UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA

Normalização Forte via Ordinal Natural

Daniel Durante Pereira Alves

Orientação
Prof^{a}. Dr.^{a} Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano

CAMPINAS
1999

Daniel Durante PereiraAlves

Normalização Forte via Ordinal Natural

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas sob a orientação da Prof.*a*. Dr*a*. Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano.

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 01/09/1999

Banca:

Prof.*a*. Dr*a*. Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano
Prof. Dr. Cosme Damião Bastos Massi
Prof. Dr. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira
Prof. Dr. Ruy de Queiroz
Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli
Prof. Dr. Hércules de Araujo Feitosa
Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio

Setembro / 1999

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA

BIBLIOTECA DO IFCH – UNICAMP

Alves, Daniel Durante Pereira
AL 87 n Normalização Forte via ordinal natural / Daniel Durante Pereira Alves. - - Campinas, SP : [s. n.], 1999.

Orientador: Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Lógica simbólica e matemática. 2. Filosofia. 3. Cálculo de predicados. 4. Metamatemática. 5. Cálculo lambda.
I. D'Ottaviano, Ítala Maria Loffredo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.
III. Título.

Esta tese foi desenvolvida com bolsa da FAPESP.

Aos meus pais João e Arlete

Obrigado meu pai e minha mãe, o amor e apoio incondicional
que sempre me deram são o meu maior privilégio
Obrigado meus irmãos e amigos queridos, todos vocês são parte importante de mim
Obrigado Gabi, você está e estará sempre no meu coração
Obrigado CAPES, FAPESP e FAEP *pelo apoio financeiro essencial*
Obrigado Cosme e Luiz Carlos pela ajuda e incentivo fundamentais
Obrigado Ítala, minha amiga querida, por sua confiança, carinho e cuidado
Obrigado Paula, sob a luz dos teus dias eu sou simplesmente feliz.

Índice

Introdução

A nascente teoria de conjuntos do final do século XIX representava uma poderosa ferramenta para a redefinição rigorosa de muitos conceitos matemáticos que, apesar de extensamente utilizados, ainda não eram totalmente claros e provocavam controvérsias. A descoberta de paradoxos nesta teoria levou *David Hilbert* à formulação de seu famoso programa formalista. Em linhas gerais, podemos dizer que o programa de Hilbert buscava obter provas de consistência para formalizações das partes essenciais da matemática, por métodos que seriam evidentes e seguros, devido ao seu caráter elementarmente combinatório e finitário. Estes métodos *evidentes e seguros* constituiriam uma nova teoria matemática, que Hilbert batizou de Teoria da Prova (*Beweistheorie*).

É sabido que os resultados de Gödel sobre incompletude mostraram a impossibilidade de se realizar totalmente o programa de Hilbert, da maneira como ele foi proposto. Apesar disso, muitos pesquisadores da época persistiram em procurar formalizações para partes relevantes da matemática e buscar provas de consistência para essas formalizações. O melhor exemplo histórico desse tipo de investigação é o artigo de 1935 de *Gehard Gentzen*, que hoje é considerado o marco inicial da Teoria da Prova.

A esta época, o sistema hilbertiano para a *lógica clássica de primeira ordem* já estava estabelecido como o sistema formal mais adequado para expressar as deduções lógicas próprias da prática matemática, de modo que as "formalizações para partes relevantes da matemática" poderiam ser escritas como teorias axiomáticas deste sistema. Além disso, baseado nos trabalhos de Brower, **Heyting[1930]** já havia apresentado uma formalização, também hilbertiana, para a *lógica intuicionista de primeira ordem*. **Gentzen[1935]**, no entanto, argumentou que as deduções presentes nas provas formalizadas pelos sistemas lógicos hilbertianos estavam longe de expressar o tipo de dedução que, na prática, era usado em provas matemáticas. Tentando aproximar ao máximo a dedução lógica formalizada da dedução praticada pelos matemáticos, Gentzen criou a Dedução Natural como um novo tipo de formulação para sistemas lógicos, e introduziu os sistemas de dedução natural NK e NJ, para a lógica clássica e lógica intuicionista de primeira ordem, respectivamente.

Gentzen definiu formalmente, para estes sistemas, a noção de *prova normal*, como sendo uma prova sem partes desnecessárias, na qual qualquer conceito que faça parte da prova é um conceito que está contido no resultado final desta e é parte essencial para a obtenção deste resultado.[1] Através de uma análise das propriedades estruturais das provas normais, Gentzen percebeu que seria bastante simples provar, não só a consistência dos seus sistemas lógicos (*NK* e *NJ*), como também a consistência da *teoria elementar dos números, sem indução completa*, se ele conseguisse provar que qualquer prova formalizada em *NK* e *NJ* poderia ser transformada em uma prova normal (*Teorema de Normalização*).

Por não conseguir provar o Teorema de Normalização para *NK*, Gentzen criou o Cálculo de Seqüentes, como um outro tipo de formulação para sistemas lógicos, e introduziu os sistemas *LK* e *LJ*, respectivamente para a lógica clássica e lógica intuicionista de primeira ordem. Gentzen então demonstrou que qualquer prova formalizada em *LK* ou *LJ* poderia ser transformada em uma prova normal (*Teorema da Eliminação do Corte* ou *Hauptsatz*), conseguindo portanto demonstrar, finitariamente, a consistência dos seus sistemas lógicos *LK* e *LJ*, e a consistência da teoria elementar dos números, sem indução completa, formalizada nestes sistemas. Esta prova do Hauptsatz, que é a versão em cálculo de seqüentes do Teorema de Normalização, e as provas de consistência dela derivadas, enquadravam-se perfeitamente ao tipo de prova exigido pelo programa de Hilbert e podem ser consideradas como os resultados inaugurais da Teoria da Prova.

Através de um aperfeiçoamento do Hauptsatz, **Gentzen[1938]** obteve outro importante resultado. Provou a consistência da teoria elementar dos números, com indução completa – a aritmética de primeira ordem – quando formalizada em *LK* e *LJ*, por um método que, apesar de não finitário, concentrou todo o seu caráter infinitário em um único ponto: indução sobre boas ordens com tipo de ordem transfinito menor que ε_0. Ou seja, Gentzen não só reduziu a um único argumento o caráter transfinito de sua prova de consistência, como também limitou seu tratamento transfinito a ordinais menores que ε_0. Este resultado, que já extrapola os limites do programa de Hilbert, uma vez que não é estritamente finitário, também pode ser considerado como um resultado inaugural do que hoje é chamado *análise ordinal* de teorias formais. Fazer a análise ordinal de uma teoria significa, em linhas gerais, identificar o "tamanho" dos recursos infinitos necessários à prova de consistência desta teoria.

[1] Cf. **Gentzen[1935]**, p. 69.

Hoje, divide-se a Teoria da Prova em dois ramos distintos, a *Teoria Geral da Prova*[2], que tem por fim investigar as propriedades estruturais e combinatórias de provas formalizadas, e que tem por métodos principais o Hauptsatz e a normalização; e a *Teoria Redutiva da Prova*[3], cujo principal objetivo é obter, através do estudo das provas formalizadas de uma teoria, uma "interpretação" desta teoria em uma outra que, de acordo com certos critérios, é mais elementar que a teoria original. Um exemplo deste tipo de resultado é a famosa *Interpretação Dialectica*, introduzida por **Gödel[1958]**, que traduz a aritmética intuicionista de primeira ordem em uma teoria de funcionais de tipos finitos. Este resultado de Teoria Redutiva da Prova impulsionou o estudo de um outro tipo de sistema formal, o *Cálculo Lambda Tipificado*, que hoje é extensamente utilizado em variadas áreas do conhecimento e que, entre outras coisas, pode ser utilizado como mais um tipo de notação para provas formalizadas em sistemas de dedução natural, constituindo-se em mais uma ferramenta da Teoria Geral da Prova para o estudo das propriedades estruturais e combinatórias de deduções formalizadas.

Além das provas de consistência do programa de Hilbert e das análises ordinais de teorias formais, existem hoje outras motivações para o desenvolvimento da Teoria Geral da Prova. Algumas delas com implicações bastante práticas, como por exemplo o estudo de questões relativas à programação lógica e à dedução automática. No primeiro caso, deduções formalizadas são usadas como ferramentas para computar e, no segundo, sistemas de computação são usados para efetuar deduções. Em ambos os casos, as propriedades estruturais e combinatórias de deduções formais desempenham um importante papel.

Voltando ao problema da forma normal de deduções formalizadas, que representa uma questão central em Teoria Geral da Prova, podemos separar os seguintes resultados possíveis de serem obtidos para um sistema formal *S*.

(1) *Teorema da Forma Normal*: toda dedução formalizada em *S* possui uma forma normal.[4]

---

[2] Também conhecida como Teoria Estrutural da Prova (Structural Proof Theory).

[3] Também conhecida como Teoria Interpretativa da Prova (Interpretational Proof Theory).

[4] Sejam π e π' formalizações em um sistema *S* para as deduções $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta \vdash \varphi$ respectivamente. Dizemos que π' é forma normal de π quando π' está na forma normal e $\Delta \subseteq \Gamma$.

(2) *Teorema de Normalização Fraca*: para qualquer dedução formalizada em S, podemos obter efetivamente sua forma normal através de uma seqüência finita de operações chamadas *reduções*.

(3) *Teorema de Normalização Forte*:

(*a*) *Normalização Forte* (*Finitude*): todas as seqüências de reduções para qualquer dedução formalizada em S são finitas e terminam em uma dedução na forma normal;

(*b*) *Church-Rosser* (*Unicidade*): a forma normal obtida através das seqüências de reduções é única para cada dedução formalizada em S.[5]

Apesar de Gentzen não ter encontrado uma prova de normalização para NK, hoje sabemos que todos os resultados acima são válidos para NK, NJ e para muitos outros sistemas formais que foram posteriormente criados a partir dos trabalhos de Gentzen. No entanto, para a grande maioria das aplicações dos resultados em Teoria Geral da Prova, os métodos de obtenção destes resultados são tão importantes quanto os próprios resultados. Por exemplo, se estamos interessados em provar a consistência de uma teoria matemática formal S, é de interesse fundamental sabermos que tipo de teoria matemática estamos assumindo em nossa prova de consistência de S. Além disso, para o caso das aplicações em computação que mencionamos, é óbvio que os métodos efetivos e construtivos têm muito mais interesse do que métodos não construtivos.

É possível separar as demonstrações encontradas na literatura para o Teorema de Normalização Forte em dois grupos distintos: as *provas semânticas* e as *provas sintáticas*. Podemos resumir o método das provas semânticas da seguinte forma: define-se uma

[5] **Prawitz[1971]** introduziu a expressão Teorema de Normalização Forte como sendo constituída pelos Itens (3*a*) e (3*b*) acima, ou seja, para Prawitz, normalização forte significa que todas as seqüências de redução terminam na mesma forma normal. No entanto, o termo Normalização Forte também é usado na literatura referindo-se apenas ao Item (3*a*), sobre a finitude das seqüências de reduções, enquanto que o Item (3*b*) é conhecido como o Teorema da Unicidade da Forma Normal ou Teorema de Church-Rosser, em referência aos autores da primeira prova de um resultado deste tipo. Como estes dois resultados não são interdependentes e, muitas vezes, são provados separadamente, vamos utilizar nesta tese a expressão Teorema de Normalização Forte apenas para o Item (3*a*), sendo que o Item (3*b*) será referido como Teorema de Church-Rosser.

propriedade *P* aplicável às deduções formalizadas em um certo sistema formal *S*, e prova-se que, se *P* é válida para uma dedução π, então π é fortemente normalizável. A normalização forte é obtida provando que todas as deduções formalizadas em *S* satisfazem *P*. Há na literatura várias propriedades *P* de provas semânticas de normalização forte, como por exemplo a *validade forte*, de **Prawitz[1971]**, a *convertibilidade*, de **Tait[1967]**, e a *computabilidade*, de **Martin-Löf[1971]**, entre outras. A desvantagem destas provas semânticas reside no fato de que elas demonstram algo a mais do que simplesmente normalização forte. Elas demonstram que *P*, que é mais forte que normalização forte, é válida para toda dedução formalizada. Assim, algumas das propriedades estruturais que seriam conseqüência exclusiva de normalização forte, mas não necessariamente de *P*, não podem ser percebidas através deste tipo de prova. Uma destas propriedades, por exemplo, seria um limite para o comprimento das seqüências de reduções das deduções formalizadas.

As provas sintáticas para o Teorema de Normalização Forte evitam o passo indireto representado pela definição da propriedade *P*. Em **Pereira[1974]**, **Girard[1987]** e **Massi[1989]** obtém-se normalização forte, sintaticamente, através de um mapeamento das seqüências de redução em um sistema formal auxiliar, que satisfaz normalização forte. Um outro método sintático para obtenção de normalização forte, que podemos encontrar em **Gandy[1980]** e **Vrijer[1987]**, é o método do ordinal natural. Por este método obtém-se normalização forte através da definição de uma atribuição numérica finita que relaciona provas formalizadas com números naturais, de modo que o número 0 (ou 1) é atribuído a provas que estejam na forma normal. Em seguida, prova-se que esta atribuição numérica possui a propriedade de diminuir com as reduções. Se temos uma atribuição numérica que relaciona as provas formalizadas com números naturais e se esta atribuição diminui com as reduções, então é claro que todas as seqüências de redução para qualquer prova formalizada são finitas e terminam em uma prova na forma normal. Um resultado extra que o método de normalização forte via ordinal natural fornece, consiste no fato de que esta atribuição numérica que diminui com as reduções, o ordinal natural, representa um limitante superior para o comprimento das seqüências de redução para as deduções formalizadas de *S*.

O objetivo principal desta tese é introduzir um método de obtenção de normalização forte via ordinal natural, aplicável a sistemas de dedução natural e cálculo lambda tipificado, no qual a atribuição numérica utilizada, por coincidir com o comprimento de uma seqüência de redução específica – a pior seqüência de redução – representa o menor limitante superior para o comprimento das seqüências de redução para as deduções formalizadas. O compromisso principal do método que introduziremos é o de que ele seja construtivo e elementar, produzido apenas através da análise de propriedades estruturais e combinatórias das deduções formalizadas, sem apelo a nenhuma ferramenta matemática sofisticada. Juntamente, faremos um estudo de alguns artigos presentes na literatura que também obtêm normalização forte via ordinal natural. Destacamos neste estudo o artigo **Howard[1968]**, que realiza uma análise ordinal da interpretação dialectica de Gödel para a aritmética intuicionista de primeira ordem. Sobre este artigo revelamos um fato não apontado pelo autor: uma prova sintática do Teorema de Normalização Forte para o sistema de cálculo lambda tipificado $\lambda^{\supset}$ é conseqüência de seus resultados.

A motivação inicial para a realização deste trabalho surgiu em um curso sobre Teoria da Prova ministrado pelo Prof. Dr. Cosme Damião B. Massi em 1994, que a esta época era professor visitante do Departamento de Filosofia da UNICAMP. Em sua tese de doutoramento, **Massi[1990]** obteve uma prova sintática, porém condicional, dos Teoremas de Normalização Forte e Church-Rosser para o sistema de dedução natural para a lógica clássica de primeira ordem C', introduzido em **Prawitz[1965]**. Ele definiu uma seqüência de redução maximamente não econômica para as deduções formalizadas em C' (a pior seqüência de redução) e provou que, na hipótese do comprimento $lp(\pi)$ desta pior seqüência de redução para uma dedução π ser finito, então: (*a*) $lp(\pi)$ diminui com as reduções e (*b*) existe uma dedução pertencente à pior seqüência de redução para π que também pertence à pior seqüência de redução para π', dedução obtida a partir de π através de uma redução qualquer. Assumindo como hipótese que $lp(\pi)$ é finito para toda dedução π, o Item (*a*) do teorema de Massi leva a uma prova trivial do Teorema de Normalização Forte para C', e o Item (*b*) leva a uma prova trivial do Teorema de Church-Rosser. A nossa motivação principal foi então provar que $lp(\pi)$ é finito para toda dedução formalizada π, tornando assim incondicionais as provas de Normalização Forte e Church-Rosser de Massi.

A estratégia que utilizamos para obter este resultado consistiu em redefinir $lp(\pi)$ de uma maneira que fosse possível provar sua finitude. Definimos para isso a atribuição numérica $o(\pi)$ e provamos que $o(\pi)$ associa um número natural a cada dedução π formalizada em C'. Em seguida provamos que $o(\pi)= lp(\pi)$, obtendo assim a finitude de $lp(\pi)$

para toda dedução π. Com isso retiramos a hipótese condicional dos resultados de Massi, atingindo nosso objetivo primeiro. Além disso mostramos, independentemente dos resultados de Massi, que $o(\pi)$ diminui com as reduções, e com isso obtivemos uma prova independente do Teorema de Normalização Forte via ordinal natural para C', consolidando assim o nosso método.

Durante o desenvolvimento destes resultados, foi-nos apontado pelo Prof. Dr. Luiz Carlos P. D. Pereira a existência de um artigo (**Vrijer[1987]**) no qual havia uma prova de normalização forte para um sistema de cálculo lambda tipificado que utilizava uma estratégia bastante semelhante à nossa. Vrijer definiu uma atribuição numérica para termos de cálculo lambda tipificado, que diminui com as reduções e coincide com o comprimento de uma seqüência de redução específica – a seqüência obtida através da estratégia perpétua, definida por **Barendregt[1990]**. A descoberta deste artigo nos levou a outros, onde também foram encontradas definições de atribuições numéricas finitas que diminuem com as reduções e, como conseqüência destas definições, provas do Teorema de Normalização Forte via ordinal natural. A título de comparar o nosso método com o método de Vrijer e dos outros artigos, desenvolvemos os nossos resultados para o mesmo sistema de cálculo lambda tipificado destes artigos. Por fim, apresentamos extensões do nosso método para alguns sistemas de dedução natural de lógicas intuicionistas e modais.

Esta tese está dividida em sete capítulos. No Capítulo I são apresentados os principais pré-requisitos necessários ao desenvolvimento do nosso método para os sistemas de dedução natural. Fazemos uma rápida introdução à dedução natural, onde as notações e noções mais gerais, tais como as de forma normal e redução, são definidas. Além disso apresentamos os seguintes sistemas de dedução natural, originalmente introduzidos por **Prawitz[1965]**: o sistema M para a lógica minimal, o sistema I para lógica intuicionista e os sistemas C e C' para a lógica clássica, sendo que em C' os operadores para disjunção e quantificador existencial não são símbolos primitivos. Também no Capítulo I apresentamos a definição da pior seqüência de redução e o resultado de Massi sobre esta seqüência que discutimos acima.

No Capítulo II iniciamos efetivamente o desenvolvimento do nosso método. Uma longa série de definições e resultados sobre propriedades estruturais e combinatórias de *derivações*[6] do sistema C' é apresentada. Esta série culmina com a definição da atribuição numérica $o(\pi)$ e com a prova de que $o(\pi)$ relaciona univocamente cada derivação π de C' com um número natural.

No Capítulo III provamos que, para toda derivação π de C', $o(\pi)$ diminui com as reduções e é igual ao comprimento $lp(\pi)$ da pior seqüência de redução para π. Com estes resultados completamos o nosso método para o sistema C', obtendo as provas de normalização forte, Church-Rosser e algumas outras propriedades interessantes envolvendo $o(\pi)$ e $lp(\pi)$.

Como pré-requisito para estudarmos os outros artigos que obtêm normalização forte via ordinal natural e também para desenvolvermos o nosso método no sistema formal utilizado nestes artigos, no Capítulo IV apresentamos uma introdução ao sistema de cálculo lambda tipificado $\lambda^{\supset}$ e introduzimos a importante noção de fórmulas como tipos, que relaciona estes sistemas com sistemas de dedução natural. Por fim, discutimos as linhas gerais da questão sobre transferência de provas de normalização entre estes dois tipos de sistemas formais.

No Capítulo V apresentamos um estudo sobre três artigos, **Howard[1968]**, **Vrijer[1987]** e **Beckmann[1998]**, nos quais também encontramos o método do ordinal natural.

No Capítulo VI desenvolvemos completamente o nosso método para o sistema de cálculo lambda tipificado $\lambda^{\supset}$ e o comparamos com o método dos artigos estudados.

No Capítulo VII, voltamos aos sistemas de dedução natural e apresentamos extensões do nosso método para os sistemas M e I de lógica minimal e lógica intuicionista, e para sistemas de lógica modal.

Por último, nas considerações finais, discutimos possíveis desenvolvimentos futuros a partir dos resultados obtidos neste trabalho.

---

[6] Derivações, como será visto no Capítulo I, representam deduções formalizadas por sistemas de dedução natural.

Capítulo I

Dedução Natural e Pior Seqüência de Redução

Os Sistemas de Dedução Natural, desenvolvidos independentemente por Jaškowski e Gentzen no início dos anos 30, representam um método de formalização para sistemas lógicos distinto do método dos sistemas hilbertianos, desenvolvidos por Frege, Russell e Hilbert. Segundo **Gentzen[1935]**, apesar de "consideráveis vantagens formais", a formalização da dedução lógica proposta por estes autores distanciou-se das formas de dedução usadas na prática matemática. Gentzen desejava que seus sistemas formais expressassem ao máximo o tipo de raciocínio que se faz nas provas matemáticas. Como resultado, ele produziu os sistemas de dedução natural NK, para a lógica clássica de primeira ordem, e NJ, para o cálculo de predicados intuicionista de Heyting.[7]

Informalmente falando, podemos pensar em um *sistema de dedução natural* como sendo constituído por uma *linguagem formal* e por um conjunto de *regras de inferência* estreitamente relacionadas com os símbolos lógicos desta linguagem. Com apenas uma exceção (a constante do absurdo $\perp$, que possui apenas uma regra associada), a cada operador lógico da linguagem relacionamos dois tipos de regras: as *regras de introdução* e as *regras de eliminação*. Estas regras expressam as propriedades lógicas de cada operador e representam as ferramentas de cálculo mais básicas do sistema.

A regra de introdução para um operador lógico habilita o sistema a *inferir fórmulas* que tenham este operador como símbolo principal, enquanto que a regra de eliminação para um operador habilita o sistema a *inferir algo de fórmulas* que tenham este operador como símbolo principal.

O objetivo deste capítulo é introduzir sucintamente os principais pré-requisitos necessários à compreensão dos resultados referentes aos sistemas de dedução natural presentes nesta tese. O capítulo está dividido em cinco seções. Na primeira seção, introduzimos informalmente os conceitos de regra de inferência e derivação. Na segunda seção, os sistemas de dedução natural para a lógica clássica de primeira ordem C e C', e os sistemas M e I para as lógicas de primeira ordem minimal e intuicionista, respectivamente, são formalmente apresentados. Em seguida, na terceira seção, apresentamos as principais

[7] Nesta tese trataremos de dois sistemas lógicos distintos baseados nos trabalhos de Brower sobre o intuicionismo: o que foi introduzido por **Heyting[1930]**, conhecido como *lógica intuicionista de Heyting*, ou simplesmente *lógica intuicionista*, e o sistema conhecido como *lógica minimal*, historicamente atribuído a **Johansson[1936]**, mas que já tinha sito proposto por **Kolmogorov[1925]**.

convenções de notação e as definições usuais mais importantes que utilizaremos, como as de fórmula máxima e derivação normal. Na quarta seção, os conceitos de redução e seqüência de redução são expostos; e, finalmente, na quinta seção, é definida a pior seqüência de redução para o sistema C' e é apresentado o principal resultado a ela relativo que utilizaremos nesta tese.[8]

<u>§1 Regras de Inferência e Derivações - Caracterização Informal</u>

As *regras de inferência* de um sistema de dedução natural descrevem as deduções mais simples através das quais podemos inferir uma *conclusão* de um conjunto de *premissas*. São escritas na forma $\dfrac{\varphi_1 \;\; \varphi_2 \;\; \cdots \;\; \varphi_n}{\xi}$, onde uma ou mais premissas, representadas por φ_1, ..., φ_n, são separadas de uma conclusão, representada por ξ, por um traço.

Uma *derivação* representa uma dedução formalizada em um sistema de dedução natural e corresponde ao encadeamento, em forma de árvore, de aplicações de regras de inferência.

Uma derivação é, portanto, algo da forma:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^1 \qquad B}{C}}{D} \qquad E}{F}\,{\scriptstyle 1}$$

onde cada traço representa a aplicação de uma regra que tem como premissas as fórmulas imediatamente acima do traço e como conclusão a fórmula imediatamente abaixo do traço. A derivação acima realiza uma dedução de F, a última fórmula da derivação, que é chamada de *raiz*.

Chamamos de *hipóteses* da derivação as fórmulas que não são conseqüência da aplicação de nenhuma regra (A, B e E no exemplo acima). As hipóteses são, portanto, as

---

[8] Exposições sistemáticas e completas sobre Dedução Natural são apresentadas em **Gentzen[1935]**, **Prawitz[1965]** e **Prawitz[1971]**. A definição e os resultados sobre a pior seqüência de redução para C' estão todos em **Massi[1990]**.

primeiras fórmulas sobre as quais aplicamos regras em uma derivação. A derivação continua, pela aplicação de novas regras às conseqüências das hipóteses, até chegarmos à raiz, que é a fórmula deduzida.

Durante a aplicação das regras, algumas hipóteses podem ser cortadas ou descartadas. *Hipóteses* são *cortadas* para indicar que a dedução expressada na derivação não depende dessas hipóteses. Os rótulos "1", ao lado do traço da última regra da derivação do exemplo e sobre a hipótese A, indicam que a aplicação desta regra cortou aquela hipótese.

Dessa forma, derivações formalizam deduções do tipo $\Gamma \vdash \mathsf{A}$, onde o conjunto das fórmulas que aparecem como hipóteses não cortadas na derivação é subconjunto de Γ, e A é a última fórmula (raiz) da derivação. A derivação do exemplo acima formaliza as deduções $\Gamma \vdash \mathsf{F}$, para todo Γ tal que $\{\mathsf{B}, \mathsf{E}\} \subseteq \Gamma$.

§2 Sistemas de Dedução Natural

Os sistemas de Dedução Natural que apresentaremos aqui foram todos formalizados em **Prawitz[1965]** tendo por base a seguinte linguagem, que é introduzida nos termos usuais, e possui um conjunto enumerável de:

- *parâmetros* (a, b, ..., a_1, b_1, ...),
- *variáveis* (x, y, ..., x_1, y_1, ...),
- *símbolos de predicados n-ários* (P, Q, ..., P_1, Q_1, ...),
- *símbolos de funções n-árias* (f, g, ..., f_1, g_1, ...).

A linguagem do sistema C' possui ainda os seguintes *operadores lógicos*:

- conjunção ($\wedge$), implicação ($\supset$), quantificador universal ($\forall$)e constante do absurdo ($\perp$).

A linguagem dos sistemas C, M e I possui, além dos operadores lógicos de C', os seguintes:

- disjunção ($\vee$) e quantificador existencial ($\exists$).

Os *termos* e *fórmulas* da linguagem são definidos, indutivamente, da maneira usual.

1.2.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Utilizaremos as letras *t*, *u*, *v*,..., com ou sem subíndices, como variáveis sintáticas sobre termos.

(*b*) Utilizaremos tanto as letras latinas maiúsculas (A, B, ...) quanto as letras gregas minúsculas (φ, ψ, ...), com ou sem subíndices, como variáveis sintáticas sobre fórmulas.

(*c*) A negação é símbolo definido por: $\neg A =_{df} A \supset \bot$.

(*d*) A distinção entre parâmetro e variável também é a usual: todas as variáveis são ligadas. Variáveis livres são, portanto, tratadas como parâmetros.

1.2.2 DEFINIÇÃO: Regras de Introdução e Eliminação

Com exceção da constante do absurdo, para cada operador lógico existem regras de introdução e de eliminação, que são definidas da seguinte forma:

$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}(\wedge I)$	$\dfrac{A \wedge B}{A}(\wedge Ed)$, $\dfrac{A \wedge B}{B}(\wedge Ee)$
$\dfrac{A}{A \vee B}(\vee Id)$, $\dfrac{B}{A \vee B}(\vee Ie)$	$\dfrac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix}}{C}(\vee E)$
$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix}}{A \supset B}(\supset I)$	$\dfrac{A \quad A \supset B}{B}(\supset E)$
$\dfrac{A_{(a)}}{\forall_x A_{(x)}}(\forall I)$	$\dfrac{\forall_x A_{(x)}}{A_{(t)}}(\forall E)$
$\dfrac{A_{(t)}}{\exists_x A_{(x)}}(\exists I)$	$\dfrac{\exists_x A_{(x)} \quad \begin{matrix}[A_{(a)}]\\ B\end{matrix}}{B}(\exists E)$

onde:

(*a*) Uma fórmula escrita entre colchetes acima de alguma premissa da regra, indica que a aplicação desta regra em uma derivação pode cortar as hipóteses daquela forma que ocorrem acima da premissa.

(b) A indicação que aparece entre parênteses, depois de cada regra, é o “nome” da regra, que contém o conectivo e o tipo da regra (introdução ou eliminação).

(c) As regras (∀I) e (∃E) possuem restrições concernentes ao parâmetro a, chamado de *parâmetro próprio* da regra (∀I) ou (∃E) em que ocorre, sobre as quais falaremos mais adiante.

Apesar de ainda não termos caracterizado totalmente os sistemas, vejamos, como ilustração, um exemplo simples de demonstração em dedução natural de um teorema do fragmento positivo da lógica clássica de primeira ordem.

1.2.3 EXEMPLO:

$\vdash \forall x(\mathsf{F}x \wedge \mathsf{G}x) \supset (\forall x\mathsf{F}x \wedge \forall x\mathsf{G}x)$

Prova:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\mathsf{F}x \wedge \mathsf{G}x)^{1}}{\mathsf{F}a \wedge \mathsf{G}a}{\scriptstyle (\forall E)}}{\mathsf{F}a}{\scriptstyle (\wedge Ed)}}{\forall x\mathsf{F}x}{\scriptstyle (\forall I)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\mathsf{F}x \wedge \mathsf{G}x)^{1}}{\mathsf{F}b \wedge \mathsf{G}b}{\scriptstyle (\forall E)}}{\mathsf{G}b}{\scriptstyle (\wedge Ee)}}{\forall x\mathsf{G}x}{\scriptstyle (\forall I)}}{\forall x\mathsf{F}x \wedge \forall x\mathsf{G}x}{\scriptstyle (\wedge I)}}{\forall x(\mathsf{F}x \wedge \mathsf{G}x) \supset (\forall x\mathsf{F}x \wedge \forall x\mathsf{G}x)}{\scriptstyle (\supset I)\,,\,1}$$

Iniciamos a derivação com duas hipóteses, nas quais aplicamos regras de inferência, e seguimos aplicando novas regras até chegarmos à fórmula desejada. Os símbolos entre parênteses ao lado do traço de cada aplicação de regra identificam a regra que aquela aplicação representa. Note que a última regra da derivação possui o “rótulo” 1, que é o mesmo rótulo que aparece nas hipóteses da prova. Esta notação, como já vimos, é usada para relacionar hipóteses cortadas com as aplicações de regra que as cortaram. De acordo com a descrição da regra (⊃I), a aplicação da regra marcada por 1 corta as duas únicas hipóteses da derivação. Portanto, esta derivação deduz $\forall x(\mathsf{F}x\wedge\mathsf{G}x)\supset(\forall x\mathsf{F}x\wedge\forall x\mathsf{G}x)$ do vazio. Logo, $\forall x(\mathsf{F}x\wedge\mathsf{G}x)\supset(\forall x\mathsf{F}x\wedge\forall x\mathsf{G}x)$ é teorema.

1.2.4 OBSERVAÇÃO:

É importante distinguirmos claramente *fórmula* de *ocorrência de fórmula* em uma derivação. Quando nos referimos, por exemplo, indistintamente a $\forall x(\mathsf{F}x \wedge \mathsf{G}x)$, estamos nos referindo a uma fórmula da linguagem dos nossos sistemas. No momento em que escrevemos as fórmulas em uma derivação, cada "fórmula" grafada é na verdade uma ocorrência de fórmula, que juntamente com sua forma tem uma posição específica na derivação. Quando dizemos, por exemplo, a ocorrência mais à esquerda de $\forall x(\mathsf{F}x \wedge \mathsf{G}x)$ na derivação do Exemplo 1.2.3, estamos nos referindo a uma ocorrência de fórmula. Em geral chamaremos ocorrências de fórmulas simplesmente de *ocorrências*, e as fórmulas relacionadas a estas ocorrências de *formas* das ocorrências.

1.2.5 DEFINIÇÃO: Ocorrência Dependente

Dizemos que uma ocorrência de fórmula A em uma derivação *depende* das hipóteses que ocorrem acima de A que não foram cortadas por nenhuma regra de inferência que precede A.

1.2.5.1 OBSERVAÇÃO:

Na derivação do Exemplo 1.2.3, $\mathsf{F}a$, por exemplo, <u>depende</u> da hipótese $\forall x(\mathsf{F}x \wedge \mathsf{G}x)$ mais à esquerda da derivação, pois esta hipótese ocorre acima de $\mathsf{F}a$ e, apesar de ser cortada, não é cortada por regra que precede A. Por outro lado, a raiz da derivação, $\forall x(\mathsf{F}x \wedge \mathsf{G}x) \supset (\forall x\mathsf{F}x \wedge \forall x\mathsf{G}x)$, não depende de nenhuma hipótese, pois as duas únicas foram cortadas por uma regra que precede esta ocorrência.

1.2.6 RESTRIÇÕES: Restrições à Aplicação das Regras de Inferência

(*a*) **Restrição para a regra ($\forall$I)**: O parâmetro a não pode ocorrer em nenhuma hipótese da qual $\mathsf{A}(a)$ dependa.

(*b*) **Restrição para a regra ($\exists$E)**: O parâmetro a não ocorre em B nem em nenhuma hipótese da qual a premissa menor B dependa, com exceção apenas para as hipóteses $\mathsf{A}(a)$ que são cortadas pela regra.

1.2.7 CONVENÇÕES: Sobre Parâmetros Próprios

Para simplificar certos detalhes formais, assumiremos os resultados sobre parâmetros próprios de **Prawitz[1965]**, que garantem que sempre podemos ter derivações que respeitem as seguintes restrições:[9]

(*a*) Um parâmetro em uma derivação é parâmetro próprio de no máximo uma regra ($\forall$I) ou ($\exists$E).

(*b*) O parâmetro próprio de uma regra ($\forall$I) só pode aparecer em fórmulas que ocorram acima da conclusão da regra ($\forall$I) em questão.

(*c*) O parâmetro próprio de uma regra ($\exists$E) só pode aparecer em fórmulas que ocorram acima da premissa menor da regra ($\exists$E) em questão.

1.2.8 DEFINIÇÃO: O Sistema de Lógica Minimal M

As regras de inferência descritas em 1.2.2 determinam o sistema de dedução natural para a lógica intuicionista minimal de primeira ordem, abreviado por M.

Como a negação é dada pela abreviação $\neg A =_{df} A \supset \bot$, as únicas regras de M que lidam com a negação são casos especiais das regras ($\supset$I) e ($\supset$E) aplicados a $A \supset \bot$. Utilizando a abreviação acima podemos escrever estas regras como:

$(\neg I)\ \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \bot\end{matrix}}{\neg A}$	$(\neg E)\ \dfrac{A \quad \neg A}{\bot}$

1.2.9 DEFINIÇÃO: O Sistema de Lógica Intuicionista I

O sistema de primeira ordem I para a lógica intuicionista de Heyting é determinado pelas regras descritas em 1.2.2 e pela *regra do absurdo intuicionista* ($\bot_I$) definida por:

$$(\bot_I)\ \frac{\bot}{A}$$

onde A é diferente de $\bot$.[10]

---

[9] Para maiores detalhes ver **Prawitz[1965]**, pp. 27 a 29.

1.2.10 DEFINIÇÃO: O Sistema de Lógica Clássica C

O sistema C para a lógica clássica de primeira ordem é determinado pelas regras de inferência descritas em 1.2.2 acrescidas pela *regra do absurdo clássico* ($\perp_c$) definida por:

$$\boxed{(\perp_c)\ \dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \perp\end{array}}{A}}$$

onde A é diferente de $B \supset \perp$ (ou seja, de $\neg B$).[11]

1.2.11 DEFINIÇÃO: O Sistema de Lógica Clássica C'

O sistema C' para a lógica clássica de primeira ordem é obtido a partir do sistema C desconsiderando-se os símbolos lógicos ($\vee$), ($\exists$) e suas respectivas regras de inferência.[12]

§3 Definições e Convenções Gerais

Apresentaremos aqui as definições e convenções mais gerais sobre dedução natural que utilizaremos no decorrer deste texto.

1.3.1 NOTAÇÕES: Convenções Usuais

(*a*) A letra grega π, com ou sem índices superiores ou inferiores, denotará derivações. A letra grega Σ, com ou sem índices superiores ou inferiores, denotará seqüências de derivações, incluindo a seqüência vazia.

(*b*) O símbolo $\equiv$ é usado como indicação de identidade sintática entre derivações.

[10] Na versão deste sistema apresentada em **Prawitz[1971]** exige-se também que A seja atômico. No entanto estamos utilizando a versão apresentada em **Prawitz[1965]** que não faz esta restrição.

[11] É fácil ver que esta restrição não limita o sistema. Cf **Prawitz[1965]**, pp 20 e 21.

[12] Não é difícil demonstrar que C' também realiza a lógica clássica. Basta tomarmos $\exists$ e $\vee$ como símbolos definidos da maneira usual, e criarmos derivações em C' que produzam os mesmos efeitos que as regras envolvendo $\exists$ e $\vee$ produzem.

(*c*) A notação $r(\pi)$ denota a ocorrência final de π (a ocorrência deduzida em π), a qual chamamos de *raiz* da derivação π.

(*d*) A notação $\begin{matrix}\pi\\ A\end{matrix}$ denota uma derivação π onde $r(\pi)= A$.

(*e*) A notação $\dfrac{\pi_1 \quad \pi_2 \quad \ldots \quad \pi_n}{A}$ denota uma derivação na qual estamos focalizando a última aplicação de regra, que pode possuir uma ou mais premissas, as quais são deduzidas pelas derivações $\pi_1 \ldots \pi_n$.

(*f*) As hipóteses de uma derivação também serão chamadas de *top-fórmulas* da derivação.

(*g*) A notação $\begin{matrix}\Gamma\\ \pi\end{matrix}$ denota uma derivação π onde Γ é um subconjunto específico das top-fórmulas de π. Se todas as ocorrências pertencentes a Γ forem ocorrências da mesma fórmula A, então $\begin{matrix}\Gamma\\ \pi\end{matrix}$ pode ser escrito como $\begin{matrix}[A]\\ \pi\end{matrix}$. Se Γ for um conjunto unitário com uma ocorrência A, então $\begin{matrix}\Gamma\\ \pi\end{matrix}$ pode ser escrito como $\begin{matrix}A\\ \pi\end{matrix}$, denotando uma derivação π na qual A é uma top-fórmula de π.[13]

(*h*) Dado $\begin{matrix}\Gamma\\ \pi\end{matrix}$, chamaremos as ocorrências de fórmula pertencentes a Γ de hipóteses *destacadas* de $\begin{matrix}\Gamma\\ \pi\end{matrix}$.

(*i*) Sejam $\begin{matrix}\pi_1\\ A\end{matrix}$ e $\begin{matrix}[A]\\ \pi_2\end{matrix}$ derivações. A notação $\begin{matrix}\pi_1\\ [A]\\ \pi_2\end{matrix}$ denota a derivação obtida através da substituição de cada hipótese destacada de $\begin{matrix}[A]\\ \pi_2\end{matrix}$ pela derivação $\begin{matrix}\pi_1\\ A\end{matrix}$.

(*j*) As notações π^a_t e Σ^a_t denotam o resultado de substituir todas as ocorrências do parâmetro *a* pelo termo *t* em todas as ocorrências de fórmula em π e Σ respectivamente.

(*k*) Em uma regra de eliminação (αE), a premissa que possui o operador lógico α que é eliminado é chamada *premissa maior* (*PM*). As outras premissas, se houver, são chamadas *premissas menores* (*pm*).

---

[13] Note que Γ não é um conjunto de fórmulas, mas de ocorrências de fórmulas em uma certa derivação π.

Por exemplo, na regra ($\supset$E) $\left(\dfrac{\mathsf{A} \quad \mathsf{A}\supset\mathsf{B}}{\mathsf{B}}\right)$, $\mathsf{A}\supset\mathsf{B}$ é *PM* e A é *pm*.

(*l*) A conclusão da aplicação de uma regra em uma derivação também chamamos de *ocorrência gerada* pela aplicação da regra na derivação.

(*m*) Chamamos as top-fórmulas de uma derivação que não foram cortadas por nenhuma aplicação de regra, de *top-fórmulas abertas* ou *hipóteses abertas*.

(*n*) Denotaremos por $n_{[\mathsf{A}]}(\pi)$ o número de hipóteses destacadas de $\begin{matrix}[\mathsf{A}]\\ \pi\end{matrix}$.

1.3.2 DEFINIÇÃO: Fórmula Máxima (*FM*)

Dizemos que uma ocorrência de fórmula φ numa derivação π é *fórmula máxima* em π, denotada por FM_{π}, quando φ for conseqüência de regra de introdução ou do absurdo e premissa maior de regra de eliminação.

A noção fundamental de forma normal pode agora ser definida formalmente de modo bastante simples.

1.3.3 DEFINIÇÃO: Derivação Normal

Uma derivação π é *normal* ou está na *forma normal*, quando nenhuma ocorrência de fórmula em π é fórmula máxima.

§4 Reduções

As reduções que apresentaremos nesta seção foram definidas com o objetivo principal de eliminar fórmulas máximas das derivações, de modo a transformar derivações quaisquer em derivações normais. Vamos inicialmente definir formalmente as reduções para em seguida falarmos um pouco mais sobre elas.

As *reduções* definidas nesta seção estão divididas em 2 grupos diferentes: as *reduções operacionais*, definidas em 1.4.1 a 1.4.8, e as *reduções permutativas*, definidas em 1.4.9 e 1.4.10.[14]

Dizemos que *π' é uma redução imediata de π*, ou que *π se reduz imediatamente a π'*, e denotamos $\pi \rightarrow \pi'$, quando π' é obtida de π por uma das 10 maneiras abaixo (1.4.1 a 1.4.10):

1.4.1 ∧-redução

$$\pi \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{cc} \pi_1 & \pi_2 \\ A_1 & A_2 \end{array}}{\dfrac{A_1 \wedge A_2}{A_i}} \end{array} \\ \pi_3 \end{array} \quad \rightarrow \quad \pi' \equiv \begin{array}{c} \pi_i \\ A_i \\ \pi_3 \end{array} \qquad (i = 1, 2).$$

OBSERVAÇÃO: Mesmo que A_1 e A_2 sejam ocorrências da mesma fórmula, não existe ambigüidade na redução, pois em π deve estar expresso qual regra de eliminação da conjunção foi utilizada ((∧Ed) ou (∧Ee)).

1.4.2 ⊃-redução-1

$$\pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c} \pi_1 \\ A \end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c} [A]^k \\ \pi_2 \\ B \end{array}}{A \supset B}\,k}{B} \\ \pi_3 \end{array} \quad \rightarrow \quad \pi' \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ [A] \\ \pi_2 \\ B \\ \pi_3 \end{array}.$$

1.4.3 ⊃-redução-2

$$\pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c} \pi_1 \\ A \end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c} \pi_2 \\ B \end{array}}{A \supset B}}{B} \\ \pi_3 \end{array} \quad \rightarrow \quad \pi' \equiv \begin{array}{c} \pi_2 \\ B \\ \pi_3 \end{array}.$$

[14] Todas as reduções que apresentaremos aqui foram introduzidas em **Prawitz[1965]**.

1.4.4 $\forall$-redução

$$\pi \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ \dfrac{\dfrac{A(a)}{\forall_x A(x)}}{A(t)} \\ \pi_2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \pi' \equiv \begin{array}{c} (\pi_1)^a_t \\ A(t) \\ \pi_2 \end{array} .$$

1.4.5 $\vee$-redução-1

$$(a)\ \pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ A_i\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}[A_2]^k \\ \pi_2 \\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k \\ \pi_3 \\ B\end{array}}{B}\,k \\ \pi_4 \end{array} \quad \rightarrow \quad \pi' \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ [A_i] \\ \pi_i \\ B \\ \pi_4 \end{array} \quad (i = 2, 3);$$

$$(b)\ \pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ \perp\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}[A_2]^k \\ \pi_2 \\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k \\ \pi_3 \\ B\end{array}}{B}\,k \\ \pi_4 \end{array} \quad \rightarrow \quad \pi' \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ \dfrac{\perp}{[A_2]} \\ \pi_2 \\ B \\ \pi_4 \end{array} .$$

1.4.6 $\vee$-redução-2

$$(a)\ \pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ C\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}\pi_2 \\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k \\ \pi_3 \\ B\end{array}}{B}\,k \\ \pi_4 \end{array} \quad \rightarrow \quad \pi' \equiv \begin{array}{c} \pi_2 \\ B \\ \pi_4 \end{array} \text{, onde } C \equiv A_2 \text{ ou } C \equiv \perp;$$

$$(b)\ \pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ A_3\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}[A_2]^k \\ \pi_2 \\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_3 \\ B\end{array}}{B}\,k \\ \pi_4 \end{array} \quad \rightarrow \quad \pi' \equiv \begin{array}{c} \pi_3 \\ B \\ \pi_4 \end{array} .$$

1.4.7 $\exists$-redução-1

$$\pi \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A(a)\end{array}}{\exists_x A(x)} \qquad \begin{array}{c}[A(a)]^k\\ \pi_2\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}}\,k \quad \rightarrow \quad \pi' \equiv \begin{array}{c}\pi_1\\ [A(a)]\\ \pi_2\\ B\\ \pi_3\end{array}.$$

1.4.8 $\exists$-redução-2

$$\pi \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A(a)\end{array}}{\exists_x A(x)} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}} \quad \rightarrow \quad \pi' \equiv \begin{array}{c}\pi_2\\ B\\ \pi_3\end{array}.$$

1.4.9 $\exists$-permutação

$$\pi \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \exists_x B(x)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ A\end{array}}{A} \qquad \Sigma_4}{\begin{array}{c}D\\ \pi_5\end{array}} \quad \rightarrow \quad \pi' \equiv \cfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \exists_x B(x)\end{array} \qquad \cfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ A\end{array} \qquad \Sigma_4}{D}}{\begin{array}{c}D\\ \pi_5\end{array}},$$

onde A é premissa maior de regra de eliminação e Σ_4 pode ocorrer à esquerda de A.

1.4.10 $\vee$-permutação

$$\pi \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ B \vee C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_3\\ A\end{array}}{A} \qquad \Sigma_4}{\begin{array}{c}D\\ \pi_5\end{array}} \quad \rightarrow \quad \pi' \equiv \cfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ B \vee C\end{array} \qquad \cfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ A\end{array} \qquad \Sigma_4}{D} \qquad \cfrac{\begin{array}{c}\pi_3\\ A\end{array} \qquad \Sigma_4}{D}}{\begin{array}{c}D\\ \pi_5\end{array}},$$

onde A é premissa maior de regra de eliminação e Σ_4 pode ocorrer à esquerda de A.

1.4.11 DEFINIÇÃO: Seqüência de Redução

Uma *seqüência de redução* para uma derivação π é uma seqüência de derivações π_1, ..., π_i, π_{i+1}, ... tal que:

(1) π_1 é π;

(2) Cada π_{i+1} é uma redução imediata de π_i.

1.4.12 NOTAÇÕES:

(*a*) A notação $\pi \twoheadrightarrow \pi'$ indica que existe uma seqüência de redução de comprimento finito *n* (1< *n*< ω) na qual π é π_1 e π' é π_n. Diremos neste caso que *π se reduz a π'*.

(*b*) A notação $\pi \twoheadrightarrow_R \pi'$ denota que $\pi \equiv \pi'$ ou $\pi \twoheadrightarrow \pi'$.

1.4.13 DEFINIÇÕES: Normalização

(*a*) Uma derivação π é *normalizável* se $\pi \twoheadrightarrow_R \pi'$ tal que π' é derivação normal.

(*b*) Um sistema de dedução natural satisfaz *normalização fraca* se toda derivação deste sistema é normalizável.

(*c*) Uma derivação π é *fortemente normalizável l* se toda seqüência de redução para π é finita e termina em uma derivação normal.

(*d*) Um sistema de dedução natural satisfaz *normalização forte* se toda derivação deste sistema é fortemente normalizável.

(*e*) Um sistema de dedução natural possui a propriedade de Church-Rosser se toda seqüência de redução finita para qualquer derivação π termina na mesma forma normal. Ou seja, se a forma normal para uma derivação, quando existe, é única.

1.4.14 COMENTÁRIO: Justificando o Sistema C'

Considere a derivação $\pi \equiv \dfrac{A \qquad \dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}}{A \supset B}}{B}$. Note que π representa a seguinte dedução: $A, A \wedge B \vdash B$. Note também que $A \supset B$ é uma fórmula máxima segundo a Definição 1.3.2.

Se observarmos as regras de inferência descritas em 1.2.2 e o exemplo acima, podemos perceber o que foi chamado em **Prawitz[1965]** de *princípio de inversão* entre as regras de introdução e eliminação para cada conectivo. Para ilustrar o princípio de inversão Prawitz diz:

> "A aplicação de uma regra de eliminação essencialmente apenas restaura o que já havia sido estabelecido se a premissa maior desta aplicação fosse inferida pela aplicação de uma regra de introdução."[15]

[15] Cf. **Prawitz[1965]**, p 33.

Uma fórmula máxima, como $A \supset B$ do exemplo acima, representa exatamente esta situação. O que já havia sido estabelecido antes da introdução que gerou a fórmula máxima do nosso exemplo era exatamente: $\frac{A \wedge B}{B}$, que formaliza a dedução $A \wedge B \vdash B$, mas também formaliza a dedução do exemplo: $A, A \wedge B \vdash B$.

A constatação do princípio da inversão sugere que para cada dedução deve haver uma derivação que a realize, na qual não ocorram fórmulas máximas que sejam conseqüência de introdução.

Nos teoremas de normalização, em geral, estabelecemos que a partir de uma derivação qualquer, podemos obter uma derivação normal da mesma dedução. Ou seja, queremos obter derivações em que não ocorram fórmulas máximas de nenhum tipo.

Visando isso, Prawitz introduziu as reduções como métodos de eliminação de fórmulas máximas para obtenção de derivações normais: para eliminar as fórmulas máximas que sejam conseqüência de regra de introdução ou de $\perp_I$, Prawitz criou as *reduções operacionais* (1.4.1 a 1.4.8), que são fortemente inspiradas no princípio de inversão. Para resolver problemas específicos com fórmulas máximas cujos conectivos principais são $\exists$ e $\vee$, Prawitz criou as reduções permutativas. Já para as fórmulas máximas conseqüência da regra do absurdo ($\perp_C$), justamente por elas não obedecerem ao princípio de inversão, uma vez que não existem regras de introdução e eliminação associadas à constante do absurdo, as reduções representam um problema de difícil solução.

A solução de Prawitz tanto para o problema das reduções do absurdo quanto para as reduções permutativas, que não são intuitivamente claras, foi restringir a lógica clássica a certos conectivos não problemáticos ($\wedge$, $\supset$, $\forall$ e $\perp$) através da criação do Sistema C'. Prawitz demonstrou que, para cada derivação π em C', podemos obter uma outra, $\pi^{\#}$, que representa a mesma dedução, onde toda aplicação da regra do absurdo clássico ($\perp_C$) tem como conseqüência uma fórmula atômica.[16] Neste caso, nenhuma conseqüência de ($\perp_C$) pode ser premissa maior de regra de eliminação, pois sendo atômica, não possui conectivo para ser eliminado. Portanto, $\pi^{\#}$ é uma derivação em que não ocorrem fórmulas máximas que sejam conseqüência da regra do absurdo clássico.

[16] Cf. **Prawitz[1965]**, pp 39 e 40.

Daqui para frente, sempre que nos referirmos a uma derivação de C', estaremos nos referindo a uma derivação já transformada, em que todas as regras ($\perp_c$) possuem conseqüência atômica. Dessa forma, as únicas reduções relevantes ao sistema C' são as reduções operacionais dos conectivos presentes neste sistema (1.4.1 a 1.4.4), que são intuitivamente claras e mais simples de lidar.

O resultado principal desta tese, que desenvolveremos nos Capítulos II e III, será obtido para o sistema C', e portanto tem relação apenas com as reduções 1.4.1 a 1.4.4. As demais reduções só serão utilizadas quando propusermos uma extensão deste resultado para os sistemas M e I, no Capítulo VII desta tese.

§5 Pior Seqüência de Redução para C'

A definição de pior seqüência de redução para derivações em C' que iremos enunciar e utilizar foi introduzida em **Massi[1990],** Capítulo VII. A pior seqüência de redução para uma derivação π é, intuitivamente, aquela que leva em consideração todas as fórmulas máximas que podem ser geradas a partir das fórmulas máximas já existentes em π. Isso quer dizer que, para cada "possível" fórmula máxima φ de π, existe um passo da pior seqüência para π que realiza a redução de φ.

Apresentaremos agora duas definições necessárias à definição da pior seqüência.

1.5.1 DEFINIÇÃO: $F(\pi)$

Seja π uma derivação em C'. Denotamos por $F(\pi)$ a primeira ocorrência de fórmula máxima de π, de baixo para cima e mais à direita.

1.5.2 DEFINIÇÃO: Fórmula Máxima Principal - $FP(\pi)$

A *fórmula máxima principal* de π, representada por $FP(\pi)$, é definida por indução no número de ocorrências de fórmulas máximas em π, da seguinte maneira:

(1) Base: A única fórmula máxima de π é $FP(\pi)$;

(2) Se π é da forma $\pi \equiv \dfrac{\begin{array}{cc} \pi_1 & \begin{array}{c}\pi_2 \\ \dfrac{B}{A \supset B}\end{array} \\ A & \end{array}}{B} \atop \pi_3$, tal que

(*i*) $A \supset B$ é $F(\pi)$;
e
(*ii*) A regra ($\supset$I) mostrada não corta top-fórmula de π

então:

♦ $FP(\pi) = \begin{cases} A \supset B, & \text{se } \pi_1 \text{ for normal;} \\ FP(\pi_1), & \text{se } \pi_1 \text{ não for normal.} \end{cases}$

(3) Se π é da forma $\pi \equiv \dfrac{\begin{array}{cc} \pi_1 & \begin{array}{c}[A]^k \\ \pi_2 \\ \dfrac{B}{A \supset B}\,k\end{array} \\ A & \end{array}}{B} \atop \pi_3$, onde

(*i*) $A \supset B$ é $F(\pi)$;
e
(*ii*) A é cortada pela regra ($\supset$I) mostrada,

então

♦ $FP(\pi) = A \supset B$;

(4) Se π é da forma $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\pi_1 & \pi_2 \\ A_1 & A_2\end{array}}{A_1 \wedge A_2}}{A_i} \atop \pi_3$ $(1 \leq i \leq 2)$, onde $A_1 \wedge A_2$ é $F(\pi)$,

então, para $(1 \leq j \leq 2$ e $j \neq i)$ temos que:

♦ $FP(\pi) = \begin{cases} A_1 \wedge A_2, & \text{se } \pi_j \text{ for normal;} \\ FP(\pi_j), & \text{se } \pi_j \text{ não for normal.} \end{cases}$

(5) Se π é da forma $\pi \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ A(a) \\ \hline \forall_x A(x) \\ \hline A(t) \\ \pi_2 \end{array}$, onde $\forall x A(x)$ é $F(\pi)$,

então:

♦ $FP(\pi) = \forall x A(x)$.

1.5.2.1 OBSERVAÇÃO:

É imediato, pela definição acima, que para cada derivação não normal π existe uma e apenas uma ocorrência de fórmula φ tal que $\varphi = FP(\pi)$. Ou seja, $FP(\pi)$ existe e é única para toda derivação não normal π.

1.5.3 DEFINIÇÃO: Pior Seqüência de Redução

A *pior seqüência de redução* para uma derivação π em C' é uma seqüência de derivações denotadas por $\pi^{\circ 0}, \pi^{\circ 1}, \pi^{\circ 2}, \ldots$, tal que:

(1) $\pi^{\circ 0}$ é π;

(2) Cada $\pi^{\circ i+1}$ é obtido de $\pi^{\circ i}$ pela redução de $FP(\pi^{\circ i})$;

(3) A última derivação da seqüência, quando existe, é normal.

1.5.3.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) A notação $\pi \xrightarrow{p} \pi'$ indica que $\pi' \equiv \pi^{\circ 1}$.

(*b*) A notação $\pi \overset{p}{\twoheadrightarrow} \pi'$ indica que existe $1 \leq i < \omega$ tal que $\pi' \equiv \pi^{\circ i}$. Neste caso, dizemos que *π se reduz da pior forma a π'*. A notação $\pi \overset{p}{\twoheadrightarrow}_R \pi'$ indica que $\pi \equiv \pi'$ ou $\pi \overset{p}{\twoheadrightarrow} \pi'$.

(*c*) Note que se π é normal, então $\pi \equiv \pi^{\circ 0}$ é a única derivação da pior seqüência de redução para π.

(*d*) Também utilizaremos a notação π° para $\pi^{\circ 1}$.

(*e*) Denotaremos o comprimento da pior seqüência de redução para π por $lp(\pi)$.

(*f*) Como, pela Observação 1.5.2.1, para cada derivação não normal π, $FP(\pi)$ é único, então, por isso e por (*c*), para cada derivação π, a pior seqüência de redução é única.

(g) É imediato, pela unicidade da pior seqüência que: $(\pi^{\circ n})^{\circ m} \equiv \pi^{\circ n+m}$. Ou seja, o ($m$+ 1)-ésimo termo da pior seqüência para $\pi^{\circ n}$ é exatamente o (n+ m+ 1)-ésimo termo da pior seqüência para π.

(h) Denotaremos por π^{P} a última derivação da pior seqüência de redução para π, quando esta for finita.

(i) Para quaisquer $m,n< lp(\pi)< \omega$ é claro que $(\pi^{\circ m})^{P} \equiv (\pi^{\circ n})^{P} \equiv \pi^{P}$, pois a pior seqüência é única e $\pi^{\circ m}$ e $\pi^{\circ n}$ pertencem à pior seqüência para π.

(j) Também pela unicidade da pior seqüência de redução temos: $\pi \equiv \Sigma \Rightarrow \pi^{P} \equiv \Sigma^{P}$.

1.5.4 TEOREMA:

Admita que $lp(\pi)< \omega$ para toda derivação π. Se π se reduz imediatamente a π' ($\pi \to \pi'$), então $lp(\pi')< lp(\pi)$ e existe uma derivação $\pi^{\#}$ tal que $\pi \xrightarrow{p}\!\!\twoheadrightarrow_{R} \pi^{\#}$ e $\pi' \xrightarrow{p}\!\!\twoheadrightarrow_{R} \pi^{\#}$.

PROVA:

Ver **Massi[1990]**, pp. 90 a 105. ♦

1.5.5 OBSERVAÇÃO:

O teorema anterior estabelece que, na hipótese do comprimento para a pior seqüência de redução, $lp(\pi)$, ser finito, temos $lp(\pi')< lp(\pi)$ para toda derivação π' redução imediata de π. Isso significa que, se provarmos que $lp(\pi)$ é finito para toda derivação π, então $lp(\pi)$, ou qualquer outra atribuição que seja igual a $lp(\pi)$ para toda derivação π, representa um ordinal natural para derivações em C'.

Além disso, o teorema anterior estabelece outro fato bastante importante. Se admitirmos $lp(\pi)< \omega$ para toda derivação π, a unicidade da forma normal é um corolário imediato de sua segunda parte. Dessa forma, provar a finitude de $lp(\pi)$ para toda derivação π implica não apenas que o Teorema de Normalização Forte é corolário do Teorema 1.5.4, mas também que o Teorema Church-Rosser, da unicidade da forma normal, é corolário do Teorema 1.5.4. Voltaremos a estas considerações no Capítulo III desta tese, depois de termos demonstrado a finitude da pior seqüência de redução para toda derivação π.

Capítulo II

Finitude e Unicidade da Atribuição Numérica $o(\pi)$

Neste capítulo introduziremos a atribuição numérica $o(\pi)$ que associa univocamente cada derivação π de C' a um número natural (finito) que possui a propriedade de diminuir com as reduções. Esta atribuição representa o nosso ordinal natural do sistema C', que será o índice de indução para uma prova trivial do Teorema de Normalização Forte. Como introduziremos neste capítulo muitas propriedades puramente estruturais das derivações de C', em muitas ocasiões utilizaremos exemplos e comentários informais como ilustração.

A atribuição $o(\pi)$ pode ser entendida como uma contagem exata de todas as "possíveis" fórmulas máximas de uma derivação. Isso significa somar todas as fórmulas máximas atuais a todas as fórmulas máximas que podem surgir em qualquer seqüência de redução para a derivação. Se nossa atribuição $o(\pi)$ representa de fato este número, então é esperado que ela diminua com as reduções, pois se $\pi \to \pi'$, ainda que esta redução tenha criado em π' muitas novas fórmulas máximas que não ocorriam em π, com certeza a fórmula máxima reduzida não existe em π' e, então, o número de todas as possíveis fórmulas máximas de π, $o(\pi)$, é no mínimo uma unidade maior que $o(\pi')$. Dessa forma, a nossa definição de $o(\pi)$ tem que ser pautada por dois compromissos fundamentais:

(*a*) representar de fato uma contagem de todas as possíveis fórmulas máximas para uma derivação π e, portanto, diminuir com as reduções;
(*b*) ser produzida de uma maneira tal que seja possível provar sua finitude.

Podemos dizer que o comprimento da pior seqüência de redução de Massi, $lp(\pi)$, cumpre satisfatoriamente, por si só, apenas o primeiro compromisso, mas não o segundo. A definição de $o(\pi)$ que proporemos aqui, por sua vez, cumpre de fato os dois objetivos. Além disso, como provaremos que $o(\pi)= lp(\pi)$ para toda derivação π, a nossa definição de $o(\pi)$ pode ser interpretada como uma maneira alternativa de contarmos o número de todas as possíveis fórmulas máximas de uma derivação π. Maneira esta que nos propiciou a prova de sua finitude.

Neste capítulo apenas definiremos formalmente a atribuição $o(\pi)$ e provaremos sua finitude e unicidade para toda derivação π. A prova de que $o(\pi)$ diminui com as reduções e a prova do Teorema de Normalização Forte e dos outros resultados que obtemos como conseqüência deste desenvolvimento, apresentaremos no capítulo seguinte.

O capítulo está dividido em 4 seções principais. Na primeira delas, apresentamos a noção de segmento-α, que é uma das mais importantes propriedades estruturais do nosso desenvolvimento, sobre a qual está alicerçado boa parte do nosso método. Vários outros conceitos relacionados com este também são definidos. Além disso, introduzimos algumas propriedades e os primeiros resultados envolvendo as noções apresentadas. Ainda na primeira seção, no Comentário 2.1.16, fazemos uma breve exposição informal do método de obtenção de $o(\pi)$, com o intuito apenas de esclarecer e situar o leitor.

Na segunda seção, outra noção importante é apresentada: a noção de subárvore. Vários resultados envolvendo esta noção e os conceitos anteriormente apresentados serão aqui desenvolvidos.

Na terceira seção, introduzimos as noções de multiplicação estrela e seqüência estrela, e provamos a finitude e unicidade da seqüência estrela de toda derivação π.

Na quarta e última seção, com todo o aparato até aqui desenvolvido, conseguimos finalmente definir formalmente a atribuição numérica $o(\pi)$ e em seguida demonstramos sua finitude e unicidade para toda derivação π.

§1 Segmento-α

A definição de segmento-α é ponto de partida e chave para a definição de $o(\pi)$. É através dela que teremos condições de identificar e computar as possíveis novas fórmulas máximas que poderão surgir a partir da redução das atuais. Ela pode ser entendida, intuitivamente, como uma maneira de identificar certas ocorrências de fórmulas que "gravitam" em torno das fórmulas máximas de uma derivação, e que representam as ocorrências que têm possibilidade de se tornarem fórmulas máximas, caso as fórmulas máximas sobre as quais elas gravitam sejam reduzidas.

Faremos agora uma série de definições técnicas necessárias à definição de segmento-α.

2.1.1 DEFINIÇÃO: Premissa Esquerda e Direita - $E_\pi(\varphi)$ e $D_\pi(\varphi)$

Considere a seguinte derivação: $\pi \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1 & \pi_2\\ A & B\end{matrix}}{\begin{matrix}C\\ \pi_3\end{matrix}}$, lembrando que $\dfrac{A \quad B}{C}$ é uma aplicação de regra de inferência em π.

Dizemos que A, a premissa esquerda da aplicação da regra, é a *premissa esquerda* de C em π, e denotamos por: A= E_π(C). Analogamente, B é a *premissa direita* de C em π, denotada por: B= D_π(C).

Se π é do tipo: $\pi \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_3\end{matrix}}$, dizemos que A, a única premissa de B, é a premissa direita de B em π (A= D_π(B)), e que E_π(B) não está definida.

2.1.1.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Se A é premissa de B em π, dizemos que A ocorre *imediatamente acima* de B em π e que B ocorre *imediatamente abaixo* de A em π.

(*b*) Dizemos que *φ ocorre à esquerda de ψ em π* se π é da forma $\pi \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1 & \pi_2\\ A & B\end{matrix}}{\begin{matrix}C\\ \pi_3\end{matrix}}$, onde φ ocorre em π_1 e ψ ocorre em π_2. Se φ= A= $r(\pi_1)$ e ψ= B= $r(\pi_2)$, então dizemos que *φ ocorre imediatamente à esquerda de ψ em π.*

2.1.2 DEFINIÇÃO: Ramo

Uma seqüência $A_1, \ldots , A_n$ de ocorrências de fórmulas em uma derivação π é um *ramo* se estiverem satisfeitas as seguintes condições:

(1) A_1 é top-fórmula;

(2) A_i é premissa de A_{i+1}, para cada ($i< n$);

(3) A_n é $r(\pi)$.

2.1.2.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Cada ramo de π é a seqüência das ocorrências que se inicia em uma top-fórmula e vai descendo, através das aplicações de regras, até chegar à raiz.

(*b*) Dizemos que *φ ocorre acima de ψ em π*, se φ e ψ são ocorrências de fórmula em π e existe um ramo $(A_1, ..., A_n)$ em π tal que φ é A_i , ψ é A_j e $i< j$.

2.1.3 DEFINIÇÃO: Segmento

Um *segmento*, em uma derivação π, é uma seqüência A_1 , A_2 , ... , A_n de ocorrências consecutivas de fórmulas em um ramo de π.

