de la *explosión* en lógica es que permite validar cualquier inferencia. Ejemplo: *Como y no como, entonces vuelo* es una inferencia válida porque *como y no como ha explotado*. Existen lógicas que *no explotan* pero su comportamiento no se parece a la lógica aristotélica que era la lógica principalmente utilizada por los pensadores de la época.

[171] Publicado como *Principia Philosophiæ*.

Las críticas vertidas en *The Analyst*

The Analyst (Berkeley 1734) es un escrito que irrumpió en la escena matemática de la modernidad post-newtoniana con particular fuerza en Inglaterra (Guicciardini 2003, P. 38). Siendo principalmente filósofo, Berkeley cuestionó la práctica matemática moderna más promisoria de aquella época, los *cálculos de Newton y Leibniz*. Historiadores, matemáticos y filósofos desde entonces se han interesado particularmente por aquella disputa, sin embargo no se han puesto de acuerdo en cuál fue la aportación de Berkeley a las matemáticas, si es que la hubo.

Aun cuando se considera que *The Analyst* tuvo un impacto importante en la práctica matemática inglesa posterior a Newton, las críticas de Berkeley se han dejado de lado por las siguientes razones:

(a) Autoridad: Dado el éxito de la mecánica clásica, que se puede considerar como la aplicación del sistema newtoniano de investigación física, sin su componente teológico, se convirtió en canon de la investigación física. Este éxito ha llevado a considerar que la forma propuesta de entender ciencia dada en la mecánica clásica, no solo es canon en física, sino en toda disciplina de investigación que se precie de ser científica; reemplazando así a la definición de la ciencia aristotélica y a la geometría euclidiana como disciplina modelo en la investigación científica. Así, las críticas en contra del sistema newtoniano, y con ello la crítica de Berkeley se desestimaron. Considero que se puede reevaluar la pertinencia de las críticas de Berkeley por dos razones:

   1) Si bien el sistema newtoniano y la mecánica clásica comparten la forma de realizar investigación física, no tienen el mismo origen o sustento metafísico. Esta distinción, permite reevaluar la crítica de Berkeley, ya que los ataques al sistema newtoniano de investigación experimental es a la metafísica de Newton, y no al sistema de investigación empírica y matemática.

   2) El hecho de que algo funcione, no significa que se ha probado o justificado. Dado el éxito de la forma de investigar del sistema newtoniano de investigación empírica y matemática, se ha considerado que las críticas en contra del sistema newtoniano están fuera de lugar. Sin embargo que algo funcione, y entender cómo funciona son cosas diferentes, punto que quiere destacar Berkeley.

(b) Presentismo: En matemáticas, el presentismo es la postura filosófica que considera que las matemáticas practicadas en la actualidad son las mismas, o al menos se puede considerar que tienen el mismo origen, que las matemáticas practicadas en la antigüedad (Barabashev 1997). Pero como se mostró en el capítulo anterior, la práctica matemática y los estándares de evaluación de las pruebas en la modernidad, son completamente diferentes a la práctica contemporánea. Esto debe considerarse al estudiar las críticas de Berkeley, quien está dirigiendo sus críticas a la práctica de su época y no puede saber como se desarrollará dicha práctica matemática. En la actualidad, *The Analyst* puede haberse superado, pero eso no significa, que en la época moderna los matemáticos hayan respondido a las críticas presentadas por Berkeley.

Considero que existen tres críticas principales vertidas en *The Analyst*:

1. El concepto de fluxión depende de la metafísica de Newton.
2. La fluxión o el fluxón es un concepto contradictorio.
3. Que un método funcione, el algoritmo de las fluxiones, y que esté justificado, son dos cosas diferentes.

La primera crítica: que la fluxión depende de la metafísica newtoniana, es quizá la crítica más olvidada en el texto de *The Analyst* pero considero que esta crítica es la más importante. Para Berkeley el método de las fluxiones está ligado inherentemente a la metafísica de Newton (*The Analyst §47, §48*), pues éste está determinado a evitar el uso del término *infinitesimal*, como lo entendía la comunidad matemática de esa época([172]), en sus textos y utiliza su propia definición plasmada en el texto de *Quadrature*. Desde la perspectiva de Newton y sus seguidores, Newton utiliza las herramientas del *análisis* disponibles para la época, y demuestra las propiedades de la fluxión. Pero los *primeros principios* o *principios propios* obtenidos por Newton no son utilizados de la misma forma que se usa en los distintos análisis de la época. Estos supuestos son *supuestos* y *después desechados* en las pruebas, ya sean éstas analíticas o geométricas ([173]). Para el cálculo de las fluxiones se supone un *triángulo con magnitud* y después *se desvanece la magnitud, pero se mantiene el triángulo y las relaciones de proporción creadas cuando tiene magnitud*. Se establece *a priori* por los matemáticos, que este método para encontrar un *supuesto desechable* forma parte del análisis; pero la forma de hacer análisis para dicha época supone mantener la misma hipótesis, aunque la prueba final se haga mediante una técnica matemática diferente a la utilizada en el análisis. Pongo como ejemplo la proposición I.I de Euclides, en la cual se construye un triángulo equilátero; dado que un triángulo equilátero por definición debe tener todos sus lados iguales, se hace el supuesto de que todos sus lados son iguales, la prueba se hace pensando en probar que sus lados son iguales mediante la *noción común 3*. En la fluxión se supone algo y en la prueba se desecha la suposición. Así suponemos que la fluxión tiene magnitud, para después desechar dicha suposición. Considero que esto muestra que en vez de análisis se realiza mediante un método que es comparable con el método de *chunk & permate*([174]). Éste método se utiliza cuando se tiene información contradictoria para trabajar matemáticamente, pero este método es nuevo y se ha supuesto como igual al método del análisis. Aún cuando se puede interpretar que la crítica de Berkeley es al método, considero que

[172] Newton está inmerso en un ambiente que utiliza ampliamente el concepto de infinitesimal/indivisible. Newton específicamente menciona al matemático John Wallis, *cf* sección 2.2.5, que se considera que utiliza este concepto (Malet y Panza 2015b) y se considera que su maestro Isaac Barrow también lo usó (Malet 2015).

[173] *Cf.* sección 2.2.5, este tema también se tratará a detalle más adelante.

[174] Si es el caso de que sea posible equiparar ambos métodos. Si bien trato de evitar los anacronismos, considero que es imposible no hacerlos. Mi intención es mostrar las similitudes entre el procedimiento de Newton y la técnica de *chunk & permate* que se verá en las siguientes secciones

en realidad trata de mostrar la dependencia metafísica del fluxón. En el caso de Newton, lo que le permite realizar esta suposición es que Dios puede garantizar que: las figuras geométricas en movimiento pueden converger en una figura de dimensión menor, perdiendo una métrica y/o medida, sin perder relaciones de proporción que dichas figuras hayan establecido con otras figuras, y pueden converger todas las figuras geométricas o solo algunas[(175)].

Como se mostró en la sección *Fases del método de fluxiones*, 2.2.5, Newton utiliza su metafísica en el método de las fluxiones. En *Gravitatione* se nos ha dicho que los *límites contermina* producen todo tipo de figuras geométricas; siguiendo esta suposición en *Quadrature* ha establecido que el fluxón o la fluxión al llegar a la *velocidad naciente* tiene como límite al triángulo *aunque éste no se muestre a la vista* (*Gravitatione* 132 y 133). Así, Newton puede establecer relaciones que se pueden considerar como isomórficas u homemórficas. Desde esta perspectiva metafísica, Newton no tiene una contradicción, ya que su metafísica le permite establecer un triángulo finito y desvanecerlo y/o *evanescerlo*, como lo hace en *Quadrature*. El proceso sería el siguiente:

1. Establecer una figura finita adecuada al procedimiento. En caso de las tangentes a una curva, un triángulo.

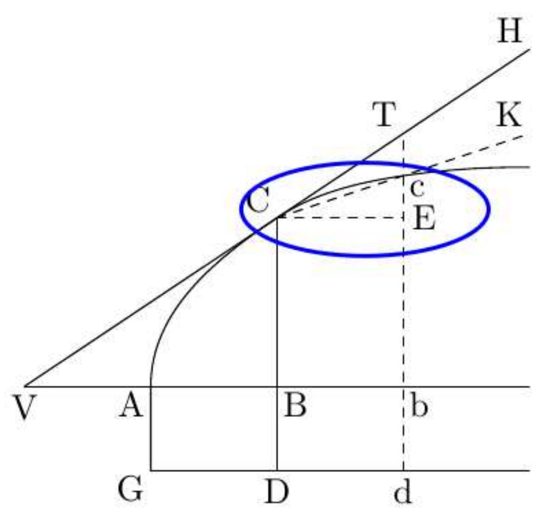
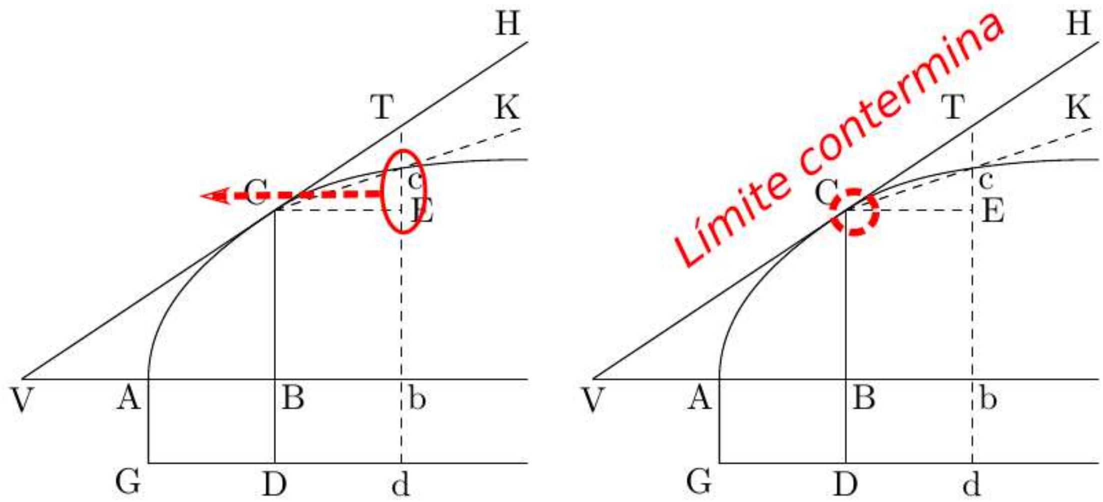


Figura 2.2: Estableciendo la figura geométrica.

2. Mover uno de los lados de la figura propuesta. Esto es con el fin de generar un *límite contermina* y crear una figura geométrica que no se muestre a la vista.

3. Establecer una relación entre la figura geométrica original y el *límite contermina*. Esto es posible porque, desde mi perspectiva, Newton establece que la figura geométrica original y el *límite contermina* son

[175]Se puede argumentar que dado que todas las figuras geométricas convergen se pueden mantener relaciones de proporcionalidad entre ellas; sin embargo al buscar la recta tangente en una curva, ésta no converge con los triángulos que la formaron y dichos triángulos sí convergen en un punto.



(a) Movimiento para generar el *límite contermina* (b) *Límite contermina*

Figura 2.3: Utilizando el movimiento en matemáticas

isomorfos. De esta manera Newton puede relacionar el *límite contermina* y el resto de las figuras geométricas o curvas que se estudian.

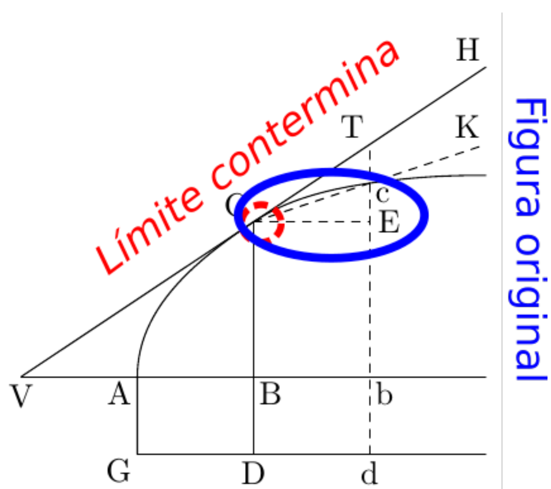


Figura 2.4: Estableciendo la relación de isomorfismo. Ahora se pueden utilizar las siguientes proporciones $\frac{\textit{límite contermina}}{\text{figura original}}$ ó $\frac{\text{figura original}}{\textit{límite contermina}}$

4. Establecer una relación de homemorfismo entre un límite común, que es una línea si es el límite de los planos y un punto si es el límite de las líneas, y el *límite contermina*. Aquí se asume que el *límite contermina* no tiene magnitud y se elimina del procedimiento. Así, Newton se asegura que se ha llegado a encontrar el objeto deseado, ya sea *una velocidad naciente* o un *fluxón*, entre otros objetos posibles.

5. Resolver finalmente el problema planteado originalmente mediante ténicas matemáticas convencionales.

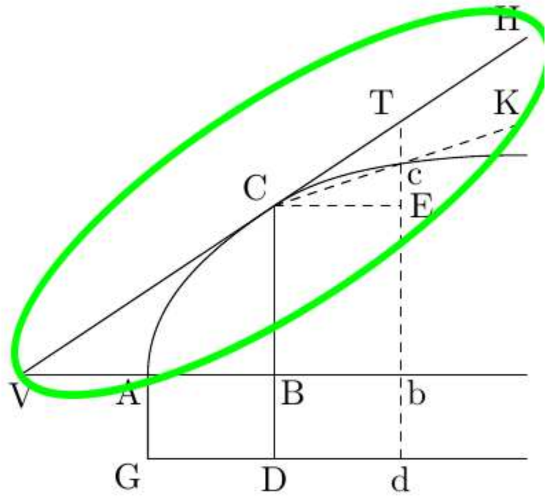


Figura 2.5: Resolviendo el problema con técnicas matemáticas usuales

Considero que los anteriores puntos muestran el procedimiento de encontrar una fluxión, y el uso de los *límites contermina* para el cálculo de Newton. El problema con el método mostrado es que no se explica bajo qué principios usa Newton la fluxión, en el texto de *Quadrature*. Al faltar la explicación hecha por Newton en el texto de *Gravitatione* la justificación del fluxón, fluxíon, *velocidades nacientes* o *figuras evanescentes* es incompleta. Así, la crítica vertida en *The Analyst* de que el método es obscuro, *cf.* (*The Analyst §10, §32 y §34*), es correcta, ya que para entender el *primer principio, principio propio* o la *idea clara y distinta* de cómo se desvanece un fluxón debe estudiarse en varias partes del *corpus* newtoniano, el cual no estaba disponible a todo el mundo y algunos de los textos fundamentales para entender el concepto de fluxión o fluxón, como el texto de *Gravitatione*, solo estuvieron disponibles mucho tiempo después de la muerte de Newton. Aun sin contar con los textos completos de Newton acerca de las fluxiones o fluxones, Berkeley correctamente critica que la metafísica de Newton es fundamental para el concepto utilizado para su cálculo; y que sus seguidores se confunden al negar dicha metafísica, *cf.* (*The Analyst §47*). Y debido a que la metafísica sustenta al fluxón o a la fluxión, sustituir el concepto con algún otro, solo agrega confusión, desde la perspectiva de Berkeley, ya que en primer lugar Newton mismo estuvo en contra de incluir los infinitesimales en su propuesta (*The Analyst §38*). Si los matemáticos replantean la definición de fluxón, sobre todo como infinitesimal, entonces los matemáticos no pueden utilizar la metafísica de Newton porque ésta está diseñada específicamente para utilizarse de manera sintética, como se vio en la sección 2.2.4. Sin la metafísica newtoniana, la división entre fenómeno físico y matemático aumenta, pudiendo considerarse como dos elementos separados, en vez de considerarse como uno solo; esto es porque una descripción matemática puede ser insuficiente para considerar que dicha descripción ha dado cuenta de un fenómeno físico ya que la confianza de Newton sobre el vínculo directo entre la descripción matemática y el fenómeno se da a través de Dios. Otro problema a considerar es que cuando se cambia de definición del fluxón a un concepto infinitesimal, las pruebas de los infinitesimales son generalmente sustentadas mediante el análisis matemático,metodología cartesiana que

Newton quiere evitar, ya que ésta, al menos, suspende el vínculo entre un fenómeno físico y Dios, y en un caso extremo elimina directamente dicho vínculo. Dado que Newton considera que Dios es un ente activo *que emana el espacio* (*Gravitatione* 139), utilizar una metodología que suspenda o elimine a Dios, es también eliminar las condiciones de posibilidad del fluxón mismo.

Si bien esta crítica se puede considerar poco importante dado el espacio que le ha dedicado Berkeley al doble comportamiento del fluxón, el cual ocupa una buena parte del texto de *The Analyst*; sin embargo, desde mi perspectiva, Berkeley está mostrando los problemas matemáticos de eliminar la metafísica newtoniana del concepto de fluxón. El texto de *The Analyst*, cierra con la observación de que sin dicha metafísica, la teoría de fluxiones se vuelve una teoría que aplica dos propiedades que pueden considerarse contradictorias: el fluxón es una figura geométrica, que tiene partes, sin magnitud, pero sin la magnitud una figura geométrica es indistinguible de un punto, el cual no tiene partes. Así para Berkeley el problema es que el matemático parece escoger la propiedad que más le convenga: el fluxón tiene partes y puede relacionarse si estamos estableciendo relaciones de proporción con otras figuras geométricas; y no tiene partes si queremos calcular la tangente a la curva como lo muestra el texto de *Quadrature*. Esto da pie a la siguiente crítica: los matemáticos han renunciado a la metafísica newtoniana, pero no han investigado qué *principios propios*, *primeros principios*, o *axiomas* pueden sustituir; dejando a los fluxones como elementos que se comportan de manera posiblemente contradictoria.

