Los números y el contar en *Hume* y *Berkeley*

Mauricio Algalán Meneses

13-10-2015

Hay veces que hacer matemáticas es hacer filosofía

Luis Ramírez Flores *in memoriam*

Introducción

Berkeley y *Hume* vivieron una época muy interesante para las *Matemáticas* y la *Filosofía Natural*. Los siglos $XVII - XVIII$, estuvieron muy cerca del auge de la denominada física clásica, mecánica o newtoniana, así como de los primeros estudios del Cálculo Diferencial e Integral. Leibniz publica sus escritos sobre este tema en 1684 y Newton publica sus *Principia* poco tiempo después(Stillwell 2010, §9), estos textos son fundamentales para la ciencia y las matemáticas, su relevancia llega incluso al día de hoy, y causaron un gran impacto en su tiempo. Aunado a esto se da una amarga disputa sobre quien fue el autor original del Cálculo. También en este periodo el sistema heliocéntrico cobra fuerza en detrimento del sistema geocéntrico, siendo estos solo algunos de los más importantes cambios que sucedieron en dichos siglos.

En este intenso ambiente científico, *Berkeley* y *Hume* desarrollaron su propio pensamiento sobre la naturaleza de las matemáticas y de sus objetos. En esta ponencia mostraré que estos dos autores tenían una visión de los objetos matemáticos muy cercana, formalismo y anti-realismo.

En general las posturas realistas en la *Filosofía de las Matemáticas* es una posición filosófica que de acuerdo a Shapiro y a Linnebo, sostiene algunas de las siguientes tesis acerca de la naturaleza del conocimiento matemático(Shapiro 1997, Introduction)(Linnebo 2013):

1. *Existencia*: Los objetos matemáticos existen. Es la concepción de que las matemáticas están formadas por objetos y que existen independientemente de los humanos o alguna otra entidad.
2. *Abstracción*: Los objetos matemáticos están fuera del espacio y tiempo. Para el realismo, que los objetos sean abstractos implica que se ven poco afectados, o nunca son afectados por el tiempo y el espacio.
3. *Independencia*: Los objetos matemáticos son independientes de los agentes, prácticas o convenciones, así como a los lenguajes propios de la disciplina. Se entiende que existen objetos que son tratados por diferentes lenguajes, personas o la práctica matemática que los creó y que siguen siendo el mismo objeto.

Existen varios tipos de realismo, el más conocido es el platónico que sostiene las tres tesis. Generalmente se le conoce como anti-relismo a aquella posición que niega alguna o todas estas tesis.

El formalismo es una posposición, o una serie de posiciones, en la *Filosofía de las Matemáticas*, que es posiblemente la mas aceptada por los matemáticos, que tiene algunos de estos elementos en común(Detlefsen 2005):

1. La aritmética tiene prioridad sobre la geometría.
2. Un objeto o área matemática se conoce por sus causas.
3. Se consideran que es el rigor, ya sea por medio de la abstracción o por las reglas de una área matemática, por lo que es posible conocer a los objetos matemáticos.
4. El lenguaje matemático no es representacional. Es decir el lenguaje matemático puede volverse un juego[reglamentado] de caracteres [vacíos].
5. El formalista tiene la libertad de crear los instrumentos necesarios para los fines que busque alcanzar.

Para mostrar porque las propuestas de *Berkeley* y *Hume* podrían ser consideradas como precursoras de propuestas anti-realistas y de la propuesta formalista, me basaré en tres trabajos *An Essay Towards a New Theory of Vision* (*TV*) y *A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge* (*PHK*) de *Berkeley* y *A Treatise of Human Nature* (*Treatise*) de *Hume*; en primer lugar presentaré el pensamiento de *Berkeley* y después analizaré el pensamiento de *Hume*. Finalizaré con algunas posibles influencias de estos autores en filósofos posteriores, así como mostrando los puntos que apoyen mi tesis.