2.1.3.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Denotaremos segmentos pelas letras ρ e μ, com ou sem índices.

(*b*) Quando dissermos: "seja ρ um segmento ..." e não especificarmos nada sobre a derivação em que ρ está definido, já estará tacitamente subentendido que estamos nos referindo a um segmento ρ de uma derivação qualquer π.

2.1.4 DEFINIÇÃO: Comprimento de um Segmento

Definimos o *comprimento* ou *tamanho* de um segmento ρ, denotado por $l(\rho)$, como o número natural que representa o número de ocorrências de fórmulas do segmento ρ. Se $\rho = A_1 , ... , A_n$, então $l(\rho)= n$.

2.1.5 DEFINIÇÃO: Ponte entre Segmentos

Uma ocorrência de fórmula φ de uma derivação π é uma *ponte* entre os segmentos $\rho_1= A_1, ..., A_n$ e $\rho_2= B_1, ..., B_m$, quando um dos dois itens abaixo ocorre:

(1) Ou φ é premissa de B_1 e conseqüência de A_n;

(2) Ou φ é premissa de A_1 e conseqüência de B_m.

2.1.5.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Uma ponte é a única ocorrência entre dois segmentos.

(*b*) Dizemos que ρ_1 e ρ_2 são *segmentos ligados* quando existe uma ponte entre eles.

2.1.6 DEFINIÇÃO: Cadeia-φ de Segmentos

Dizemos que $X = \rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2, ..., \rho_{m-1}, \varphi_{m-1}, \rho_m$ é uma *cadeia-φ* de segmentos de uma derivação π se:

(1) Para todo i, $1 \leq i \leq m$, $\rho_i = A_{i1}, ..., A_{ini}$ é um segmento de π, o qual chamaremos de *subsegmento* de X;

(2) Para todo i, $1 \leq i < m$, φ_i é ponte entre ρ_i e ρ_{i+1};

(3) A menos de parâmetros, cada φ_i ($1 \leq i < m$) é ocorrência da mesma fórmula φ (daí o nome cadeia-φ).

2.1.6.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) É imediato pelas definições de segmento e ponte de segmentos que X, uma cadeia-φ, é por sua vez um segmento.

(*b*) Algumas vezes denotaremos X por: $X = \varphi;\rho_1, ..., \rho_m$, onde φ é a fórmula das pontes de X e $\rho_1, ..., \rho_m$ são os subsegmentos de X.

2.1.7 DEFINIÇÃO: Centro e Ocorrência Central

Dizemos que o *centro* de $\rho = A_1, ..., A_n$, denotado por $c(\rho)$, é o número **racional** dado por: $c(\rho) = (n+1)/2$. Se $c(\rho)$ é inteiro, então $A_{c(\rho)}$ é chamada de *ocorrência central* de ρ.

2.1.7.1 EXEMPLO:

$\rho_1 = A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ $\qquad$ $\rho_2 = B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$

$c(\rho) = 3{,}5$ $\qquad$ $c(\rho) = 3$ $\quad$ B_3 é ocorrência central.

2.1.7.2 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Podemos entender $c(\rho)$ como um número que divide ρ ao meio, de tal forma que o número de ocorrências com índices menores ou iguais que $c(\rho)$ é igual ao número de ocorrências com índices maiores ou iguais que $c(\rho)$ em ρ.

(*b*) Se ρ tem comprimento par (n é par), $c(\rho)$ não é inteiro, portanto, ρ **não** possui uma ocorrência central.

(c) Dizemos que uma ocorrência A_i de $\rho = A_1, \ldots, A_n$ *está na primeira metade* de ρ se $i \leq c(\rho)$. Se $i \geq c(\rho)$, então A_i *está na segunda metade* de ρ. Note que a ocorrência central de um segmento ρ está nas duas metades de ρ.

(d) Quando dissermos: "Seja ρ um segmento de ocorrência central A_i", já estará tacitamente subentendido que ρ tem comprimento ímpar.

2.1.8 DEFINIÇÃO: Ocorrência Simétrica

Seja $\rho = A_1, \ldots, A_m$ um segmento. Dizemos que as ocorrências A_r e A_s são *ocorrências simétricas em ρ* quando elas eqüidistam do centro de ρ. Ou seja, quando: $|s - c(\rho)| = |r - c(\rho)|$.

2.1.8.1 EXEMPLO:

São simétricas as ocorrências "unidas" dos segmentos abaixo:

$\rho_1 = A_1,\ A_2,\ A_3, A_4,\ A_5,\ A_6$ $\qquad\qquad$ $\rho_2 = B_1,\ B_2, B_3,\ B_4,\ B_5$

2.1.8.2 OBSERVAÇÕES:

(a) Toda ocorrência de qualquer segmento ρ possui uma ocorrência simétrica.

(b) A única ocorrência que é simétrica a si mesma é a ocorrência central de um segmento.

(c) Diremos que as ocorrências simétricas de um segmento formam pares, e que a ocorrência central faz par consigo mesma. Chamaremos cada par de ocorrências simétricas de um segmento de *par simétrico.*

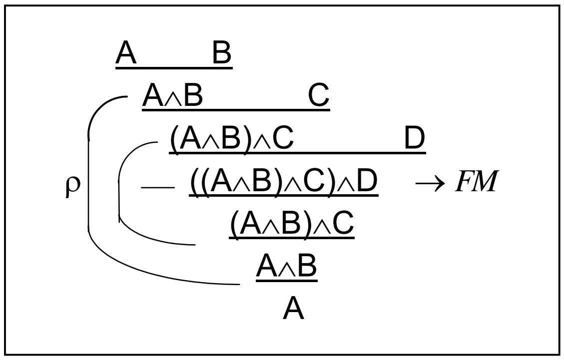
(d) Sejam A_r e A_s ocorrências simétricas de $\rho = A_1, \ldots, A_n$. É fácil ver que: $r = n - s + 1$ e $s = n - r + 1$.

2.1.9 DEFINIÇÃO: Segmento-α de Nível 1

Seja $\rho = A_1, \ldots, A_n$ um segmento em uma derivação π de ocorrência central A_i. Dizemos que ρ é um *segmento-α de nível 1* em π se, para todo j tal que $1 \leq j \leq i = c(\rho)$, A_j (ocorrência da primeira metade de ρ) e A_{n-j+1} (ocorrência da segunda metade de ρ simétrica a A_j), a menos de parâmetros, são ocorrências da mesma fórmula, onde A_j é conseqüência de regra de introdução e A_{n-j+1} é premissa maior de regra de eliminação.

2.1.9.1 EXEMPLO:

Considere π a seguinte derivação:



O segmento ρ= A∧B, (A∧B)∧C, ((A∧B)∧C)∧D, (A∧B)∧C, A∧B é segmento-α de nível 1 em π, pois as ocorrências de cada par simétrico de ρ são ocorrências da mesma fórmula, sendo que suas ocorrências da primeira metade são todas conseqüências de regra de introdução e suas ocorrências da segunda metade são todas premissas maiores de regra de eliminação.

2.1.9.2 OBSERVAÇÕES:

(*a*) É imediato pela definição que se ρ é um segmento-α de nível 1 em π, a ocorrência central de ρ é a única fórmula máxima de π em ρ. Veja que, no exemplo, ((A∧B)∧C)∧D é fórmula máxima.

(*b*) Dizemos que um segmento-α de nível 1 é *determinado* pela ocorrência de fórmula máxima que ele contém (sua ocorrência central).

(*c*) Também é imediato pela definição acima que toda ocorrência de fórmula máxima determina um segmento-α de nível 1, que tem pelo menos a própria *FM* como elemento.

(*d*) Denotamos o maior segmento-α (maior comprimento) de nível 1 em π, determinado pela *FM* φ, por: $\alpha_\pi(\varphi)$.

(*e*) Dizemos que cada par simétrico de um segmento-α de nível 1 é um *par-α* de nível 1.

2.1.9.3 COMENTÁRIOS:

Vamos retomar a derivação π do Exemplo 2.1.9.1 acima, e aplicar a Redução 1.4.1 à sua única fórmula máxima. Temos:

$$\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \qquad B}{A\wedge B} \qquad C}{(A\wedge B)\wedge C} \qquad D}{((A\wedge B)\wedge C)\wedge D^{\ (FM)}}}{(A\wedge B)\wedge C}}{A\wedge B}}{A} \quad \rightarrow \quad \pi' \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \qquad B}{A\wedge B} \qquad C}{(A\wedge B)\wedge C^{\ (FM)}}}{A\wedge B}}{A}$$

A redução aplicada a π fez o par-α (par de ocorrências simétricas) mais próximo do centro de ρ se "colapsar" em uma única ocorrência de (A∧B)∧C em π'. Esta ocorrência é, por sua vez, fórmula máxima em π', pois é conseqüência de introdução e PM de eliminação.

Se agora reduzirmos a fórmula máxima de π', temos uma situação semelhante, onde duas ocorrências de A∧B de π' se colapsam em uma única ocorrência de π", que é fórmula máxima. Vejamos:

$$\pi' \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \qquad B}{A\wedge B} \qquad C}{(A\wedge B)\wedge C^{\ (FM)}}}{A\wedge B}}{A} \quad \rightarrow \quad \pi'' \equiv \dfrac{\dfrac{A \qquad B}{A\wedge B^{\ (FM)}}}{A}$$

A definição de segmento-α de nível 1 foi introduzida justamente para dar este tipo de informação. Se ρ= B, C, D, C, B for um segmento-α de nível 1 em uma derivação π, então D, a ocorrência central de ρ, é *FM* em π. Sua redução produz uma derivação π' na qual as duas ocorrências de C se colapsam em uma única, que é *FM* em π'. A redução de C em π', por sua vez, produz uma derivação π" na qual B é *FM*.

Se ρ é $\alpha_\pi(\mathsf{D})$ (o mais comprido segmento-α determinado por D em π), então sabemos também que a redução de B em π" não produz uma fórmula máxima na ocorrência colapsada em π"', caso contrário haveria mais um par simétrico em ρ.

A definição de segmento-α de nível 1, no entanto, não consegue identificar todas as fórmulas máximas que podem surgir do colapso das ocorrências que gravitam em torno das fórmulas máximas de uma derivação. Para conseguir identificar todas essas, precisamos tornar esta definição mais poderosa, e, para isso, introduziremos o conceito de segmento-α de nível *n*, com $n > 1$. Este novo conceito é introduzido por uma definição indutiva, da qual a definição de segmento-α de nível 1 é a base.

2.1.10 DEFINIÇÃO: Segmento-α de Nível *n* ($n > 1$)

Dizemos que $\rho = \mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_m$ é um *segmento-α de nível n* ($n > 1$) em uma derivação π, se existe $i < m/2$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

(1) Para todo j, $1 \leq j \leq i$, A_j (ocorrência da primeira metade de ρ) e A_{m-j+1} (ocorrência da segunda metade de ρ simétrica a A_j), a menos de parâmetros, são ocorrências da mesma fórmula, onde A_j é conseqüência de regra de introdução e A_{m-j+1} é premissa maior de regra de eliminação;

(2) A_{i+1} (ocorrência da primeira metade de ρ) e A_{m-i} (ocorrência da segunda metade simétrica a A_{i+1}) representam a primeira e a última ocorrências de X, uma cadeia-φ de segmentos em π que satisfaz duas propriedades:

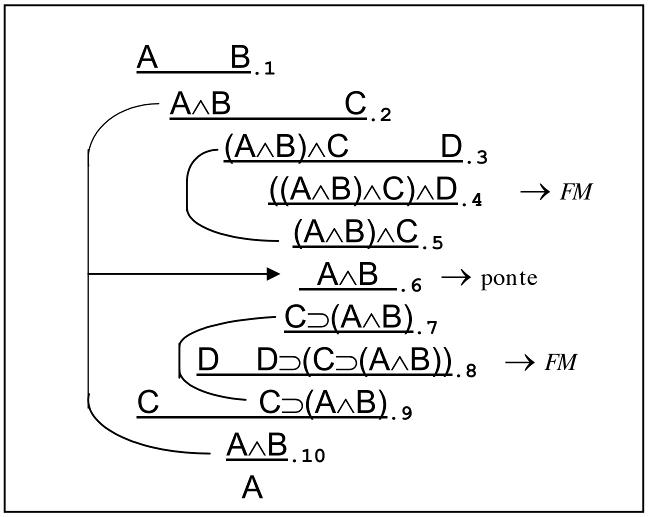
(2.1) Todos os subsegmentos de X são segmentos-α de nível menor que *n*, e

(2.2) Pelo menos um subsegmento de X é um segmento-α de nível n-1;

(3) A menos de parâmetros, A_i e A_{m-i+1} são ocorrências da fórmula φ, ponte entre os segmentos da cadeia X.

2.1.10.1 EXEMPLO:

Considere π a seguinte derivação:



Os números nas regras são apenas para distinção de referência entre as ocorrências de fórmula.

Analisando a derivação π podemos encontrar duas fórmulas máximas e dois segmentos-α de nível 1 determinados por elas:

ρ_1= $((A\wedge B)\wedge C)_3$, $(((A\wedge B)\wedge C)\wedge D)_4$, $((A\wedge B)\wedge C)_5$ e

ρ_2= $(C\supset(A\wedge B))_7$, $D\supset(C\supset(A\wedge B)))_8$, $(C\supset(A\wedge B))_9$.

Note que ρ_1 e ρ_2 são segmentos ligados, e $(A\wedge B)_6$ é ponte entre ρ_1 e ρ_2. Portanto, podemos considerar a seguinte cadeia-φ em π:

$X= \rho_1, \varphi, \rho_2$ onde $\varphi= (A\wedge B)_6$.

Note que as ocorrências imediatamente acima e imediatamente abaixo de X são ocorrências da mesma fórmula $(A\wedge B)$, que é a fórmula da ponte de X, sendo a primeira conseqüência de regra de introdução e a segunda *PM* de regra de eliminação. Dessa forma, temos caracterizado o seguinte segmento-α de nível 2 em π:

$\rho= (A\wedge B)_2, X, (A\wedge B)_{10}$.

ρ é segmento-α de nível 2 em π, pois o par de ocorrências simétricas externas a X em ρ é composto por ocorrências da mesma fórmula, sendo a primeira conseqüência de introdução e a segunda *PM* de eliminação (ρ satisfaz 2.1.10-(1)); além disso, X é uma cadeia-φ onde seus dois subsegmentos são segmentos-α de nível 1 (ρ satisfaz 2.1.10-(2)); e as ocorrências imediatamente anterior a X, imediatamente posterior a X e a ponte de X, são todas ocorrências da mesma fórmula (ρ satisfaz 2.1.10-(3)).

O quadro completo é:

ρ= $(A\wedge B)_2$, $((A\wedge B)\wedge C)_3$, $(((A\wedge B)\wedge C)\wedge D)_4$, $((A\wedge B)\wedge C)_5$, $(A\wedge B)_6$, $(C\supset(A\wedge B))_7$, $(D\supset(C\supset(A\wedge B)))_8$, $(C\supset(A\wedge B))_9$, $(A\wedge B)_{10}$.
X=$((A\wedge B)\wedge C)_3$, $(((A\wedge B)\wedge C)\wedge D)_4$, $((A\wedge B)\wedge C)_5$, $(A\wedge B)_6$, $(C\supset(A\wedge B))_7$, $D\supset(C\supset(A\wedge B)))_8$, $(C\supset(A\wedge B))_9$.
φ= $A\wedge B$.
ρ_1= $((A\wedge B)\wedge C)_3$, $(((A\wedge B)\wedge C)\wedge D)_4$, $((A\wedge B)\wedge C)_5$.
ρ_2= $(C\supset(A\wedge B))_7$, $D\supset(C\supset(A\wedge B)))_8$, $(C\supset(A\wedge B))_9$.

2.1.10.2 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Dizemos que um segmento-α de nível *n* (*n*> 1) é *determinado* pela cadeia-φ de segmentos que ele contém.

(*b*) Quando dissermos que ρ é um segmento-α, sem especificar seu nível, estará tacitamente subentendido que ρ é um segmento que satisfaz ou 2.1.9, ou 2.1.10.

(*c*) Denotaremos o nível de um segmento-α ρ por $n(\rho)$.

(*d*) Dizemos que cada par simétrico de ρ, um segmento-α de nível *n*, que ocorre fora da cadeia X que determina ρ, é um *par-α de nível n*. Ou seja, os pares-α de nível *n* são os pares que satisfazem o item 1 da Definição 2.1.10.

(*e*) É fácil ver que se $\varphi\in\rho$ é ponte da cadeia X que determina ρ, então φ é conseqüência de regra de eliminação e premissa de regra de introdução.

2.1.10.3 COMENTÁRIOS:

Vamos retornar à derivação π do Exemplo 2.1.10.1. Temos em π duas fórmulas máximas que determinam dois segmentos-α de nível 1, cada um deles com uma ocorrência central e um par simétrico (par-α) em torno desta. Se reduzirmos estas duas fórmulas máximas, obtemos a seguinte derivação π':

$$\dfrac{C \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \qquad B}{A\wedge B}\,{\scriptstyle .1} \qquad C}{(A\wedge B)\wedge C}\,{\scriptstyle .2}}{A\wedge B}\,{\scriptstyle .5}\;\to \mathit{FM}}{C\supset(A\wedge B)}\,{\scriptstyle .6}}{\dfrac{A\wedge B}{A}\,{\scriptstyle .10}}\,{\scriptstyle .9}\;\to \mathit{FM}$$

Note que π’ tem duas fórmulas máximas, ambas previstas nos segmentos-α de nível 1 de π. Além disso, os dois segmentos-α de nível 1, determinados pelas duas fórmulas máximas de π’, só possuem as próprias *FM*s como elementos, pois a ocorrência imediatamente abaixo de $(A\wedge B)\wedge C$ não é premissa maior de regra de eliminação, e a ocorrência imediatamente acima de $C\supset(A\wedge B)$ não é conseqüência de regra de introdução. No entanto, se reduzirmos as duas *FM*s de π’, obtemos a seguinte derivação π”:

$$\pi'' \equiv \dfrac{\dfrac{A \qquad B}{A\wedge B}\,{\scriptstyle .1}}{A}\,{\scriptstyle .10}\;\to \mathit{FM}$$

, onde $A\wedge B$ é *FM* em π”.

Note que $A\wedge B$ é uma fórmula máxima de uma derivação à qual π se reduziu (através de 4 reduções), e nenhum segmento-α de nível 1 em π foi capaz de indicar que as ocorrências $(A\wedge B)_2$ e $(A\wedge B)_{10}$ iriam se “colapsar” em uma fórmula máxima.

Isso ocorreu porque em π temos dois segmentos-α de nível 1 separados por apenas uma ocorrência. Quando reduzimos completamente os dois segmentos-α, tivemos o “colapso” de três ocorrências em uma única, que se tornou fórmula máxima: a ocorrência imediatamente acima do primeiro segmento, a ocorrência entre os dois segmentos e a ocorrência imediatamente abaixo do segundo segmento.

O que este exemplo ilustra é que não apenas fórmulas máximas podem determinar pares de ocorrências que as reduções podem fazer colapsar em novas fórmulas máximas (pares-α). Seqüências de segmentos separados por ocorrências da mesma fórmula[17] (cadeias-

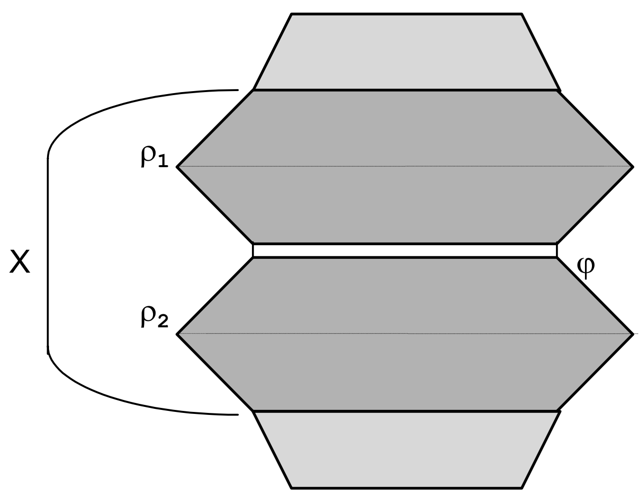
[17] Mesma a menos de parâmetros.

φ) também podem. É exatamente este tipo de situação que os segmentos-α de maior nível permitem descrever.

Podemos representar esquematicamente um segmento-α de nível 1 através de um hexágono, da seguinte maneira:

O centro, mais largo, representa a fórmula máxima que o determina. Como cada ocorrência da primeira metade é conseqüência de regra de introdução, o “comprimento”[18] das fórmulas vai sempre aumentando na primeira metade, até chegar à fórmula máxima no centro. Como as ocorrências da segunda metade são todas PM de regras de eliminação e ocorrências das mesmas fórmulas que as ocorrências da primeira metade, o “comprimento” das fórmulas na segunda metade vai diminuindo na mesma medida em que aumentou na primeira.

Expandindo este tipo de representação para segmentos-α de nível 2 temos, por exemplo:

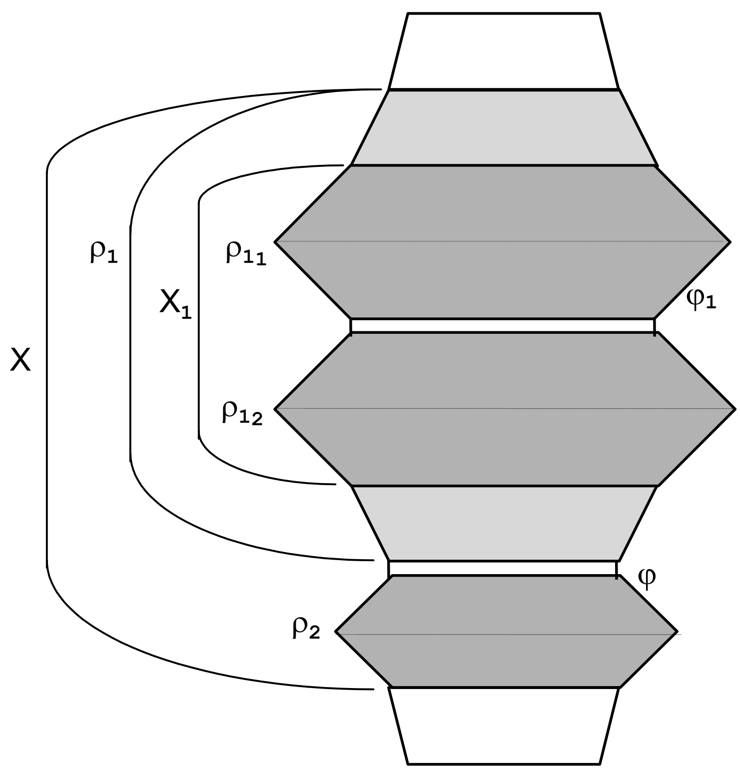


[18] Esta noção será introduzida formalmente mais adiante.

Cada hexágono mais escuro do centro representa um segmento-α de nível 1 que é subsegmento de X, a cadeia que determina o segmento. A lacuna entre os hexágonos representa ocorrência da ponte de X, e os dois trapézios das pontas, mais claros, representam as duas seqüências de ocorrências simétricas que ocorrem fora de X. A de cima formada por ocorrências conseqüências de introdução, e a de baixo por premissas maiores de eliminação. Cada par-α de nível 2 tem uma ocorrência no trapézio de cima e outra no de baixo.

De acordo com a Definição 2.1.10, um segmento-α de nível 3 é um segmento-α no qual pelo menos um dos subsegmentos da cadeia que o determina é segmento-α de nível 2.

Esquematicamente, teríamos algo como:



Com isso tudo acreditamos ter deixado clara a definição de segmento-α. Apresentaremos agora mais algumas definições e resultados básicos concernentes aos segmentos-α para, em seguida, de posse de todas essas ferramentas teóricas, fazermos uma explicação preliminar de como obteremos a atribuição numérica $o(\pi)$, e de porque temos afirmado que ela intuitivamente representa o número de todas as possíveis fórmulas máximas para uma derivação π.

2.1.11 DEFINIÇÃO: Ocorrência Pesada (OP_π) e

Ocorrência Candidata a Fórmula Máxima (CM_π)

Dizemos que uma ocorrência de fórmula φ em uma derivação π é uma *ocorrência pesada em π* (OP_π) se φ for premissa maior de regra de eliminação e pertencer a algum segmento-α de π.

Se φ for OP_π e não for FM_π, dizemos que φ é *ocorrência candidata a fórmula máxima* ou *candidata a máxima em π (CM_π).*

2.1.11.1 OBSERVAÇÃO:

Como toda fórmula máxima determina um segmento-α (ver Observação 2.1.9.1-(*c*)) e é premissa maior de regra de eliminação, então toda fórmula máxima é ocorrência pesada.

2.1.12 LEMA:

Para cada ocorrência pesada φ de uma derivação π temos uma e apenas uma ocorrência ψ em π que forma par-α com φ.

PROVA:

Existência:

Seja ρ o mais comprido segmento-α de menor nível ao qual φ pertence.

Se $n(\rho)= 1$, então o resultado é imediato pela Definição 2.1.9.

Se $n(\rho) > 1$, temos:

(*i*) φ não ocorre em nenhum subsegmento da cadeia X que determina ρ, pois senão ρ não seria o segmento-α de menor nível ao qual φ pertence; e

(*ii*) φ não é ponte de X, pois φ é PM de eliminação, e toda ponte de X é premissa de introdução (ver 2.1.10.2-(*e*)).

Logo, por (*i*) e (*ii*) temos que φ ocorre fora da cadeia X que determina ρ, e portanto o resultado é imediato por 2.1.10-(1).

Unicidade:

A unicidade é garantida pela unicidade dos segmentos-α que é garantida pela unicidade das aplicações de regras. Não existem dois mais compridos segmentos-α de menor nível ao qual φ pertence. Isto pode ser provado com uma indução dupla, no nível dos segmentos-α e na "distância" entre φ e a fórmula máxima ou cadeia que determina ρ. ♦

2.1.13 DEFINIÇÃO: Ocorrência Associada à Ocorrência Pesada - $ass_\pi(\varphi)$

À ocorrência ψ, em uma derivação π, que faz par-α com a ocorrência pesada φ, chamamos *ocorrência associada* a φ em π e denotamos por: $\psi = ass_\pi(\varphi)$.

2.1.13.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Todos os pares-α de qualquer segmento-α são formados por uma ocorrência pesada e uma ocorrência associada a esta. Portanto, se $\psi = ass_\pi(\varphi)$, então φ e ψ, a menos de parâmetros, são ocorrências da mesma fórmula, onde ψ é conseqüência de regra de introdução e φ é premissa maior de eliminação.

(*b*) Se φ é fórmula máxima em π, então $\varphi = ass_\pi(\varphi)$. Ou seja, φ é ocorrência associada a si mesma em π.

(*c*) Se $\psi = ass_\pi(\varphi)$, onde φ é CM_π, então ψ ocorre acima de φ em π.

(*d*) Os pares-α de uma derivação, com suas ocorrências pesada e associada, representam os pares de ocorrências que podem se colapsar em uma fórmula máxima quando realizamos reduções.

(*e*) É fácil ver, pelas Definições 2.1.9 e 2.1.10, que se $\psi = ass_\pi(\varphi)$, então, no próprio segmento-α em que estão φ e ψ, existe pelo menos uma *FM* que ocorre entre φ e ψ, ou seja, acima de φ e abaixo de ψ.

Seguem agora mais duas definições, que serão úteis nos esclarecimentos que virão a seguir.

2.1.14 DEFINIÇÃO: Comprimento de uma Derivação - $l(\pi)$

O *comprimento* de uma derivação π, denotado por $l(\pi)$, é um número natural que representa o número de ocorrências de fórmulas de π. Formalmente:

(1) Se π é uma fórmula, $l(\pi)$= 1;

(2) Se π é $\dfrac{\pi_1 \ \cdots \ \pi_n}{A}$, $l(\pi)= l(\pi_1)+ ...+ l(\pi_n)+ 1$.

2.1.15 DEFINIÇÃO: Fórmula Máxima Multiplicativa

Se φ é uma fórmula máxima em π e a redução que se aplica a φ é a $\supset$-redução-1 (Definição 1.4.2), dizemos que φ é *fórmula máxima multiplicativa* em π.

2.1.15.1 EXEMPLO:

$$\pi \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ A\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[A]^k \\ \pi_2 \\ B\end{matrix}}{A \supset B}k}{\begin{matrix}B \\ \pi_3\end{matrix}} \quad \rightarrow \quad \pi' \equiv \begin{matrix}\pi_1 \\ [A] \\ \pi_2 \\ B \\ \pi_3\end{matrix} \quad \Rightarrow \quad A \supset B \text{ é } FM \text{ multiplicativa de } \pi.$$

2.1.16 COMENTÁRIO: Esquema Geral do Método de Prova

Se analisarmos as reduções descritas em 1.4 que se aplicam a C', veremos que, com exceção da Redução 1.4.2, todas as demais possuem as seguintes propriedades:

(1) a redução imediata obtida a partir delas tem comprimento estritamente menor que a derivação original;

(2) só alteram as ocorrências da derivação exatamente no local da *FM* eliminada.

Se π for uma derivação na qual nenhuma redução de nenhuma das seqüências de redução para π é uma $\supset$-redução-1 (do tipo 1.4.2), então, $l(\pi)$ é um limitante para o comprimento de todas as seqüências de redução para π, pois a cada redução que fizermos, como nenhuma é do tipo 1.4.2, o comprimento da redução imediata sempre diminuirá. Chamemos a uma derivação com esta característica de *derivação estrela*[19].

Com a definição de segmento-α que apresentamos, temos uma maneira de saber se uma derivação qualquer π é estrela ou não, basta que para isso olhemos para todos os

[19] Mais adiante apresentaremos a definição formal.

pares-α de π. Em cada par-α já temos antecipadamente a informação do tipo da fórmula máxima em que ele pode se tornar.

Seja (ψ,φ) um par-α de π, onde φ é OP_π e $\psi = ass_\pi(\varphi)$ e considere as seguintes condições:

(*a*) A regra de eliminação da qual φ é premissa maior é ($\supset$E);

(*b*) A premissa menor da regra em que φ é premissa maior não é hipótese aberta em π;

(*c*) A regra de introdução da qual ψ é conseqüência corta alguma top-fórmula de π.

Chamamos de *ocorrência multiplicativa* uma OP_π φ que satisfaça essas três condições. Se isso ocorrer, então a fórmula máxima em que o par-α (ψ,φ) pode se tornar será do tipo que é reduzida por 1.4.2 (uma *FM* multiplicativa). Veja:

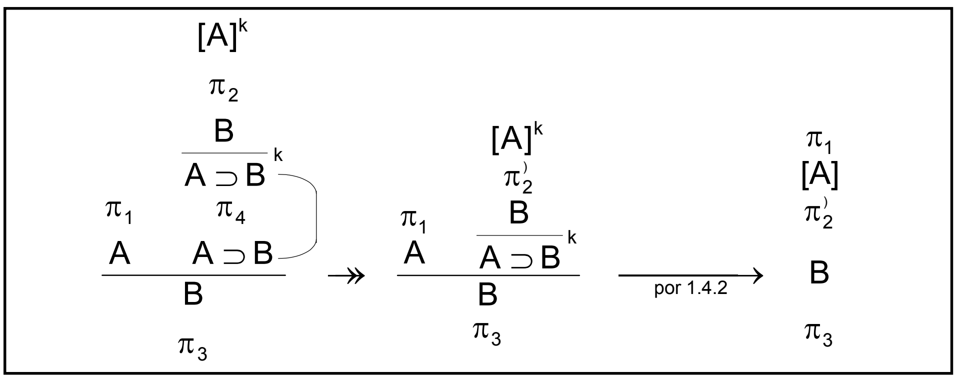


Figura 2.1.16.1

Se nenhum dos pares-α de π satisfizer as condições (*a*) a (*c*) acima, então π é uma derivação estrela na qual nenhuma redução de nenhuma seqüência de redução é do tipo 1.4.2. Isto é verdade porque, neste caso, os pares-α de π representam todas as possíveis fórmulas máximas de π, já que as reduções distintas de 1.4.2 só podem produzir novas *FM*s nas imediações da *FM* reduzida, e são exatamente essas possíveis *FM* que os pares-α identificam.

Temos então, através dos segmentos-α, uma maneira não só de saber se uma derivação é estrela, mas também de saber o número de todas as suas possíveis fórmulas máximas, caso ela o seja.

Diante disso, a idéia da atribuição numérica $o(\pi)$ foi a seguinte: vamos definir um processo para transformar uma derivação π qualquer em uma derivação estrela π^*, na qual poderemos identificar todas as possíveis fórmulas máximas de π através dos pares-α de π^*. Este processo basicamente consiste em identificar os pares-α que podem se tornar fórmulas máximas multiplicativas (os que satisfazem as condições (*a*) a (*c*) acima), e fazer a seguinte operação:

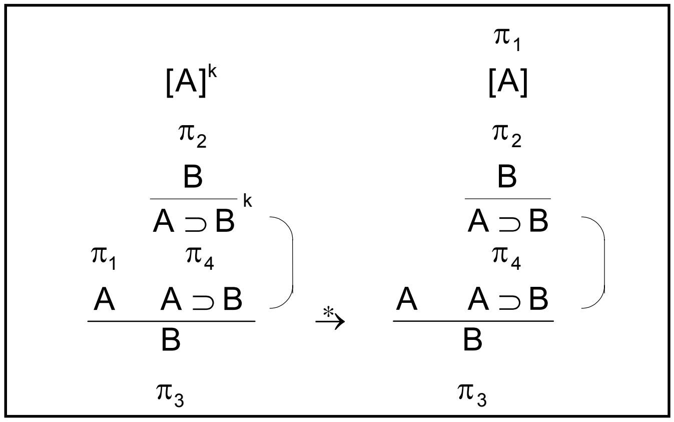


Figura 2.1.16.2

π_1, que seria "multiplicado" na Redução 1.4.2 quando o par-α ($A \supset B$, $A \supset B$) se tornasse uma *FM*, já é multiplicado exatamente para o lugar em que ele seria na redução. Chamemos esta operação de *multiplicação-**.[20]

Fazendo isso, ($A \supset B$, $A \supset B$) continua sendo um par-α, só que agora um par-α que não satisfaz a condição (*b*), e a fórmula máxima na qual ele pode se tornar não mais é reduzida por 1.4.2, mas por 1.4.3. Veja:

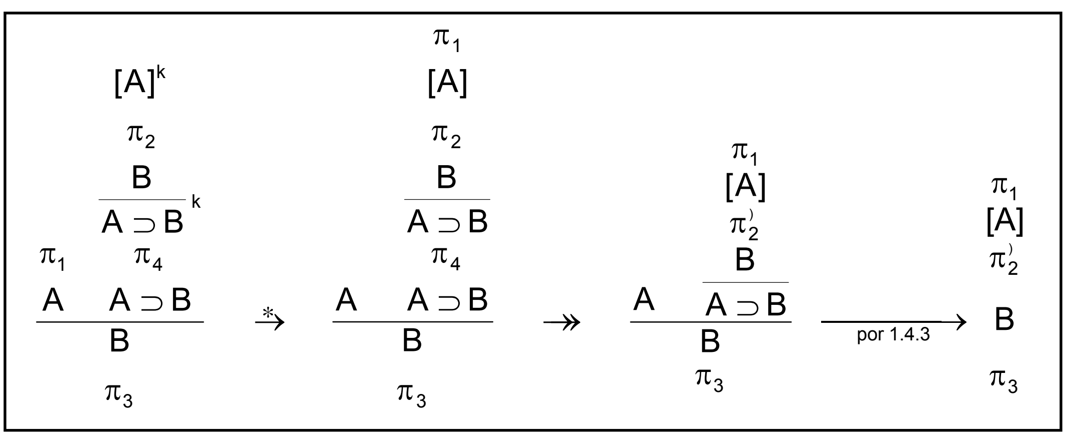


Figura 2.1.16.3

[20] Definiremos formalmente mais adiante.

Note também que a derivação final, após a redução da fórmula máxima em que o par-α se tornou, é a mesma, quer tenhamos feito ou não a multiplicação-* no par-α (ver Figura 2.1.16.1).

Com isso, queremos mostrar que a alteração provocada pela multiplicação-* é apenas a antecipação de um passo que a redução faria. Ela realiza uma parte do trabalho que a redução faria, sem no entanto eliminar a possibilidade do par-α se tornar uma *FM*.

Os pares-α dos segmentos-α não conseguem identificar todas as possíveis fórmulas máximas de uma derivação não-estrela justamente porque a Redução 1.4.2 altera as ocorrências da derivação não apenas no local da fórmula máxima eliminada, mas também em todos os pontos onde π_1 é "multiplicado". Quando realizamos uma multiplicação-*, estamos justamente provocando esta alteração na derivação, que pode proporcionar o surgimento de novas *FM*s e, conseqüentemente, de novos pares-α, sem no entanto eliminar nenhuma *FM* nem par-α da derivação original.

Dessa forma, o trabalho para obtenção da atribuição numérica $o(\pi)$ consiste em provar que, de uma maneira controlada, conseguimos, através de um **número finito** de multiplicações-*, transformar uma derivação qualquer π em uma derivação estrela correspondente π^*, na qual podemos agora "contar" o número de todas as possíveis fórmulas máximas de π, apenas contando o número de todos os pares-α de π^*. Com isso, fazemos $o(\pi)$ ser o número de pares-α de π^*.

Se provarmos que a cada derivação π temos uma e apenas uma derivação π^* associada, a qual obtemos através de um número finito de multiplicações-*, temos que o número de pares-α de π^* ($o(\pi)$) representa uma atribuição numérica única e finita para cada derivação π que, pelo que discutimos acima, deve representar o número de todas as possíveis fórmulas máximas de π.

Podemos então dividir o trabalho restante para a obtenção do ordinal natural da seguinte forma:

(*a*) Formalizar esta definição de $o(\pi)$ provando que é uma atribuição unívoca e finita para toda derivação π.

(*b*) Provar que $o(\pi)$ diminui com as reduções ($\pi \to \pi' \Rightarrow o(\pi') < o(\pi)$) e, portanto, é um ordinal natural para C'.

(c) Provar que $o(\pi)$ é igual ao comprimento da pior seqüência de redução para toda derivação π ($o(\pi)= lp(\pi)$) e, portanto, que é o menor ordinal natural para C'.

(d) Provar o Teorema de Normalização Forte para C'.

O Item (a) é desenvolvido neste capítulo, enquanto que os Itens (b), (c) e (d) realizaremos no capítulo seguinte.

Diante do discutido acima podemos sintetizar o processo de obtenção de $o(\pi)$ da seguinte maneira: dada uma derivação π obteremos uma seqüência finita de multiplicações-*, $\pi \equiv \pi^{\bullet 0} \overset{*}{\to} \pi^{\bullet 1} \overset{*}{\to} \pi^{\bullet 2} \overset{*}{\to} \ldots \overset{*}{\to} \pi^{\bullet n} \equiv \pi^*$, onde π^* é uma derivação estrela (que não possui ocorrências multiplicativas). $o(\pi)$ é então definido como o número de ocorrências pesadas de π^*, que pelo que discutimos deve representar o número de todas as possíveis fórmulas máximas para π.

A prova de que $o(\pi)$ assim definido é único e finito para cada derivação π é obtida através de uma adaptação do método de Prawitz para a demonstração do Teorema de Normalização Fraca para C' [21], que consiste em propor um critério de escolha para a ocorrência multiplicativa que deve ser multiplicada a cada passo da seqüência de multiplicações-*. O critério que adotamos é o seguinte:

(a) Chamamos de $T(\pi)$ a ocorrência multiplicativa de π de maior comprimento (maior número de conectivos) cuja ocorrência associada ocorra mais acima e à direita em π.

(b) Cada $\pi^{\bullet i}$ ($1 < \iota \leq n$) da seqüência estrela é obtido pela multiplicação-* de $T(\pi^{\bullet i-1})$.

Chamemos de $g(\pi)$ o comprimento máximo das OM_π e de $ng(\pi)$ a quantidade de OM_π com comprimento máximo (igual a $g(\pi)$). Através do critério de escolha de $T(\pi)$ provamos que se $\pi^{\bullet i} \overset{*}{\to} \pi^{\bullet i+1}$ pela multiplicação-* de $T(\pi)$, então o par ($g(\pi^{\bullet i})$, $ng(\pi^{\bullet i})$) é maior que o par ($g(\pi^{\bullet i+1})$, $ng(\pi^{\bullet i+1})$).[22] Dessa forma, uma indução dupla em ($g(\pi)$, $ng(\pi)$)

---

[21] Cf. **Prawitz[1965]**, p. 40.

[22] Estamos considerando que $(a_1, b_1) > (a_2, b_2)$ se $a_1 > a_2$, ou se $a_1 = a_2$ e $b_1 > b_2$.

prova a finitude desta seqüência de multiplicações-*, que termina em uma derivação estrela π^*.

Mas se π^* foi obtido de π através de um número finito de operações finitárias (as multiplicações-*), então π^* tem comprimento finito, e portanto um número finito de ocorrências pesadas. Como $o(\pi)$ é definido como o número de ocorrências pesadas de π^*, temos garantida a finitude da atribuição $o(\pi)$.

Como a cada derivação π só podemos ter um $T(\pi)$ relacionado, a seqüência de multiplicações estrela que levou a π^* é única para cada derivação π. Assim, a cada derivação π temos um único π^* associado e, portanto, um único $o(\pi)$.

Esperamos, com todas essas considerações, que só pudemos fazer após termos introduzido as noções mais fundamentais, apenas ter esclarecido o leitor sobre o caminho que adotamos para a obtenção deste resultado. Seguimos agora com a exposição formal deste argumento.

2.1.17 DEFINIÇÃO: Grau de uma fórmula - *gr*(φ)

O *grau de uma fórmula φ*, denotado por $gr(\varphi)$, é um número natural definido indutivamente da seguinte maneira:

(1) Se φ é fórmula atômica, então $gr(\varphi)= 0$;

(2) Se φ é $(\mathsf{A}\supset\mathsf{B})$ ou $(\mathsf{A}\wedge\mathsf{B})$, então $gr(\varphi)= gr(\mathsf{A})+ gr(\mathsf{B})+ 1$;

(3) Se φ é $(\forall x\mathsf{A}x)$, então, $gr(\varphi)= gr(\mathsf{A})+ 1$.

Ou seja, o grau de uma fórmula φ é o número de ocorrências de conectivos em φ (o comprimento de φ).

Antes de terminarmos esta seção demonstraremos dois teoremas diretamente relacionados com a definição de segmento-α, que relacionam o comprimento de ocorrências de segmentos-α com suas posições nestes segmentos. Estas relações podem facilmente ser percebidas, geometricamente, na representação esquemática que sugerimos para os segmentos-α em 2.1.10.3. Estes teoremas serão úteis para a demonstração de que todas as novas ocorrências pesadas que podem surgir da multiplicação de $\mathrm{T}(\pi)$ têm grau (comprimento) estritamente menor que o comprimento da ocorrência multiplicada ($\mathrm{T}(\pi)$).

2.1.18 TEOREMA:

Se $\rho = A_1, ..., A_m$ é um segmento-α de nível 1, então toda ocorrência φ em ρ é tal que: $gr(\varphi) \geq gr(A_1)$.

PROVA:

Imediata pela Definição 2.1.9. ♦ [23]

2.1.19 TEOREMA:

Sejam $\rho = A_1, ..., A_m$ um segmento-α de nível maior que 1 e $X = \varphi;\rho_1, ..., \rho_n$ a cadeia que determina ρ. Temos que:

(1) Toda ocorrência ψ de ρ que não está em X é tal que:

$gr(A_1) \leq gr(\psi) \leq gr(\varphi)$;

(2) Toda ocorrência ψ_i de cada ρ_i $(1 \leq i \leq n)$ é tal que $gr(\psi_i) > gr(\varphi)$; e

(3) Toda ocorrência ψ de X é tal que $gr(\psi) \geq gr(\varphi)$.

PROVA:

Item (1)

Imediata pela Definição 2.1.10. □ [24]

Item (2)

Provaremos por indução em $n(\rho)$.

BASE: $n(\rho) = 2$ (por hipótese do teorema $n(\rho) > 1$).

ρ então é do tipo: $\rho = A_1, ..., A_i, X, A_{m-i+1}, ..., A_m$, onde X é a cadeia de segmentos que determina ρ.

Podemos escrever cada ρ_i $(1 \leq i \leq n)$ de X como: $\rho_i = B_{i1}, ..., B_{i_n}$.

(*i*) Como $n(\rho) = 2$, então, pela Definição 2.1.10-(2), para todo i, $1 \leq i \leq n$, $n(\rho_i) = 1$.

Pela Definição 2.1.10-(3), sabemos que A_i e A_{m-i+1} são ambas ocorrências de φ.

(*ii*) Portanto, cada ρ_i de X tem como ocorrência imediatamente acima e imediatamente abaixo uma ocorrência de φ.

---

[23] Ver representação esquemática dos segmentos-α de nível 1 nos Comentários 2.1.10.3.

[24] Ver representação esquemática dos segmentos-α de nível maior que 1 nos Comentários 2.1.10.3.

(*iii*) Por (*i*) e pelo Teorema 2.1.18, temos que toda ocorrência ψ_i, de cada ρ_i, é tal que $gr(\psi_i) \geq gr(B_{i1})$ para todo i ($1 \leq i \leq n$).

(*iv*) Por (*ii*) e pela Definição 2.1.9, temos que B_{i1} é conseqüência de regra de introdução na qual uma ocorrência de φ é premissa. Logo, $gr(B_{i1}) > gr(\varphi)$, para todo i ($1 \leq i \leq n$).

Portanto, por (*iii*) e (*iv*), temos que toda ocorrência ψ_i de cada ρ_i é tal que $gr(\psi_i) > gr(\varphi)$.

PASSO:

HI: Seja μ um segmento-α e $X_\mu = \varphi_\mu$; $\mu_1, \ldots, \mu_s$ a cadeia que determina μ. Se $n(\mu) < n(\rho)$, então toda ocorrência ξ_μ de cada μ_i ($1 \leq i \leq s$) é tal que $gr(\xi_\mu) > gr(\varphi_\mu)$.

Como no caso da base temos:

ρ é do tipo: $\rho = A_1, \ldots, A_i, X, A_{m-i+1}, \ldots, A_m$, onde X é a cadeia de segmentos que determina ρ.

Podemos escrever cada ρ_i ($1 \leq i \leq n$) de X, onde $n(\rho_i) > 1$, como:

$\rho_i = B_{i1}, \ldots, B_{ir}, X_i, B_{in-ir+1}, \ldots, B_{in}$.

Para todo i, $1 \leq i \leq n$, considere:

(*a*) ψ_i uma ocorrência de algum ρ_i, tal que $n(\rho_i) > 1$, que ocorre fora da cadeia X_i.

(*b*) ξ_i uma ocorrência de algum ρ_i, tal que $n(\rho_i) > 1$, que ocorre na cadeia X_i.

(*c*) ζ_i uma ocorrência qualquer de algum ρ_i, tal que $n(\rho_i) > 1$.

(*d*) ζ'_i uma ocorrência qualquer de algum ρ_i, tal que $n(\rho_i) = 1$.

(*e*) ζ''_i uma ocorrência qualquer de algum ρ_i.

(*f*) φ_i a fórmula das pontes da cadeia de X_i.

Para provar o Item (2), temos então que provar que $gr(\zeta''_i) > gr(\varphi)$.

Pela Definição 2.1.10-(2), $n(\rho_i) < n(\rho)$ para todo i, $1 \leq i \leq n$.

(*v*) Portanto, para cada ρ_i, tal que $n(\rho_i) > 1$, vale a hipótese indutiva.

(*vi*) Por (*v*) temos que $gr(\xi_i) > gr(\varphi_i)$.

(*vii*) Pelo Item (1), temos que $gr(\psi_i) \geq gr(B_{i1})$.

(*viii*) Mas, para todo i, $1 \leq i \leq n$, B_{i1} é conseqüência de introdução da qual uma ocorrência de φ é premissa. Portanto, $gr(B_{i1}) > gr(\varphi)$.

(*ix*) Logo, por (*vii*) e (*viii*) temos que $gr(\psi_i) > gr(\varphi)$.

(x) Pelo Item (1) temos também que $gr(\psi_i) \leq gr(\varphi_i)$.

(xi) Portanto, por (vi), (ix) e (x) temos que $gr(\xi_i) > gr(\varphi)$.

(xii) Por (ix), (xi) e por (a), (b) e (c) temos então que: $gr(\zeta_i) > gr(\varphi)$.

($xiii$) Pelo Teorema 2.1.18 temos que $gr(\zeta'_i) > gr(B_{i1})$.

(xiv) Logo, por ($viii$) e ($xiii$), temos que $gr(\zeta'_i) > gr(\varphi)$.

Portanto, por (xii), (xiv) e por (c), (d) e (e), temos que $gr(\zeta'') > gr(\varphi)$. □

Item (3)

Como as únicas ocorrências de X além das ocorrências de ρ_i são ocorrências de φ, ponte de X, temos, pelo Item (2), que toda ocorrência ψ de X é tal que $gr(\psi) \geq gr(\varphi)$. ♦

§2 Subárvores

Terminadas as definições e resultados estritamente relacionados com segmentos-α, vamos nesta seção, continuando nosso caminho para a definição formal de $o(\pi)$, apresentar definições e resultados que relacionam os segmentos-α com as derivações e com partes específicas das derivações em que eles ocorrem. O principal conceito que introduziremos é o conceito de subárvore, o qual utilizaremos para nos referir a partes das derivações que também tenham estrutura de árvore.

2.2.1 DEFINIÇÃO: Quase-Derivação

Uma *quase-derivação* é um encadeamento de aplicações de regras de inferência em forma de árvore e difere de uma derivação apenas por não precisar respeitar as restrições 1.2.6 para aplicação das regras de inferência.

2.2.1.1 OBSERVAÇÕES:

(a) Note que toda derivação é uma quase-derivação.

(b) Para simplificação de notação, quando for dispensável a distinção entre derivação e quase-derivação, poderemos tratar quase-derivações como derivações.

2.2.2 DEFINIÇÃO: Subárvore Completa - $\nabla_\pi(\mathsf{A})$

Seja A uma ocorrência de fórmula em uma derivação π. Dizemos que A e todas as ocorrências de fórmulas de π que estão acima de A representam uma *subárvore completa* de π. Dizemos que esta subárvore completa é *determinada* por A, e denotamos $\nabla_\pi(\mathsf{A})$.

Na definição seguinte, queremos caracterizar formalmente o conceito de subárvore como sendo qualquer parte de uma derivação que também tenha a estrutura de árvore.

2.2.3 DEFINIÇÃO: Subárvore

Seja π uma derivação. Definimos *subárvore*, indutivamente, da seguinte maneira:

(1) Uma ocorrência de fórmula A em π é uma subárvore de π;

(2) Se π_1 é uma subárvore de π e B é uma top-fórmula de π_1, então, π_1^{B}, obtido de π_1 acrescentando-se toda a regra que gerou B a π_1, é uma subárvore de π;

(3) As subárvores são obtidas apenas por (1) e (2).

2.2.3.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Acrescentar toda a regra que gerou B a π_1 significa acrescentar a π_1 as premissas de B, o traço da regra e os sinais auxiliares.

(*b*) A diferença entre subárvore completa e subárvore, é que a segunda não precisa conter todas as ocorrências acima da ocorrência que a determina. Pode terminar antes das top-fórmulas de π. Por exemplo, se π é do tipo: $\pi \equiv \begin{matrix} \pi_1 \\ \mathsf{A} \\ \pi_2 \end{matrix}$, então π_1 e π_2 são subárvores de π, mas apenas π_1 é subárvore completa. Neste caso, $\pi_1 \equiv \nabla_\pi(\mathsf{A})$.

(*c*) Uma subárvore, apesar de ter estrutura de árvore, pode não satisfazer as restrições 1.2.6. Portanto, subárvores são quase-derivações.

(*d*) Dizemos que a aplicação de uma regra *está* ou *ocorre integralmente* em uma subárvore quando as premissas e a conclusão da regra ocorrem na subárvore.

2.2.4 DEFINIÇÃO: Ocorrência de Ligação

Dizemos que uma ocorrência A em uma derivação π é uma *ocorrência de ligação* entre duas subárvores de π, quando A for ocorrência de ambas as subárvores, sendo top-fórmula de uma e raiz da outra. Dizemos que A é *ligação para cima* da subárvore na qual é top-fórmula e *ligação para baixo* da subárvore na qual é raiz.

2.2.4.1 EXEMPLO:

Se π for da forma: $\pi \equiv \begin{matrix} \pi_1 \\ A \\ \pi_2 \end{matrix}$, então A é ocorrência de ligação entre π_1 e π_2, sendo ligação para cima de π_2 e ligação para baixo de π_1.

2.2.5 DEFINIÇÃO: Subárvores Ligadas

Dizemos que duas subárvores de uma derivação são *subárvores ligadas*, quando existe uma ocorrência de ligação entre elas.

2.2.6 DEFINIÇÃO: Subárvores Disjuntas

Dizemos que duas subárvores de uma derivação são *subárvores disjuntas*, quando a única ocorrência comum entre elas, se houver, for uma ocorrência de ligação.

Seja π uma derivação e $\pi_1, \ldots, \pi_m$ subárvores de π. Dizemos que $\pi_1, \ldots, \pi_m$ são *subárvores disjuntas* em π, quando, para todo i, j tal que $(1 \leq i, j \leq m)$ e $(i \neq j)$, π_i e π_j forem disjuntas.

Note que subárvores ligadas são, portanto, subárvores disjuntas.

2.2.7 DEFINIÇÃO: Função Posição $pos_\pi(\varphi)$

Seja π uma derivação e φ uma ocorrência de fórmula em π. Definimos a *função posição* das ocorrências da derivação π, como uma função recursiva dada pelas seguintes equações de recursão:

(1) $pos_\pi(r(\pi))= 1$

(2) $pos_\pi(\mathsf{D}_\pi(\varphi))= pos_\pi(\varphi)+ 1$

(3) $pos_\pi(\mathsf{E}_\pi(\varphi))= pos_\pi(\varphi)+ l(\nabla_\pi(\mathsf{D}_\pi(\varphi)))+ 1$.

2.2.7.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) A função posição associa univocamente cada ocorrência de fórmula de uma derivação π a um número natural. A equação (1) garante que a raiz tem posição mínima; a equação (2) garante que a premissa direita de uma ocorrência φ tem como posição o sucessor da posição de φ, e a equação (3), que a premissa esquerda de φ tem como posição o sucessor da posição de φ, somado com o comprimento da subárvore completa da premissa direita de φ.

(*b*) A função posição dá uma definição formal do que informalmente chamamos de "ocorrência mais à direita de baixo para cima" de uma derivação. Se $pos_\pi(\varphi) < pos_\pi(\psi)$, então, dizemos que φ ocorre mais à direita, de baixo para cima, que ψ, em π.

(*c*) Note, pela Definição 2.2.7 e pelas Observações 2.1.1.1-(*b*) e 2.1.3.1-(*b*) que:

$$pos_\pi(\varphi) < pos_\pi(\psi) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \psi \text{ ocorre acima de } \varphi \text{ em } \pi\text{, ou} \\ \psi \text{ ocorre à esquerda de } \varphi \text{ em } \pi. \end{array}$$

2.2.8 NOTAÇÕES:

Considere a derivação $\begin{array}{c}[A]\\ \pi_1\end{array}$ e a seqüência de derivações $\begin{array}{c}\pi_2\\ A\end{array}$, ..., $\begin{array}{c}\pi_n\\ A\end{array}$, onde n-1 é igual ao número de hipóteses A destacadas em $\begin{array}{c}[A]\\ \pi_1\end{array}$.

(*a*) A notação $\begin{array}{c}\underbrace{\pi_2 \ \dots \ \pi_n}\\ [A]\\ \pi_1\end{array}$ denota a derivação obtida através da substituição de cada hipótese destacada de $\begin{array}{c}[A]\\ \pi_1\end{array}$ por uma derivação $\begin{array}{c}\pi_j\\ A\end{array}$, $(2 \leq j \leq n)$, de tal modo que hipóteses destacadas com <u>posições</u> (Definição 2.2.7) menores foram substituídas por derivações com subíndices maiores.

(*b*) Se o número de hipóteses A destacadas em $\begin{array}{c}[A]\\ \pi_1\end{array}$ for maior que n-1, usamos a notação $\begin{array}{c}\underbrace{[\pi_2]\dots[\pi_n]}\\ [A]\\ \pi_1\end{array}$, onde $[\pi_i]$ $(2 \leq i \leq n)$ significa que pode haver uma ou mais cópias de π_2 em hipóteses destacadas A.

(*c*) Se todas as derivações substituídas em $\begin{array}{c}[A]\\ \pi_1\end{array}$ forem cópias da mesma derivação $\begin{array}{c}\pi_2\\ A\end{array}$, usamos a notação $\begin{array}{c}\pi_2\\ [A]\\ \pi_1\end{array}$, compatível com a apresentada em 1.3.1-(*i*).

2.2.8.1 OBSERVAÇÃO:

Note que, dada uma derivação π, tal que $l(\pi)> 1$, sempre podemos escrever π na forma $\pi \equiv \begin{array}{c} \underbrace{\pi_2 \ \dots \ \pi_n}_{[A]} \\ \pi_1 \end{array}$, para alguma fórmula A com ocorrências em π e algum n.

2.2.9 DEFINIÇÃO: Ocorrência Pesada Local

Seja π uma derivação, π_1 uma subárvore de π e φ uma ocorrência em π_1, distinta de $r(\pi_1)$, tal que φ é OP_π. Dizemos que φ é uma *ocorrência pesada local a π_1 em π*, ou φ é uma $OPL_\pi(\pi_1)$, se, considerando π_1 isoladamente, φ é $OP_{\pi 1}$.

2.2.9.1 OBSERVAÇÕES

(*a*) φ é $OPL_\pi(\pi_1)$ quando existe um segmento-α totalmente contido em π_1 no qual φ é ocorrência pesada. Pelas Definições 2.1.9 e 2.1.10, isso é o mesmo que dizer que todas as ocorrências pertencentes à regra em que φ é premissa maior, $\psi= ass_\pi(\varphi)$ e as premissas de ψ ocorrem todas em π_1.

(*b*) Quando φ é OP_π e não é $OP_{\pi 1}$, dizemos que φ é *ocorrência pesada não-local* a π_1 em π, ou, φ é $OPnL_\pi(\pi_1)$.

(*c*) Denotaremos o número de ocorrências que são $OPnL_\pi(\pi_1)$ por: $nl_\pi(\pi_1)$.

(*d*) Note que se φ for $r(\pi_1)$ e OP_π, não estamos considerando φ nem como $OPL_\pi(\pi_1)$, nem como $OPnL_\pi(\pi_1)$.

Apresentaremos agora alguns resultados importantes envolvendo as noções já introduzidas.

O teorema seguinte estabelece algumas propriedades simples envolvendo segmentos-α e subárvores. Os itens 1 a 4 estabelecem propriedades triviais e facilmente visualizáveis. O item 5 estabelece que o grau da ocorrência de ligação de uma subárvore é um limite superior para o grau de todas as ocorrências pesadas não locais a esta subárvore. Este resultado será útil para provar que as novas ocorrências multiplicativas que uma multiplicação-* pode criar têm grau estritamente menor que a ocorrência multiplicativa multiplicada.

2.2.10 TEOREMA:

Considere $\pi \equiv \begin{array}{c}\pi_1 \\ \mathsf{A} \\ \pi_2\end{array}$. Então:

(1) $nl_\pi(\pi_1)= 0$ (Não existe nenhuma $OPnL_\pi(\pi_1)$);

(2) φ é $OPnL_\pi(\pi_2) \Leftrightarrow \varphi$ ocorre em π_2 e $\psi= ass_\pi(\varphi)$ ocorre em π_1;

(3) Se φ é $OPnL_\pi(\pi_2)$, então φ pertence a um segmento-α ρ que possui a ocorrência A (ligação entre π_1 e π_2);

(4) Se A não pertence a nenhum segmento-α de π, então $nl_\pi(\pi_2)= 0$;

(5) Se φ é $OPnL_\pi(\pi_2)$, então: $gr(\varphi) \leq gr(\mathsf{A})$;

<u>PROVA</u>:

Item (1)

Como π_1 é uma subárvore completa de π, então, tudo o que ocorre acima de qualquer ocorrência de π_1 está em π_1.

Portanto, para toda OP_π que ocorre em π_1 temos que a regra que gera sua ocorrência associada ocorre também em π_1.

Logo, pela Observação 2.2.9.1-(*a*), a única forma de uma OP_π que ocorre em π_1 não ser $OP_{\pi 1}$ é quando a regra na qual esta OP_π é premissa maior não está integralmente em π_1. Mas isso só pode acontecer com $r(\pi_1)$.

Como $r(\pi_1)$ não é nem $OPL_\pi(\pi_1)$, nem $OPnL_\pi(\pi_1)$ (ver 2.2.9.1-(*d*)), então não existe $OPnL_\pi(\pi_1)$, ou seja, $nl_\pi(\pi_1)= 0$. □

Item (2)

•($\Rightarrow$)

Como φ é $OPnL_\pi(\pi_2)$ é claro que φ ocorre em π_2.

Provaremos que $\psi= ass_\pi(\varphi)$ ocorre em π_1 por absurdo.

<u>Hip. do Absurdo</u>: $\psi= ass_\pi(\varphi)$ não ocorre em π_1.

Como ψ não ocorre em π_1 e A, ocorrência de ligação entre π_1 e π_2, ocorre também em π_1, então ψ não é A. Logo:

(*i*) ψ ocorre em π_2 e não é A.

(*ii*) Como $\psi= ass_\pi(\varphi)$, então φ ou é a mesma ocorrência que ψ ou ocorre abaixo de ψ.

Como A não ocorre abaixo de nenhuma ocorrência de π_2, já que A é top-fórmula de π_2, por (*i*) e (*ii*) temos:

(*iii*) φ também não é A.

(*iv*) Além disso, a única ocorrência de π_2 cuja regra não está integralmente em π_2 é A, pois A é a única ligação de π_2.

Como, por (*i*) e (*iii*), nem φ nem ψ são A, então, pela Observação 2.2.9.1-(*a*), φ é $OPL_\pi(\pi_2)$, o que é um absurdo pois por hipótese φ é $OPnL_\pi(\pi_2)$.

Portanto, descartamos a Hip. do Absurdo e temos:

φ é $OPnL_\pi(\pi_2) \Rightarrow \varphi$ ocorre em π_2 e $\psi = ass_\pi(\varphi)$ ocorre em π_1.

•($\Leftarrow$)

Se φ ocorre em π_2 e $\psi = ass_\pi(\varphi)$ ocorre em π_1, então não existe segmento-α totalmente definido em π_2 que possua φ e ψ como ocorrências, e, portanto, pela Definição 2.2.9, temos que φ é $OPnL_\pi(\pi_2)$. □

Item (3)

Como A é a única ligação entre π_1 e π_2, então o resultado é trivial, pelo Item (2). □

Item (4)

Trivial, utilizando o Item (3). □

Item (5)

φ é $OPnL_\pi(\pi_2) \Rightarrow_{\text{Item 2}} \varphi$ ocorre em π_2 e $\psi = ass_\pi(\varphi)$ ocorre em π_1

Vamos provar que:

φ ocorre em π_2 e $\psi = ass_\pi(\varphi)$ ocorre em $\pi_1 \Rightarrow gr(\varphi) \leq gr(A)$.

Seja $\rho = B_1, \ldots, B_m$ o mais comprido segmento-α de menor nível do qual (ψ,φ) é par-α.

Temos em ρ a seguinte situação:

$\rho = B_1, \ldots, B_r, \ldots, B_i, \ldots, B_{m-i+1}, \ldots, B_{m-r+1}, \ldots, B_m$, onde:

(*a*) B_{m-r+1} é φ e B_r é $\psi = ass_\pi(\varphi)$;

(*b*) Se $n(\rho) > 1$, então B_i e B_{m-i+1} são a primeira e a última ocorrências da cadeia X que determina ρ;

(c) Se $n(\rho)= 1$, então B_i, B_{m-i+1} e $B_{c(\rho)}$ são a mesma ocorrência da *FM* que determina ρ.

Como, por hipótese, B_r ocorre em π_1 e B_{m-r+1} ocorre em π_2, e A é a única ligação entre π_1 e π_2, temos que A é algum B_j, com $(r \leq j \leq m\text{-}r+ 1)$.

Temos então 3 casos, onde o primeiro e o último podem ser agrupados em um mesmo: A é algum B_j, ou para $(r \leq j< i)$, ou para $(i \leq j \leq m\text{-}i+ 1)$, ou para $(m\text{-}i+ 1< j \leq m\text{-}r+ 1)$.

<u>CASO 1</u>: A é algum B_j tal que $(r \leq j< i)$ ou $(m\text{-}i+ 1< j \leq m\text{-}r+ 1)$

(i) Neste caso, A é algum B_j ou B_{m-j+1} tal que $(r \leq j< i)$.

(ii) Pelas Definições 2.1.9 e 2.1.10 temos que, a menos de parâmetros, $B_j= B_{m-j+1}$.

Temos também que para todo k, $(1< k< i)$, B_k é conseqüência de regra de introdução da qual B_{k-1} é premissa. Portanto, $gr(B_k)> gr(B_{k-1})$.

(iii) Logo, $gr(B_r) \leq gr(B_j)$, para todo j tal que $r \leq j \leq i$.

(iv) Por (ii) temos que $gr(B_j)= gr(B_{m-j+1})$, para todo j $(r \leq j \leq i)$.

(v) Assim, por (i), (iii) e (iv), $gr(B_r) \leq gr(A)$.

(vi) Por (a) temos que $\varphi= B_{m-r+1}$, $\psi= B_r$ e $\psi= ass_\pi(\varphi)$. Logo, $gr(\varphi)= gr(\psi)= gr(B_r)$.

Assim, por (v) e (vi) temos que $gr(\varphi) \leq gr(A)$.

<u>CASO 2</u>: A é algum B_j, tal que $(i \leq j \leq m\text{-}i+ 1)$.

Temos dois subcasos distintos dependendo de $n(\rho)$.

<u>SubCaso 2.1</u>: $n(\rho)= 1$

Neste caso temos, por (c), que $j= c(\rho)$, e B_j é a *FM* que determina ρ.

Pela Definição 2.1.9, sabemos que para todo k, $1< k \leq j$, B_k é conseqüência de regra de introdução da qual B_{k-1} é premissa. Portanto, $gr(B_k)> gr(B_{k-1})$.

(vii) Logo, $gr(B_j) \geq gr(B_k)$, para todo k, $1 \leq k \leq j$.

($viii$) Portanto, como $r< i$ e $i= j= c(\rho)$, temos $gr(B_j) \geq gr(B_r)$.