La segunda crítica importante en el texto de *The Analyst* es aquella del posible uso contradictorio del concepto de fluxón o fluxión. Es la crítica más detallada y larga en el texto de *The Analyst*. Para Berkeley, el concepto de fluxón es contradictorio o posiblemente contradictorio, ya que en el texto de *Quadrature*, se establece una figura geométrica, para después desvanecerla hasta hacerla un punto. Dependiendo de en qué parte del método estemos, se considerará un triángulo o un punto sin magnitud (*The Analyst §14, §15, §26, §27, §30, §34 y §35*). Ésta se considera como la crítica más importante del texto. La contradicción se da, como se vio en la sección *Las fases del método de fluxiones*, porque una figura geométrica tiene partes, mientras que el punto no; por lo cual, la fluxión generada por un triángulo que se desvanece hasta llegar a un punto, no puede establecer ninguna relación con otros elementos establecidos sintéticamente para el cálculo de la fluxión, ya que no hay parte con la cual relacionar dichos elementos. También hay que considerar que todo elemento de magnitud cero, como lo es el punto, no opera de forma habitual en la aritmética y el álgebra; el 0 se considera como el neutro[176] aditivo y sustractivo, por lo cual no se puede establecer una diferencia sumando o que representa el cambio en una variable, ya que al ser cero no hay aumento o cambio con la variable original. En el texto de *Quadrature*, el sumar o, un aumento o diferencia con la ecuación original, es parte importante en el cálculo de una fluxión mediante la técnica analítica. Recuérdese también que para las operaciones multiplicación y división $*, /$ operar con cero, es igual a cero o un valor indeterminado, por lo cual, todo elemento que multiplique o divida a la fluxión es cero o indeterminado; lo cual representa un

[176] En álgebra un *elemento neutro* no altera a otros elementos dada una operación. Ej. sean A, B dos elementos algebraicos, y $\star$ una operación binaria; se dice que B es un elemento neutro de $\star$, si y solo si $A \star B = A$.

problema porque en varios procedimientos hechos con el fluxón se hacen multiplicaciones y divisiones, en especial en la técnica analítica, pero tiene un valor diferente a cero o indeterminado.

El argumento de Berkeley en *The Analyst* sobre el doble comportamiento del fluxón se puede resumir de la siguiente manera:

1. El método sintético para calcular es inadecuado debido a que:
   a) "Nada es más claro que ninguna conclusión adecuada puede extraerse directamente de dos suposiciones inconsistentes" (*The Analyst §15*).
   b) Una suposición es inconsistente si se supone algo y después su contrario $A, \neg A$.
   c) El fluxón es una figura geométrica ya que puede establecer relaciones con otros elementos sintéticos (*The Analyst §34*).
   d) El método de las fluxiones me permite definir tangentes sobre una curva dada y con ello los puntos que las conforman.
   e) El fluxón es un punto porque permite obtener la tangente a la curva; y por definición, la tangente es la línea que corta en un punto a la curva, por lo cual el fluxón y un punto son equivalentes (*The Analyst §34*).
   f) El fluxón es una suposición inconsistente, porque tiene la propiedad de tener partes, por ser una figura geométrica; y no tener partes, por ser un punto, definición del punto, $A, \neg A$.
   g) Ninguna conclusión puede extraerse del método sintético del cálculo de fluxiones, porque el fluxón es una suposición inconsistente.
2. El método analítico es inadecuado debido a que:
   a) "Nada es más claro que ninguna conclusión adecuada puede extraerse directamente de dos suposiciones inconsistentes" (*The Analyst §15*).
   b) Una suposición es inconsistente si se supone algo y después su contrario $A, \neg A$.
   c) El fluxón tiene magnitud porque las operaciones aritmético-algebraicas están definidas, tienen valor, y me permite operar con otros elementos algebraicos([177]) (*The Analyst §9, §13, §14 y §15*).
   d) El fluxón no tiene valor, es cero, porque eventualmente se desvanece (*The Analyst §9, §13, §14 y §35*).
   e) El fluxón es una suposición inconsistente porque tiene la propiedad de tener valor y no tener valor $A, \neg A$.

[177] Si el fluxón fuera cero, estaría indefinido para la división y las operaciones de suma y resta no me permitirían tener una diferencia con otros elementos algebraicos, por ser neutro para la suma y resta. En el caso de la multiplicación no tendría valor.

f) Ninguna conclusión puede extraerse del método analítico del cálculo de fluxiones, porque el fluxón es una suposición inconsistente.

3. El método de las fluxiones también es inadecuado debido a que:

   a) Todo elemento matemático debe partir de *definiciones, nociones comunes y postulados*.

   b) El fluxón o la fluxión no es un elemento matemático porque no está definido o no cumple con los requisitos de las *nociones comunes* o de los *postulados* (*The Analyst §35*): "No son cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, ni siquiera nada".

   c) Entonces el método de las fluxiones no es matemático ya que no parte de *definiciones, nociones comunes y postulados*.

Berkeley reconoce que el método de fluxiones es la llave con la cual los matemáticos encuentran los secretos de la naturaleza (*The Analyst §3*), pero considera que los *primeros principios* o *principios propios* que utilizan en el método de fluxiones se han supuesto (*The Analyst §10*), y no se han investigado, dado que el concepto de fluxón en sí mismo es contradictorio (*The Analyst §12, §13, §14, §16, §27 y §35*). Las conclusiones de este método son tentativas, al ser una conjetura apoyada solo por evidencia empírica, al menos en matemáticas. Para Berkeley uno de los problemas es que si bien el método funciona, eso no quiere decir que se ha explicado y entendido cómo lo hace y los principios bajo los cuales opera (*The Analyst §33*); de la misma forma en que hacer un telescopio y entender cómo funciona un telescopio son cosas diferentes, aunque estén relacionadas, siendo ésta la tercera crítica de Berkeley.

La tercera crítica que Berkeley hace, al menos al cálculo de Newton es que los matemáticos han aceptado un método que no está probado matemáticamente; y han aceptado dicho método solo porque ha dado resultados en develar la naturaleza (*The Analyst §3*). Esto se debe a que gracias al cálculo, tanto fluxional como infinitesimal, es posible matematizar y analizar[178] diversos fenómenos presentes en la experiencia empírica. Es tal el poder descriptivo del llamado *análisis matemático clásico* que las herramientas desarrolladas en la modernidad son aplicadas tanto en las matemáticas como en la investigación científica más diversa, que incluye la física, química, estadística aplicada, ingeniería, entre otras actividades científicas y/o cuantitativas; y es parte fundamental de la investigación científica actual. Ante tal éxito y promesa de avances no vistos en las matemáticas tal vez en cientos de años, los matemáticos aceptaron al cálculo tal y como lo dejaron sus creadores o descubridores[179]; sin investigar la lógica del procedimiento, o los *primeros principios* que los creadores del cálculo utilizaron. Berkeley considera que los seguidores de Newton o quienes utilizan el

[178] En el sentido moderno y contemporáneo de la palabra.

[179] Recuérdese que para algunos filósofos de las matemáticas y matemáticos, las matemáticas existen independientemente de nosotros, postura realista; por lo cual cuando se trabaja una nueva disciplina u objeto matemático consideran que se ha descubierto dicha disciplina u objeto. Para otros filósofos y matemáticos, las matemáticas se crean, por ser una invención humana sin correlato, necesario o completamente innecesario, a alguna entidad existente independiente a nosotros, postura no-realista; para esta postura filosófica las matemáticas necesitan un agente epistémico humano al menos para ser estudiadas, y en algunas posturas más extremas la dependencia es total, ya que son un producto de la mente humana y dependen de éste para su existencia.

cálculo fluxional aplican las reglas sin estudiar la metafísica newtoniana (*The Analyst §32*); pero esta metafísica es necesaria para entender la teoría de fluxiones (*The Analyst §47*). Por lo tanto, alguien que aplique el cálculo de Newton no puede ser científico, y el estudio de las propiedades del cálculo de Newton no puede llamarse ciencia (*The Analyst §33*). Exponiendo el argumento de Berkeley sería de la siguiente forma:

1. La ciencia es aquella disciplina que se basa en:
   a) Los *primeros principios* o los *principios propios* propuestos por Aristóteles.
   b) Axiomas, lógica deductiva, y es presentada de manera sintética como lo es la geometría euclidiana.
   c) Una *idea clara y distinta* como lo propone Descartes.
2. El fin de la ciencia es deducir algo.
3. Un científico es aquel que estudia una disciplina científica.
4. Newton deriva la teoría de fluxiones de su metafísica (*The Analyst §47*), la cual se basa en:
   a) El método sintético propuesto por Euclides, Pappus y otros matemáticos clásicos (*cf.* sección 2.2).
   b) Su propia concepción de Dios (*cf.* sección 2.2).
5. Los seguidores de Newton o no conocen la metafísica de Newton (*The Analyst §47*), o consideran que pueden utilizar las fluxiones sin la metafísica de Newton (*The Analyst §32*).
6. Sin la metafísica de Newton el concepto de fluxón es posiblemente inconsistente (*cf.* crítica de Berkeley anterior).
7. No se puede deducir algo de un concepto inconsistente (*The Analyst §15*).
8. Entonces la teoría de fluxiones sin la metafísica de Newton no es ciencia porque:
   a) No puede deducir algo (*cf.* punto 8), y el fin de la ciencia es deducir algo (*cf.* punto 2).
   b) No se basa en el método sintético propuesto por Newton y no se ha remplazado con alguna alternativa de justificación que se considere científica (*cf.* punto 1).
9. Por lo tanto ni la teoría de fluxiones es ciencia (*cf.* punto 9); ni los fluxionistas son científicos, ya que estos aplican o estudian la ciencia, y la teoría de fluxiones no lo es (*cf.* punto 3), (*The Analyst §33, §47 al §50*).

Berkeley está poniendo el dedo en la llaga. Para los historiadores en matemáticas, la época Moderna es una fuente de descubrimiento importante que modelará la matemática por cientos de años y que aun hoy dicta la agenda de investigación matemática. El problema es que los matemáticos no estaban interesados en *sustentar* la introducción de objetos, conceptos, entre otros elementos matemáticos; ni los procedimientos realizados con dichos elementos matemáticos([180]). Lo que está diciendo Berkeley en este punto, es que una prueba matemática depende de algo más que una construcción sintética y la aplicabilidad de una investigación *per se*. Esto es un punto que los historiadores, filósofos y matemáticos tienen que conceder a Berkeley. Desde mi punto de vista, Berkeley ha mostrado que las pruebas matemáticas de la época, al menos para el cálculo de Newton, son laxas y carentes de justificación; así como los elementos usados en dichas pruebas. La historia le dará la razón a Berkeley, los matemáticos posteriormente darán nuevas definiciones a los cálculos de Newton y Leibniz, dando forma al cálculo diferencial e integral, que se estudia actualmente, utilizando como base el concepto matemático de límite.

Un importante aspecto, que habrá que investigar posteriormente con más detalle es que la crítica de Berkeley al cálculo de Newton, se dirige a los matemáticos que aplican el cálculo, y no a Newton mismo, ni a su metafísica, al menos de la parte que conoce con respecto a la teoría de fluxiones([181]). Para Berkeley son los discípulos de Newton quienes están más dispuestos a aplicar su método sin estudiar sus principios (*The Analyst §10, §17 y §47*). De esta forma, para Berkeley, mientras Newton se muestra cauteloso con su método de las fluxiones, son sus discípulos quienes lo usan incorrectamente. Esto un punto importante que pasa desapercibido; y esto sucede por las distintas preconcepciones que se tienen del texto *The Analyst*. Para distintos historiadores, matemáticos y filósofos, Berkeley es incapaz de entender la matemática y física de la época; considero que esto es falso. Berkeley es uno de los primeros filósofos en proponer que la mente es quien finalmente invierte la imagen obtenida por los ojos, propuesta ampliamente discutida en su trabajo *TV*. También considera que los cálculos disponibles en la época tienen fallas es su justificación, por lo cual deberán de cambiar de principios para ser integrados de manera adecuada a las matemáticas; cosa que finalmente pasó. Por último quiero decir que es justamente porque entiende perfectamente cómo funciona el cálculo de Newton que Berkeley escribe el texto de *The Analyst*. Después de Newton, el cálculo de fluxiones empezó una vida propia alejada de Newton, a quien Berkeley llama *el Gran Autor*, lo que hizo que los *calculistas à la Newton* trabajaran en el cálculo de fluxiones sin estudiar la metafísica newtoniana; pero las reglas sintéticas y analíticas del cálculo de fluxiones dependen de la metafísica newtoniana y se derivan de ellas, desde la perspectiva de Berkeley (*The Analyst §47*), punto con el que estoy de acuerdo con él. Así, el trabajo posterior a Newton carece de una justificación que el autor original del cálculo de fluxiones le dio; lo que deriva en las críticas dos y tres mostradas anteriormente. Me parece importante señalar que el texto está centrado en mostrar la falta de soporte matemático del cálculo de fluxiones; y aunque no quieran los matemáticos deben mancharse las manos con la metafísica newtoniana a fin de investigar sus principios o renunciar al cálculo de fluxiones como disciplina científica. Dado lo anterior considero que la primera crítica: el fluxón depende de la metafísica de Newton, es la más importante. Berkeley muestra que sin una adecuada justificación matemática, el cálculo de Newton es inconsistente y por lo tanto aplicable solo a la experiencia empírica y

[180] Recuérdese el postulado I.1 de Euclides, la construcción sintética se da con el círculo y el postulado I; pero la prueba se da mediante la *noción común* 3. Parece ser que en la época hubiera bastado con la construcción del triángulo mediante círculos y el postulado I; para después asumir que la prueba de que se ha construido un triángulo equilátero existe, sin mostrarla. Bos parece compartir la idea de que esta situación es común en la época Moderna.

[181] Considero que Berkeley estaría en contra del escrito de *Gravitatione*, pero ese escrito no estuvo disponible para él.

de manera heurística; en vez de ser un método matemático de aplicación general. Berkeley considera que no es su intención interpretar como verdadero o falso el cálculo fluxional y sus principios, aunque sean metafísicos (*The Analyst §48*); más bien le interesa mostrar si el cálculo de fluxiones cumple con los requisitos para considerarse matemático, y ha mostrado que no cumple con dichos requisitos, aunque los matemáticos confíen en que sí lo es por su aplicabilidad tanto matemática como extra-matemática.

Considero que estas son las críticas más importantes vertidas en *The Analyst*. En la siguiente sección se explicarán con más detalle varios de los puntos utilizados en mi reconstrucción de las críticas de Berkeley, con el fin de entender mejor las críticas mostradas en la presente sección.

El Analista

The Analyst consta de tres secciones: empieza con un índice de temas a tratar, desde el cual ya se pueden apreciar los puntos que Berkeley destacará sobre el tema. Sigue con el texto principal. Cierra con una serie de *cuestiones* que Berkeley considera que están abiertas y que los matemáticos deben responder. En esta sección se hará un resumen interpretativo de algunos puntos del cuerpo principal de *The Analyst* y las Cuestiones que presenta al final. En este escrito Berkeley cuestiona las bases de los cálculos tanto en su parte geométrica, como en su parte algebraica. En esta exposición me concentraré únicamente en la parte geométrica del cálculo de Newton y las críticas vertidas por Berkeley acerca de este tema. Berkeley comienza el texto de *The Analyst* hablando de que los matemáticos o las matemáticas parten de principios más evidentes para después hacer deducciones:

> Es una antigua observación la de que la geometría es una excelente lógica, y debe concederse que, cuando las definiciones son claras, cuando los *postulata* no pueden refutarse ni negarse los axiomas, cuando de la contemplación y la comparación de distintas figuras se derivan sus propiedades, mediante una perpetua y bien conectada cadena de consecuencias [. . .] (*The Analyst §2*)

Berkeley está consciente de que, para los matemáticos los cálculos de Newton y Leibniz son el tema de investigación matemática o física de su época. Su intención es decidir sobre la justificación de los cálculos de Newton y Leibniz:

> Pero lo que investigaré con mayor imparcialidad es si este método es claro u oscuro, consistente o inconsistente, demostrativo o precario, así someto mi investigación a vuestro propio juicio, así como al de cualquier lector sincero [. . .] (*The Analyst §3*)

Berkeley reconstruye el concepto de fluxión o fluxón, para después lanzar su primer ataque. Berkeley considera que no hay forma de entender la fluxión con la experiencia sensible. Berkeley sostiene una posición contraria a la de Newton. Newton considera que aun cuando existe un límite para la experiencia sensible, se puede trabajar con el infinito dado que la materia es divisible *in infinitum* y el alma puede transportar nuestro entendimiento, probablemente, a otro lugar, los fluxiones o las fluxiones, *cf. Segunda carta a Bentley.* Para Berkeley existe un límite para nuestras percepciones el cual nos impide entender el funcionamiento de una fluxión o fluxón:

> 3 [. . .] Se supone que las líneas se generan por el movimiento de los puntos, los planos por el movimientos de las líneas y los sólidos por el movimiento de los planos [(182)]. Y, por cuanto las cantidades generadas en tiempos iguales son mayores o menores conforme a la mayor o menor velocidad con la que se incrementan y se generan se ha encontrado un método para determinar las cantidades a partir de las velocidades de sus movimientos de generación. A tales velocidades se les denomina fluxiones y a las cantidades generadas se les denomina cantidades fluyentes. De estas fluxiones se dice que son casi como incrementos de las cantidades fluyentes, generadas en las mínimas partículas iguales de tiempo y que están, precisamente, en la primera proporción de los incrementos nacientes o en la última de los incrementos evanescentes [. . .]
>
> 4 [. . .] Y de las ya fluxiones hay otras fluxiones, y tales fluxiones de fluxiones se denominan segundas fluxiones, y las fluxiones de estas segundas fluxiones se denominan terceras fluxiones, y así sucesivamente [. . .] *ad infinitum*. Ahora bien, así como nuestros sentidos se esfuerzan y se confunden con la percepción de objetos extremadamente minúsculos, así también la imaginación, facultad que se deriva de los sentidos, está muy presionada y perpleja para formar ideas claras de las mínimas partículas de tiempo o de los mínimos incrementos generados de ellas y es un esfuerzo mucho mayor el comprender los momentos o esos incrementos de las cantidades en *statu nascenti* [. . .] La celeridad incipiente de una celeridad incipiente, el aumento naciente de un aumento naciente, esto es, de una cosa que no tiene magnitud, tomados a la luz que queráis, se encontrará que su concepción clara es imposible, si no me equivoco. Para determinar si esto es así o no, apelo al juicio de cualquier lector pensante. [. . .] (*The Analyst §3 y §4*)

Berkeley considera que una vez alcanzado el límite de nuestras percepciones, los conceptos que desarrollemos a partir de ahí ya no tienen sentido, porque en álgebra como en geometría, hacemos operaciones con símbolos, y dichos símbolos deben ser significantes para evitar *las disputas verbales inútiles*. Una vez que alcanzamos los *minimum*, visibles o tangibles, los objetos matemáticos que los representan dejan de tener un significante y por lo tanto parece que la fluxión se ha convertido en *una disputa verbal* sin significado. Puede argumentarse que los matemáticos pueden hablar de elementos que no tienen referencia alguna a la naturaleza o a nuestras percepciones. Sin embargo el problema que quiero destacar aquí, a partir de la crítica de Berkeley, es que aun cuando se pueda trabajar con dichos símbolos, estos tienen que ser explicados de manera cartesiana[(183)]. Berkeley les comenta a los seguidores de Newton que la definición de fluxión o fluxón depende de que: a) seamos capaces de entender el concepto; y b) aplicar sus reglas correctamente. Pero como el concepto es más bien obscuro, al depender ampliamente de la metafísica newtoniana, no se cumple ni a), *no es una idea clara*; ni b), debido a que a) no se cumple, no se está seguro que pueda ocurrir b). Para Berkeley el estatus ontológico dado a los fluxiones o a las fluxiones, como reales, no corresponde con la certeza de sus principios. Las mentes de la época los ven como *algo concebido y dominado*. Y como ya se han dominado, se puede seguir construyendo fluxiones de orden superior[(184)]. Los seguidores de Newton consideran haber alcanzado una verdad cartesiana, pero para Berkeley el cálculo de Newton está precedido por la confusión:

> Ciertamente debe reconocerse que los matemáticos modernos no reconocen estas propuestas como misterios, sino como algo claramente concebido y dominado por sus mentes comprensivas. No tienen escrúpulos en decir que mediante el auxilio de esta nueva analítica ellos pueden penetrar en el infinito mismo, que incluso pueden extender su visión mas allá [. . .] Pero a pesar de todas estas aseveraciones y pretensiones, puede preguntarse con justicia si así como otras personas en otras investigaciones se engañan con frecuencia con las palabras o términos, no se engañan y se dejan seducir maravillosamente también aquellas mediante

[182]Recuérdese que en *Gravitatione* el procedimiento para obtener el *límite contermina* es mover la figura con mayor dimensión a una de menor dimensión, por ejemplo, de líneas que se mueven a puntos. El procedimiento que describe Berkeley es más parecido a lo que ahora se conoce como *superficies de revolución*. Un ejemplo es el cono que se obtiene al girar una línea que no sea paralela a los ejes coordenados. Si bien éste detalle puede ser menor, conviene hacer nota de él, ya que pueden estar hablando de procedimientos diferentes y por lo tanto de efectos diferentes en matemáticas.