1. *Berkeley*

Berkeley es un filósofo empirista, considera que la experiencia sensible es la forma en que conocemos; en (*TV*) y en (*PHK*) analiza ampliamente esto, basándose en la tesis de que es la mente quien permite tal conocimiento. Postula que nuestra percepción es finita por lo que existe un mínimo para lo percibido, tanto para lo visible como para lo tangible, los llamados *Minimum Visibile*y Minimum Tangible; siendo estos un impedimento para la divisibilidad infinita(*TV §54*). Estos conceptos estarán presentes en varias de sus obras.

La posibilidad de la divisibilidad infinita ya se planteaba desde la antigua Grecia, por lo menos; es parte de la concepción inicial del Cálculo(Stillwell 2010). *Berkeley* considera, que es con la experiencia que conocemos, ésta se obtiene mediante las impresiones sensibles y estas son finitas; por lo tanto la mente no puede concebir la divisibilidad infinita.

También se opone a las *ideas abstractas*, desde la perspectiva de *Berkeley* las ideas abstractas son contradictorias, ya que una idea abstracta debe eliminar sus propiedades y a la vez mantenerlas. La líneas y superficies no pueden ser ni blancas ni negras, ni de ningún otro color, tampoco pueden tener magnitud, ni son finitas, ni cortas, ni largas; en el caso de las superficies tampoco pueden ser ásperas, lisas, cuadradas o redondas; los triángulos tampoco son rectángulos, oblicuos, o isósceles, pero cada una de las ideas de estos objetos debe tener todas sus correspondientes propiedades a la vez. *Berkeley* considera que esta característica de las ideas abstractas, de tener todas sus propiedades y no tenerlas, es contradictoria, y trae como consecuencia errores y dificultades(*TV §122-125*). Esta postura se mantiene en (*PHK §Introducción*) y la desarrolla en varias partes de ese libro. Así mismo objeta que una *palabra* esté determinada o sujeta a una *definición*(*PHK §Introducción§§18*).

La filosofía de *Berkeley* está en contra de las ideas abstractas, pero apoya las *ideas generales*(*PHK §Intro.§§12*), *Berkeley* piensa que el problema está cuando los filósofos consideran válida la abstracción que va más allá de la percepción. Probablemente, lo que *Berkeley* entiende por idea general lo da en (*PHK §Introducción§§18*), en donde dice que la palabra *triángulo* tiene un *significado*: superficie plana comprendida por tres líneas rectas, y que esta idea carece de una limitación clara. Es la experiencia de sensible repetida de los particulares, lo que genera el universal; dicho de otra manera, los *Universales* solo tienen sentido si se aplican a un *Particular*(*PHK §Introducción,§Introducción§§15*).

Además, algo importante en la propuesta de *Berkeley*, es que considera que las *Matemáticas* están separadas de la realidad, esta propuesta se puede ver en las dos obras aquí citadas, pero en especial, en (*TV §14*) menciona que la geometría es solo una hipótesis auxiliar; considerando que durante siglos, y aún ahora se considera que las matemáticas describen al mundo de algún modo, la visión de *Berkeley* al respecto era bastante original para su época, recuérdese por ejemplo, la famosa frase de Galileo: *el libro de la naturaleza está escrito en caracteres matemáticos*.

Se puede decir, que la postura mantenida por *Berkeley*, es opuesta a varios tipos de *realismo matemático*, en especial a aquellos que consideran que hay *objetos matemáticos*, porque *Berkeley* piensa que no hay cosas fuera de la mente; está en contra de las propuestas que defiendan que se usa la abstracción, ya que está en contra de ciertos tipos de abstracción; y está en contra de quienes consideran a las matemáticas como una forma de conocer el mundo, porque estas solo son hipótesis auxiliares.

Así, el pensamiento de *Berkeley*, es mucho más cercano a propuestas anti-realistas en matemáticas, y para el caso que nos ocupa al *nominalismo matemático*, para *Berkeley* es la mente quien impone las *Matemáticas*. Es desde esta perspectiva que analiza a los *números y el contar*.