(ix) Por (a), temos que $gr(B_{m-r+1})= gr(B_r)$.

Logo, como φ é B_{m-r+1} e A é B_j, temos, por ($viii$) e (ix): $gr(A) \geq gr(\varphi)$.

<u>SubCaso 2.2</u>: $n(\rho)> 1$

Temos por (b), que $B_j= A$ ocorre na cadeia X que determina ρ.

(x) Pelo Teorema 2.1.19-(3), temos que $gr(A) \geq gr(\varphi_X)$, onde φ_X é a ponte de X.

(xi) Pelo Teorema 2.1.19-(1) temos $gr(\mathsf{B}_{m-r+1}) \leq gr(\varphi_{\mathsf{X}})$, pois B_{m-r+1} não ocorre em X. Logo, como B_{m-r+1} é φ, então, por (x) e (xi): $gr(\mathsf{A}) \geq gr(\varphi)$. ♦

Podemos estender o resultado deste teorema para o seguinte corolário.

2.2.11 COROLÁRIO:

Seja π da seguinte forma: $\pi \equiv \dfrac{\underbrace{\pi_2 \quad \dots \quad \pi_n}}{\dfrac{[\mathsf{A}]}{\pi_1}}$.

Para todo j tal que $2 \leq j \leq n$, temos:

(1) $nl_\pi(\pi_j)$= 0 (Não existe OP de π não local a nenhum π_j);

(2) φ é $OPnL_\pi(\pi_1) \Leftrightarrow \varphi$ ocorre em π_1 e $\psi= ass_\pi(\varphi)$ ocorre em algum π_j;

(3) Se φ é $OPnL_\pi(\pi_1)$, então φ pertence a um segmento-α ρ que possui algum A_j (ligação entre π_1 e π_j) como ocorrência;

(4) Se nenhum A_j pertence a segmento-α de π, então $nl_\pi(\pi_1)$= 0;

(5) Se φ é $OPnL_\pi(\pi_1)$, então, $gr(\varphi) \leq gr(\mathsf{A})$.

<u>PROVA</u>:

Conseqüência imediata do Teorema *2.2.10* por indução em n. ♦

2.2.12 DEFINIÇÃO: Peso de uma Derivação - $p(\pi)$

O *peso* de uma derivação π representa o número de ocorrências pesadas em π. Formalmente, para o sistema C' temos:

(1) Se π é uma fórmula, $p(\pi)$= 0;

(2) Se π é $\dfrac{\pi_1 \quad \pi_2}{\mathsf{A}}$, $p(\pi)= p(\pi_1)+ p(\pi_2)+ \begin{cases} 1 & \text{se } r(\pi_2) \text{ for } OP_\pi \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$.

2.2.12.1 OBSERVAÇÃO:

(a) É claro que o número de ocorrências pesadas de uma derivação π é igual ao número de pares-α de π.

Antes de terminarmos esta seção, vamos apresentar dois resultados envolvendo a noção de peso.

2.2.13 TEOREMA:

Se π é uma derivação do tipo: $\pi \equiv \begin{matrix} \pi_1 \\ \mathrm{A} \\ \pi_2 \end{matrix}$, então: $p(\pi)= p(\pi_1)+ p(\pi_2)+ nl_\pi(\pi_2)$.

<u>PROVA</u>:

Como todas as ocorrências de π estão ou em π_1 ou em π_2, então todas as OP_π também estão ou em π_1 ou em π_2.

Mas, de todas as OP_π que estão em π_i, temos as que são $OP_{\pi i}$ também (ou seja $OPL_\pi(\pi_i)$), e as que são apenas OP_π mas não são $OP_{\pi i}$ (ou seja, as $OPnL_\pi(\pi_i)$) $(1 \leq i \leq 2)$.

Assim, o número total de OP_π é igual ao número de $OPL_\pi(\pi_i)$ somado com $OPnL_\pi(\pi_i)$ $(1 \leq i \leq 2)$.[25]

Portanto, $p(\pi)= p(\pi_1)+ p(\pi_2)+ nl_\pi(\pi_1)+ nl_\pi(\pi_2)$.

Mas pelo Teorema 2.2.10-(1), temos que $nl_\pi(\pi_1)= 0$.

Portanto, $p(\pi)= p(\pi_1)+ p(\pi_2)+ nl_\pi(\pi_2)$. ♦

2.2.14 COROLÁRIO:

(1) Se π é do tipo: $\pi \equiv \begin{matrix} \overbrace{\pi_2 \ \dots \ \pi_n} \\ [\mathrm{A}] \\ \pi_1 \end{matrix}$, então $p(\pi)= p(\pi_1)+ nl_\pi(\pi_1)+ \sum_{j=2}^{n} p(\pi_j)$.

(2) Se π é do tipo: $\pi \equiv \begin{matrix} \pi_2 \\ [\mathrm{A}] \\ \pi_1 \end{matrix}$, então $p(\pi)= p(\pi_1)+ nl_\pi(\pi_1)+ n_{[A]}(\pi_1).p(\pi_2)$.

<u>PROVA</u>:

Imediata, pelo Teorema 2.2.13, por indução em n. ♦

<u>§3 Seqüência Estrela</u>

Nesta seção, definiremos os conceitos a que informalmente nos referimos em 2.1.16 e provaremos que existe um modo de associarmos a cada derivação π uma derivação

---

[25] Note que para $(1 \leq i \leq 2)$, pela Definição 2.2.9 $r(\pi_i)$ não é computado nem em $p(\pi_i)$ nem em $nl_\pi(\pi_i)$. Mas $r(\pi_2)$ jamais é OP_π, pois é raiz de π, e $r(\pi_1)$, se for OP_π, será computado em $nl_\pi(\pi_2)$ apenas.

“estrela” π*, obtida por processos finitários, na qual podemos calcular todas as possíveis fórmulas máximas de π.

A definição seguinte formaliza a noção de ocorrência multiplicativa a que nos referimos informalmente na explicação 2.1.16. Em síntese, uma ocorrência multiplicativa é uma ocorrência pesada que, quando por ventura se tornar uma fórmula máxima, torna-se uma fórmula máxima multiplicativa (ver 2.1.15), do tipo que é reduzida pela $\supset$-redução-1.

2.3.1 DEFINIÇÃO: Ocorrência Multiplicativa (OM_π)

Uma *ocorrência* de fórmula φ em uma derivação π é *multiplicativa* (φ é OM_π) se estiverem satisfeitas as seguintes condições:

(1) φ é ocorrência pesada em π;

(2) A regra de eliminação da qual φ é premissa maior é regra de eliminação da implicação ($\supset$E);

(3) A regra de introdução que gera a ocorrência associada a φ corta alguma top-fórmula de π;

(4) A premissa menor ψ da regra em que φ é a premissa maior não é hipótese aberta (ou $l(\nabla_\pi(\psi)) > 1$, ou ψ é top-fórmula cortada).

2.3.1.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Uma ocorrência multiplicativa é a ocorrência pesada de um par-α que, quando se tornar uma *FM*, será uma *FM* multiplicativa.

(*b*) Se $l(\nabla_\pi(\psi)) > 1$, chamamos φ de OM_π *do tipo 1*, e se $l(\nabla_\pi(\psi)) = 1$, onde ψ é top-fórmula cortada em π, chamamos φ de OM_π *do tipo 2*.

2.3.2 DEFINIÇÃO: Derivação Estrela (*)

Dizemos que π é *derivação estrela*, se π não possuir ocorrência multiplicativa (OM_π).

2.3.3 DEFINIÇÃO: Multiplicação-* (Estrela)

Se φ é OM_π, podemos representar π como:

$$\pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \quad \begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_2\\ A \supset B\end{array}}{B} \\ \pi_3 \end{array} \quad , \text{ onde } \varphi = A \supset B \text{ é } OM_\pi.$$

Neste caso, π_2 possui uma ou mais hipóteses A cortadas pela regra de introdução k que gerou $ass_\pi(A \supset B)$ e, ou $l(\pi_1) > 1$, ou $\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \equiv A^r$ ($\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array}$ é hipótese cortada em π).

Dizemos que $\pi^\#$ é obtida de π pela *multiplicação-** de $A \supset B$ quando:

$$\pi^\# \equiv \begin{array}{c} \dfrac{A \quad \begin{array}{c}\pi_1\\ [A]\\ \pi_2\\ A \supset B\end{array}}{B} \\ \pi_3 \end{array} \quad ,$$

onde: substituiu-se, em π, cada top-fórmula destacada de $\begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_2\end{array}$ por $\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array}$, e $\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array}$, em sua posição original, por A.

2.3.3.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) A notação $\pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \quad \begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_2\\ A \supset B\end{array}}{B} \\ \pi_3 \end{array}$ é uma simplificação de: $\pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \quad \begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_5\\ \dfrac{B}{A \supset B}k\\ \pi_4\\ A \supset B\end{array}}{B} \\ \pi_3 \end{array}$.

(*b*) Quando $\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array}$ é apenas uma hipótese cortada em π, temos:

$$\pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{A^r \quad \begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_2\\ A \supset B\end{array}}{B} \\ \pi_3 \end{array} \quad \text{e} \quad \pi^\# \equiv \begin{array}{c} \dfrac{A \quad \begin{array}{c}[A]^r\\ \pi_2\\ A \supset B\end{array}}{B} \\ \pi_3 \end{array} .$$

(c) Para efeito de referência, chamaremos as cópias de π_1 em $\pi^\#$ de $(\pi_1)_1$, ... , $(\pi_1)_m$, onde m é o número de hipóteses A que foram substituídas por π_1 ($m= n_{[A]}(\pi_2)$) , e $pos_{\pi\#}(r((\pi_1)_1)) < pos_{\pi\#}(r((\pi_1)_2)) < ... < pos_{\pi\#}(r((\pi_1)_m))$.

(d) Ao substituirmos $\begin{matrix}\pi_1\\ A\end{matrix}$ por A em π, para obtenção de $\pi^\#$, pode ocorrer de $\pi^\#$ não mais respeitar as Restrições 1.2.6 de aplicação da regra ($\forall$I), pois estamos acrescentando uma nova hipótese à derivação. Com isso, temos que a multiplicação-* é uma operação definida em quase-derivações.

(e) A notação $\pi \xrightarrow{*} \pi^\#$ indica que $\pi^\#$ foi obtida de π por uma multiplicação-*.

(f) Note que a multiplicação-* é uma operação finitária, ou seja, se $\pi \xrightarrow{*} \pi^\#$ e $l(\pi) < \omega$, então $l(\pi^\#) < \omega$.

2.3.4 DEFINIÇÃO: Grau Máximo Multiplicativo - $g(\pi)$

O *grau máximo multiplicativo* de uma derivação π é um número natural, denotado por $g(\pi)$, e definido por: $g(\pi)= max\{gr(\varphi) \ / \ \varphi \text{ é } OM_\pi\}$.

2.3.4.1 OBSERVAÇÕES:

(a) $g(\pi)$ é o maior dentre os graus das ocorrências multiplicativas de π.

(b) Se π é derivação estrela, $g(\pi)= 0$.

2.3.5 DEFINIÇÃO: Número de Ocorrências de Grau Máximo Multiplicativo - $ng(\pi)$

Definimos o *número de ocorrências de grau máximo multiplicativo* de uma derivação π, $ng(\pi)$, como o número de OMs de π com grau igual a $g(\pi)$.

2.3.5.1 OBSERVAÇÃO:

Se π é uma derivação estrela, $ng(\pi)= 0$.

2.3.6 DEFINIÇÃO: Ocorrência Estrela - $T(\pi)$

Seja π uma derivação e φ uma OM_π. Dizemos que φ é a *ocorrência estrela* de π, $T(\pi)$, quando:

$$\varphi= T(\pi) \iff pos_\pi(ass_\pi(\varphi))= max\{pos_\pi(ass_\pi(\xi)) \ / \ \xi \text{ é } OM_\pi \text{ e } gr(\xi)= g(\pi)\}.$$

2.3.6.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) A ocorrência estrela de π, $T(\pi)$, é dentre as ocorrências multiplicativas de π com grau máximo, a que tem ocorrência associada de maior posição.

(*b*) É imediato pela definição acima que se $\pi \equiv \dfrac{\begin{matrix} \pi_1 & & [A]^k \\ & & \pi_2 \\ A & & A \supset B \end{matrix}}{\begin{matrix} B \\ \pi_3 \end{matrix}}$, onde $A \supset B$ é $T(\pi)$,

então $g(\pi_1) < g(\pi) = gr(A \supset B)$. Ou seja, não existe OM_{π_1} de mesmo grau que $A \supset B$, já que toda ocorrência de π_1 tem posição maior que a posição de qualquer ocorrência de π_2. e que $ass_\pi(A \supset B)$, que certamente ocorre em π_2.

(*c*) Também é imediato pela definição acima que para toda derivação π existe uma e apenas uma ocorrência estrela $T(\pi)$.

2.3.7 DEFINIÇÃO: Seqüência Estrela

Uma *seqüência estrela* para uma derivação π, denotada por β_π, é uma seqüência de derivações denotadas por $\pi^{\bullet 0}, \pi^{\bullet 1}, \pi^{\bullet 2}, \ldots$, tal que são satisfeitas as seguintes condições:

(1) $\pi^{\bullet 0}$ é π;

(2) Cada $\pi^{\bullet i+1}$ é obtida de $\pi^{\bullet i}$ através da multiplicação-* de $T(\pi^{\bullet i})$;

(3) A última derivação da seqüência, quando existe, é uma derivação estrela.

2.3.7.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Note que se π é derivação estrela, então $\beta_\pi = \pi$ é uma seqüência unitária.

(*b*) Note também pela Observação 2.3.6.1-(*c*) que como para cada derivação não estrela π existe uma e apenas uma ocorrência estrela $T(\pi)$, então para cada derivação π a seqüência estrela é única.

(*c*) A notação $\pi \xrightarrow{*}_{\circ} \pi^\bullet$ indica que π se reduz a $\pi^\bullet$ pela multiplicação estrela de $T(\pi)$.

(*d*) Utilizaremos para as seqüências estrela a notação $\beta_\pi = \pi^{\bullet 0} \xrightarrow{*}_{\circ} \pi^{\bullet 1} \xrightarrow{*}_{\circ} \pi^{\bullet 2} \xrightarrow{*}_{\circ} \ldots$, onde $\pi^{\bullet 0} \equiv \pi$, $\pi^\bullet \equiv \pi^{\bullet 1}$ e, genericamente, $\pi^{\bullet n}$ representa o $(n+1)$-ésimo termo da seqüência estrela para π.

(*e*) Denotaremos por π^* o último termo da seqüência estrela para π, quando esta for finita.

(*f*) Se π^* está definido ($\exists n < \omega$ / $\pi^{\bullet n}$ é termo estrela), então é claro que para todo $m \leq n$ temos $(\pi^{\bullet m})^* \equiv \pi^*$, pois a seqüência estrela para π é única e $\pi^{\bullet m}$ pertence à seqüência estrela de π.

(*g*) Pela unicidade da seqüência estrela também é trivial que, se π_1^* está definido, $\pi_1 \equiv \pi_2 \Rightarrow \pi_1^* \equiv \pi_2^*$.

(*h*) É claro pela definição acima que: $(\pi^{\bullet n})^{\bullet m} \equiv \pi^{\bullet n+m}$. Ou seja, o ($m$+ 1)-ésimo termo da seqüência estrela para $\pi^{\bullet n}$ é o (n+ m+ 1)-ésimo termo da seqüência estrela para π.

(*i*) Note, pela Observação 2.3.3.1-(*d*) que uma seqüência estrela é, de fato, uma seqüência de quase-derivações.

A partir de agora, apresentaremos uma seqüência de resultados que tem por objetivo provar que a cada derivação π existe uma e apenas uma seqüência estrela associada, que é **finita**. Dessa forma, a cada derivação π associaremos univocamente uma derivação estrela π^*, a última derivação da seqüência estrela de π. Como π^* será obtida por métodos finitários, a própria π^* é uma derivação de comprimento finito, que portanto tem um número finito de ocorrências pesadas. Assim, associando $o(\pi)$ ao número de ocorrências pesadas de π^*, teremos uma atribuição numérica que relaciona univocamente toda derivação π a um número natural (finito).

O teorema que segue assegura a existência e unicidade da seqüência estrela para toda derivação π.

2.3.8 TEOREMA: Existência e Unicidade de β

Para toda derivação π, existe uma e apenas uma seqüência estrela β_π.

PROVA:

Imediata pelas Definições 2.3.6 e 2.3.7. ♦

Com a existência e unicidade da seqüência estrela estabelecidas, vamos agora provar sua finitude para toda derivação π. Para isso a definição a seguir será importante.

Uma multiplicação-*, assim como uma redução, não cria ocorrências novas. Se $\pi \xrightarrow{*} \pi^\bullet$, cada ocorrência de fórmula em $\pi^\bullet$ é obtida a partir de alguma ocorrência de fórmula em π. A definição de notação a seguir relaciona cada ocorrência de fórmula de qualquer derivação da seqüência estrela para uma derivação π, com a ocorrência em π que a originou.

2.3.9 DEFINIÇÃO: Ocorrência Cópia-*

Sejam π e $\pi^\#$ derivações tais que: $\pi \overset{*}{\to} \pi^\#$:

$$\pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{cc} & [A]^k \\ \pi_1 & \pi_2 \\ A & A \supset B \end{array}}{B} \\ \pi_3 \end{array} \quad \overset{*}{\to} \quad \pi^\# \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{cc} & \pi_1 \\ & [A] \\ & \pi_2 \\ A & A \supset B \end{array}}{B} \\ \pi_3 \end{array}$$

, onde $A \supset B$ é $T(\pi)$.

Dizemos que a ocorrência ψ de $\pi^\#$ é uma *cópia-** da ocorrência φ de π quando uma das três alternativas abaixo ocorre:

(1) φ é A, *pm* da regra expressa em π e ψ é A, *pm* da regra expressa em $\pi^\#$.

(2) φ e ψ, cada uma na sua derivação, ocorrem em π_i $(2 \le i \le 3)$, não são hipóteses destacadas de π_2 e $pos_{\pi_i}(\varphi) = pos_{\pi_i}(\psi)$.

(3) φ ocorre em π_1 e ψ ocorre em $(\pi_1)_j$ $(1 \le j \le n_{[A]}(\pi_2))$ e $pos_{\pi_1}(\varphi) = pos_{(\pi_1)_j}(\psi)$.

2.3.9.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) É imediato pela definição que, se ψ é cópia-* de φ, então φ e ψ são ocorrências da mesma fórmula.

(*b*) Se φ e ψ são como em (1) ou (2) acima, então, denotamos ψ, a ocorrência cópia-*, por: $\psi = (\varphi)_1$.

(*c*) Se φ e ψ são como em (3), então denotamos ψ por: $\psi = (\varphi)_j$.

(*d*) É imediato pela definição que toda ocorrência ψ, de $\pi^\#$, é cópia de alguma ocorrência φ, em π, e pode ser representada por $\psi = (\varphi)_i$ para algum i $(1 \le i \le n_{[A]}(\pi_2))$.

(*e*) Podemos expandir esta definição para as derivações da seqüência estrela de π. Considere a derivação $\pi^{\bullet n}$ da seqüência estrela para π. É imediato pela definição, por indução em n, que para toda ocorrência ψ em $\pi^{\bullet n}$ existe uma ocorrência φ em π tal que $\psi = (\ldots(((\varphi)_{i1})_{i2})\ldots)_{in-1}$. Podemos simplificar a notação para $\psi = (\varphi)^n_i$, onde i é o número de Gödel da seqüência $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$, e n é o próprio índice da derivação $\pi^{\bullet n}$ em que ψ ocorre.

(f) Note, por (d) e (e), que: $(\varphi)_i = (\varphi)^1_i$.

Provaremos agora um teorema onde estabelecemos propriedades fundamentais que nos garantirão a existência de uma medida de indução para provarmos que a seqüência estrela de toda derivação π é finita.

2.3.10 TEOREMA:

Seja φ uma ocorrência de fórmula em uma derivação não estrela π e $\psi = (\varphi)_i$ uma cópia-* qualquer de φ em $\pi^\bullet$. Então:

(1) $\varphi = T(\pi) \ \Rightarrow\ (\varphi)_i$ não é $OM_{\pi^\bullet}$;

(2) $\varphi \neq T(\pi)$ e $OM_\pi \ \Rightarrow\ (\varphi)_i$ é $OM_{\pi^\bullet}$;

(3) φ não é OM_π e $(\varphi)_i$ é $OM_{\pi^\bullet} \ \Rightarrow\ gr((\varphi)_i) < g(\pi)$;

(4) $ng(\pi) = 1 \ \Leftrightarrow\ g(\pi) > g(\pi^\bullet)$;

(5) $ng(\pi) > 1 \ \Rightarrow\ g(\pi) = g(\pi^\bullet)$ e $ng(\pi) = ng(\pi^\bullet) + 1$;

(6) $g(\pi) \geq g(\pi^\bullet)$;

(7) $p(\pi) \leq p(\pi^\bullet)$.

PROVA:

Temos que π e $\pi^\bullet$ têm as formas:

$$\pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array}\qquad \begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_2\\ A\supset B\end{array}}{B}\\ \pi_3\end{array} \quad \text{e} \quad \pi^\bullet \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ [A]\\ \pi_2 \\ A\end{array}\qquad \begin{array}{c} A\supset B\end{array}}{B}\\ \pi_3\end{array}\text{, onde } A\supset B \text{ é } T(\pi).$$

Chamemos
$$\pi_4 \equiv \begin{array}{c} \dfrac{A\qquad \begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_2\\ A\supset B\end{array}}{B}\\ \pi_3\end{array} \quad \text{e} \quad (\pi_4)_1 \equiv \begin{array}{c} \dfrac{A\qquad \begin{array}{c}[A]\\ \pi_2\\ A\supset B\end{array}}{B}\\ \pi_3\end{array}.$$

(i) Note que π_4 e $(\pi_4)_1$ diferem apenas no corte da aplicação da regra que gera a ocorrência associada a $A\supset B$. Em $(\pi_4)_1$ ela não elimina hipóteses, e em π_4 ela elimina.

(*ii*) Podemos escrever π e $\pi^{\bullet}$ como: $\pi \equiv \begin{array}{c}\pi_1\\ \mathsf{A}\\ \pi_4\end{array}$ e $\pi^{\bullet} \equiv \begin{array}{c}\pi_1\\ [\mathsf{A}]\\ (\pi_4)_1\end{array}$.

(*iii*) Pela Definição 2.3.9, temos que toda ocorrência ψ de $\pi^{\bullet}$ que ocorre em $(\pi_4)_1$ é tal que $\psi = (\varphi)_1$, onde φ ocorre em π_4 e $pos_{\pi_4}(\varphi,) = pos_{(\pi 4)1}(\psi)$.

Como as marcas de corte são irrelevantes na definição de segmento-α, então temos que φ é $OP_{\pi_4} \Leftrightarrow (\varphi)_1$ é $OP_{(\pi 4)1}$. Segue então que:

(*iv*) $p(\pi_4) = p((\pi_4)_1)$.

Além disso, como pelo Teorema 2.2.10 e Corolário 2.2.11, $nl_{\pi}(\pi_4) = nl_{\pi^{\bullet}}((\pi_4)_1) = 0$ temos:

(*v*) φ é $OPL_{\pi}(\pi_4) \Leftrightarrow (\varphi)_1$ é $OPL_{\pi^{\bullet}}((\pi_4)_1)$.

Apenas por distinção de referência, chamaremos a ocorrência A, ligação entre π_1 e π_4 em π, de A_k, e as ocorrências destacadas de π_2, ligações entre $(\pi_4)_1$ e cada cópia de π_1 em $\pi^{\bullet}$, apenas de A.

Item (1)

Como $\varphi = T(\pi)$ temos que $\varphi = \mathsf{A} \supset \mathsf{B}$ e $\psi = (\mathsf{A} \supset \mathsf{B})_1$ ($\mathsf{A} \supset \mathsf{B}$ que ocorre em $\pi^{\bullet}$) .

A premissa menor de ψ é hipótese aberta e a regra que gera sua ocorrência associada não corta top-fórmula em $\pi^{\bullet}$, portanto, pela Definição 2.3.1, ψ não é $OM_{\pi^{\bullet}}$. □

Item (2)

Temos que provar que se $\varphi \neq \mathsf{A} \supset \mathsf{B}$ é OM_{π}, então cada $(\varphi)_i$ satisfaz todos os itens da Definição 2.3.1 de ocorrência multiplicativa em $\pi^{\bullet}$. Dividiremos a prova em 4 passos, onde provaremos, para cada item da definição, que se φ satisfaz o item em π, então $(\varphi)_i$ também satisfaz em $\pi^{\bullet}$.

PASSO 1: Vamos provar que: φ é $OP_{\pi} \Rightarrow (\varphi)_i$ é $OP_{\pi^{\bullet}}$

Como A_k é premissa menor em π, A_k não pertence a nenhum segmento-α em π, logo, pelo Teorema 2.2.10-(4), $nl_{\pi}(\pi_4) = 0$.

Portanto, pelo Teorema 2.2.13, temos: $p(\pi) = p(\pi_1) + p(\pi_4)$. Ou seja, todas as OP_{π} são locais em relação a π_1 e π_4 . Assim:

(*vi*) φ é $OP_{\pi} \Leftrightarrow \varphi$ é $OPL_{\pi}(\pi_1)$ ou φ é $OPL_{\pi}(\pi_4)$.

Pela forma de $\pi^{\bullet}$ em (*ii*) e pelo Corolário 2.2.14 temos:

$p(\pi^{\bullet}) = p(\pi_4) + n_{[\mathsf{A}]}(\pi_2).p(\pi_1) + nl_{\pi^{\bullet}}((\pi_4)_1)$.

Ou seja, as $OP_{\pi^\bullet}$ são dadas pelas $OP_{(\pi 1)_i}$ para cada $(\pi_1)_i$, pelas $OP_{(\pi 4)_1}$ e pelas $OPnL_{\pi^\bullet}((\pi_4)_1)$. Assim:

(*vii*) ψ é $OP_{\pi^\bullet}$ $\Leftrightarrow$ ψ é $OPL_{\pi^\bullet}((\pi_1)_i)$ ou ψ é $OPL_{\pi^\bullet}((\pi_4)_i)$ ou ψ é $OPnL_{\pi^\bullet}((\pi_4)_i)$.

Como cada $(\pi_1)_i$ em $\pi^\bullet$ é uma cópia idêntica de π_1, então:

(*viii*) φ é $OP_{\pi 1}$ $\Leftrightarrow$ para todo i $(1 \leq i \leq n_{[A]}(\pi_2))$, $(\varphi)_i$ é $OP_{(\pi 1)_i}$.

Temos portanto:

(*ix*) φ é $OP_\pi \underset{(vi)}{\Rightarrow}$ φ é $OPL_\pi(\pi_1)$ ou φ é $OPL_\pi(\pi_4)$.

(*x*) φ é $OPL_\pi(\pi_4) \underset{(v)}{\Rightarrow} (\varphi)_i$ é $OPL_{\pi^\bullet}((\pi_4)_i) \underset{(vii)}{\Rightarrow} (\varphi)_i$ é $OP_{\pi^\bullet}$.

(*xi*) φ é $OPL_\pi(\pi_1) \underset{(vi)}{\Rightarrow} \varphi$ é $OP_{\pi 1} \underset{(viii)}{\Rightarrow} (\varphi)_i$ é $OP_{(\pi 1)_i} \underset{(vii)}{\Rightarrow} (\varphi)_i$ é $OP_{\pi^\bullet}$.

Logo, por (*ix*), (*x*) e (*xi*) temos:

φ é OP em $\pi \Rightarrow (\varphi)_i$ é OP em $\pi^\bullet$.

<u>PASSO 2</u>: Vamos provar que: φ é PM de $(\supset E)$ em $\pi \Rightarrow (\varphi)_i$ é PM de $(\supset E)$ em $\pi^\bullet$

É imediato pelas formas de π e $\pi^\bullet$.

<u>PASSO 3</u>: Vamos provar que: Se $\psi = ass_\pi(\varphi)$ e R a aplicação da regra que gera ψ em π, então:

R corta top-fórmula ξ em $\pi \Rightarrow (R)_i$ corta top-fórmula $(\xi)_i$ em $\pi^\bullet$.

Pelas formas de π e $\pi^\bullet$ temos que as únicas top-fórmulas cortadas em π cujas cópias-* em $\pi^\bullet$ não são top-fórmulas cortadas pela cópia-* da regra[26], são as hipóteses A destacadas em π_2. Estas hipóteses são cortadas pela regra que gera a ocorrência associada a $A \supset B = T(\pi)$. Como, por hipótese, φ não é $T(\pi)$, então:

R corta top-fórmula ξ em $\pi \Rightarrow (R)_i$ corta top-fórmula $(\xi)_i$ em $\pi^\bullet$.

<u>PASSO 4</u>: Vamos provar que se ψ é a premissa menor ao lado de φ em π então:

ψ não é hipótese aberta em $\pi \Rightarrow (\psi)_i$ não é hipótese aberta em $\pi^\bullet$.

Pelas formas de π e $\pi^\bullet$ temos que a única ocorrência de π que não é hipótese aberta e cuja cópia-* é hipótese aberta em $\pi^\bullet$ é a premissa menor que ocorre ao lado de $T(\pi)$. Como φ não é $T(\pi)$, temos:

ψ não é hipótese aberta em $\pi \Rightarrow (\psi)_i$ não é hipótese aberta em $\pi^\bullet$.

Então, pelos Casos (1) a (4) temos que, se $\varphi \neq T(\pi)$ é OM_π, então cada cópia-* $(\varphi)_i$ de π é $OM_{\pi^\bullet}$. □

---

[26] Estamos aqui fazendo um abuso de notação, já que cópia-* foi definida para ocorrências.

Item (3)

Se φ não é OM_π, então, algum dos quatro itens da Definição 2.3.1 falha para φ em π. Dividiremos a prova em 4 casos, onde em cada um deles falha um item.

<u>CASO 1</u>: φ não é OP em π (falha 2.3.1-(1))

Por (*v*) a (*viii*) do Item anterior temos que as únicas $OP_{\pi\bullet}$ que são cópias-* de ocorrências **não** pesadas em π são as $OPnL_{\pi\bullet}((\pi_4)_1)$. Assim temos:

(*xii*) φ não é OP_π e $(\varphi)_i$ é $OP_{\pi\bullet} \Rightarrow (\varphi)_i$ é $OPnL_{\pi\bullet}((\pi_4)_1)$.

Mas Pelo Corolário 2.2.11-(5) temos que:

(*xiii*) $(\varphi)_i$ é $OPnL_{\pi\bullet}((\pi_4)_1) \Rightarrow gr((\varphi)_i) \leq gr(\mathsf{A})$.

Mas A, a fórmula das ligações de $(\pi_4)_1$ com cada cópia de π_1, é exatamente a fórmula da premissa menor da regra em que $T(\pi)$ é PM. Portanto:

(*xiv*) $gr(T(\pi)) > gr(\mathsf{A})$.

(*xv*) Mas, pela Definição 2.3.6, temos $g(\pi) = gr(T(\pi))$.

Assim, por (*xiii*), (*xiv*) e (*xv*) temos:

(*xvi*) $(\varphi)_i$ é $OPnL_{\pi\bullet}((\pi_4)_1) \Rightarrow gr((\varphi)_i) < g(\pi)$.

Portanto, por (*xii*) e (*xvi*) temos:

- φ *não é* OP_π *e* $(\varphi)_i$ *é* $\mathrm{OM}_{\pi\bullet} \Rightarrow \mathrm{gr}((\varphi)_i) < \mathrm{g}(\pi)$.

<u>CASO 2</u>: A regra R da qual φ é PM em π não é $(\supset\mathsf{E})$ (falha 2.3.1-(2))

Neste caso, é imediato, pelas formas de π e $\pi^\bullet$, que a regra $(\mathsf{R})_i$ da qual $(\varphi)_i$ é premissa também não é $(\supset\mathsf{E})$.

Assim, falha 2.3.1-(2) para $(\varphi)_i$ em $\pi^\bullet$.

Logo, $(\varphi)_i$ não é $OM_{\pi\bullet}$ e o teorema é válido vacuamente neste caso.

<u>CASO 3</u>: A regra R de introdução que gera $\psi = ass_\pi(\varphi)$ não corta top-fórmula ξ de π (falha 2.3.1-(3))

Na passagem de π para $\pi^\bullet$ não é acrescentada nenhuma nova marca de corte de top--fórmula que não exista em π. No máximo é suprimida alguma.

Portanto, se não existe top-fórmula de π cortada pela regra R que gera ψ, então não existe top-fórmula de $\pi^\bullet$ cortada pela regra $(\mathsf{R})_i$ que gera $(\psi)_i$.

Assim, falha 2.3.1-(3) para $(\varphi)_i$ em $\pi^\bullet$.

Logo, $(\varphi)_i$ não é $OM_{\pi\bullet}$ e o teorema é válido vacuamente neste caso.

<u>CASO 4</u>: ψ, a premissa menor da regra em que φ é PM, é hipótese aberta em π (falha 2.3.1-(4))

Se ψ é top-fórmula aberta em π, então nenhuma multiplicação-* de π copia alguma subárvore em cima de ψ. Pois subárvores só são copiadas na multiplicação-* sobre as top--fórmulas cortadas pela regra de introdução associada à ocorrência multiplicada. Portanto, $(\psi)_i$ é top-fórmula aberta em $\pi^\bullet$.

Assim, falha 2.3.1-(3) para $(\varphi)_i$ em $\pi^\bullet$.

Logo, $(\varphi)_i$ não é $OM_{\pi^\bullet}$ e o teorema é válido vacuamente neste caso.

Portanto, dos casos 1 a 4 temos:

$$\varphi \text{ não é } OM_\pi \text{ e } (\varphi)_i \text{ é } OM_{\pi^\bullet} \Rightarrow gr((\varphi)_i) < g(\pi). \ \square$$

Item (4)

•($\Rightarrow$)

$ng(\pi) = 1 \Rightarrow$ a única OM_π com grau igual a $g(\pi)$ é $\mathsf{T}(\pi)$. Logo,

(*xvii*) $\varphi \neq T(\pi)$ é $OM_\pi \Rightarrow gr(\varphi) < g(\pi)$.

Pelo Item (2) temos:

(*xviii*) $\varphi \neq T(\pi)$ é $OM_\pi \Rightarrow (\varphi)_i$ é $OM_{\pi^\bullet}$.

Pelo Item (3) temos:

(*xix*) φ não é OM_π e $(\varphi)_i$ é $OM_{\pi^\bullet} \Rightarrow gr((\varphi)_i) < g(\pi)$.

Pelo Item (1) temos:

(*xx*) $\varphi = T(\pi) \Rightarrow (\varphi)_i$ não é $OM_{\pi^\bullet}$.

Como toda ocorrência em $\pi^\bullet$ é cópia-* de alguma ocorrência em π, e toda ocorrência em π ou é OM_π ou não é OM_π, por (*xvii*) a (*xx*) temos:

(*xxi*) ψ é $OM_{\pi^\bullet} \Rightarrow gr(\psi) < g(\pi)$.

Logo, por (*xxi*) é claro que $g(\pi) > g(\pi^\bullet)$.

•($\Leftarrow$) (Provaremos por redução ao absurdo)

Por hipótese temos que:

(*xxii*) $g(\pi) > g(\pi^\#)$.

Considere por hipótese do absurdo que:

(*xxiii*) $ng(\pi) > 1$.

(*xxiv*) É claro, por (*xxiii*), que existe $\xi \neq T(\pi)$ que é OM_π tal que $gr(\xi) = g(\pi)$.

Por (*xxiv*) e pelo Item (2) temos que:

(xxv) $(\xi)_i$ é $OM_{\pi^\bullet}$.

Mas é claro que $gr(\xi)= gr((\xi)_i)$. Logo, por ($xxiv$), temos:

($xxvi$) $gr((\xi)_i)= g(\pi)$.

Assim, por (xxv) e ($xxvi$) é claro que $g(\pi^\bullet) \geq g(\pi)$, o que é um absurdo, porque por ($xxii$) $g(\pi^\bullet)< g(\pi)$. Portanto descartamos a hipótese do absurdo ($xxiii$) e temos $ng(\pi)= 1$. □

Item (5)

($xxvii$) Se $ng(\pi)> 1$, então existe pelo menos uma ocorrência φ distinta de $A\supset B= T(\pi)$ tal que φ é OM_π e $gr(\varphi)= g(\pi)$.

Logo, pelo Item (2), $(\varphi)_i$ é $OM_{\pi^\bullet}$ e, portanto:

($xxviii$) $g(\pi)= g(\pi^\#)$.

Sejam φ^1, ..., φ^m todas as OM distintas de $A\supset B$ em π tais que $gr(\varphi^j)= g(\pi)$, para $(1\leq j \leq m)$.

Pelo Comentário 2.3.6.1-(b) sabemos que nenhum destes φ^j ocorre em π_1.

($xxix$) Portanto, temos que todos os φ^j ocorrem em π_4.

(xxx) Por ($xxix$), pelas formas de π e $\pi^\bullet$ e pela Definição 2.3.9 temos que para cada φ^j existe apenas uma cópia-* $(\varphi^j)_1$ em $\pi^\bullet$ e que ocorre em $(\pi_4)_1$. Além disso, pelo Item (2) sabemos também que cada $(\varphi^j)_i$ é $OM_{\pi^\bullet}$.

Portanto, pelos Itens (1), (3) e por (xxx), temos que:

($xxxi$) $ng(\pi)= ng(\pi^\bullet)+ 1$.

Assim, por ($xxviii$) e ($xxxi$) temos:

$ng(\pi)> 1 \;\Rightarrow\; g(\pi)= g(\pi^\bullet)$ e $ng(\pi)= ng(\pi^\bullet)+ 1$. □

Item (6)

Imediato pelos Itens (4) e (5). □

Item (7)

Como A, ocorrência de ligação em π, é premissa menor, A não pertence a nenhum segmento-α de π. Logo, pelo Teorema 2.2.10-(4), $nl_\pi(\pi_4)= 0$.

($xxxii$) Portanto, pelo Teorema 2.2.13, $p(\pi)= p(\pi_1)+ p(\pi_4)$.

($xxxiii$) Pelo Corolário 2.2.15, $p(\pi^\bullet)= p(\pi_4)+ nl_{\pi^\bullet}(\pi_4)+ n_{[A]}((\pi_4)_1).p(\pi_1)$.

Além disso, $A\supset B= T(\pi)$ é OM em π e, portanto:

($xxxiv$) $n_{[A]}(\pi_4) = n_{[A]}((\pi_4)_1) \geq 1$.

Logo, por ($xxxii$), ($xxxiii$) e ($xxxiv$) temos: $p(\pi^\bullet) \geq p(\pi)$. ♦

O teorema seguinte estabelece que dada uma derivação não normal qualquer π, basta um número finito de multiplicações da seqüência estrela para diminuirmos o grau máximo multiplicativo de π ($g(\pi)$).

2.3.11 TEOREMA:

Se π é uma derivação tal que $ng(\pi) \geq 1$, então existe $n < \omega$ tal que $g(\pi^{\bullet n}) < g(\pi)$.

PROVA:

Provaremos por indução em $ng(\pi)$.

BASE: $ng(\pi) = 1$.

Pelo Teorema 2.3.10-(4): $ng(\pi) = 1 \;\Rightarrow\; g(\pi) > g(\pi^\bullet)$. Portanto, $n = 1 < \omega$ já satisfaz o teorema.

PASSO:

HI: Se Σ é uma derivação tal que $ng(\Sigma) < ng(\pi)$,então existe $k < \omega$ tal que $g(\Sigma^{\bullet k}) < g(\Sigma)$.

Pelo Teorema 2.3.10-(5), como $ng(\pi) > 1$ temos:

(i) $g(\pi) = g(\pi^\bullet)$ e $ng(\pi) = ng(\pi^\bullet) + 1$.

Logo, vale HI para $\pi^\bullet$ e portanto temos:

(ii) Existe um $(\pi^\bullet)^{\bullet k}$ tal que $g((\pi^\bullet)^{\bullet k}) < g(\pi^\bullet)$ e $k < \omega$.

(iii) Mas, pela Observação 2.3.7.1-(h), temos: $(\pi^\bullet)^{\bullet k} \equiv \pi^{\bullet k+1}$. Logo:

(iv) $g(\pi) \underset{(i)}{=} g(\pi^\bullet) \underset{(ii)}{>} g((\pi^\bullet)^{\bullet k}) \underset{(iii)}{=} g(\pi^{\bullet k+1})$. Além disso, como $k < \omega$, $k + 1 < \omega$.

Portanto, fazendo $n = k + 1$, temos por (iv): $g(\pi^{\bullet n}) < g(\pi)$ e $n < \omega$. ♦

Podemos agora estabelecer a finitude da seqüência estrela de qualquer derivação π. É o que faremos no teorema que segue. O argumento da prova deste teorema é análogo ao da demonstração do Teorema de Normalização Fraca para C' apresentado em **Prawitz[1965]**, p. 40. Pelos Teoremas 2.3.10-(4) e 2.3.10-(5) temos que a cada passo da operação-*, a multiplicação-* de $T(\pi^{\bullet i})$ torna $\pi^{\bullet i+1}$ uma derivação onde: ou o grau máximo multiplicativo de $\pi^{\bullet i+1}$ é menor que em $\pi^{\bullet i}$, ou o grau é igual, mas o número de *OMs* de grau máximo é uma unidade menor que em $\pi^{\bullet i}$. Ou seja, ainda que a multiplicação-* de $T(\pi^{\bullet i})$ aumente o número total de OMs em $\pi^{\bullet i+1}$, ela, com certeza, ou diminuirá o número de OMs de grau máximo ou diminuirá o valor do grau máximo.

No Teorema 2.3.11, mostramos que necessitamos sempre de um número finito de passos para diminuir, de pelo menos uma unidade, o valor do grau máximo das OMs de uma derivação π. Portanto, realizando finitas vezes este processo finito, quando eliminarmos a última ocorrência OM de grau 2, teremos transformado a derivação π em uma derivação estrela π^* (onde não há OMs) em um número finito de passos.

2.3.12 TEOREMA: Finitude de β

A seqüência estrela de toda derivação π é finita ($l(\beta_\pi)< \omega$).

PROVA: Indução em $g(\pi)$.

Dizer que $l(\beta_\pi)< \omega$ é o mesmo que dizer que existe $r< \omega$ tal que $\pi^{\bullet r}$ é termo estrela. É isto que provaremos.

BASE: $g(\pi)= 0$

Neste caso π é estrela e, portanto, $\pi^{\bullet 0} \equiv \pi$ é derivação estrela.

PASSO: $g(\pi)> 0$

HI: para toda derivação Σ na qual $g(\Sigma)< g(\pi)$, existe $s< \omega$ tal que $\Sigma^{\bullet s}$ é derivação estrela.

(*i*) Pelo Teorema 2.3.11 existe $n< \omega$ tal que $g(\pi^{\bullet n})< g(\pi)$.

Logo, vale HI em $\pi^{\bullet n}$ e, portanto:

(*ii*) Existe $s< \omega$ tal que $(\pi^{\bullet n})^{\bullet s}$ é derivação estrela.

Logo, por (*ii*) e pela Observação 2.3.7.1-(*h*) temos: $\pi^{\bullet n+s}$ é termo estrela e, como por (*i*) e (*ii*) $n< \omega$ e $s< \omega$, é claro que $n+ s< \omega$. ♦

§4 A Atribuição Numérica $o(\pi)$

Definiremos nesta seção a atribuição numérica $o(\pi)$ como o número de ocorrências pesadas de π^*. Com os resultados obtidos na seção anterior, temos imediatamente a prova da finitude e unicidade de $o(\pi)$, para toda derivação π.

2.4.1 DEFINIÇÃO: O Ordinal $o(\pi)$

Seja π uma derivação em C'. Definimos o *ordinal natural* $o(\pi)$ associado a π como:

$o(\pi)= p(\pi^*)+ 1$.

2.4.1.1 OBSERVAÇÃO:

Estamos somando 1 ao peso de π^* apenas por uma questão de compatibilização com a definição do comprimento da pior seqüência de redução ($lp(\pi)$), pois temos que se π_1 é normal, $lp(\pi_1)= 1$ e $p(\pi_1^*)= 0$.

Encerraremos esta seção demonstrando que, para toda derivação π, $o(\pi)$ é único e finito.

2.4.2 TEOREMA: Existência, Finitude e Unicidade de $o(\pi)$

Para qualquer derivação π em C', $o(\pi)$ está definido, é único e finito.

<u>PROVA</u>:

Os Comentários 2.3.7.1-(*a*) e (*b*), e o Teorema 2.3.12 garantem que, para cada derivação π, π^* existe e é única. Logo, pela Definição 2.4.1, $o(\pi)$ existe e é único para toda derivação π.

Como a seqüência estrela que produziu π^* a partir de π é finita (Teorema 2.3.12), e a multiplicação-*, executada a cada passo da seqüência, é uma operação finitária (Observação 2.3.3.1-(*f*)), então é claro que se π é uma derivação finita, π^* também o é. Logo, sendo finita, π^* possui um número finito de ocorrências de fórmulas e, portanto, $p(\pi^*)< \omega$. Assim, pela Definição 2.4.1 é claro que $o(\pi)< \omega$. ♦

Capítulo III

O ordinal $o(\pi)$ diminui com as reduções e coincide com o comprimento $lp(\pi)$ da pior seqüência de redução para π

Neste capítulo provaremos que a atribuição numérica $o(\pi)$, cuja finitude e unicidade para cada derivação π foram provadas no capítulo anterior, possui a propriedade fundamental de diminuir com as reduções, constituindo-se, portanto, no que estamos chamando de ordinal natural para as derivações do sistema C'. Provaremos também que, para toda derivação π, $o(\pi)$ coincide com $lp(\pi)$, o comprimento da pior seqüência de redução para π, sendo portanto o menor ordinal natural para as derivações de C'. A partir destes resultados obteremos provas bastante simples para o Teorema de Normalização Forte e Teorema de Church-Rosser para C', concluindo assim os resultados desta tese referentes a este sistema.

Vamos inicialmente apresentar um esboço de como produzimos a prova de que $o(\pi)$ diminui com as reduções. Tal esboço será útil para entendermos o percurso da longa série de resultados estruturais sobre derivações que apresentamos neste capítulo. A prova de que $o(\pi)$ diminui com as reduções ($\pi\to\pi' \;\Rightarrow\; o(\pi)> o(\pi')$) foi produzida por indução em $p(\pi^*)= o(\pi) -1$ e desenvolvida por casos, conforme a posição da *FM* reduzida em $\pi\to\pi'$ com relação a $F(\pi)$. Tendo como foco $F(\pi)$, podemos dizer que π, uma derivação qualquer de C', possui 4 formas básicas possíveis que representarão os 4 casos fundamentais da nossa prova. São elas:

$$(a)\ \pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_2\\ B\end{array}}{A\supset B}\,k}{B} \\ \pi_3 \end{array}, \text{ onde } A\supset B \text{ é } F(\pi) \text{ e é } OM_\pi.$$

$$(b)\ \pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ B\end{array}}{A\supset B}}{B} \\ \pi_3 \end{array}, \text{ onde } A\supset B \text{ é } F(\pi) \text{ e não é } OM_\pi.$$

$$(c)\ \ \pi \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\pi_1 & \pi_2\\ A & B\end{matrix}}{A\wedge B}}{\begin{matrix}B\\ \pi_3\end{matrix}} \quad \text{, onde } A\wedge B \text{ é } F(\pi).$$

$$(d)\ \pi \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A_a\end{matrix}}{\forall_x A_x}}{\begin{matrix}A_t\\ \pi_2\end{matrix}} \text{, onde } \forall x A x \text{ é } F(\pi).$$

Em cada um destes casos podemos ter que π' foi obtida de π por redução de uma fórmula máxima que ocorre em π_1, π_2, π_3, ou pela redução de $F(\pi)$. Portanto, para cada um destes 4 casos de π temos 4 possíveis subcasos para analisar.[27] Para resolvermos todos estes subcasos, tendo em vista que a prova será feita por indução em $p(\pi^*)$, precisamos apresentar uma caracterização de π^* a partir de π, e de $\pi^{\square *}$, a partir de $\pi^{\square}$, onde $\pi^{\square}$ é a derivação obtida de π através da redução de $F(\pi)$. O Teorema 3.2.8 apresentará tal caracterização quando π é como em (*b*), (*c*) ou (*d*) descritos acima. Este resultado, juntamente com o resultado do Teorema 3.2.9, que relacionará $p(\pi^*)$ com $p(\pi^{\square *})$, são suficientes para resolvermos todos os subcasos dos casos em que π é como em (*b*), (*c*) ou (*d*), na prova de que $o(\pi)$ diminui com as reduções.

Para resolvermos o caso em que π é como em (*a*), provaremos que

$$\pi_\Delta \equiv \cfrac{A \quad \cfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ [A]\\ \pi_2\\ B\end{matrix}}{A\supset B}}{\begin{matrix}B\\ \pi_3\end{matrix}}$$

, obtida de π através da multiplicação-* de $F(\pi)= A\supset B$ é tal que $\pi^* \equiv \pi^*_\Delta$. Se provarmos isso, como $F(\pi_\Delta)= A\supset B$ não é OM_{π_Δ}, temos que π_Δ tem a forma de π do caso (*b*), e portanto estamos reduzindo este caso ao caso anterior. Fazendo isso conseguimos tratar o caso de derivações com a forma de (*a*) na prova de que $o(\pi)$ diminui com as reduções.

---

[27] É claro que como π_3 não é subárvore de π quando π é como em (*d*), neste caso só temos três subcasos para analisar: ou a *FM* reduzida em $\pi\rightarrow\pi'$ ocorre em π_1, ou em π_2, ou é $\forall x A(x)$.

Diante disso, dividiremos este capítulo em 4 seções principais: na primeira seção, apresentamos uma série de resultados técnicos, que representam os argumentos que serão mais freqüentemente utilizados nas provas dos teoremas do capítulo. Na segunda seção, apresentamos uma longa série de resultados que culmina com os Teoremas 3.2.8 e 3.2.9 de que falamos acima. Na terceira seção, o objetivo é apresentar uma caracterização para a forma de π^* quando π é como em (*a*), provando, como dissemos, que $\pi^* \equiv \pi^*_\Delta$. Na quarta seção, com todos os requisitos necessários já demonstrados, obtemos finalmente os resultados fundamentais deste capítulo, que descrevemos no primeiro parágrafo acima.

§1 Resultados Auxiliares

O objetivo dessa seção é apresentar uma série de resultados auxiliares que representam argumentos que serão utilizados recorrentemente nas provas deste capítulo. O primeiro teorema estabelece que ser OM em uma subárvore completa de uma derivação, é o mesmo que ser OM na derivação.

3.1.1 TEOREMA:

Seja π uma derivação, π_1 uma subárvore completa de π e φ uma ocorrência em π_1 distinta de $r(\pi_1)$. Então: φ é $OM_{\pi_1} \Leftrightarrow \varphi$ é OM_π

PROVA:

•($\Rightarrow$)

Como φ é OM_{π_1}, então φ satisfaz os 4 itens da Definição 2.3.1 em π_1, sendo imediato que φ também satisfaz trivialmente estes mesmos itens em π. □

•($\Leftarrow$)

Veremos que φ satisfaz os 4 itens da Definição 2.3.1 de ocorrência multiplicativa em π_1.

Item (1): Provaremos que φ é OP_{π_1}

(*i*) Se φ é OM_π, então φ é OP_π.

(*ii*) Como π_1 é subárvore completa de π, então, pelo Teorema 2.2.10-(1), temos que $nl_\pi(\pi_1)= 0$.

Por hipótese, φ ocorre em π_1 e é distinta de $r(\pi_1)$, portanto, por (*i*) e (*ii*) temos que φ é OP_{π_1}.

Item (2): Provaremos que φ é PM de ($\supset$E) em π_1

Como φ é OM_π, φ é PM de regra de ($\supset$E) em π.

Como φ é OP_{π_1} (pelo Item 1), a regra na qual φ é *PM* ocorre integralmente em π_1. Assim, φ é *PM* de ($\supset$E) em π_1.

Item (3): Provaremos que a regra que gera ocorrência associada a φ corta top-fórmula de π_1

Como φ é OM_π, a regra R de introdução que gera $\psi = ass_\pi(\varphi)$ corta alguma top--fórmula de π.

Como φ é OP_{π_1}, ψ e R ocorrem em π_1 e $\psi = ass_{\pi_1}(\varphi)$.

Como π_1 é subárvore completa de π, as top-fórmulas cortadas por R também ocorrem em π_1.

Portanto, a regra R de introdução que gera $\psi = ass_{\pi_1}(\varphi)$ corta top-fórmula de π_1.

Item (4): Provaremos que a premissa menor ao lado de φ em π_1 não é hipótese aberta

Seja $\dfrac{\psi \quad \varphi}{\xi}$ a regra ($\supset$E) de π onde φ é PM.

Como, por hipótese, φ não é $r(\pi_1)$, então, ξ também ocorre em π_1.

Como π_1 é subárvore completa de π e ξ ocorre em π_1, ψ e tudo o que ocorre acima de ψ também ocorre em π_1. Portanto:

(*iii*) $\nabla_\pi(\psi) = \nabla_{\pi_1}(\psi)$.

Assim, como φ é OM_π, temos $l_\pi(\nabla_\pi(\psi)) > 1$ ou $\nabla_\pi(\psi)$ é top-fórmula cortada. Portanto, por (*iii*) temos: $l_{\pi_1}(\nabla_{\pi_1}(\psi)) > 1$ ou $\nabla_{\pi_1}(\psi)$ é top-fórmula cortada. ♦ [28]

No próximo teorema, provamos um resultado importante para começarmos a caracterizar a forma das derivações estrela a partir da derivação original.

[28] Quando φ é *OM* do tipo 2 em π, ψ, a premissa menor ao lado de φ, pode ter sido cortada por uma regra que não ocorre em π_1. Poder-se-ia então argumentar que em π_1, ψ é hipótese aberta. No entanto, as nossas definições de subárvore e subárvore completa são definições sintáticas que copiam sintaticamente os sinais de corte das hipóteses mesmo que as regras não estejam presentes. π_1 é neste contexto uma subárvore, e como subárvore pode possuir sinais de corte de regras que não pertencem a π_1.

3.1.2 TEOREMA:

Sejam π uma derivação e π_1 uma subárvore completa de π. Se $T(\pi)$ está em π_1 e não é $r(\pi_1)$, então, $T(\pi)= T(\pi_1)$ e $\pi^\bullet$ é obtido de π substituindo-se π_1 por $\pi_1^\bullet$.

<u>PROVA</u>:

Pela Definição 2.3.6 é claro que $T(\pi)$ é OM_π, logo, como por hipótese $T(\pi) \neq r(\pi_1)$ ocorre em π_1, que é subárvore completa de π, pelo Teorema 3.1.1 temos que $T(\pi)$ é OM_{π_1}. Ou seja, a condição (1) da Definição 2.3.6 de ocorrência estrela é satisfeita por $T(\pi)$ em π_1.

(*i*) Como $T(\pi)$ é OM_{π_1} e π_1 é subárvore de π, é claro que não existe OM_{π_1} com grau maior que $T(\pi)$, nem de mesmo grau, cuja ocorrência associada tenha posição maior que a ocorrência associada a $T(\pi)$. Portanto, $T(\pi)= T(\pi_1)$.

(*ii*) Além disso, como $T(\pi)$ é OM_{π_1}, temos também que tanto as top-fórmulas cortadas pela regra que gerou a ocorrência associada a $T(\pi)$, como toda a subárvore da premissa menor de $T(\pi)$, estão em π_1.

Sabemos que $\pi^\bullet$ é obtido pela multiplicação-* em π de $T(\pi)$. Mas, por (*ii*), temos que todas as alterações que a multiplicação-* de $T(\pi)$ provocam em π são internas a π_1. Como por (*i*) $T(\pi)= T(\pi_1)$, então fazer a multiplicação-* de $T(\pi)$ em π é o mesmo que fazer a multiplicação-* de $T(\pi_1)$ em π_1. Ou seja, o resultado da multiplicação-* de $T(\pi)$ em π (que é $\pi^\bullet$) é a substituição de π_1 por $\pi_1^\bullet$. ♦

3.1.2.1 EXEMPLO:

Seja $\pi \equiv \begin{array}{c}\pi_1\\ \mathsf{A}\\ \pi_2\end{array}$. Temos que π e π_1 são dos tipos:

$$\pi_1 \equiv \begin{array}{c} \quad\quad [B]^k \\ \pi_3 \quad\quad \pi_4 \\ \dfrac{B \quad B \supset C}{C} \\ \pi_5 \\ A \end{array} \qquad e \qquad \pi \equiv \begin{array}{c} \quad\quad [B]^k \\ \pi_3 \quad\quad \pi_4 \\ \dfrac{B \quad B \supset C}{C} \\ \pi_5 \\ A \\ \pi_2 \end{array}$$

onde $B \supset C$ é $T(\pi)$ e $T(\pi_1)$.

Assim, temos:

$$\pi_1^{\bullet} \equiv \begin{array}{c} \qquad\quad \pi_3 \\ \qquad\quad [\mathsf{B}] \\ \qquad\quad \pi_4 \\ \underline{\mathsf{B} \quad \mathsf{B} \supset \mathsf{C}} \\ \mathsf{C} \\ \pi_5 \\ \mathsf{A} \end{array} \qquad \text{e} \qquad \pi^{\bullet} \equiv \begin{array}{c} \qquad\quad \pi_3 \\ \qquad\quad [\mathsf{B}] \\ \qquad\quad \pi_4 \\ \underline{\mathsf{B} \quad \mathsf{B} \supset \mathsf{C}} \\ \mathsf{C} \\ \pi_5 \\ \mathsf{A} \\ \pi_2 \end{array} . \quad \text{Logo, } \pi^{2} \equiv \begin{array}{c} \pi_1^{\bullet} \\ \mathsf{A} \\ \pi_2 \end{array} .$$

A definição seguinte formaliza a Definição 1.5.1, de $F(\pi)$, utilizando para isto a Definição 2.2.7, de posição de uma ocorrência em uma derivação.

3.1.3 DEFINIÇÃO: $F(\pi)$

Seja π uma derivação e ψ uma ocorrência de fórmula em π. Temos:

$\psi = F(\pi) \iff pos_{\pi}(\psi) = min\{pos_{\pi}(\varphi) \ / \ \varphi \text{ é } FM \text{ em } \pi\}$.

3.1.3.1 OBSERVAÇÃO:

Denotaremos por $\pi^{\square}$ a derivação obtida de π pela redução de $F(\pi)$.

No teorema seguinte, continuamos estabelecendo propriedades sobre a forma de derivações da seqüência estrela.

3.1.4 TEOREMA:

Seja $\pi \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ \mathsf{A} \\ \pi_2 \end{array}$ tal que $pos_{\pi}(F(\pi)) \geq pos_{\pi}(\mathsf{A})$ e φ uma $OPL_{\pi}(\pi_2)$. Então:

(1) $\pi_2 \equiv \begin{array}{c} \qquad \mathsf{A} \\ \underline{\pi_3 \qquad \pi_4} \\ \mathsf{B} \\ \pi_5 \end{array}$, tal que $\psi = ass_{\pi}(\varphi) = ass_{\pi_2}(\varphi)$ ocorre em π_3;

(2) φ é $OM_{\pi} \iff \varphi$ é OM_{π_2};

(3) φ é $T(\pi) \Rightarrow \varphi$ é $T(\pi_2)$;

(4) φ é $T(\pi)$ $\Rightarrow$ $\pi^{\bullet} \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ \mathsf{A} \\ \pi_2^{\bullet} \end{array}$.[29]

<u>PROVA</u>:

Item (1)

Seja $\psi = ass_{\pi}(\varphi)$. Se φ é $OPL_{\pi}(\pi_2)$, então, por 2.2.9.1-(*a*), tem que haver um segmento-α totalmente definido em π_2, do qual φ e ψ sejam ocorrências.

Pela Observação 2.1.13-(*e*), deve haver uma ou mais *FM*s ocorrendo entre ψ e φ. Ou seja, ψ e φ têm que estar em um ramo de π_2 no qual ocorram *FM*s.

Como $pos_{\pi}(F(\pi)) \geq pos_{\pi}(\mathsf{A})$, então não existe nenhuma *FM* em π_2 que ocorra abaixo ou à direita de A em π_2. Logo, se ξ é *FM* em π_2 temos que π_2 pode ser escrita como:

$$\pi_2 \equiv \begin{array}{c} \mathsf{A} \\ \dfrac{\pi_3 \qquad \pi_4}{\mathsf{B}} \\ \pi_5 \end{array}$$

, onde ξ ocorre em π_3. Em particular, isto vale para as *FM*s entre ψ e φ.

Se ξ, *FM* entre ψ e φ ocorre em π_3, então, ψ ocorre em π_3, pois ψ ocorre acima de ξ. □

Item (2)

Pelo Item (1) temos que π e π_2 têm as formas:

$$\pi_2 \equiv \begin{array}{c} \mathsf{A} \\ \dfrac{\pi_3 \qquad \pi_4}{\mathsf{B}} \\ \pi_5 \end{array} \quad \text{e} \quad \pi \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ \mathsf{A} \\ \dfrac{\pi_3 \qquad \pi_4}{\mathsf{B}} \\ \pi_5 \end{array}$$

, e que $\psi = ass_{\pi}(\varphi) = ass_{\pi_2}(\varphi)$ ocorre em π_3.

É fácil ver, por inspeção nas cláusulas da Definição 2.3.1 de OM, que, como $\psi = ass_{\pi}(\varphi) = ass_{\pi_2}(\varphi)$ ocorre em π_3, então o que ocorre acima de A, top-fórmula de π_4, não interfere nas cláusulas da definição de φ como OM.

Portanto: φ é OM_{π} $\Leftrightarrow$ φ é OM_{π_2}. □

Item (3)

Como φ é $T(\pi)$, então φ é OM_{π}.

---

[29] A hipótese destacada A, de $\pi_2^{\bullet}$, é $(\mathsf{A})_1$, a única cópia-* da hipótese destacada A de π_2.

Logo, pelo Item (2), φ é OM_{π_2}.

Como $\varphi = T(\pi)$ é OM_{π_2} e π_2 é subárvore de π, é claro que não existe outra OM_{π_2} com grau maior que φ, nem ocorrência de mesmo grau com posição maior que φ. Portanto, $\varphi = T(\pi) = T(\pi_2)$. $\square$

Item (4)

Pelo Item (1) temos que $\pi_2 \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\pi_3 \qquad \begin{array}{c} A \\ \pi_4 \end{array}}{B} \\ \pi_5 \end{array}$, onde $\psi = ass_{\pi}(\varphi) = ass_{\pi_2}(\varphi)$ ocorre em π_3.

(*i*) Neste caso, temos que todas as top-fórmulas que a regra que gera ψ corta estão em π_3.

Analisemos dois casos: ou φ também ocorre em π_3, ou φ ocorre em π_5. Vejamos:

<u>CASO 1</u>: φ ocorre em π_3

Neste caso, como π_3 é subárvore completa de π, pelo Teorema 3.1.2 temos:

$$\pi_2^{\bullet} \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\pi_3^{\bullet} \qquad \begin{array}{c} A \\ \pi_4 \end{array}}{B} \\ \pi_5 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \pi^{\bullet} \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\pi_3^{\bullet} \qquad \begin{array}{c} \pi_1 \\ A \\ \pi_4 \end{array}}{B} \\ \pi_5 \end{array}. \quad \text{Logo, } \pi^{\bullet} \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ A \\ \pi_2^{\bullet} \end{array}.$$

<u>CASO 2</u>: φ ocorre em π_5

Neste caso, pelo Item (3), temos que φ é $T(\pi_2)$. Além disso, a multiplicação-* de φ, tanto em π_2 quanto em π, retira a subárvore da premissa menor de φ, em π_5, e a copia sobre cada hipótese que ψ corta em π_3. Temos:

$\pi_5 \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c} \pi_7 \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{c} B \\ \pi_6 \\ C \supset D \end{array}}{D} \\ \pi_8 \end{array}$, onde $C \supset D$ é $\varphi = T(\pi) = T(\pi_2)$. Além disso, $\pi_3 \equiv \begin{array}{c} [C]^k \\ \pi_3 \end{array}$, onde as hipóteses destacadas são cortadas pela regra de π_3 que gera ψ, ocorrência associada a φ. Dessa forma temos:

$$(ii)\ \pi_2 \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\pi_7\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{cc}[C]^k & A\\ \pi_3 & \pi_4\end{array}}{B}\\ \pi_6\\ C \supset D\end{array}}{D}\\ \pi_8\end{array} \quad \text{e} \quad \pi_2^{\bullet} \equiv \begin{array}{c}\dfrac{C \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{cc}\pi_7 & \\ {[C]} & A\\ \pi_3 & \pi_4\end{array}}{B}\\ \pi_6\\ C \supset D\end{array}}{D}\\ \pi_8\end{array}\ ;\ \text{e}$$

$$(iii)\ \pi \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\pi_7\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{cc} & \pi_1\\ {[C]} & A\\ \pi_3 & \pi_4\end{array}}{B}\\ \pi_6\\ C \supset D\end{array}}{D}\\ \pi_8\end{array} \quad \text{e} \quad \pi^{\bullet} \equiv \begin{array}{c}\dfrac{C \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{cc}\pi_7 & \pi_1\\ {[C]} & A\\ \pi_3 & \pi_4\end{array}}{B}\\ \pi_6\\ C \supset D\end{array}}{D}\\ \pi_8\end{array}\ .$$

Assim, por (*ii*) e (*iii*) temos: $\pi^{\bullet} \equiv \begin{array}{c}\pi_1\\ A\\ \pi_2^{\bullet}\end{array}$. ♦

O lema seguinte, que já usamos informalmente nas demonstrações dos Itens (3) e (4) acima, é conseqüência imediata da Definição 2.2.7 de posição, e estabelece que posições relativas entre ocorrências de fórmulas em uma subárvore e uma derivação que contém a subárvore, não se alteram.

3.1.5 LEMA:

Se φ e ψ são duas ocorrências de fórmula em π_1, uma subárvore qualquer de uma derivação π_2. Então: $pos_{\pi_2}(\varphi) < pos_{\pi_2}(\psi) \Leftrightarrow pos_{\pi_1}(\varphi) < pos_{\pi_1}(\psi)$.

PROVA:

Imediata, pela Definição 2.2.7. ♦

O teorema seguinte estabelece que a substituição de uma subárvore cuja raiz tem posição maior que $F(\pi)$ não altera a F da derivação resultante.