[183]Los principios propuestos deben ser *ideas claras y distintas*, como el juicio del *cogito*.

[184]Segundas fluxiones, terceras fluxiones, etcétera.

> sus peculiares signos, símbolos o variables. Nada es más fácil que idear expresiones o variables para fluxiones e infinitesimales [. . .] $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, [\ldots], dx, ddx, dddx[\ldots]$. Ciertamente estas expresiones son claras y distintas y la mente no encuentra ninguna dificultad para concebir que se continúan más allá de cualesquiera límites asignables, pero si descorremos el velo y vemos debajo; [. . .] descubriremos un gran vacío, mucha oscuridad y confusión, y si no me equivoco, imposibilidades y contradicciones directas [. . .] (*The Analyst §8*)

Berkeley a continuación critica la metodología analítica[(185)]; utiliza como ejemplo el producto de dos funciones[(186)], que en la época de Berkeley se entendía como el fluxón de un rectángulo AB:

> La propuesta central en el método de las fluxiones es obtener la fluxión o el momento del rectángulo o producto de dos cantidades indeterminadas, por cuanto que de allí se derivan reglas para obtener las fluxiones de todos los demás productos y potencias, sean cuales sean los coeficientes o los índices, enteros o fracciones, racionales o irracionales. [. . .] Supóngase que el producto del rectángulo AB se incrementa mediante un movimiento continuo y que se incremente mediante un movimiento continuo y que los incrementos momentáneos de los lados A y B son a y b. Cuando los lados A y B eran deficientes o menores por una mitad de sus momentos, el rectángulo lo era $[A - \frac{1}{2}a] \times [B - \frac{1}{2}b]$ esto es, $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. Y tan pronto como los lados A y B se incrementan en otras dos mitades de sus momentos, el rectángulo se convierte en $[A + \frac{1}{2}a] \times [B + \frac{1}{2}b]$ o $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. De este último rectángulo sustráigase el primero y la direrencia restante será $aB + bA$. Por lo tanto, el incremento del rectángulo, generado por la totalidad de incrementos a y b es $aB + bA$ *Q.E.D.* Pero está claro que el método directo y verdadero para obtener el momento o incremento del rectángulo es tomar los incrementos ya aumentados con la totalidad de sus incrementos y luego multipicarlos el uno por el otro, $A + a$ por $B + b$, cuyo producto, $AB + aB + bA + ab$, es el rectángulo aumentado; de donde si le restamos AB, el residuo $aB + bA + ab$, será el verdadero incremento del rectángulo, que excede en la cantidad ab al que se obtuvo mediante el método anterior, ilegitimo e indirecto. Y esto vale para las cantidades a y b, grandes o pequeñas, finitas o infinitesimales, [. . .] Tampoco podrá alegarse que ab es una cantidad excesivamente pequeña, puesto que se nos ha dicho que *in rebus mathematicis errores quam minimi non sunt contemnendi*[. . .] (*The Analyst §9*)

Para Berkeley el problema con los incrementos nacientes, fluxiones o momentos evanescentes es que su comportamiento parece ser arbitrario, o al menos convenir al matemático para justificar su procedimiento. Dado que cada incremento puede comportarse de dos formas: a) como un elemento finito, el cual puede guardar relación con otros objetos y permitir su existencia, como lo es Ab; y b) Como algo despreciable o nada, como lo es ab; Berkeley manifiesta su preocupación de que dicho comportamiento sea contradictorio, y por lo tanto inválido como objeto de estudio. Esta crítica corre aun cuando Dios sustente la fluxión, ya que como se vio en la sección 1.5 los objetos que dependen de Dios deben seguir el *primer principio*[(187)]. Y en el caso de que no dependan de Dios, entonces se tiene que explicar cómo se puede utilizar una propiedad que tenga un comportamiento aparentemente contradictorio. Newton puede argumentar que su incremento naciente no tiene magnitud, pero sí relación con otras figuras, por lo que se evita el doble comportamiento. Solo se conservan los momentos que guardan relación con otro objeto y dado que a y b son dos momentos evanescentes, ninguno tiene relación con otro cuando se multiplican ab. Sin embargo puede argumentarse que, como se vio en la sección 2.2.5, estos momentos evanescentes dependen de la metafísica de Newton y dicha metafísica puede rechazarse y con ella los principios que soportan a las fluxiones o fluxones. Mientras que objetos como son la línea y el punto euclidianos, Γραμμὴ, Σημεῖόν, junto a los principios, postulados y definiciones euclidianos parecen no refutarse, y por lo tanto tienen que ser aceptados, incluso algunos de ellos como axiomas o *principios propios aristotélicos* o *ideas claras y distintas cartesianas*. Para Berkeley el hecho

[185] Entendida como las reglas algebraicas para calcular una fluxión o fluxón.
[186] En notación del cálculo diferencial e integral: $d(uv) = ud(v) + d(u)v$.
[187] La no contradicción de los dichos de Dios, sus objetos, o cualquier cosa que dependa de Él.

de que los principios bajo los cuales se calcula una fluxión no sustentan la eliminación de *ab*, y aunque *ab* tenga una magnitud mínima, esta no puede ser ignorada, bajo la propia metodología newtoniana. Esto hace que las fluxiones operen bajo principios oscuros, que no se conocen, pero que los fluxionistas trabajan como si fueran verdades:

> Nada más que la oscuridad del tema pudo haber animado o inducido al gran autor del método fluxionario a imponer a sus seguidores un razonamiento como éste a manera de demostración, y nada más que una deferencia implícita a la autoridad pudo mover a estos últimos a admitirlo. [. . .] Nada puede hacerse hasta no eliminar la cantidad *ab*. A fin de hacer esto, se cambia la noción de fluxión; se sitúa bajo luces diversas; las propuestas que deberían ser tan claras como primeros principios son confusas, y los términos que deberían usarse de manera fija son ambiguos. [. . .] Si una persona, por métodos no geométricos o demostrativos, queda satisfecha de la utilidad de ciertas reglas que luego propondrá a sus discípulos como verdades indudables, las cuales se propone demostrar de una manera sutil y mediante la ayuda de nociones sutiles e intrincadas, no es difícil concebir que esos discípulos, para evitarse el problema de pensar, estarán inclinados a confundir la utilidad de la regla con la certeza de una verdad y aceptarán la una por la otra [. . .] (*The Analyst §10*)

Como se comentó en la sección 1.3, un problema que se ha considerado importante en la práctica matemática de la Modernidad, es la falta de rigor en las pruebas y la preferencia por las construcciones geométricas. Desde la perspectiva de Berkeley, Newton ha quedado satisfecho al poder encontrar la fluxión de un rectángulo, y dada su propuesta metafísica, ha considerado que hizo una prueba matemática cuando ha sido solicitada[(188)]. Pero que funcionen las fluxiones y que su autor considere que ha probado las fluxiones, no significa que de hecho se han probado dichos fluxones. Esto es un punto importante que debe tomarse en cuenta, ya que muchas veces se ha considerado que bastan los resultados para probar algo. Pero en matemáticas se empezó a mostrar que apelar únicamente a los resultados y a las intuiciones matemáticas, puede llevar a crear certezas donde solo hay una intención deliberada para ajustar una teoría matemática a cierto tipo de fenómenos matemáticos. Uno de los ejemplos es el descubrimiento o creación[(189)] de las geometrías no-euclidianas. Durante siglos se pensó que el quinto postulado de Euclides era el único posible para la geometría. Después se probo que la negación de este postulado[(190)] es consistente[(191)] con al menos otros tres postulados de Euclides[(192)]. En la Modernidad se consideraba que la geometría plana daba cuenta del espacio. Sin embargo al encontrarse otras geometrías esta idea se empieza a dejar de lado. Se puede considerar que el quinto postulado se hizo exprofeso para la geometría plana y del espacio y no por ser un *primer principio*. Aunado al descubrimiento de las geometrías no-euclidianas, se considera que la justificación del cálculo es una de las razones para abandonar las intuiciones y los resultados como método de justificación en matemáticas.

188 El texto de *Quadrature* puede considerarse como una prueba matemática por parte de Newton.

189 Existen diversas posturas en filosofía de las matemáticas que consideran que las matemáticas se descubren, estas posturas son generalmente realistas; la premisa es que los objetos matemáticos y sus propiedades existen de forma independiente a los humanos. Otras posturas consideran que la matemática es una herramienta del pensamiento que se forma únicamente con la mente humana y como tal no puede existir sin los humanos, por lo que cada objeto matemático y sus propiedades son creaciones de los humanos; generalmente estas posturas son anti-realistas. Entre estas dos posturas existen varios matices que pueden favorecer el descubrimiento o la creación de las matemáticas.

190 La versión más famosa del postulado es la siguiente: dada una recta y un punto ajeno a ella, *por dicho punto sólo pasa una línea paralela a la primera*. La negación se puede hacer de dos formas: a) dada una recta y un punto ajeno a ella, *por dicho punto pasan una infinidad de líneas paralelas a la primera*; y b) dada una recta y un punto ajeno a ella, *por dicho punto no pasa ninguna línea paralela a la primera*.

191 No genera contradicción.

192 Existen geometrías en las cuales una línea recta *no puede extenderse infinitamente* que es la negación del postulado *toda recta puede extenderse infinitamente*.

Para Berkeley las fluxiones son una aplicación del concepto de infinitesimal. Esta interpretación del fluxón es posible, ya que como se vio en la segunda carta a Bentley, Newton conocía las técnicas infinitesimales del Dr. Wallis, *cf.* sección 2.2.5. Newton considera que su fluxón no es infinitesimal debido a la metafísica que lo sustenta. Pero lo anterior puede ser rebatido, ya que como se comentó con anterioridad, se puede rechazar la metafísica de Newton. Para algunos matemáticos contemporáneos, Newton sí utiliza infinitesimales/indivisibles (*cf.* (Malet y Panza 2015a)). Para Berkeley, los fluxones son similares a los infinitesimales por:

> Los puntos o meros límites de las líneas nacientes son, sin duda, iguales en cuanto que ninguno tiene más magnitud que otro, pues un límite, como tal, no es ninguna cantidad. Si por *momento* queréis decir algo más que un mero límite inicial, esto debe ser o bien una cantidad finita, o bien un infinitesimal. Pero, expresamente, todas las cantidades finitas están excluidas de la noción de momento; por lo tanto, el momento debe ser un infinitesimal. Y, ciertamente, aun cuando se ha empleado mucho artificio para escapar o evitar la admisión de cantidades infinitamente pequeñas, parece que no ha tenido efecto. Hasta donde puedo ver, no se puede admitir ninguna cantidad intermedia entre una cantidad finita y nada sin admitir infinitesimales. Un incremento generado en una partícula finita del tiempo es él mismo una partícula finita, y por tanto, no puede ser un momento; por consiguiente, debéis tomar una parte infinitesimal de tiempo. [. . .] (*The Analyst §11*)

El texto del *The Analyst* continúa con la crítica al doble comportamiento del fluxón o la fluxión; comportamiento que Berkeley considera como inválido ya que una vez rechazados los principios que sustentan una conclusión, debe rechazarse el resultado; pero los fluxionistas mantienen el resultado aun cuando se ha rechazado el principio que los genera:

> Del principio anterior, así demostrado, se deriva la regla general para encontrar la fluxión de cualquier potencia de una cantidad fluyente. Pero, como parece que hubo algún escrúpulo interno o conciencia de defecto en la demostración anterior, y cómo encontrar la fluxión de una potencia dada es algo de primera importancia, se juzgó, por tanto, que era adecuado demostrar lo mismo de una manera diferente, independiente de la demostración anterior. No obstante ahora procedo a examinar si este método es más legítimo y concluyente que el anterior, y para ello presento el siguiente lema: “Si, a fin de demostrar cualquier proposición, se supone una propuesta por virtud de la cual se alcanzan algunas otras propuestas, y posteriormente lo supuesto se destruye o se rechaza debido a un supuesto contrario, entonces también deben destruirse y rechazarse todas las propuestas alcanzadas hasta entonces que dependen de aquélla, de tal manera que a partir de ese momento no se supongan más ni se apliquen en la demostración.”[. . .] (*The Analyst §12*)

El procedimiento que analiza en (*The Analyst §13 y §14*) es el cálculo del fluxón de x^n, que se vio en la sección 2.2.5. Berkeley sigue el procedimiento analítico hasta la división del momento evanescente o de la ecuación obtenida después de sustituir x por $x + o$ (*cf.* 2.2.5). A partir de ahí critica al momento evanescente o:

> 14. [. . .] Hasta aquí he supuesto que x fluye, que x tiene un incremento real, que o es algo. Y todo esto he procedido conforme a esa suposición, sin la cual no habría sido capaz de dar ni siquiera un paso. A partir de ese supuesto obtuve el incremento x^n, fui capaz de compararlo con el incremento de x y encontré la proporción entre los dos incrementos. Ahora pido que se permita hacer una nueva suposición contraria: esto es, supondré que no hay ningún incremento x o que o es nada, y esta segunda suposición destruye la primera, es inconsistente con ella, y por tanto, con cualquier cosa que la suponga. Sin embargo, os pido que me permitáis retener nx^{n-1}, [. . .] Todo esto me parece una forma muy inconsistente de argumentar que no se permitiría en teología.
>
> 15. Nada es más claro que ninguna conclusión adecuada puede extraerse directamente de dos suposiciones inconsistentes. Vos podéis, ciertamente, suponer cualquier cosa posible, pero posteriormente no podréis suponer nada que destruya lo que supusisteis primero, o, si bien lo hacéis, habréis de comenzar *de novo*. [. . .]

> Por ese medio jamás podréis llegar a nuestra conclusión ni tener éxito en lo que el célebre autor denomina la investigación de las proporciones primera o última de las cantidades nacientes y evanescentes, al instituir el análisis en las finitas. Lo repito nuevamente: vos estáis en libertad de hacer cualquier suposición posible y podéis destruir una suposición por medio de otra; pero, entonces, no podréis retener las consecuencias, [. . .]
> 16. [. . .] por tanto, vos nunca podréis llegar legítimamente, mediante ese método, a vuestra expresión de una fluxión. [. . .] Pero, a pesar de toda esa habilidad para encubrirla, la falacia sigue siendo la misma, pues, sea que se haga antes o después, una vez que se hace el segundo supuesto o asunción, en ese mismo instante la primera suposición y todo lo que se obtuvo a partir de ella se destruye y sale conjuntamente. Y esto es universalmente verdadero, sea el tema que sea, a lo largo de todas las ramas del conocimiento humano; en cualquiera de ellas, según creo, la gente difícilmente admitirá un razonamiento como éste, que se acepta en la matemática como una demostración. (*The Analyst §14 a §16*)

Algunos filósofos y matemáticos consideran que ésta es la crítica más importante de *The Analyst*. Berkeley pregunta ¿Cómo es posible que el mismo objeto matemático tenga dos valores de magnitud? Diversos pensadores han tratado de responder esta pregunta de diversas maneras desde que *The Analyst* se publicó[(193)]. Algunas de las más recientes son (Brown y Priest 2004); (Vickers 2007) y la respuesta a Vickers en (Estrada González y Martínez Ordaz 2017).

(Brown y Priest 2004) pueden explicar el método de las fluxiones con la técnica del *chunk & permate*. Dicha técnica consiste en dividir en pequeños pedazos la información existente de una serie de proposiciones inconsistentes, la técnica trabaja con unos cuantos pedazos de información a la vez, siendo estos pedazos consistentes entre sí (*chunk*). El resultado final se obtiene al dejar que las derivaciones permeen (*permate*) sin que los principios a partir de los cuales trabajan se contradigan entre sí. Esta técnica puede considerarse similar a la técnica del análisis, la cual encontraba los supuestos para hacer una derivación, sin que se tenga que aceptar todo lo establecido en el análisis, sino únicamente los principios obtenidos en el análisis. (Vickers 2007) dice que solo al nivel de justificación existen problemas; para (Vickers 2007) además el trabajo de Bernuolli es inconsistente. Y para (Estrada González y Martínez Ordaz 2017) antes de determinar que un objeto matemático es inconsistente, se debe entender la lógica del objeto matemático mismo; si bien la lógica clásica[(194)] es la dominante, ésta no es la única para hacer matemáticas en la época. Haciendo a un lado la crítica común de que una reconstrucción no necesariamente recupera todos y cada uno de los elementos necesarios para considerar una teoría matemática igual a la reconstrucción propuesta he de decir lo siguiente:

1. Si bien es plausible considerar el método de *chunk & permate* como una metodología subyacente en Newton, se puede argumentar que Berkeley justo apunta a que el *método es oscuro*, por no conocerse sus elementos, ni los principios bajo los que opera. De demostrarse efectivamente que dicho método

[193] Existe una serie de escritos donde Berkeley y los seguidores de Newton como James Jurin o incluso el matemático Thomas Bayes discuten la validez de los argumentos de Berkeley. Parte de la discusión se puede consultar en (Robles 2006). Una discusión posterior se puede consultar en la nota 25 al Analista por parte del Dr. Robles (Berkeley 1734, Pág. 114-117).