1.1. *Berkeley* los números y el contar

Los números y el contar, para *Berkeley*, son producto de la mente; para que un conteo se produzca es esencial que se de primero la idea de *unidad*. Para *Berkeley*, cuando hablamos de contar un objeto podemos contarlo de distintas maneras, una casa puede contarse como una unidad; así mismo contiene varias ventanas; y la ciudad está compuesta por muchas casas(*TV* §*108,109*). El contar depende completamente de la idea designada de la unidad: una casa, una venta, una ciudad. Está en contra de la *unidad en abstracto*, el contar siempre está ligado a una unidad, que es una *medida arbitraria*(*TV* §*109*). El número es una criatura de la mente(*TV* §*109*)(*PHK* §*Parte 1*§§*12*).

Se puede observar que en *Berkeley* los números dejan de tener una realidad, ya sea como objetos o como abstracciones; y pasan a ser nombres de algo, que se identifican con una unidad arbitraria. Sin embargo, aunque la unidad sea arbitraria, el contar no es arbitrario.

Como consecuencia, la aritmética pasa a ser nominal, más específicamente: la aritmética se trata de signos, nombres y caracteres, desligados de ideas; que son necesarios para computar, hacer operaciones aritméticas; pero nada más(*PHK* §*Parte 1*§§*122*).

Berkeley considera que los números son un lenguaje, reemplazable, que puede ser más o menos expresivo; los primeros hombres solo contaban con las marcas; pero ahora se cuenta con los números, *caracteres o figuras* indo-arábigos con los cuales se puede computar de mejor manera, y según *Berkeley*, ésta es la intención con la que se desarrollaron(*PHK* §*Parte 1*§§*121*).

Por último quiero destacar que esta disociación de los números de lo real, ya sea como objeto abstracto o físico, plantea serias dudas de que el número pueda ser representado más allá de un símbolo y se pueda sujetar a una entidad bien determinada.

La postura de *Berkeley* es mucho más cercana a lo que después se conocería como *formalismo matemático*(Detlefsen 2005).

2. *Hume*

Hume, al igual que *Berkeley*, puede ser considerado un empirista que basa el conocimiento en la experiencia; esto se aprecia claramente en (*Treatise* §1), sin embargo, la propuesta de *Hume* tiene algunas diferencias importantes con la de *Berkeley*. Las principales diferencias son que *Hume* deja fuera, o no considera, los *Minimum Visibile* y Minimum Tangible. Otra diferencia importante es que él mismo se considera un escéptico moderado(*Treatise* §1§§2§§§5); *Berkeley* por su parte piensa que con su sistema evitamos el escepticismo(*PHK* §*Parte 1*§§*123,127*), con lo cual, *Berkeley* no tiene problemas para sustentar la idea y la evidencia de que Dios existe (*PHK* §*Parte 1*§§*118*,§*147-156*). Por su parte, en cambio, dentro del sistema de *Hume*, se deja a Dios de lado y su filosofía puede considerarse como atea(Morris y Brown 2015).

Hume considera que las *Matemáticas* y la *Filosofía Natural*, así como la *Religión natural*, dependen de la ciencia del hombre; estas disciplinas caen bajo la cognición de los hombres y son juzgadas por sus facultades, de modo que solo se pueden basar en el conocimiento del hombre. Y la ciencia del hombre solo se puede basar en la experiencia(*Treatise* §Introducción). La experiencia está constituida por las impresiones [del mundo] y las ideas que se obtienen de ellas(*Treatise* §1§§1§§§1). Esta argumentación es muy parecida a la de *Berkeley*.

Así mismo *Hume* también pone en duda la divisibilidad infinita de cantidades finitas; considera que la divisibilidad infinita conlleva un número infinito de partes o la total aniquilación [del objeto en cuestión](*Treatise* §1§§2§§§1). Así, al igual que *Berkeley*, pero con otros argumentos,*Hume* rechaza la divisibilidad infinita.

El rechazo de *Hume* a la divisibilidad infinita se da desde un argumento lógico; considera que dado que somos finitos, aunado a la contradicción anteriormente mostrada, no podríamos concebir algo infinito como la divisibilidad.