3.1.6 TEOREMA:

Seja π uma derivação do tipo: $\pi \equiv \begin{array}{c}\pi_1\\ \mathsf{A}\\ \pi_2\end{array}$. Seja π_∇ obtida de π pela substituição de π_1 por uma derivação $\begin{array}{c}\pi_3\\ \mathsf{A}\end{array}$ qualquer tal que $\pi_\nabla \equiv \begin{array}{c}\pi_3\\ \mathsf{A}\\ \pi_2\end{array}$. Se $\varphi = F(\pi)$ ocorre em π_2 e $pos_\pi(\mathsf{A}) \succ pos_\pi(\varphi)$, então $\varphi = F(\pi_\nabla)$.

<u>PROVA</u>:

Note que na passagem de π para π_∇ a única ocorrência em π_2 cuja regra que a gera pode ter sido alterada é A, ligação entre π_1 e π_2 e entre π_1 e π_3. Dessa forma, é claro que se $\psi \neq \mathsf{A}$ ocorre em π_2 temos:

(*i*) ψ é *FM* em $\pi \Leftrightarrow \psi$ é *FM* em π_2.

(*ii*) ψ é *FM* em $\pi_\nabla \Leftrightarrow \psi$ é *FM* em π_2.

Como $\varphi = F(\pi)$ e $pos_\pi(\mathsf{A}) \succ pos_\pi(\varphi)$, é claro, pela Definição 3.1.3 e por (*i*), que:

(*iii*) ψ é *FM* em $\pi_2 \Rightarrow pos_\pi(\varphi) \leq pos_\pi(\psi) \underset{3.1.5}{\Rightarrow} pos_{\pi_2}(\varphi) \leq pos_{\pi_2}(\psi)$.

Como π_2 é subárvore de π_∇ temos:

(*iv*) ψ é *FM* em $\pi_2 \underset{(iii)}{\Rightarrow} pos_{\pi_2}(\varphi) \leq pos_{\pi_2}(\psi) \underset{3.1.5}{\Rightarrow} pos_{\pi\nabla}(\varphi) \leq pos_{\pi\nabla}(\psi)$.

Como A é $r(\pi_3)$, então é claro pela Definição 3.1.3 de posição que A tem posição menor que qualquer ocorrência em π_3, ou seja:

(*v*) ξ ocorre em $\pi_3 \Rightarrow pos_{\pi_3}(\xi) \geq pos_{\pi_3}(\mathsf{A}) \underset{3.1.5}{\Rightarrow} pos_{\pi\nabla}(\xi) \geq pos_{\pi\nabla}(\mathsf{A})$.

Para ζ, uma ocorrência qualquer em π_∇, é claro que:

(*vi*) ζ é *FM* em $\pi_\nabla \Rightarrow \zeta$ é *FM* em π_2 ou ζ ocorre em π_3.

Além disso, como, por hipótese, $pos_\pi(\mathsf{A}) \succ pos_\pi(\varphi)$ e A e φ ocorrem em π_1, que é subárvore tanto de π quanto de π_∇, então, pelo Teorema 3.1.5, temos que $pos_{\pi_1}(\mathsf{A}) \succ pos_{\pi_1}(\varphi)$ e:

(*vii*) $pos_{\pi\nabla}(\mathsf{A}) \succ pos_{\pi\nabla}(\varphi)$.

Assim, por (*v*) e (*vii*) temos:

(*viii*) ξ ocorre em $\pi_3 \Rightarrow pos_{\pi\nabla}(\xi) \succ pos_{\pi\nabla}(\varphi)$.

Logo, por (*iv*), (*vi*) e (*viii*) temos:

(*ix*) ζ é *FM* em $\pi_\nabla \Rightarrow pos_{\pi\nabla}(\xi) \geq pos_{\pi\nabla}(\varphi)$.

Note, por (*ii*), que $\varphi \neq \mathsf{A}$ é *FM* em π_∇. Logo, por (*ix*) e pela Definição 3.1.3, temos que φ é $F(\pi_\nabla)$. ♦

O Teorema seguinte estabelece mais dois importantes resultados auxiliares.

3.1.7 TEOREMA:

(1) Se φ é OM_π e $gr(\varphi) \geq gr(F(\pi))$, então $pos_\pi(\varphi) \geq pos_\pi(F(\pi))$.

(2) Se $T(\pi)= F(\pi)$, então $ng(\pi)= 1$.

PROVA:

Item (1)

Seja ψ uma OP_π. Vamos provar o item por contraposição. Ou seja, vamos provar que:

(*) $pos_\pi(\psi)< pos_\pi(F(\pi)) \Rightarrow gr(\psi)< gr(F(\pi))$.

Seja $\rho= \mathsf{A}_1, \ldots , \mathsf{A}_k, \ldots , \mathsf{A}_n$ o segmento-α ao qual $F(\pi)$ pertence, e seja $\mathsf{A}_k= F(\pi)$.

Como, pela Definição 3.1.3, não existe *FM* com posição menor que $F(\pi)$ em π, se ψ é OP_π e $pos_\pi(\psi)< pos_\pi(F(\pi))$, é claro que ψ é algum A_i de ρ, com ($k< i \leq n$), e neste caso a prova de (*) é trivial a partir dos Teoremas 2.1.18 e 2.1.19. □

Item (2)

Para provar que $ng(\pi)= 1$, temos que provar que:

(*) $\psi \neq F(\pi)$ é $OM_\pi \Rightarrow gr(\psi)< gr(F(\pi))$.

Como $F(\pi)$ é *FM* em π, é claro que: $ass_\pi(F(\pi))= F(\pi)$, logo:

(*i*) $pos_\pi(ass_\pi(F(\pi)))= pos_\pi(F(\pi))$.

Como $\psi \neq F(\pi)$ temos dois casos para analisar: ou $pos_\pi(\psi)> pos_\pi(F(\pi))$, ou $pos_\pi(\psi)< pos_\pi(F(\pi))$.

CASO 1: $pos_\pi(\psi)> pos_\pi(F(\pi))$

É fácil ver, pela Definição 2.1.13 de ocorrência associada, que:

(*ii*) $pos_\pi(ass_\pi(\psi)) \geq pos_\pi(\psi)$.

Assim, por (*i*), (*ii*) e pela hipótese deste caso temos:

(*iii*) $pos_\pi(ass_\pi(\psi)) > pos_\pi(ass_\pi(F(\pi)))$.

Como, por hipótese, $F(\pi)$ é $T(\pi)$, por (*iii*) e pela Definição 2.3.6 de $T(\pi)$, é claro que $gr(\psi) < gr(F(\pi))$. Caso contrário $F(\pi)$ não seria $T(\pi)$.

CASO 2: $pos_\pi(\psi) < pos_\pi(F(\pi))$

É imediato pelo Item (1), por contraposição, que $gr(\psi) < gr(F(\pi))$. ♦

3.1.8 TEOREMA:

Seja π uma derivação não normal em C', φ uma OP_π e $\psi = ass_\pi(\varphi)$.

Então: $pos_\pi(\psi) \geq pos_\pi(F(\pi))$.

PROVA:

É imediato pelas Definições 2.1.9 e 2.1.10 que, se (ψ,φ) é um par-α em π com $\psi = ass_\pi(\varphi)$, então:

(*i*) ou ψ e φ são a mesma ocorrência de uma *FM*;

(*ii*) ou ψ ocorre acima de φ em π e existe pelo menos uma *FM* entre ψ e φ.

Por (*i*) e (*ii*) é claro que se $\psi = ass_\pi(\varphi)$, então:

(*iii*) Existe uma *FM* ξ em π tal que $pos_\pi(\xi) \leq pos_\pi(\psi)$

(*iv*) Como, pela Definição 3.1.3 temos: ξ é *FM* em $\pi \Rightarrow pos_\pi(F(\pi)) \leq pos_\pi(\xi)$,

então, por (*iii*) e (*iv*) temos: $pos_\pi(\psi) \geq pos_\pi(F(\pi))$. ♦

3.1.9 DEFINIÇÃO: π_Δ

Seja π uma derivação em C'. Definimos π_Δ como a derivação obtida de π pela multiplicação-* de $F(\pi)$. Se $F(\pi)$ não for OM_π, então dizemos que $\pi_\Delta \equiv \pi$.

3.1.9.1 EXEMPLO:

$$\text{Se } \pi \equiv \begin{array}{c} \pi_3 \\ \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_2\\ B\end{array}}{A \supset B}\,k}{B} \end{array}$$

, onde $A \supset B$ é $F(\pi)$, então:

$$\pi_\Delta \equiv \dfrac{A \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ [A]\\ \pi_2\\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}}\ .$$

$$\text{Se } \pi \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2 \\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B \\ \pi_3\end{array}}, \text{ onde } A\supset B \text{ é } F(\pi), \text{ então: } \pi_\Delta \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2 \\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B \\ \pi_3\end{array}} \equiv \pi.$$

3.1.9.2 OBSERVAÇÃO:

Note, pelas formas de π e π_Δ, que se π_Δ difere de π, ela difere apenas em subárvores cujas raízes têm posição maior que a posição de $F(\pi)$. Dessa forma, pelo Teorema 3.1.6, $A\supset B$ é $F(\pi_\Delta)$.

3.1.10 TEOREMA:

$$\text{Seja } \pi \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^k \\ \pi_2 \\ B\end{array}}{A \supset B}\,k}{\begin{array}{c}B \\ \pi_3\end{array}}, \text{ onde } A\supset B \text{ é } F(\pi) \text{ e } \pi_\Delta \equiv \dfrac{A \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ [A] \\ \pi_2 \\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B \\ \pi_3\end{array}}, \text{ como definidos acima.}$$

Então, não existe em π_Δ top-fórmula de π_1 cortada por regra externa a π_1 cuja conseqüência tenha posição maior que a posição de $A\supset B= F(\pi_\Delta)$ em π_Δ.

PROVA:

Note, pela forma de π, que se em π existe alguma top-fórmula de π_1 que é cortada por regra que ocorre fora de π_1, então esta regra ocorre em π_3 e sua conseqüência ocorre abaixo de B. Caso contrário não haveria ramo de π ligando a top-fórmula cortada em π_1 com a regra que a cortou. Mas como $A\supset B= F(\pi)$ ocorre imediatamente acima de B, é claro, pela Observação 2.2.7.1-(*c*), que a conseqüência desta regra possui posição menor que a posição de $A\supset B= F(\pi)$ em π.

Considere ψ uma ocorrência em π que é conseqüência de regra externa a π_1 e que corta top-fórmula de π_1 em π. Podemos então dizer que:

(*i*) $pos_\pi(\psi) < pos_\pi(B)$.

Também é claro, pela forma de π, que qualquer ocorrência com posição menor que a posição de $F(\pi)$ em π, ocorre em π_3. Logo, ψ ocorre em π_3, portanto, pelo Teorema 3.1.5 e por (*i*) temos:

(*ii*) $pos_{\pi_3}(\psi) < pos_{\pi_3}(\mathsf{B})$.

Mas a multiplicação-* que produz π_Δ a partir de π apenas retira π_1 de uma posição e copia para outras, sem modificar π_1 nem outras marcas de corte além das relacionadas com a ocorrência que foi multiplicada ($\mathsf{A}\supset\mathsf{B}$ no caso). Assim, em π_Δ, as únicas ocorrências que são conseqüências de regras que não estão em π_1 e que cortam hipóteses de π_1 são os resíduos-* das ocorrências em π que são conseqüência de regras que não estão em π_1 e que cortam hipóteses de π_1.

(*iii*) Ou seja, todas as ocorrências em π_Δ que cortam hipóteses de π_1 e ocorrem fora das cópias de π_1, são as cópias-* de ocorrências do tipo de ψ descrito acima.

Mas pela Definição 2.3.9 de cópia-*, como $\mathsf{A}\supset\mathsf{B}$ é a ocorrência multiplicada em $\pi \xrightarrow{*} \pi_\Delta$, temos que $(\psi)_1$ e $(\mathsf{B})_1$, as únicas cópias-* de ψ e B em π_Δ, são as próprias ocorrências ψ e B em π_3. Logo, como π_3 é subárvore de π_Δ, por (*ii*) e pelo Teorema 3.1.5, temos:

(*iv*) $pos_{\pi_\Delta}(\psi) < pos_{\pi_\Delta}(\mathsf{B})$.

Como $\mathsf{A}\supset\mathsf{B}$ é $F(\pi_\Delta)$, e $pos_{\pi_\Delta}(\mathsf{A}\supset\mathsf{B}) > pos_{\pi_\Delta}(\mathsf{B})$, então, por (*iv*) temos:

(*v*) $pos_{\pi_\Delta}(\psi) < pos_{\pi_\Delta}(F(\pi))$.

Assim, por (*iii*) e (*v*) temos que não existe em π_Δ top-fórmula de π_1 cortada por regra externa a π_1 cuja conseqüência tenha posição maior que a posição de $\mathsf{A}\supset\mathsf{B}=F(\pi_\Delta)$ em π_Δ. ♦

O teorema que segue estabelece alguns resultados triviais sobre derivações normais.

3.1.11 TEOREMA:

(1) π é normal $\Leftrightarrow$ $p(\pi)=0$.

(2) π é normal $\Rightarrow$ $\pi \equiv \pi^*$.

(3) π é normal $\Leftrightarrow$ $p(\pi^*)=0$.

PROVA:

Item (1)

π é normal $\Leftrightarrow$ π não tem ocorrência de fórmula máxima (*FM*).

π não tem *FM* $\Leftrightarrow$ π não tem segmento-α.

π não tem segmento-α $\Leftrightarrow$ π não tem ocorrência pesada (OP).

π não tem OP $\Leftrightarrow$ $p(\pi)= 0$.

Portanto, π é normal $\Leftrightarrow$ $p(\pi)= 0$. □

Item (2)

Pelo Item 1, se π é normal, então $p(\pi)= 0$.

Se $p(\pi)= 0$, então, π não tem ocorrência pesada (OP).

Se π não tem OP, então π não tem ocorrência multiplicativa (OM).

Se π não tem OM, então π é derivação estrela e portanto $\pi \equiv \pi^*$. □

Item (3)

(*i*) Pelos Itens (1) e (2), π é normal $\Rightarrow$ $p(\pi^*)= 0$.

(*ii*) Pelo Teorema 2.3.10-(7), $p(\pi^*) \geq p(\pi)$.

(*iii*) Então, por (*ii*), $p(\pi^*)= 0$ $\Rightarrow$ $p(\pi)= 0$.

(*iv*) Pelo Item (1), $p(\pi)= 0$ $\Rightarrow$ π é normal.

(*v*) Portanto, por (*i*), (*iii*) e (*iv*), $p(\pi^*)= 0$ $\Leftrightarrow$ π é normal. ♦

§2 Resultados sobre Derivações nas quais $F(\pi)$ não é *FM* multiplicativa

Os resultados principais desta seção são apresentados nos dois últimos teoremas: os Teoremas 3.2.8 e 3.2.9. Neles estabelecemos relações importantes sobre o formato da derivação estrela e sobre o peso da derivação estrela para derivações π onde $F(\pi)$ não é *FM* multiplicativa. Todos os demais resultados desta seção são importantes apenas na medida em que são necessários para a obtenção de 3.2.8 e 3.2.9.

Simplificaremos os resultados desta seção dando uma caracterização única para os três tipos de derivações nas quais $F(\pi)$ não é uma *FM* multiplicativa.

3.2.1 Caracterização Única para Derivações com $F(\pi)$ Não Multiplicativa.

Uma derivação π tem $F(\pi)$ não multiplicativa quando π tem a forma:

$$\pi \equiv \begin{array}{c}\pi_1\\ B_1\\ \pi_2\\ B_2\\ \pi_3\end{array}, \text{ onde:}$$

• B_1 e B_2, a menos de parâmetros, são ocorrências da mesma fórmula B, sendo os índices apenas para distinção de referência.

• $F(\pi)= F(\pi_2)$ e π_2 é uma derivação com uma das três formas abaixo:

$$(a)\ \pi_2 \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_4\\ A\end{array} \qquad \dfrac{B_1}{A \supset B}}{B_2} \qquad (b)\ \pi_2 \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_4\\ A\end{array} \quad B_1}{A \wedge B}}{B_2} \qquad (c)\ \pi_2 \equiv \dfrac{\dfrac{Ba_1}{\forall x Bx}}{Bt_2}\ .$$

Ou seja:

$$(a)\ \pi_2 \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_4\\ A\end{array} \qquad \dfrac{B_1}{A \supset B}}{B_2} \ \Rightarrow\ \pi \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\pi_4\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ B_1\end{array}}{A \supset B}}{B_2}\\ \pi_3\end{array}, \text{ onde } A\supset B \text{ é } F(\pi).$$

$$(b)\ \pi_2 \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_4\\ A\end{array} \quad B_1}{A \wedge B}}{B_2} \ \Rightarrow\ \pi \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_4\\ A\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_1\\ B_1\end{array}}{A \wedge B}}{B_2}\\ \pi_3\end{array}, \text{ onde } A\wedge B \text{ é } F(\pi).$$

$$(c)\ \pi_2 \equiv \dfrac{\dfrac{Ba_1}{\forall x Bx}}{Bt_2} \ \Rightarrow\ \pi \equiv \begin{array}{c}\pi_1\\ \dfrac{\dfrac{Ba_1}{\forall x Bx}}{Bt_2}\\ \pi_3\end{array}, \text{ onde } \forall x Bx \text{ é } F(\pi).$$

Para todos os teoremas desta seção consideraremos que π é uma derivação do tipo descrita em 3.2.1 acima.

O primeiro teorema que apresentaremos estabelece a forma de π' (a derivação obtida de π através da redução de $F(\pi)$) quando π é como descrito acima.

3.2.2 TEOREMA:

A menos de parâmetros, $\pi^{\square} \equiv \begin{matrix}\pi_1 \\ \mathrm{B}_2 \\ \pi_3\end{matrix}$.

<u>PROVA</u>:

Como $\pi^{\square}$ é obtida de π pela redução de $F(\pi)$, o resultado segue, imediatamente, a partir da Caracterização 3.2.1. ♦

3.2.3 TEOREMA:

Se φ é $OPnL_{\pi}(\pi_3)$ e $\psi = ass_{\pi}(\varphi)$, então ψ ocorre em π_1.

<u>PROVA</u>:

(*i*) Pelo Teorema 2.2.10-(2), temos que φ ocorre em π_3 e ψ ocorre em π_1 ou π_2.

Mas pelas formas de π e π_2 em 3.2.1 é claro que ψ não pode ocorrer em π_2 e, portanto, ψ ocorre em π_1. ♦

O teorema seguinte estabelece relações entre π e $\pi^{\square}$ no que diz respeito a ocorrências pesadas e multiplicativas.

3.2.4 TEOREMA:

Se φ e ψ são ocorrências de fórmulas em π que ocorrem em π_1 ou em π_3, então:

(1) $pos_{\pi}(\varphi) < pos_{\pi}(\psi) \Rightarrow pos_{\pi^{\square}}(\varphi) < pos_{\pi^{\square}}(\psi)$.

(2) (φ é OP_{π}), com $\psi = ass_{\pi}(\varphi) \Leftrightarrow$ (φ é $OP_{\pi^{\square}}$), com $\psi = ass_{\pi^{\square}}(\varphi)$.

(3) φ é $OPnL_{\pi}(\pi_3)$, com $\psi = ass_{\pi}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi$ é $OPnL_{\pi^{\square}}(\pi_3)$, com $\psi = ass_{\pi^{\square}}(\varphi)$.

(4) (φ é OM_{π}) $\Leftrightarrow$ (φ é $OM_{\pi^{\square}}$).

(5) $\varphi = T(\pi)$ e $\psi = ass_{\pi}(\varphi) \Rightarrow \varphi = T(\pi^{\square})$ e $\psi = ass_{\pi^{\square}}(\varphi)$.

<u>PROVA</u>:

Item (1)

Imediata pelas formas de π e $\pi^{\square}$, e pelo Teorema 3.1.5. □

Itens (2) e (3)

Se φ é $OPL_{\pi_1}(\pi)$ ou $OPL_{\pi_3}(\pi)$ o resultado é imediato, porque tanto π_1 quanto π_3 são subárvores de π e $\pi^{\square}$ e, portanto, φ é $OPL_{\pi_1}(\pi^{\square})$ ou $OPL_{\pi_3}(\pi^{\square})$.

Se φ é $OPnL_{\pi_3}(\pi)$, então, pelo Teorema 3.2.3, φ ocorre em π_3 e ψ ocorre em π_1. Além disso, pelo Teorema 2.2.10-(3), φ e ψ pertencem a um segmento-α ρ que atravessa π_2 e possui $F(\pi)$, a *FM* reduzida em $\pi \rightarrow \pi'$.

Mas pelas Definições 2.1.9 e 2.1.10 é claro que a redução de uma *FM* em um segmento-α de comprimento maior que 1 não altera os demais pares-α, do segmento. Ou seja, se $\pi \rightarrow \pi'$ pela redução de *FM* A_k então:

$\rho= A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_m$ é segmento-α em π se, e somente se,

$\rho'= A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+2}, \ldots, A_m$ é segmento-α em π'. Assim, φ é $OPnL_{\pi_3}(\pi)$ se, e somente se, φ é $OPnL_{\pi_3}(\pi')$. $\square$

Item (4)

Dividiremos em casos, conforme a subárvore em que φ ocorre.

<u>CASO 1</u>: φ ocorre em π_1

Como π_1 é subárvore completa de π e π', pelo Teorema 3.1.1 temos:

(*i*) φ é $OM_{\pi'} \Leftrightarrow \varphi$ é OM_{π_1}.

(*ii*) φ é $OM_{\pi} \Leftrightarrow \varphi$ é OM_{π_1}.

Logo, por (*i*) e (*ii*) temos: φ é $OM_{\pi} \Leftrightarrow \varphi$ é $OM_{\pi'}$.[30]

<u>CASO 2</u>: φ ocorre em π_3

Analisemos dois subcasos: ou φ é $OPL_{\pi}(\pi_3)$, ou é $OPnL_{\pi}(\pi_3)$.

<u>SubCaso 2.1</u>: φ é $OPL_{\pi}(\pi_3)$

Pelas formas de π e π' e pelo Teorema 3.1.4-(2) temos:

(*iii*) φ é $OM_{\pi'} \Leftrightarrow \varphi$ é OM_{π_3}.

(*iv*) φ é $OM_{\pi} \Leftrightarrow \varphi$ é OM_{π_3}.

Portanto, por (*iii*) e (*iv*) temos:

φ é $OM_{\pi} \Leftrightarrow \varphi$ é $OM_{\pi'}$.

<u>SubCaso 2.2</u>: φ é $OPnL_{\pi}(\pi_3)$

Pelos Itens (2) e (3) temos:

(*v*) φ é $OPnL_{\pi}(\pi_3) \Leftrightarrow OPnL_{\pi'}(\pi_3)$.

[30] Note, neste caso, que se a premissa menor que ocorre ao lado de φ é cortada por regra que não ocorre em π_1, então, ela é cortada por regra de π_3, e neste caso, tanto em π quanto em π' esta regra ocorre e corta de fato a premissa.

(vi) $\psi = ass_{\pi}(\varphi) \Leftrightarrow \psi = ass_{\pi\Box}(\varphi)$.

Como φ ocorre em π_3 e π_3 é subárvore tanto de π quanto de $\pi^{\Box}$, temos:

(vii) φ é PM de ($\supset$E) em $\pi \Leftrightarrow \varphi$ é PM de ($\supset$E) em $\pi^{\Box}$.

($viii$) Pelo Teorema 3.2.3, ψ ocorre em π_1.

(ix) Além disso, π_1 é subárvore completa de π e $\pi^{\Box}$.

(x) Por ($viii$) e (ix), a regra R que gera ψ, tanto em π quanto em $\pi^{\Box}$, é regra de π_1.

Portanto, por ($viii$), (ix) e (x) temos:

R corta top-fórmula em $\pi \Leftrightarrow$ R corta top-fórmula em $\pi^{\Box}$.

Ou seja:

(xi) A regra que gera $\psi = ass_{\pi}(\varphi)$ corta top-fórmula de $\pi \Leftrightarrow$

A regra que gera $\psi = ass_{\pi\Box}(\varphi)$ corta top-fórmula de $\pi^{\Box}$.

Seja ξ a premissa menor da regra em que φ é PM em π_3. Como φ é $OPnL_{\pi}(\pi_3)$ e $OPnL_{\pi\Box}(\pi_3)$, é claro que a única ligação de π_3 não ocorre em $\nabla_{\pi_3}(\xi)$, então:

(xii) $\nabla_{\pi}(\xi) \equiv \nabla_{\pi_3}(\xi) \equiv \nabla_{\pi\Box}(\xi)$.

Assim, por (v), (vii), (xi) e (xii) temos que φ satisfaz todos os itens da Definição 2.3.1 de ocorrência multiplicativa em π se, e somente se, ela satisfaz em $\pi^{\Box}$. ♦

Item (5)

Imediata, pelos Itens (1), (4) e pela Definição 2.3.6 de Ocorrência Estrela. ♦

3.2.5 TEOREMA:

Para toda derivação π que satisfaz 3.2.1 temos:

(1) $nl_{\pi}(\pi_3) = nl_{\pi\Box}(\pi_3)$.

(2) $nl_{\pi}(\pi_2) = 0$.

<u>PROVA</u>:

Item (1)

Imediata pelo Teorema 3.2.4-(3). □

Item (2)

(i) A única $OP_{\pi 2}$ que não ocorre em π_4 é $F(\pi_2)$, que é FM em π_2 e, portanto, $OPL_{\pi}(\pi_2)$.

(*ii*) Como π_4 é subárvore completa de π_2 e de π, todas as OP_{π_4} são locais.

Logo, por (*i*) e (*ii*) temos que π_2 não possui OP não locais. Logo:

$nl_{\pi}(\pi_2)= 0$. ♦

O teorema seguinte apresenta uma caracterização de π_2^* a partir de π_2.

3.2.6 TEOREMA:

(1) $\pi_2 \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_4 \\ A\end{matrix} \quad \dfrac{B_1}{A \supset B}}{B_2} \Rightarrow \pi_2^* \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_4^* \\ A\end{matrix} \quad \dfrac{B_1}{A \supset B}}{B_2}$, onde $F(\pi_2^*)= A\supset B$.

(2) $\pi_2 \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_4 \\ A\end{matrix} \quad B_1}{A \wedge B}}{B_2} \Rightarrow \pi_2^* \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_4^* \\ A\end{matrix} \quad B_1}{A \wedge B}}{B_2}$, onde $F(\pi_2^*)= A\wedge B$.

(3) $\pi_2 \equiv \dfrac{\dfrac{Ba_1}{\forall x Bx}}{Bt_2} \Rightarrow \pi_2^* \equiv \dfrac{\dfrac{Ba_1}{\forall x Bx}}{Bt_2}$, onde $F(\pi_2^*)= \forall x Bx$ (π_2 é estrela).

PROVA:

Itens (1) e (2)

Seja $\pi_2^{\bullet n} \equiv \pi_2^*$. Provaremos por indução em n.

BASE: $n= 0$.

Neste caso $\pi_2 \equiv \pi_2^{\bullet 0} \equiv \pi_2^*$, então π_2 é derivação estrela.

Logo, π_4 também é estrela ($\pi_4 \equiv \pi_4^*$).

Portanto o resultado é imediato.

PASSO: $n> 0$.

HI: Se Σ é uma derivação com a forma descrita em (1) ou (2) acima e $\Sigma^{\bullet m} \equiv \Sigma^*$ tal que $m< n$, então vale o teorema para Σ.

Considere a derivação $\pi_2^{\bullet}$ da seqüência estrela para π_2.

(*i*) Pelas Observações 2.3.7-(*f*) e (*h*) é claro que $\pi_2^* \equiv \pi_2^{\bullet n} \equiv (\pi_2^{\bullet})^{\bullet n-1} \equiv \pi_2^{\bullet *}$.

Mas $\pi_2^\bullet$ é obtida de π_2 pela multiplicação-* de $T(\pi_2)$. Como nas duas alternativas de π_2, $F(\pi_2)$ não é OM_{π_2}, então, $T(\pi_2)$, se existir, só pode estar em π_4.

Como π_4 é subárvore completa de π_2 e $r(\pi_4)$ não é OP_{π_2} ($r(\pi_4)$ não é premissa maior de eliminação), então, pelo Teorema 3.1.2, $T(\pi_2)= T(\pi_4)$ e

$$(ii)\ \pi_2^\bullet \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_4^\bullet \\ \mathsf{A}\end{matrix} \quad \dfrac{\mathsf{B}_1}{\mathsf{A} \supset \mathsf{B}}}{\mathsf{B}_2} \text{ ou } \pi_2^\bullet \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_4^\bullet \\ \mathsf{A}\end{matrix} \quad \mathsf{B}_1}{\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}}}{\mathsf{B}_2}.$$

Por (i) e (ii) temos que vale para $\pi_2^\bullet$ a hipótese indutiva, logo:

$$(iii)\ \ (\pi_2^\bullet)^* \equiv \dfrac{\begin{matrix}(\pi_4^\bullet)^* \\ \mathsf{A}\end{matrix} \quad \dfrac{\mathsf{B}_1}{\mathsf{A} \supset \mathsf{B}}}{\mathsf{B}_2},\ \text{ onde } \mathsf{A}\supset\mathsf{B}= F((\pi_2^\bullet)^*)$$

ou

$$(\pi_2^\bullet)^* \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}(\pi_4^\bullet)^* \\ \mathsf{A}\end{matrix} \quad \mathsf{B}_1}{\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}}}{\mathsf{B}_2},\ \text{ onde } \mathsf{A}\wedge\mathsf{B}= F((\pi_2^\bullet)^*).$$

Pela Observação 2.3.7.1-(f) temos:

(iv) $(\pi_2^\bullet)^* \equiv \pi_2^*$

e

(v) $(\pi_4^\bullet)^* \equiv \pi_4^*$.

Portanto, por (iii), (iv) e (v) temos:

$$\pi_2 \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_4 \\ \mathsf{A}\end{matrix} \quad \dfrac{\mathsf{B}_1}{\mathsf{A} \supset \mathsf{B}}}{\mathsf{B}_2} \ \Rightarrow\ \pi_2^* \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_4^* \\ \mathsf{A}\end{matrix} \quad \dfrac{\mathsf{B}_1}{\mathsf{A} \supset \mathsf{B}}}{\mathsf{B}_2}, \text{ onde } F(\pi_2^*)= \mathsf{A}\supset\mathsf{B}$$

ou

$$\pi_2 \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_4 \\ \mathsf{A}\end{matrix} \quad \mathsf{B}_1}{\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}}}{\mathsf{B}_2} \ \Rightarrow\ \pi_2^* \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_4^* \\ \mathsf{A}\end{matrix} \quad \mathsf{B}_1}{\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}}}{\mathsf{B}_2}, \text{ onde } F(\pi_2^*)= \mathsf{A}\wedge\mathsf{B}.\ \square$$

Item (3)

Imediato, pois $\pi_2 \equiv \pi_2^*$. ♦

Antes de demonstrarmos o teorema mais importante desta seção enunciaremos mais um resultado auxiliar, de demonstração trivial, que será usado em sua demonstração.

3.2.7 LEMA:

Se π é uma derivação estrela, então, $\pi^{\square}$ é estrela. ♦

O teorema seguinte juntamente com um seu corolário imediato são os mais importantes desta seção. Ele estabelece não só uma caracterização para a forma da derivação estrela correspondente a uma derivação π, onde $F(\pi)$ não é multiplicativa (descrita em 3.2.1), como também assegura a importante identidade sintática entre $\pi^{\square *}$ e $\pi^{*\square}$, que será fundamental para a obtenção da igualdade entre $o(\pi)$ e $lp(\pi)$.

Provaremos nele que, para cada tipo de π_2 temos:

$$(a)\ \pi_2 \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_4\\ \mathsf{A}\end{array} \qquad \dfrac{\mathsf{B}_1}{\mathsf{A} \supset \mathsf{B}}}{\mathsf{B}_2} \quad \Rightarrow \quad \pi^* \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_4^*\\ \mathsf{A}\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_5\\ \mathsf{B}_1\end{array}}{\mathsf{A} \supset \mathsf{B}}}{\mathsf{B}_2} \\ \pi_6 \end{array} \text{, onde } F(\pi^*) = \mathsf{A} \supset \mathsf{B}.$$

$$(b)\ \pi_2 \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_4\\ \mathsf{A}\end{array} \quad \mathsf{B}_1}{\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}}}{\mathsf{B}_2} \quad \Rightarrow \quad \pi^* \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_4^*\\ \mathsf{A}\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_5\\ \mathsf{B}_1\end{array}}{\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}}}{\mathsf{B}_2} \\ \pi_6 \end{array} \text{, onde } F(\pi^*) = \mathsf{A} \wedge \mathsf{B}.$$

$$(c)\ \pi_2 \equiv \dfrac{\dfrac{\mathsf{B}a_1}{\forall x \mathsf{B}x}}{\mathsf{B}t_2} \quad \Rightarrow \quad \pi^* \equiv \begin{array}{c} \pi_5 \\ \dfrac{\dfrac{\mathsf{B}a_1}{\forall x \mathsf{B}x}}{\mathsf{B}t_2} \\ \pi_6 \end{array} \text{, onde } F(\pi^*) = \forall x \mathsf{B}x.$$

Além disso, nos três casos, $\pi^{\square *} \equiv \pi^{*\square} \equiv \begin{array}{c}\pi_5\\ \mathsf{B}_2\\ \pi_6\end{array}.$

Observamos que π_5 e π_6 são as subárvores em que π_1 e π_3 se transformaram através dos passos da seqüência estrela de π. Não nos interessa saber exatamente como elas são. O que interessa é saber que π^*, $\pi^{\square *}$, $\pi^{* \square}$ e $F(\pi^*)$ estão relacionadas da maneira como descrito acima.

3.2.8 TEOREMA:

Se π é como em 3.2.1, então:

$$\pi^* \equiv \begin{array}{c} \pi_5 \\ \mathsf{B}_1 \\ \pi_2^* \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_6 \end{array}, \text{ onde } F(\pi^*) = F(\pi_2^*) \quad \text{e} \quad \pi^{\square *} \equiv \pi^{* \square} \equiv \begin{array}{c} \pi_5 \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_6 \end{array}.$$

<u>PROVA</u>:

Seja $\pi^{\bullet n} \equiv \pi^*$. Provaremos por indução em n.

<u>BASE</u>: $n = 0$

(i) Então $\pi^* \equiv \pi^{\bullet 0} \equiv \pi$ (π é derivação estrela).

(ii) Como π_2 é subárvore de π, então π_2 também é estrela ($\pi_2 \equiv \pi_2^*$)

(iii) Pelo Lema 3.2.7, $\pi^{\square}$ é estrela ($\pi^{\square} \equiv \pi^{\square *}$).

(iv) Temos então $\pi^{\square *} \underset{\text{por (iii)}}{\equiv} \pi^{\square} \underset{\text{por (i)}}{\equiv} \pi^{* \square}$.

Logo, fazendo $\pi_1 \equiv \pi_5$ e $\pi_3 \equiv \pi_6$, temos, por (i), (ii) e (iv) que:

$$\pi^* \text{ tem a forma: } \pi^* \equiv \begin{array}{c} \pi_5 \\ \mathsf{B}_1 \\ \pi_2^* \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_6 \end{array}, \text{ onde } F(\pi^*) = F(\pi_2^*) \quad \text{e} \quad \pi^{\square *} \equiv \pi^{* \square} \underset{\text{por (T3.2.3)}}{\equiv} \begin{array}{c} \pi_5 \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_6 \end{array}.$$

<u>PASSO</u>: $n > 0$

HI: Seja Σ uma derivação como descrito em 3.2.1. Se $\Sigma^* \equiv \Sigma^{\bullet m}$ tal que $m < n$, então vale o teorema para Σ.

Considere a derivação $\pi^{\bullet}$ da seqüência estrela para π.

(i) Pelas Observações 2.3.7-(f) e (h) é claro que $\pi^* \equiv \pi^{\bullet n} \equiv (\pi^{\bullet})^{\bullet n-1} \equiv \pi^{\bullet *}$.

Mas $\pi^{\bullet}$ é obtido de π pela multiplicação-* de $T(\pi)$. Como nas três alternativas de π_2, $F(\pi)$ não é OM_{π}, então, $T(\pi)$ está em π_1, π_3 ou π_4. Consideremos estes três casos.

<u>CASO 1</u>: $T(\pi)$ está em π_1

Como π_1 é subárvore completa de π e $r(\pi_1)$ não é OP_π ($r(\pi_1)$= B_1 que é premissa de introdução), então, pelo Teorema 3.1.2, $T(\pi)$= $T(\pi_1)$ e

$$(ii)\ \pi^{\bullet} \equiv \begin{array}{c} \pi_1^{\bullet} \\ \mathsf{B}_1 \\ \pi_2 \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_3 \end{array}.$$

Note que $F(\pi_2)$ é FM em $\pi^{\bullet}$, e $\pi^{\bullet}$ é distinto de π apenas na subárvore determinada por B_1. Como $pos_\pi(\mathsf{B}_1)$> $pos_\pi(F(\pi_2))$, então, pelo Teorema 3.1.6:

(iii) $F(\pi_2)$ é $F(\pi^{\bullet})$.

(iv) Portanto, por (ii), (iii) e pelo Teorema 3.2.2 temos: $\pi^{\bullet\square} \equiv \begin{array}{c} \pi_1^{\bullet} \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_3 \end{array}.$

Sejam φ e ψ as duas ocorrências de π_1 tais que: φ= $T(\pi)$ e ψ= $ass_\pi(T(\pi))$. Pelo Teorema 3.2.4-(5), φ= $T(\pi^{\square})$ e ψ= $ass_{\pi^{\square}}(T(\pi^{\square}))$. Ou seja, $T(\pi^{\square})$ também ocorre em π_1.

Como π_1 é subárvore completa também em $\pi^{\square}$, temos, pelo Teorema 3.1.2, que $T(\pi_1)$= $T(\pi^{\square})$ e:

$$(v)\ \pi^{\square\bullet} \equiv \begin{array}{c} \pi_1^{\bullet} \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_3 \end{array}.$$

(vi) Assim, por (iv) e (v), temos que: $\pi^{\bullet\square} \equiv \pi^{\square\bullet}$.

Por (i), (ii) e (iii) temos que vale para $\pi^{\bullet}$ a hipótese indutiva.

$$(vii)\ \text{Logo, } \pi^{\bullet *} \equiv \begin{array}{c} \pi_5 \\ \mathsf{B}_1 \\ \pi_2^{*} \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_6 \end{array}, \text{ onde } F(\pi^{\bullet *}) \text{ é } F(\pi_2^{*}) \text{ e } \pi^{\bullet\square *} \equiv \pi^{\bullet * \square} \equiv \begin{array}{c} \pi_5 \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_6 \end{array}.$$

Pela Observação 2.3.7.1-(f) é claro que:

$(viii)$ $\pi^{\bullet *} \equiv \pi^{*}$ e

(ix) $\pi^{\square\bullet *} \equiv \pi^{\square *}$.

(x) Então: $\pi^{\square *} \underset{\text{por (ix)}}{\equiv} \pi^{\square\bullet *} \underset{\text{por (vi)}}{\equiv} \pi^{\bullet\square *} \underset{\text{por (vii)}}{\equiv} \pi^{\bullet * \square} \underset{\text{por (viii)}}{\equiv} \pi^{*\square}$.

Assim, por (vii), $(viii)$ e (x) temos:

$$\pi^{*} \equiv \begin{array}{c}\pi_5\\ \mathsf{B}_1\\ \pi_2^{*}\\ \mathsf{B}_2\\ \pi_6\end{array}, \text{ onde } F(\pi^{*}) \text{ é } F(\pi_2{}^{*}) \qquad \text{e} \qquad \pi^{\square *} \equiv \pi^{*\square} \equiv \begin{array}{c}\pi_5\\ \mathsf{B}_2\\ \pi_6\end{array}.$$

<u>CASO 2</u>: $T(\pi)$ está em π_4

Note que este caso não é relevante para π_2 do tipo (*c*), uma vez que neste caso, π_4 não é subárvore de π. Portanto, analisaremos aqui apenas os casos (*a*) e (*b*) de π_2.

Como π_4 é subárvore completa de π e de π_2, e $r(\pi_4)$ não é OP_{π} nem $OP_{\pi 2}$ ($r(\pi_4)= \mathsf{A}$ não é PM de eliminação em nenhuma das formas de π_2), então, pelo Teorema 3.1.2 temos: $T(\pi)= T(\pi_4)$, $T(\pi_2)= T(\pi_4)$ e:

$$(xi)\ (a)\ \pi_2^{\bullet} \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_4^{\bullet}\\ \mathsf{A}\end{array} \quad \dfrac{\mathsf{B}_1}{\mathsf{A} \supset \mathsf{B}}}{\mathsf{B}_2}, \quad \text{ou} \quad (b)\ \pi_2^{\bullet} \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_4^{\bullet}\\ \mathsf{A}\end{array} \quad \mathsf{B}_1}{\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}}}{\mathsf{B}_2}$$

e

$$(xii)\ (a)\ \pi^{\bullet} \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\pi_4^{\bullet}\\ \mathsf{A}\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \mathsf{B}_1\end{array}}{\mathsf{A} \supset \mathsf{B}}}{\mathsf{B}_2}\\ \pi_3\end{array}, \quad \text{ou} \quad (b)\ \pi^{\bullet} \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_4^{\bullet}\\ \mathsf{A}\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_1\\ \mathsf{B}_1\end{array}}{\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}}}{\mathsf{B}_2}\\ \pi_2\end{array}.$$

(*xiii*) Por (*xi*) e (*xii*), temos que $\pi^{\bullet} \equiv \begin{array}{c}\pi_1\\ \mathsf{B}_1\\ \pi_2^{\bullet}\\ \mathsf{B}_2\\ \pi_3\end{array}$.

Seja $\xi= F(\pi_2)$. No caso (*a*) $\xi= \mathsf{A}\supset\mathsf{B}$ e no caso (*b*) $\xi= \mathsf{A}\wedge\mathsf{B}$.

Note que ξ é *FM* em $\pi_2^{\bullet}$, e $\pi_2^{\bullet}$ é distinto de π_2 apenas na subárvore determinada por $\mathsf{A}= r(\pi_4)$. Como, tanto em (*a*) quanto em (*b*), $pos_{\pi 2}(\mathsf{A}) > pos_{\pi 2}(\xi)$, então, pelo Teorema 3.1.6:

(*xiv*) ξ é $F(\pi_2^{\bullet})$.

(*xv*) Portanto, por (*xiii*) e (*xiv*), temos: $\pi^{\bullet\square} \equiv \begin{array}{c}\pi_1\\ \mathsf{B}_2\\ \pi_3\end{array}$.

(*xvi*) Por (*xv*) e pelo Teorema 3.2.2 temos que: $\pi^{\bullet\square} \equiv \pi^{\square}$.

Note também que ξ $(= F(\pi_2) = F(\pi))$ é FM em $\pi^{\bullet}$, e $\pi^{\bullet}$ é distinto de π apenas na subárvore determinada por $\mathsf{A} = r(\pi_4)$. Como, tanto em (*a*) quanto em (*b*) $pos_{\pi}(\mathsf{A}) > pos_{\pi}(\xi)$, então, pelo Teorema 3.1.6 temos:

(*xvii*) ξ é $F(\pi^{\bullet})$.

(*xviii*) Portanto, por (*xiv*) e (*xvii*) temos que $F(\pi_2^{\bullet})$ é $F(\pi^{\bullet})$.

Assim, por (*i*), (*xiii*) e (*xviii*), temos que vale para $\pi^{\bullet}$ a hipótese indutiva.

(*xix*) Logo, $\pi^{\bullet *} \equiv \begin{array}{c} \pi_5 \\ \mathsf{B}_1 \\ (\pi_2^{\bullet})^* \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_6 \end{array}$, onde $F(\pi^{\bullet *})$ é $F((\pi_2^{\bullet})^*)$ e $\pi^{\bullet \square *} \equiv \pi^{\bullet * \square} \equiv \begin{array}{c} \pi_5 \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_6 \end{array}$.

Pela Observação 2.3.7.1-(*f*) é claro que:

(*xx*) $\pi^{\bullet *} \equiv \pi^*$ e

(*xxi*) $(\pi_2^{\bullet})^* \equiv \pi_2^*$.

(*xxii*) Então: $\pi^{\square *} \underset{\text{por (xvi)}}{\equiv} \pi^{\bullet \square *} \underset{\text{por (xix)}}{\equiv} \pi^{\bullet * \square} \underset{\text{por (xx)}}{\equiv} \pi^{* \square}$.

Assim, por (*xix*), (*xx*), (*xxi*) e (*xxii*) temos:

$\pi^* \equiv \begin{array}{c} \pi_5 \\ \mathsf{B}_1 \\ \pi_2^* \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_6 \end{array}$, onde $F(\pi^*)$ é $F(\pi_2^*)$ e $\pi^{\square *} \equiv \pi^{* \square} \equiv \begin{array}{c} \pi_5 \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_6 \end{array}$.

<u>CASO 3</u>: $T(\pi)$ está em π_3

Neste caso temos 2 subcasos: ou $T(\pi)$ é $OPL_{\pi}(\pi_3)$ ou é $OPnL_{\pi}(\pi_3)$.

<u>SubCaso 3.1</u>: $T(\pi)$ é $OPnL_{\pi}(\pi_3)$

Neste caso, pelo Teorema 3.2.3 temos que a ocorrência $ass_{\pi}(T(\pi))$ ocorre em π_1.

(*xxiii*) π_1 e π_3 têm então as formas: $\pi_1 \equiv \begin{array}{c} [\mathsf{C}]^k \\ \pi_8 \\ \dfrac{\mathsf{D}}{\mathsf{C} \supset \mathsf{D}}\,k \\ \pi_7 \\ \mathsf{B}_1 \end{array}$ e $\pi_3 \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \mathsf{B}_2 \\ \pi_{10} & \pi_9 \\ \mathsf{C} & \mathsf{C} \supset \mathsf{D} \end{array} \\ \hline \mathsf{D} \\ \pi_{11} \end{array}$,

onde a ocorrência $\mathsf{C} \supset \mathsf{D}$ em π_1 é $ass_{\pi}(T(\pi))$ e, em π_3, $\mathsf{C} \supset \mathsf{D}$ é $T(\pi)$.

($xxiv$) $\pi^{\bullet}$ é então da forma: $\pi^{\bullet} \equiv \begin{array}{c} \pi_1^{+} \\ \mathsf{B}_1 \\ \pi_2 \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_3^{-} \end{array}$, onde π_1^{+} e π_3^{-} têm as formas:

(xxv) $\pi_1^{+} \equiv \begin{array}{c} \pi_{10} \\ [\mathsf{C}] \\ \pi_8 \\ \dfrac{\mathsf{D}}{\mathsf{C} \supset \mathsf{D}} \\ \pi_7 \\ \mathsf{B} \end{array}$ e $\pi_3^{-} \equiv \begin{array}{c} \qquad \mathsf{B} \\ \qquad \pi_9 \\ \dfrac{\mathsf{C} \quad \mathsf{C} \supset \mathsf{D}}{\mathsf{D}} \\ \pi_{11} \end{array}$.

Note que $F(\pi_2)$ é FM em $\pi^{\bullet}$, e $\pi^{\bullet}$ é distinto de π apenas nas subárvores determinadas por C em π_1 e em π_3. Mas, em qualquer dos casos, $pos_{\pi}(\mathsf{C}) \succ pos_{\pi}(F(\pi_2))$.

($xxvi$) Então, aplicando duas vezes o Teorema 3.1.6, temos que $F(\pi_2)$ é $F(\pi^{\bullet})$.

($xxvii$) Portanto, por ($xxiv$) e ($xxvi$), temos $\pi^{\bullet\square} \equiv \begin{array}{c} \pi_1^{+} \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_3^{-} \end{array}$.

Pelo Teorema 3.2.4-(5) temos que $\mathsf{C} \supset \mathsf{D}$ de π_3 é $T(\pi^{\square})$ e $\mathsf{C} \supset \mathsf{D}$ de π_1 é $ass_{\pi^{\square}}(T(\pi^{\square}))$.

($xxviii$) Logo, $\pi^{\square\bullet} \equiv \begin{array}{c} \pi_1^{+} \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_3^{-} \end{array}$.

Por ($xxvii$) e ($xxviii$), temos que: $\pi^{\bullet\square} \equiv \pi^{\square\bullet}$, e por ($i$), ($xxiv$) e ($xxvi$) vale HI para $\pi^{\bullet}$. O resultado segue, portanto, análogo ao Caso 1 a partir do item (vii).

<u>SubCaso 3.2</u>: $T(\pi)$ é $OPL_{\pi}(\pi_3)$

Neste caso, como $F(\pi)$ é $F(\pi_2)$, então $F(\pi)$ ocorre acima de B_2. Logo, $pos_{\pi}(F(\pi)) \succ pos_{\pi}(\mathsf{B}_2)$. Portanto, pelo Teorema 3.1.4-(4) temos que $\pi^{\bullet}$ tem a forma:

($xxix$) $\pi^{\bullet} \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ \mathsf{B}_1 \\ \pi_2 \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_3^{\bullet} \end{array}$.

Note que $F(\pi) = F(\pi_2)$ é FM em $\pi^{\bullet}$, e, por 3.1.4-(4), $\pi^{\bullet}$ é distinto de π apenas em subárvores com raízes de posição maior que $F(\pi)$.

(*xxx*) Então, pelo Teorema 3.1.6, $F(\pi_2)$ é $F(\pi^{\bullet})$.

(*xxxi*) Por (*xxix*) e (*xxx*), temos que $\pi^{\bullet\square} \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_3^{\bullet} \end{array}$.

Sejam φ e ψ duas ocorrências de π_3 tais que: $\varphi= T(\pi)$ e $\psi=\ ass_{\pi}(T(\pi))$. Pelo Teorema 3.2.4-(5) temos que $\varphi= T(\pi^{\square})$ e $\psi= ass_{\pi^{\square}}(T(\pi^{\square}))$.

Ou seja, $T(\pi^{\square})$ também é $OPL_{\pi^{\square}}(\pi_3)$.

Note que, como não existia *FM* ξ em π com $pos_{\pi}(\xi)< pos_{\pi}(\mathsf{B}_2)$, então, pelo Teorema 3.2.4-(1) e pela forma de $\pi^{\square}$ temos que não existe *FM* ξ em $\pi^{\square}$ com $pos_{\pi^{\square}}(\xi)< pos_{\pi^{\square}}(\mathsf{B}_2)$.

Assim, $pos_{\pi^{\square}}(F(\pi^{\square}))> pos_{\pi^{\square}}(\mathsf{B}_2)$. Portanto, pelo Teorema 3.1.4-(4) temos:

(*xxxii*) $\pi^{\square\bullet} \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_3^{\bullet} \end{array}$.

Por (*xxxi*) e (*xxxii*), temos que: $\pi^{\bullet\square} \equiv \pi^{\square\bullet}$, e por (*i*), (*xxix*) e (*xxx*) vale HI para $\pi^{\bullet}$. O resultado segue, portanto, análogo ao Caso 1 a partir do item (*vii*).

O que termina a prova do Teorema 3.2.8 ♦

Neste último teorema desta seção estabeleceremos relações entre o peso de π^* com o peso de $\pi^{\square *}$, que nos permitirão, na última seção, provar que $o(\pi)$ diminui com as reduções e provar a igualdade entre $o(\pi)$ e $lp(\pi)$, para os casos de derivações em que $F(\pi)$ é ocorrência não multiplicativa.

3.2.9 TEOREMA:

Se π é como caracterizado em 3.2.1, então:

(1) Se π_2 é do tipo (*c*): $p(\pi^*)= p(\pi^{\square *})+ 1$;

(2) Se π_2 é do tipo (*a*) ou (*b*): $p(\pi^*)= p(\pi^{\square *})+ p(\pi_4^*)+ 1$;

(3) $p(\pi^{\square})< p(\pi)$.

PROVA:

Pelo Teorema 3.2.8 temos que $\pi^* \equiv \begin{array}{c} \pi_5 \\ \mathsf{B}_1 \\ \pi_2^* \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_6 \end{array}$ e $\pi^{\square *} \equiv \pi^{*\square} \equiv \begin{array}{c} \pi_5 \\ \mathsf{B}_2 \\ \pi_6 \end{array}$.

Se $\pi_7 \equiv \begin{array}{c}\pi_5\\ \mathsf{B}_1\\ \pi_2^*\end{array}$, então $\pi^* \equiv \begin{array}{c}\pi_7\\ \mathsf{B}_2\\ \pi_6\end{array}$. Logo, pelo Teorema 2.2.13 temos:

(*i*) $p(\pi^*) = p(\pi_7) + p(\pi_6) + nl_{\pi^*}(\pi_6)$.

(*ii*) $p(\pi^{\square *}) = p(\pi_5) + p(\pi_6) + nl_{\pi^{\square *}}(\pi_6)$.

(*iii*) $p(\pi_7) = p(\pi_5) + p(\pi_2^*) + nl_{\pi_7}(\pi_2^*)$.

Pelo Teorema 3.2.5-(2) temos que $nl_{\pi^*}(\pi_2^*) = 0$. Como, π_7 é subárvore completa de π e π_2^* é subárvore de π_7, então:

(*iv*) $nl_{\pi_7}(\pi_2^*) = 0$.

Além disso, pelo Teorema 3.2.5-(1), temos que:

(*v*) $nl_{\pi^*}(\pi_6) = nl_{\pi^{\square *}}(\pi_6)$.

Analisemos dois casos: quando π_2 é do tipo (*c*) e quando π_2 é do tipo (*a*) ou do tipo (*b*).

Item (1)

π_2 é do tipo (*c*) - $\pi_2 \equiv \dfrac{\dfrac{\mathsf{B}a_1}{\forall x \mathsf{B}x}}{\mathsf{B}t_2}$.

(*vi*) Neste caso, π_4 não é subárvore de π.

Imediatamente pela definição de peso temos que:

(*vii*) $p(\pi_2) = 1$.

Pelo Teorema 3.2.6-(3) temos que π_2 é derivação estrela, logo, de (*vii*):

(*viii*) $p(\pi_2^*) = 1$.

Assim, por (*iii*), (*iv*) e (*viii*) temos que:

(*ix*) $p(\pi_7) = p(\pi_5) + 1$.

Portanto:

$$\begin{aligned} p(\pi^*) &\underset{\text{por (i)}}{=} p(\pi_7) + p(\pi_6) + nl_{\pi^*}(\pi_6) \\ &\underset{\text{por (ix)}}{=} p(\pi_5) + 1 + p(\pi_6) + nl_{\pi^*}(\pi_6) \\ &\underset{\text{por (v)}}{=} p(\pi_5) + 1 + p(\pi_6) + nl_{\pi^{\square *}}(\pi_6) \\ &\underset{\text{por (ii)}}{=} p(\pi^{\square *}) + 1. \ \square \end{aligned}$$

Item (2)

π_2 é do tipo (*a*) ou do tipo (*b*).

(*x*) Seja $\pi_8 \equiv \dfrac{A \quad \dfrac{B_1}{A \supset B}}{B_2}$, ou $\pi_8 \equiv \dfrac{\dfrac{A \quad B_1}{A \wedge B}}{B_2}$ (conforme tipo de π_2).

Imediatamente pela definição de função peso temos que:

(*xi*) $p(\pi_8) = 1$.

Note que $\pi_2 \equiv \begin{matrix}\pi_4 \\ A \\ \pi_8\end{matrix}$. Portanto, por (*x*) e pelo Teorema 3.2.6 temos:

(*xii*) $\pi_2^* \equiv \begin{matrix}\pi_4^* \\ A \\ \pi_8\end{matrix}$.

Como A, ligação entre π_4^* e π_8 em π_2^*, não pertence a segmento-α de π_2^* temos, pelo Teorema 2.2.10-(4), que:

(*xiii*) $nl_{\pi_2*}(\pi_8) = 0$.

(*xiv*) Assim, por (*xii*) e (*xiii*): $p(\pi_2^*) = p(\pi_4^*) + p(\pi_8)$.

(*xv*) Portanto, por (*xi*) e (*xiv*), $p(\pi_2^*) = p(\pi_4^*) + 1$.

Por (*iii*), (*iv*) e (*xv*) temos que:

(*xvi*) $p(\pi_7) = p(\pi_5) + p(\pi_4^*) + 1$.

Portanto:

$$\begin{aligned} p(\pi^*) &\underset{\text{por (i)}}{=} p(\pi_7) + p(\pi_6) + nl_{\pi*}(\pi_6) \\ &\underset{\text{por (v)}}{=} p(\pi_7) + p(\pi_6) + nl_{\pi\square *}(\pi_6) \\ &\underset{\text{por (xvi)}}{=} p(\pi_5) + p(\pi_4^*) + 1 + p(\pi_6) + nl_{\pi\square *}(\pi_6) \\ &\underset{\text{por (ii)}}{=} p(\pi^{\square *}) + p(\pi_4^*) + 1. \ \square \end{aligned}$$

Item (3)

Seja $\pi_9 \equiv \begin{matrix}\pi_1 \\ B_1 \\ \pi_2\end{matrix}$. Pelo Teorema 2.2.13, temos que:

(*xvii*) $p(\pi) = p(\pi_9) + p(\pi_3) + nl_{\pi}(\pi_3)$.

(*xviii*) $p(\pi^{\square}) = p(\pi_1) + p(\pi_3) + nl_{\pi\square}(\pi_3)$.

(xix) $p(\pi_9) = p(\pi_1) + p(\pi_2) + nl_{\pi_9}(\pi_2)$.

Pelo Teorema 3.2.5-(2), $nl_{\pi}(\pi_2) = 0$. Logo, $nl_{\pi_9}(\pi_2) = 0$, pois π_2 é subárvore de π_9 que é subárvore completa de π.

(xx) Assim, por (xix) temos: $p(\pi_9) = p(\pi_1) + p(\pi_2)$.

Como φ, B_1 e B_2 são ocorrências de π_2, φ é *FM* também de π_2.

(xxi) Portanto, $p(\pi_2) > 1$.

($xxii$) Logo, por (xx) e (xxi), temos que $p(\pi_1) < p(\pi_9)$.

($xxiii$) Pelo Teorema 3.2.5-(2) temos que $nl_{\pi}(\pi_3) = nl_{\pi^{\square}}(\pi_3)$.

Portanto:

$$
\begin{aligned}
p(\pi) \quad & \underset{\text{por (i)}}{=} p(\pi_9) + p(\pi_3) + nl_{\pi}(\pi_3) \\
& \underset{\text{por (vii)}}{=} p(\pi_9) + p(\pi_3) + nl_{\pi^{\square}}(\pi_3) \\
& \underset{\text{por (vi)}}{>} p(\pi_1) + p(\pi_3) + nl_{\pi^{\square}}(\pi_3) \underset{\text{por (ii)}}{=} p(\pi^{\square}).
\end{aligned}
$$

Logo, $p(\pi) > p(\pi^{\square})$. ♦

§3 Resultados sobre Derivações com $F(\pi)$ Multiplicativa

O objetivo principal desta seção é obter o seguinte resultado:

Sejam $\pi \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_2\\ B\end{array}}{A \supset B}\,k}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}}$, onde $A \supset B$ é $F(\pi)$ e $\pi_\Delta \equiv \dfrac{A \qquad \begin{array}{c}\pi_1\\ [A]\\ \pi_2\\ B\end{array}\!\!\!\dfrac{}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \\ \pi_3\end{array}}$, obtida de π pela multiplicação-* de $A \supset B$. Então: $\pi^* \equiv \pi^*_\Delta$.

Esta equivalência nos habilita a estender os resultados da seção anterior também para derivações nas quais $F(\pi)$ é *FM* multiplicativa. Ao fazermos isto, já estaremos aptos a tratar todos os casos da prova de que $o(\pi)$ diminui com as reduções.

Introduziremos agora uma noção que será muito utilizada nesta seção para fazer referência a uma derivação específica da seqüência estrela de alguma derivação π.

3.3.1 DEFINIÇÃO: Derivação Limite

Seja π uma derivação tal que $\pi^* \equiv \pi^{\bullet n}$ e A uma fórmula da linguagem de C'. Definimos a *derivação limite de π para A*, e denotamos por $\pi^{[A]}$, como a derivação $\pi^{\bullet i}$ $(0 \leq i \leq n)$ da seqüência-* de π tal que:

(1) Se $g(\pi) < gr(A)$, então $\pi^{[A]}$ é $\pi^{\bullet 0} \equiv \pi$;

(2) Se $g(\pi) \geq gr(A)$, então, $\pi^{[A]}$ é $\pi^{\bullet i}$ tal que: $g(\pi^{\bullet i-1}) \geq gr(A)$ e $g(\pi^{\bullet i}) < gr(A)$.

3.3.1.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Pelo Teorema 2.3.10-(6), temos que para todo i $(0 \leq i < n)$, $g(\pi^{\bullet i+1}) \leq g(\pi^{\bullet i})$. Assim, podemos dizer que a derivação limite de π para A é a derivação da seqüência-* β_π de menor índice que tem grau máximo multiplicativo menor a $gr(A)$.

(*b*) Como $g(\pi^{\bullet n}) = 0$ (pois $\pi^{\bullet n} \equiv \pi^*$ é derivação estrela) e, pelo Teorema 2.3.10-(6), $g(\pi^{\bullet i+1}) \leq g(\pi^{\bullet i})$ $(0 \leq i < n)$, então, para toda fórmula A existe um $\pi^{\bullet i}$ $(0 \leq i \leq n)$ tal que $\pi^{\bullet i} \equiv \pi^{[A]}$.

(*c*) É claro, por propriedades da seqüência estrela, que $\beta_\pi^{[A]} = \pi^{\bullet 1}, \ldots, \pi^{\bullet k} \equiv \pi^{[A]}$, a *seqüência estrela limite de π para A* é única, e para cada π e A existe um e apenas um $\pi^{[A]}$ associado.

(*d*) Pela unicidade da seqüência estrela é claro que se $\pi^{[A]} \equiv \pi^{\bullet k}$ e $r \leq k$, então $(\pi^{\bullet r})^{[A]} \equiv \pi^{[A]}$. Além disso, $\pi^{[A]*} \equiv \pi^*$.

3.3.2 LEMA:

Considere φ uma OM_π com $g(\pi^\bullet) < gr(\varphi)$. Então $g(\pi) = gr(\varphi)$.

<u>PROVA</u>:

Suponha, por absurdo, que $g(\pi) > gr(\varphi)$.

Isto implica que $T(\pi) \neq \varphi$, logo, pelo Teorema 2.3.10-(2), todo resíduo $(\varphi)_k$ de φ é $OM_{\pi\bullet}$ e, portanto, $g(\pi^\bullet) \geq gr(\varphi)$, o que é um absurdo, pois $g(\pi^\bullet) < gr(\varphi)$ por hipótese.

Logo, descartamos a hipótese do absurdo e temos $g(\pi) \leq gr(\varphi)$.

Mas pela Definição 2.3.4 não é possível que $g(\pi) < gr(\varphi)$, pois φ é OM_π. Logo, $g(\pi) = gr(\varphi)$. ♦

A notação que apresentaremos a seguir nos permitirá identificar certas transformações que podem ocorrer em subárvores devido a multiplicações-*. Ela será bastante utilizada na demonstração do Item (3) do teorema seguinte.

3.3.3 NOTAÇÃO:

A notação $\begin{matrix}\{A\}\\ \pi\end{matrix}$ denota uma derivação π com um conjunto **possivelmente vazio** de hipóteses destacadas, todas com a forma de A.

Considere π a seguinte derivação: $\pi \equiv \begin{matrix}\underbrace{[\pi_3]\cdots[\pi_n]}\\ [A]\\ \pi_a\end{matrix}$.

A forma de π, como definido em 2.2.8-(*b*), indica que π_a é uma derivação que possui *n* ou mais hipóteses destacadas A. Em cada uma destas hipóteses existe uma cópia de $\begin{matrix}\pi_i\\ A\end{matrix}$, onde ($3 \le i \le n$). Os colchetes em volta de cada π_i indicam que pode haver mais de uma cópia de cada π_i em π.

Considere π_a com a seguinte forma: $\pi_a \equiv \begin{matrix}\pi_2\\ B\\ \pi_1\end{matrix}$.

De acordo com as formas de π e π_a, podemos ter hipóteses destacadas A de π_a tanto em π_1 quanto em π_2. Não é possível saber, apenas com as informações que temos, se todas as hipóteses destacadas A de π_a estão em π_1, em π_2 ou se estão um pouco em cada subárvore. Desta forma, usando a notação de chaves descrita acima, podemos escrever π_a como:

$$\pi_a \equiv \begin{matrix} & \{A\}\\ & \pi_2\\ \underbrace{\{A\} \quad} & \underbrace{B}\\ \multicolumn{2}{c}{\pi_1}\end{matrix}$$

Tal notação indica exatamente as condições de π_a. π_a é composta por uma subárvore π_1 e uma subárvore π_2. π_1 possui uma hipótese destacada B, que é raiz de π_2, e algumas, possivelmente nenhuma, hipóteses destacadas A. π_2, por sua vez, possui as outras hipóteses destacadas A de π_a, quando nem todas elas estão em π_1.

Assim, de acordo com a forma de π_a descrita pela nova notação, podemos escrever π com a seguinte forma:

$$\pi \equiv \underbrace{\begin{matrix} \underbrace{\{\pi_3\}\ldots\{\pi_n\}} & & \begin{matrix}\underbrace{\{\pi_3\}\ldots\{\pi_n\}} \\ \{A\} \\ \pi_2\end{matrix} \\ \{A\} & & B \end{matrix}}_{\pi_1}$$

Esta notação indica que π é obtido de π_a colocando-se nas hipóteses destacadas de π_a cópias das derivações $\begin{matrix}\pi_i \\ A\end{matrix}$ ($3 \leq i \leq n$). Como não temos informação sobre quais π_i são colocados nas hipóteses A de π_1 e quais hipóteses A de π_2, utilizamos o artifício das chaves e indicamos todas as cópias em cada derivação. Como as chaves indicam uma quantidade possivelmente vazia, a notação de π é coerente.

Por exemplo, se todas as cópias de π_3 em π têm as hipóteses A de π_1 como raiz, então a notação $\{\pi_3\}$ que ocorre acima das hipóteses A de π_2 indica uma quantidade vazia, ou seja, π_3 não ocorre lá. ♦

O teorema seguinte estabelece, no Item (4), o fato fundamental desta seção: $\pi^* \equiv \pi^*_\Delta$. Os Itens (5) e (6) também serão úteis para a prova de que $o(\pi)$ diminui com as reduções. Os Itens (1), (2) e (3) representam apenas as etapas necessárias para a prova do Item (4).

3.3.4 TEOREMA:

Seja $\pi \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ A\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[A]^k \\ \pi_2 \\ B\end{matrix}}{A \supset B}\,k}{\begin{matrix}B \\ \pi_3\end{matrix}}$, onde $A \supset B$ é $F(\pi)$ e OM_π.