[194] Considero que esto es un anacronismo, ya que en esa época se utilizaba la lógica aristotélica. La lógica aristotélica y la lógica clásica son muy parecidas, pero difieren en algunos puntos importantes como la existencia de los universales a partir de los particulares. Para la lógica aristotélica solo existe el universal si hay al menos un particular. La lógica clásica considera que el universal existe siempre y cuando no se pueda dar un contraejemplo de un particular. Esto hace que la lógica clásica acepte como verdadera la frase *el rey de Francia es calvo* porque no hay un contraejemplo; si no hay rey de Francia no sabemos si *es calvo o no lo es*. En lógica aristotélica no tiene sentido la oración *el rey de Francia es calvo*, si no hay un rey de Francia.

fue utilizado por Newton, la crítica de Berkeley sobre la oscuridad se haría efectiva, al ser un método desconocido para la época. Esto es una diferencia importante con respecto a otros métodos analíticos y/o sintéticos como los propuestos por Pappus, Viète, Descartes, entre otros. Métodos que estaban disponibles para su examinación, confrontación, aplicación y prueba por parte de otros pensadores de la época moderna.

2. Berkeley y Vickers conincidirían en que el método de Bernoulli es inconsistente, por razones diferentes. Sin embargo el texto de *The Analyst* es una crítica a la justificación y no al método, que considera adecuado. Para la época todo método fluxional o infinitesimal están basados en conceptos similares, desde la perspectiva de Berkeley, no se encuentra diferencia entre la fluxión y los infinitesimales en su justificación matemática, todos los métodos de cálculo, incluyendo a las técnicas desarrolladas en Inglaterra como en el continente europeo, son inconsistentes en su justificación, y no solo el método de Bernoulli, como se propone en (Vickers 2007).

3. En historia y filosofía de las matemáticas, así como en la matemática misma, existe toda una discusión acerca de la lógica que se puede aplicar en los métodos de deducción y/o síntesis matemática. Dicha discusión está lejos de ser concluyente y siempre puede argumentarse que la interpretación de qué lógica se usa en cualquier método o rama matemática es subjetiva. Dando por bueno que algunos matemáticos como Bernoulli hayan utilizado una lógica diferente a la lógica clásica y/o aristotélica, Berkeley puede argumentar que uno de los problemas que encuentra es que los métodos de fluxiones y los infinitesimales usan una lógica que no se ajusta a la lógica utilizada para realizar una prueba matemática en la época. Pero si bien los matemáticos *pueden suponer cualquier cosa*, deben explicar los *primeros principios* bajo los cuales operan sus métodos. Para Berkeley los seguidores de Newton y Leibniz no han explicado los *primeros principios* de ningún método, ni de los métodos originales, ni de sus propias interpretaciones. Un problema con lo propuesto por (Estrada González y Martínez Ordaz 2017) es que el cambio de lógica supone, en mayor o menor medida, renunciar a *primeros principios*, como lo es renunciar al *tercio excluso* o *tercio excluido*. El *tercio excluido* es el *primer principio* de que solo existen dos valores de verdad y que dada una expresión y su negación, siempre es verdadera dicha expresión o la negación de ésta, en notación lógica, $A \vee \neg A = V$. Tal como proponen (Estrada González y Martínez Ordaz 2017) el cambio de lógica para evitar la contradicción en el sistema de Bernoulli, y probablemente en otros sistemas de cálculo, implica renunciar explícitamente al *tercio excluido*, es decir que dada una expresión y su negación es falso que sea verdadera dicha expresión o su negación, $A \vee \neg A = F$. La lógica que se obtiene es la llamada *lógica intuicionista*. Pero el costo de aplicar una lógica intuicionista puede ser demasiado alto. Dado que la prueba por *reductio ad absurdum* basa su funcionamiento en el *primer principio del tercio excluido*, ya que si no es verdadera una oración tiene que ser verdadera su falsedad; las pruebas por *reductio ad absurdum* ahora son inválidas, ya que ambas expresiones pueden ser falsas. En dado caso que Bernoulli y otros apliquen una lógica intuicionista puede ser que no estén dispuestos a renunciar al *primer principio del tercio excluido*. Como posible contra-

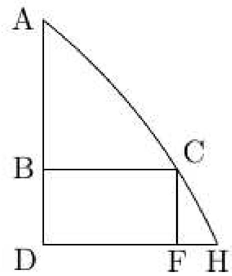
argumentación, se puede decir que aun cuando se cambie la lógica de la práctica matemática, siempre es posible realizar pruebas matemáticas por *reductio ad absurdum*, u otras técnicas clásicas. Sin embargo lo que quiero destacar es que el principal problema no es si se cambia de lógica, o si es posible recuperar la práctica matemática con una lógica diferente a la aristotélica, o clásica, dependiendo de la época, lo cual puede ser posible; sino que la discusión acerca de los *primeros principios* que la lógica debe seguir no se ha dado. Dicha discusión es posterior a la crítica de Berkeley; y dado que se ha asumido que la lógica correcta es la lógica aristotélica, y posteriormente la lógica clásica, cambiar la lógica para que el cálculo de Newton sea consistente no es válido. No se conocen los *primeros principios* de dicha lógica, ni como trabajar con ella. Tampoco se ha argumentado a favor o en contra de los *primeros principios aristotélicos* en los que se basa la lógica aristotélica y la lógica clásica. Sin esta discusión y explicitación de las reglas, Berkeley puede argumentar que el método que se utiliza no se basa en la lógica, porque no es lógica aristotélica, ni se puede deducir algo, porque no sabemos las reglas para inferir algo en dicha lógica y que el método es obscuro, ya que no se ha hecho público para el escrutinio por otros pensadores, crítica que es constante en el escrito de *The Analyst*. Para Berkeley es importante que las herramientas que el matemático utiliza deben estar disponibles para el escrutinio público, crítica que parece afectar, tanto al método de las fluxiones, como a la lógica subyacente utilizada por los matemáticos.

Continuando con el texto, para Berkeley el hecho de que existan diversas formas y justificaciones en el cálculo fluxional, significa que Newton no estaba convencido del todo de su propia justificación:

> [. . .] Considerando los diversos artificios y sutilezas que usa el gran autor del método fluxionario, bajo cuán diversas luces sitúa sus fluxiones y de cuántas maneras distintas intentó demostrar la misma propuesta, estaríamos inclinados a pensar que él mismo sospechaba de la justeza de sus propias demostraciones y que ninguna noción le agradaba lo suficiente como para apegarse constantemente a ella. Al menos es claro que él concedía estar satisfecho con ciertas cuestiones que, sin embargo, no podía intentar demostrar a los demás. El que su satisfacción surgiese de métodos tentativos o de inducciones, que con frecuencia las han admitido los matemáticos (por ejemplo el Dr. Wallis en su *aritmética de Infinitos*), es algo que no pretendo determinar. Pero, cualquiera que haya sido la situación con el autor, parece que sus seguidores se han mostrado más dispuestos a aplicar su método, que a ser cuidadosos al examinar sus principios. (*The Analyst §17*)

Berkeley retoma su crítica al cálculo de Newton a partir de (*The Analyst §26*), apartado en el cual nuevamente examina el comportamiento del incremento o. Para Berkeley la razón principal de que el método fluxional funcione es el axioma *si de iguales se restan iguales, los residuos serán iguales*:

> 26. [. . .]
>
> Supóngase que $AB = x, BC = y, BD = o$ y que xx es igual al área ABC. Se propone encontrar la ordenada y o BC. Cuando x, por fluir, se convierte en $x + o$, entonces xx se convierte en $xx + 2xo + oo$; el área ABC se convierte en ADH y el incremento de xx será igual a $BDHC$, el incremento del área, esto es $BCDF + CFH$. Y suponiendo que el espacio curvilíneo es qoo, entonces $2xo + oo+ = yo + qoo$, que, dividiendo entre o, da $2x + o = y + qo$. Y suponiendo que se desvanece, $2x = y$, [. . .] debe reconocerse que el problema se resuelve correctamente y que la conclusión a la que nos lleva este método es verdadera. Por tanto, se preguntará ¿Cómo sucede que por eliminar o no aparece ningún error en la conclusión? Respondo que la verdadera razón de esto es claramente que al ser q unidad, qo es igual a o y por tanto,
>
> $$2x + o - qo = y = 2x$$



> por eliminarse las cantidades iguales qo y o debido a sus signos contrarios.
> 27. Así como, por un lado sería absurdo eliminar o diciendo permítaseme contradecirme, permítaseme destruir mi propia hipótesis [. . .] al mismo tiempo que retengo una cantidad que nunca podría haber obtenido sino sólo suponiendo un incremento; así sería igualmente erróneo, por otro lado, imaginar que en una demostración geométrica se nos permite admitir cualquier error, por pequeño que sea [. . .]
> 28. [. . .] Por tanto está claro que suponer que la cantidad algebraica rechazada es una cantidad infinitamente pequeña o evanescente y que, por tanto, debería haber producido un error si no hubiese sido que los espacios curvilíneos fueran iguales a ella y, al mismo tiempo, se restaron de la otra parte o lado de la ecuación, conforme al axioma: *si de iguales se restan iguales, los residuos serán iguales*, pues esas cantidades que los analistas dicen que pueden pasarse por alto o desvanecerse en realidad se restan [. . .] (*The Analyst §26 a §28*)

Dado que Berkeley considera que la verdadera razón de que los fluxones o las fluxiones funcionan es por la noción común 3 *si de iguales se restan iguales, los residuos serán iguales*, y por la aplicación de las leyes de los indivisibles/infinitesimales, *cf* sección 1.5, que de acuerdo con Berkeley se interpreta como: dado un numero cualquiera q y un indivisible/infinitesimal o su multiplicación $q * o$ siempre adquiere el mínimo valor que es o. De esta manera $q * o = qo$ y o tienen el mismo valor $qo = o$ *y pueden eliminarse debido a sus signos contrarios*. Para Berkeley este es un camino que puede explorarse para entender a las fluxiones (*The Analyst §29*):

> [. . .] Y, comprobando los miembros homólogos o correspondientes de ambos lados, encontramos que como el primer miembro de la expresión es la expresión del área dada, así el segundo miembro de la expresión expresará el rectángulo o segundo miembro de la cantidad geométrica. Quizá esta pista puedan ampliarla más y aplicarla con buenos propósitos quienes tienen la tranquilidad y curiosidad acerca de tales asuntos. (*The Analyst §29*)

Posteriormente indica que si los momentos se desvanecen o se pasen por alto, no estamos aplicando ni geometría ni lógica, por lo cual debemos deshacernos de las proporciones obtenidas por los momentos evanescentes. El motivo principal de que no podamos tomar en cuenta los momentos evanescentes es que estos dependen de la noción de movimiento y como nuestra noción del movimiento es solo espacio-temporal, la mente no puede concebir el movimiento sin el tiempo y el espacio:

> 30. [. . .] podemos decir con seguridad que la conclusión no puede ser correcta si, a fin de obtenerla, ha de desvanecerse o pasarse por alto cualquier cantidad [. . .] Y, por tanto, eliminar cantidades mediante los principios captados de fluxiones o de diferencias no es ni buena geometría ni buena lógica. Cuando los aumentos se desvanecen, también se desvanecen las velocidades. De las velocidades o fluxiones se dice que son prima y última, y, como los momentos son nacientes o evanescentes. Tómese, por tanto, la ratio(195) de las cantidades evanescentes; es la misma de las fluxiones. Pero nosotros no tenemos ninguna noción mediante la cual concebir y medir diversos grados de velocidad, además del espacio y tiempo o, cuando los tiempos son dados, además del espacio por sí solo. Nosotros ni siquiera tenemos una noción de velocidad

[195] Proporción.

> del tiempo y el espacio. Por tanto, cuando se supone que un punto se mueve en tiempos dados, nosotros no tenemos noción alguna de velocidades mayores o menores o de proporciones entre velocidades, sino de líneas más o menos cortas y de proporciones entre líneas, generadas en partes iguales de tiempo.
>
> 31. Un punto puede ser el límite de una línea; una línea puede ser el límite de una superficie; un momento puede terminar el tiempo. Pero, ¿cómo podemos concebir una velocidad con ayuda de tales límites? Ésta implica necesariamente tanto el tiempo como el espacio y no puede concebirse sin ellos. Y si las velocidades de las cantidades nacientes y evanescentes, esto es abstraídas de tiempo y de espacio, no pueden comprenderse, ¿cómo comprender y demostrar o considerar sus *rationes primæ y ultimæ*? Pues considerar la proporción o *ratio* de las cosas implica que tales cosas tienen relaciones que guardan entre sí; pero, puesto que no hay ninguna medida de la velocidad, excepto tiempo y espacio, al estar compuesta la proporción de las velocidades sólo de la proporción directa de los espacios y la proporción recíproca de los tiempos, ¿no ha de seguirse que es ininteligible hablar de investigar, obtener y considerar las proporciones de las velocidades con exclusión de tiempo y espacio? (*The Analyst §30 y §31*)

Berkeley considera que a partir de las distintas formulaciones de la fluxión; este concepto es contradictorio; o al menos se ha convertido en un término o símbolo que no puede concebirse. Berkeley en esta crítica retoma la definición de velocidad que es: *la razón de cambio de un objeto en el espacio con respecto al cambio en el tiempo*. Dado que un fluxón es en última instancia *una velocidad naciente o evanescente*, y para que sea naciente o evanescente esta velocidad debe ocurrir en un instante infinitesimal de tiempo y espacio, el objeto que genera la velocidad en realidad está estático o no puede medirse. Esto ocurre por:

1. Dado que un momento es un instante infinitesimal de tiempo, ese instante no tiene magnitud y por lo tanto tampoco tiene razón de cambio, por lo que no hay medida que se pueda establecer. Por definición el infinitesimal, momento o fluxón de Newton no tiene magnitud, por lo cual no puede establecerse una diferencia entre el inicio y el final del momento; siendo esto último la razón de cambio en el tiempo.

2. Dado que un momento se manifiesta en el espacio como un límite, el límite tampoco tiene magnitud y sin magnitud tampoco se tiene razón de cambio. De la misma manera que en el apartado anterior un límite por definición no tiene una magnitud o ninguna magnitud[196] y no se puede establecer una diferencia espacial entre el inicio y el final del límite, por lo tanto tampoco puede establecerse una razón de cambio espacial.

3. Por lo tanto con el momento, fluxón o velocidad no puede establecerse una relación de cambio la cual determine el desplazamiento y el tiempo en el que ocurre, por lo cual es indistinguible de un objeto estático. Y dado que por definición la velocidad es una razón de cambio en el espacio, dada una razón de cambio en el tiempo, entonces el fluxón es contradictorio con el concepto que lo creó.

Newton considera que a pesar de no tener magnitud, la velocidad naciente o evanescente mantiene todas las relaciones de proporción; pero esto depende de la metafísica de Newton y no de un razonamiento válido, o al menos explicado, en matemáticas, explicación que considera necesaria Berkeley. Considero que a pesar de que Newton tiene la confianza de que Dios garantiza las velocidades evanescentes dadas las propiedades

[196] La línea es el límite de las superficies; una superficie tiene dos dimensiones y se mide mediante dos magnitudes, mientras que la línea tiene una sola dimensión y se mide con una sola magnitud. El punto es el limite de una línea; la línea tiene una dimensión, y el punto no tiene dimensiones.

espacio-temporales que se establecen en la creación del universo, esto es un elemento extra matemático que no necesariamente tiene un correlato matemático directo, aun cuando Dios parezca garantizarlo. Desde mi perspectiva, Berkeley está en lo correcto al criticar la noción de velocidad evanescente ya que o bien es un elemento contradictorio, determinar una velocidad instantánea dado un objeto fijo; o si se puede establecer una relación de proporción con otros elementos geométricos, no se han explicado los *primeros principios aristotélicos y/o matemáticos* por confiar en una metafísica, siendo esta metafísica rebatible. Dicha metafísica, consideran los seguidores de Newton, no afecta al desarrollo de la teoría de fluxiones, pero para Berkeley, ésta se presupone, aun cuando es oscura:

> Y, por tanto, vos quizá sostendréis que los problemas pueden resolverse sin esas suposiciones inconcebibles, y que, en consecuencia, la doctrina de las fluxiones se encuentra libre de tales dificultades. Mi respuesta es que si en uso o en la aplicación de este método no se consideran esos aspectos difíciles y oscuros, ellos sin embargo, se presuponen; son fundamento sobre los que construyen los modernos, los principios sobre los que proceden para resolver problemas y descubrir teoremas [. . .] (*The Analyst §32*)

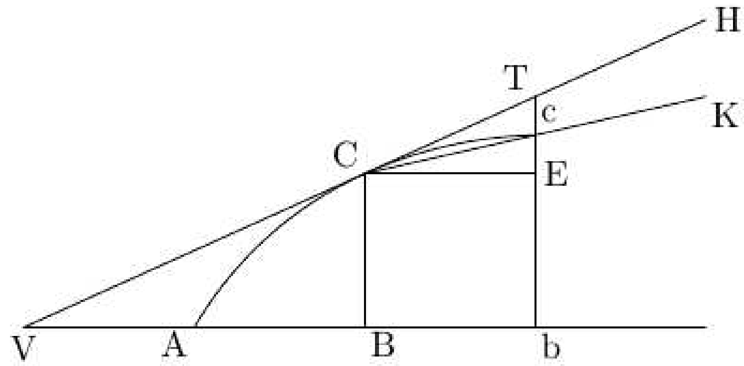
Hay que recordar, como se ha mencionado antes, que para Berkeley el fluxón o fluxión y los infinitesimales parten del mismo principio y en cierta medida son indistinguibles cuando se hace uso de ellos; ya que siguen las reglas de los infinitesimales ambos conceptos. Es por esto que no puede decirse que las fluxiones están libres de esta problemática surgida a partir del estudio matemático de los indivisibles/infinitesimales. Por lo cual estos hombres que se precian de ser matemáticos y/o científicos, nombrados como calculistas, han dejado de ser científicos *à la* Aristóteles o Descartes[(197)]:

> Pero, entonces, debe recordarse que en tal caso, aun cuando podéis pasar por artista, calculista, o analista, no obstante no se os puede considerar con justicia un hombre de ciencia y demostración. (*The Analyst §33*)

El texto de Berkeley prácticamente termina con un estudio de varios aspectos de la metafísica y metodología de Newton sobre el cálculo, utiliza ahora ampliamente las definiciones de fluxión mostradas en *Quadrature*, para mostrar su doble comportamiento y la dependencia de ésta de la metafísica newtoniana, que paradójicamente varios de sus seguidores van a negar.