Hume reconoce las ideas abstractas, una idea abstracta tiene que ser *individual* en su aplicación, pero *general* en su representación. Considera, al igual que *Berkeley*, que una idea abstracta que remueve todas las propiedades de dicha idea es un error o contradicción. La formación de una idea abstracta se da por nuestra exposición a la idea repetidas veces y porque se puede asociar a otras palabras. Ejemplifica como se adquiere una idea abstracta, mediante el triángulo, que se forma mediante nuestra exposición a triángulos de diferentes formas y tamaños. Así mismo esto puede asociarse con otras palabras, como cuando hablamos de un ”triángulo equilátero”, sin que exista contradicción. La idea abstracta de *Hume* es muy similar a la idea general, de *Berkeley*, a quien considera un gran filósofo por haber cuestionado las ideas abstractas(*Treatise* §1§§1§§§7).

Con respecto a los objetos matemáticos, *Hume* niega la existencia de estos, al menos de los puntos matemáticos, pues sostiene que estos son producto de la mente(*Treatise* §1§§2). Como podemos ver *Hume* y *Berkeley* coinciden en varios puntos, y se puede apreciar una gran influencia del pensamiento de *Berkeley* en el trabajo de *Hume*.

2.1. *Hume*los números y el contar

A pesar de las coincidencias ya mencionadas en los planteamientos de *Hume* y *Berkeley*, existen varios elementos en el pensamiento de *Hume* que son desarrollados de manera independiente al de *Berkeley*.

Para *Hume* los números deben existir asociados a una unidad determinada, que es arbitraria, y decidida por la mente, de manera muy similar a *Berkeley*. Sin embargo, *Hume* considera que *debe existir la unidad* de la cual parten todos los números(*Treatise* §1§§2§§§2). En este sentido, la *existencia*, parece referirse a una idea abstracta, y no a un objeto con existencia propia, o a una idea independiente como las unidades platónicas.

Los números son jerárquicos, porque para que exista un número debe existir su anterior. Es por esto que la unidad debe existir, ser indivisible, y ser el objeto más pequeño en la cadena de números(*Treatise* §1§§2§§§2). Se podría decir que el contar y los números estar relacionados mediante una cadena jerárquica [tal vez acumulativa].

Además de esta forma de concebir los números, encuentra en ellos otra característica que no está presente en otras disciplina, la capacidad de establecer una comparación igualitaria en todos los casos (*standard*), basada en comparar unidades, una vez establecidas, de dos números, en la cual si a cada unidad del primero le corresponde otra unidad del segundo, podemos decir que son iguales(*Treatise* §1§§3§§§1).

Esta característica, la de la comparación igualitaria, piensa *Hume*, es la que hace que desde su perspectiva el álgebra y la aritmética sean superiores a la geometría(*Treatise* §1§§3§§§1), ya que las primeras involucran al pensamiento y la segunda a las apariencias.

Básicamente esta es la forma en que *Hume* considera al contar y a los números.

Conclusiones

En mi opinión podemos decir que *Berkeley* y *Hume* pueden ser considerados *anti-realistas* por las siguientes razones:

- Niegan la existencia de los objetos matemáticos, o estos están solo dentro de la mente. Esto va en contra de la tesis realista de la existencia y la independencia, ya que dependen de la mente. Esta tesis sostenida de manera similar por ambos autores, también estría en contra de la abstracción matemática ya que los objetos matemáticos tienen que estar dentro del tiempo al menos.
- En *Berkeley*, los números son diferentes dependiendo del lenguaje que se utilice, iendo en contra de la tesis de independiencia.

La postura de ambos autores es muy cercana al formalismo, ya que consideran que la geometría no es la disciplina más importante de las *Matemáticas*. En *Hume* la aritmética ocupa el lugar primordial, porque permite tener un resultado siempre igual, siendo esto una de las características de la postura formalista. Así mismo la aritmética se convierte en un juego de símbolos reglamentado, que puede estar vacío, siendo esta otra característica de los formalistas.