Seja π' uma derivação tal que: $\pi \to \pi'$ pela redução da FM $\varphi \neq A \supset B$ e $\pi^{[A\supset B]} \equiv \pi^{\bullet n}$.

Então:

$$(1)\ \pi^{\bullet n-1} \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^{[A\supset B]}\\ A\end{array} \quad \begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_2^{[A\supset B]}\\ \dfrac{B}{A\supset B}\,k\end{array}}{B} \\ \pi_3^{[A\supset B]}\end{array}, \text{ onde } A\supset B \text{ é } F(\pi^{\bullet n-1}).$$

$$(2)\ \pi^{\bullet n} \equiv \pi^{[A\supset B]} \equiv \begin{array}{c} \dfrac{A \quad \begin{array}{c}\pi_1^{[A\supset B]}\\ [A]\\ \pi_2^{[A\supset B]}\\ \dfrac{B}{A\supset B}\end{array}}{B} \\ \pi_3^{[A\supset B]}\end{array}, \text{ onde } A\supset B \text{ é } F(\pi^{[A\supset B]}).$$

(3) $\pi_\Delta^{[A\supset B]} \equiv \pi^{[A\supset B]}$.

(4) $\pi^* \equiv \pi_\Delta^*$.

(5) $\pi'^* \equiv (\pi')_\Delta^*$.

(6) $\pi_\Delta \twoheadrightarrow (\pi')_\Delta$.

<u>PROVA</u>:

Itens (1) e (2)

Provaremos os Itens (1) e (2) simultaneamente por indução em n.

Como nos Itens (1) e (2) $A\supset B$ é OM_π, então é claro que $g(\pi) \geq gr(A\supset B)$. Logo, pela Definição 3.3.1 temos que $n> 0$. Portanto, o caso básico é $n= 1$.

<u>BASE</u>: $n= 1$ (Neste caso, $\pi^{[A\supset B]} \equiv \pi^\bullet$)

Como $n= 1$, então, pela Definição 3.3.1 temos:

(i) $g(\pi)= g(\pi^{\bullet 0}) \geq gr(A\supset B)$ e $g(\pi^\bullet)< gr(A\supset B)$.

(ii) Logo, por (i) temos que $g(\pi)> g(\pi^\bullet)$.

(iii) Mas, por (ii) e pelo Teorema 2.3.10-(4), temos que $ng(\pi)= 1$.

Como $A\supset B$ é OM_π , por (ii) e pelo Lema 3.3.2 temos:

(iv) $g(\pi)= gr(A\supset B)$.

Mas se $A\supset B$ é OM_π, por (iii), (iv) e pela Definição 2.3.6 de $T(\pi)$ temos:

(v) $A\supset B$ é $T(\pi)$.

Assim, por (iv), (v) e pela forma de π temos:

$$(vi)\ \pi^{[A\supset B]} \equiv \pi^{\bullet} \equiv \dfrac{A \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ [A]\\ \pi_2\\ B\end{matrix}}{A\supset B}}{\begin{matrix}B\\ \pi_3\end{matrix}}\ .$$

Note que $\pi^{\bullet}$ difere de π apenas na subárvore da premissa menor de $A\supset B= F(\pi)$ e em top-fórmulas de π_2. Mas em ambos os casos as alterações são feitas em ocorrências com posição maior que $pos_{\pi}(A\supset B)$. Portanto, pelo Teorema 3.1.6 temos:

(vii) $A\supset B$ é $F(\pi^{\bullet})$.

Por (ii) e (iv) temos que $g(\pi^{\bullet})< gr(A\supset B)$. Como π_i $(1 \le i \le 3)$ são subárvores de $\pi^{\bullet}$, então, para $(1 \le i \le 3)$, $g(\pi_i) \le g(\pi^{\bullet})< gr(A\supset B)$. Portanto, pela Definição 3.3.1:

$(viii)$ $\pi_i^{[A\supset B]} \equiv \pi_i$, com $(1 \le i \le 3)$.

Assim, por (vi), (vii) e $(viii)$ temos:

$$(ix)\ \pi^{[A\supset B]} \equiv \dfrac{A \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_1^{[A\supset B]}\\ [A]\\ \pi_2^{[A\supset B]}\\ B\end{matrix}}{A\supset B}}{\begin{matrix}B\\ \pi_3^{[A\supset B]}\end{matrix}}\text{, onde } F(\pi^{[A\supset B]})= A\supset B;\ \text{ e}$$

$$(x)\ \pi^{\bullet n-1} \equiv \pi^{\bullet 0} \equiv \pi \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A]^k\\ \pi_2\\ B\end{matrix}}{A\supset B}\,k}{\begin{matrix}B\\ \pi_3\end{matrix}} \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1^{[A\supset B]}\\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A]^k\\ \pi_2^{[A\supset B]}\\ B\end{matrix}}{A\supset B}\,k}{\begin{matrix}B\\ \pi_3^{[A\supset B]}\end{matrix}}\text{, onde } F(\pi^{\bullet n-1})= A\supset B.$$

Por (ix) e (x) provamos a base para os Itens (1) e (2).

<u>PASSO</u>: $n> 1$

HI: Se Σ é uma derivação que satisfaz as hipóteses do teorema tal que $\Sigma^{[F(\Sigma)]} \equiv \Sigma^{\bullet k}$ com $k< n$, então os itens (1) e (2) são válidos para Σ.

Considere a derivação $\pi^{\bullet}$. Como $\pi^{[A\supset B]} \equiv \pi^{\bullet n}$ com $n> 1$, pela Observação 3.3.1.1-(d) temos:

(xi) $(\pi^{\bullet})^{[A\supset B]} \equiv \pi^{[A\supset B]} \equiv \pi^{\bullet n} \equiv (\pi^{\bullet})^{\bullet n-1}$.

(xii) Como $A\supset B= F(\pi)$ é OM_{π}, então: $g(\pi)= gr(T(\pi)) \geq gr(A\supset B)$

Como $\pi^{\bullet}$ é obtido de π pela multiplicação-* de $T(\pi)$, por (xii) e pelo Teorema 3.1.7-(1) temos:

($xiii$) $pos_{\pi}(T(\pi)) \geq pos_{\pi}(A\supset B)$.

Vamos dividir a prova em casos conforme a ocorrência $T(\pi)$. Temos que ou $T(\pi)$ ocorre em π_1, ou em π_2 ou em π_3 ou $T(\pi)$ é $A\supset B$. Analisemos cada caso:

<u>CASO 1</u>: $T(\pi)$ ocorre em π_1.

Como π_1 é subárvore completa de π e $r(\pi_1)$ não é OP_{π} ($r(\pi_1)= A$ é premissa menor de regra de eliminação), então $r(\pi_1)$ não é $T(\pi)$. Logo, pelo Teorema 3.1.2 temos:

$$(xiv)\ T(\pi)= T(\pi_1) \text{ e } \pi^{\bullet} \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1^{\bullet}\\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A]^k\\ \pi_2\\ B\end{matrix}}{A\supset B}\,k}{\begin{matrix}B\\ \pi_3\end{matrix}}.$$

Como $pos_{\pi}(r(\pi_1))> pos_{\pi}(A\supset B)$, então, pelo Teorema 3.1.6:

(xv) $A\supset B$ é $F(\pi^{\bullet})$.

(xvi) Note também, por (xiv), que $A\supset B$ é $OM_{\pi^{\bullet}}$.

Assim, por (xi), (xii), (xv) e (xvi) temos que vale a hipótese indutiva para $\pi^{\bullet}$. Logo:

$$(xvii)\ (\pi^{\bullet})^{\bullet n-2} \equiv \dfrac{\begin{matrix}(\pi_1^{\bullet})^{[A\supset B]}\\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A]^k\\ \pi_2^{[A\supset B]}\\ B\end{matrix}}{A\supset B}\,k}{\begin{matrix}B\\ \pi_3^{[A\supset B]}\end{matrix}},\ \text{ onde } A\supset B \text{ é } F((\pi^{\bullet})^{\bullet n-2}), \text{ e}$$

$$(xviii)\ (\pi^{\bullet})^{\bullet n-1} \equiv (\pi^{\bullet})^{[A\supset B]} \equiv \dfrac{A \qquad \dfrac{\begin{matrix}(\pi_1^{\bullet})^{[A\supset B]}\\ [A]\\ \pi_2^{[A\supset B]}\\ B\end{matrix}}{A\supset B}}{\begin{matrix}B\\ \pi_3^{[A\supset B]}\end{matrix}},\ \text{onde } A\supset B \text{ é } F((\pi^{\bullet})^{[A\supset B]}).$$

Mas se $T(\pi)$ ocorre em π_1, então $g(\pi_1)= g(\pi) \underset{(xii)}{\geq} gr(A\supset B)$. Logo, pela Definição 3.3.1 $\pi_1^{[A\supset B]} \equiv \pi_1^{\bullet k}$ tal que $k> 0$. Portanto, pela Observação 3.3.1.1-(d) temos:

(xix) $\pi_1^{[A\supset B]} \equiv (\pi_1^{\bullet})^{[A\supset B]}$.

Portanto, por (*xi*), (*xvii*), (*xviii*) e (*xix*) temos:

$$(xx)\ \pi^{\bullet n-1} \equiv (\pi^{\bullet})^{\bullet n-2} \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^{[A\supset B]}\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_2^{[A\supset B]}\\ B\end{array}}{A\supset B}\,k}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3^{[A\supset B]}\end{array}}\text{, onde } A\supset B \text{ é } F(\pi^{\bullet n-1}) \text{ e}$$

$$(xxi)\ \pi^{[A\supset B]} \underset{(xi)}{\equiv} \pi^{\bullet[A\supset B]} \underset{(xi)}{\equiv} (\pi^{\bullet})^{\bullet n-1} \equiv \pi^{\bullet n} \equiv \dfrac{A \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^{[A\supset B]}\\ [A]\\ \pi_2^{[A\supset B]}\\ B\end{array}}{A\supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3^{[A\supset B]}\end{array}}\text{, onde } A\supset B \text{ é } F(\pi^{[A\supset B]}).$$

Assim, por (*xx*) e (*xxi*) provamos o Caso 1.

<u>CASO 2</u>: $T(\pi)$ ocorre em π_2

Como π_2 é subárvore completa de π e $r(\pi_2)$ não é OP_π ($r(\pi_2)$= B é premissa de introdução), então $r(\pi_2)$ não é $T(\pi)$. Logo, pelo Teorema 3.1.2 temos:

$$(xxii)\ T(\pi)= T(\pi_2) \ \text{ e } \ \pi^{\bullet} \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_2^{\bullet}\\ B\end{array}}{A\supset B}\,k}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}}\ .$$

Como $pos_\pi(r(\pi_2))> pos_\pi(A\supset B)$, então, pelo Teorema 3.1.6:

(*xxiii*) $A\supset B$ é $F(\pi^{\bullet})$.

(*xxiv*) Como as hipóteses destacadas de π_2 são cortadas por regra que está abaixo de $r(\pi_2)$ nenhuma multiplicação-* em π_2 coloca subárvores sobre as hipóteses destacadas de π_2. Portanto, por (*xxii*), $A\supset B$ é $OM_{\pi^\bullet}$.

Assim, por (*xi*), (*xxii*), (*xxiii*) e (*xxiv*) temos que vale a hipótese indutiva para $\pi^{\bullet}$. Logo:

$$(xxv)\ (\pi^\bullet)^{\bullet n-2} \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^{[A\supset B]}\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^k\\ (\pi_2^\bullet)^{[A\supset B]}\\ B\end{array}}{A\supset B}\,k}{B}\\ \pi_3^{[A\supset B]}\end{array},\ \text{onde } A\supset B \text{ é } F((\pi^\bullet)^{\bullet n-2}), \text{ e}$$

$$(xxvi)\ (\pi^\bullet)^{[A\supset B]} \equiv (\pi^\bullet)^{\bullet n-1}\ \begin{array}{c}\dfrac{A \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^{[A\supset B]}\\ [A]\\ (\pi_2^\bullet)^{[A\supset B]}\\ B\end{array}}{A\supset B}}{B}\\ \pi_3^{[A\supset B]}\end{array},\ \text{onde } A\supset B \text{ é } F((\pi^\bullet)^{[A\supset B]}).$$

O resultado segue análogo ao Caso 1.

<u>CASO 3</u>: $T(\pi)$ ocorre em π_3

Pelo Teorema 2.2.10-(5), se φ é $OPnL_\pi(\pi_3)$, então $gr(\varphi) \leq g(B)$.

Mas, por (*xii*), $gr(T(\pi)) = g(\pi) \geq gr(A\supset B) > gr(B)$. Portanto:

(*xxvii*) $T(\pi)$ é $OPL_\pi(\pi_3)$.

Por (*xxvii*), pela forma de π e pelo Teorema 3.1.4 temos:

$$(xxviii)\ T(\pi) = T(\pi_3) \ \text{ e } \ \pi^\bullet \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_2\\ B\end{array}}{A\supset B}\,k}{B}\\ \pi_3^\bullet\end{array}.$$

Também por 3.1.4-(1) e 3.1.4-(4) temos que $\pi^\bullet$ é distinto de π apenas em subárvores com raízes de posição maior que $A\supset B = F(\pi)$. Então, pelo Teorema 3.1.6:

(*xxix*) $A\supset B$ é $F(\pi^\bullet)$.

(*xxx*) Note também, por (*xxviii*), que $A\supset B$ é $OM_{\pi^\bullet}$.

Assim, por (*xi*), (*xxviii*), (*xxix*) e (*xxx*) temos que vale HI para $\pi^\bullet$. Logo:

$$(xxxi)\ (\pi^\bullet)^{\bullet n-2} \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^{[A\supset B]}\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_2^{[A\supset B]}\\ B\end{array}}{A\supset B}\,k}{B}\\ (\pi_3^\bullet)^{[A\supset B]}\end{array},\ \text{onde } A\supset B \text{ é } F((\pi^\bullet)^{\bullet n-2}), \text{ e}$$

$$(xxxii)\ (\pi^{\bullet})^{[A\supset B]} \equiv (\pi^{\bullet})^{\bullet n-1} \equiv \begin{array}{c} \qquad\quad \pi_1^{[A\supset B]} \\ \qquad\quad [A] \\ \qquad\quad \pi_2^{[A\supset B]} \\ \qquad\quad \dfrac{B}{A \supset B} \\ \hline B \\ (\pi_3^{\bullet})^{[A\supset B]} \end{array}$$, onde A⊃B é $F((\pi^{\bullet})^{[A\supset B]})$.

O resultado segue análogo ao Caso 1.

CASO 4: $T(\pi)$ é A⊃B= $F(\pi)$

Como neste caso $T(\pi)= F(\pi)$, pelo Teorema 3.1.7-(2) temos que:

(*xxxiii*) $ng(\pi)= 1$.

Por (*xxxiii*) e pelo Teorema 2.3.10-(4) temos que:

(*xxxiv*) $g(\pi) > g(\pi^{\bullet})$.

(*xxxv*) Mas como A⊃B é $T(\pi)$, então $g(\pi)= g(\pi^{\bullet 0})= gr(A\supset B)$.

(*xxxvi*) Logo, por (*xxxiv*) e (*xxxv*), $g(\pi^{\bullet}) < gr(A\supset B)$.

Assim, por (*xxxv*), (*xxxvi*) e pela Definição 3.3.1, $\pi^{[A\supset B]} \equiv \pi^{\bullet}$. Portanto, o resultado para o Caso 4 segue exatamente como no caso básico. □

Item (3)

Vamos provar um resultado um pouco mais genérico, do qual o Item (3) é um caso particular. Considere π_{∇} uma derivação com a seguinte forma:

$$\pi_{\nabla} \equiv \begin{array}{c} \qquad\quad \underbrace{\pi_4 \cdots \pi_n} \\ \qquad\quad [A] \\ \qquad\quad \pi_2 \\ \qquad\quad \dfrac{B}{A \supset B} \\ \hline B \\ \pi_3 \end{array}$$, onde A⊃B é $F(\pi_{\nabla})$ e onde vale a seguinte propriedade:

(*i*) Não existe top-fórmula em nenhum π_4, ..., π_n que seja cortada por regra externa a π_4, …, π_n, cuja conseqüência tenha posição maior que $F(\pi_{\nabla})$.

Provaremos que:

$$(ii)\ \pi_{\nabla}^{[A\supset B]} \equiv \begin{array}{c} \dfrac{A \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\underbrace{[\pi_4^{[A\supset B]}]\cdots[\pi_n^{[A\supset B]}]} \\ [A] \\ \pi_2^{[A\supset B]} \\ B\end{array}}{A\supset B}}{B} \\ \pi_3^{[A\supset B]}\end{array} \qquad \text{, onde } A\supset B \text{ é } F(\pi_{\nabla}^{[A\supset B]}).$$

Pelo Teorema 3.1.10 temos que π_{Δ} também satisfaz a propriedade (*i*), logo é claro que, se provarmos (*ii*), então

$$\pi_{\Delta}^{[A\supset B]} \equiv \begin{array}{c} \dfrac{A \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^{[A\supset B]} \\ [A] \\ \pi_2^{[A\supset B]} \\ B\end{array}}{A\supset B}}{B} \\ \pi_3^{[A\supset B]}\end{array}$$

, onde $A\supset B$ é $F(\pi_{\Delta}^{[A\supset B]})$ e, portanto, pelo Item (2), $\pi_{\Delta}^{[A\supset B]} \equiv \pi^{[A\supset B]}$.

Seja $\pi_{\nabla}^{[A\supset B]} \equiv \pi_{\nabla}^{\bullet m}$. Provaremos o item por indução em m.

<u>BASE</u>: $m = 0$

(*iii*) Neste caso $\pi_{\nabla}^{[A\supset B]} \equiv \pi_{\nabla}^{\bullet 0} \equiv \pi_{\nabla}$.

Logo, pela Definição 3.3.1, $g(\pi_{\nabla}) < gr(A\supset B)$ e para todo i $(1 \le i \le n)$ $g(\pi_i) < gr(A\supset B)$, pois π_i é subárvore de π_{∇}. Assim, também pela Definição 3.3.1, temos:

(*iv*) $\pi_i^{[A\supset B]} \equiv \pi_i$ tal que $(1 \le i \le n)$.

Portanto:

$$\pi_{\nabla}^{[A\supset B]} \underset{(iii)}{\equiv} \pi_{\nabla} \equiv \begin{array}{c} \dfrac{A \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\underbrace{\pi_4 \cdots \pi_n} \\ [A] \\ \pi_2 \\ B\end{array}}{A\supset B}}{B} \\ \pi_3\end{array} \underset{(iv)}{\equiv} \begin{array}{c} \dfrac{A \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\underbrace{\pi_4^{[A\supset B]} \cdots \pi_n^{[A\supset B]}} \\ [A] \\ \pi_2^{[A\supset B]} \\ B\end{array}}{A\supset B}}{B} \\ \pi_3^{[A\supset B]}\end{array} \text{, onde } F(\pi_{\nabla}^{[A\supset B]}) = A\supset B.$$

<u>PASSO</u>: $m > 0$

HI: Se Σ é uma derivação que satisfaz as hipóteses do teorema tal que $\Sigma^{[F(\Sigma)]} \equiv \Sigma^{\bullet k}$ com $k < m$, então o Item (3) é válido para Σ.

Considere a derivação $\pi_\nabla^\bullet$. Como $\pi_\nabla^{[A\supset B]} \equiv \pi_\nabla^{\bullet m}$ com $m > 0$, pela Observação 3.3.1.1-(*d*) temos:

(*v*) $(\pi_\nabla^\bullet)^{[A\supset B]} \equiv \pi_\nabla^{[A\supset B]} \equiv \pi_\nabla^{\bullet m} \equiv (\pi_\nabla^\bullet)^{\bullet m-1}$.

Note também que como $m > 0$, pela Definição 3.3.1 temos:

(*vi*) $g(\pi_\nabla) \geq gr(A\supset B)$.

Como $A\supset B$ não é $OM_{\pi\nabla}$, então temos três possibilidades para $T(\pi_\nabla)$: ou $T(\pi_\nabla)$ ocorre em algum $\pi_4, \ldots, \pi_n$, ou em π_2, ou em π_3. Analisemos cada um destes casos:

<u>CASO 1</u>: $T(\pi_\nabla)$ ocorre em algum π_j para $(4 \leq j \leq n)$

Note, por (*vi*), que $r(\pi_j)$= A não é $T(\pi_\nabla)$, pois $g(\pi_\nabla)= gr(T(\pi_\nabla)) \geq gr(A\supset B) > gr(A)$.

Logo, pelo Teorema 3.1.2:

$$(vii)\ T(\pi_\nabla)= T(\pi_j) \quad \text{e} \quad \pi_\nabla^\bullet \equiv \cfrac{A \qquad \cfrac{\begin{array}{c}\underbrace{\pi_4 \cdots \pi_{j-1}\ \pi_j^\bullet\ \pi_{j+1} \cdots \pi_n}\\ [A]\\ \pi_2\\ B\end{array}}{A\supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}} \quad ..$$

Como $pos_{\pi\nabla}(r(\pi_j)) > pos_{\pi\nabla}(A\supset B)$, então, pelo Teorema 3.1.6:

(*viii*) $A\supset B$ é $F(\pi_\nabla^\bullet)$.

Note que como nenhuma nova marca de corte que não ocorria em π_j é introduzida em $\pi_j^\bullet$, então:

(*ix*) $\pi_\nabla^\bullet$ satisfaz a propriedade (*i*).

Assim, por (*v*), (*vii*), (*viii*) e (*ix*), temos que vale HI para $\pi_\nabla^\bullet$, logo:

$$(x)\ (\pi_\nabla^\bullet)^{[A\supset B]} \equiv \cfrac{A \qquad \cfrac{\begin{array}{c}\underbrace{[\pi_4^{[A\supset B]}]\cdots[(\pi_m^\bullet)^{[A\supset B]}]\ \cdots[\pi_n^{[A\supset B]}]}\\ [A]\\ \pi_2^{[A\supset B]}\\ B\end{array}}{A\supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3^{[A\supset B]}\end{array}} \quad \text{, onde } A\supset B \text{ é } F((\pi_\nabla^\bullet)^{[A\supset B]}).$$

Por (*vi*) e (*vii*) temos: $g(\pi_j)= gr(T(\pi_j)) \underset{(vii)}{=} gr(T(\pi)) \underset{(vi)}{\geq} gr(A\supset B)$.

Logo, pela Definição 3.3.1, temos que $\pi_j^{[A\supset B]} \equiv \pi_j^{\bullet r}$ tal que $r > 0$.

Portanto, pela Observação 3.3.1.1-(*d*) temos:

(*xi*) $\pi_j^{[A\supset B]} \equiv (\pi_j^\bullet)^{[A\supset B]}$.

Assim, por (*v*), (*x*) e (*xi*) temos:

$$\pi_{\nabla}^{[A\supset B]} \equiv \dfrac{A \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\underbrace{[\pi_4^{[A\supset B]}]\cdots[\pi_n^{[A\supset B]}]}\\ [A]\\ \pi_2^{[A\supset B]}\\ B\end{array}}{A\supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3^{[A\supset B]}\end{array}}$$

, onde $F(\pi_{\nabla}^{[A\supset B]})= A\supset B$.

<u>CASO 2</u>: $T(\pi_{\nabla})$ ocorre em π_2

Como $T(\pi_{\nabla})$ ocorre em π_2, pela Observação 2.1.13.1, $\psi= ass_{\pi\nabla}(T(\pi_{\nabla}))$ ocorre ou em π_2 ou em algum π_j $(4 \leq j \leq n)$.

(*xii*) Pelo Corolário 2.2.11-(5), todas as $OPnL_{\pi\nabla}(\pi_2)$ têm grau menor ou igual a A.

Como, por hipótese, $T(\pi_{\nabla})$ ocorre em π_2, então $g(\pi_2)= g(\pi_{\nabla}) \underset{(vi)}{\geq} gr(A\supset B)> gr(A)$ e, portanto, por (*xii*):

(*xiii*) $T(\pi_{\nabla})$ é $OPL_{\pi\nabla}(\pi_2)$.

(*xiv*) Logo a regra R_1 que gera a ocorrência $\psi= ass_{\pi\nabla}(T(\pi))$ e a regra R_2 da qual $T(\pi)$ é premissa maior estão integralmente em π_2.

Mas é claro, pela forma de π_{∇}, que: $pos_{\pi\nabla}(r(\pi_2))> pos_{\pi\nabla}(A\supset B)$. Então, por (*xiv*) e pelo Teorema 3.1.10:

(*xv*) Toda top-fórmula que a regra que gera $\psi= ass_{\pi\nabla}(T(\pi_{\nabla}))$ corta é top-fórmula de π_2.

(*xvi*) Assim, por (*xiii*), (*xiv*) e (*xv*), temos que os itens (1) a (3) da Definição 2.3.1 de *OM* são satisfeitos por $T(\pi_{\nabla})$ também em π_2.

Analisemos o que ocorre no Item (4) da Definição 2.3.1.

Seja ξ a premissa menor da regra em que $T(\pi_{\nabla})$ é PM.

(*xvii*) Por (*xiv*) temos que ξ também ocorre em π_2.

Como $T(\pi_{\nabla})$ é $OM_{\pi\nabla}$, então, pela Definição 2.3.1 de *OM* temos:

Ou ξ é top-fórmula cortada em π_{∇}, ou $l(\nabla_{\pi\nabla}(\xi))> 1$. Vejamos cada caso:

<u>CASO 2.1</u>: ξ é top-fórmula cortada em π_{∇}

Se ξ é top-fórmula cortada em π_{∇} e ocorre em π_2, como π_2 é subárvore de π_{∇}, é claro que:

(*xviii*) ξ é top-fórmula cortada em π_2.

Portanto, por (*xviii*) temos que o Item (4) da Definição 2.3.1 de OM também é válido para $T(\pi_\nabla)$ em π_2, e portanto, por (*xvi*) e (*xviii*) $T(\pi_\nabla)$ é OM_{π_2}.

Como $T(\pi_\nabla)$ é OM_{π_2} e π_2 é subárvore de π_∇, é claro que não existe $OM_{\pi\nabla}$ com grau maior que $T(\pi_\nabla)$, nem ocorrência de mesmo grau com posição maior que $T(\pi_\nabla)$, pois se existisse em π_2, existiria em π_∇ (Teorema 3.1.5), o que contradiz a Definição 2.3.6 de ocorrência estrela. Portanto:

(*xix*) $T(\pi_\nabla) = T(\pi_2)$.

Por (*xv*), (*xviii*) e (*xix*) podemos escrever π_2 com a seguinte forma:

$$(xx)\qquad \pi_2 \equiv \dfrac{C^s \qquad \overset{\underbrace{[C]^r \quad \{A\}}_{\pi_b}}{C\supset D}}{\underbrace{D \qquad\qquad \{A\}}_{\pi_c}}$$

, onde $C\supset D = T(\pi_\nabla) = T(\pi_2)$.

Assim, por (*xx*) e pela forma de π_∇ temos:

$$(xxi)\qquad \pi_\nabla \equiv \dfrac{A \qquad\qquad \dfrac{\overset{\underbrace{\dfrac{C^s \qquad \overset{\underbrace{[C]^r \qquad \overset{\underbrace{\{\pi_4\} \dots \{\pi_n\}}}{\{A\}}}_{\pi_b}}{C\supset D}}{D \qquad\qquad \overset{\underbrace{\{\pi_4\} \dots \{\pi_n\}}}{\{A\}}}}_{\pi_c}}{B}}{A\supset B}}{\underset{\pi_3}{B}}$$

, onde $A\supset B = F(\pi_\nabla)$.

Por (*xix*), (*xx*) e (*xxi*) temos:

$$(xxii)\qquad \pi_2^\bullet \equiv \dfrac{C \qquad \overset{\underbrace{[C]^s \quad \{A\}}_{\pi_b}}{C\supset D}}{\underbrace{D \qquad\qquad \{A\}}_{\pi_c}}$$

e

$$\begin{array}{c}
\underbrace{[C]^s \qquad \underbrace{\{\pi_4\} \ldots \{\pi_n\}}_{\{A\}}}_{\pi_b} \\
\underbrace{\dfrac{C \qquad C \supset D}{D} \qquad \underbrace{\{\pi_4\} \ldots \{\pi_n\}}_{\{A\}}}_{\pi_c}
\end{array}$$

$$(xxiii)\quad \pi_{\nabla}^{\bullet} \equiv \begin{array}{c} \dfrac{A \qquad\qquad \dfrac{B}{A \supset B}}{B} \\ \pi_3 \end{array}$$

Note por (*xxi*) e (*xxiii*) que as mudanças de $\pi_{\nabla}^{\bullet}$ com relação a π_{∇} foram todas feitas em subárvores cujas raízes têm posição maior que $pos_{\pi\nabla}(A \supset B)$. Portanto, pelo Teorema 3.1.6:

(*xxiv*) $A \supset B$ é $F(\pi_{\nabla}^{\bullet})$

Dessa forma, por (*xxii*), (*xxiii*) e (*xxiv*) temos:

$$(xxv)\ \pi_{\nabla}^{\bullet} \equiv \begin{array}{c} \dfrac{A \qquad \begin{array}{c} \underbrace{[\pi_4]\cdots[\pi_n]}_{[A]} \\ \pi_2^{\bullet} \\ \overline{\ \ B\ \ } \\ A \supset B \end{array}}{B} \\ \pi_3 \end{array} \quad \text{, onde } A \supset B \text{ é } F(\pi_{\nabla}^{\bullet}).$$

Note também, por (*xxi*) e (*xxiii*) que não houve nenhuma modificação interna em nenhuma cópia de π_4, ... π_n, na passagem de π_{∇} para $\pi_{\nabla}^{\bullet}$. Portanto:

(*xxvi*) $\pi_{\nabla}^{\bullet}$ também satisfaz a propriedade (*i*).

Assim, por (*vi*), (*xxv*), (*xxiv*) e (*xxvi*) temos que vale a hipótese indutiva para $\pi_{\nabla}^{\bullet}$. Portanto:

$$(xxvii)\ (\pi_{\nabla}^{\bullet})^{[A\supset B]} \equiv \begin{array}{c} \dfrac{A \qquad \begin{array}{c} \underbrace{[\pi_4^{[A\supset B]}]\cdots[\pi_n^{[A\supset B]}]}_{[A]} \\ (\pi_2^{\bullet})^{[A\supset B]} \\ \overline{\ \ B\ \ } \\ A \supset B \end{array}}{B} \\ \pi_3^{[A\supset B]} \end{array} \quad \text{onde } F((\pi_{\nabla}^{\bullet})^{[A\supset B]}) = A \supset B.$$

Por (*vi*) e (*xix*) temos:

$g(\pi_2) = gr(T(\pi_2)) \underset{(xix)}{=} gr(T(\pi_\nabla) = g(\pi_\nabla) \underset{(vi)}{\geq} gr(\mathsf{A} \supset \mathsf{B})$

Logo, pela Definição 3.3.1 $\pi_2^{[A\supset B]} \equiv \pi_2^{\bullet s}$ tal que $s > 0$.

Portanto, pela Observação 3.3.1.1-(*d*) temos:

(*xxviii*) $(\pi_2^{\bullet})^{[A\supset B]} \equiv \pi_2^{[A\supset B]}$.

Então, por (*v*), (*xxvii*) e (*xxviii*) temos:

$$\pi_\nabla^{[A\supset B]} \equiv \dfrac{\mathsf{A} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\underbrace{[\pi_4^{[A\supset B]}]\cdots[\pi_n^{[A\supset B]}]}\\ [\mathsf{A}] \\ \pi_2^{[A\supset B]} \\ \mathsf{B}\end{array}}{\mathsf{A} \supset \mathsf{B}}}{\begin{array}{c}\mathsf{B}\\ \pi_3^{[A\supset B]}\end{array}}, \text{ onde } F(\pi_\nabla^{[A\supset B]}) = \mathsf{A} \supset \mathsf{B}.$$

<u>CASO 2.2</u>: $l(\nabla_{\pi\nabla}(\xi)) > 1$

Como, por (*xvii*), ξ ocorre em π_2, então: ou ξ é uma das hipóteses [A] destacadas em π_2, ou não é. Analisemos cada um dos casos:

<u>SubCaso 2.2.1</u>: ξ não é hipótese destacada de π_2

(*xxix*) Pela forma de π_∇ temos que, com exceção das ocorrências de ligação para cima de π_2, todas as demais top-fórmulas de π_2 são top-fórmulas de π_∇.

Como ξ não é hipótese destacada de π_2 e não é top-fórmula de π_∇ ($l(\nabla_{\pi\nabla}(\xi)) > 1$), então, por (*xxix*), temos que ξ não é top-fórmula de π_2. Logo:

(*xxx*) $l(\nabla_{\pi_2}(\xi)) > 1$

Portanto, por (*xxx*) temos que o Item (4) da Definição 2.3.1 de OM também é válido para $T(\pi_\nabla)$ em π_2, e portanto, por (*xvi*), $T(\pi_\nabla)$ é OM_{π_2}. Assim, como e π_2 é subárvore de π_∇, é claro que não existe $OM_{\pi\nabla}$ com grau maior que $T(\pi_\nabla)$, nem ocorrência de mesmo grau com posição maior que $T(\pi_\nabla)$, pois se existisse em π_2, existiria em π_∇ (Teorema 3.1.5), o que contradiz a Definição 2.3.6 de ocorrência estrela. Portanto:

(*xxxi*) $T(\pi_\nabla) = T(\pi_2)$.

Por (*xv*), (*xxx*) e (*xxxi*) podemos escrever π_2 com a seguinte forma:

$$(xxxii)\quad \pi_2 \equiv \frac{\begin{array}{c}\{A\}\\ \pi_a\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\underbrace{[C]^r \quad \{A\}}_{\pi_b}\\ C\supset D\end{array}}{\underbrace{D \qquad\qquad \{A\}}_{\pi_c}}$$

, onde $C\supset D = T(\pi_\nabla) = T(\pi_2)$.

Assim, por (*xxxii*) e pela forma de π_∇ temos:

$$(xxxiii)\quad \pi_\nabla \equiv \cfrac{A \qquad \cfrac{\begin{array}{c} \cfrac{\begin{array}{c}\underbrace{\{\pi_4\}\ldots\{\pi_n\}}_{\{A\}}\\ \pi_a\\ C\end{array}\quad \begin{array}{c}\underbrace{[C]^r \qquad \underbrace{\{\pi_4\}\ldots\{\pi_n\}}_{\{A\}}}_{\pi_b}\\ C\supset D\end{array}}{\underbrace{D \qquad\qquad \underbrace{\{\pi_4\}\ldots\{\pi_n\}}_{\{A\}}}_{\pi_c}} \\ B\end{array}}{A\supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}}$$

, onde $A\supset B = F(\pi_\nabla)$.

Por (*xxxi*), (*xxxii*) e (*xxxiii*) temos:

$$(xxxiv)\quad \pi_2^\bullet \equiv \frac{C \qquad \begin{array}{c}\{A\}\\ \pi_a\\ \underbrace{[C] \quad \{A\}}_{\pi_b}\\ C\supset D\end{array}}{\underbrace{D \qquad\qquad \{A\}}_{\pi_c}}$$

e

$$\begin{array}{c}
\underbrace{\{\pi_4\}\ \ldots\ \{\pi_n\}} \\
\{A\} \\
\pi_a \qquad \underbrace{\{\pi_4\}\ \ldots\ \{\pi_n\}} \\
\underbrace{[C] \qquad\qquad \{A\}} \\
\pi_b \\
\dfrac{C \qquad\qquad C\supset D}{D} \qquad \underbrace{\{\pi_4\}\ \ldots\ \{\pi_n\}} \\
\underbrace{D \qquad\qquad\qquad\qquad \{A\}} \\
\pi_c
\end{array}$$

$$(xxxv)\ \pi^{\bullet}_{\nabla} \equiv \dfrac{A \qquad\qquad\qquad \dfrac{B}{A\supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}} \quad .$$

Note por (*xxxiii*) e (*xxxv*) que as mudanças de $\pi^{\bullet}_{\nabla}$ com relação a π_{∇} foram todas feitas em subárvores cujas raízes têm posição maior que $pos_{\pi\nabla}(A\supset B)$. Portanto, pelo Teorema 3.1.6 temos:

(*xxxvi*) $A\supset B$ é $F(\pi^{\bullet}_{\nabla})$.

Dessa forma, por (*xxxiv*), (*xxxv*) e (*xxxvi*) temos:

$$\pi^{\bullet}_{\nabla} \equiv \dfrac{A \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\underbrace{[\pi_4]\cdots[\pi_n]}\\ [A] \\ \pi^{\bullet}_2 \\ B\end{array}}{A\supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}} \quad \text{, onde } A\supset B \text{ é } F(\pi^{\bullet}_{\nabla}).$$

A solução segue análoga a do Caso 2.1 a partir da cláusula (*xxv*).

<u>SubCaso 2.2.2</u>: ψ é hipótese destacada de π_2

Neste caso, π_2 pode ser escrita da seguinte forma:

$$(xxxvii)\ \pi_2 \equiv \begin{array}{c} \dfrac{A \qquad \begin{array}{c}\underbrace{[A]^r \quad \{A\}}\\ \pi_b \\ (A\supset B)^1\end{array}}{\underbrace{D \qquad\qquad \{A\}}} \\ \pi_c \end{array} \quad \text{, onde } (A\supset B)^1 = T(\pi_{\nabla}).$$

O índice superior 1 em $A\supset B$ é apenas para distinção de referência com a ocorrência de $F(\pi_\nabla)$.

Assim, por (*xxxvii*) e pela forma de π_∇ temos:

$$(xxxviii)\quad \pi_\nabla \equiv \dfrac{A \qquad \dfrac{\begin{array}{c} \underbrace{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_j\\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\underbrace{[A]^r \qquad \begin{array}{c}\underbrace{\{\pi_4\}\ \ldots\ \{\pi_n\}}\\ \{A\}\end{array}}\\ \pi_b \\ (A\supset B)^1\end{array}}{D} \qquad \begin{array}{c}\underbrace{\{\pi_4\}\ \ldots\ \{\pi_n\}}\\ \{A\}\end{array}} \\ \pi_c \\ B\end{array}}{(A\supset B)^2}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}}$$

, onde: $(A\supset B)^1$ é $T(\pi_\nabla)$,
$(A\supset B)^2$ é $F(\pi_\nabla)$ e
$4 \leq j \leq n$.

Dessa forma, por (*xxxviii*) temos:

$$(xxxix)\quad \pi_\nabla^\bullet \equiv \dfrac{A \qquad \dfrac{\begin{array}{c} \underbrace{\dfrac{A \qquad \begin{array}{c}\underbrace{\begin{array}{c}\pi_j\\ [A]\end{array} \qquad \begin{array}{c}\underbrace{\{\pi_4\}\ \ldots\ \{\pi_n\}}\\ \{A\}\end{array}}\\ \pi_b \\ (A\supset B)^1\end{array}}{D} \qquad \begin{array}{c}\underbrace{\{\pi_4\}\ \ldots\ \{\pi_n\}}\\ \{A\}\end{array}} \\ \pi_c \\ B\end{array}}{(A\supset B)^2}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}}$$

Note por (*xxxviii*) e (*xxxix*) que as mudanças de $\pi_\nabla^\bullet$ com relação a π_∇ foram todas feitas em subárvores cujas raízes têm posição maior que $pos_{\pi\nabla}((A\supset B)^2)$. Portanto, pelo Teorema 3.1.6 temos:

(*xl*) $(A\supset B)^2$ é $F(\pi_\nabla^\bullet)$.

Dessa forma, por (*xxxvii*), (*xxxix*) e (*xl*) temos:

$$(xli)\ \pi_{\nabla}^{\bullet} \equiv \dfrac{A \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\underbrace{[\pi_4]\cdots[\pi_n]}\\ [A] \\ \pi_2 \\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c} B \\ \pi_3 \end{array}} \qquad \text{, onde } A\supset B \text{ é } F(\pi_{\nabla}^{\bullet}).$$[31]

Note também, por (*xxxviii*) e (*xxxix*), que não houve nenhuma modificação interna em nenhuma cópia de π_4, ... π_n, na passagem de π_{∇} para $\pi_{\nabla}^{\bullet}$. Portanto:

(*xlii*) $\pi_{\nabla}^{\bullet}$ também satisfaz a propriedade (*i*).

Assim, por (*vi*), (*xli*) e (*xlii*) temos que vale a hipótese indutiva para $\pi_{\nabla}^{\bullet}$. Portanto:

$$(xliii)\ (\pi_{\nabla}^{\bullet})^{[A\supset B]} \equiv \dfrac{A \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\underbrace{[\pi_4^{[A\supset B]}]\cdots[\pi_n^{[A\supset B]}]}\\ [A] \\ \pi_2^{[A\supset B]} \\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c} B \\ \pi_3^{[A\supset B]} \end{array}} \qquad \text{, onde } F((\pi_{\nabla}^{\bullet})^{[A\supset B]}) = A\supset B.$$

Logo, por (*v*) e (*xliii*) temos:

$$\pi_{\nabla}^{[A\supset B]} \equiv \dfrac{A \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\underbrace{[\pi_4^{[A\supset B]}]\cdots[\pi_n^{[A\supset B]}]}\\ [A] \\ \pi_2^{[A\supset B]} \\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c} B \\ \pi_3^{[A\supset B]} \end{array}} \qquad \text{, onde } F(\pi_{\nabla}^{[A\supset B]}) = A\supset B.$$

<u>CASO 3</u>: $T(\pi_{\nabla})$ ocorre em π_3

Prova análoga à do caso 3 dos itens 1 e 2.

---

[31] Note que, olhando para a notação simplificada (*xli*), parece que $\pi_{\nabla}^{\bullet} \equiv \pi_{\nabla}$. No entanto, olhando para as notações detalhadas vemos claramente que π_{∇} (descrito em (*xxxviii*)) é diferente de $\pi_{\nabla}^{\bullet}$ (descrito em (*xxxix*)). No entanto, a multiplicação-* de $T(\pi_{\nabla})$ apenas trocou de lugar em π_2 a subárvore π_j. Tal mudança não é visível na notação simplificada que adotamos.

E com isso completamos todos os casos da prova da proposição (*ii*).

Como provamos (*ii*) e pelo Teorema 3.1.10 temos que π_Δ também satisfaz a propriedade (*i*), então, é claro que:

$$\pi_\Delta^{[A\supset B]} \equiv \dfrac{A \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^{[A\supset B]}\\ [A] \\ \pi_2^{[A\supset B]} \\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B \\ \pi_3^{[A\supset B]}\end{array}}$$

, onde $A\supset B$ é $F(\pi_\Delta^{[A\supset B]})$ e, portanto, pelo Item (2) deste teorema: $\pi_\Delta^{[A\supset B]} \equiv \pi^{[A\supset B]}$. □

Item (4)

$\pi^* \underset{3.3.1.1\text{-(d)}}{\equiv} (\pi^{[A\supset B]})^* \underset{\text{Item (3)}}{\equiv} (\pi_\Delta^{[A\supset B]})^* \underset{3.3.1.1\text{-(d)}}{\equiv} \pi_\Delta^*$. □

Itens (5) e (6)

(*i*) Seja φ a *FM* reduzida em $\pi \rightarrow \pi'$.

Vamos dividir a prova dos Itens (5) e (6) em tantos casos quantas forem as possibilidades para φ em π.

<u>CASO 1</u>: φ ocorre em π_1.

Neste caso, π' é da forma:

$$(ii)\ \pi' \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1' \\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^k \\ \pi_2 \\ B\end{array}}{A \supset B}k}{\begin{array}{c}B \\ \pi_3\end{array}}, \text{ onde } \pi_1 \rightarrow \pi_1'.$$

Note que π' difere de π apenas na subárvore π_1. Mas como $pos_\pi(r(\pi_1)) > pos_\pi(A\supset B)$, então, pelo Teorema 3.1.6 temos:

(*iii*) $A\supset B = F(\pi')$

(*iv*) Note também, por (*ii*), que $A\supset B$ é $OM_{\pi'}$.

Assim, por (*ii*), (*iii*) e (*iv*) temos que o Item (4) se aplica a π', logo:

(*v*) $\pi'^* \equiv \pi_\Delta'^*$.

Além disso, também por (*ii*), (*iii*), (*iv*) e pela Definição 3.1.9, temos:

$$(vi)\ \pi'_{\Delta} \equiv \dfrac{A \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi'_1\\ [A]\\ \pi_2\\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}}.$$

Pela forma de π_Δ, se efetuarmos em cada cópia de π_1 em π_Δ a mesma redução feita em π_1 de π temos:

$$(vii)\ \pi_{\Delta} \equiv \dfrac{A \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ [A]\\ \pi_2\\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}} \twoheadrightarrow \dfrac{A \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi'_1\\ [A]\\ \pi_2\\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}} \underset{(vi)}{\equiv} \pi'_{\Delta}.$$

Assim, por (v) e (vii), valem os Itens (5) e (6) para π do Caso 1.

<u>CASO 2</u>: φ ocorre em π_2

Neste caso, π' pode ter duas possíveis formas:

$$(viii)\ \pi' \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^k\\ \pi'_2\\ B\end{array}}{A \supset B}\,k}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}},$$ quando a redução de φ **não** elimina todas as hipóteses A cortadas pela regra que gera $A \supset B = F(\pi)$; ou

$$(ix)\ \pi' \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi'_2\\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}},$$ quando a redução de φ **elimina** todas as hipóteses A cortadas pela regra que gera $A \supset B = F(\pi)$.

Analisemos estes dois casos:

SubCaso 2.1: $\pi' \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[A]^k\\ \pi'_2\\ B\end{matrix}}{A \supset B}k}{\begin{matrix}B\\ \pi_3\end{matrix}}$ (como em (*viii*))

Note que π' difere de π apenas na subárvore π_2. Mas como $pos_\pi(r(\pi_2)) > pos_\pi(A \supset B)$, então, pelo Teorema 3.1.6 temos:

(*x*) $A \supset B = F(\pi')$.

(*xi*) Note também, por (*viii*), que $A \supset B$ é $OM_{\pi'}$.

Assim, por (*viii*), (*x*) e (*xi*) temos que o Item (4) se aplica a π', logo:

(*xii*) $\pi'^* \equiv \pi'^*_\Delta$.

Além disso, por (*viii*), (*x*), (*xi*) e pela Definição 3.1.9, temos:

(*xiii*) $\pi'_\Delta \equiv \dfrac{A \quad \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ [A]\\ \pi'_2\\ B\end{matrix}}{A \supset B}}{\begin{matrix}B\\ \pi_3\end{matrix}}$.

Por (*viii*) e (*xiii*), é claro que repetindo a redução $\pi_2 \to \pi'_2$ em π_Δ temos:

(*xiv*) $\pi_\Delta \equiv \dfrac{A \quad \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ [A]\\ \pi_2\\ B\end{matrix}}{A \supset B}}{\begin{matrix}B\\ \pi_3\end{matrix}} \to \dfrac{A \quad \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ [A]\\ \pi'_2\\ B\end{matrix}}{A \supset B}}{\begin{matrix}B\\ \pi_3\end{matrix}} \equiv \pi'_\Delta$.

Note que como a redução de φ em π não elimina todas as hipóteses A cortadas por *k*, então em π_Δ a redução de φ não elimina todas as cópias de π_1.

Note também que **não** corremos o risco da redução de π_2 em π_Δ multiplicar alguma subárvore de π_2 em top-fórmula de π_1, alterando assim alguma cópia de π_1. Isso porque em π, a derivação original, as raízes de π_1 e π_2 ocorrem em ramos diferentes, ou seja, nenhuma top-fórmula de π_1 ocorre acima de ocorrência de fórmula de π_2. Logo, nenhuma regra de π_2

corta top-fórmula de π_1. Como π_Δ foi obtida de π por uma multiplicação, as marcas de corte existentes nas ocorrências de π_1 não se alteram em π_Δ. Portanto, a redução de φ é local a π_2 em π_Δ, não alterando internamente nenhuma cópia de π_1.

Assim, por (*xii*) e (*xiv*), os Itens (5) e (6) valem para π do subcaso 2.1.

<u>SubCaso 2.2</u>: $\pi' \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi'_2\\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}}$ (como em (*ix*))

Note que $A \supset B$ não é mais ocorrência multiplicativa em π', logo, pela Definição 3.1.9:

(*xv*) $\pi'_\Delta \equiv \pi'$.

Portanto, por (*xv*), é claro que:

(*xvi*) $\pi'^* \equiv \pi'_\Delta{}^*$.

É claro que se repetirmos a redução $\pi_2 \rightarrow \pi'_2$ em π_Δ temos:

$$(xvii)\ \pi_\Delta \equiv \dfrac{A \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ [A]\\ \pi_2\\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}} \rightarrow \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi'_2\\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}} \underset{(hip)}{\equiv} \pi' \underset{(xv)}{\equiv} \pi'_\Delta.$$

Note que como em π a redução de φ ($\pi_2 \rightarrow \pi'_2$) eliminou todas as hipóteses A destacadas em π_2, ela produz o mesmo efeito em π_Δ. Assim, por (*xvi*) e (*xvii*), os Itens (5) e (6) valem para π do subcaso 2.2.

<u>CASO 3</u>: φ ocorre em π_3

Como φ é *FM* em π, π_3 deve ter a seguinte forma: $\pi_3 \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_5\\ D\end{array} \quad \begin{array}{c}B\\ \pi_4\\ C\end{array}}{\begin{array}{c}E\\ \pi_6\end{array}}$, onde φ ocorre em π_5, pois como $A \supset B$ é $F(\pi)$, φ não pode ter posição menor que a posição de $A \supset B$. Logo:

$$(xviii)\ \pi \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_5\\ D\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A\end{matrix}\quad \dfrac{\begin{matrix}[A]^k\\ \pi_2\\ B\end{matrix}}{A\supset B}}{B}\,k\\ \pi_4\\ C\end{matrix}}{\begin{matrix}E\\ \pi_6\end{matrix}} \qquad \text{e} \quad \pi' \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi'_5\\ D\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A\end{matrix}\quad \dfrac{\begin{matrix}[A]^k\\ \pi_2\\ B\end{matrix}}{A\supset B}}{B}\,k\\ \pi_4\\ C\end{matrix}}{\begin{matrix}E\\ \pi_6\end{matrix}}$$

Como π_5 é subárvore completa de π e $pos_\pi(D) > pos_\pi(A\supset B)$, então a solução é análoga à do Caso 1.

Note que por hipótese $\varphi \neq A\supset B$. Com isso analisamos todos os casos e terminamos a prova dos Itens (5) e (6), e do teorema. ♦

§4 Resultados Gerais

Obteremos nesta seção, depois de todo este desenvolvimento, os resultados principais sobre o sistema C'. Os teoremas desta seção garantem que $o(\pi)$ diminui com as reduções, que é o menor Ordinal Natural para derivações em C' ($o(\pi)= lp(\pi)$), que a pior seqüência de redução de Massi é finita e, finalmente, que vale a Normalização Forte e Church-Rosser para C'. Vamos inicialmente provar que $o(\pi)$ diminui com as reduções.

3.4.1 TEOREMA:

Se π' é obtida de π através de uma redução qualquer, então $o(\pi) > o(\pi')$.

Ou seja: $(\pi \rightarrow \pi') \Rightarrow (o(\pi) > o(\pi'))$.

PROVA:

Seja $\pi^* \equiv \pi^{\bullet n}$. Provaremos por indução em $p(\pi^*)$.

BASE: $p(\pi^*)= 0 \Rightarrow_{\underline{3.4.1-(3)}} \pi$ é normal.

Como π' não está definido neste caso, o teorema é válido por vacuidade.

PASSO:

HI: Para toda Σ, tal que $p(\Sigma^*) < p(\pi^*)$, temos que $(\Sigma \rightarrow \Sigma') \Rightarrow (o(\Sigma) > o(\Sigma'))$.

Queremos provar que $o(\pi) > o(\pi')$.

Apresentaremos, como dissemos na introdução do capítulo, uma solução por casos, baseada na forma de $F(\pi)$.

<u>CASO 1</u>: $$\pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ B\end{array}}{A \supset B}}{B} \\ \pi_3 \end{array}$$, onde:

(1) $A \supset B$ é $F(\pi)$;

(2) $A \supset B$ não é OM_{π}.

(*i*) Pelo Teorema 3.2.2 temos: $$\pi^{\Box} \equiv \begin{array}{c}\pi_2\\ B\\ \pi_3\end{array} .$$

(*ii*) Pelo Teorema 3.2.9-(2) temos: $p(\pi^*) = p(\pi^{\Box *}) + p(\pi_1^*) + 1$.

Temos aqui tantos subcasos quantas são as possíveis formas para π'.

<u>SubCaso 1.1</u>: $$\pi' \equiv \begin{array}{c}\pi_2\\ B\\ \pi_3\end{array}$$ (obtida pela redução de $A \supset B$)

(*iii*) Por (*i*) e pela hipótese do subcaso temos: $\pi' \equiv \pi^{\Box}$.

Mas, por (*ii*) temos que $p(\pi^*) > p(\pi^{\Box *})$. Logo, por (*iii*) temos $p(\pi^*) > p(\pi'^*)$ e, portanto, $o(\pi) > o(\pi')$.

<u>SubCaso 1.2</u>: $$\pi' \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1'\\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ B\end{array}}{A \supset B}}{B} \\ \pi_3 \end{array}$$

Note que $A \supset B$ é *FM* em π', π' é distinto de π apenas na subárvore determinada por A e $pos_{\pi}(A) > pos_{\pi}(A \supset B)$. Então, pelo Teorema 3.1.6:

(*iv*) $A \supset B$ é $F(\pi')$.

Pela forma de π', por (*iv*) e pelo Teorema 3.2.9-(2) temos:

(*v*) $p(\pi'^*) = p(\pi'^{\Box *}) + p(\pi_1'^*) + 1$.

(*vi*) Também por (*iv*), pela forma de π' e pelo Teorema 3.2.2 temos: $$\pi'^{\Box} \equiv \begin{array}{c}\pi_2\\ B\\ \pi_3\end{array} .$$

(*vii*) Por (*i*) e (*vi*) temos que $\pi'^{\Box} \equiv \pi^{\Box}$.

(*viii*) Assim, por (*v*) e (*vii*) temos: $p(\pi'^*) = p(\pi^{\Box *}) + p(\pi_1'^*) + 1$.

(*ix*) Por (*ii*) temos que $p(\pi_1^*) < p(\pi^*)$.

Logo, vale HI em π_1. Então:

(*x*) $o(\pi_1) > o(\pi_1')$.

(*xi*) Assim, por (*x*) e pela Definição 2.4.1 temos: $p(\pi_1^*) > p(\pi_1'^*)$.

(*xii*) Portanto, por (*ii*), (*viii*) e (*xi*) temos: $p(\pi^*) > p(\pi'^*) \Rightarrow o(\pi) > o(\pi')$.

<u>SubCaso 1.3</u>: $$\pi' \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2'\\ B\end{array}}{A \supset B}}{B} \\ \pi_3 \end{array}$$

Note que $A \supset B$ é *FM* em π', π' é distinto de π apenas na subárvore determinada por B e $pos_\pi(B) > pos_\pi(A \supset B)$. Então, pelo Teorema 3.1.6:

(*xiii*) $A \supset B$ é $F(\pi')$.

(*xiv*) Por (*xiii*), pela forma de π' e pelo Teorema 3.2.2 temos: $\pi'^{\Box} \equiv \begin{array}{c}\pi_2'\\ B\\ \pi_3\end{array}$.

Também pela forma de π', por (*xiii*) e pelo Teorema 3.2.9-(2) temos:

(*xv*) $p(\pi'^*) = p(\pi'^{\Box *}) + p(\pi_1^*) + 1$.

Além disso, fazendo a mesma redução de π em $\pi^{\Box}$ temos:

(*xvi*) $\pi^{\Box} \equiv \begin{array}{c}\pi_2\\ B\\ \pi_3\end{array} \rightarrow \begin{array}{c}\pi_2'\\ B\\ \pi_3\end{array} \equiv \pi^{\Box'} \underset{(xiv)}{\equiv} \pi'^{\Box}$.

Por (*ii*) temos que $p(\pi^{\Box *}) < p(\pi^*)$.

(*xvii*) Logo, vale em $\pi^{\Box}$ a hipótese indutiva e: $o(\pi^{\Box}) > o(\pi^{\Box'})$.

(*xviii*) Então, por (*xvi*) e (*xvii*) temos: $o(\pi^{\Box}) > o(\pi'^{\Box})$

(*xix*) Assim, por (*xviii*) e pela Definição 2.4.1 temos: $p(\pi^{\Box *}) > p(\pi'^{\Box *})$.

(*xx*) Portanto, por (*ii*), (*xv*) e (*xix*) temos: $p(\pi^*) > p(\pi'^*) \Rightarrow o(\pi) > o(\pi')$.

<u>SubCaso 1.4</u>: $$\pi' \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ B\end{array}}{A \supset B}}{B} \\ \pi_3' \end{array}$$

Note que neste caso, como A⊃B é $F(\pi)$, temos: $\pi' \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_5' \\ D\end{matrix} \qquad \begin{matrix} \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\pi_2\\ B\end{matrix}}{A\supset B}}{B} \\ \pi_4 \\ C\end{matrix}}{\begin{matrix}E \\ \pi_6\end{matrix}}$.

A solução é análoga ao caso anterior.

CASO 2: π tem a forma: $\pi \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[A]^k\\ \pi_2\\ B\end{matrix}}{A\supset B}\,k}{\begin{matrix}B\\ \pi_3\end{matrix}}$, onde:

(1) A⊃B é $F(\pi)$;

(2) A⊃B é OM_π.

Pela Definição 3.1.9, π_Δ, obtida de π pela multiplicação-* de A⊃B, tem a forma:

(*xxi*) $\pi_\Delta \equiv \dfrac{A \quad \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ [A]\\ \pi_2\\ B\end{matrix}}{A\supset B}}{\begin{matrix}B\\ \pi_3\end{matrix}}$.

Note que A⊃B é *FM* em π_Δ, e π_Δ é distinto de π apenas nas subárvores determinadas por A (A premissa menor de $F(\pi)$ e nos As top-fórmulas de π_2) e, para todo A expresso em π_Δ, $pos_{\pi\Delta}(A) > pos_{\pi\Delta}(A\supset B)$. Então, por sucessivas aplicações do Teorema 3.1.6 (uma para cada ocorrência A) temos:

(*xxii*) A⊃B é $F(\pi_\Delta)$.

(*xxiii*) Chamemos $\pi_4 \equiv \begin{matrix}\pi_1\\ [A]\\ \pi_2\end{matrix}$. Temos então, por (*xxi*), (*xxii*) e (*xxiii*), que:

$$(xxiv)\quad \pi_\Delta \equiv \cfrac{A \qquad \cfrac{\begin{array}{c}\pi_4\\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}},\ \text{ onde } A\supset B \text{ é } F(\pi_\Delta).$$

Analisemos dois casos distintos para π': (1) A *FM* φ reduzida em $\pi \to \pi'$ é tal que $\varphi \neq A\supset B = F(\pi)$ e (2) $\varphi = A\supset B = F(\pi)$.

<u>SubCaso 2.1</u> φ reduzida em $\pi \to \pi'$ é tal que $\varphi \neq A\supset B = F(\pi)$.

(*xxv*) Pelo Teorema 3.3.4-(6), temos que: $\pi \to \pi' \Rightarrow \pi_\Delta \twoheadrightarrow \pi'_\Delta$.

(*xxvi*) Seja $\pi_\Delta \equiv \pi_{\Delta_1} \to \pi_{\Delta_2} \to \pi_{\Delta_3} \to \ldots \to \pi_{\Delta_n} \equiv \pi'_\Delta$ uma seqüência de redução para $\pi_\Delta \twoheadrightarrow \pi'_\Delta$ expressa em (*xxv*). Note que, por 3.3.4-(6), $n \geq 2$, uma vez que $\pi_\Delta \not\equiv \pi'_\Delta$.

Por (*xxii*) e (*xxiv*), temos que π_Δ é uma derivação com a forma de π do Caso 1 deste teorema. Portanto, pelo Caso 1 e por (*xxvi*) temos:

(*xxvii*) $o(\pi_\Delta) = o(\pi_{\Delta_1}) > o(\pi_{\Delta_2})$. Portanto, $p(\pi_\Delta^*) = p(\pi_{\Delta_1}^*) > p(\pi_{\Delta_2}^*)$.

(*xxviii*) Mas pelo Teorema 3.3.4-(4), $\pi^* \equiv \pi_\Delta^*$. Logo: $p(\pi^*) = p(\pi_\Delta^*)$.

(*xxix*) Assim, por (*xxvii*) e (*xxviii*) temos: $p(\pi^*) = p(\pi_{\Delta_1}^*) > p(\pi_{\Delta_2}^*)$.

Por (*xxix*) vale HI para π_{Δ_2}. Logo, $o(\pi_{\Delta_2}) > o(\pi_{\Delta_3})$. Dessa forma, por (*xxvii*) e sucessivas aplicações de HI temos:

(*xxx*) $o(\pi_\Delta) \underset{(xxvi)}{=} o(\pi_{\Delta_1}) \underset{(xxvii)}{>} o(\pi_{\Delta_2}) \underset{(xxvii)\text{ e }(HI)}{>} o(\pi_{\Delta_3}) > \underset{(HI)}{\cdots >} o(\pi_{\Delta_n}) \underset{(xxvi)}{=} o(\pi'_\Delta)$.

(*xxxi*) Pelo Teorema 3.3.4-(4) e 3.3.4-(5) temos: $\pi^* \equiv \pi_\Delta^*$ e $\pi'^* \equiv \pi'^*_\Delta$.

Portanto:

$o(\pi_\Delta) \underset{(xxx)}{>} o(\pi'_\Delta) \underset{\text{Def 2.4.1}}{\Rightarrow} p(\pi_\Delta^*) > p(\pi'^*_\Delta) \underset{(xxxi)}{\Rightarrow} p(\pi^*) > p(\pi'^*) \underset{\text{Def 2.4.1}}{\Rightarrow} o(\pi) > o(\pi')$.

<u>SubCaso 2.2</u> φ reduzida em $\pi \to \pi'$ é tal que $\varphi = A\supset B = F(\pi)$

Neste caso, pela forma de π temos:

$$(xxxii)\ \pi' \equiv \begin{array}{c}\pi_1\\ [A]\\ \pi_2\\ B\\ \pi_3\end{array} \underset{(xxiii)}{=} \begin{array}{c}\pi_4\\ B\\ \pi_3\end{array}.$$

Note, por (*xxiv*), que π_Δ é uma derivação na qual $F(\pi_\Delta)$ não é OM_{π_Δ}. Portanto, os Teoremas da Seção 3.2 valem para π_Δ. Logo, por (*xxiv*), (*xxxii*) e pelo Teorema 3.2.2 temos:

(*xxxiii*) $\pi' \equiv \pi_\Delta^{\square}$.

Considere $\pi_5 \equiv \mathsf{A}$, premissa menor da regra em que $\mathsf{A}\supset\mathsf{B}$ é premissa maior em π_Δ.

É claro que π_5 é derivação normal, e portanto, $\pi_5 \equiv \pi_5{}^*$ e $p(\pi_5{}^*)= 0$.

Portanto, por (*xxiv*) e pelo Teorema 3.2.9 temos:

(*xxxiv*) $p(\pi_\Delta{}^*)= p((\pi_\Delta{}^\square)^*)+ p(\pi_5{}^*)+ 1 \;\Rightarrow\; p(\pi_\Delta{}^*)= p((\pi_\Delta{}^\square)^*)+ 1$.

Assim, por (*xxxiv*) é claro que:

(*xxxv*) $p(\pi_\Delta^*)> p((\pi_\Delta^\square)^*) \underset{(\mathrm{xxxiii})}{=} p(\pi'^*)$.

(*xxxvi*) Mas pelo Teorema 3.3.4-(4) temos: $\pi_\Delta^* \equiv \pi^*$.

Portanto:

$$p(\pi^*) \underset{(\mathrm{xxxvi})}{=} p(\pi_\Delta{}^*) \underset{(\mathrm{xxxv})}{>} p(\pi'^*) \underset{\mathrm{Def\ 2.4.1}}{\Longrightarrow} o(\pi)> o(\pi').$$

<u>CASO 3:</u> π é do tipo: $\pi \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \quad \pi_2 \\ \underline{\mathsf{A} \quad\; \mathsf{B}} \\ \underline{\mathsf{A}\wedge\mathsf{B}} \\ \mathsf{B} \\ \pi_3 \end{array}$, onde $\mathsf{A}\wedge\mathsf{B}$ é $F(\pi)$.

(*xxxvii*) Pelo Teorema 3.2.2 temos: $\pi^\square \equiv \begin{array}{c} \pi_2 \\ \mathsf{B} \\ \pi_3 \end{array}$.

(*xxxviii*) Pelo Teorema 3.2.9-(2) temos: $p(\pi^*)= p(\pi^{\square *})+ p(\pi_1^*)+ 1$.

Temos aqui tantos subcasos quantas são as possíveis formas de π'.

<u>SubCaso 3.1</u>: $\pi' \equiv \begin{array}{c} \pi_2 \\ \mathsf{B} \\ \pi_3 \end{array}$

(*xxxix*) Por (*xxxvii*) e pela forma de π' temos: $\pi' \equiv \pi^\square$.

Então, por (*xxxviii*) e (*xxxix*) temos $p(\pi^*) > p(\pi'^*) \Rightarrow_{\mathbf{2.4.1}} o(\pi) > o(\pi')$.

<u>SubCaso 3.2</u>: $\pi' \equiv \begin{array}{c} \pi_1' \quad \pi_2 \\ \underline{\mathsf{A} \quad \mathsf{B}} \\ \underline{\mathsf{A}\wedge\mathsf{B}} \\ \mathsf{B} \\ \pi_3 \end{array}$

Note que $\mathsf{A}\wedge\mathsf{B}$ é *FM* em π', π' é distinto de π apenas na subárvore determinada por A e $pos_\pi(\mathsf{A})> pos_\pi(\mathsf{A}\wedge\mathsf{B})$. Então, pelo Teorema 3.1.6:

(*xl*) $\mathsf{A}\wedge\mathsf{B}$ é $F(\pi')$.

(xli) Por (xl), pela forma de π' e pelo Teorema 3.2.2 temos: $\pi'^{\square} \equiv \begin{array}{c} \pi_2 \\ \mathsf{B} \\ \pi_3 \end{array}$.

Além disso, pela forma de π', (xl), (xli) e pelo Teorema 3.2.9-(2) temos:

($xlii$) $p(\pi'^*) = p(\pi'^{\square *}) + p(\pi_1'^*) + 1$.

($xliii$) Por ($xxxvii$) e (xli) temos que $\pi'^{\square} \equiv \pi^{\square}$.