En (*The Analyst §34*) muestra sus objeciones a la justificación geométrica de Newton basada en las μονάδος neopitagóricas, en la cual hay una medida que permite crear otras entidades como los números y específicamente en Newton distintas figuras geométricas sin magnitud, pero sí con una relación o proporción con otras figuras, las cuales pueden ser relaciones o proporciones entre medidas o métricas como el área o magnitud, entre otras cosas, *cf.* sección 2.2.5. Newton utiliza esto para determinar la tangente a la curva, que ahora se considera como derivada. Para Berkeley el problema es que, sin su metafísica no hay forma de que el punto guarde relación o proporción de medida o magnitud con ninguna otra figura, ya que se estarían relacionando proporciones entre algo que tiene alguna medida, magnitud y/o métrica con cero, algo que está indefinido en matemáticas. Newton entonces, desde la perspectiva de Berkeley, no puede derivar matemáticamente lo que se propone metafísicamente. Así, los fluxionistas están trabajando con un principio metafísico y oscuro, pero sus seguidores son incapaces de ver esto:

[197] A partir de *Primeros principios* o *Principios propios* sencillos; o con *ideas claras y distintas.*



> Si se dice que las fluxiones pueden exponerse o expresarse mediante líneas finitas que les son proporcionales, líneas finitas que, en tanto que pueden concebir, conocer y razonar sobre ellas de manera distinta, de tal manera pueden sustituirse por las fluxiones y sus relaciones o proporciones mutuas considerarse como las proporciones de las fluxiones y es por cuyo medio la doctrina se hace clara y útil, respondo que si, a fin de llegar a estas líneas finitas, proporcionales fluxiones, se usan ciertos pasos que son oscuros e inconcebibles, por más claramente que se conciban eses mismas líneas finitas debe reconocerse, sin embargo, que vuestro proceder no es claro ni es científico vuestro método. [. . .][198] Por lo tanto, un punto se considera como un triángulo o se supone un triángulo en forma de punto, cosa que parece imposible de concebir. Sin embargo, hay algunos que, aun cuando se encogen ante cualesquiera otros misterios, no consideran que haya dificultad con los propios; se ahogan con un mosquito y se tragan el camello. (*The Analyst §34*)

Para Berkeley aun cuando se encuentre la tangente mediante un procedimiento *analítico*[199], se tiene un comportamiento falaz, comportamiento ya analizado en (*The Analyst §14 y §15*), ya que se supone una cosa, un incremento, para después suponer lo contrario:

> Supóngase que x es una abscisa de una curva y z es otra abscisa de la misma curva. Supóngase, también, que las áreas respectivas son xxx y zzz, que $z - x$ es el incremento de la abscisa y que $zzz - xxx$ es el incremento del área, [. . .] Divídase, ahora, $zzz - xxx$ entre $z - x$ y el cociente será $zz + zx + xx$; y suponiendo que z y x son iguales, este mismo cociente será $3xx$ [. . .] Pero en esto hay una falacia directa; pues, en primer lugar, se supone que las abscisas z y x son desiguales, pues sin esta suposición ningún paso se podría haber dado [. . .] (*The Analyst §35*)

Los matemáticos que aplican la teoría de fluxiones, no se dan cuenta de que las fluxiones son solo una técnica que se puede aplicar como un andamiaje, pero que dicho andiamiaje no responde qué es una fluxión:

> El gran autor del método de las fluxiones sintió esta dificultad y, por tanto, se permitió esas finas abstracciones y metafísica geométrica, sin las cuales vio que no podía hacerse nada conforme a los principios aceptados [. . .] Ciertamente debe reconocerse que usó las fluxiones como el andamiaje de un edificio, como algo que ha de hacerse de lado o eliminarse tan pronto como se encuentren líneas finitas proporcionales a aquéllas. Así pues, cualquier cosa que se obtenga mediante tales exponentes y proporciones ha de adscribirse a las fluxiones, las cuales deben entenderse previamente. ¿Y qué son estas fluxiones? ¿Las velocidades de incrementos evanescentes? ¿Y que son estos mismos incrementos evanescentes? No son ni cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, ni siquiera nada [. . .] (*The Analyst §35*)

Como se comentó en la sección anterior, para Berkeley, las fluxiones dependen de la "metafísica gométrica" newtoniana; pero Newton no explicó cómo es que la metafísica que proponía daba cuenta de la fluxión y sus propiedades[200], por lo cual, aun cuando obtuvieramos el resultado correcto, no hemos explicado qué es en

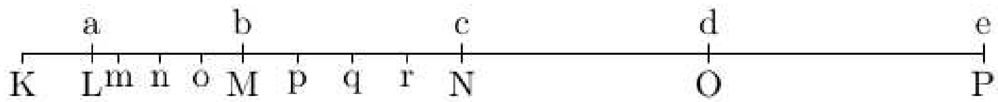
[198] En esta parte del apartado del texto de Berkeley describe la justificación newtoniana del fluxón que ya se trató anteriormente, *cf.* 2.2.5.

[199] En el sentido de la matemática contemporánea

[200] Recuérdese que muchos escritos de Newton fueron públicos hasta que Keynes los recuperó.

sí misma una fluxión, aunque tengamos la ilusión de que sí se ha explicado una fluxión, porque se aplica y obtiene.

Para Berkeley el error está en que creemos entender algo porque aplicamos los signos algebraicos que lo conforman; pero un signo algebraico está vacío de contenido y puede aplicarse a cualquier cosa; por lo cual entender las reglas de los símbolos y entender su causa son dos cosas distintas:



> 36. Con demasiada frecuencia, los hombres se engañan a sí mismos y a otros como si concibiesen y entendiesen cosas expresadas por signos, cuando en verdad no tienen ninguna idea, salvo sólo la de los mismos signos. Y hay algún fundamento para considerar que esto puede ser el caso actual. [. . .]
>
> 37. Nada es más fácil que asignar nombres, signos o expresiones a estas fluxiones y no es difícil computar y operar mediante tales signos. Pero se encontrará que es mucho más difícil omitir los signos y aún retener en nuestras mentes las cosas que suponemos que significan. No es difícil considerar los exponentes, sean éstos geométricos, algebraicos o fluxionarios. Pero formar una idea precisa de, por ejemplo una tercera velocidad, en y por sí misma, *Hoc opus, hic labor*. Ni, en efecto, es una cosa fácil formarse una idea clara y distinta de una velocidad, cualquiera que sea, en la que se excluya y se prescinda de cualquier longitud de tiempo y espacio, así como de cualesquiera variables, signos o símbolos. [. . .] (*The Analyst §36-37*)

Así, si no entendemos lo que es una fluxión, lo que se realiza es un trabajo de cómputo automático al cual se opone Berkeley, ya que para él todo signo debe tener un significante; ya que si bien podemos olvidarnos de su significado mientras operan los signos, debe haber un referente al finalizar la operación. Pero no sabemos qué es una fluxión, por lo cual no tenemos una idea de la primera fluxión, segunda fluxión, y demás fluxiones, éstas parecen ser más símbolos vacíos que referentes válidos, ya que no tenemos idea de qué significan.

Ante la dificultad de entender el concepto de fluxón los matemáticos utilizaron indistintamente las justificaciones de Leibniz y Newton, por lo cual suponen que las velocidades se generan con diferencias infinitesimales, pero esto es un error que Newton evitó, al ser incompatible con la metafísica que desarrolla Newton:

> Quizá algunos podrían pensar que un método más fácil para concebir las fluxiones es suponer que son velocidades en las que se generan diferencias infinitesimales. [. . .] Pero, para no mencionar la dificultad insuperable de admitir o concebir infinitesimales, infinitesimales de infinitesimales, etc., es evidente que esta noción de fluxión no sería consistente con la tesis del gran autor, quien sostuvo que no debería pasarse por alto la cantidad más diminuta. (*The Analyst §38*)

La renuncia a la metafísica de Newton y utilizar la terminología dada por Newton, parece hacer de las fluxiones entidades inconsistentes. El propio Newton se resistía a utilizar algún método analítico, como el de diferencias infinitesimales, en sus pruebas. Para Newton primero debía haber un método sintético de justificación para poder desarrollar el método analítico. Considero que conciliar cualquier aproximación infinitesimal a las fluxiones es poco factible. Para Berkeley el problema no es fácil de resolver ya que las concepciones que se han realizado para entender un fluxón o una fluxión llevan al mismo problema: cómo se concibe el cambio en un instante infinitamente pequeño en el tiempo/espacio:

> 39. A otros posiblemente puede parecer que nos hemos de formar una idea más justa de las fluxiones asumiendo los incrementos finitos, desiguales e isócronicos KL, LM,MN[201], etc., y considerándolos en *statu nascenti*, también sus incrementos *statu nascenti*, [. . .] y así sucesivamente, suponiendo que los primeros incrementos nacientes son proporcionales a las primeras fluxiones o velocidades, que los incrementos nacientes de los incrementos nacientes, a las segundas fluxiones [. . .] y así en adelante. [. . .]
>
> 40. Y, en efecto parecería que en la manera de obtener la fluxión segunda o tercera de una ecuación, las fluxiones dadas se considerarían más bien como incrementos que como velocidades. Pero el considerarlas en ocasiones de una manera, en ocasiones de otra, por un tiempo en sí misma, en otra en sus exponentes, parece que ha ocasionado una parte no pequeña de esas confusiones y oscuridad que se encuentra en la doctrina de las fluxiones. [. . .]
>
> 41. Para una concepción más distinta de todo esto, puede considerarse que si el incremento finito LM^* se divide en partes isócronicas Lm, mn, no, oM, y el incremento MN en las partes Mp, pq, qr, rN, isócronas con las primeras; en tanto que los incrementos totales LM, MN son proporcionales a las sumas de las velocidades que los describen, incluso las partículas LM, Mp también son proporcionales a las respectivas velocidades aceleradas que las describen. [. . .]
>
> 42. Pero, a pesar de lo que se ha dicho, debe aun reconocerse que las partículas finitas Lm ó Mp, por más pequeñas que se tomen, no son proporcionales a las velocidades a y b, sino cada una a una serie de velocidades que cambian a cada momento, o lo que es lo mismo a una velocidad acelerada, mediante la cual se genera durante cierta diminuta partícula de tiempo. Y debe reconocerse que los principios nacientes o finales evanescentes de cantidades finitas, que se producen en momentos o partes infinitamente pequeñas de tiempo, son los únicos proporcionales a las velocidades dadas; que, por tanto, a fin de concebir las primeras fluxiones, debemos concebir el tiempo dividido en momentos, incrementos generados en esos momentos y velocidades proporcionales a esos incrementos; que, a fin de concebir las fluxiones y tercera, debemos suponer que los principios nacientes o incrementos momentáneos, ellos mismos tienen otros incrementos momentáneos, que son proporcionales a sus respectivas velocidades generadoras; [. . .]
>
> 44. Así pues, las fluxiones pueden considerarse bajo diversas luces y figuras, todas las cuales parecen igualmente difíciles de concebir. Y, ciertamente, como es imposible concebir la velocidad sin tiempo o espacio, o bien sin una longitud finita o una duración finita, debe parecer que está por encima del poder humano comprender incluso las primeras fluxiones. [. . .] (*The Analyst §39-44*)

Para Berkeley sin una comprensión adecuada del concepto de fluxión o fluxón, tenderemos a considerar que los símbolos son en sí mismos las fluxiones:

> Se pensaría que nunca sería excesiva demasiada precisión para hablar sobre un tema tan refinado. Y, sin embargo, como se sugirió antes, con frecuencia podemos observar que los exponentes de las variables que representan fluxiones se confunden con las fluxiones mismas [. . .] (*The Analyst §45*)

Así, Berkeley, nos dice que la fluxión ya no se distingue del símbolo que la representa $\ddot{x}$. Esto forma un círculo vicioso en donde damos por sentado que hay una definición porque se aplica; y se aplica porque se ha definido. Pero claramente esto no puede utilizarse para fundamentar el fluxón, al menos no en matemáticas. Sin un criterio claro que distinga a las fluxiones unas de otras, las fluxiones se autoreferencian, pero esta autoreferencia no me permite entender qué es una fluxión:

> Fácilmente pueden concebirse diversas series de cantidades y expresiones, geométricas y algebraicas, en líneas, superficies y en especies que se continúen sin fin o sin límite. Pero no se encontrará tan fácil concebir una serie, sea de meras velocidades o meros incrementos nacientes, de aquella y que les corresponda. [. . .] Pero, ¿quién puede concebir cómo la fluxión (sea velocidad o incremento naciente) de una ordenada ha de ser ella misma una ordenada? [. . .] (*The Analyst §46*)

[201] Se refiere a la figura anterior (*The Analyst §36*).

Finalmente Berkeley apunta que la teoría de fluxiones basa su funcionamiento en la metafísica de Newton, que sus reglas se derivan de dicha metafísica. Los matemáticos han aceptado los resultados, pero abandonado los principios de las fluxiones, sin embargo, esto no es un proceder matemático, ni científico:

> En todo esto, la tendencia general, última, del autor es muy clara; no así sus principios, que son oscuros. Pero quizá esas teorías del gran autor no las consideran o estudian a fondo sus discípulos, quienes, como se apuntó antes, más bien parecen ávidos de operar que de saber, más dispuestos a aplicar sus reglas y sus formas, que a entender sus principios y penetrar sus nociones. Sin embargo, es cierto que, a fin de seguirlo en sus cuadraturas, deben encontrar cantidades fluyentes, y, para ello, deben saber encontar fluxiones a partir de cantidades fluyentes, y, a fin de encontrar fluxiones, primero deben saber qué son las fluxiones. De otra manera, procederán sin claridad y sin ciencia. Así, el método directo precede al inverso, y en ambos se supone el conocimiento de los principios. Pero, con respecto a operar conforme a las reglas y mediante la ayuda de formas generales, de las que no se entienden los principios y las razones originales, esto se considera como meramente técnico. Porque, aun cuando los principios sean por demás obscuros y metafísicos, debe estudiarlos quienquiera que desee comprender la doctrina de las fluxiones. Ni puede tener geómetra algún derecho de aplicar las reglas del gran autor sin considerar, primero, sus nociones metafísicas de las que se derivan aquéllas [. . .] (*The Analyst §47*)

Como se mencionó anteriormente, el problema con abandonar la metafísica de Newton, es el doble comportamiento de la fluxión que queda sin explicación matemática; siendo su aplicación y comprobación la única forma de justificación. Pero esto no queda completamente explicado, al menos no en términos de ciencia como se entendía en la Modernidad. Para Berkeley el problema de la teoría o doctrina de las fluxiones es la claridad y corrección, en términos de ciencia de la época Moderna. Considero que el texto de *The Analyst* muestra la debilidad de las prácticas matemáticas de la época, en las cuales parece que se da más peso epistémico al uso matemático, como encontrar el área bajo la curva, o, la tangente a una curva; que a una prueba a partir de la definición de ciencia de la época. Para Berkeley, son los propios matemáticos quienes trabajan con la metafísica problemática, y quienes tienen que encontrar una nueva propuesta para justificar los problemas de la doctrina de las fluxiones:

> Vos posiblemente esperáis evadir la fuerza de todo lo que se ha dicho y ocultar principios falsos y razonamientos inconsistentes, [. . .] Con respecto al sentido llano y la verdad de lo que se ha presentado en las observaciones anteriores, aplelo al entendimiento de cualquier lector inteligente y sin prejuicios. A éste mismo apelo acerca de si las propuestas que se han comentado no son la metafísica más incomprensible, y que no es mía, sino vuestra. Que no se entienda que infiero que vuestras nociones son falsas o vanas porque son metafísicas. Nada es verdadero o falso por esa razón. No cuenta mucho que una propuesta se denomine o no metafísica. La cuestión es si la propuesta es clara u oscura, si es correcta o incorrecta, si está bien o mal deducida. (*The Analyst §48*)

El texto de *The Analyst* posiblemente no cumplió el cometido anterior. Si algo ha tenido el texto de *The Analyst*, es que desde su publicación, suscitó una polémica fuerte entre los matemáticos y filósofos que aun discuten sobre la pertinencia del texto. Como se pudo observar anteriormente en esta sección, la discusión se centró en el doble comportamiento del fluxón. Sin embargo, considero que esa no es la crítica principal del texto, en especial para el cálculo de Newton, sino la ausencia de justificación matemática, ya sea sintética o analítica. Como se mencionó en secciones anteriores, y en esta sección, la ausencia de la metafísica de Newton ha hecho que se sigan las reglas de las fluxiones, pero que no se entienda la justificación de las mismas. Sin la justificación, entonces no podemos decir que la doctrina de las fluxiones sea científica y/o matemática. También sin una justificación, no hay manera de apelar a alguna propiedad o característica que nos permita evitar el comportamiento doble y contradictorio del fluxón; y sin está justificación del doble comportamiento, el cálculo de Newton solo puede justificarse por sus aplicaciones, pero esto no lo hace matemático. Lo que hace matemático a las proposiciones de la geometría euclidiana es la combinación de *postulados, definiciones* y *nociones comunes* que, aplicadas sintéticamente, me permiten deducir una propiedad o elemento geométrico a partir de otros. Para Berkeley en el cálculo de Newton, esto no se cumple, ya que no existe algo parecido a los postulados, definiciones y/o nociones comunes que podamos examinar. Considero que es la crítica principal de la cual se derivan las otras críticas. Así el método de las fluxiones ha probado su valía en la experiencia empírica, pero no es suficiente para proponerlo como una herramienta matemática por derecho propio. Tampoco lo es su aplicación a otras áreas de las matemáticas. Sin los requisitos de ciencia disponibles para la época, el cálculo de Newton solo es una herramienta heurística. Para Berkeley:

> Aun cuando los incrementos momentáneos, las cantidades nacientes y evanescentes, las fluxiones y los infinitesimales de todos los grados son en verdad entidades tan oscuras, tan difíciles de imaginar o concebir distintamente que (para decir lo menos) no pueden admitirse como principios u objetos de una ciencia clara y precisa; aun cuando esta oscuridad y esta incompresibilidad de nuestra metafísica haya sido, por sí sola, suficiente para acallar vuestras pretensiones de evidencia, si no me equivoco, se ha mostrado, además, que vuestras inferencias no son más correctas que la claridad de vuestras concepciones y que vuestra lógica es tan inobjetable como lo es vuestra metafísica. Por tanto parecería, en general, que vuestras conclusiones no se alcanzan mediante un razonamiento correcto a partir de principios claros; en consecuencia que la labor de los analistas modernos, por útil que sea en los cálculos y las construcciones matemáticas, no habitúa ni califica a la mente para aprender con claridad y para inferir correctamente [. . .] (*The Analyst §49*)

Prueba de la falta de una justificación en el cálculo de Newton es que los calculistas británicos no pueden señalar un *primer principio* o un *principio propio*, con el cual entender al fluxón; ni explicar la lógica subyacente en el método o doctrina de las fluxiones, la cual no sigue las reglas de la lógica aristotélica disponible en la época, por lo cual el fluxón parece inconsistente. Estas fallas hacen que la doctrina de las fluxiones sea útil, porque sirve como llave para develar los misterios de la naturaleza, pero no una *ciencia clara*.