Estos autores parece ser que con su pensamiento influyeron a otros pensadores, filósofos y matemáticos. Si bien no hay una referencia directa de la influencia de *Berkeley* y *Hume* en la filosofía analítica, y menos aún en las matemáticas, podemos ver ciertas similitudes del pensamiento de estos filósofos con planteamientos realizados posteriormente, tanto en la filosofía como en las matemáticas.

Una posible influencia posterior la podemos encontrar en la propuesta conocida como fundamentación de las matemáticas, en especial, en el logicismo se recogen las objeciones de *Berkeley* respecto a los números, y se busca responderle diciendo que los números tienen una existencia propia, por lo que se deja de lado la idea de que los números sean un atributo de los objetos(Robles 1993).

Frege parece ser bastante influenciado por *Hume*, porque en varios puntos de su reconstrucción de la aritmética, utiliza las ideas de *Hume*, sin embargo tiene que modificar este sistema ya que en él cualquier cosa puede ser un número, incluso *Julio César*, cosa que Frege no quiere. El hecho de que en el sistema de *Hume* se pueda reemplazar cualquier cosa por un número será conocido después como el *el problema de Julio César*(Zalta 2015).

Finalmente la manera en que *Hume* caracteriza a los números, partiendo de la unidad, es muy parecida a varias reconstrucciones de la aritmética realizadas posteriormente; en las cuales se parte de los axiomas de Peano, y se utiliza a un símbolo base o elemento primario como número. En esta propuesta, una función sucesora genera el siguiente número, recordemos que para *Hume* los números están garantizados solo si el primero de ellos lo está, la unidad. Este símbolo que reconstruye la aritmética en términos contemporáneos, comparte varias características con la unidad de *Hume*: debe ser el más pequeño, nunca debe ser el sucesor de otro, debe ser indivisible y contar con una función sucesora que nos garantice el resto de los números(Amor 2005); siendo éstas al menos algunas, y probablemente todas las propiedades de la unidad de *Hume* y su percepción de los números.

Cabe mencionar que actualmente se sigue discutiendo la naturaleza de los números y su existencia como objetos, ya sea mentales, o independientes de la mente, y considero que un buen filósofo que esté interesado en estos temas debería leer y dialogar con estos autores, en especial si su proyecto es realista y más aún platónico.

3. Abreviaturas

(*TV*) (Berkeley 1948).

(*PHK*) (Berkeley 1949).

(*Treatise*) (Hume 2015).

Referencias

Amor, J. A. (2005). *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*. UNAM.

Berkeley, G. (1948). *An Essay Towards a New Theory of Vision*. En Luce, A. y Jessop, T. E., eds., *The Works of George Berkeley Bishop of Cloyne , Volume I*. Thomas Nelson and Sons Ltd.

Berkeley, G. (1949). *A Treatiseconcerning The Principles of Human Knowledge*. En Luce, A. y Jessop, T. E., eds., *The Works of George Berkeley Bishop of Cloyne , Volume II*. Thomas Nelson and Sons Ltd.

Detlefsen, M. (2005). *Formalism*. En Shapiro, S., ed., *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, págs. 236–317. Oxford University Press.

Hume, D. (2015). *A Treatise of Human Nature*. eBooks@Adelaide.

Linnebo, Ø. (2013). *Platonism in the Philosophy of Mathematics*. En Zalta, E. N., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Morris, W. E. y Brown, C. R. (2015). *David Hume*. En Zalta, E. N., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Fall 2015 edición.

Robles, J. A. (1993). *Aritmética y Álgebra*. En Robles, J. A., ed., *Las ideas matemáticas de George Berkeley*. UNAM.

Shapiro, S. (1997). *Structure and Ontology*. Oxford University Press.

Stillwell, J. (2010). *Mathematics and its history*. Springer New York, 3rd ed. edición. URL `http://www.loc.gov/catdir/toc/fy031/2001042958.html`.

Zalta, E. N. (2015). *Frege's Theorem and Foundations for Arithmetic*. En Zalta, E. N., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Spring 2015 edición.