($xliv$) Assim, por ($xlii$) e ($xliii$), temos: $p(\pi'^*) = p(\pi^{\square *}) + p(\pi_1'^*) + 1$.

Por ($xxxviii$) temos que $p(\pi_1^*) < p(\pi^*)$. Logo, vale HI em π_1. Portanto:

(xlv) $o(\pi_1) > o(\pi_1') \Rightarrow_{2.4.1} p(\pi_1^*) > p(\pi_1'^*)$.

Assim, por ($xxxviii$), ($xliv$) e (xlv) temos: $p(\pi^*) > p(\pi'^*) \Rightarrow_{2.4.1} o(\pi) > o(\pi')$.

<u>SubCaso 3.3</u>: $\pi' \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \quad \pi_2' \\ \dfrac{\dfrac{\mathsf{A} \quad \mathsf{B}}{\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}}}{\mathsf{B}} \\ \pi_3 \end{array}$

Note que $\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}$ é *FM* em π', π' é distinto de π apenas na subárvore determinada por A e $pos_\pi(\mathsf{A}) > pos_\pi(\mathsf{A} \wedge \mathsf{B})$. Então, pelo Teorema 3.1.6:

($xlvi$) $\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}$ é $F(\pi')$.

($xlvii$) Por ($xlvi$), pela forma de π' e pelo Teorema 3.2.2 temos: $\pi'^{\square} \equiv \begin{array}{c} \pi_2' \\ \mathsf{B} \\ \pi_3 \end{array}$.

Também pela forma de π', por ($xlvii$) e pelo Teorema 3.2.9-(2) temos:

($xlviii$) $p(\pi'^*) = p(\pi'^{\square *}) + p(\pi_1^*) + 1$.

Além disso, fazendo agora em $\pi^{\square}$ a mesma redução ($\pi_2 \rightarrow \pi_2'$) feita em π, temos:

($xlix$) $\pi^{\square} \equiv \begin{array}{c} \pi_2 \\ \mathsf{B} \\ \pi_3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \pi_2' \\ \mathsf{B} \\ \pi_3 \end{array} \equiv \pi^{\square}{}' \underset{(xlvii)}{\equiv} \pi'^{\square}$.

Por ($xxxviii$) temos que $p(\pi^{\square *}) < p(\pi^*)$.

(l) Logo, vale em $\pi^{\square}$ a hipótese indutiva e: $o(\pi^{\square}) > o(\pi^{\square}{}')$.

(li) Então, por ($xlix$) e (l) temos: $o(\pi^{\square}) > o(\pi'^{\square})$.

(lii) Assim, por (li) e pela Definição 2.4.1 temos: $p(\pi^{\square *}) > p(\pi'^{\square *})$.

Portanto, por ($xxxviii$), ($xlviii$) e (lii) temos: $p(\pi^*) > p(\pi'^*) \Rightarrow_{2.4.1} o(\pi) > o(\pi')$.

$$\underline{\text{SubCaso 3.4}}: \pi' \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \quad \pi_2 \\ \dfrac{\dfrac{\mathsf{A} \quad \mathsf{B}}{\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}}}{\mathsf{B}} \\ \pi'_3 \end{array}$$

A solução é análoga ao Caso 1.4.

$$\underline{\text{CASO 4:}}\ \pi \text{ é do tipo: } \pi \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ \dfrac{\dfrac{\mathsf{A}a}{\forall x \mathsf{A}x}}{\mathsf{A}t} \\ \pi_2 \end{array}, \text{ onde } \forall x \mathsf{A}x \text{ é } F(\pi)$$

(*liii*) Pelo Teorema 3.2.2 temos: $\pi^{\square} \equiv \begin{array}{c} \pi_{1_t}^{\ a} \\ \mathsf{A}t \\ \pi_2 \end{array}$.

(*liv*) Pelo Teorema 3.2.9-(1) temos: $p(\pi^*) = p(\pi^{\square *}) + 1$.

Temos aqui tantos subcasos quantas são as possíveis formas de π’.

$$\underline{\text{SubCaso 4.1:}}\ \pi' \equiv \begin{array}{c} \pi_{1_t}^{\ a} \\ \mathsf{A}t \\ \pi_2 \end{array}$$

(*lv*) Por (*liii*) e pela forma de π’ temos: $\pi' \equiv \pi^{\square}$.

Logo, por (*liv*) e (*lv*) temos: $p(\pi^*) > p(\pi'^*) \Rightarrow_{\mathbf{2.4.1}} o(\pi) > o(\pi')$.

$$\underline{\text{SubCaso 4.2:}}\ \pi' \equiv \begin{array}{c} \pi'_1 \\ \dfrac{\dfrac{\mathsf{A}a}{\forall x \mathsf{A}x}}{\mathsf{A}t} \\ \pi_2 \end{array}$$

Note que $\forall x \mathsf{A}x$ é *FM* em π’, π’ é distinto de π apenas na subárvore determinada por $\mathsf{A}a$ e $pos_\pi(\mathsf{A}a) > pos_\pi(\forall x \mathsf{A}x)$. Então, pelo Teorema 3.1.6:

(*lvi*) $\forall x \mathsf{A}x$ é $F(\pi')$.

(*lvii*) Por (*lvi*), pela forma de π’ e pelo Teorema 3.2.2 temos: $\pi'^{\square} \equiv \begin{array}{c} (\pi_{1t}^{\ a})' \\ \mathsf{A}t \\ \pi_2 \end{array}$.

Também pela forma de π’, por (*lvi*) e pelo Teorema 3.2.9-(1) temos:

(*lviii*) $p(\pi'^*) = p(\pi'^{\square *}) + 1$.

Além disso, fazendo a mesma redução de π em $\pi^{\square}$ temos:

$$(lix)\quad \pi^{\square} \equiv \begin{array}{c} \pi_{1_t}^{a} \\ At \\ \pi_2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} (\pi_{1t}^{a})' \\ At \\ \pi_2 \end{array} \equiv \pi^{\square\prime} \underset{(lvii)}{\equiv} \pi^{\prime\square}.$$

Por (*liv*) temos que $p(\pi^{\square *}) < p(\pi^*)$.

(*lx*) Logo, vale em $\pi^{\square}$ a hipótese indutiva e: $o(\pi^{\square}) > o(\pi^{\square\prime})$.

(*lxi*) Então, por (*lix*) e (*lx*) temos: $o(\pi^{\square}) > o(\pi^{\prime\square}) \Rightarrow_{2.4.1} p(\pi^{\square *}) > p(\pi^{\prime\square *})$.

Portanto, por (*liv*), (*lviii*) e (*lxi*) temos: $p(\pi^*) > p(\pi'^*) \Rightarrow_{2.4.1} o(\pi) > o(\pi')$.

<u>SubCaso 4.3:</u> $\pi' \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ Aa\end{array}}{\forall x Ax}}{\begin{array}{c} At \\ \pi_2' \end{array}}$

A solução é análoga ao Caso 1.4.

Com isso verificamos todos os casos para todas as formas possíveis para π e π', provando assim o teorema. ♦

O teorema seguinte estabelece o fato fundamental para provarmos que $o(\pi) = lp(\pi)$. Ele estabelece que se reduzirmos π a π' através da redução da pior seqüência, então $o(\pi')$ é apenas uma unidade menor que $o(\pi)$. A prova deste teorema está contida na prova do teorema anterior. O que temos que fazer é apenas verificar que nos casos específicos da redução da pior seqüência $o(\pi)$ excede $o(\pi')$ em apenas uma unidade.

Optamos por apresentar demonstrações separadas devido aos significados distintos que estes dois resultados possuem dentro do nosso desenvolvimento. O teorema anterior garante que $o(\pi)$, que havíamos provado ser finito, é de fato um ordinal natural, pois diminui com as reduções. Já o teorema seguinte garante que $o(\pi)$ é o menor ordinal natural para C', pois coincide com o comprimento de uma seqüência de redução específica para π.

3.4.2 TEOREMA:

Se π° é obtido de π através de uma redução da pior seqüência, então $o(\pi) = o(\pi^\circ) + 1$.

Ou seja: $(\pi \xrightarrow{p} \pi^\circ) \Rightarrow o(\pi) = o(\pi^\circ) + 1$.

<u>PROVA</u>:

Seja $\pi^* \equiv \pi^{\bullet n}$. Provaremos por indução em $p(\pi^*)$.

BASE: $p(\pi^*)= 0 \ \Rightarrow_{3.4.1\text{-}(3)} \ \pi$ é normal.

Como π° não está definido neste caso, o teorema é válido por vacuidade.

PASSO:

HI: Para toda Σ, tal que $p(\Sigma^*) < p(\pi^*)$, temos que $\Sigma \to \Sigma^\circ \ \Rightarrow \ o(\Sigma)= o(\Sigma^\circ)+ 1$.

Queremos provar que $o(\pi)= o(\pi^\circ)+ 1$.

Apresentaremos uma solução por casos, baseada na forma de $F(\pi)$.

CASO 1: π é do tipo: $$\pi \equiv \cfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ \mathsf{A}\end{matrix} \qquad \cfrac{\begin{matrix}\pi_2 \\ \mathsf{B}\end{matrix}}{\mathsf{A} \supset \mathsf{B}}}{\begin{matrix}\mathsf{B} \\ \pi_3\end{matrix}}$$, onde:

(1) $\mathsf{A}\supset\mathsf{B}$ é $F(\pi)$;

(2) $\mathsf{A}\supset\mathsf{B}$ não é OM em π.

(*i*) Pelo Teorema 3.2.2 temos: $\pi^\square \equiv \begin{matrix}\pi_2 \\ \mathsf{B} \\ \pi_3\end{matrix}$.

(*ii*) Pelo Teorema 3.2.9-(2) temos: $p(\pi^*)= p(\pi^{\square *})+ p(\pi_1^*)+ 1$.

De acordo com a Definição 1.5.2, de $FP(\pi)$, temos duas alternativas para π°, conforme π_1 seja normal ou não.

SubCaso 1.1: π_1 é normal

Se π_1 é normal, pela Definição 1.5.2: $FP(\pi)= \mathsf{A}\supset\mathsf{B}$. Logo:

(*iii*) $\pi^\circ \equiv \begin{matrix}\pi_2 \\ \mathsf{B} \\ \pi_3\end{matrix}$.

(*iv*) Assim, por (*i*) e (*iii*) temos: $\pi^\circ \equiv \pi^\square$.

(*v*) Como π_1 é normal, pelo Teorema 3.1.11-(3), $p(\pi_1^*)= 0$.

(*vi*) Portanto, por (*ii*) e (*v*): $p(\pi^*)= p(\pi^{\square *})+ 1$.

(*vii*) Logo, por (*vi*) e (*iv*): $p(\pi^*)= p(\pi^{\circ *})+ 1$.

Assim, por (*vii*) e pela Definição 2.4.1: $o(\pi)= o(\pi^\circ)+ 1$.

SubCaso 1.2: π_1 não é normal

Se π_1 não é normal, então, pela Definição 1.5.2, de pior seqüência:

$$(viii)\ \pi^\circ \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^\circ\\ A\end{array}\quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ B\end{array}}{A\supset B}}{B}\\ \pi_3\end{array}.$$

Note que $A\supset B$ é *FM* em π°, π° é distinto de π apenas na subárvore determinada por A e $pos_\pi(A) > pos_\pi(A\supset B)$. Então, pelo Teorema 3.1.6:

(*ix*) $A\supset B$ é $F(\pi^\circ)$.

Por (*viii*), (*ix*) e pelo Teorema 3.2.9-(2) temos:

(*x*) $p(\pi^{\circ *}) = p(\pi^{\circ\square *}) + p(\pi_1^{\circ *}) + 1$.

(*xi*) Também por (*viii*), (*ix*) e pelo Teorema 3.2.2 temos: $\pi^{\circ\square} \equiv \begin{array}{c}\pi_2\\ B\\ \pi_3\end{array}$.

(*xii*) Por (*i*) e (*xi*) temos que $\pi^{\circ\square} \equiv \pi^{\square}$.

(*xiii*) Assim, por (*x*) e (*xii*) temos: $p(\pi^{\circ *}) = p(\pi^{\square *}) + p(\pi_1^{\circ *}) + 1$.

(*xiv*) Por (*ii*) temos que $p(\pi_1^*) < p(\pi^*)$.

Logo, vale em π_1 a hipótese indutiva. Então:

(*xv*) $o(\pi_1) = o(\pi_1^\circ) + 1$.

(*xvi*) Assim, por (*xv*) e pela Definição 2.4.1 temos: $p(\pi_1^*) = p(\pi_1^{\circ *}) + 1$.

(*xvii*) Portanto, por (*ii*), (*xiii*) e (*xvi*) temos: $p(\pi^*) = p(\pi^{\circ *}) + 1$.

Então, por (*xvii*) e pela Definição 2.4.1: $o(\pi) = o(\pi^\circ) + 1$.

<u>CASO 2</u>: π é do tipo: $\pi \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array}\quad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_2\\ B\end{array}}{A\supset B}{\scriptstyle k}}{B}\\ \pi_3\end{array}$, onde:

(1) $A\supset B$ é $F(\pi)$;

(2) $A\supset B$ é *OM* de π.

Pela definição de pior seqüência temos, neste caso: $FP(\pi) = A\supset B$. Logo:

$$(xviii)\ \pi^\circ \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ [A] \\ \pi_2 \\ B \\ \pi_3 \end{array}.$$

Pela Definição 3.1.9, π_Δ, obtida de π pela multiplicação-* de $A \supset B$, tem a forma:

$$(xix)\ \pi_\Delta \equiv \begin{array}{c} \\ \\ \\ \dfrac{A \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ [A] \\ \pi_2 \\ B\end{array}}{A \supset B}}{B} \\ \pi_3 \end{array}.$$

(xx) Pelo Teorema 3.3.4-(4), $\pi^* \equiv \pi_\Delta{}^*$.

Note que $A \supset B$ é *FM* em π_Δ, e π_Δ é distinto de π apenas nas subárvores determinadas por A (A premissa menor de $F(\pi)$ e nos As top-fórmulas de π_2) e, para todo A expresso em π, $pos_\pi(A) > pos_\pi(A \supset B)$. Então, por sucessivas aplicações do Teorema 3.1.6 (uma para cada ocorrência A) temos:

(xxi) $A \supset B$ é $F(\pi_\Delta)$.

Chamemos $\pi_4 \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ [A] \\ \pi_2 \end{array}$. Temos então, por $(xviii)$, (xix) e (xxi), que:

$$(xxii)\ \pi_\Delta \equiv \begin{array}{c} \dfrac{A \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_4 \\ B\end{array}}{A \supset B}}{B} \\ \pi_3 \end{array}, \text{ onde } A \supset B \text{ é } F(\pi_\Delta); \text{ e}$$

$$(xxiii)\ \pi^\circ \equiv \begin{array}{c} \pi_4 \\ B \\ \pi_3 \end{array}.$$

Note que π_Δ é uma derivação na qual $F(\pi)$ é uma *FM* **não** multiplicativa. Portanto, vale para ela os teoremas da Seção 3.2.

(*xxiv*) Por (*xxii*) e pelo Teorema 3.2.2 temos: $\pi_{\Delta}^{\square} \equiv \begin{matrix} \pi_4 \\ B \\ \pi_3 \end{matrix}$.

(*xxv*) Por (*xxii*) e pelo Teorema 3.2.9-(2) temos: $p(\pi_{\Delta}^{*}) = p(\pi_{\Delta}^{\square *}) + 1$.

(*xxvi*) Por (*xxiii*) e (*xxiv*) temos que: $\pi^{\circ} \equiv \pi_{\Delta}^{\square}$.

(*xxvii*) Logo, por (*xxv*) e (*xxvi*) temos: $p(\pi_{\Delta}^{*}) = p(\pi^{\circ *}) + 1$.

(*xxviii*) Por (*xx*) e (*xxvii*) temos então: $p(\pi^{*}) = p(\pi^{\circ *}) + 1$.

Então, por (*xxviii*) e pela Definição 2.4.1: $o(\pi) = o(\pi^{\circ}) + 1$.

CASO 3: π é do tipo: $\pi \equiv \begin{matrix} \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2 \\ B\end{matrix}}{A \wedge B}}{B} \\ \pi_3 \end{matrix}$, onde $A \wedge B$ é $F(\pi)$

(*xxix*) Pelo Teorema 3.2.2 temos: $\pi^{\square} \equiv \begin{matrix} \pi_2 \\ B \\ \pi_3 \end{matrix}$.

(*xxx*) Pelo Teorema 3.2.9-(2) temos: $p(\pi^{*}) = p(\pi^{\square *}) + p(\pi_1^{*}) + 1$.

Temos duas alternativas para π°, conforme π_1 seja normal ou não.

SubCaso 3.1: π_1 é normal

Se π_1 é normal, pela Definição 1.5.2 temos: $FP(\pi) = A \wedge B$. Logo:

(*xxxi*) $\pi^{\circ} \equiv \begin{matrix} \pi_2 \\ B \\ \pi_3 \end{matrix}$.

(*xxxii*) Assim, por (*xxix*) e (*xxxi*) temos: $\pi^{\circ} \equiv \pi^{\square}$.

(*xxxiii*) Como π_1 é normal, pelo Teorema3.1.11-(3), $p(\pi_1^{*}) = 0$.

(*xxxiv*) Portanto, por (*xxx*) e (*xxxiii*): $p(\pi^{*}) = p(\pi^{\square *}) + 1$.

(*xxxv*) Logo, por (*xxxii*) e (*xxxiv*): $p(\pi^{*}) = p(\pi^{\circ *}) + 1$.

Assim, por (*xxxv*) e pela Definição 2.4.1: $o(\pi) = o(\pi^{\circ}) + 1$.

SubCaso 3.2: π_1 não é normal

Se π_1 não é normal, então, pela Definição 1.5.2:

$$(xxxvi)\ \pi^\circ \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1^\circ \\ \mathsf{A}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2 \\ \mathsf{B}\end{matrix}}{\mathsf{A}\wedge\mathsf{B}}}{\begin{matrix}\mathsf{B} \\ \\ \pi_3\end{matrix}}.$$

Note que $\mathsf{A}\wedge\mathsf{B}$ é *FM* em π°, π° é distinto de π apenas na subárvore determinada por A e $pos_\pi(\mathsf{A}) > pos_\pi(\mathsf{A}\wedge\mathsf{B})$. Então, pelo Teorema 3.1.6:

(*xxxvii*) $\mathsf{A}\wedge\mathsf{B}$ é $F(\pi^\circ)$.

Por (*xxxvi*), (*xxxvii*) e pelo Teorema 3.2.9-(2) temos:

(*xxxviii*) $p(\pi^{\circ *}) = p(\pi^{\circ\square *}) + p(\pi_1^{\circ *}) + 1$.

(*xxxix*) Também por (*xxxvi*), (*xxxvii*) e pelo Teorema 3.2.2 temos: $\pi^{\circ\square} \equiv \begin{matrix}\pi_2 \\ \mathsf{B} \\ \pi_3\end{matrix}$.

(*xl*) Por (*xxix*) e (*xxxix*) temos que $\pi^{\circ\square} \equiv \pi^\square$.

(*xli*) Assim, por (*xxxviii*) e (*xl*) temos: $p(\pi^{\circ *}) = p(\pi^{\square *}) + p(\pi_1^{\circ *}) + 1$.

(*xlii*) Por (*xxx*) temos que $p(\pi_1^*) < p(\pi^*)$.

Logo, vale em π_1 a hipótese indutiva. Então:

(*xliii*) $o(\pi_1) = o(\pi_1^\circ) + 1$.

(*xliv*) Assim, por (*xliii*) e pela Definição 2.4.1 temos: $p(\pi_1^*) = p(\pi_1^{\circ *}) + 1$.

(*xlv*) Portanto, por (*xxx*), (*xli*) e (*xliv*) temos: $p(\pi^*) = p(\pi^{\circ *}) + 1$.

Então, por (*xlv*) e pela Definição 2.4.1: $o(\pi) = o(\pi^\circ) + 1$.

<u>CASO 4</u>: π é do tipo: $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ \mathsf{A}a\end{matrix}}{\forall x\mathsf{A}x}}{\begin{matrix}\mathsf{A}t \\ \\ \pi_2\end{matrix}}$, onde $\forall x\mathsf{A}x$ é $F(\pi)$

Pela Definição 1.5.2 temos, neste caso: $FP(\pi) = \forall x\mathsf{A}x$. Logo:

(*xlvi*) $\pi^\circ \equiv \begin{matrix}\pi_{1_t}^{\ a} \\ \mathsf{A}t \\ \pi_2\end{matrix}$.

(*xlvii*) Pelo Teorema 3.2.2 temos: $\pi^\square \equiv \begin{matrix}\pi_{1_t}^{\ a} \\ \mathsf{A}t \\ \pi_2\end{matrix}$.

(*xlviii*) Pelo Teorema 3.2.9-(1) temos: $p(\pi^*) = p(\pi^{\square *}) + 1$.

(*xlix*) Por (*xlvi*) e (*xlvii*) temos: $\pi^{\circ} \equiv \pi^{\square}$.

(*l*) De (*xlviii*) e (*xlix*) temos: $p(\pi^*)= p(\pi^{\circ *})+ 1$.

Então, por (*l*) e pela Definição 2.4.1: $o(\pi)= o(\pi^{\circ})+ 1$.

Para qualquer que seja π não normal, π se enquadra em um dos 4 casos acima, e portanto: $o(\pi)= o(\pi^{\circ})+ 1$. ♦

Obteremos agora, como um corolário do teorema acima, a igualdade entre $o(\pi)$ e $lp(\pi)$ e, portanto, a finitude do comprimento da pior seqüência para toda derivação π.

3.4.3 COROLÁRIO: Finitude do Comprimento Pior Seqüência

A pior seqüência de redução de toda derivação π termina (é finita) e seu comprimento é idêntico a $o(\pi)$ ($lp(\pi)= o(\pi)$).

PROVA:

Como, para toda derivação π, pelo Corolário 2.4.2 $o(\pi)< \omega$, se provarmos que para todo π, $lp(\pi)= o(\pi)$, então teremos demonstrado que a pior seqüência de redução termina para todo π.

Provaremos por indução em $o(\pi)$.

BASE: $o(\pi)= 1 \Rightarrow_{2.4.1} p(\pi^*)= 0 \Rightarrow_{3.4.1-(3)} \pi$ é normal $\Rightarrow lp(\pi)= 1$. Portanto, $o(\pi)= lp(\pi)$.

PASSO: $o(\pi)> 1$

HI: Para toda derivação Σ: $o(\Sigma)< o(\pi) \Rightarrow lp(\Sigma)= o(\Sigma)$.

Quero provar que $lp(\pi)= o(\pi)$.

Seja π°, obtida de π pela redução de $FP(\pi)$.

(*i*) Pelo Teorema 3.4.2, $o(\pi)= o(\pi^{\circ})+ 1$.

Logo, $o(\pi^{\circ})< o(\pi)$ e, portanto, vale para π° a hipótese de indução.

(*ii*) Portanto, $lp(\pi^{\circ})= o(\pi^{\circ})$.

(*iii*) Então, por (*i*) e (*ii*), $o(\pi)= lp(\pi^{\circ})+ 1$.

Mas π° é obtido de π por uma redução de $FP(\pi)$ e, por (*ii*), $lp(\pi^{\circ})$ é finito. Logo, é claro, pela definição de pior seqüência, que:

(*iv*) $lp(\pi)= lp(\pi^{\circ})+ 1$.

Assim, por (*iii*) e (*iv*), $o(\pi)= lp(\pi)$.

Como $o(\pi) < \omega$, para toda derivação π (Corolário 2.4.2), então, $lp(\pi) < \omega$, para toda derivação π. ♦

Como conseqüência do Teorema 3.4.1, que prova que $o(\pi)$ é de fato um ordinal natural para as derivações em C', obtemos de uma maneira bastante simples o Teorema de Normalização Forte para C'.

3.4.4 TEOREMA: Normalização Forte

Considere $h(\pi)$ o comprimento da árvore de redução de π. Para toda derivação π temos: $h(\pi) \leq o(\pi) < \omega$.

PROVA: Indução em $o(\pi)$.

BASE: $o(\pi)= 1$

$o(\pi)= 1 \Rightarrow p(\pi^*)= 0 \Rightarrow \pi$ é normal $\Rightarrow h(\pi)= 1$. Logo $h(\pi) \leq o(\pi)$.

PASSO: $o(\pi) > 1$.

HI: $o(\Sigma) < o(\pi) \Rightarrow h(\Sigma) \leq o(\Sigma)$.

(*i*) Seja $\mu = \pi \equiv \pi_0 \to \pi_1 \to \pi_2 \to \ldots$ a mais comprida seqüência de redução para π.

(*ii*) É claro que $h(\pi)= l(\mu)$.

(*iii*) Consideremos também $\mu_1= \pi_1 \to \pi_2 \to \ldots$ a seqüência obtida de μ desconsiderando-se seu primeiro termo. É claro que μ_1 é a mais comprida seqüência de redução para π_1 e:

(*iv*)$h(\pi_1)= l(\mu_1)$.

Mas pelo Teorema 3.4.1, como $\pi \to \pi_1$ temos que:

(*v*) $o(\pi_1) < o(\pi)$.

Logo, por (*iii*), vale HI em π_1, e portanto:

(*vi*) $h(\pi_1) \leq o(\pi_1)$.

Assim, por (*vi*) e (*iv*) temos:

(*vii*) $l(\mu_1) \leq o(\pi_1)$.

Como $o(\pi_1) < \omega$, por (*iii*) e (*vii*) é claro que $l(\mu) < \omega$ e portanto:

(*viii*) $l(\mu)= l(\mu_1)+ 1$.

Portanto temos:

$h(\pi) \underset{(ii)}{=} l(\mu) \underset{(viii)}{=} l(\mu_1)+ 1 \underset{(vii)}{\leq} o(\pi_1)+ 1 \underset{(v)}{<} o(\pi)+ 1 \Rightarrow h(\pi) \leq o(\pi) \underset{6.2.20}{<} \omega$. ♦

Além de implicar em normalização forte, como provamos que $o(\pi)= lp(\pi)$, temos que $o(\pi)$ é o menor ordinal natural para C'.

3.4.5 TEOREMA: o(π) é o menor Ordinal Natural em C'

Para toda derivação π temos $o(\pi)= h(\pi)$.

PROVA:

Pelo Teorema 3.4.3 temos que $o(\pi)= lp(\pi)$. Mas como $lp(\pi)$ é o comprimento de uma seqüência de redução específica, então é claro que: $o(\pi) \leq h(\pi)$.

Mas pelo Teorema 3.4.4 temos: $o(\pi) \geq h(\pi)$.

Portanto: $o(\pi)= h(\pi)$. ♦

Mais um resultado que é conseqüência da finitude de $lp(\pi)$ e do Teorema 1.5.4 é o teorema da unicidade da forma normal, que provamos agora finalizando assim os resultados desta tese relativos ao sistema C'.

3.4.6 TEOREMA: Church-Rosser - Unicidade da Forma Normal

Todas as seqüências de redução para cada derivação π terminam na mesma derivação normal.

PROVA:

Seja $\mu = \pi \equiv \pi_1 \to \pi_2 \to \ldots \to \pi_n$ uma seqüência de redução qualquer para π.

Pelo Teorema 3.4.4 temos que $n< \omega$ e π_n é derivação normal.

Para provar o teorema provaremos que $\pi_n \equiv \pi^P$, onde π^P é, como definido em 1.5.3.1-(*h*), a última derivação da pior seqüência de redução para π.

Provar que $\pi_n \equiv \pi^P$ garante a unicidade da forma normal porque uma vez que μ é uma seqüência de redução qualquer, provando que $\pi_n \equiv \pi^P$ estamos provando que toda seqüência de redução para π termina na mesma derivação que a pior seqüência de redução para π termina. Logo, todas as seqüências de redução para π terminam na mesma derivação e, portanto, a forma normal para π é única.

Provaremos que $\pi_n \equiv \pi^P$ por indução em $l(\mu)= n$.

BASE: $l(\mu)= n= 1$

Neste caso:

(i) $\pi_n \equiv \pi_1 \equiv \pi$.

Logo, π é normal e portanto

(ii) $\pi^P \equiv \pi$.

Assim, por (i) e (ii) temos: $\pi_n \equiv \pi^P$.

PASSO: $l(\mu)= n> 1$

Considere π_2 de μ e $\mu_2 \equiv \pi_2 \rightarrow \ldots \rightarrow \pi_n$.

É claro que $l(\mu_2)< l(\mu)$ e portanto vale HI para π_2. Então temos:

(iii) $\pi_n \equiv \pi_2^P$.

Mas como $\pi \rightarrow \pi_2$, pelo Teorema 1.5.4 temos que existem $j,k< \omega$ tais que:

(iv) $\pi_2^{\circ j} \equiv \pi^{\circ k}$.

Por (iv) e pela Observação 1.5.3.1-(i) temos:

(v) $(\pi_2^{\circ j})^P \equiv \pi_2^P$ e $(\pi^{\circ k})^P \equiv \pi^P$;

Além disso, por (iv) e pela Observação 1.5.3.1-(j) temos:

(vi) $(\pi_2^{\circ j})^P \equiv (\pi^{\circ k})^P$.

Portanto:

$\pi_n \underset{(iii)}{\equiv} \pi_2^P \underset{(v)}{\equiv} (\pi_2^{\circ j})^P \underset{(vi)}{\equiv} (\pi^{\circ k})^P \underset{(v)}{\equiv} \pi^P$. ♦

A prova do Teorema de Church-Rosser que apresentamos aqui em 3.4.6 é uma versão da prova de **Massi[1990]**, p. 106. No entanto, Massi não demonstra incondicionalmente este resultado. Ele assume como hipótese a finitude do comprimento da pior seqüência de redução $lp(\pi)$ para toda derivação π. Uma vez que demonstramos a finitude de $lp(\pi)$ no Teorema 3.4.3, retiramos a hipótese condicional da prova de Massi e obtemos incondicionalmente o Teorema de Church-Rosser para C'.

Terminamos aqui esta primeira parte de nossa tese que apresentou os seguintes resultados relativos ao sistema C':

(1) Introduzimos o Ordinal Natural $o(\pi)$ para as derivações de C'. Ou seja, definimos a atribuição numérica unívoca $o(\pi)$ e provamos que, para toda derivação π:

♦(a) $o(\pi)< \omega$;

♦(b) $\pi \rightarrow \pi' \Rightarrow o(\pi)> o(\pi')$.

(2) Provamos que, para toda derivação π, $o(\pi)$ coincide com o comprimento $lp(\pi)$ de uma seqüência de redução específica para π (a pior seqüência de redução definida por **Massi[1990]**. Ou seja:

- $o(\pi)= lp(\pi)$.

(3) Massi demonstrou que, considerando que $\pi^{\circ n}$ representa a $(n+1)$-ésima derivação da pior seqüência aplicada a π, então:

- $\pi \rightarrow \pi' \Rightarrow \exists j,k< \omega \,/\, \pi^{\circ j} \equiv \pi'^{\circ k}$.

Como conseqüência de (1), (2) e (3), considerando π uma derivação qualquer de C', obtivemos os seguintes resultados sobre o sistema C':

(4) Normalização forte para C':

- $h(\pi)< \omega$.

(5) $o(\pi)$ é o menor ordinal natural para π e, portanto, representa exatamente a altura da árvore de reduções para π:

- $o(\pi)= h(\pi)$.

(6) A pior seqüência de redução é, de fato, a mais longa seqüência de redução para π:

- $lp(\pi)= h(\pi)$.

(7) Church-Rosser em C':

- A forma normal de cada derivação de C' é única.

Podemos dizer que os itens (1) a (3) acima representam resultados técnicos cujo objetivo foi viabilizar a obtenção de (4) a (7), que representam os resultados importantes que obtivemos para o sistema C'. No entanto, uma vez que o resultado (3) foi provado por Massi, e que as provas de (4) a (7) foram obtidas trivialmente a partir dos itens (1) a (3), o nosso grande esforço aqui foi a obtenção dos resultados (1) e (2).

Capítulo IV

O Cálculo Lambda Tipificado $\lambda^{\supset}$ e A Noção de Fórmulas como Tipos

O cálculo lambda livre de tipos foi inicialmente desenvolvido por **Church[1932/3]** como uma teoria sobre *funções como regras*. Isto significa que no cálculo lambda uma função não é encarada como um conjunto de pares (argumento e valor), mas como um "processo" que transforma o argumento no valor. Podemos dizer que a abordagem de funções como conjuntos de pares, que é mais freqüentemente encontrada na matemática, é uma abordagem de caráter *denotacional*, que se interessa apenas pela *referência* das expressões matemáticas. Abordar as funções como regras introduz um elemento novo à matemática: o *sentido* das expressões. As expressões matemáticas na notação lambda, além de denotarem um objeto matemático, passam a também ter interesse intrínseco, na medida em que descrevem os processos de obtenção de suas referências. Ainda que não se tenha obtido sucesso em fundamentar toda a matemática através do cálculo lambda, sua abordagem das funções como regras mostrou-se extremamente frutífera em muitos aspectos, sendo de fundamental importância para aplicações computacionais.

O cálculo lambda tipificado foi criado como uma restrição ao cálculo lambda livre de tipos pelo acréscimo de certas regras de manipulação de tipos, que são aderidos às variáveis e termos da teoria. O desenvolvimento do cálculo lambda tipificado se deu, historicamente, em conexão com a teoria formal de funcionais $\boldsymbol{T}$, apresentada em **Gödel[1958]** como uma interpretação para a aritmética intuicionista de primeira ordem. No entanto, desde a década de sessenta, o cálculo lambda tipificado tem sido extensamente utilizado em diversas áreas da lógica, álgebra e ciência da computação, que vão desde teoria da prova até o estudo de semânticas para linguagens naturais.[32]

Algumas das aplicações do cálculo lambda tipificado em teoria da prova são obtidas através da *noção de fórmulas como tipos*, que relaciona diretamente derivações em dedução natural com termos em cálculo lamba tipificado. Neste sentido, resultados de normalização em sistemas de cálculo lambda tipificado representam resultados de normalização nos sistemas de dedução natural a eles relacionados. Como para praticamente todas as aplicações de cálculo lambda tipificado os resultados de normalização são extremamente úteis, foram escritos vários artigos relacionados a questões de normalização para estes sistemas. Como requisito para estudarmos aqui alguns destes artigos mais relacionados com

[32] Para uma lista de referências a diversos tipos de aplicações de cálculo lambda tipificado ver **Statman[1979]**, p.73.

o nosso trabalho, e também para produzirmos uma versão de nosso resultado em notação lambda, descreveremos brevemente, neste capítulo, as principais noções de cálculo lambda tipificado e a relação deste com dedução natural, expressa na noção de fórmulas como tipos.

Vamos apresentar primeiramente a teoria $\lambda^{\supset}$ de cálculo lambda tipificado, que possui uma quantidade enumerável de tipos básicos, uma única lei de formação de tipos e duas leis de formação de termos: a *aplicação* e a *abstração*. Quando discutirmos a noção de fórmulas como tipos, ampliaremos um pouco este universo para um sistema mais complexo. No entanto, o sistema que mais nos interessa é $\lambda^{\supset}$.

Os resultados e definições deste capítulo não são inéditos e foram obtidos, em sua maioria, adaptando para as restrições de tipos os resultados e definições apresentados em **Barendregt[1990]**. Também utilizamos, principalmente para as questões relacionadas à noção de fórmulas como tipos, **Howard[1980]**, **Girard,** Lafont **& Taylor[1989]** e **Troelstra & Schwichtenberg[1996]**.

Este capítulo está dividido em 5 seções. Na primeira apresentamos o conjunto $\Lambda^{\supset}$ dos termos de $\lambda^{\supset}$ e algumas outras definições fundamentais. Na segunda seção tratamos das questões relativas à substituição de variáveis e apresentamos a convenção de nomes que estamos adotando. Na terceira seção apresentamos a noção de redução e todos os conceitos a ela relacionados, juntamente com os resultados mais básicos envolvendo estas noções. Na quarta seção introduzimos o conceito de estratégia de redução e definimos a estratégia perpétua, que será extremamente útil em nossos desenvolvimentos futuros. Na quinta e última seção discutimos a noção de fórmulas como tipos.

Cabe ressaltar que a padronização de notação que adotamos em nossas definições visa facilitar a explicitação da noção de fórmulas como tipos.

§1 Tipos e Termos

Apresentaremos nesta seção as definições e notações mais básicas que utilizaremos na descrição de $\lambda^{\supset}$.

4.1.1 DEFINIÇÃO: Tipo

O conjunto Typ de *tipos* é definido indutivamente por:

(*i*) $o_1, o_2, \ldots \in Typ$;

(*ii*) $A, B \in Typ \;\Rightarrow\; A \supset B \in Typ$.

4.1.1.1 OBSERVAÇÕES

(*a*) $o_1, o_2, \ldots$ são os *tipos básicos* de $\lambda^{\supset}$.

(*b*) Na literatura, o tipo combinado $A\supset B$ também é denotado como $(A)B$.

(*c*) Para nos referirmos aos tipos em geral, utilizaremos as letras latinas maiúsculas iniciais (A, B, C, D, ...) possivelmente com subíndices.

4.1.2 DEFINIÇÃO: O Alfabeto de $\lambda^{\supset}$

Cada termo de $\lambda^{\supset}$ é uma palavra sobre o seguinte *alfabeto*:

(*i*) Uma lista enumerável de variáveis sintáticas $v_0^{\mathsf{A}}\ v_1^{\mathsf{A}}, v_2^{\mathsf{A}}, \ldots$ para cada $A \in Typ$;

(*ii*) Os símbolos auxiliares "λ", "(" e ")".

4.1.3 DEFINIÇÃO: Os Termos de $\lambda^{\supset}$

O conjunto dos *termos* de $\lambda^{\supset}$ para cada tipo A (denotado por Λ_{A}) é definido indutivamente como segue:

(1) $v_i^{\mathsf{A}} \in \Lambda_{\mathsf{A}}$ (para todo $i \in \omega$);

(2) $\mathsf{M} \in \Lambda_{\mathsf{A}\supset\mathsf{B}}$ e $\mathsf{N} \in \Lambda_{\mathsf{A}} \;\Rightarrow\; (\mathsf{MN}) \in \Lambda_{\mathsf{B}}$;

(3) $\mathsf{M} \in \Lambda_{\mathsf{B}}$ e $x \in \Lambda_{\mathsf{A}}$ é uma variável sintática $\Rightarrow (\lambda x.\mathsf{M}) \in \Lambda_{\mathsf{A}\supset\mathsf{B}}$.

O conjunto de todos os λ-termos tipificados (denotado por $\Lambda^{\supset}$) é definido como:

$\Lambda^{\supset} = \cup\{\Lambda_{\mathsf{A}} \,/\, \mathsf{A} \in Typ\}$.

4.1.3.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) A regra (2) acima é chamada de *aplicação*, pois é comumente interpretada como aplicação da função M ao argumento N.

(*b*) A regra (3) é chamada de *abstração*, pois normalmente interpreta-se a notação $\lambda x.\mathsf{M}$ como uma maneira de encarar o termo M como sendo uma função de x. Ou seja, a expressão de cálculo que M denota, que possivelmente contém a variável x, é interpretada como uma função de x.

4.1.4 NOTAÇÕES:

(a) x^A, y^A, z^A,... com ou sem subíndices, denotam as variáveis sintáticas de $\lambda^{\supset}$.

(b) M^A, N^A, L^A, ... com ou sem subíndices denotam termos arbitrários do tipo A.

(c) Sempre que for possível fazê-lo sem confusão, omitiremos os superíndices indicadores de tipo das variáveis e termos.

(d) Os parênteses mais externos serão omitidos.

(e) O símbolo "$\equiv$" denota identidade sintática entre termos.

(f) Seja $\boldsymbol{x} \equiv x_1, ..., x_n$. Então: $\lambda x_1 \ldots x_n.M \equiv \lambda \boldsymbol{x}.M \equiv \lambda x_1.(\lambda x_2.(\ldots(\lambda x_n.M)\ldots))$.

(g) $N_1N_2\ldots N_n \equiv (\ldots((N_1N_2)N_3)\ldots N_n)$.

4.1.5 DEFINIÇÃO: Variável livre e ligada

Uma variável x ocorre *livre* em $M \in \Lambda^{\supset}$ se M possui uma ocorrência de x que não está no escopo de nenhum λx. Se uma ocorrência de x em M está no escopo de algum λx, então x ocorre *ligada* em M.

4.1.5.1 OBSERVAÇÃO

Uma variável x pode ocorrer livre e ligada em um termo M. Por exemplo, em $((\lambda x^A.x^A)^{A \supset A}x^A)^A$, a primeira ocorrência de x é ligada e a segunda é livre. Mais adiante adotaremos uma convenção que proibirá este fato.

4.1.6 DEFINIÇÃO: Conjunto das Variáveis Livres (FV) e das Variáveis Ligadas (BV)

(1) O *conjunto das variáveis livres* em $M \in \Lambda^{\supset}$ (denotado por $FV(M)$) é definido indutivamente como segue:

(i) $FV(x) = \{x\}$;

(ii) $FV(\lambda x.M) = FV(M) - \{x\}$;

(iii) $FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$.

(2) O *conjunto das variáveis ligadas* em $\mathsf{M} \in \Lambda^{\supset}$ (denotado por $BV(\mathsf{M})$) é definido indutivamente como segue:

$(i)\ BV(x) = \varnothing;$

$$(ii)\ BV(\lambda x.\mathsf{M}) = \begin{cases} BV(\mathsf{M}) \cup \{x\} & \text{- se } x \in FV(\mathsf{M}) \\ BV(\mathsf{M}) & \text{- se } x \notin FV(\mathsf{M}); \end{cases}$$

$(iii)\ BV(\mathsf{MN}) = BV(\mathsf{M}) \cup BV(\mathsf{N}).$

4.1.6.1 NOTAÇÕES:

(a) M é *fechado* se $\mathrm{FV}(\mathsf{M}) = \varnothing$.

(b) $\Lambda^{o}_{\mathsf{A}} = \{\mathsf{M} \in \Lambda_{\mathsf{A}} \,/\, \mathsf{M}$ é fechado$\}$.

(c) $\Lambda^{o}_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{x}) = \{\mathsf{M} \in \Lambda_{\mathsf{A}} \,/\, \mathrm{FV}(\mathsf{M}) \subset \{\boldsymbol{x}\}\}$.

(d) O *fecho* de $\mathsf{M} \in \Lambda^{\supset}$ é $\lambda \boldsymbol{x}.\mathsf{M}$ tal que $\{\boldsymbol{x}\} = \mathrm{FV}(\mathsf{M})$.

4.1.7 DEFINIÇÃO: Subtermo ($\mathsf{N} \subseteq \mathsf{M}$)

N é um subtermo de M (denotamos: $\mathsf{N} \subseteq \mathsf{M}$) se $\mathsf{N} \in Sub(\mathsf{M})$, onde *Sub* de M é definido indutivamente por:

(1) $Sub(x) = \{x\}$;

(2) $Sub(\lambda x.\mathsf{M}_1) = Sub(\mathsf{M}_1) \cup \{\lambda x.\mathsf{M}_1\}$;

(3) $Sub(\mathsf{M}_1\mathsf{M}_2) = Sub(\mathsf{M}_1) \cup Sub(\mathsf{M}_2) \cup \{\mathsf{M}_1\mathsf{M}_2\}$.

4.1.7.1 NOTAÇÕES:

(a) Um subtermo pode *ocorrer* mais de uma vez em um termo. Por exemplo, em $(\mathsf{M}^{\mathsf{A}\supset\mathsf{A}}(\mathsf{M}^{\mathsf{A}\supset\mathsf{A}}\mathsf{N}^{\mathsf{A}})^{\mathsf{A}})^{\mathsf{A}}$ existem duas ocorrências do subtermo M.

(b) Sejam N_1 e N_2 ocorrências de subtermos de M. Dizemos que N_1 e N_2 são *ocorrências disjuntas* se N_1 e N_2 não possuem símbolos comuns. Por exemplo, em $\mathsf{M}(\mathsf{MN})$, a primeira ocorrência de M e MN são ocorrências disjuntas, mas a segunda ocorrência de M e MN não são.

(c) Muitas vezes, por abuso de linguagem, usaremos apenas *subtermo* no lugar de *ocorrência de subtermo*.

(d) Dizemos que N é um *subtermo próprio* de M, e denotamos por $\mathsf{N} \subset \mathsf{M}$, quando $\mathsf{N} \subseteq \mathsf{M}$ e $\mathsf{N} \not\equiv \mathsf{M}$.

§2 Convenção de Variáveis e Substituição

Temos que ter, com as variáveis ligadas em $\lambda^{\supset}$, cuidados semelhantes aos que temos no cálculo de predicados. Ou seja, não podemos permitir substituições que tornem livres variáveis que eram ligadas e vice-versa. Seguindo os passos de **Barendregt[1990]**, adotaremos as seguintes medidas para lidarmos com esta restrição da maneira mais econômica possível:

(1) Consideraremos idênticos dois termos quaisquer que possam ser transformados um no outro apenas renomeando suas variáveis ligadas, criando assim classes de equivalência módulo variáveis ligadas.

(2) Cada $\lambda^{\supset}$-termo será uma testemunha destas classes de equivalência.

(3) Interpretaremos substituições $\mathsf{M}[x/\mathsf{N}]$ (a operação de substituir cada ocorrência livre da variável x em M pelo termo N) como uma operação nas classes de equivalência módulo variáveis ligadas de M e N.

(4) Adotaremos uma convenção para os nomes das variáveis livres e ligadas que, sem perda de generalidade, nos permite definir substituições sem a necessidade de explicitar quaisquer restrições.

4.2.1 DEFINIÇÃO: Troca de Variáveis Ligadas e α-Congruência

(*a*) Uma *troca de variáveis ligadas* em M é uma troca de um subtermo de M da forma $\lambda x^{\mathsf{A}}.\mathsf{N}$ por $\lambda y^{\mathsf{A}}.(\mathsf{N}[x/y])$, onde y não ocorre em N.

(*b*) M é *α-congruente* com N (notação: $\mathsf{M} \equiv_{\alpha} \mathsf{N}$) se N é obtido de M por uma série de troca de variáveis ligadas.

4.2.1.1 EXEMPLOS:

(*a*) $\lambda x.xy \equiv_{\alpha} \lambda z.zy \not\equiv_{\alpha} \lambda y.yy$.

(*b*) $(\lambda x.x)x \equiv_{\alpha} (\lambda y.y)x \equiv_{\alpha} (\lambda y.y)z \equiv_{\alpha} (\lambda y.y)y$.

4.2.2 CONVENÇÕES:

(*a*) Consideraremos idênticos termos que são α-congruentes. Ou seja, se $\mathsf{M} \equiv_{\alpha} \mathsf{N}$, diremos simplesmente que $\mathsf{M} \equiv \mathsf{N}$.

(*b*) (Convenção de Variáveis)_ Se os termos $M_1, \ldots, M_n$ ocorrem em um certo contexto matemático (uma prova, uma definição,...), então, em todos estes termos, as suas variáveis livres são diferentes das suas variáveis ligadas.

4.2.3 DEFINIÇÃO: Substituição

O resultado da *substituição* das ocorrências livres de x^A em M por $N \in \Lambda^A$ (denotado por $M[x/N]$) é definido indutivamente por:

(1) $x[x/N] \equiv N$;

(2) $y[x/N] \equiv y$, se $x \not\equiv y$;

(3) $(\lambda y.M_1)[x/N] \equiv \lambda y.(M_1[x/N])$;

(4) $(M_1M_2)[x/N] \equiv (M_1[x/N])(M_2[x/N])$.

4.2.3.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Quando escrevemos $M[x/N]$ estamos assumindo tacitamente que x e N têm o mesmo tipo.

(*b*) Note que a restrição esperada para a cláusula (3) da definição acima ($y \not\equiv x$ e y não ocorre livre em N), que proibiria a possibilidade de transformação de variáveis livres em ligadas, não precisa ser feita. Como estamos adotando a Convenção 4.2.2-(*b*), as variáveis livres são sempre distintas das ligadas e, portanto, é claro que $x \not\equiv y$ e que y não ocorre livre em N.[33]

4.2.4 LEMA: da Substituição

Se $y \not\equiv x$ e x não ocorre livre em L, então:

$$M[x/N][y/L] \equiv M[y/L][x/N[y/L]].$$

<u>PROVA</u>: Indução na complexidade de M.

É imediato, pela definição acima que, como $x \notin FV(L)$, então:

(*i*) $L[x/P] \equiv L$.

---

[33] A adoção da convenção de variáveis nos permite, sem perda de generalidade, trabalhar em $\lambda^{\supset}$ sem preocupação com as restrições tradicionais em substituições. **Barendregt[1990]** apresenta uma prova formal deste resultado para cálculo-λ livre de tipos que pode ser estendida para $\lambda^{\supset}$.

<u>BASE</u>: M é variável.

<u>Caso 1</u>: $\mathsf{M} \equiv x$

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}[x/\mathsf{N}][y/\mathsf{L}] &\equiv x[x/\mathsf{N}][y/\mathsf{L}] \\
&\underset{4.2.3(1)}{\equiv} \mathsf{N}[y/\mathsf{L}] \\
&\underset{4.2.3(1)}{\equiv} x[x/\mathsf{N}[y/\mathsf{L}]] \\
&\underset{4.2.3(2)}{\equiv} x[y/\mathsf{L}][x/\mathsf{N}[y/\mathsf{L}]] \equiv \mathsf{M}[y/\mathsf{L}][x/\mathsf{N}[y/\mathsf{L}]].
\end{aligned}$$

<u>Caso 2</u>: $\mathsf{M} \equiv y$

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}[x/\mathsf{N}][y/\mathsf{L}] &\equiv y[x/\mathsf{N}][y/\mathsf{L}] \\
&\underset{4.2.3(2)}{\equiv} y[y/\mathsf{L}] \quad \text{-(pois } y \not\equiv x \text{ por hipótese)} \\
&\underset{4.2.3(1)}{\equiv} \mathsf{L} \\
&\underset{(i)}{\equiv} \mathsf{L}[x/\mathsf{N}[y/\mathsf{L}]] \quad \text{-(pois } x \notin FV(\mathsf{L}) \text{ por hipótese)} \\
&\underset{4.2.3(1)}{\equiv} y[y/\mathsf{L}][x/\mathsf{N}[y/\mathsf{L}]] \equiv \mathsf{M}[y/\mathsf{L}][x/\mathsf{N}[y/\mathsf{L}]].
\end{aligned}$$

<u>Caso 3</u>: $\mathsf{M} \equiv z \not\equiv x, y$

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}[x/\mathsf{N}][y/\mathsf{L}] &\equiv z[x/\mathsf{N}][y/\mathsf{L}] \\
&\underset{4.2.3(2)}{\equiv} z[y/\mathsf{L}] \\
&\underset{4.2.3(2)}{\equiv} z \\
&\underset{4.2.3(2)}{\equiv} z[x/\mathsf{N}[y/\mathsf{L}]] \\
&\underset{4.2.3(2)}{\equiv} z[y/\mathsf{L}][x/\mathsf{N}[y/\mathsf{L}]] \equiv \mathsf{M}[y/\mathsf{L}][x/\mathsf{N}[y/\mathsf{L}]].
\end{aligned}$$

<u>PASSO</u>:

<u>Caso 1</u>: $\mathsf{M} \equiv \lambda z.\mathsf{M}_1$

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}[x/\mathsf{N}][y/\mathsf{L}] &\equiv (\lambda z.\mathsf{M}_1)[x/\mathsf{N}][y/\mathsf{L}] \\
&\underset{4.2.3(3)}{\equiv} \lambda z.(\mathsf{M}_1[x/\mathsf{N}][y/\mathsf{L}]) \\
&\underset{H.I.}{\equiv} \lambda z.(\mathsf{M}_1[y/\mathsf{L}][x/\mathsf{N}[y/\mathsf{L}]]) \\
&\underset{4.2.3(3)}{\equiv} (\lambda z.\mathsf{M}_1)[y/\mathsf{L}][x/\mathsf{N}[y/\mathsf{L}]] \equiv \mathsf{M}[y/\mathsf{L}][x/\mathsf{N}[y/\mathsf{L}]].
\end{aligned}$$

<u>Caso 2</u>: $\mathsf{M} \equiv \mathsf{M}_1\mathsf{M}_2$

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}[x/\mathsf{N}][y/\mathsf{L}] &\equiv (\mathsf{M}_1\mathsf{M}_2)[x/\mathsf{N}][y/\mathsf{L}] \\
&\underset{4.2.3(4)}{\equiv} (\mathsf{M}_1[x/\mathsf{N}][y/\mathsf{L}])(\mathsf{M}_2[x/\mathsf{N}][y/\mathsf{L}]) \\
&\underset{H.I.}{\equiv} (\mathsf{M}_1[y/\mathsf{L}][x/\mathsf{N}[y/\mathsf{L}]])(\mathsf{M}_2[y/\mathsf{L}][x/\mathsf{N}[y/\mathsf{L}]]) \\
&\underset{4.2.3(4)}{\equiv} (\mathsf{M}_1\mathsf{M}_2)[y/\mathsf{L}][x/\mathsf{N}[y/\mathsf{L}]] \equiv \mathsf{M}[y/\mathsf{L}][x/\mathsf{N}[y/\mathsf{L}]]. \blacklozenge
\end{aligned}$$

§3 Reduções

Apresentamos nesta seção a definição de redução-β, que terá papel fundamental em todo o nosso desenvolvimento. Juntamente, apresentamos várias outras noções derivadas desta, como estratégia de redução e forma normal, além de convenções de notação, como os contextos$_{A,B}$, que nos permitem trabalhar melhor com as reduções. Vários resultados básicos envolvendo reduções e estes conceitos relacionados também serão apresentados.

4.3.1 DEFINIÇÃO: redução-β (→)

Definimos a *redução-β* de um termo M a um termo M' (notação: M → M') por indução na complexidade de M da seguinte forma:

(1) $(\lambda x.P)Q \to P[x/Q]$;

(2) $N \to N' \Rightarrow ZN \to ZN'$, para um termo Z qualquer;

(3) $N \to N' \Rightarrow NZ \to N'Z$, para um termo Z qualquer;

(4) $N \to N' \Rightarrow \lambda x.N \to \lambda x.N'$.

4.3.1.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Note que se M → M', a diferença entre M e M' é que M possui uma ocorrência de subtermo $\Delta \equiv (\lambda x.P)Q$, chamado *redex*, que em M' é da forma $\Delta' \equiv P[x/Q]$, chamado *contractum*. Assim, a notação $M \to_\Delta M'$ é utilizada para identificar explicitamente qual o redex de M que foi substituído por seu contractum na redução M → M'.

(*b*) Considere o redex $\Delta \subset M$ tal que $\Delta \equiv (\lambda x.P)Q$. Se $x \in FV(P)$, dizemos que Δ é um *I-redex*. Quando $x \notin FV(P)$, Δ é chamado *K-redex*.

(*c*) Sempre que nos referirmos à uma ocorrência de subtermo pelo nome Δ (possivelmente com subíndices), estaremos nos referindo a um redex.

(*d*) Se M é tal que não existe $\Delta \subset M$, então dizemos que M está na *forma normal*, ou M *é normal*.

(*e*) Uma *seqüência de redução* é uma seqüência do tipo: $M \equiv M_0 \to_{\Delta_1} M_1 \to_{\Delta_2} M_2 \to_{\Delta_3} \ldots$.

(*f*) A coleção de todas as seqüências de redução iniciadas em $M \equiv M_0$ forma uma árvore chamada *árvore de redução* para M. Cada ramo desta árvore identifica uma seqüência de redução específica para M.

(g) Chamaremos de *altura* da árvore de redução para um termo M, e denotaremos por h(M), ao número de termos do mais comprido ramo da árvore de redução de M. Note que h(M) representa o comprimento da seqüência de redução mais longa para M.

(h) Um termo M é *fortemente normalizável* se sua árvore de redução é finita, ou, em outras palavras, se todas as seqüências de redução para M são finitas.

4.3.2 DEFINIÇÃO: ($\twoheadrightarrow$)

O fecho transitivo de "$\rightarrow$", denotado por "$\twoheadrightarrow$", é definido indutivamente como:

(1) $M \rightarrow N \;\Rightarrow\; M \twoheadrightarrow N$;

(2) $M \twoheadrightarrow N$ e $N \twoheadrightarrow P \;\Rightarrow\; M \twoheadrightarrow P$.

4.3.2.1 OBSERVAÇÕES:

(a) O fecho transitivo e reflexivo de "$\rightarrow$", denotado por "$\twoheadrightarrow_R$", é definido pelo acréscimo do seguinte item aos Itens (1) e (2) acima: (3) $M \twoheadrightarrow_R M$.

(b) Se $M \twoheadrightarrow_R M'$, então é claro que existe uma seqüência de redução finita tal que: $M \equiv M_0 \rightarrow_{\Delta 1} M_1 \rightarrow_{\Delta 2} \ldots \rightarrow_{\Delta n} M_n \equiv M'$, para $0 \leq n < \omega$.

A seguir apresentamos dois resultados básicos envolvendo as noções já introduzidas.

4.3.3 LEMA:

(a) $N \twoheadrightarrow N' \;\Rightarrow\; ZN \twoheadrightarrow ZN'$.

(b) $N \twoheadrightarrow N' \;\Rightarrow\; NZ \twoheadrightarrow N'Z$.

(c) $N \twoheadrightarrow N' \;\Rightarrow\; \lambda x.N \twoheadrightarrow \lambda x.N'$.

PROVA: Indução na definição de "$\twoheadrightarrow$"

BASE: $N \twoheadrightarrow N'$ porque $N \rightarrow N'$

Como $N \rightarrow N'$, pela Definição 4.3.1 temos:

(i) $ZN \rightarrow ZN'$, $NZ \rightarrow N'Z$ e $\lambda x.N \rightarrow \lambda x.N'$.

Mas por (i) e pela Definição 4.3.2-(1) temos:

$ZN \twoheadrightarrow ZN'$, $NZ \twoheadrightarrow N'Z$ e $\lambda x.N \twoheadrightarrow \lambda x.N'$.

PASSO: $N \twoheadrightarrow N'$ porque $N \twoheadrightarrow P$ e $P \twoheadrightarrow N'$

H.I.: O resultado se aplica para $N \twoheadrightarrow P$ e $P \twoheadrightarrow N'$.

Por HI temos:

(*ii*) $\mathsf{ZN} \twoheadrightarrow \mathsf{ZP}$, $\mathsf{NZ} \twoheadrightarrow \mathsf{PZ}$ e $\lambda x.\mathsf{N} \twoheadrightarrow \lambda x.\mathsf{P}$.

(*iii*) $\mathsf{ZP} \twoheadrightarrow \mathsf{ZN'}$, $\mathsf{PZ} \twoheadrightarrow \mathsf{N'Z}$ e $\lambda x.\mathsf{P} \twoheadrightarrow \lambda x.\mathsf{N'}$.

Assim, por (*ii*), (*iii*) e pela Definição 4.3.2-(2) temos:

$\mathsf{ZN} \twoheadrightarrow \mathsf{ZN'}$, $\mathsf{NZ} \twoheadrightarrow \mathsf{N'Z}$ e $\lambda x.\mathsf{N} \twoheadrightarrow \lambda x.\mathsf{N'}$. ♦

4.3.4 LEMA:

Se $x \in FV(\mathsf{M})$ então:

(*a*) $(\mathsf{N} \to \mathsf{N'}) \Rightarrow (\mathsf{M}[x/\mathsf{N}] \twoheadrightarrow \mathsf{M}[x/\mathsf{N'}])$.

(*b*) $(\mathsf{M} \to \mathsf{M'}) \Rightarrow (\mathsf{M}[x/\mathsf{N}] \twoheadrightarrow \mathsf{M'}[x/\mathsf{N}])$.

<u>PROVA</u>:

Item (*a*): Indução na complexidade de M

<u>BASE</u>: $\mathsf{M} \equiv y$ (M é variável)

<u>Caso 1</u>: $y \not\equiv x$

Note que o teorema não se aplica neste caso, pois $y \not\equiv x \Rightarrow x \notin FV(y)$.

<u>Caso 2</u>: $y \equiv x$

Neste caso, pela Definição 4.2.3 temos: $\mathsf{M}[x/\mathsf{N}] \equiv \mathsf{N}$ e $\mathsf{M}[x/\mathsf{N'}] \equiv \mathsf{N'}$.

Logo, como $\mathsf{N} \to \mathsf{N'}$, pela Definição 4.3.2 temos $\mathsf{N} \twoheadrightarrow \mathsf{N'}$ e portanto:

$\mathsf{M}[x/\mathsf{N}] \twoheadrightarrow \mathsf{M}[x/\mathsf{N'}]$.

<u>PASSO</u>:

<u>Caso 1</u>: $\mathsf{M} \equiv \mathsf{PQ}$

Então, pela Definição 4.2.3-(4) temos:

(*i*) $\mathsf{M}[x/\mathsf{N}] \equiv (\mathsf{PQ})[x/\mathsf{N}] \equiv \mathsf{P}[x/\mathsf{N}]\mathsf{Q}[x/\mathsf{N}]$.

(*ii*) $\mathsf{M}[x/\mathsf{N'}] \equiv (\mathsf{PQ})[x/\mathsf{N'}] \equiv \mathsf{P}[x/\mathsf{N'}]\mathsf{Q}[x/\mathsf{N'}]$.

(*iii*) Mas por HI: (*a*) $\mathsf{P}[x/\mathsf{N}] \twoheadrightarrow \mathsf{P}[x/\mathsf{N'}]$,

(*b*) $\mathsf{Q}[x/\mathsf{N}] \twoheadrightarrow \mathsf{Q}[x/\mathsf{N'}]$.

Então, por (*iiia*) e pelo Lema 4.3.3-(2) temos:

(*iv*) $\mathsf{P}[x/\mathsf{N}]\mathsf{Q}[x/\mathsf{N}] \twoheadrightarrow \mathsf{P}[x/\mathsf{N'}]\mathsf{Q}[x/\mathsf{N}]$.

Analogamente, por (*iiib*) e pelo Lema 4.3.3-(1) temos:

(*v*) $\mathsf{P}[x/\mathsf{N'}]\mathsf{Q}[x/\mathsf{N}] \twoheadrightarrow \mathsf{P}[x/\mathsf{N'}]\mathsf{Q}[x/\mathsf{N'}]$.

Logo, por (*iv*), (*v*) e pela Definição 4.3.2-(2) temos:

$$P[x/N]Q[x/N] \twoheadrightarrow P[x/N']Q[x/N'] \underset{(i)\text{ e }(ii)}{\Rightarrow} M[x/N] \twoheadrightarrow M[x/N'].$$

<u>Caso 2</u>: $M \equiv \lambda y.P$

Pela Definição 4.2.3-(3) temos:

(*vi*) $M[x/N] \equiv (\lambda y.P)[x/N] \equiv \lambda y.(P[x/N])$.

(*vii*) $M[x/N'] \equiv (\lambda y.P)[x/N'] \equiv \lambda y.(P[x/N'])$.

(*viii*) Mas por HI: $P[x/N] \twoheadrightarrow P[x/N']$.

Por (*viii*) e pelo Lema 4.3.3-(3) temos:

(*ix*) $\lambda y.(P[x/N]) \twoheadrightarrow \lambda y.(P[x/N'])$.

Logo, por (*vi*), (*vii*) e (*ix*) temos:

$M[x/N] \twoheadrightarrow M[x/N']$. □

Item (*b*): Indução na complexidade de M

<u>BASE</u>: $M \equiv y$ (variável)

Neste caso M está na forma normal, logo o resultado é válido por vacuidade.

<u>PASSO</u>:

<u>Caso 1</u>: $M \equiv PQ$

Temos aqui três subcasos possíveis para definir a forma de M':

(1) $M' \equiv P'Q$, onde $P \to P'$,

(2) $M' \equiv PQ'$, onde $Q \to Q'$,

(3) $P \equiv \lambda y.P_1$, $M \equiv (\lambda y.P_1)Q$ e $M' \equiv P_1[y/Q]$.

<u>SubCaso 1.1</u>: $M' \equiv P'Q$, onde $P \to P'$

Então, pela Definição 4.3.2-(4) e pela hipótese do caso temos:

(*i*) $M[x/N] \equiv (PQ)[x/N] \equiv P[x/N]Q[x/N]$.

(*ii*) $M'[x/N] \equiv (P'Q)[x/N] \equiv P'[x/N]Q[x/N]$.

(*iii*) Mas como $P \to P'$, por HI temos: $P[x/N] \twoheadrightarrow P'[x/N]$.

Então, por (*iii*) e pelo Lema 4.3.3-(2) temos:

(*iv*) $P[x/N]Q[x/N] \twoheadrightarrow P'[x/N]Q[x/N]$.

Logo, por (*i*), (*ii*) e (*iv*) temos: $M[x/N] \twoheadrightarrow M'[x/N]$.

<u>SubCaso 1.2</u>: $M' \equiv PQ'$, onde $Q \to Q'$

O resultado segue análogo ao caso anterior, utilizando o Lema 4.3.3-(1).

<u>SubCaso 1.3</u>: $P \equiv \lambda y.P_1$, $M \equiv (\lambda y.P_1)Q$ e $M' \equiv P_1[y/Q]$

Temos neste caso que:

(v) $((\lambda y.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q})[x/\mathsf{N}] \underset{4.2.3}{\equiv} (\lambda y.\mathsf{P}_1[x/\mathsf{N}])\mathsf{Q}[x/\mathsf{N}] \underset{4.3.1(1)}{\rightarrow} \mathsf{P}_1[x/\mathsf{N}][y/\mathsf{Q}[x/\mathsf{N}]]$.

(vi) $\mathsf{P}_1[x/\mathsf{N}][y/\mathsf{Q}[x/\mathsf{N}]] \underset{4.2.4}{\equiv} \mathsf{P}_1[y/\mathsf{Q}][x/\mathsf{N}]$.

(vii) Então, por (v) e (vi) temos: $((\lambda y.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q})[x/\mathsf{N}] \rightarrow \mathsf{P}_1[y/\mathsf{Q}][x/\mathsf{N}]$.

Portanto, por (vii) e pela Definição 4.3.2-(1) temos:

$\mathsf{M}[x/\mathsf{N}] \equiv ((\lambda y.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q})[x/\mathsf{N}] \twoheadrightarrow \mathsf{P}_1[y/\mathsf{Q}][x/\mathsf{N}] \equiv \mathsf{M}'[x/\mathsf{N}]$.

Caso 2: $\mathsf{M} \equiv \lambda y.\mathsf{P}$

Pela Definição 4.2.3-(3) temos:

($viii$) $\mathsf{M}[x/\mathsf{N}] \equiv (\lambda y.\mathsf{P})[x/\mathsf{N}] \equiv \lambda y.(\mathsf{P}[x/\mathsf{N}])$.