Berkeley cierra *The Analyst* con una serie de cuestiones que considera abiertas. Para dar paso a las cuestiones, Berkeley comenta:

> Desde hace bastante tiempo había sospechado que esta analítica moderna no era científica [. . .] Ni ahora os hubiese molestado con este comunicado, después de tan largo abandono de estos estudios, sino para impedir, hasta donde soy capaz, que os engañeis a vos mismo y a otros en asuntos de mayor importancia e interés. Y, con el fin de que comprendáis con mayor claridad la fuerza y la intención de las observaciones anteriores y que las consideréis aún más a fondo en vuestras meditaciones, añadiré las siguientes cuestiones. (*The Analyst §50*)

Por último en esta sección y capítulo, agruparé las cuestiones en apartados, las cuales son mi interpretación acerca de las cuestiones abiertas, dada la postura de Berkeley, mostradas en el texto de *The Analyst*:

1. ¿El cálculo de Newton, sigue todas las reglas y axiomas de la geometría euclidiana? Como se ha mencionado a lo largo de este capítulo, una forma de considerar que en matemáticas se está investigando de manera correcta es, que el procedimiento realizado siga los principios y reglas de la geometría euclidiana. Berkeley cuestiona que de hecho se sigan todos los principios de la geometría euclidiana,

porque como también se comentó en el capítulo 1 (*cf.* sección 1.5) los infinitesimales/indivisibles, junto con los fluxones, que es una crítica vertida en *The Analyst*; no cumplen con el *Axioma de Arquímedes*, entre otros principios de la geometría, *cf.* Cuestiones 1-3,7,31,40,53:

> *Cst.* 1 ¿No son el objeto de la geometría las proporciones de extensiones finitas y hay alguna necesidad de considerar cantidades, sean infinitamente grandes o infinitamente pequeñas?
> *Cst.* 2 ¿No es el fin de la geometría medir la extensión finita asignable y no fue esta finalidad práctica la que primeramente llevó a los hombres el estudio de la geometría?
> *Cst.* 3 ¿No ha creado dificultades innecesarias en la geometría e investigaciones equivocadas en esa ciencia el confundir su objeto y su finalidad?
> (*The Analyst* Cst. *1-3*)

Berkeley comenta que solo lo finito está contemplado en la geometría de Euclides, ya que sigue el *principio o axioma de Arquímedes*. Lo infinitamente pequeño es contrario al *axioma de Arquímedes*; lo infinitamente grande también porque, dependiendo de la noción de infinito, se puede decir que la suma de dos infinitos es el infinito más grande o el mismo infinito, si ambos infinitos son iguales $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ (Poonen 1998-99). Recuérdese que el *axioma de Arquímedes* nos dice que $a + b = c$ y que $c > a, c > b$; en el caso de $\aleph_0 = c = a + b$ y $c = a, c = b$. Otro inconveniente es que solo lo finito puede tener relaciones de proporción, *ratio*, como lo es poner en relación dos líneas finitas. ¿Cómo se ponen en relación dos líneas cuando al menos una es infinitesimal?

Berkeley, desde mi perspectiva, también comenta que la geometría se ha usado como fuente de investigación matemática y de justificación; pero por lo que vemos en *The Analyst* la justificación con geometría puede no cumplirse. Mi interpretación es que Berkeley está diciendo que, aunque la geometría sea considerada una ciencia, tiene un objeto y finalidad diferentes, que la del cálculo de Newton, ya que la geometría habla sobre los objetos que se pueden producir con los axiomas, definiciones y nociones comunes en la geometría de Euclides, los cuales son finitos; y el cálculo de Newton y Leibniz hablan de otros objetos que pueden no ser geométricos o no cumplir con todos los axiomas, definiciones y nociones comunes en la geometría de Euclides.

2. ¿El fluxón o fluxión tiene un origen metafísico, propio de Newton, del cual se derivan sus propiedades? Una de las críticas importantes, desde mi perspectiva, es que el fluxón se deriva de la metafísica de Newton (*The Analyst §47*). Por lo tanto sus propiedades y características pueden ser metafísicas, *cf. Cst.* 8,51,56,58,59:

> *Cst.* 8 ¿No son las nociones de tiempo absoluto, lugar absoluto y movimiento absoluto de la metafísica más abstracta? ¿Será posible que las midamos, computemos o las conozcamos?
> *Cst.* 51 ¿Puede algo diferente de la metafísica y la lógica abrir los ojos de los matemáticos?
> *Cst.* 58 ¿Es realmente un efecto del pensamiento que los mismos hombres admiren al gran autor por sus fluxiones y se burlen de él por su religión?
> *Cst.* 59 Si ciertos *virtuosi* filosóficos de nuestra época no tienen religión, ¿será por falta de fe? (*The Analyst* Cst. *8,51,58*)

La cuestión 58 se da por la crítica en (*The Analyst §47*) donde nos dice que los matemáticos usan la doctrina de las fluxiones, sin entender la metafísica propuesta por Newton. Sin dicha metafísica la doctrina de las fluxiones tiene problemas. Los matemáticos fluxionistas cuando aplican las fluxiones tienen fe en dichas fluxiones, ya que dichas fluxiones no están probadas matemáticamente. Esto se refuerza con la cuestión 59, donde expresamente indica que los matemáticos tienen fe en algo que no es científico[(202)]. Como se ha comentado en las páginas anteriores, Berkeley efectivamente deduce que los absolutos espacio-temporales de Newton son metafísicos, recuérdese que para Newton el espacio absoluto es una emanación de Dios, *cf.* sección 2.2.5; por lo cual solo al volver a estudiar los principios metafísicos de Newton podrá "abrir los ojos de los matemáticos"[(203)].

3. ¿Puede el cálculo de Newton considerarse ciencia, si no cumple con el requisito de tener: *Primeros principios* o *principios propios, à la* Aristóteles; establecerse con axiomas, definiciones, y nociones comunes, como lo es la geometría Euclidiana; o basarse en una idea clara y distinta como lo propone Descartes?, *cf.* Cuestiones 4,15,16,33-37,41-47, 60,63,64,67:

   > *Cst.* 4 ¿Puede decirse propiamente que los hombres proceden conforme a un método científico, sin que se conciban claramente el objeto acerca del que tratan, la meta propuesta y el método mediante el cual se le investiga?
   > *Cst.* 15 ¿No es muestra de fanatismo en los matemáticos el que declinen examinar los principios y desenmarañar los métodos que se usan en matemáticas?
   > *Cst.* 36 ¿Puede haber ciencia en la conclusión cuando no hay ciencia en los principios? ¿Y puede un hombre tener ciencia en los principios sin entenderlos? Y, por tanto, ¿actúan como hombres de ciencia los matemáticos de esta época, al preocuparse tanto en aplicar sus principios antes que entenderlos?
   > *Cst.* 41 ¿No pueden los hombres dar demostraciones en los razonamientos más generales y porciones, así como en geometría, y no estar obligados, en tales demostraciones, al mismo razonamiento estricto que en geometría? Por tanto, ¿no es el álgebra una ciencia tan verdaderamente como lo es la geometría?
   > *Cst.* 63 Esos matemáticos que gritan en contra de los misterios, ¿han examinado jamás sus propios principios? (*The Analyst* Cst. *4,15,36,41,63*)

   Para Berkeley la teoría de fluxiones carece de una justificación, ya que los matemáticos han ignorado el origen metafísico de la doctrina de las fluxiones. Sin la metafísica de Newton, los fluxones son contradictorios, como se mencionó anteriormente, porque no explica como pueden tener dos propiedades contradictorias, sin caer en la contradicción. Los matemáticos tampoco han probado o establecido nuevos principios de los cuales partan para justificar la doctrina de las fluxiones. Por lo tanto no puede considerarse ciencia a las fluxiones. También critica a los matemáticos por considerar al álgebra como una técnica, en vez de ciencia, dado que se aplica de la misma forma que la geometría. Para la época se consideraba que la geometría era ciencia y el álgebra no; dado que las pruebas se realizaban en forma sintética, como en la geometría. Considera Berkeley que no hay diferencias importantes entre ambas ramas matemáticas, *cf.* sección 2.3.1. Por lo que cuestiona a los matemáticos preguntándoles si son capaces de distinguir entre ciencia y técnica; porque aquello que utilizan como ciencia, el álgebra, no lo consideran ciencia; y lo que carece de las características de ciencia, la doctrina de las fluxiones, sí lo consideran como ciencia.

[202] De acuerdo con la Real Academia Española, fe es una confianza o creencia. En este caso Berkeley indica que la confianza que tienen, al no ser científica, es pura fe, probablemente vana, en la teoría de fluxiones

[203] Para Berkeley, Newton se ha equivocado con respecto a la idea de que el espacio y el tiempo son absolutos, ya que, al menos el movimiento, se mide por la variación de distancia con respecto a un punto, u objeto seleccionado; aun cuando nos parezca absoluto el movimiento, solo es absoluto porque hemos seleccionado un punto u objeto de referencia, que puede ser variado y tendríamos movimientos diferentes (*PHK* I §112). Para consultar la crítica de Berkeley al sistema newtoniano espacio-temporal *cf* (*PHK* I §110-117).

4. ¿Es posible concebir las fluxiones? Berkeley considera que no es posible concebir a las fluxiones porque es un principio oscuro y que parte de una metafísica que no se ha explicado, por lo cual lo que digamos de la fluxión puede ser incorrecto, *cf.* Cuestiones 5,9,10,12,22,24,29,31,54,64:

   > *Cst.* 5 ¿No bastará que cada número finito de partes pueda estar contenido en alguna magnitud finita y no será innecesario, así como absurdo, suponer que la extensión finita es infinitamente divisible?
   >
   > *Cst.* 12 ¿Será posible que hubiésemos tenido una idea o noción de extensión anterior al movimiento, o que un hombre que nunca hubiese percibido el movimiento jamás hubiese sabido o concebido que una cosa está distante de otra?
   >
   > *Cst.* 29 ¿Podemos formarnos una idea o noción de velocidad distinta de su medida y con exclusión de ésta, como podemos hacerlo con el calor, excluyendo los grados que marca el termómetro con el que se le mide? ¿Y no se supone esto en los razonamientos de los analistas modernos?
   >
   > *Cst.* 54 ¿No pueden hacerse mediante cantidades finitas las mismas cosas que ahora se hacen mediante cantidades infinitas, y no producirá esto gran tranquilidad a la imaginación y entendimiento de los hombres?
   >
   > *Cst.* 64 Esos matemáticos que son tan delicados acerca de las propuestas religiosas, ¿son estrictamente escrupulosos en su propia ciencia? ¿No se someten a la autoridad, ni aceptan cosas con base en creencias, ni creen propuestas inconcebibles? ¿No tienen sus propios misterios y, lo que es más, sus incongruencias y contradicciones? (*The Analyst Cst. 5, 12, 54, 64*)

   Berkeley considera que la indivisibilidad infinita no es posible o concebible (Robles 2006, Pág. 124 Nota 67 al texto del Analista.), que es parte importante del concepto de una fluxión o fluxón, por lo cual cuestiona que los matemáticos sean capaces de concebir tanto la fluxión como la divisibilidad infinita; y es que no tenemos experiencia de lo que proponen los matemáticos. Por lo cual abogará por una matemática que solo tome en cuenta un proceso finito, el cual sí se puede concebir, de acuerdo con Berkeley. Berkeley también apunta a que la noción de velocidad, o distancia propuesta en la doctrina de las fluxiones tampoco es concebible; el problema es el siguiente, ¿cómo concebimos una velocidad cuando se ha alcanzado el límite de tiempo, para el cual todo está estático, cuando la velocidad se mide con el cambio de distancia?; ¿cómo concebimos una magnitud que es mínima, cuando en geometría una cantidad siempre puede volver a dividirse, aunque para nuestra percepción dicha cantidad sea tan pequeña que no es posible dividirla físicamente?; ¿cómo entendemos un infinitesimal o fluxón si estos parecen cambiar de propiedades a voluntad del matemático? Desde mi punto de vista, Berkeley nos está diciendo que los matemáticos no tienen idea o percepción de las fluxiones o los infinitesimales. Esto es porque han establecido el concepto a partir de las propiedades, y no las propiedades a través del concepto. Si bien, como dice Hume es difícil concebir, más no imposible, que el fuego no caliente (*Treatise* §1 §§4 §§§7), se puede argumentar que la fluxión es difícil de concebir, pero no imposible de comprender; Berkeley podría argumentar que el problema no es imaginar un fuego frío, sino imaginar el fuego a partir de su propiedad de ser caliente. Desde mi punto de vista, Berkeley apunta a que no podemos tener una idea o percibir algo por sus propiedades, ya que podemos equivocarnos de percepción u objeto que originó una propiedad, del mismo modo que la propiedad de ser caliente es común a muchas cosas, y no solo del fuego, como una hornilla de estufa que puede quemarnos aun sin emitir luz, propiedad del fuego. Por lo tanto establecer un concepto a partir de sus propiedades solo puede ser un concepto tentativo, ya que otros conceptos u objetos pueden cumplir con las mismas propiedades, pero ser diferentes conceptos entre sí. Así un objeto que tiene propiedades contradictorias, desde la perspectiva de Berkeley, de tener relaciones de proporción con otros elementos geométricos, lo que solo sucede si hay magnitud, y no tener magnitud, es imposible de concebir porque primero son elementos contradictorios; y segundo partimos de sus propiedades para entender el concepto, lo que dificulta establecer el concepto de fluxión.

5. ¿La doctrina de las fluxiones utiliza la lógica aristotélica; o define la lógica que utiliza, si no utiliza la lógica aristotélica? La lógica se puede considerar, bajo una interpretación, como las leyes de la razón. Si un argumento sigue las leyes de la lógica y parte de premisas verdaderas, lo que se concluya es verdadero. Para la época moderna se utiliza la lógica aristotélica, que comienza a utilizarse con Aristóteles, posteriormente, sus comentaristas y estudiosos reúnen varios tratados aristotélicos de lógica en un libro llamado *Organon* (Smith 2018). La lógica también se desarrolló en la Edad Media y principios del Renacimiento, siglos XII y XIII, como con Pedro Hispano (Spruyt 2015), entre otros pensadores. La llamada lógica aristotélica sigue el principio de no contradicción: no podemos utilizar al mismo tiempo una oración y su negación. La lógica ha sido parte importante del pensamiento clásico, en especial en matemáticas. Si una prueba matemática se basa en lógica aristotélica y aceptamos las premisas como verdaderas; la conclusión también es verdadera. Una prueba matemática que sigue las reglas de la lógica aristotélica, permite que la prueba sea examinada bajo estas reglas de operación y que la conclusión se considere verdadera; siempre y cuando aceptemos las premisas. El principio de no contradicción también se usa para refutar una tesis o hipótesis, de modo que si suponemos algo y probamos que llega una contradicción, debe ser falso; y como solo hay cosas que son verdaderas o falsas, lo contrario debe ser lo cierto. Sin embargo Berkeley considera que el fluxón, al poder establecer relaciones de proporción con otros elementos geométricos, tiene magnitud; y al comportarse como punto, ya no tiene magnitud, tiene propiedades contradictorias. Por lo tanto Berkeley considera que los matemáticos deben explicar, si el fluxón es contradictorio, de lo contrario, "nada puede seguirse de algo contradictorio" (*cf.* Cuestiones 23, 28, 40):

> *Cst*. 23 ¿Pueden ser verdaderas las inconsistencias? ¿Han de admitirse, acerca de cualquier tema o en cualquier ciencia, propuestas que nos parecen inaceptables [*repugnant*] y absurdas, y ha de concederse el uso de infinitos como un pretexto y una justificación suficientes para admitir tales propuestas en geometría?
>
> *Cst*. 28 ¿No es el cambio de hipótesis o (como podemos denominarlo) la *fallacia suppositionis* un sofisma que afecta en amplio grado los razonamientos modernos tanto en la filosofía mecánica como en la compleja y refinada geometría?
>
> *Cst*. 40 ¿No es un caso o regla general que si uno y el mismo coeficiente divide a productos iguales, da cocientes iguales? Pero, ¿puede interpretarse tal coeficiente como o ó como nada? O bien, ¿alguien dirá que si la ecuación $2 \times o = 5 \times o$ se divide entre o serán iguales los cocientes de ambos lados? Por tanto, ¿no puede ser un caso general para todas las cantidades y, sin embargo, no extenderse a las nadas, o no incluir el caso de nada? ¿Y no pudo haber llevado a los hombres a razonamientos falsos poner la nada bajo la noción de cantidad? (*The Analyst* Cst. *23,28,40*)

Para Berkeley la cuestión es que con un elemento contradictorio, no podemos trabajar, dados los principios de la lógica, el principio de no contradicción. Y si bien existen interpretaciones que permiten refutar a Berkeley, como se vio anteriormente cuando se explicó (*The Analyst §16*), el problema es que el método con el que se obtienen los principios de la fluxión no se conoce; la lógica utilizada no se explica; o no se estudian los supuestos metafísicos de los cuales Newton parte (*The Analyst §47*). Sin un método explícito que me permita evitar la contradicción; sin una lógica tolerante a las contradicciones, explicada y puesta a prueba; y sin un estudio minucioso de los principios de los cuales Newton parte, la fluxión se usa de manera contradictoria, y opuesta a toda lógica conocida.

6. ¿Cómo se utiliza la geometría, como símbolo o como instancia geométrica? En la sección 2.3.1 Berkeley considera que tanto la geometría como el álgebra son aplicaciones que utilizan símbolos y reglas de símbolos para llegar a sus conclusiones, por lo cual no hay una diferencia sustancial, trascendente o transcendental que las distinga. Esto se ve reflejado en las siguientes cuestiones, *cf.* Cuestiones 6,17-19,25,26,27,38,42:

> *Cst.* 6 ¿No han de considerarse los diagramas, en una demostración geométrica, como signos de todas las proposiciones finitas, de todas las extensiones o magnitudes del mismo sensibles e imaginables?
> *Cst.* 18 ¿No se sigue de que las proposiciones geométricas sean generales y de que, por tanto, sean sustitutos o representantes generales las líneas de los diagramas, que no podemos limitar o considerar el número de partes en las que son divisibles tales líneas particulares?
> *Cst.* 42 ¿No pueden los hombres razonar igual con variables que con palabras? ¿No se dan las mismas reglas de lógica en ambos casos y no tenemos derecho a esperar y exigir las misma evidencia en los dos? (*The Analyst* Cst. *6,18,42*)

La razón principal de que Berkeley considere que la geometría y el álgebra sean signos; es que ambas trabajan con entidades que toman diversos valores, y hacen deducciones con los signos y las reglas con las cuales trabajan. Aun cuando la geometría tiene a las figuras geométricas como referente, el signo no solo representa a una figura en específico, sino además representa a todas las figuras geométricas del mismo tipo. Una línea en un diagrama euclidiano es la representación de todas las líneas en la geometría euclidiana, sea *sensible o imaginable*. Aun suponiendo, sin conceder, que la geometría sea la ciencia del mundo de las formas, y no de las apariencias, *mundo platónico*; Berkeley, posiblemente, seguiría diciendo que la geometría euclidiana es un signo y no una instancia de la forma, ya que cuando realizamos una deducción, lo hacemos de la forma y no de la instancia. Esta crítica puede interpretarse como la preocupación de Berkeley de que las matemáticas se derivan solo de sus reglas; en contraposición de la postura que considera que el diagrama en sí mismo es la prueba. La proposición de Euclides I.10 es válida porque además de la referencia sensible que nos da el diagrama, tenemos una derivación sintética que valida la proposición. Berkeley considera que los matemáticos dejan de lado el uso que ellos mismos le dan a la información proveniente de la experiencia, el cual dicta que, aun cuando no tengamos una línea recta, podemos hablar de las propiedades de las líneas rectas, dados los postulados de la geometría, sus definiciones y nociones comunes, que permiten obtener la validez de la prueba.

Considero que estas son las preguntas principales de Berkeley, desde mi perspectiva, una vez que hemos visto

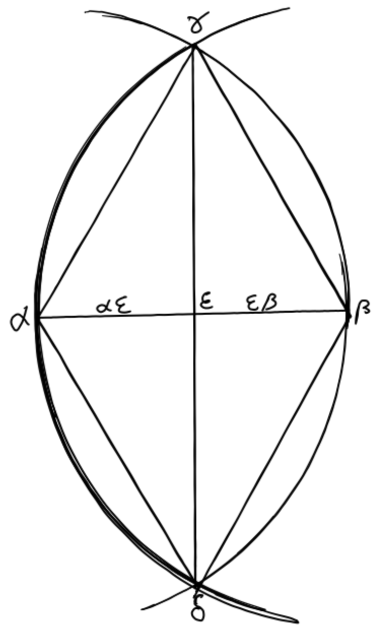


Figura 2.6: Cortando a la mitad una línea recta. Comúnmente se acepta el diagrama como prueba de la bisección de la recta. Sin embargo en Euclides I.10 la prueba de la bisección de la recta no solo hace referencia al diagrama, sino a postulados, proposiciones anteriores y otros elementos disponibles en la geometría euclidiana. Mientras que un ingeniero o técnico se preocupa porque un diagrama sea visualmente exacto, ya que del diagrama puede depender crear algo en el mundo empírico; el matemático puede prescindir de la exactitud del diagrama, ya que lo que le interesa son las conclusiones que puede obtener dado un objeto definido por los axiomas, postulados y definiciones bajo los cuales se rige el objeto. Para Berkeley la prueba es la derivación sintética puesta en Euclides I.10.

la forma de trabajar de Newton y sus supuestos metafísicos-teológicos; y la propia propuesta de Berkeley acerca de estas cuestiones.

En el siguiente capítulo hago una recapitulación de lo visto anteriormente y aquello que por cuestiones de espacio y tiempo he tenido que dejar de lado.

Conclusiones

La polémica desatada por el texto *The Analyst* continúa hasta el día de hoy. Gran parte de la discusión se centra en atacar a Berkeley, o defender a Leibniz y Newton, considerando que Berkeley: a) no era matemático; b) no entendía el proceso y los objetos involucrados. Un posible ejemplo de esto es la discusión sobre qué lógica se aplica a objetos como la fluxión y los infinitesimales (Vickers 2007) (Brown y Priest 2004) (Estrada González y Martínez Ordaz 2017). Sin embargo creo que con lo mostrado en el capítulo anterior se puede sustentar lo siguiente:

1. Si bien es cierto que Berkeley no es matemático, domina con eficiencia varios temas matemáticos y ha estudiado lógica aristotélica y la matemática de ambos lados del canal de la Mancha. Berkeley reproduce y cuestiona los procedimientos de la doctrina de las fluxiones y el *Calculus Differentialis*, disciplinas que sirven de base al cálculo diferencial e integral, cálculo en el cual se deja de lado la geometría, como justificación, y el concepto de fluxión, así como el concepto de infinitesimal. Conoce, además la propuesta metafísica de Newton, reto considerable, dada la renuencia de Newton a compartir esa información. Habría que añadir la honestidad intelectual del pensador irlandés, ya que critica a ambos cálculos, cuando en Inglaterra, Newton es prácticamente intocable. Basta decir que actualmente se duda de la imparcialidad del juicio de prioridad hecho en la Isla Británica donde se declara creador del cálculo a Newton. Criticar el entendimiento de Berkeley al cálculo de fluxiones puede convertirse en un tiro al pie, ya que el método utilizado actualmente para estudiar el cálculo es la unión de los cálculos de Newton y Leibniz, y la forma de trabajar es analítica[(204)]; cuando claramente Newton se oponía a los métodos analíticos, al menos como prueba matemática. ¿Entendemos mejor el cálculo de Newton que Berkeley, solo por el hecho de obtener el mismo resultado con el cálculo diferencial e integral? Esa es una pregunta que dejo abierta, pero para la que desde mi perspectiva se puede esperar una respuesta negativa. Considero que un error que se comete al estudiar *The Analyst* es asumir que las críticas se dirigen a Newton. Considero que Berkeley se dirige a quienes han desarrollado la doctrina de las fluxiones y no a Newton mismo[(205)], pero esto no se prueba en esta tesis porque esta más allá del alcance

[204] Es decir se utilizan símbolos y sus reglas de conjugación y operación para trabajar; de manera similar a como el álgebra funciona.
[205] Newton publica pocos trabajos, con respecto a los que había hecho, de matemáticas y física. Para (Marquina *et al.* 1996) los textos de Newton, como el *Principia* se dejan de utilizar en matemáticas rápidamente, probablemente alejándose así de la metafísica de Newton.

de la misma. Esto es algo importante ya que lo que podemos estudiar de la doctrina de las fluxiones puede cambiar de acuerdo al autor estudiado; recuérdese que estudiosos como Euler trabajaron los escritos publicados de Newton reemplazando varias cuestiones metafísicas y teológicas que Newton utilizó originalmente (Panza 2007), lo que puede significar que la comunidad matemática trabaje en los problemas planteados por Berkeley y que se estudie el texto *The Analyst* desde esa posición en la cual se han superado los problemas presentados por Berkeley. Además apelar a que los cálculos de Newton, Leibniz y el cálculo diferencial e integral son el mismo es erróneo ya que esto parte de una postura filosófica y no de una prueba matemática. Por ejemplo en lógica, para determinar si 2 sistemas son intercambiables, hay que realizar varias pruebas, como la prueba de si los sistemas son completos([206]), y dado un sistema se procede a realizar dichas pruebas (Simons 1974). Un sistema incompleto puede obtener los mismos resultados que uno completo, pero esto no quiere decir que sean intercambiables. Lanzo la misma crítica que lanzó Berkeley, la matemática se trata de pruebas, no de suposiciones y hasta el momento solo hemos supuesto que los tres cálculos son intercambiables porque ofrecen los mismos resultados.

2. Otra crítica es que Berkeley no entendía el objeto de estudio de la doctrina de las fluxiones, sin embargo, Berkeley está consciente de que el fluxión tiene su fundamentación en la metafísica de Newton, como se vio en la sección 2.3.2. ¿Quién es el que se confunde, Berkeley al señalar el uso generalizado del fluxón; Newton al fundamentar la fluxión en su metafísica; o los matemáticos que usan el concepto de fluxión omitiendo la metafísica de Newton? Basar la doctrina de las fluxiones en el de *Quadrature*, sin abrazar los supuestos metafísicos que dan sustento a la fluxión, es considerado por Berkeley un error. La principal objeción es que despojado de un sustento o justificación adecuado, la fluxión es contradictoria. Dado que para la época, la lógica aristotélica es dominante en la práctica matemática, como se ha indicado en la sección 2.3.2, es indispensable que toda argumentación matemática siga el principio de no contradicción, cosa que Berkeley pone en tela de juicio. La fluxión es un elemento geométrico que mantiene relaciones de proporción, *ratio*, con otros elementos geométricos, lo cual solo es posible si tiene magnitud; pero los últimos pasos del cálculo de fluxiones son suponer que la fluxión ha alcanzado un límite o se ha *evanecido*, lo que significa, geométricamente, suponer que la fluxión se ha convertido un punto; pero por definición geométrica el punto *no tiene partes*, por lo cual no se le puede asignar medida/métrica/magnitud alguna. Dada la postura metafísica de Newton tenemos una explicación de cómo se puede entender la *evanescencia* de la fluxión, pero algunos matemáticos han renunciado a la metafísica de Newton, por lo cual deben explicar por qué se *evanece* la fluxión, y por qué puede mantener relaciones de proporción o *ratio* con otras figuras geométricas, lo que implica tener partes, y ser algo *que no tiene partes* al mismo tiempo. Una solución que se ha propuesto es que el fluxón es un elemento contradictorio, pero que sigue una lógica diferente a la clásica, como (Estrada González y Martínez Ordaz 2017). Sin embargo, si bien como apuntan (Estrada González y Martínez Ordaz

[206] Si se pueden derivar todos los teoremas de un sistema, dadas las reglas del lenguaje y/o su semántica

2017) la lógica clásica no es la única forma de realizar lógica y argumentación en matemáticas, Berkeley puede argumentar, que dado que se usa de manera intuitiva la lógica no-clásica(207), sus principios no están claros; ni tampoco queda claro si la fluxión en realidad se ajusta a un objeto que pueda utilizar una lógica no-clásica. Y es que utilizar una lógica no-clásica implica renunciar a algún principio y/o propiedad de la lógica clásica, por lo cual los matemáticos al renunciar a un principio de lógica clásica deben explicar la razón de la renuncia y cual es la forma de razonar con esta nueva lógica, cosa que no han hecho. En resumen:

a) Los matemáticos fluxionistas han renunciado a los posibles principios que dan sustento a la doctrina de las fluxiones. Sin estos principios, la fluxión es un elemento contradictorio y no podemos deducir algo de un elemento contradictorio.

b) Aun cuando exista una lógica que pueda trabajar con elementos contradictorios, se deben explicar los principios, reglas y consecuencias de su uso, cosa que no han hecho los practicantes de la doctrina de las fluxiones.

c) Por lo tanto no podemos decir que la doctrina de las fluxiones sea ciencia, en términos aristotélicos, porque no hay principios que expliquen el fluxón, que es la base del sistema; ni lógica en el método de las fluxiones, ya que la lógica que utilizan no es la lógica aristotélica y su lógica solo es intuitiva y por lo tanto no disponible a escrutinio, requisito indispensable para todo conocimiento exotérico, como lo es la ciencia.

Finalmente presento algunos temas que se quedaron fuera de este trabajo y que pueden aportar algo a la discusión:

- El resto de la polémica desatada por Berkeley, como aparece en las respuestas de Jurin o Cotes.
- Una comparación más detallada de la filosofía de las matemáticas entre Newton y Berkeley, aunque a *prima facie* son bastante distintas ya que la posición de Berkeley es que las matemáticas son completamente humanas, mientras que para Newton tienen un origen divino, o al menos pueden justificarse fuera del humano.

[207] A la lógica clásica se le reconoce como una formalización de la lógica aristotélica, aunque las dos tienen diferencias una con respecto a otra. En matemáticas se considera que algunas disciplinas matemáticas siguen lógica clásica aun cuando se hayan desarrollado mediante lógica aristotélica. Existen tres principios que sigue la lógica clásica, *no contradicción, identidad, el tercero excluido*. La no contradicción ya se explicó anteriormente, y es el principio que prohíbe usar un elemento y, su contrario u opuesto $\neg(A \wedge \neg A)$. La identidad es aquella propiedad que nos dice que un elemento es igual a sí mismo, $A = A$. El tercero excluido es el principio que dice que solo hay dos valores de verdad, la verdad y la falsedad $A \vee \neg A$. La lógica clásica cumple con monotonía y es la propiedad de que dada una deducción lógica, si agregamos premisas, podemos deducir las mismas inferencias, ej. *De A se sigue B*, $A \to B$ y *De A y C se sigue B*, $A \wedge B \to C$. Muchas lógicas no-clásicas niegan alguno de estos principios o no cumplen con la propiedad de monotonía. Además de estos principios básicos las lógicas no-clásicas pueden también cuestionar: que de una proposición y su negación se siga todo, llamando comúnmente el principio de explosión, o explosión, que también ya se explicó anteriormente, $A \wedge \neg A \to B, C, D, \ldots$ Existen diversas razones metodológicas y filosóficas para atacar algunos principios y/o propiedades de la lógica clásica; uno de los más comunes es capturar algún fenómeno no previsto por la lógica clásica. Un ejemplo de esto es negar el principio de identidad $A = A$, en física cuántica *si dos partículas se enlazan son indistinguibles entre sí, pero son diferentes partículas*; *Sea X el enlace entre el fotón A y el fotón B*, $A \neq B$, *decimos que* $X \neq X$ *porque* $A \neq B$. El estudio de las lógicas no-clásicas se ha dado en los últimos años, es por esto que considero que apelar a las lógicas no clásicas, no resuelve de fondo las críticas de Berkeley

- La filosofía de la física de Berkeley y Newton, que puede ser similar ya que ambos están en contra de establecer una física *a priori*, pero Berkeley está mas cerca de Hume quien considera que solo las matemáticas son un conocimiento certero, siendo la física solo altamente probable([208]), mientras que Newton considera que podamos encontrar algo real con la física, a menos que la evidencia nos indique lo contrario. Pero Dios nos asegura que es posible que los humanos seamos capaces de entender o encontrar algo real en el universo ya que compartimos propiedades con Él y Él conoce todo lo real y entiende todo, algo que no sucede con Berkeley.

- Un último tema que dejé de lado fueron algunas críticas lanzadas en *The Analyst* por Berkeley referentes a su propia filosofía de las matemáticas, que se caracteriza por rechazar el concepto de infinito utilizado por Newton y Leibniz, y propone que las matemáticas solo pueden ser finitas.

Con esto termino esta tesis, de un tema que da para varios doctorados.

Espero haber contribuido con este trabajo a defender que hay que estudiar el pensamiento de los autores en su contexto y no solo desde nuestra perspectiva.

[208] La física es humanamente certera, pero no completamente certera, puede ser revisada y cambiada; mientras que un teorema en matemáticas siempre será teorema de las matemáticas.