(ix) $\mathsf{M}'[x/\mathsf{N}] \equiv (\lambda y.\mathsf{P}')[x/\mathsf{N}] \equiv \lambda y.(\mathsf{P}'[x/\mathsf{N}])$.

(x) Mas por HI: $\mathsf{P}[x/\mathsf{N}] \twoheadrightarrow \mathsf{P}'[x/\mathsf{N}]$.

Então, por (x) e pelo Lema 4.3.3-(3) temos:

(xi) $\lambda y.(\mathsf{P}[x/\mathsf{N}]) \twoheadrightarrow \lambda y.(\mathsf{P}'[x/\mathsf{N}])$.

Logo, por ($viii$), (ix) e (xi) temos: $\mathsf{M}[x/\mathsf{N}] \twoheadrightarrow \mathsf{M}[x/\mathsf{N}']$. ♦

A definição que apresentamos a seguir é uma ótima ferramenta para explicitar uma ocorrência de subtermo específica. Ela será particularmente útil no estudo das alterações que as reduções provocam nos termos. Podemos relacioná-la com a noção de subárvore em dedução natural.

4.3.5 DEFINIÇÃO: Contexto$_{\mathsf{A,B}}$ - $(\mathsf{C}[\ ]_{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}}$

Para cada $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in Typ$, um *contexto*$_{\mathsf{A,B}}$ (denotado por $(\mathsf{C}[\ ]_{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}}$) é uma estrutura do tipo B que contém um "espaço vazio" que, se preenchido por um termo do tipo A, produz um termo do tipo B. Mais formalmente temos:

(1) $([\ ]_{\mathsf{A}})^{\mathsf{A}}$ é um contexto$_{\mathsf{A,A}}$.

(2) Se $(\mathsf{C}_1[\ ]_{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}\supset\mathsf{C}}$ é um contexto$_{\mathsf{A,B}\supset\mathsf{C}}$ e $\mathsf{M}\in\Lambda^{\mathsf{B}}$, então $((\mathsf{C}_1[\ ]_{\mathsf{A}})\mathsf{M})^{\mathsf{C}}$ é um contexto$_{\mathsf{A,C}}$.

(3) Se $(\mathsf{C}_1[\ ]_{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}}$ é um contexto$_{\mathsf{A,B}}$ e $\mathsf{M}\in\Lambda^{\mathsf{B}\supset\mathsf{C}}$, então $(\mathsf{M}(\mathsf{C}_1[\ ]_{\mathsf{A}}))^{\mathsf{C}}$ é um contexto$_{\mathsf{A,C}}$.

(4) Se $(\mathsf{C}_1[\ ]_{\mathsf{A}})^{\mathsf{C}}$ é um contexto$_{\mathsf{A,C}}$ e $x^{\mathsf{B}}\in\Lambda^{\mathsf{B}}$, então $(\lambda x.\mathsf{C}_1[\ ]_{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}\supset\mathsf{C}}$ é um contexto$_{\mathsf{A,B}\supset\mathsf{C}}$.

4.3.5.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Note que um contexto$_{\mathsf{A,B}}$ difere de um termo do tipo B apenas por possuir o símbolo "$[\ ]_{\mathsf{A}}$" (um "buraco" do tipo A) no lugar de um subtermo do tipo A.

(*b*) Esta definição, difere da definição de **Barendregt[1990]**, não apenas no que diz respeito aos tipos, mas também à quantidade de "buracos" em um contexto. Barendregt define contextos como estruturas contendo vários "buracos". A nossa definição permite apenas um "buraco".

(*c*) Quando for possível fazê-lo sem provocar confusão, omitiremos as indicações de tipos de um contexto$_{\mathsf{A,B}}$. Por exemplo, o "contexto$_{\mathsf{A,B}}$ $(\mathsf{C}[\ ]_{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}}$" poderá ser referido apenas como "contexto $(\mathsf{C}[\ ])$".

(*d*) Os parênteses externos de um contexto também serão omitidos sempre que possível fazê-lo sem confusão.

(*e*) Seja $\mathsf{C}[\ ]$ um contexto da forma: $\mathsf{C}[\ ] \equiv \mathsf{C_1}[\ ]\mathsf{M}$, e seja $\Delta \subset \mathsf{M}$. Se $\mathsf{M} \rightarrow_{\Delta} \mathsf{M}'$, então $\mathsf{C_1}[\ ]\mathsf{M}'$, pela Definição 4.3.5-(3), também é um contexto, que denotaremos por $\mathsf{C}'[\ ]$. Por abuso de linguagem utilizaremos a notação $\mathsf{C}[\ ] \rightarrow_{\Delta} \mathsf{C}'[\ ]$ para denotar que o resultado da redução de Δ em um subtermo de $\mathsf{C}[\ ]$ também é um contexto.[34]

4.3.6 DEFINIÇÃO: C[M]

Se $(\mathsf{C}[\ ]_{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}}$ é um contexto$_{\mathsf{A,B}}$ e $\mathsf{M} \in \Lambda^{\mathsf{A}}$, então $\mathsf{C}[\mathsf{M}]$ denota o resultado da substituição literal do "buraco" $[\ ]_{\mathsf{A}}$ de $(\mathsf{C}[\ ]_{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}}$ por M.

4.3.6.1 OBSERVAÇÃO:

Note que nesta substituição pode ocorrer que variáveis livres de M se tornem ligadas em $\mathsf{C}[\mathsf{M}]$. Esta é a principal característica dos contextos.

O lema seguinte demonstra que se $\mathsf{C}[\ ]$ é um contexto, então $\mathsf{C}[\mathsf{M}]$ é um termo.

---

[34] Nem sempre, em um contexto, a substituição de um redex pelo seu contractum resulta em um contexto. Este caso pode ocorrer quando o símbolo $[]_{\mathsf{A}}$ ocorre no redex que reduziremos. No exemplo: $\mathsf{C}[] \equiv ((\lambda x.(\lambda y.x)x)[])z \rightarrow ((\lambda y.[])[])z$, temos que $((\lambda y.[])[])z$ não é um contexto, pois possui dois "buracos".

4.3.7 LEMA:

Se $(C[\ ]_A)^B$ é um contexto$_{A,B}$ e $N \in \Lambda^A$, então $C[N] \in \Lambda^B$

<u>PROVA:</u> Queremos provar que C[N] é um termo do tipo *B*, o que será feito por indução na complexidade (comprimento) de C[ ].

<u>BASE</u>: $(C[\ ]_A)^B \equiv ([\ ]_A)^B$

(*i*) Neste caso, pela Definição 4.3.5-(1) temos $A \equiv B$.
Pela Definição 4.3.6, $C[N] \equiv N \in \Lambda^A \underset{(i)}{=} \Lambda^B$. Logo, $C[N] \in \Lambda^B$.

<u>PASSO</u>:

<u>Caso 1</u>: $(C[\ ]_A)^B \equiv (C_1[\ ]_A M)^B$

(*ii*) Pela Definição 4.3.5-(2) temos: $(C_1[\ ]_A)^{C\supset B}$ é um contexto$_{A,C\supset B}$ e $M \in \Lambda^C$.

Pela Hipótese do caso e por (*ii*) é claro que:

(*iii*) $(C[N]_A)^B \equiv ((C_1[N]_A)^{C\supset B} M^C)^B$.

(*iv*) Mas por HI e (*ii*) temos que $(C_1[N]_A)^{C\supset B} \in \Lambda^{C\supset B}$.

Logo, por (*ii*) (*iii*) e (*iv*) temos: $(C[N]_A)^B \in \Lambda^B$.

<u>Caso 2</u>: $(C[\ ]_A)^B \equiv (MC_1[\ ]_A)^B$

Análogo ao caso anterior utilizando a Definição 4.3.5-(3).

<u>Caso 3</u>: $(C[\ ]_A)^B = (\lambda x.C_1[\ ]_A)^B$

Análogo ao Caso 1 utilizando a Definição 4.3.5-(4). ♦

4.3.8 OBSERVAÇÕES:

(*a*) O Lema 4.3.7, juntamente com as Definições 4.3.5 e 4.3.6 viabilizam uma notação poderosa para tornarmos explícitas quaisquer ocorrências de subtermo. Podemos tornar explícita, por exemplo, uma certa ocorrência do subtermo $N \subset M$ através da notação $M \equiv C[N]$. Neste caso, está implícita na notação $M \equiv C[N]$ a posição de N em M.

(*b*) No caso particular das reduções, se $M \to_\Delta M'$ tal que $\Delta \equiv (\lambda x.P)Q$, podemos explicitar a contração de Δ através da notação: $M \equiv C[(\lambda x.P)Q] \to C[P[x/ Q]] \equiv M'$.

No lema seguinte demonstramos formalmente este importante resultado descrito no item (*b*) da observação acima, que relaciona a noção de contextos com redução.

4.3.9 LEMA:

$N \rightarrow_{\Delta} N' \Rightarrow C[N] \rightarrow_{\Delta} C[N']$

PROVA: Indução na complexidade de C[ ]

BASE: $C[\ ] \equiv [\ ]$

Neste caso, $C[N] \equiv N$, $C[N'] \equiv N'$, e portanto o resultado é trivial.

PASSO:

Caso 1: $C[\ ] \equiv C_1[\ ]M$

(*i*) Por HI temos que: $C_1[N] \rightarrow_{\Delta} C_1[N']$.

Logo, por (*i*) e pela Definição 4.3.1-(2) temos:

$$C[N] \equiv C_1[N]M \rightarrow_{\Delta} C_1[N']M \equiv C[N']$$

Caso 2: $C[\ ] \equiv MC_1[\ ]$

Análogo ao caso anterior aplicando a Definição 4.3.1-(1).

Caso 3: $C[\ ] \equiv \lambda x.C_1[\ ]$

Análogo ao caso anterior aplicando a Definição 4.3.1-(3). ♦

4.3.9.1 COROLÁRIO:

$N \twoheadrightarrow N' \Rightarrow C[N] \twoheadrightarrow C[N']$.

PROVA:

Imediata usando os Lemas 4.3.3 e 4.3.9. ♦

§4 A Estratégia Perpétua

Nesta seção definimos o conceito de estratégia de redução e apresentamos uma estratégia específica, a estratégia perpétua, primeiramente definida em **Barendregt[1990]** para cálculo lambda livre de tipos. Esta estratégia, no caso de $\lambda^{\supset}$, terá o mesmo papel que a pior seqüência de redução tem para o caso do sistema de dedução natural C'.

4.4.1 DEFINIÇÃO: Estratégia de Redução (F)

(1) A função F: $\Lambda^{\supset} \rightarrow \Lambda^{\supset}$ é uma *estratégia de redução* se:

$$\forall M \in \Lambda^{\supset},\ M \twoheadrightarrow_{R} F(M);$$

(2) Uma estratégia F é uma *estratégia-R1* (ou *one-step*) se:

$\forall M \in \Lambda^{\supset}$ que não é normal: $M \rightarrow F(M)$;

4.4.1.1 NOTAÇÕES:

(*a*) Se F é uma estratégia de redução denotamos:

(1) $F^0(M) \equiv M$;

(2) $F^{(n+1)}(M) \equiv F(F^n(M))$.

(*b*) Se F é uma estratégia-R1, denotamos o redex de M reduzido em $M \rightarrow F(M)$ por Δ_F.

4.4.2 DEFINIÇÃO: F-path

Se F é uma estratégia de redução, o *F-path* de um termo M é a seguinte seqüência:

$M, F(M), F^2(M), F^3(M), \ldots$.

4.4.2.1 OBSERVAÇÃO:

Quando F é uma estratégia-R1, o F-path para M representa a seguinte seqüência de redução obtida a partir de M: $M \equiv M_0 \rightarrow_{\Delta 1F} M_1 \rightarrow_{\Delta 2F} M_2 \rightarrow_{\Delta 3F} \ldots$.

4.4.3 DEFINIÇÃO: Comprimento do *F*-path ($L_F(M)$)

Seja F uma estratégia de redução. O *comprimento* do F-path de M, denotado por $L_F(M)$, é $\mu n[F^n(M)$ é normal] (o menor n tal que $F^n(M)$ é normal). Além disso, $L_F(M) = \infty$ se o F-path de M for infinito.

4.4.3.1 OBSERVAÇÃO:

Quando F é uma estratégia-R1, $L_F(M)$ representa o comprimento da seqüência de redução $M \equiv M_0 \rightarrow_{\Delta 1F} M_1 \rightarrow_{\Delta 2F} M_2 \rightarrow_{\Delta 3F} \ldots$.

4.4.4 DEFINIÇÃO: Left-Most Redex

(1) Seja $\Delta \subset M$. A primeira ocorrência do símbolo λ em Δ é chamada de *o λ de Δ*.

(2) Seja Δ_1 e $\Delta_2 \subset M$. Dizemos que *Δ_1 está à esquerda de Δ_2* em M se o λ de Δ_1 está à esquerda do λ de Δ_2 em M.

(3) $\Delta \subset M$ é o *leftmost redex* de M se Δ está à esquerda de todos os outros redex de M.

4.4.4.1 OBSERVAÇÕES:

(a) Em $\mathsf{M} \equiv \lambda a.(\lambda b.(\lambda c.c)b)d((\lambda e.\mathsf{N})a)$, por exemplo, temos 3 redex: $\Delta_1 \equiv (\lambda c.c)b$, $\Delta_2 \equiv (\lambda e.\mathsf{N})a$ e $\Delta_3 \equiv (\lambda b.(\lambda c.c)b)d((\lambda e.\mathsf{N})a)$. Pela definição acima, Δ_3 é o left-most redex de M, pois seu λ está à esquerda dos λs de Δ_1 e Δ_2.

(b) Se $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathsf{M}$ e $\Delta_2 \subset \Delta_1$, então é claro que Δ_1 está à esquerda de Δ_2 em M. Isso porque, como Δ_1 é redex, ele tem a seguinte forma: $\Delta_1 \equiv (\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}$. Mas pela forma de Δ_1, se $\Delta_2 \subset \Delta_1$, então ou $\Delta_2 \subset \mathsf{P}$ ou $\Delta_2 \subset \mathsf{Q}$. Em ambos os casos é claro que o λ de Δ_1 está à esquerda do λ de Δ_2.

(c) Denotamos por $\mathsf{M}^{\square}$ o termo obtido pela redução do left-most redex de M.

4.4.5 DEFINIÇÃO: A Estratégia Perpétua F_∞

Seja M um termo normal ou com a forma $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[\Delta] \in \Lambda^{\supset}$ tal que $\Delta \equiv (\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}$ é o left-most redex de M. Definimos então $F_\infty(\mathsf{M})$ como:

$$F_\infty(\mathsf{M}) = \begin{cases} \mathsf{M} \quad , \quad \text{se M for normal} \\ \text{Se M não for normal} \begin{cases} \mathsf{C}[\mathsf{P}[x/\,\mathsf{Q}]] \quad , \quad \text{se } \Delta \text{ for um } I\text{-redex} \\ \text{Se } \Delta \text{ for um } K\text{-redex} \begin{cases} \mathsf{C}[\mathsf{P}] \quad , \quad \text{se Q for normal} \\ \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{P})F_\infty(\mathsf{Q})] \quad , \quad \text{se Q não for normal} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

4.4.5.1 OBSERVAÇÕES:

(a) Utilizaremos muitas vezes as abreviações: $F_\infty(\mathsf{M}) \equiv \mathsf{M}^{\circ}$ e $F_\infty^{k}(\mathsf{M}) \equiv \mathsf{M}^{\circ k}$.

(b) É fácil ver que F_∞ é uma estratégia-R1, e portanto utilizaremos a notação $\mathsf{M} \xrightarrow{p} \mathsf{M}^{\circ}$.

(c) Note que o F_∞-path para o termo M ($\mathsf{M} \equiv \mathsf{M}^{\circ 0}, \mathsf{M}^{\circ 1}, \mathsf{M}^{\circ 2}, \ldots \mathsf{M}^{\circ n}, \ldots$) corresponde à uma seqüência de redução $\mathsf{M} \equiv \mathsf{M}^{\circ 0} \xrightarrow{p} \mathsf{M}^{\circ 1} \xrightarrow{p} \mathsf{M}^{\circ 2} \xrightarrow{p} \ldots \mathsf{M}^{\circ n} \xrightarrow{p} \ldots$, que chamaremos de *pior seqüência de redução para o termo M*, cujo comprimento é $L_{F_\infty}(\mathsf{M})$. Dessa forma podemos utilizar a seguinte notação: $\mathsf{M} \overset{p}{\twoheadrightarrow}_{R} \mathsf{M}^{\circ k}$ (para todo $0 \leq k < L_{F_\infty}(\mathsf{M})$).

(d) Como, para cada termo não normal M, a estratégia perpétua associa um e apenas um termo M°, é claro que para cada termo M a pior seqüência é única.

(*e*) É imediato, pela unicidade da pior seqüência que: $(M^{\circ n})^{\circ m} \equiv M^{\circ n+m}$. Ou seja, o ($m$+ 1)-ésimo termo da pior seqüência para $M^{\circ n}$ é exatamente o (n+ m+ 1)-ésimo termo da pior seqüência para M.

(*f*) Quando $L_{F_\infty}(M) < \omega$, denotaremos o último termo da pior seqüência de redução para M por M^P.

(*g*) Para $m < L_{F_\infty}(M)$ é claro que $(M^{\circ m})^P \equiv M^P$, pois a pior seqüência é única e $M^{\circ m}$ pertence à pior seqüência de M.

(*h*) Também pela unicidade da pior seqüência de redução é claro que:
$M \equiv N \Rightarrow M^P \equiv N^P$.

(*i*) A Definição 4.4.5 captura a mesma idéia que a definição de Massi da pior seqüência de redução: nenhum caminho curto é feito quando um mais longo é possível. Seguindo a estratégia perpétua, não é possível que uma redução qualquer elimine algum redex, nem que se reduza um redex quando for possível multiplicá-lo através de uma outra redução.

(*j*) No Capítulo VI, quando desenvolveremos o nosso resultado para $\lambda^{\supset}$, provaremos que: (1) $\forall M\ (L_{F_\infty}(M) < \omega)$ e (2) $(M \rightarrow M') \Rightarrow (L_{F_\infty}(M) < L_{F_\infty}(M'))$. Ou seja, provaremos que $L_{F_\infty}(M)$ é o menor ordinal natural para $\lambda^{\supset}$.

§5 A Noção de Fórmulas Como Tipos

Quem primeiro apresentou de uma maneira completa e batizou a *noção de fórmulas como tipos* foi **Howard[1980]**[35]. No entanto, as primeiras referências a esta noção são encontradas nos trabalhos de Curry. Mais precisamente em **Curry & Feys[1958],** seções 9E-F, esta noção é apresentada para uma lógica intuicionista implicativa. Segundo **Troelstra & Schwichtenberg[1996]**, referências mais antigas ainda, e também menos desenvolvidas, são encontradas em **Curry[1942]**, p.60, nota 28 e em **Curry[1934]**, p.588. Uma abordagem independente à de Howard foi apresentada em **Girard[1971]**.[36]

35 Texto que circulava informalmente desde 1969.

36 A noção de fórmulas como tipos também é mencionada na literatura como o "*Isomorfismo Curry-Howard*".

Explicitamente falando, a noção de fórmulas como tipos relaciona as regras de dedução natural com as leis de formação de termos do cálculo lambda tipificado. Dessa forma, um encadeamento de regras (uma derivação) corresponde a um encadeamento de subtermos (um termo). Constrói-se assim uma bijeção relacionando derivações com termos, onde a partir de uma estrutura (uma derivação ou um termo) obtém-se facilmente a estrutura relacionada no outro sistema.

Vamos inicialmente relacionar o fragmento implicativo positivo de C (que denotaremos por $C\supset$) com $\lambda^{\supset}$. Na construção desta relação, as questões fundamentais referentes à noção de fórmulas como tipos serão esclarecidas. Em seguida, apresentaremos uma extensão desta relação para o sistema de dedução natural I, de lógica intuicionista de Heyting, que introduzimos no Capítulo I. Por fim discutimos um pouco sobre a importante questão da transferência de provas de normalização entre sistemas, que é viabilizada pela noção de fórmulas como tipos.

4.5.1 DEFINIÇÃO: O Sistema $C\supset$

O Sistema $C\supset$ é obtido restringindo os símbolos lógicos da linguagem de C a "$\supset$", e suas regras a ($\supset$I) e ($\supset$E).

4.5.1.1 OBSERVAÇÃO:

Note que os tipos de $\lambda^{\supset}$ têm a mesma estrutura que as fórmulas de $C\supset$. Assim, a noção de fórmulas como tipos produzirá um isomorfismo entre termos e derivações tal que um termo do tipo A será relacionado biunivocamente com uma derivação cuja raiz é a fórmula A. Ou seja, relacionaremos $\mathsf{M} \in \Lambda_{\mathsf{A}}$ com $\begin{matrix}\pi_{\mathsf{M}}\\ \mathsf{A}\end{matrix}$.

4.5.2 DEFINIÇÃO: Isomorfismo de Fórmulas como Tipos entre $\lambda^{\supset}$ e $C\supset$

O *isomorfismo de fórmulas como tipos* entre $\lambda^{\supset}$ e $C\supset$ é obtido relacionando cada termo $\mathsf{M} \in \Lambda^{\supset}$ a uma derivação π_{M}, indutivamente, da seguinte forma:

(1) $\mathsf{M} \equiv x^{\mathsf{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{\mathsf{M}} \equiv \mathsf{A}$;

$$(2)\ \mathsf{M} \equiv (\mathsf{M}_1^{\mathsf{B}\supset\mathsf{A}}\mathsf{M}_2^{\mathsf{B}})^{\mathsf{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{\mathsf{M}} \equiv \cfrac{\begin{matrix}\pi_{\mathsf{M}_2} & \pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{B} & \mathsf{B}\supset\mathsf{A}\end{matrix}}{\mathsf{A}}\ (\supset\mathrm{E});$$

$$(3)\ \mathsf{M} \equiv (\lambda x^{\mathsf{A}}.\mathsf{M}_1^{\mathsf{B}})^{\mathsf{A}\supset\mathsf{B}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{\mathsf{M}} \equiv \cfrac{\begin{matrix}[\mathsf{A}]^x\\ \pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{B}\end{matrix}}{\mathsf{A}\supset\mathsf{B}}\,x\ (\supset\mathrm{I}).$$

4.5.2.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) É imediato, por inspeção na definição acima, que as variáveis de um termo M correspondem às hipóteses da derivação π_{M}. Variáveis livres de M correspondem a hipóteses abertas de π_{M}, enquanto que variáveis ligadas correspondem a hipóteses cortadas. Assim, se $x^{\mathsf{A}} \in FV(\mathsf{M}^{\mathsf{B}})$, então $\pi_{\mathsf{M}} \equiv \begin{matrix}[\mathsf{A}]\\ \pi_{\mathsf{M}}\\ \mathsf{B}\end{matrix}$. Da mesma forma, se $x^{\mathsf{A}} \in BV(\mathsf{M}^{\mathsf{B}})$, então $\pi_{\mathsf{M}} \equiv \begin{matrix}[\mathsf{A}]^x\\ \pi_{\mathsf{M}}\\ \mathsf{B}\end{matrix}$.

(*b*) Uma aplicação da regra ($\supset$I) que não corta hipóteses, $\cfrac{\begin{matrix}\pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{B}\end{matrix}}{\mathsf{A}\supset\mathsf{B}}$, corresponde a uma abstração $(\lambda x^{\mathsf{A}}.\mathsf{M}_1^{\mathsf{B}})^{\mathsf{A}\supset\mathsf{B}}$ na qual x não ocorre livre em M_1.

(*c*) Como as fórmulas de uma derivação π_{M} representam os tipos dos subtermos de M e vice-versa, faz então sentido nos referirmos ao isomorfismo entre termos e derivações como o isomorfismo das "*fórmulas como tipos*".

(*d*) Como as variáveis livres de um termo M representam hipóteses abertas de π_{M}, é fácil ver que uma substituição da forma $\mathsf{M}^{\mathsf{B}}[x^{\mathsf{A}}/\,\mathsf{N}^{\mathsf{A}}]$ representa a substituição das hipóteses abertas A de $\begin{matrix}[\mathsf{A}]\\ \pi_{\mathsf{M}}\\ \mathsf{B}\end{matrix}$ pela derivação $\begin{matrix}\pi_{\mathsf{N}}\\ \mathsf{A}\end{matrix}$. Assim, temos a importante equivalência:

$$\mathsf{M} \equiv \mathsf{M}_1^{\mathsf{B}}[x^{\mathsf{A}}/\,\mathsf{M}_2^{\mathsf{A}}] \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{\mathsf{M}} \equiv \begin{matrix}\pi_{\mathsf{M}_2}\\ [\mathsf{A}]\\ \pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{B}\end{matrix}$$

O teorema seguinte estabelece uma relação fundamental obtida da noção de fórmulas como tipos para os sistemas C$\supset$ e $\lambda^{\supset}$. Estabelece que reduções de *FM* em C$\supset$ são equivalentes a reduções-β em $\lambda^{\supset}$.

4.5.3 TEOREMA: Equivalência entre redução de *FM* em C⊃ e redução-β em $\lambda^{\supset}$

Para M e N $\lambda^{\supset}$-termos, e $\pi_{\mathbf{M}}$ e $\pi_{\mathbf{N}}$ as respectivas C⊃-derivações obtidas pelo Isomorfismo 4.5.2 acima, temos: $\mathsf{M} \to \mathsf{N} \iff \pi_{\mathbf{M}} \to \pi_{\mathbf{N}}$.

<u>PROVA</u>: Por indução na complexidade de M

<u>BASE</u>: $\mathsf{M} \equiv (\lambda x.\mathsf{M}_1)\mathsf{M}_2 \underset{4.3.1\text{–}(1)}{\Rightarrow} \mathsf{N} \equiv \mathsf{M}_1[x/\,\mathsf{M}_2]$

O seguinte esquema demonstra a equivalência para o caso básico da contração de um redex:

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{M} \equiv ((\lambda x^{\mathbf{A}}.\mathsf{M}_1^{\mathbf{B}})^{\mathbf{A}\supset\mathbf{B}}\mathsf{M}_2^{\mathbf{A}})^{\mathbf{B}} & \underset{\text{redução}-\beta}{\to} & \mathsf{M}_1^{\mathbf{B}}[x^{\mathbf{A}}/\,\mathsf{M}_2^{\mathbf{A}}] \equiv \mathsf{N} \\
\Updownarrow \text{Isomorfismo 4.5.2} & & \Updownarrow \text{Isomorfismo 4.5.2} \\
\pi_{\mathbf{M}} \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_{\mathsf{M}_2}\\ \mathsf{A}\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[\mathsf{A}]^{x}\\ \pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{B}\end{matrix}}{\mathsf{A}\supset\mathsf{B}}\,x}{\mathsf{B}} & \underset{\text{redução de FM.}}{\to} & \begin{matrix}\pi_{\mathsf{M}_2}\\ [\mathsf{A}]\\ \pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{B}\end{matrix} \equiv \pi_{\mathbf{N}}\ .
\end{array}$$

<u>PASSO</u>:

<u>CASO 1</u>: $\mathsf{M}^{\mathbf{B}} \equiv (\mathsf{Z}^{\mathbf{A}\supset\mathbf{B}}\mathsf{M}_1^{\mathbf{A}})^{\mathbf{B}}$ e $\mathsf{N} \equiv (\mathsf{Z}^{\mathbf{A}\supset\mathbf{B}}\mathsf{N}_1^{\mathbf{A}})^{\mathbf{B}}$

O seguinte esquema prova este caso:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathsf{M}_1^{\mathbf{A}} \to \mathsf{N}_1^{\mathbf{A}} & \underset{4.3.1\text{–}(2)}{\Rightarrow} & \mathsf{M} \equiv (\mathsf{Z}^{\mathbf{A}\supset\mathbf{B}}\mathsf{M}_1^{\mathbf{A}})^{\mathbf{B}} & \to & (\mathsf{Z}^{\mathbf{A}\supset\mathbf{B}}\mathsf{N}_1^{\mathbf{A}})^{\mathbf{B}} \equiv \mathsf{N} & & \\
\Updownarrow \qquad \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & \longrightarrow & \text{(Isomorfismo 4.5.2)} \\
\underbrace{\begin{matrix}\pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{A}\end{matrix} \to \begin{matrix}\pi_{\mathsf{N}_1}\\ \mathsf{A}\end{matrix}}_{\text{HI: } (\mathsf{M}_1\to\mathsf{N}_1 \iff \pi_{\mathbf{M}_1} \to \pi_{\mathbf{N}_1})} & \underset{1.4}{\Rightarrow} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\pi_{\mathbf{M}} \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{A}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_{\mathsf{Z}}\\ \mathsf{A}\supset\mathsf{B}\end{matrix}}{\mathsf{B}} \to \dfrac{\begin{matrix}\pi_{\mathsf{N}_1}\\ \mathsf{A}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_{\mathsf{Z}}\\ \mathsf{A}\supset\mathsf{B}\end{matrix}}{\mathsf{B}} \equiv \pi_{\mathbf{N}}}_{\mathsf{M} \to \mathsf{N} \iff \pi_{\mathbf{M}} \to \pi_{\mathbf{N}}}} & &
\end{array}$$

<u>CASO 2</u>: $\mathsf{M}^{\mathbf{B}} \equiv (\mathsf{M}_1^{\mathbf{A}\supset\mathbf{B}}\mathsf{Z}^{\mathbf{A}})^{\mathbf{B}}$ e $\mathsf{N} \equiv (\mathsf{N}_1^{\mathbf{A}\supset\mathbf{B}}\mathsf{Z}^{\mathbf{A}})^{\mathbf{B}}$

Analogamente ao caso anterior:

$$
\begin{array}{ccccccc}
M_1^{A\supset B} \rightarrow N_1^{A\supset B} & \underset{4.3.1-(3)}{\Rightarrow} & M \equiv (M_1^{A\supset B} Z^{A})^{B} & \rightarrow & (N_1^{A\supset B} Z^{A})^{B} \equiv N & & \\
\Updownarrow \qquad \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & \longrightarrow & \text{(Isomorfismo 4.5.2)} \\
\underbrace{\overset{\pi_{M_1}}{A \supset B} \rightarrow \overset{\pi_{N_1}}{A \supset B}}_{\text{HI: } (M_1 \rightarrow N_1 \;\Leftrightarrow\; \pi_{M_1} \rightarrow \pi_{N_1})} & \underset{1.4}{\Rightarrow} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\pi_M \equiv \dfrac{\overset{\pi_Z}{A} \quad \overset{\pi_{M_1}}{A \supset B}}{B} \rightarrow \dfrac{\overset{\pi_Z}{A} \quad \overset{\pi_{N_1}}{A \supset B}}{B} \equiv \pi_N}_{M \rightarrow N \;\Leftrightarrow\; \pi_M \rightarrow \pi_N}} & &
\end{array}
$$

CASO 3: $M^{B} \equiv (\lambda x^{B}.M_1^{A})^{B\supset A}$ e $N \equiv (\lambda x^{B}.N_1^{A})^{B\supset A}$

Analogamente aos casos anteriores:

$$
\begin{array}{ccccccc}
M_1^{A} \rightarrow N_1^{A} & \underset{4.3.1-(4)}{\Rightarrow} & M \equiv (\lambda x^{B}.M_1^{A})^{B\supset A} & \rightarrow & (\lambda x^{B}.N_1^{A})^{B\supset A} \equiv N & & \\
\Updownarrow \qquad \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & \longrightarrow & \text{(Isomorfismo 4.5.2)} \\
\underbrace{\overset{\pi_{M_1}}{A} \rightarrow \overset{\pi_{N_1}}{A}}_{\text{HI: } (M_1 \rightarrow N_1 \;\Leftrightarrow\; \pi_{M_1} \rightarrow \pi_{N_1})} & \underset{1.4}{\Rightarrow} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\pi_M \equiv \dfrac{\begin{matrix}[B]^{x}\\ \pi_{M_1}\\ A\end{matrix}}{B \supset A}\,x \rightarrow \dfrac{\begin{matrix}[B]^{x}\\ \pi_{N_1}\\ A\end{matrix}}{B \supset A}\,x \equiv \pi_N}_{M \rightarrow N \;\Leftrightarrow\; \pi_M \rightarrow \pi_N}} & & \blacklozenge
\end{array}
$$

O Teorema 4.5.3 demonstra que temos não apenas um isomorfismo entre termos de $\lambda^{\supset}$ e derivações de $C\supset$, mas também uma equivalência destes dois sistemas como "*rewriting systems*". Isso significa que resultados sobre normalização, unicidade da forma normal e estimativas sobre o comprimento das seqüências de reduções são diretamente intercambiáveis entre os dois sistemas. Na verdade podemos mesmo considerá-los como sendo notações distintas para o mesmo objeto de estudo.

Os sistemas de dedução natural correspondem a uma notação bastante analítica, que prioriza a visualização do encadeamento dos passos lógicos elementares que provam a dedução expressa na derivação. Sua motivação é de origem epistemológica, ou seja, queremos que uma derivação seja a justificativa da veracidade da dedução que ela expressa. Já os sistemas de cálculo lambda tipificado possuem uma notação mais compacta, no entanto extremamente precisa, "que nos diz exatamente como devemos manipular hipóteses abertas e fechadas quando substituímos uma árvore de prova por outra" [37]. Além disso, a notação lambda possui um aspecto computacional bastante útil, pois melhor do que descrever os passos lógicos, ela descreve os objetos funcionais que subjazem a uma prova. Podemos de fato, como sugere **Girard, Lafont & Taylor[1989]**, *p*. 17, interpretar um lambda termo como um programa que efetua os cálculos da dedução que ele representa.

A seguir apresentaremos um isomorfismo de fórmulas como tipos entre o sistema I de dedução natural e um sistema de cálculo lambda tipificado sensivelmente mais complexo que $\lambda^{\supset}$, que chamaremos de λ^{I}. A definição deste isomorfismo nos dará maior clareza a respeito do tipo de complicações introduzidas pelo tratamento de novos conectivos e regras.

4.5.4 DEFINIÇÃO: O Sistema λ^{I}

(1) O Sistema λ^{I} é obtido estendendo $\lambda^{\supset}$ ao conjunto Typ^{I} de tipos definido por:

(*i*) Se t é termo da linguagem de I, então $t \in Typ^{\mathrm{I}}$. [38]

(*ii*) Se A é fórmula da linguagem de I, então $\mathsf{A} \in Typ^{\mathrm{I}}$. [39]

(2) Os termos de λ^{I} são então definidos como:

(*i*) Para todo $i \in \omega$, $v_i^{\mathsf{A}} \in \Lambda_{\mathsf{A}}$ (variáveis sintáticas),

$v_i^{t} \in \Lambda_{t}$ (termos individuais),

$v_i^{a} \in \Lambda_{a}$ (variáveis individuais);

(*ii*) $\mathsf{M} \in \Lambda_{\mathsf{A}\supset\mathsf{B}}$ e $\mathsf{N} \in \Lambda_{\mathsf{A}} \Rightarrow \mathsf{MN} \in \Lambda_{\mathsf{B}}$;

(*iii*) $\mathsf{M} \in \Lambda_{\mathsf{A}}$ e $\mathsf{N} \in \Lambda_{\mathsf{B}} \Rightarrow \boldsymbol{p}(\mathsf{M},\mathsf{N}) \in \Lambda_{\mathsf{A}\wedge\mathsf{B}}$;

(*iv*) $\mathsf{M} \in \Lambda_{\mathsf{A}\wedge\mathsf{B}} \Rightarrow \boldsymbol{p}_1(\mathsf{M}) \in \Lambda_{\mathsf{A}}$ e $\boldsymbol{p}_2(\mathsf{M}) \in \Lambda_{\mathsf{B}}$;

(*v*) $\mathsf{M} \in \Lambda_{\mathsf{A}} \Rightarrow \boldsymbol{k}_0^{\mathsf{B}}(\mathsf{M}) \in \Lambda_{\mathsf{B}\vee\mathsf{A}}$ e $\boldsymbol{k}_1^{\mathsf{B}}(\mathsf{M}) \in \Lambda_{\mathsf{A}\vee\mathsf{B}}$;

(*vi*) $\mathsf{M} \in \Lambda_{\mathsf{A}\vee\mathsf{B}}$, $\mathsf{N}, \mathsf{Z} \in \Lambda_{\mathsf{C}}$ e $x^{\mathsf{A}} \in \Lambda_{\mathsf{A}}$, $y^{\mathsf{B}} \in \Lambda_{\mathsf{B}}$ são variáveis sintáticas $\Rightarrow$

$\Rightarrow E^{\vee}_{x,y}(\mathsf{M},\mathsf{N},\mathsf{Z}) \in \Lambda_{\mathsf{C}}$;

---

[37] Cf. **Troelstra & Schwichtenberg[1996]**, p 26.

[38] Não confundir "*termo da linguagem de I*" com "*termo de λ^{I}*". O primeiro se refere a um termo da linguagem do cálculo de predicados de primeira ordem (uma variável individual, ou uma constante individual, ou um símbolo funcional aplicado a termos). O segundo se refere a um λ^{I}-termo.

[39] Usaremos letras maiúsculas A, B, C, ... com ou sem subíndices para indicar os tipos que correspondem a fórmulas. Para os tipos que correspondem a termos da linguagem de I, usaremos as letras minúsculas *a*, *b*, *c*, ... para indicar os tipos que correspondem à variáveis individuais, e a letra minúscula itálica *t*, possivelmente com subíndices, para indicar os tipos que correspondem a termos compostos (símbolos de função aplicados a termos) da linguagem de I.

(*vii*) $\mathsf{M} \in \Lambda_{\mathsf{B}}$ e $x^{\mathsf{A}} \in \Lambda_{\mathsf{A}}$ é variável sintática $\Rightarrow$ $\lambda x.\mathsf{M} \in \Lambda_{\mathsf{A \supset B}}$;

(*viii*) $\mathsf{M} \in \Lambda_{\mathsf{A(a)}}$ e $x^{a} \in \Lambda_{a}$ é variável individual $\Rightarrow$ $\lambda x.\mathsf{M} \in \Lambda_{\forall x\mathsf{A(x)}}$

tal que: $(y^{\mathsf{B}} \in FV(\mathsf{M})) \Rightarrow$ (a não ocorre livre em B);

(*ix*) $\mathsf{M} \in \Lambda_{\forall x\mathsf{A(x)}}$ e $y^{t} \in \Lambda_{t}$ é termo individual $\Rightarrow$ $\mathsf{M}y \in \Lambda_{\mathsf{A(t)}}$;

(*x*) $\mathsf{M} \in \Lambda_{\mathsf{A(t)}}$ e $y^{t} \in \Lambda_{t}$ é termo individual $\Rightarrow$ $\boldsymbol{p}(\mathsf{M}, y) \in \Lambda_{\exists x\mathsf{A(x)}}$;

(*xi*) $\mathsf{M} \in \Lambda_{\exists x\mathsf{A(x)}}$, $\mathsf{N} \in \Lambda_{\mathsf{C}}$ e $y \in \Lambda_{\mathsf{A(a)}}$ $\Rightarrow$ $E^{\exists}_{\mathsf{y}}(\mathsf{M}, \mathsf{N}) \in \Lambda_{\mathsf{C}}$,

tal que: $z^{\mathsf{B}} \in FV(\mathsf{N})$ e $z \not\equiv y \Rightarrow$ a não ocorre livre em B;

(*xii*) $\mathsf{M} \in \Lambda_{\perp}$ $\Rightarrow$ $E^{\perp}_{\mathsf{A}}(\mathsf{M}) \in \Lambda_{\mathsf{A}}$.

(3) Definimos, assim, $\Lambda^{\mathrm{I}} = \cup\{\Lambda_{\mathsf{A}} \,/\, A \in Typ^{I}\}$.

4.5.4.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Não importa muito, para os nossos objetivos, sabermos exatamente a denotação dos novos operadores introduzidos ($\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{k}^{\mathsf{B}}_{0}$, $\boldsymbol{k}^{\mathsf{B}}_{1}$, $E^{\vee}_{\mathsf{x,y}}$, $E^{\exists}_{\mathsf{y}}$, $E^{\perp}_{\mathsf{A}}$). No entanto, apenas para dar um pouco mais de significado aos termos de λ^{I}, podemos interpretar estes novos operadores como:

- $\boldsymbol{p}(\mathsf{M},\mathsf{N})$ agrupa os termos M^{A} e N^{B} em um par (M,N) de tipo A$\wedge$B;
- $\boldsymbol{p}_1(\mathsf{M})$ é a primeira projeção de um par. Assim, se $\mathsf{M}^{\mathsf{A\wedge B}} \equiv \boldsymbol{p}(\mathsf{M}^{\mathsf{A}}_{1},\mathsf{M}^{\mathsf{B}}_{2})^{\mathsf{A\wedge B}}$, então $\boldsymbol{p}_1(\mathsf{M}) \equiv \mathsf{M}^{\mathsf{A}}_{1}$. Analogamente, $\boldsymbol{p}_2(\mathsf{M}) \equiv \mathsf{M}^{\mathsf{B}}_{2}$.
- $\boldsymbol{k}^{\mathsf{B}}_{0}(\mathsf{M})$ apenas modifica o tipo de M, para cada $\mathsf{B} \in Typ^{I}$, da seguinte forma: $\boldsymbol{k}^{\mathsf{B}}_{0}(\mathsf{M}^{\mathsf{A}}) \equiv \mathsf{M}^{\mathsf{B\vee A}}$. Analogamente, $\boldsymbol{k}^{\mathsf{B}}_{1}(\mathsf{M}^{\mathsf{A}}) \equiv \mathsf{M}^{\mathsf{A\vee B}}$.
- $E^{\vee}_{\mathsf{x,y}}(\mathsf{M},\mathsf{N},\mathsf{Z})$ agrupa o trio $\mathsf{M}^{\mathsf{A\vee B}}$, N^{C}, Z^{C} em um termo do tipo C, e, como veremos adiante, torna ligadas as variáveis x^{A} e y^{B} de N e Z respectivamente. Analogamente, $E^{\exists}_{\mathsf{y}}(\mathsf{M}, \mathsf{N})$ agrupa o par $\mathsf{M}^{\exists x\mathsf{A}}$, N^{C} em um termo do tipo C, tornando ligada a variável y^{A} de N.
- $E^{\perp}_{\mathsf{A}}(\mathsf{M})$, para cada tipo A, muda o tipo de qualquer $\mathsf{M}^{\perp} \in \Lambda_{\perp}$ para M^{A}.

4.5.5 DEFINIÇÃO: Variáveis Livres e Ligadas

O conjunto das variáveis livres em $\mathsf{M} \in \Lambda^{\mathrm{I}}$ (denotado por $FV(\mathsf{M})$) é definido indutivamente como segue:

(*i*) $FV(x) = \{x\}$;

(*ii*) $FV(\mathsf{MN}) = FV(\boldsymbol{p}(\mathsf{M},\mathsf{N})) = FV(\mathsf{M}) \cup FV(\mathsf{N})$;

(iii) $FV(\mathsf{M}y^t) = FV(\boldsymbol{p}(\mathsf{M},y^t)) = FV(\boldsymbol{k}_0^{\mathsf{B}}(\mathsf{M})) = FV(\boldsymbol{k}_1^{\mathsf{B}}(\mathsf{M})) = FV(E_{\mathsf{A}}^{\perp}(\mathsf{M})) = FV(\mathsf{M})$;

(iv) $FV((\lambda x^{\mathsf{a}}.\mathsf{M}^{\mathsf{A(a)}})^{\forall x \mathsf{A(x)}}) = FV(\mathsf{M})$;

(v) $FV((\lambda x^{\mathsf{A}}.\mathsf{M}^{\mathsf{B}})^{\mathsf{A}\supset\mathsf{B}}) = FV(\mathsf{M}) - \{x\}$;

(vi) $FV(E_{\mathsf{x},\mathsf{y}}^{\vee}(\mathsf{M},\mathsf{N},\mathsf{Z})) = FV(\mathsf{M}) \cup ((FV(\mathsf{N}) - \{x\}) \cup ((FV(\mathsf{Z}) - \{y\}))$;

(vii) $FV(E_{\mathsf{y}}^{\exists}(\mathsf{M},\mathsf{N})) = FV(\mathsf{M}) \cup ((FV(\mathsf{N}) - \{y\})$.

4.5.5.1 OBSERVAÇÃO:

Note que os Itens (v) a (vii) acima descrevem todos os casos em que ocorrem variáveis ligadas. Além do operador λ, os operadores $E_{\mathsf{x},\mathsf{y}}^{\vee}$ e $E_{\mathsf{y}}^{\exists}$ também ligam variáveis em λ^{I}. Estes operadores corresponderão, em dedução natural, às regras ($\vee$E) e ($\exists$E), que também cortam hipóteses da derivação. Veremos mais adiante que os operadores que ligam variáveis são de grande importância em questões referentes a normalização.

4.5.6 DEFINIÇÃO: Isomorfismo de Fórmulas como Tipos entre λ^{I} e I

O *isomorfismo de fórmulas como tipos* entre λ^{I} e I é obtido relacionando cada termo $\mathsf{M} \in \Lambda^{\mathrm{I}}$ a uma derivação π_{M} de I, indutivamente, da seguinte forma:

(1) $\mathsf{M} \equiv x^{\mathsf{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{\mathsf{M}} \equiv \mathsf{A}$;

(2) $\mathsf{M} \equiv (\mathsf{M}_1^{\mathsf{B}\supset\mathsf{A}}\mathsf{M}_2^{\mathsf{B}})^{\mathsf{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{\mathsf{M}} \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_{\mathsf{M}_2} & \pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{B} & \mathsf{B}\supset\mathsf{A}\end{matrix}}{\mathsf{A}}$ ($\supset$E);

(3) $\mathsf{M} \equiv (\lambda x^{\mathsf{A}}.\mathsf{M}_1^{\mathsf{B}})^{\mathsf{A}\supset\mathsf{B}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{\mathsf{M}} \equiv \dfrac{\begin{matrix}[\mathsf{A}]^{x}\\ \pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{B}\end{matrix}}{\mathsf{A}\supset\mathsf{B}}\,x$ ($\supset$I);

(4) $\mathsf{M} \equiv \boldsymbol{p}(\mathsf{M}_1^{\mathsf{A}},\mathsf{M}_2^{\mathsf{B}})^{\mathsf{A}\wedge\mathsf{B}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{\mathsf{M}} \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_{\mathsf{M}_1} & \pi_{\mathsf{M}_2}\\ \mathsf{A} & \mathsf{B}\end{matrix}}{\mathsf{A}\wedge\mathsf{B}}$ ($\wedge$I);

(5) $\mathsf{M} \equiv \boldsymbol{p}_1(\mathsf{M}_1^{\mathsf{A}\wedge\mathsf{B}})^{\mathsf{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{\mathsf{M}} \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{A}\wedge\mathsf{B}\end{matrix}}{\mathsf{A}}$ ($\wedge$Ed);

$$(6)\ \mathsf{M} \equiv \boldsymbol{p}_2(\mathsf{M}_1^{\mathsf{A}\wedge\mathsf{B}})^{\mathsf{B}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{\mathsf{M}} \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{A}\wedge\mathsf{B}\end{array}}{\mathsf{B}}\ (\wedge \mathrm{Ee});$$

$$(7)\ \mathsf{M} \equiv \boldsymbol{k}_0^{\mathsf{B}}(\mathsf{M}_1^{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}\vee\mathsf{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{\mathsf{M}} \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{A}\end{array}}{\mathsf{B}\vee\mathsf{A}}\ (\vee \mathrm{Id});$$

$$(8)\ \mathsf{M} \equiv \boldsymbol{k}_1^{\mathsf{B}}(\mathsf{M}_1^{\mathsf{A}})^{\mathsf{A}\vee\mathsf{B}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{\mathsf{M}} \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{A}\end{array}}{\mathsf{A}\vee\mathsf{B}}\ (\vee \mathrm{Ie});$$

$$(9)\ \mathsf{M} \equiv E^{\vee}_{\mathsf{xA},\,\mathsf{yB}}(\mathsf{M}_1^{\mathsf{A}\vee\mathsf{B}}, \mathsf{M}_2^{\mathsf{C}}, \mathsf{M}_3^{\mathsf{C}})^{\mathsf{C}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{\mathsf{M}} \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\\ \pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{A}\vee\mathsf{B}\end{array} \quad \begin{array}{c}[\mathsf{A}]^{\mathsf{x}}\\ \pi_{\mathsf{M}_2}\\ \mathsf{C}\end{array} \quad \begin{array}{c}[\mathsf{B}]^{\mathsf{y}}\\ \pi_{\mathsf{M}_3}\\ \mathsf{C}\end{array}}{\mathsf{C}}\,{\scriptstyle \mathsf{x},\,\mathsf{y}}\ (\vee \mathrm{E});$$

$$(10)\ \mathsf{M} \equiv (\lambda x^{\mathsf{a}}.\mathsf{M}_1^{\mathsf{A(a)}})^{\forall\mathsf{xA(x)}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{\mathsf{M}} \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{A(a)}\end{array}}{\forall_{\mathsf{x}}\mathsf{A(x)}}\ (\forall \mathrm{I})$$

$$(11)\ \mathsf{M} \equiv (\mathsf{M}_1^{\forall\mathsf{xA(x)}}\, y^{t})^{\mathsf{A}(t)} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{\mathsf{M}} \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{\mathsf{M}_1}\\ \forall_{\mathsf{x}}\mathsf{A(x)}\end{array}}{\mathsf{A(t)}}\ (\forall \mathrm{E});$$

$$(12)\ \mathsf{M} \equiv \boldsymbol{p}(\mathsf{M}_1^{\mathsf{A}(t)}, y^{t})^{\exists\mathsf{xA(x)}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{\mathsf{M}} \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{A(t)}\end{array}}{\exists_{\mathsf{x}}\mathsf{A(x)}}\ (\exists \mathrm{I});$$

$$(13)\ \mathsf{M} \equiv E^{\exists}_{\mathsf{yA(a)}}(\mathsf{M}_1^{\exists\mathsf{xA(x)}}, \mathsf{M}_2^{\mathsf{C}})^{\mathsf{C}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{\mathsf{M}} \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\\ \pi_{\mathsf{M}_1}\\ \exists_{\mathsf{x}}\mathsf{A(x)}\end{array} \quad \begin{array}{c}[\mathsf{A(a)}]^{\mathsf{y}}\\ \pi_{\mathsf{M}_2}\\ \mathsf{C}\end{array}}{\mathsf{C}}\,{\scriptstyle \mathsf{y}}\ (\exists \mathrm{E});$$

$$(14)\ \mathsf{M} \equiv E^{\perp}_{\mathsf{A}}(\mathsf{M}_1^{\perp})^{\mathsf{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{\mathsf{M}} \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{\mathsf{M}_1}\\ \perp\end{array}}{\mathsf{A}}\,.$$

4.5.6.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) É imediato, por inspeção na definição acima, que as variáveis sintáticas de um termo M correspondem às hipóteses da derivação π_{M}. Além disso, pela Definição 4.5.5 e pelos Itens (3), (9) e (13) acima, não é difícil ver que as variáveis livres de M correspondem às hipóteses abertas de π_{M}, e as variáveis ligadas de M correspondem às hipóteses cortadas de π_{M}.

(*b*) Uma aplicação da regra ($\vee$E) que não corta hipóteses, $\dfrac{\overset{\pi_{\mathsf{M}_1}}{\mathsf{A} \vee \mathsf{B}} \quad \overset{\pi_{\mathsf{M}_2}}{\mathsf{C}} \quad \overset{\pi_{\mathsf{M}_3}}{\mathsf{C}}}{\mathsf{C}}$, corresponde a um termo $E^{\vee}_{x\mathsf{A},\,y\mathsf{B}}(\mathsf{M}_1^{\mathsf{A}\vee\mathsf{B}}, \mathsf{M}_2^{\mathsf{C}}, \mathsf{M}_3^{\mathsf{C}})^{\mathsf{C}}$, no qual $x \notin FV(\mathsf{M}_2)$ e $y \notin FV(\mathsf{M}_3)$. Analogamente, para ($\exists$E) temos:

$$\pi_{\mathsf{M}} \equiv \dfrac{\overset{\pi_{\mathsf{M}_1}}{\exists_x \mathsf{A}(x)} \quad \overset{\pi_{\mathsf{M}_2}}{\mathsf{C}}}{\mathsf{C}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{M} \equiv E^{\exists}_{y\mathsf{A}(a)}(\mathsf{M}_1^{\exists x\mathsf{A}(x)}, \mathsf{M}_2^{\mathsf{C}})^{\mathsf{C}} \text{ tal que } y \notin FV(\mathsf{M}_2).$$

(*c*) Note, pelo Item (10) acima, que a restrição apresentada em 4.5.4-(2)(*viii*) é exatamente equivalente à Restrição 1.2.6-(*a*) para a regra ($\forall$I). Da mesma forma, pelo Item (13) acima, temos que a restrição apresentada em 4.5.4-(2)(*xi*) é equivalente à Restrição 1.2.6-(*b*) para a regra ($\exists$E).

(*d*) Para podermos relacionar reduções de *FM* em I com reduções-β em λ^{I}, temos que ampliar o item 1 Definição 4.3.1 de redução-β para tantas contrações quantas forem as diferentes formas de redução em I. Tais formas de redução, juntamente com o isomorfismo que acabamos de estabelecer, nos mostram exatamente as contrações que temos que definir como primitivas em λ^{I} para ampliar adequadamente a definição de redução-β, o que faremos a seguir.

4.5.7 DEFINIÇÃO: redução-β em λ^{I}

Definimos a redução-β de $\mathsf{M} \in \Lambda^{\mathrm{I}}$ a um termo $\mathsf{N} \in \Lambda^{\mathrm{I}}$ (notação: $\mathsf{M} \to \mathsf{N}$) por indução na complexidade de M, da seguinte forma:

(1) BASE:

Contrações:

(1.1) $(\lambda x.\mathsf{M}_1)\mathsf{M}_2 \quad \to \quad \mathsf{M}_1[x/\,\mathsf{M}_2]$;

(1.2) $\boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{p}(\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2)) \quad \to \quad \mathsf{M}_i \quad (i= 1,2)$;

(1.3) $E^{\vee}_{x,y}((k^{B}_{1}(M_1)), M_2, M_3) \quad \rightarrow \quad M_2[x/ M_1]$;

(1.4) $E^{\vee}_{x,y}((k^{A}_{0}(M_1)), M_2, M_3) \quad \rightarrow \quad M_3[y/ M_1]$;

(1.5) $(\lambda x.M_1^{A(x)})^{\forall x A(x)} y^{t} \quad \rightarrow \quad M_1\langle a/ t\rangle$;

(1.6) $E^{\exists}_{y}(p(M_1^{A(t)}, z^{t})^{\exists x A(x)}, M_2) \quad \rightarrow \quad M_2[y/ M_1\langle t/ a\rangle]$;

Simplificações:

(1.7) $E^{\vee}_{x1,x2}(N, M_1, M_2) \quad \rightarrow \quad M_i \qquad (\text{se } x_i \notin FV(M_i)) \ \ (i= 1,2)$;

(1.8) $E^{\exists}_{y}(M_1, M_2) \quad \rightarrow \quad M_2 \qquad (\text{se } y \notin FV(M_2)$;

Reduções Permutativas:

(1.9) $f[E^{\exists}_{y}(M_1,M_2)] \quad \rightarrow \quad E^{\exists}_{y}(M_1, f[M_2])$;

(1.10) $f[E^{\vee}_{y1,y2}(M_1,M_2,M_3)] \quad \rightarrow \quad E^{\vee}_{y1,y2}(M_1, f[M_2], f[M_3])$;

(2) PASSO:

Seja $M \equiv o_1(M_1)$ tal que o_1 é algum operador unário de λ^{I}. Ou seja, $o_1(M_1)$ é $\lambda x.M_1$ ou $p_i(M_1)$ ou $E^{\perp}(M_1)$ ou $k^{A}_{i}(M_1)$ ou $M_1 y^{t}$ ou $p(M_1,z^{t})$. Então:

(2.1) $M_1 \rightarrow N_1 \Rightarrow o_1(M_1) \rightarrow o_1(N_1)$.

Seja $M \equiv o_2(M_1,M_2)$ tal que o_2 é algum operador binário de λ^{I}. Ou seja, $o_2(M_1,M_2)$ é M_1M_2 ou $p(M_1,M_2)$ ou $E^{\exists}_{y}(M_1,M_2)$. Então:

(2.2) $M_1 \rightarrow N_1 \Rightarrow o_2(M_1,M_2) \rightarrow o_2(N_1,M_2)$;

(2.3) $M_2 \rightarrow N_2 \Rightarrow o_2(M_1,M_2) \rightarrow o_2(M_1,N_2)$.

Seja $M \equiv E^{\vee}_{x,y}(M_1,M_2,M_3)$. Então:

(2.4) $M_1 \rightarrow N_1 \Rightarrow E^{\vee}_{x,y}(M_1,M_2,M_3) \rightarrow E^{\vee}_{x,y}(N_1,M_2,M_3)$;

(2.5) $M_2 \rightarrow N_2 \Rightarrow E^{\vee}_{x,y}(M_1,M_2,M_3) \rightarrow E^{\vee}_{x,y}(M_1,N_2,M_3)$;

(2.6) $M_3 \rightarrow N_3 \Rightarrow E^{\vee}_{x,y}(M_1,M_2,M_3) \rightarrow E^{\vee}_{x,y}(M_1,M_2,N_3)$.

4.5.7.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) A notação $M\langle t_1/ t_2\rangle$, usada nos Itens (1.5) e (1.6) acima, denota uma substituição que opera apenas nos tipos de todos os subtermos de M, trocando o termo da linguagem de I, t_1, por t_2. Ela é equivalente, para o caso de dedução natural, à notação $\pi^{t_1}_{t_2}$.

(*b*) As simplificações (1.7) e (1.8) correspondem às simplificações que podemos fazer em regras de ($\exists$E) e ($\vee$E) que não eliminam hipóteses da derivação.

(c) Nas reduções permutativas ((1.9) e (1.10)), f representa um operador de eliminação $E^{\vee}_{x_1,x_2}$ ou $E^{\exists}_{x}$, no qual o argumento destacado entre colchetes é sua premissa maior. Assim, $f[\mathsf{M}]$, por exemplo, abrevia $E^{\vee}_{x_1,x_2}(\mathsf{M},\mathsf{N},\mathsf{Z})$ ou $E^{\exists}_{x}(\mathsf{M},\mathsf{N})$.

O teorema seguinte demonstra a equivalência entre redução de *FM* em I e reduções-β em λ^{I}. A prova é imediata a partir do Isomorfismo 4.5.6 e da Definição 4.5.7 de redução-β em λ^{I}. Na verdade, como dissemos na Observação 4.5.6.1-(d), os casos da base da Definição 4.5.7 foram propositadamente definidos de modo que a equivalência entre reduções se estabeleça.

4.5.8 TEOREMA: Equivalência entre redução de *FM* em I e redução-β em λ^{I}

Para M e N λ^{I}-termos, e π_{M} e π_{N} as respectivas I-derivações obtidas pelo Isomorfismo 4.5.6 acima, temos: $\mathsf{M} \to \mathsf{N} \iff \pi_{\mathsf{M}} \to \pi_{\mathsf{N}}$.

PROVA: Por indução na complexidade de M

BASE:

Caso 1: $\mathsf{M} \equiv (\lambda x.\mathsf{M}_1)\mathsf{M}_2 \underset{4.5.7\text{–}(1.1)}{\Rightarrow} \mathsf{N} \equiv \mathsf{M}_1[x/\mathsf{M}_2]$

Idêntico ao caso de $\lambda^{\supset}$ (base do Teorema 4.5.3).

Caso 2: $\mathsf{M} \equiv \boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{p}(\mathsf{M}_1^{\mathsf{A}_1},\mathsf{M}_2^{\mathsf{A}_2}) \underset{4.5.7\text{–}(1.2)}{\Rightarrow} \mathsf{N} \equiv \mathsf{M}_i^{\mathsf{A}_i}$ (i= 1,2)

O seguinte esquema demonstra a equivalência para este caso:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M} \equiv \boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{p}(\mathsf{M}_1^{\mathsf{A}_1},\mathsf{M}_2^{\mathsf{A}_2}) & \underset{4.5.7\text{–}(1.2)}{\to} & \mathsf{M}_i^{\mathsf{A}_i} \equiv \mathsf{N} \quad (i= 1,2) \\ \Updownarrow_{4.5.6} & & \Updownarrow_{4.5.6} \\ \pi_{\mathsf{M}} \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_{\mathsf{M}_1} & \pi_{\mathsf{M}_2} \\ \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_2\end{matrix}}{\mathsf{A}_1 \wedge \mathsf{A}_2}}{\mathsf{A}_i} & \underset{1.4.1}{\to} & \begin{matrix}\pi_{\mathsf{M}_i} \\ \mathsf{A}_i\end{matrix} \equiv \pi_{\mathsf{N}} \quad (i= 1, 2) \end{array}$$

Caso 3: $\mathsf{M} \equiv ((\lambda x^{a}.\mathsf{M}_1^{\mathsf{A}(a)})^{\forall x\mathsf{A}(x)} y^{t})^{\mathsf{A}(t)} \underset{4.5.7\text{–}(1.5)}{\Rightarrow} \mathsf{N} \equiv \langle \mathsf{M}_1[a/t]\rangle^{\mathsf{A}(t)}$

O seguinte esquema demonstra a equivalência para este caso:

$$M \equiv ((\lambda x^{a}.M_1^{A(a)})^{\forall x A(x)}\, y^{t})^{A(t)} \quad \underset{4.5.7-(1.5)}{\longrightarrow} \quad (M_1\langle a/t\rangle)^{A(t)} \equiv N$$

$$\Updownarrow_{4.5.6} \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow_{4.5.6}$$

$$\pi_{M} \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_{M_1}\\ A(a)\end{matrix}}{\forall_x A(x)}}{A(t)} \quad \underset{1.4.4}{\longrightarrow} \quad \begin{matrix}(\pi_{M_1})^{a}_{t}\\ A(t)\end{matrix} \equiv \pi_{N}$$

<u>Caso 4</u>: $M \equiv E^{\vee}_{xA,\,yB}((k_1^{B}(M_1^{A}))^{A\vee B}, M_2^{C}, M_3^{C})^{C} \underset{4.5.7-(1.3)}{\Rightarrow} N \equiv M_2^{C}[x^{A}/M_1^{A}]$

O seguinte esquema demonstra a equivalência para este caso:

$$M \equiv E^{\vee}_{xA,\,yB}((k_1^{B}(M_1^{A}))^{A\vee B}, M_2^{C}, M_3^{C})^{C} \quad \underset{4.5.7-(1.3)}{\longrightarrow} \quad M_2^{C}[x^{A}/M_1^{A}] \equiv N$$

$$\Updownarrow_{4.5.6} \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow_{4.5.6}$$

$$\pi_{M} \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_{M_i}\\ A\end{matrix}}{A \vee B} \quad \begin{matrix}[A]^{x}\\ \pi_{M_2}\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]^{y}\\ \pi_{M_3}\\ C\end{matrix}}{C}\, x, y \quad \underset{1.4.5}{\longrightarrow} \quad \begin{matrix}\pi_{M_1}\\ [A]\\ \pi_{M_2}\\ C\end{matrix} \equiv \pi_{N}$$

<u>Caso 5</u>: $M \equiv E^{\vee}_{xA,\,yB}((k_0^{A}(M_1^{B}))^{A\vee B}, M_2^{C}, M_3^{C})^{C} \underset{4.5.7-(1.4)}{\Rightarrow} N \equiv M_3^{C}[y^{B}/M_1^{B}]$

O seguinte esquema demonstra a equivalência para este caso:

$$M \equiv E^{\vee}_{xA,\,yB}((k_0^{A}(M_1^{B}))^{A\vee B}, M_2^{C}, M_3^{C})^{C} \quad \underset{4.5.7-(1.4)}{\longrightarrow} \quad M_3^{C}[y^{B}/M_1^{B}] \equiv N$$

$$\Updownarrow_{4.5.6} \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow_{4.5.6}$$

$$\pi_{M} \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_{M_i}\\ B\end{matrix}}{A \vee B} \quad \begin{matrix}[A]^{x}\\ \pi_{M_2}\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]^{y}\\ \pi_{M_3}\\ C\end{matrix}}{C}\, x, y \quad \underset{1.4.5}{\longrightarrow} \quad \begin{matrix}\pi_{M_1}\\ [B]\\ \pi_{M_3}\\ C\end{matrix} \equiv \pi_{N}$$

<u>Caso 6</u>: $M \equiv E^{\exists}_{yA(a)}(p(M_1^{A(t)}, z^{t})^{\exists x A(x)}, M_2^{C})^{C} \underset{4.5.7-(1.6)}{\Rightarrow} N \equiv M_2^{C}[y^{A(a)}/(M_1[t/a])^{A(a)}]$

O seguinte esquema demonstra a equivalência para este caso:

$$\mathsf{M} \equiv E^{\exists}_{y^{\mathbf{A(a)}}}(p(\mathsf{M}_1^{\mathbf{A}(t)}, z^t)^{\exists x\mathbf{A(x)}}, \mathsf{M}_2^{\mathbf{C}})^{\mathbf{C}} \underset{4.5.7-(1.6)}{\rightarrow} \mathsf{M}_2^{\mathbf{C}}[y^{\mathbf{A(a)}} / (\mathsf{M}_1[t/a])^{\mathbf{A(a)}}] \equiv \mathsf{N}$$

$$\Updownarrow_{4.5.6} \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow_{4.5.6}$$

$$\pi_{\mathbf{M}} \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\pi_{M_1}\\ \mathsf{A}(t)\end{array}}{\exists x\mathsf{A}(x)} \quad \begin{array}{c}[\mathsf{A}(a)]^y\\ \pi_{M_2}\\ \mathsf{C}\end{array}}{\mathsf{C}}\, y \qquad \underset{1.4.7}{\rightarrow} \qquad \begin{array}{c}(\pi_{M_1})^t_a\\ [\mathsf{A}(a)]\\ \pi_{M_2}\\ \mathsf{C}\end{array} \equiv \pi_{\mathbf{N}}$$

Caso 7: $\mathsf{M} \equiv E^{\vee}_{x^{\mathbf{A}}, y^{\mathbf{B}}}(\mathsf{M}_1^{\mathbf{A\vee B}}, \mathsf{M}_2^{\mathbf{C}}, \mathsf{M}_3^{\mathbf{C}})^{\mathbf{C}} \underset{4.5.7-(1.7)}{\Rightarrow} \mathsf{M}_i^{\mathbf{C}} \equiv \mathsf{N} \quad (x_i \notin FV(\mathsf{M}_i))\ \ (i = 1,2)$

O seguinte esquema demonstra a equivalência para este caso:

$$\mathsf{M} \equiv E^{\vee}_{x_2, x_3}(\mathsf{M}_1^{\mathbf{A\vee B}}, \mathsf{M}_2^{\mathbf{C}}, \mathsf{M}_3^{\mathbf{C}})^{\mathbf{C}} \underset{4.5.7-(1.7)}{\rightarrow} \mathsf{M}_i^{\mathbf{C}} \equiv \mathsf{N} \quad (x_i \notin FV(\mathsf{M}_i))\ \ (i = 1,2)$$

$$\Updownarrow_{4.5.6} \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow_{4.5.6}$$

$$\pi_{\mathbf{M}} \equiv \cfrac{\begin{array}{c}\pi_{M_1}\\ \mathsf{A} \vee \mathsf{B}\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_{M_2}\\ \mathsf{C}\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_{M_3}\\ \mathsf{C}\end{array}}{\mathsf{C}} \qquad \underset{1.4.6}{\rightarrow} \qquad \begin{array}{c}\pi_{M_i}\\ \mathsf{C}\end{array} \equiv \pi_{\mathbf{N}}$$

Caso 8: $\mathsf{M} \equiv E^{\exists}_{y}(\mathsf{M}_1^{\exists x\mathbf{A(x)}}, \mathsf{M}_2^{\mathbf{C}})^{\mathbf{C}} \underset{4.5.7-(1.8)}{\Rightarrow} \mathsf{M}_2^{\mathbf{C}} \equiv \mathsf{N} \qquad$ (se $y \notin FV(\mathsf{M}_2)$)

O seguinte esquema demonstra a equivalência para este caso:

$$\mathsf{M} \equiv E^{\exists}_{y}(\mathsf{M}_1^{\exists x\mathbf{A(x)}}, \mathsf{M}_2^{\mathbf{C}})^{\mathbf{C}} \underset{4.5.7-(1.8)}{\rightarrow} \mathsf{M}_2^{\mathbf{C}} \equiv \mathsf{N} \qquad (\text{se } y \notin FV(\mathsf{M}_2))$$

$$\Updownarrow_{4.5.6} \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow_{4.5.6}$$

$$\pi_{\mathbf{M}} \equiv \cfrac{\begin{array}{c}\pi_{M_1}\\ \exists x\mathsf{A}(x)\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_{M_2}\\ \mathsf{C}\end{array}}{\mathsf{C}} \qquad \underset{1.4.8}{\rightarrow} \qquad \begin{array}{c}\pi_{M_2}\\ \mathsf{C}\end{array} \equiv \pi_{\mathbf{N}}$$

Caso 9: $\mathsf{M} \equiv f[E^{\exists}_{y}(\mathsf{M}_1^{\exists x\mathbf{A(x)}}, \mathsf{M}_2^{\mathbf{C}})^{\mathbf{C}}]^{\mathbf{D}} \underset{4.5.7-(1.9)}{\Rightarrow} E^{\exists}_{y}(\mathsf{M}_1^{\exists x\mathbf{A(x)}}, f[\mathsf{M}_2^{\mathbf{C}}]^{\mathbf{D}})^{\mathbf{D}} \equiv \mathsf{N}$

O seguinte esquema demonstra a equivalência para este caso:

$$\mathsf{M} \equiv f[E^{\exists}_{\mathbf{y}}(\mathsf{M}_1^{\exists x A(x)}, \mathsf{M}_2^{\mathsf{C}})^{\mathsf{C}}]^{\mathsf{D}} \underset{4.5.7-(1.9)}{\rightarrow} E^{\exists}_{\mathbf{y}}(\mathsf{M}_1^{\exists x A(x)}, f[\mathsf{M}_2^{\mathsf{C}}]^{\mathsf{D}})^{\mathsf{D}} \equiv \mathsf{N}$$

$$\Updownarrow_{4.5.6} \qquad\qquad\qquad \Updownarrow_{4.5.6}$$

$$\pi_{\mathsf{M}} \equiv \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_{M_1}}{\exists_x A(x)} \quad \overset{\pi_{M_2}}{C}}{C} \qquad \Sigma}{D} \underset{1.4.9}{\rightarrow} \dfrac{\overset{\pi_{M_1}}{\exists_x A(x)} \qquad \dfrac{\overset{\pi_{M_2}}{C} \quad \Sigma}{D}}{D} \equiv \pi_{\mathsf{N}}$$

onde C, conseqüência de ($\exists$E) de π_{M}, é premissa maior de regra de eliminação da qual Σ representa as subárvores das premissas menores.