Referencias

Acerbi, F. (2013). *Aristotle and Euclid's postulates*. The Classical Quarterly, tomo 63(2) pág. 680–685. 6

Alten, H. *et al.* (2013). *4000 Jahre Algebra: Geschichte – Kulturen – Menschen*. Vom Zählstein zum Computer. Springer Berlin Heidelberg. 1.4, 1.4.1, 1.4.1, 1.4.1, 1.4.1, 64, 1.4.5

Alvargonzález, D. (2013). *Is the History of Science Essentially Whiggish?* History of Science, tomo 51(1) págs. 85–99. (document)

Andersen, K., Giusti, E. y Jullien, V. (2015). *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*, capítulo Cavalieri's Indivisibles, págs. 31–55. Springer International Publishing. 1.5.1, 1.5.1

Arquímedes (2004). *The Works of Archimedes Volume 1: The Two Books On the Sphere and the Cylinder*, tomo I. Cambridge University Press. Traducido al inglés junto con los comentarios de Eutocio, con comentarios y edición crítica de los diagramas. Traducido por Netz, R. 23

Barabashev, A. G. (1997). *In Support of Significant Modernization of Original Mathematical Texts (in Defense of Presentism)*. Philosophia Mathematica, tomo 5(1) págs. 21–41. (document), (b)

Bashmakova, I. G. (1997). *Diophantus and Diophantine Equations*. The Mathematical Association of America. 1.4.2, 1.4.2

Berkeley, G. (1707). *An Essay Towards a New Theory of Vision*. En Luce, A. y Jessop, T. E., eds., *The Works of George Berkeley Bishop of Cloyne , Volume I*, págs. 141–240. Thomas Nelson and Sons Ltd, 1948 edición. 2.1

Berkeley, G. (1710). *A Treatise Concerning The Principles of Human Knowledge*. En Luce, A. A. y Jessop, T. E., eds., *The Works of George Berkeley Bishop of Cloyne , Volume II*, págs. 1–114. Thomas Nelson and Sons Ltd, 1949 edición. 2.1

Berkeley, G. (1734). *El Analista*. En Robles, J. A., ed., *Los escritos matemáticos de George Berkeley*, págs. 55–129. Instituto de Investigaciones Filosóficas, 2006 edición. Traducido por José Antonio Robles. 2.1, 2.3.2, 193

Bos, H. J. (2001). *Redefining Geometrical Exactness*. Springer, New York, NY. (document), 1.1, 1.3, 1.3, 1.3.1, 13, 23, 1.3.1, 1.3.1, 25, 1.6, 1.3.1, 1.3.1, 1.3.2, 31, 32, 35, 1.3.3, 38, 40, 1.3.4, 1.4.1, 1.4.3, 1, 2, 3, 1.4.3, 74, 1.4.4, 1.4.4, 1.4.4, 86, 1.4.5

Brown, B. y Priest, G. (2004). *Chunk and Permeate, a Paraconsistent Inference Strategy. Part I: The Infinitesimal Calculus*. Journal of Philosophical Logic, tomo 33(4) págs. 379–388. 2.3.2, 2.3.2

Cajori, F. (1993). *A History of Mathematical Notations*, tomo I de *A History of Mathematical Notations*. Dover Publications. 66

Cardano, G. (1993). *The Rules of Algebra: Ars Magna*. Dover Publications. Texto de 1545. Traducido por Witmer, T.R. 1.4.1

Cardano, H. (1545). *Artis magnæ, sive de regulis algebraicis, liber unus*. Joh. Petreius. Hieronymi, nombre latino para Geronimo. 1.4.1

Celeyrette, J. (2015). *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*, capítulo From Aristotle to the Classical Age, the Debates Around Indivisibilism, págs. 19–30. Springer International Publishing. 1.5, 1.5, 1.5

Chuquet, N. (1881). *Le Triparty en la Science des nombres, par maistre Nicolas Chuquet, Parisien, publié d'après le manuscrit fonds français n° 1346 de la Bibliothèque nationale de Paris et précédé d'une notice par M. Aristide Marre.* Impr. des Sciences mathématiques et physiques. Texto de 1484. (document), 1.4.1, 1.9, 52

Clavius, C. (1606). *Geometria practica*. Albinus. 1.3.1, 28

Clavius, C. (1612). *L' Algebre*. Leonard Streel Imprimeur. Traducido por Guillion, G. 1.10b, 55, 1.4.1, 1.4.2

Crippa, D. (2014). *Impossibility results: From Geometry to Analysis*. Tesis Doctoral, Univeristé ParisDiderot Paris 7,. 31

Cuomo, S. *et al.* (2000). *Pappus of Alexandria and the Mathematics of Late Antiquity*. Cambridge Classical Studies. Cambridge University Press. 1.3.1

Davis, E. B. (2009). *That Isaac Newton's nechanistic cosmology eliminated the need for God*, págs. 115–122. Harvard University Press. URL http://www.jstor.org/stable/j.ctvjghtcb.17. 2.2, 2.2.1, 107

de Pater, C. (2005). *An Ocean of Truth*. En Koetsier, T. y Bergmans, L., eds., *Mathematics and the Divine*, capítulo 24, págs. 459 – 484. Elsevier Science, Amsterdam. 107, 2.2.2, 2.2.2, 2.2.3, 122

Descartes, R. (1637). *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences. Plus La dioptrique, les météores et la géométrie, qui sont des essais de cete méthode*. De l'Imprimerie de IAN MAIRE. 25, 1.3.3

Dictionary by Merriam-Webster (2019-07-24). *Feign | Definition of Feign by Merriam-Webster*. URL https://www.merriam-webster.com/dictionary/feign. 116

Diofanto de Alejandría (Circa siglo IV A.C.). *The Arithmetica*. En Heath, T., ed., *Diophantus of Alexandria -A Study in the History of Greek Algebra*, págs. 129–266. Cambridge University Press. Estudio preliminar, suplementos y notas de Heath, T.L. 1.4.2

Domski, M. (2017). *Descartes' Mathematics*. En Zalta, E. N., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, spring 2017 edición. 1.3.3

Estrada González, L. y Martínez Ordaz, M. d. R. (2017). *La (in)consistencia de los infinitesimales bernoullianos*. URL http://www.filosoficas.unam.mx/sitio/lectura-realismo-cientifico-y-metodologia. Conferencia realizada el día 17 de febrero de 2017 por el "Grupo intensivo de lectrura sobre Realismo Científico y Metodología"; auspiciada por el Instituto de Investigaciones Filosóficas UNAM. 2.3.2, 3, 2.3.2, 2

Euclides (1576). *Los seis libros primeros dela geometria de Euclides. Traduzidos en lengua española por Rodrigo çamorano.* En casa de Alonso de la Barrera. 9

Euclides (1654). *Euclidis Elementorum Libri XV: Accessit liber XVI De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione. Omnes Perspicvis Demonstrationibus accuratisque scholiis illustrati*. Rosa. Con comentarios de Clavius, C. 1.3.1, 28

Euclides (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Número v. I en Dover Books on Mathematics. Dover Publications. Traducido por: Heath, T.L. 1.1, 1.2, 1.2, 1.3, 2.2.5

Flegg, G., Hay, C. y Moss, B. (1985). *Nicolas Chuquet, Renaissance Mathematician: A study with extensive translation of Chuquet's mathematical manuscript completed in 1484*. Springer Netherlands. 1.4.1

Fuentes Gullén, E. (2017). *The Germanic Development of the Pre-Modern Notion of Number*. Tesis Doctoral, Universidad de Salamanca. 89

Gardiner, A. (2002). *Understanding Infinity: The Mathematics of Infinite Processes*. Dover Publications, Inc. (document), 1

Gascoigne, J. (2002). *Cambridge in the Age of the Enlightenment: Science, Religion and Politics from the Restoration to the French Revolution*. Cambridge University Press. 1.6

Gindikin, S. (2007). *Tales of Mathematicians and Physicists*. Springer-Verlag New York. 64

Grant, H. y Kleiner, I. (2015). *Analytic Geometry: From the Marriage of Two Fields to the Birth of a Third*, págs. 19–25. Springer New York, New York, NY. 44

Guicciardini, N. (2003). *The Development of Newtonian Calculus in Britain, 1700-1800*. Cambridge University Press. 5, 2.3.2

Haack, S. (1987). *Realism*. Synthese, tomo 73(2) págs. 275–299. URL https://doi.org/10.1007/BF00484743. 106

Heat, T. (1956). *Introduction*. En *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, número v. I en Dover Books on Mathematics. Dover Publications. 1.2

Heeffer, A. (2017). *Arithmetic in the Renaissance*, págs. 1–6. Springer International Publishing, Cham. URL https://doi.org/10.1007/978-3-319-02848-4_1174-1. 1.4.4, 1.4.4

Henderson, L. (2019). *The Problem of Induction*. En Zalta, E. N., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, spring 2019 edición. 160

Henry, J. (2016). *Henry More*. En Zalta, E. N., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, winter 2016 edición. 1.6, 99

Horsten, L. (2019). *Philosophy of Mathematics*. En Zalta, E. N., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, spring 2019 edición. 4

Høyrup, J. (2002). *Pre-modern "algebra": a concise survey of that which was shaped into the technique and discipline we know*. Quaderni di Ricerca in Didattica, tomo 11 págs. 84–97. 59

Hume, D. (2015). *A Treatise of Human Nature*. The University of ADELAIDE, 1era edición. URL https://ebooks.adelaide.edu.au/h/hume/david/treatise-of-human-nature/complete.html. Primera edición publicada anónimamente en 1739. 2.1

Hutton, S. (2013). *The Cambridge Platonists*. En Zalta, E. N., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, winter 2013 edición. 1.6

Iamblichus (1988). *The theology of arithmetic: on the mystical, mathematical and cosmological symbolism of the first ten numbers translated by Robin Waterfield*. A Kairos book. Phanes Press. 2.2.5

Janiak, A. (2010). *Newton as Philosopher*. Cambridge University Press. 1, 2, 3, 109, 2.2.2, 118, 2.2.2, 2.2.3, 125, 2.2.4, 129

Jones, A. (1986). *Pappus and the Collection*. En Jones, A., ed., *Pappus of Alexandria Book 7 of the Collection: Part 1. Introduction, Text, and Translation*, págs. 1–65. Springer New York, New York, NY. 1.3.1

Jullien, V. (2015a). *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*. Science Networks. Historical Studies. Springer International Publishing. 1.1, 30

Jullien, V. (2015b). *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*, capítulo Explaining the Sudden Rise of Methods of Indivisibles, págs. 1–18. Springer International Publishing. 1.5

Katz, V. (2017). *A History of Mathematics: An Introduction*. Math Classics. Pearson. 1.4.1, 1.4.1, 1.4.1, 1.4.1, 64

Keynes, M. J. (1956). *Newton, the man*. En Newman, J. R., ed., *The World of Mathematics*, capítulo 9, págs. 277–285. Simon and schuster. 1.6, 2.2, 101

Khuwārizmī, M. (1831). *The algebra of Mohammed ben Musa*. J. L. Cox. Texto de 1342. Traducido por Rosen, F.A. 1.4

Koyré, A. (1957). *From the Closed World to the Infinite Universe*. Library of Alexandria. Harper & Brothers. 116

Lexico Dictionaries (2019-07-24). *feign | Definition of feign in English by Lexico Dictionaries*. URL https://www.lexico.com/en/definition/feign. 116

Linnebo, Ø. (2018). *Platonism in the Philosophy of Mathematics*. En Zalta, E. N., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, spring 2018 edición. 153

Malet, A. (2015). *Isaac Barrow's Indivisibles*. En Jullien, V., ed., *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*, págs. 275–284. Springer International Publishing, Cham. 172

Malet, A. y Panza, M. (2015a). *Newton on Indivisibles*. En Jullien, V., ed., *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*, págs. 365–390. Springer International Publishing. 146, 2.3.2

Malet, A. y Panza, M. (2015b). *Wallis on Indivisibles*. En Jullien, V., ed., *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*, págs. 307–346. Springer International Publishing, Cham. 172

Maronne, S. y Panza, M. (2014). *Euler, Reader of Newton: Mechanics and Algebraic Analysis*. Advances in Historical Studies, tomo 03 págs. 12–21. 2.2, 1

Marquina, J. *et al.* (1996). *Philosophiae naturalis principia mathematica: consideraciones en torno a su estructura matemática*. Revista mexicana de física, tomo 42(6) págs. 1051–1059. 2.2.3, 126, 205

Marquina, J. E. (2006). *La tradición de Investigación Newtoniana*. UAM Iztapalapa. 102, 103, 2

Mazur, J. (2014). *Enlightening Symbols: A Short History of Mathematical Notation and Its Hidden Powers*. Princeton University Press. 1.4.1, 1.4.2

McKinney, C. B. P. (a). *The Duplicators, Part I: 'Eutocius Collection of Cube Duplications - Menaechmus' First Solution*. URL https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/the-duplicators-part-i-eutocius-collection-of-cube-duplications-menaechmus-first-solution. Página web consultada el 2018-04-27. 23

McKinney, C. B. P. (b). *The Duplicators, Part I: 'Eutocius Collection of Cube Duplications - Menaechmus' Second Solution*. URL https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/the-duplicators-part-i-eutocius-collection-of-cube-duplications-menaechmus-second-solution. Página web consultada el 2018-09-01. 23

Meskens, A. y Tytgat, P. (2017). *Exploring Classical Greek Construction Problems with Interactive Geometry Software*. Compact Textbooks in Mathematics. Springer International Publishing. 19, 1.3.1, 1.3.1, 1.3.1

More, H. (1662). *An Antidote Against Atheism, Or an Appeal to the Natural Faculties of the Mind of Man, whether there be not a God*. En *A Collection of Severall Philosophical Writings of Dr Henry More*. James Flesher para William Morden Book vendedor en Cambridge, 2a edición. 1.6

Morris, W. E. y Brown, C. R. (2019). *David Hume*. En Zalta, E. N., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, summer 2019 edición. 160

Muntersbjorn, M. M. (2003). *Representational Innovation and Mathematical Ontology*. Synthese, tomo 134(1) págs. 159–180. 1.5.1, 97

Nelson, A. (2017). *Descartes on the limited usefulness of mathematics*. Synthese. 2.2.4

Newton, I. (1687). *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. En Janiak, A., ed., *Isaac Newton Philosophical Writings*, Cambridge Texts in the History of Philosophy, págs. 40–93. Cambridge University Press. (document), 2.1, 2.2.2

Newton, I. (1692 ó 1693). *Segunda carta a Bentley*. En Janiak, A., ed., *Isaac Newton Philosophical Writings*, Cambridge Texts in the History of Philosophy, págs. 98–100. Cambridge University Press. 2.2.5

Newton, I. (1710). *Itroduction to the Quadrature of Curves*. School of Mathematics Trinity College, Dublin. Traducción al inglés por John Harris. Editado por Wilkins, D. R. en 2002 y 2014. 2.1, 2.2.5, 2.2.5

Newton, I. (1721). *Cuestión 31 de la óptica.* En Janiak, A., ed., *Isaac Newton Philosophical Writings*, Cambridge Texts in the History of Philosophy, págs. 132–140. Cambridge University Press. 2.2.5

Newton, I. (1736). *The Method of Fluxions and Infinite Series: With Its Application to the Geometry of Curve-lines. By ... Sir Isaac Newton, ... Translated from the Author's Latin Original Not Yet Made Publick. To which is Subjoin'd, a Perpetual Comment Upon the Whole Work, ... By John Colson, ...* Henry Woodfall; y vendido por John Nourse. 2.2.5, 151

Newton, I. (1962). *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton: A Selection from the Portsmouth Collection in the University Library, Cambridge*. Cambridge University Press. Textos escogidos, editados y traducidos por A R Hall, R y Boas Hall M. (document)

Newton, I. (circa 1684). *De gravitatione et æquipondio fuidorum*. En Benítez Grobet, L. y Robles García, J. A., eds., *De Newton y los Newtonianos*, capítulo 1, págs. 29–60. Universidad Nacional de Quilmes. Traducción de Robles García J. A. Libro publicado en 2006. 2.1

Omodeo, P. D. (2014). *Astronomy*, págs. 1–5. Springer International Publishing, Cham. URL https://doi.org/10.1007/978-3-319-02848-4_251-1. 1.4.4

Panza, M. (2007). *What is new and what is old in Viéte's analysis restituta and algebra nova, and where do they come from? Some reflections on the relations between algebra and analysis before Viéte*. Revue d'histoire des mathématiques, tomo 13-1 págs. 85–153. 74, 1.4.4, 1

Panza, M. (2012). *From velocities to fluxions*. En Janiak, A. y Schliesser, E., eds., *Interpreting Newton*, capítulo 9. Cambridge University Press. 2.2.4

Pappus (1982). *Pappus d' Alexandrie. La collection mathématique*. A. Blanchard. Traducido por Eecke, P.V. con el auspicio de Fondation universitaire de Belgique. 25

Pisano, L. (2012). *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer New York. Texto de 1202. Traducido por Sigler, L. 1.4.1, 59

Poonen, B. (1998-99). *INFINITY: CARDINAL NUMBERS*. URL https://mathcircle.berkeley.edu/sites/default/files/archivedocs/1998_1999/lectures/9899lecturepdf/Bjorn2.pdf. Handout para el programa: The Berkeley Math Circle, Departamento de Matemáticas, Universidad de California. 1

Record, R. (circa 1557). *The whetstone of witte*. Jhon Kingstone. 1.4.1

Robles, J. A. (1993). *Las báses ilógicas del cálculo*. En Robles, J. A., ed., *Las ideas matemáticas de George Berkeley*. UNAM. 29, 1.3.1

Robles, J. A., ed. (2006). *Los escritos matemáticos de George Berkeley*. Instituto de Investigaciones Filosóficas. 193, 4

Sangaku, S. L. (2018-04-27). *Hipérbola equilátera*. URL https://www.sangakoo.com/es/temas/hiperbola-equilatera. 23

Sefrin-Weis, H. (2010). *Pappus of Alexandria: Book 4 of the Collection: Edited With Translation and Commentary by Heike Sefrin-Weis*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer London. 1.3.1

Shapiro, S. y Kouri Kissel, T. (2018). *Classical Logic*. En Zalta, E. N., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, spring 2018 edición. 3

Sidoli, N. (2018). *The concept of given in Greek mathematics*. Archive for History of Exact Sciences, págs. 1–50. 1.4.4

Simons, L. (1974). *Logic without tautologies.* Notre Dame Journal of Formal Logic, tomo 15(3) págs. 411–431. 1

Smith, R. (2018). *Aristotle's Logic*. En Zalta, E. N., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, winter 2018 edición. 5

Spruyt, J. (2015). *Peter of Spain*. En Zalta, E. N., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, fall 2015 edición. 5

Stevin, S. (1634). *Les oeuvres mathematiques de Simon Stevin de Bruges: Ou sont inserées les memoires mathematiques, esquelles s'est exercé le tres-haut & tres illustre prince Maurice de Nassau*. v. 1-6. Bonaventure & Abraham Elsevier. Traducido por Girard, A. 1.4.1

Torretti, R. (2014). *Menaechmus*. En Hockey, T., Trimble, V., Williams, T. R., Bracher, K., Jarrell, R. A., Marché, J. D., Palmeri, J. y Green, D. W. E., eds., *Biographical Encyclopedia of Astronomers*, págs. 1455–1456. Springer New York, New York, NY. 22

Turchin, V. (1977). *The Phenomenon of Science*. Columbia University Press. 1.4

Vickers, P. (2007). *Was the Early Calculus an Inconsistent Theory?* 2.3.2, 2, 2.3.2

Viéte, F. (1630). *L'algebre novvelle de Mr. Viete*. A Paris : Chez Pierre Rocolet. Traducido por Vasset, A. Exlibris por Hopetoun. 1.4.3, 1.4.3

Weir, A. (2015). *Formalism in the Philosophy of Mathematics*. En Zalta, E. N., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, spring 2015 edición. 1.2, 153

Westfall, R. S. (2000). *Isaac Newton*, capítulo 17, págs. 109–114. Garland reference library of the humanities. Garland Publishing. 2.2.1, 107

Widmann, J. (1508). *Behend und hüpsch Rechnung uff allen Kauffmanschafften*. Editor desconocido. 1.10a