<u>Caso 10</u>: $\mathsf{M} \equiv f[E^{\vee}_{\mathbf{y1},\mathbf{y2}}(\mathsf{M}_1^{\mathsf{A}\vee\mathsf{B}}, \mathsf{M}_2^{\mathsf{C}}, \mathsf{M}_3^{\mathsf{C}})^{\mathsf{C}}]^{\mathsf{D}} \underset{4.5.7-(1.10)}{\Rightarrow} E^{\vee}_{\mathbf{y1},\mathbf{y2}}(\mathsf{M}_1^{\mathsf{A}\vee\mathsf{B}}, f[\mathsf{M}_2^{\mathsf{C}}]^{\mathsf{D}}, f[\mathsf{M}_3^{\mathsf{C}}]^{\mathsf{D}})^{\mathsf{D}} \equiv \mathsf{N}$

O seguinte esquema demonstra a equivalência para este caso:

$$\mathsf{M} \equiv f[E^{\vee}_{\mathbf{y1},\mathbf{y2}}(\mathsf{M}_1^{\mathsf{A}\vee\mathsf{B}}, \mathsf{M}_2^{\mathsf{C}}, \mathsf{M}_3^{\mathsf{C}})^{\mathsf{C}}]^{\mathsf{D}} \underset{4.5.7-(1.10)}{\rightarrow} E^{\vee}_{\mathbf{y1},\mathbf{y2}}(\mathsf{M}_1^{\mathsf{A}\vee\mathsf{B}}, f[\mathsf{M}_2^{\mathsf{C}}]^{\mathsf{D}}, f[\mathsf{M}_3^{\mathsf{C}}]^{\mathsf{D}})^{\mathsf{D}} \equiv \mathsf{N}$$

$$\Updownarrow_{4.5.6} \qquad\qquad\qquad \Updownarrow_{4.5.6}$$

$$\pi_{\mathsf{M}} \equiv \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_{M_1}}{A \vee B} \quad \overset{\pi_{M_2}}{C} \quad \overset{\pi_{M_3}}{C}}{C} \qquad \Sigma}{D} \underset{1.4.10}{\rightarrow} \dfrac{\overset{\pi_{M_1}}{A \vee B} \qquad \dfrac{\overset{\pi_{M_2}}{C} \quad \Sigma}{D} \qquad \dfrac{\overset{\pi_{M_3}}{C} \quad \Sigma}{D}}{D} \equiv \pi_{\mathsf{N}}$$

onde C, conseqüência de ($\vee$E) de π_{M}, é premissa maior de regra de eliminação da qual Σ representa as subárvores das premissas menores.

<u>PASSO</u>:

Apresentaremos a solução para o caso em que M é como em 4.5.7.(2.1) ($\mathsf{M} \equiv o_1(\mathsf{M}_1)$). A solução para os demais casos (2.2) a (2.6) é análoga a esta, usando as propriedades das reduções de *FM*.

<u>Caso 1</u>: $\mathsf{M} \equiv o_1(\mathsf{M}_1)$

O seguinte esquema demonstra a solução para este caso:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathsf{M}_1^{\mathsf{A}} \to \mathsf{N}_1^{\mathsf{A}} & \underset{4.5.7-(2.1)}{\Rightarrow} & \mathsf{M} \equiv o_1(\mathsf{M}_1^{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}} & \to & o_1(\mathsf{N}_1^{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}} \equiv \mathsf{N} & & \\
\Updownarrow \quad \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & \longrightarrow & \text{(Isomorfismo 4.5.6)} \\
\underbrace{\begin{array}{c}\pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{A}\end{array} \to \begin{array}{c}\pi_{\mathsf{N}_1}\\ \mathsf{A}\end{array}}_{\text{HI: } (\mathsf{M}_1 \to \mathsf{N}_1 \;\Leftrightarrow\; \pi_{\mathsf{M}_1} \to \pi_{\mathsf{N}_1})} & \underset{1.4}{\Rightarrow} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\pi_{\mathsf{M}} \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{\mathsf{M}_1}\\ \mathsf{A}\end{array}}{\mathsf{B}} \quad \to \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{\mathsf{N}_1}\\ \mathsf{A}\end{array}}{\mathsf{B}} \equiv \pi_{\mathsf{N}}}_{\mathsf{M} \to \mathsf{N} \;\Leftrightarrow\; \pi_{\mathsf{M}} \to \pi_{\mathsf{N}}}} & & \blacklozenge
\end{array}
$$

4.5.9 Transferência de Provas de Normalização Forte entre Sistemas

Podemos separar os itens da base da Definição 4.5.7 de redução-β em dois grupos: o grupo A, contendo os Itens (1.2) e (1.5), e o grupo B, contendo os demais itens ((1.1), (1.3), (1.4) e (1.6)). A diferença entre os dois grupos é que nas reduções do grupo A não ocorrem substituições de variáveis livres por subtermos, enquanto que em todas as reduções do grupo B estas substituições ocorrem. Uma conseqüência imediata deste fato é que o comprimento do *contractum*, para o caso de uma redução do grupo B, pode ser maior que o comprimento do *redex*. Isto se dá quando existe mais de uma ocorrência livre da variável que está sendo substituída. Por exemplo, o comprimento de $\mathsf{M}[x/\mathsf{N}]$ é certamente maior que o comprimento de $(\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N}$, se M possuir mais de uma ocorrência livre de x e se o comprimento de N for maior que 1. É devido a este fato que os resultados sobre normalização para sistemas de cálculo lambda tipificado não são triviais.

Um sistema que possua todas as reduções no grupo A é trivialmente normalizável, pois o comprimento do redex, ou no máximo este número multiplicado por alguma constante preestabelecida, será sempre um limitante superior para o comprimento do contractum. Dessa forma, nenhuma seqüência de redução poderia ter mais passos que o comprimento do termo inicial multiplicado por esta constante. Neste sentido, a passagem de um resultado de normalização forte de $\lambda^{\supset}$ para o sistema $\lambda^{\mathsf{C}'}$, onde $\lambda^{\mathsf{C}'}$ é a versão em cálculo lambda tipificado do sistema de dedução natural C', seria imediata. Vejamos porque.

Os conectivos primitivos de C' são $\supset$, $\wedge$ e $\forall$. Mas pelo Isomorfismo 4.5.6, as fórmulas máximas cujos conectivos principais são $\wedge$ e $\forall$ correspondem, respectivamente, às reduções (1.2) e (1.5) da Definição 4.5.7. Tais reduções pertencem ao grupo A e portanto não representam problemas nas provas de normalização forte. Dessa forma, o único caso não trivial a resolver em uma prova de normalização forte para $\lambda^{\mathsf{C}'}$ é o caso da $\supset$; e este é exatamente o caso presente em $\lambda^{\supset}$. Portanto, a noção de fórmulas como tipos, mais uma argumentação simples a respeito dos conectivos $\wedge$ e $\forall$, transforma provas de normalização forte para $\lambda^{\supset}$ em provas de normalização forte para C'. No entanto, não podemos transportar diretamente provas de normalização forte para $\lambda^{\supset}$ em provas de normalização forte para os sistemas de dedução natural M, I e C, porque além do caso não trivial de $\supset$, todos eles têm que tratar também dos casos de $\exists$ e $\vee$, que correspondem a reduções do grupo B. Com relação a questões de normalização, tais reduções possuem seus problemas específicos que exigem soluções específicas. Assim como em dedução natural, as soluções para o conectivo $\supset$ não são diretamente válidas para os casos de $\exists$ e $\vee$.

Assim, podemos dizer que os artigos que veremos adiante, que entre outras coisas estabelecem normalização forte para $\lambda^{\supset}$, podem ser vistos como contendo provas de normalização forte para C', mas não para M, I e C. Neste sentido, a extensão não trivial de nosso resultado para estes sistemas, que apresentaremos no Capítulo VII, representa um avanço em relação ao alcance dos resultados destes artigos. Na pior das hipóteses, alguma argumentação tem que ser acrescida a eles para que provem de fato a normalização forte de λ^{I} e assim possam representar provas de normalização forte para M, I e C. A julgar pela complexidade do sistema λ^{I} com relação a $\lambda^{\supset}$, e pela complexidade da definição de redução-β em λ^{I} com relação à definição de redução-β em $\lambda^{\supset}$, tal argumentação não parece ser trivial.

Capítulo V

Os Ordinais Naturais de Howard, Vrijer e Beckmann

Estudaremos neste capítulo alguns artigos da literatura em que encontramos definições de atribuições numéricas a termos do cálculo lambda tipificado $\lambda^{\supset}$, que são de fato ordinais naturais para os termos deste sistema. Ou seja, em cada um destes artigos existe uma atribuição numérica n que satisfaz a seguinte propriedade:

$$\boxed{\text{Para todo } \mathsf{M}\in\Lambda^{\supset},\ n(\mathsf{M}) < \omega \quad \text{e} \quad \mathsf{M} \to \mathsf{N} \ \Rightarrow\ n(\mathsf{M}) > n(\mathsf{N})}$$

Assim como para o caso dos sistemas de Dedução Natural, uma atribuição numérica para termos de $\lambda^{\supset}$ que satisfaça esta propriedade representa um limitante superior para o comprimento de todas as seqüências de redução para o termo M, e leva a uma prova trivial do Teorema de Normalização Forte para $\lambda^{\supset}$. Como vimos no capítulo anterior que através da noção de fórmulas como tipos é possível transportar provas de normalização forte para $\lambda^{\supset}$ em provas de normalização forte para C', é importante analisarmos os métodos utilizados nestes artigos para podermos comparar com o nosso método.

Neste capítulo apresentaremos detalhadamente três artigos, nos quais encontramos três diferentes ordinais naturais para $\lambda^{\supset}$, os artigos **Howard[1968]**, **Vrijer[1987]** e **Beckmann[1998]**. Temos conhecimento de outros dois artigos que trazem definições de ordinal natural: **Gandy[1980]** e **Schwichtenberg[1991]**. Não analisaremos estes artigos em detalhes. No entanto, o estudo dos três artigos anteriores nos fornecerá dados que permitirão comparar também estes dois últimos artigos com o nosso trabalho.

O objetivo deste capítulo se resume apenas em apresentar o método que cada autor utilizou para obter o seu ordinal natural. Uma análise comparativa destes artigos que os relaciona com o nosso trabalho será feita apenas no final do capítulo seguinte, após termos desenvolvido detalhadamente o nosso método para o sistema $\lambda^{\supset}$. O objetivo agora é apresentar e entender os resultados destes artigos. Dessa forma, dividiremos este capítulo em três seções principais, uma para cada um dos artigos que analisaremos.

Cabe ressaltar que estes artigos não utilizam uma notação uniformizada para o cálculo lambda tipificado, cada um desenvolvendo a sua. A título apenas de uniformização modificaremos em nossa exposição as notações originais, utilizando as definições e resultados gerais de $\lambda^{\supset}$ que foram desenvolvidos no Capítulo IV.

§1 O Artigo Howard[1968]

O artigo **Howard[1968]** é um bonito exemplo de uma "proof-theoretic" análise de uma teoria formal. **Gödel[1958]** apresentou uma interpretação para a aritmética intuicionista de primeira ordem ***H*** em uma teoria formal ***T***, livre de quantificadores, de funcionais recursivos de tipos finitos, que pode ser formalizada em $\lambda^{\supset}$. Com tal interpretação temos que provas da consistência de ***T*** demonstram, de fato, a consistência de ***H***. Formalizada em $\lambda^{\supset}$ e livre de quantificadores, a teoria ***T*** é uma teoria *equacional* onde suas fórmulas são *equações* entre λ-termos. Se, por sua vez, fizermos uma "proof-theoretic" análise de ***T***, redefinindo suas igualdades axiomáticas em termos de "reduções", a consistência de ***T*** é trivialmente obtida se provarmos, para estas reduções que representam as igualdades em ***T***, os Teoremas de Normalização Forte e Church-Rosser.

Isto se dá porque uma igualdade qualquer, por exemplo M= N, expressaria que M e N se reduzem a um termo comum. Mas se neste sistema vale Normalização Forte e Church-Rosser, então, se ambos se reduzem a um termo comum, tanto M quanto N têm a mesma forma normal. Ou seja, podemos reduzir o conceito semântico de igualdade ao conceito sintático "ter a mesma forma normal". A consistência do sistema é obtida trivialmente quando tomamos, por exemplo, P e Q distintos e ambos na forma normal. Neste caso, é claro que não temos, em ***T***, P= Q. Logo ***T*** não é trivial, e portanto é consistente.[40]

Além disso, uma vez que o conceito de igualdade se reduz ao de "ter a mesma forma normal", podemos verificar a validade de toda e qualquer fórmula de ***T***, que certamente é uma equação do tipo M= N, efetuando a normalização de M e N, e verificando se ambos possuem a mesma forma normal. Temos portanto um procedimento efetivo para verificar a validade das fórmulas da teoria, o que nos daria um resultado de decidibilidade.

No entanto, **Gentzen[1938]** já havia provado que a consistência da aritmética de primeira ordem, tanto intuicionista quanto clássica, pode ser provada por métodos finitários exceto pelo uso do "princípio da cadeia descendente para ordinais menores que ε_0". Dessa forma, qualquer tentativa de provar normalização forte para ***T*** deve levar em conta tal princípio não finitário, e portanto não será uma normalização forte no sentido estrito do termo, mas o que **Tait[1967]** chamou de "computabilidade". Com base nisso, o objetivo de

[40] Estamos utilizando aqui a noção clássica de que inconsistência implica em trivialidade.

Howard é realizar esta análise "proof-theoretic" de $\boldsymbol{T}$ e provar sua computabilidade, assumindo para isso o "princípio da cadeia descendente para ordinais menores que ε_0". Ele faz isso estabelecendo uma atribuição de ordinais menores que ε_0 aos termos de $\boldsymbol{T}$ e provando que esta atribuição diminui com as reduções. Ou seja, para cada seqüência de reduções de termos:

$$\mathsf{A}_1 \rightarrow \mathsf{A}_2 \rightarrow \ldots \rightarrow \mathsf{A}_n \rightarrow \ldots$$

temos uma seqüência descendente de ordinais:

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots.$$

Se tais ordinais são menores que ε_0, então a "normalização forte" (ou computabilidade) de $\boldsymbol{T}$ segue diretamente do "princípio da cadeia descendente para ordinais menores que ε_0".

Se Howard permite a atribuição de ordinais infinitos (menores que ε_0 mas maiores que ω) a termos, suas seqüências de redução, ainda que finitas, não são obtidas por uma atribuição numérica finita que diminui com as reduções. No entanto, se descartarmos o tratamento dado à recursão em $\boldsymbol{T}$, e nos concentrarmos apenas nas reduções-β para termos de $\lambda^{\supset}$, talvez o método de Howard represente uma atribuição de ordinais finitos a termos de $\lambda^{\supset}$ que diminui com as reduções. Talvez tenhamos aqui o primeiro *ordinal natural*. Verificaremos que, com algumas importantes restrições, é isso de fato o que ocorre.

O método geral da prova de Howard consiste basicamente em desenvolver uma teoria formal de expressões que possui uma interpretação *correta* na qual expressões são funções aritméticas de ordinais menores que ε_0. Em seguida ele demonstra varias propriedades destas expressões e desenvolve uma atribuição unívoca de expressões a termos de $\boldsymbol{T}$. Através das propriedades demonstradas, prova que se $\mathsf{F} \rightarrow \mathsf{G}$ e f e g são as expressões atribuídas à F e G respectivamente, então $f(a) > g(a)$, onde $f(a)$ e $g(a)$ são os ordinais obtidos aplicando as funções que interpretam f e g à mesma constante a (por exemplo $a = \langle 0,\ldots,0\rangle$).

Com base no discutido acima, na análise do artigo de Howard que faremos a seguir, já estamos desconsiderando as peculiaridades de $\boldsymbol{T}$ e aplicando seu método apenas às reduções-β aplicadas a termos de $\lambda^{\supset}$. Além disso, estamos substituindo as ocorrências de ordinais menores que ε_0, por naturais (ordinais menores que ω).

5.1.1 Definições Iniciais

Apresentaremos aqui algumas definições de conceitos básicos utilizados por Howard.

5.1.1.1 CONVENÇÕES: Enumeração de Variáveis Sintáticas

Consideraremos ξ: $x_0, x_1, x_2, \ldots$ uma enumeração das variáveis sintáticas de todos os tipos de $\lambda^{\supset}$.

5.1.1.2 DEFINIÇÃO: Nível - *lv*()

O *nível* de um tipo A, denotado por $lv(A)$, é definido indutivamente como:

(1) $lv(A) = 0$, se A é tipo básico;

(2) $lv(A \supset B) = max\{1 + lv(A), lv(B)\}$.

Se M é um termo do tipo A, o nível de M é definido como: $lv(\mathsf{M}) = lv(A)$.

5.1.1.3 LEMA:

Se $\mathsf{MN} \in \Lambda^{\supset}$, então:

(a) $lv(\mathsf{M}) > lv(\mathsf{N})$;

(b) $lv(\mathsf{M}) \geq lv(\mathsf{MN})$.

PROVA:

Imediata pela Definição 5.1.1.2. ♦

5.1.1.4 DEFINIÇÃO: *I*-Subtermo

Além do conjunto de *subtermos* de um termo, que definimos em 4.1.7, Howard define um outro conjunto, o de *I-subtermos*, que definimos indutivamente como:

(1) $ISub(x) = \{x\}$;

(2) $ISub(\mathsf{MN}) = ISub(\mathsf{M}) \cup ISub(\mathsf{N}) \cup \{\mathsf{MN}\}$;

(3) $ISub(\lambda x.\mathsf{M}) = (ISub(\mathsf{M}) \cup Sub(\lambda x.\mathsf{M})) - \xi x(\mathsf{M})$,

onde $\xi x(\mathsf{M}) = \{\mathsf{N} \in ISub(\mathsf{M}) \ / \ x \in FV(\mathsf{N})\}$ e

$Sub(\lambda x.\mathsf{M})$ é como definido em 4.1.7.

5.1.1.4.1 COMENTÁRIOS:

(a) Dizemos que N é *I-subtermo* de M quando N $\in$ *ISub*(M).

(b) Howard, em seu artigo, chama de "subfórmula" o que estamos chamando de "subtermo", e chama de "subtermo" o que estamos chamando de "*I*-subtermo". Decidimos trocar os nomes porque na literatura mais recente consolidou-se o uso da expressão "subtermo" com o sentido que estamos lhe dando na Definição 4.1.7.

(c) A diferença entre subtermo e *I*-subtermo, expressa na cláusula (3) acima, garante que se M é um termo fechado, então todos os *I*-subtermos de M também são fechados.

5.1.1.5 DEFINIÇÃO: Redução Geral e Redução Restrita

Considere a redução-β $\mathsf{M} \rightarrow_{\Delta} \mathsf{N}$ como definida em 4.3.1. Com base na diferença entre subtermo e *I*-subtermo definida acima, diferenciamos dois tipos de reduções:

(1) $\mathsf{M} \rightarrow_{\Delta} \mathsf{N}$ é uma *redução geral* quando Δ é subtermo de M.

(2) $\mathsf{M} \rightarrow_{\Delta} \mathsf{N}$ é uma *redução restrita* quando Δ é *I*-subtermo de M.

5.1.1.5.1 OBSERVAÇÃO:

Howard demonstra seu resultado primeiramente para o caso particular das reduções restritas. Em seguida o estende para o caso mais genérico das reduções gerais.

5.1.2 A Teoria Formal $\boldsymbol{E}$ de Expressões

Apresentaremos agora a teoria $\boldsymbol{E}$ de expressões que será usada para a atribuição de ordinais aos termos de $\lambda^{\supset}$.

Expressões são construídas a partir de constantes (dentre as quais distinguimos 0 e 1), variáveis biindexadas (y_{i}^{τ}) e os símbolos de função "+ " e "(,)", da seguinte forma:

(i) Uma constante é uma expressão.

(ii) Uma variável y_{i}^{τ} é uma expressão.

(iii) Se f e g são expressões, então: $f+g$ e (f, g) também o são.

$\boldsymbol{E}$ é uma teoria axiomática da relação $\angle$ entre expressões, na qual a igualdade é tratada axiomaticamente e $\underline{\angle}$ é símbolo definido, onde $f \underline{\angle}\, g$ significa $f \angle g$, ou $f = g$.[41]

[41] Usaremos a letra y para nos referirmos a variáveis de $\boldsymbol{E}$ e a letra x para nos referirmos às variáveis de $\lambda^{\supset}$.

5.1.2.1 DEFINIÇÃO: Axiomas de $\mathcal{E}$

(1) Se $f \angle g$ e $g \angle h$, então $f \angle h$.

(2) Se $f \angle g$, então $f \neq g$.

(3) $f + g = g + f$; $f + (g + h) = (f + g) + h$.

(4) Se $f \angle g$, então $f + h \angle g + h$.

(5) $f + g = f$ se, e somente se, $g = 0$.

(6) $0 \underline{\angle} f$.

(7) $(f, g + h) = (f, g) + (f, h)$.

(8) Se $g \angle c$ e $h \angle c$, então $(g, f) + (h, f) \underline{\angle} (c, f)$.

(9) Se $f \angle g$, então $(h, f) \angle (h, g)$.

(10) Se $f \angle g$ e $h \neq 0$, então $(f, h) \angle (g, h)$.

(11) $(0, f) = f$.

(12) $(f, (g, h)) = (f + g, h)$.

5.1.2.2 COROLÁRIO: Conseqüências Imediatas dos Axiomas de $\mathcal{E}$

(13) $(f, 0) = 0$.

(14) Se $0 \angle g$ e $0 \angle h$, então $(g, f) + (h, f) \underline{\angle} (g + h, f)$.

5.1.2.3 DEFINIÇÃO: Uma Interpretação de $\mathcal{E}$

A seguinte interpretação semântica de $\mathcal{E}$ será utilizada na atribuição de naturais aos termos de $\lambda^{\supset}$:

- As variáveis percorrem os naturais e as constantes referem-se a números naturais.
- $f + g$ é interpretado como a soma aritmética.[42]

[42] A definição de "+" originalmente utilizada por Howard é mais complexa. Ele utiliza a soma de Hessemberg para ordinais, introduzida em **Bachmann[1955]**. Para somar a e b, primeiramente escrevemos a e b na Forma Normal de Cantor para a base ω, ou seja, $a = \omega^{a_1} + \ldots + \omega^{a_n}$ e $b = \omega^{b_1} + \ldots + \omega^{b_m}$ tais que $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ e $b_1 \geq \ldots \geq b_m$. $a + b$ é então definido como: $a + b = \omega^{c_1} + \ldots + \omega^{c_{n+m}}$, onde $c_1 \geq \ldots \geq c_{n+m}$ é um rearranjo da seqüência $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$. Note que se $a, b < \omega$, então $a_1 = \ldots = a_n = b_1 = \ldots = b_m = 0$ e, portanto, a soma de Hessemberg restrita a naturais coincide com a soma aritmética que estamos utilizando. Cf **Howard[1968]**, p. 449.

- (f, g) é interpretado da seguinte maneira:
    - Se $\underline{g \neq 0}$, escreva g como uma soma de potências de 2 tal que:

      $g = 2^{g_1} + 2^{g_2} + \ldots + 2^{g_n}$, onde $(g_1 > g_2 > \ldots > g_n)$ [43]

      $(f, g) = 2^{(g_1+f)} + 2^{(g_2+f)} + \ldots + 2^{(g_n+f)}$
    - Se $\underline{g = 0}$, então $(f, g) = (f, 0) = 0$

- Os termos de $\boldsymbol{E}$, ou seja, suas expressões, são então interpretadas como funções intencionais das variáveis que elas contém. Assim, a interpretação de uma expressão f é uma função de $\mathsf{N}^n \to \mathsf{N}$ (n representa o número de variáveis presentes em f) definida de acordo com as interpretações para "+" e "(,)".
- $f \angle g$ é interpretado como $f < g$.[44]

É fácil mostrar que esta interpretação satisfaz os axiomas de $\boldsymbol{E}$, sendo portanto *correta*. É importante termos em mente que esta interpretação representa exatamente a interpretação apresentada por Howard, apenas restringindo seu universo aos números naturais. Como as interpretações que demos para "+" e "(,)" são fechadas nos números naturais, a nossa interpretação é portanto submodelo da interpretação original de Howard.

5.1.2.4 COMENTÁRIO: Finitude da Atribuição

Note que com a interpretação 5.1.2.3 estamos garantindo que o número que será atribuído a cada termo de $\lambda^{\supset}$ é finito. Isto se dá porque qualquer função que seja uma combinação finita de aplicações de "+" e "(,)", como definidos acima, quando possui números naturais como argumentos, certamente tem como resultado um número natural. Mas se a um termo qualquer associamos uma expressão de comprimento finito, a função atribuída a esta expressão pela interpretação acima é uma combinação finita de aplicações

---

[43] Esta forma é conhecida como a Forma Normal de Cantor para a base 2 e é única para cada número.

[44] Interpretamos $<$ como a relação de ordem tradicional entre funções. Se f e g são funções com mesmo domínio dizemos que $f < g$ quando, para todo $c \in dom(f) = dom(g)$, temos $f(c) < g(c)$. Números são interpretados por funções constantes, e, neste caso, $<$ é a ordem aritmética. Pode ocorrer, no entanto, que as variáveis que ocorrem na expressão de f sejam distintas das que ocorrem na expressão g. O que fazemos neste caso é fixar uma enumeração para as variáveis de δ (y_0^0, y_1^0, y_0^1, y_1^1, y_2^0, …) e considerar o domínio tanto de f quanto de g como sendo N^s, onde s representa a maior posição na enumeração das variáveis que ocorrem em f e g. Dessa forma, $c = \langle c_1, \ldots, c_s \rangle$ contém, nas posições adequadas, os valores para as variáveis que ocorrem em f e em g. Nas demais posições, c contém valores quaisquer que não interferem no cálculo de $f(c)$ ou $g(c)$.

de “+ ” e “(,)”, que tem como resultado, para qualquer argumento composto de naturais, um número natural. Dessa forma, a finitude da atribuição que será proposta já esta assegurada pela interpretação da teoria $\boldsymbol{E}$ apresentada acima.

5.1.2.5 DEFINIÇÃO: Vetores de Expressões

Se $f_0, \ldots, f_n$ são expressões da teoria $\boldsymbol{E}$, a $n+1$-tupla $\boldsymbol{f} = \langle f_0, \ldots, f_n \rangle$ é chamada de um vetor de nível n (Not: $lv(\boldsymbol{f}) = n$). Para $0 \le i \le n$, as expressões $\boldsymbol{f}_i$ ou $(\boldsymbol{f})_i$ denotam a i-ésima componente de $\boldsymbol{f}$. Se $i > lv(\boldsymbol{f})$ então definimos $(\boldsymbol{f})_i = 0$.

Definimos também a soma de vetores da seguinte forma: $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}$ tal que:

• $lv(\boldsymbol{h}) = max\{lv(\boldsymbol{f}), lv(\boldsymbol{g})\}$ e • $\boldsymbol{h}_i = \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{g}_i$ $(0 \le i \le lv(\boldsymbol{h}))$.

5.1.3 O Método de Howard - Atribuição de Vetores a termos de $\lambda^{\supset}$

Podemos agora explicar um pouco mais clara e detalhadamente o método de Howard. Considere a função $l : \mathsf{N} \to \mathsf{N}$ definida como: $l(r) = lv(x_r)$, onde x_r é a r-ésima variável da enumeração ξ definida em 5.1.1.1. Assim, dado um número natural r, a função l recupera o nível da r-ésima variável da enumeração ξ.

Considere a notação: $\boldsymbol{y}^r = \langle y^r_0, y^r_1, \ldots, y^r_{l(r)} \rangle$, onde cada y^r_i $(0 \le i \le l(r))$ é uma variável de $\boldsymbol{E}$, e portanto $\boldsymbol{y}^r$ é um vetor de expressões de nível $l(r)$. Howard primeiramente define uma atribuição de vetores a termos de $\lambda^{\supset}$ para em seguida obter a atribuição de expressões a termos. Seja $\lfloor \mathsf{B} \rfloor$ a notação para o vetor atribuído ao termo B.

Howard então define: $\lfloor x_r \rfloor = \boldsymbol{y}^r$.

A definição acima nos dá uma atribuição de vetores a termos atômicos de $\lambda^{\supset}$ com a característica peculiar de que a termos de nível n (Definição 5.1.1.2) atribuímos vetores também de nível n (Definição 5.1.2.5).

(1) A definição completa da atribuição de vetores a termos é feita por indução no comprimento dos termos:

$\lfloor x_r \rfloor = \boldsymbol{y}^r$;

$\lfloor \mathsf{FG} \rfloor = \boldsymbol{h}$ tal que $(\boldsymbol{h})_i = (\boldsymbol{f} \square \boldsymbol{g})_i$ para $(0 \le i \le lv(\mathsf{FG}))$;

$\lfloor \lambda x_r.\mathsf{F} \rfloor = \delta^r \boldsymbol{f}$.

Onde $f = \lfloor \mathsf{F} \rfloor$, $g = \lfloor \mathsf{G} \rfloor$, e □ e δ^{r} são operações entre vetores de expressões de $\boldsymbol{E}$ que serão definidas adiante.

Seja f o vetor de expressões atribuído ao termo F. A *expressão* atribuída a F é a primeira componente $(f)_0$ do vetor f. O *ordinal* atribuído a F será o valor da função associada a $(f)_0$ pela interpretação de $\boldsymbol{E}$, quando aplicada a alguma constante do universo da interpretação. No nosso caso este valor será um número natural (ver Comentário 5.1.2.4) e no caso de Howard um ordinal menor que ε_0. Podemos por exemplo fixar a constante $\mathbf{0} = \langle 0, \ldots, 0 \rangle$ como o argumento padrão que será utilizado. Dessa forma, todo o trabalho do artigo é então provar:

(2) $(\forall \mathsf{F})(\forall \mathsf{G})[((\lfloor \mathsf{F} \rfloor = f) \wedge (\lfloor \mathsf{G} \rfloor = g) \wedge (\mathsf{F} \to \mathsf{G})) \Rightarrow ((f)_0(\mathbf{0}) > (g)_0(\mathbf{0}))]$.

Howard faz isso provando através dos axiomas de $\boldsymbol{E}$ o seguinte resultado:

(3) $(\forall \mathsf{F})(\forall \mathsf{G})[((\lfloor \mathsf{F} \rfloor = f) \wedge (\lfloor \mathsf{G} \rfloor = g) \wedge (\mathsf{F} \to \mathsf{G})) \Rightarrow ((g)_0 \angle (f)_0)]$.

Se $(g)_0 \angle (f)_0$, então na interpretação de $\boldsymbol{E}$: $(g)_0 < (f)_0$. Em particular: $(g)_0(\mathbf{0}) < (f)_0(\mathbf{0})$.

Foi com este objetivo que Howard definiu as operações □ e δ^{r} e desenvolveu uma longa seqüência de teoremas sintáticos sobre relações entre expressões e vetores. Não cabe aqui escrever detalhadamente todas as demonstrações, mas sim apresentar as definições e a seqüência de resultados, procurando sempre a compreensão da intuição por trás de cada passo.

5.1.4 COMENTÁRIO: Restrição ao Resultado de Howard

Howard obtém seu resultado em duas etapas. Na primeira delas ele demonstra a proposição 5.1.3-(3) acima apenas para as reduções restritas. Para que seu resultado valha para as reduções gerais, Howard propõe uma nova atribuição não unívoca de expressões a termos de $\lambda^{\supset}$. Ele liberaliza a atribuição de modo que para cada $\lambda^{\supset}$-termo exista uma quantidade enumerável de vetores de expressões atribuídos. Ou seja, para cada termo M temos $\lfloor \mathsf{M} \rfloor_1$, $\lfloor \mathsf{M} \rfloor_2$, ... Em seguida, Howard demonstra que dados dois termos M e N tais que $M \rightarrow N$ através de uma redução geral, existem $\lfloor M \rfloor_i$ e $\lfloor N \rfloor_j$ com $i,j < \omega$, tais que $\lfloor M \rfloor_i > \lfloor N \rfloor_j$. Tal liberdade representa uma limitação do resultado de Howard com respeito à definição construtiva de um ordinal natural para $\lambda^{\supset}$. Limitação esta que veremos mais detalhadamente no final desta seção.

5.1.5 COMENTÁRIO: Ordinal Natural para $\lambda R^{\supset}$

Chamemos de $\lambda R^{\supset}$ o sistema $\lambda^{\supset}$ com apenas as reduções restritas. Como verificaremos a seguir, as operações □ e δ^r para vetores de expressões de $\boldsymbol{E}$ são definidas sintaticamente em termos dos símbolos funcionais "+ " e "(,)". Dessa forma, escrever $\boldsymbol{f}$□$\boldsymbol{g}$ e $\delta^r \boldsymbol{f}$ é o mesmo que escrever expressões finitas em que aparecem $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ e os símbolos funcionais "+ " e "(,)". Isso significa que através da nossa interpretação finitária para $\boldsymbol{E}$ podemos interpretar finitamente qualquer vetor de expressões em que os símbolos □ e δ^r apareçam. Em particular, a atribuição de expressões a termos de $\lambda^{\supset}$ esboçada acima representa, através da Interpretação 5.1.2.3, uma atribuição de números naturais a termos de $\lambda R^{\supset}$.

Este fato já garante de antemão o sucesso da tentativa de encontrar o ordinal natural para termos de $\lambda R^{\supset}$ como conseqüência do artigo de Howard. Isso porque Howard de fato provou 5.1.3-(3) sintaticamente, através dos axiomas de $\boldsymbol{E}$, para todos os termos e reduções restritas da teoria $\boldsymbol{T}$. Mas se 5.1.3-(3) vale para todos os termos e reduções restritas da teoria $\boldsymbol{T}$, vale em particular para termos de $\lambda R^{\supset}$. Neste casso, como a interpretação de $\boldsymbol{E}$ apresentada em 5.1.2.3 é correta, 5.1.3-(3), segundo esta interpretação, é válida. Ou seja, 5.1.2-(2) é válida. Como a interpretação 5.1.2.3 garante uma atribuição de naturais finitos aos termos de $\lambda R^{\supset}$, então temos, por 5.1.2-(2), uma atribuição finita que diminui com as reduções restritas. Temos, portanto, um Ordinal Natural para os termos $\lambda R^{\supset}$.

Nos resultados da segunda parte do artigo de Howard temos, a partir da construção do ordinal natural para $\lambda R^{\supset}$, uma prova de existência de um ordinal natural para $\lambda^{\supset}$.

Vamos agora definir formalmente as operações δ^r e □, e em seguida apresentar uma seqüência de resultados envolvendo estas operações, que culminará com a demonstração da Proposição 5.1.3-(3).

5.1.6 DEFINIÇÃO: A Operação $\boldsymbol{f} \square \boldsymbol{g}$

Seja $n = max\{lv(\boldsymbol{f}), lv(\boldsymbol{g})\}$. Então $\boldsymbol{f} \square \boldsymbol{g}$ é definido como sendo o vetor:

$$\boldsymbol{h} = \langle \boldsymbol{h}_0, \ldots, \boldsymbol{h}_n \rangle \text{ tal que } \boldsymbol{h}_i = \begin{cases} \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{g}_i \quad , & \text{se } (i = n) \\ (\boldsymbol{h}_{i+1}, \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{g}_i) \ , & \text{se } (0 \leq i < n) \end{cases}.$$

5.1.6.1 COMENTÁRIOS:

(*a*) Note que a definição de $\square$ só leva em conta as operações "+ " e "(,)", e que, portanto, $\boldsymbol{f} \square \boldsymbol{g}$ é um vetor de expressões bem formadas de $\boldsymbol{E}$ que possuem correspondentes na nossa interpretação de $\boldsymbol{E}$.

(*b*) O que devemos ter em mente quando olhamos para a definição de $\square$ é que, de acordo com a definição da atribuição 5.1.3-(1), o objetivo de $\square$ é calcular $\lfloor \mathsf{FG} \rfloor$ dados $\lfloor \mathsf{F} \rfloor$ e $\lfloor \mathsf{G} \rfloor$. Ou seja, se $\lfloor \mathsf{F} \rfloor = \boldsymbol{f}$ e $\lfloor \mathsf{G} \rfloor = \boldsymbol{g}$, por 5.1.3-(1) temos que $\lfloor \mathsf{FG} \rfloor = \boldsymbol{h}$ tal que $(\boldsymbol{h})_i = (\boldsymbol{f} \square \boldsymbol{g})_i$ para $(0 \leq i \leq lv(\mathsf{FG}))$. Então, $(\boldsymbol{h})_0 = (\boldsymbol{f} \square \boldsymbol{g})_0$. Mas $(\boldsymbol{h})_0$ é a função que calcula o ordinal atribuído a FG. Logo, o objetivo da operação $\boldsymbol{f} \square \boldsymbol{g}$ é acumular na sua primeira expressão componente $(\boldsymbol{f} \square \boldsymbol{g})_0 = (\boldsymbol{h})_0$ tudo o que $\boldsymbol{f}_0$ e $\boldsymbol{g}_0$ acumulam, que representa a soma dos ordinais associados a F e G mais um número que seja maior ou igual que todos os possíveis redex que a aplicação FG possa aumentar aos redex locais de F e G. Além disso, $(\boldsymbol{f} \square \boldsymbol{g})_0$ não pode "explodir" exponencialmente, pois precisa manter a característica de diminuir com as reduções, para que possamos provar 5.1.3-(3).

(*c*) Como podemos notar, a definição de $\square$ é de alta complexidade combinatória. Uma boa maneira de tentar compreender a intuição por trás desta definição é através do estudo das demonstrações do Lema 5.1.13.3 e Corolário 5.1.13.4.

5.1.7 DEFINIÇÃO: As Classes C_i e C

Com o intuito de definir a operação δ^r definiremos as classes de expressões C_i e a classe de vetores C. Vale lembrar que todas as variáveis da teoria $\boldsymbol{E}$ têm a forma y^r_k, ou seja, são representadas pela letra y seguida por um índice superior e um inferior.

- Definimos para todo i a classe C_i de expressões, indutivamente, da seguinte forma:

Cláusulas Básicas:

(*i*) Se a expressão h não contém variável, então h está em C_i;

(*ii*) Para todo r, a variável y^r_i está em C_i.

Cláusulas Indutivas:

(*iii*) Se f e g estão em C_i então $f + g$ também está;

(*iv*) Se f está em C_{i+1} e g está em C_i, então (f , g) está em C_i.

- A classe C consiste de todos os vetores $\boldsymbol{h}$ tais que:

$(\boldsymbol{h})_i$ está em C_i para $(0 \leq i \leq lev(\boldsymbol{h}))$.

5.1.8 DEFINIÇÃO: A Operação δ^r em Expressões

Para cada expressão h em $\cup C_i$ associaremos um vetor $\delta^r h$ de nível $l(r)+1$ que não contém nenhum componente de $\boldsymbol{y}^r = \langle y_0^r, y_1^r, \ldots, y_{l(r)}^r \rangle$ em suas expressões. Ou seja, se y_k^r ocorre em alguma expressão de $\delta^r h$, então $k > l(r)$.

Definimos o vetor $\delta^r h$ indutivamente da seguinte forma:

Cláusulas Básicas:

(*i*) Se h está em C_i e não contém componentes de $\boldsymbol{y}^r$,

então $\delta^r h$ é o vetor de nível $l(r)+1$ tal que:

$(\delta^r h)_i = h + 1$ e $(\delta^r h)_k = 1$, para $(0 \leq k \leq l(r)+1$ e $k \neq i)$;

(*ii*) Se $h = y_i^r$, então $(\delta^r h)_k = 1$, para $(0 \leq k \leq l(r)+1)$.

Cláusulas Indutivas:

(*iii*) Se h contém alguma componente de $\boldsymbol{y}^r$ e $h = f + g$,

onde f e g estão em C_i, então: $\delta^r h = \delta^r f + \delta^r g$;

(*iv*) Se h contém alguma componente de $\boldsymbol{y}^r$ e $h = (f , g)$,

onde f está em C_{i+1} e g está em C_i, então:

$(\delta^r h)_k = (\delta^r f)_k + (\delta^r g)_k$, se $(0 \leq k \leq l(r))$;

$(\delta^r h)_k = 2(\delta^r f)_k + 2(\delta^r g)_k + 1$, se $k = l(r)+1$,

onde $2f = f + f$ para toda expressão f e $2\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}$ para todo vetor $\boldsymbol{f}$.

5.1.9 DEFINIÇÃO: A Operação δ^r em Vetores

Podemos agora finalmente definir a operação δ^r sobre os vetores de expressões.

Seja $\boldsymbol{h} = \langle \boldsymbol{h}_0, \ldots, \boldsymbol{h}_p \rangle$ um vetor em C. $\delta^r \boldsymbol{h}$ é um vetor de nível p tal que:

$(\delta^r \boldsymbol{h})_k = (\delta^r \boldsymbol{h}_0)_k + \ldots + (\delta^r \boldsymbol{h}_p)_k$, se $(0 \leq k \leq l(r)+1)$.

$(\delta^r \boldsymbol{h})_k = \boldsymbol{h}_k + 1$, se $(l(r)+1 < k \leq p)$.

5.1.9.1 COMENTÁRIOS:

(*a*) Note que a definição de δ^r só leva em conta as operações "+ " e "(,)", e que portanto $\delta^r\boldsymbol{h}$ é um vetor de expressões bem formadas de $\boldsymbol{E}$ que possuem correspondentes na nossa Interpretação 5.1.2.3.

(*b*) O objetivo da definição de δ^r, segundo 5.1.3-(1), é calcular $\lfloor \lambda x^r.\mathsf{F} \rfloor$ dado $\lfloor \mathsf{F} \rfloor$. Ou seja, se $\lfloor \mathsf{F} \rfloor = \boldsymbol{f}$, por 5.1.3-(1) temos que $\lfloor \lambda x_r.\mathsf{F} \rfloor = \delta^r\boldsymbol{f}$. Mas como o acréscimo de "λx_r." a F não acrescenta nenhum possível novo redex a F, o objetivo da operação δ^r não é tanto mudar o valor de $(\boldsymbol{f})_0$, mas sim rearranjar o vetor $\boldsymbol{f}$ de modo que se $\lambda x_r.\mathsf{F}$ for utilizado em alguma aplicação do tipo $(\lambda x_r.\mathsf{F})\mathsf{G}$, $\delta^r\boldsymbol{f}$ computa melhor do que $\boldsymbol{f}$ as possibilidades de novos redex em $(\lambda x_r.\mathsf{F})\mathsf{G}$.

5.1.10 NOTAÇÃO: Substituição em $\boldsymbol{E}$

- $h[y^r_j/\, e]$ denota o resultado da substituição de todas as ocorrências de y^r_j pela expressão e na expressão h.
- Para o vetor $\boldsymbol{h} = \langle h_0, \ldots, h_n \rangle$ definimos: $\boldsymbol{h}[y^r_j/\, e] = \langle h_0[y^r_j/\, e], \ldots, h_n[y^r_j/\, e] \rangle$.
- Para os vetores $\boldsymbol{h}$ e $\boldsymbol{e}$ tais que $lv(\boldsymbol{e}) = l(r) = n$ e $\boldsymbol{y}^r = \langle y^r_0, y^r_1, \ldots, y^r_n \rangle$ definimos:

$$\boldsymbol{h}[\boldsymbol{y}^r/\, \boldsymbol{e}] = \boldsymbol{h}[y^r_0/\, (\boldsymbol{e})_0][y^r_1/\, (\boldsymbol{e})_1]\ldots[y^r_n/\, (\boldsymbol{e})_n] .$$

Vamos agora apresentar a seqüência de resultados de Howard que culmina com o teorema expresso em 5.1.3-(3). Estes são resultados sintáticos que portanto independem da interpretação de $\boldsymbol{E}$, sendo pois válidos tanto para a nossa interpretação quanto para a de Howard. Dividiremos esta apresentação em seções onde, em cada uma delas, os teoremas referentes a alguma definição especial são enunciados. Quanto às demonstrações, apenas indicaremos o caminho seguido por Howard.

5.1.11 Lemas sobre a Operação □

Estes são lemas auxiliares que estabelecem propriedades da operação □ com respeito à relação de ordem $\angle$. Todas as demonstrações são feitas por indução decrescente em i (índice das componentes dos vetores envolvidos) utilizando apenas a definição de □ e os axiomas de $\boldsymbol{E}$. As provas de 5.1.11.1 a 5.1.11.4 são simples e diretas. As de 5.1.11.5 e 5.1.11.6 têm um grau de dificuldade maior e utilizam os resultados anteriores.

5.1.11.1 LEMA:

Se $0 \angle (\boldsymbol{f})_i$, para todo $i \leq n$, então $0 \angle (\boldsymbol{f} \square \boldsymbol{g})_i$, para todo $i \leq n$. ♦

5.1.11.2 LEMA:

Para todo i: $(\boldsymbol{f})_i \,\underline{\angle}\, (\boldsymbol{f} \square \boldsymbol{g})_i$. ♦

5.1.11.3 LEMA:

Seja $lv(\boldsymbol{f}) = lv(\boldsymbol{g}) = n$ e $(\boldsymbol{g})_i \,\underline{\angle}\, (\boldsymbol{f})_i$, para $0 \leq i \leq n$.

Então: $(\boldsymbol{g} \square \boldsymbol{h})_i \,\underline{\angle}\, (\boldsymbol{f} \square \boldsymbol{h})_i$, para todo i. ♦

5.1.11.4 LEMA:

Seja $lv(\boldsymbol{f}) = lv(\boldsymbol{g}) = n$ e $(\boldsymbol{g})_i \,\underline{\angle}\, (\boldsymbol{f})_i$, para $0 \leq i \leq n$.

Seja também $(\boldsymbol{g})_k \angle (\boldsymbol{f})_k$, para $0 \leq k \leq s$, para algum $s \leq n$.

Então: $(\boldsymbol{g} \square \boldsymbol{h})_k \angle (\boldsymbol{f} \square \boldsymbol{h})_k$, para $0 \leq k \leq s$. ♦

5.1.11.5 LEMA:

Seja $lv(\boldsymbol{f}) = lv(\boldsymbol{g}) = n+1 > lv(\boldsymbol{h})$ e $0 \angle (\boldsymbol{f})_i$ e $0 \angle (\boldsymbol{g})_i$, para $0 \leq i \leq n+1$.

Então: $(\boldsymbol{f} \square \boldsymbol{h})_i + (\boldsymbol{g} \square \boldsymbol{h})_i \,\underline{\angle}\, ((\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}) \square \boldsymbol{h})_i$, para $0 \leq i \leq n+1$. ♦

5.1.11.6 LEMA:

Seja $lv(\boldsymbol{f}) = lv(\boldsymbol{g}) = n+1 > lv(\boldsymbol{h})$ e $0 \angle (\boldsymbol{f})_i$ e $0 \angle (\boldsymbol{g})_i$, para $0 \leq i \leq n+1$.

Seja $\boldsymbol{d}$ tal que: $2(\boldsymbol{f})_{n+1} + 2(\boldsymbol{g})_{n+1} \angle (\boldsymbol{d})_{n+1}$ e $(\boldsymbol{f})_i + (\boldsymbol{g})_i \,\underline{\angle}\, (\boldsymbol{d})_i$, para $0 \leq i \leq n+1$.

Então: $2((\boldsymbol{f} \square \boldsymbol{h}) \square (\boldsymbol{g} \square \boldsymbol{h}))_i \angle (\boldsymbol{d} \square \boldsymbol{h})_i$, para $0 \leq i \leq n+1$. ♦

5.1.12 Lemas sobre as Classes C_i e C.

Estes lemas estabelecem propriedades de expressões e vetores com relação à pertinência nas classes C_i e C. Os Lemas 5.1.12.1 e 5.1.12.3 são provados por indução na complexidade (comprimento) da expressão h envolvida, enquanto 5.1.12.2, que trata de vetores, é provado por indução decrescente no índice que percorre as componentes do vetor $\boldsymbol{f} \square \boldsymbol{g}$.

5.1.12.1 LEMA:

Se h está em C_i, então h não contém variável do tipo y^r_k tal que $k < \ i$. ♦

5.1.12.2 LEMA:

Se $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ estão em C, então $\boldsymbol{f} \square \boldsymbol{g}$ também está. ♦

5.1.12.3 LEMA:

Para todo natural i e toda expressão h, se h está em C_i e e está em C_k, então $h[y^r_k/ e]$ está em C_i. Em outras palavras, se e está em C_k então a operação de substituição de y^r_k por e é um mapeamento da classe C_i nela mesma. ♦

5.1.13 Lemas sobre a Operação δ^r

Apresentaremos dois lemas sobre δ^r aplicado a expressões, cada um deles com um corolário sobre δ^r aplicado a vetores. As provas de ambos os lemas são feitas por indução na complexidade da expressão h envolvida, enquanto que as provas dos corolários são obtidas aplicando-se os respectivos lemas a cada componente dos vetores envolvidos. A prova do Lema 5.1.13.1 utiliza apenas a definição de δ^r e os axiomas de $\boldsymbol{E}$, enquanto que a prova de 5.1.13.3 utiliza, além disso, os Lemas 5.1.11.5 e 5.1.11.6, justificando assim o desenvolvimento dos lemas de 5.1.11. O Lema 5.1.13.3 juntamente com seu corolário são de importância crucial para o entendimento do desenvolvimento do artigo, pois estabelecem a principal propriedade que garantirá que a atribuição de ordinais diminui com as reduções.

5.1.13.1 LEMA:

Suponha que e está em C_j e não contém componente de $\boldsymbol{y}^r$.

Se $s \neq r$, para qualquer h em $\cup C_i$ temos: $(\delta^r h)[y^s_j/ e] = \delta^r(h[y^s_j/ e])$. ♦

5.1.13.2 COROLÁRIO:

Suponha que $\boldsymbol{e}$ está em C e não contém componente de $\boldsymbol{y}^r$.

Se $s \neq r$, para qualquer $\boldsymbol{h}$ em C temos: $(\delta^r \boldsymbol{h})[\boldsymbol{y}^s/ \boldsymbol{e}] = \delta^r(\boldsymbol{h}[\boldsymbol{y}^s/ \boldsymbol{e}])$. ♦

O que o Lema 5.1.13.1 e o Corolário 5.1.13.2 estabelecem é que substituições de variáveis diferentes das de $\boldsymbol{y}^r$ não interferem na operação δ^r. O que é de se esperar, pois em $\lambda^{\supset}$ vale o seguinte resultado: $(\lambda x_r.\mathsf{M})[x_s/\,\mathsf{N}] \equiv \lambda x_r.\mathsf{M}[x_s/\,\mathsf{N}]$ (com $r \neq s$).

5.1.13.3 LEMA:

Seja $\boldsymbol{e}$ um vetor tal que $lv(\boldsymbol{e}) = l(r)$, e h uma expressão em C_i.

Então: $h[\boldsymbol{y}^r/\,\boldsymbol{e}] \angle ((\delta^r h) \square \boldsymbol{e})_i$. ♦

5.1.13.4 COROLÁRIO:

Seja $\boldsymbol{e}$ um vetor tal que $lv(\boldsymbol{e}) = l(r)$, e $\boldsymbol{h}$ um vetor em C.

Então: $(\boldsymbol{h}[\boldsymbol{y}^r/\,\boldsymbol{e}])_i \angle ((\delta^r \boldsymbol{h}) \square \boldsymbol{e})_i$. ♦

A importância destes resultados se dá pelo seguinte fato:

Quando $\mathsf{M} \rightarrow_\Delta \mathsf{N}$, então $\Delta \equiv (\lambda x_r.\mathsf{F})\mathsf{G} \subset \mathsf{M}$ foi substituído em N por $\mathsf{F}[x_r/\,\mathsf{G}]$. Mas segundo a atribuição de vetores 5.1.3-(1), se $\lfloor \mathsf{F} \rfloor = \boldsymbol{f}$ e $\lfloor \mathsf{G} \rfloor = \boldsymbol{g}$ temos:

(*i*) $\lfloor (\lambda x_r.\mathsf{F})\mathsf{G} \rfloor = \boldsymbol{h}$ tal que $(\boldsymbol{h})_i = ((\delta^r \boldsymbol{f}) \square \boldsymbol{g})_i$ para $(0 \leq i \leq lv((\lambda x_r.\mathsf{F})\mathsf{G}))$.

Além disso, o lema 5.1.15.1, que apresentaremos adiante, estabelece o seguinte resultado, intuitivamente já esperado:

(*ii*) $\lfloor \mathsf{F}[x_r/\,\mathsf{G}] \rfloor = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{y}^r/\,\boldsymbol{g}]$.

Mas pelo Corolário 5.1.13.4 temos que $(\boldsymbol{f}[\boldsymbol{y}^r/\,\boldsymbol{g}])_i \angle ((\delta^r \boldsymbol{f}) \square \boldsymbol{g})_i$. Em particular, $(\boldsymbol{f}[\boldsymbol{y}^r/\,\boldsymbol{g}])_0 \angle ((\delta^r \boldsymbol{f}) \square \boldsymbol{g})_0$. Ou seja, a expressão atribuída a $\mathsf{F}[x_r/\,\mathsf{G}]$ é menor, e portanto produz um ordinal menor, que a atribuída à $(\lambda x_r.\mathsf{F})\mathsf{G}$. Temos aqui que no redex contraído a atribuição de ordinais diminui. Basta portanto verificar agora que esta diminuição no redex se estende ao termo inteiro, estabelecendo portanto que a expressão atribuída a N seja menor que a atribuída a M.

É olhando para o Lema 5.1.13.3 e Corolário 5.1.13.4 que temos que procurar entender a complexa combinatória das definições de $\square$ e δ^r, e todo o método de Howard. Estes resultados representam o ponto crucial do artigo para os nossos propósitos.

5.1.14 Lemas sobre Substituição em $\boldsymbol{\mathcal{E}}$

Os dois lemas que apresentaremos aqui estabelecem propriedades das expressões de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ com respeito à substituição e relação $\angle$. Estes lemas serão utilizados na prova de que esta diminuição das expressões que as reduções provocam nos redex contraídos, que acabamos de apontar como conseqüência do Corolário 5.1.13.4, se estende ao termo reduzido. As provas dos dois lemas são facilmente obtidas por indução na complexidade da expressão h de que eles tratam, utilizando-se apenas as definições de substituição e os axiomas de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$.

5.1.14.1 LEMA:

Sejam a, b e h expressões tais que $b \angle a$. Então: $h[y_{\mathtt{i}}^{\mathtt{r}}/ b] \underline{\angle} h[y_{\mathtt{i}}^{\mathtt{r}}/ a]$. ♦

5.1.14.2 LEMA:

Sejam a, b e h expressões tais que: $b \angle a$, h está em C_0 e $y_0^{\mathtt{r}}$ ocorre em h.

Então: $h[y_0^{\mathtt{r}}/ \mathrm{b}] \angle h[y_0^{\mathtt{r}}/ \mathrm{a}]$. ♦

5.1.15 Resultados sobre a Atribuição de vetores a termos de $\lambda R^{\supset}$

Os resultados aqui completam esta seqüência de lemas do artigo de Howard. Após estabelecidas todas as propriedades sobre as expressões e vetores, finalmente vamos relacioná-los com os termos de $\lambda R^{\supset}$ e provar que, segundo a relação $\angle$, as expressões associadas a cada termo diminuem com as reduções.

Como estamos considerando apenas a atribuição de vetores a termos de $\lambda R^{\supset}$ e não a atribuição completa de Howard de vetores a termos de $\boldsymbol{\mathcal{T}}$, as provas para este caso restrito são portanto obtidas diretamente das provas originais de Howard, apenas desconsiderando os casos que tratam das particularidades de $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ e considerando apenas os casos que tratam das reduções em $\lambda R^{\supset}$.

5.1.15.1 LEMA:

Seja x_{s} uma variável com ocorrências livres em H. Seja F um termo do mesmo tipo que x_{s}, e sejam $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{h}$ os vetores associados a F e H respectivamente. Então $\boldsymbol{h}[\boldsymbol{y}^{\mathsf{s}}/\boldsymbol{f}]$ é o vetor atribuído à $\mathsf{F}[x_{\mathsf{s}}/ \mathsf{H}]$. ♦

A prova deste lema é obtida por indução na complexidade de h e utiliza, além das definições de substituição e atribuição de vetores a termos, o Corolário 5.1.13.2.

5.1.15.2 TEOREMA:

Sejam $\mathsf{F} \equiv (\lambda x_{\mathtt{s}}.\mathsf{P})\mathsf{Q}$ e $\mathsf{G} \equiv \mathsf{P}[x_{\mathtt{s}}/\mathsf{Q}]$. Se $\lfloor \mathsf{F} \rfloor = \boldsymbol{f}$ e $\lfloor \mathsf{G} \rfloor = \boldsymbol{g}$, então:

$(\boldsymbol{g})_{\mathtt{i}} \angle (\boldsymbol{f})_{\mathtt{i}}$ para $(0 \leq i \leq lv(\boldsymbol{f}))$. ♦

Este teorema estabelece exatamente o resultado que apontamos como conseqüência do Corolário 5.1.13.4. Sua prova é, como esboçada nos comentários daquele corolário, uma conseqüência direta de 5.1.13.4 e do Lema 5.1.15.1.

5.1.15.3 LEMA:

Se $x_{\mathtt{r}}$ ocorre em H e $\lfloor \mathsf{H} \rfloor = \boldsymbol{h}$ então $y_{\mathbf{0}}^{\mathtt{r}}$ ocorre em $(\boldsymbol{h})_{\mathbf{0}}$. ♦

Este lema não consta da seqüência de Howard, no entanto seu resultado, não óbvio à primeira vista, é utilizado na demonstração do teorema seguinte. Sua demonstração é obtida sem dificuldades por indução na complexidade de $\boldsymbol{h}$ utilizando-se apenas das definições de $\delta^{\mathtt{r}}$, □ e da atribuição de vetores a termos.

O teorema seguinte é o resultado principal do artigo. Representa exatamente a Proposição 5.1.3-(3) e assegura que as expressões atribuídas aos termos de $\lambda R^{\supset}$ diminuem com as reduções. Dessa forma, associando-o com a interpretação finitária para $\boldsymbol{E}$, apresentada em 5.1.2.3, temos uma atribuição finita de ordinais a termos de $\lambda R^{\supset}$ que diminui com as reduções. Temos portanto um Ordinal Natural para cada termo de $\lambda R^{\supset}$. A título de esclarecer o papel de cada um dos resultados importantes da seqüência que apresentamos, esboçaremos a prova deste teorema.

5.1.15.4 TEOREMA:

Seja $\mathsf{F} \rightarrow_{\Delta} \mathsf{G}$ uma <u>redução restrita</u>. Se $\lfloor \mathsf{F} \rfloor = \boldsymbol{f}$ e $\lfloor \mathsf{G} \rfloor = \boldsymbol{g}$, então:

(*a*) $(\boldsymbol{g})_{\mathtt{i}} \underline{\angle} (\boldsymbol{f})_{\mathtt{i}}$ para $1 \leq i \leq lv(\boldsymbol{f})$;

(*b*) $(\boldsymbol{g})_{\mathbf{0}} \angle (\boldsymbol{f})_{\mathbf{0}}$.

PROVA:

(i) Como $\Delta \subset \mathsf{F}$, é fácil ver que existe um termo H tal que $\mathsf{F} \equiv \mathsf{H}[x_r/\Delta]$, onde x_r não ocorre em Δ.

(ii) Seja $(\lambda x_s.\mathsf{P})\mathsf{Q} \equiv \Delta \rightarrow \Delta' \equiv \mathsf{P}[x_s/\mathsf{Q}]$ a contração expressa em $\mathsf{F} \rightarrow_\Delta \mathsf{G}$. Então, analogamente a (i) temos: $\mathsf{G} \equiv \mathsf{H}[x_r/\Delta']$.

(iii) Considere: $\lfloor\Delta\rfloor = \boldsymbol{a}$, $\lfloor\Delta'\rfloor = \boldsymbol{b}$ e $\lfloor\mathsf{H}\rfloor = \boldsymbol{h}$.

(iv) Por (i), (ii), (iii) e pelo Lema 5.1.15.1 temos:

$$\boldsymbol{f} = \lfloor\mathsf{F}\rfloor = \lfloor\mathsf{H}[x_r/\Delta]\rfloor = \boldsymbol{h}[\boldsymbol{y}^r/\boldsymbol{a}].$$

$$\boldsymbol{g} = \lfloor\mathsf{G}\rfloor = \lfloor\mathsf{H}[x_r/\Delta']\rfloor = \boldsymbol{h}[\boldsymbol{y}^r/\boldsymbol{b}].$$

(v) Como x_r ocorre livre em H, pelo Lema 5.1.15.3 temos que y_0^r ocorre em $\boldsymbol{h}_0$.

(vi) Como $\boldsymbol{h}$ é vetor associado a um termo, então $\boldsymbol{h}$ está em C. Logo, $\boldsymbol{h}_0$ está em C_0.

(vii) Por (ii), (iii) e pelo Teorema 5.1.15.2 temos: $\boldsymbol{b}_i \angle \boldsymbol{a}_i$, para $0 \leq i \leq lv(\boldsymbol{a})$.

($viii$) Note que como $\Delta \rightarrow \Delta'$, então Δ e Δ' são termos do mesmo tipo. Além disso, como $\mathsf{H}[x_r/\Delta]$ é termo bem formado, temos que Δ e x^r são do mesmo tipo. Logo, por 5.1.1.2, $lv(\Delta) = lv(\Delta') = lv(x_r)$ e portanto, por (iii) e 5.1.3-(1), $lv(\boldsymbol{a}) = lv(\boldsymbol{b}) = lv(\boldsymbol{y}^r)$.

(ix) Pela Definição 5.1.10 de substituição temos:

$$\boldsymbol{h}[\boldsymbol{y}^r/\boldsymbol{a}] = \langle \boldsymbol{h}_0[y_0^r/\boldsymbol{a}_0]\ldots[y_n^r/\boldsymbol{a}_n], \ldots, \boldsymbol{h}_p[y_0^r/\boldsymbol{a}_0]\ldots[y_n^r/\boldsymbol{a}_n]\rangle.$$

$$\boldsymbol{h}[\boldsymbol{y}^r/\boldsymbol{b}] = \langle \boldsymbol{h}_0[y_0^r/\boldsymbol{b}_0]\ldots[y_n^r/\boldsymbol{b}_n], \ldots, \boldsymbol{h}_p[y_0^r/\boldsymbol{b}_0]\ldots[y_n^r/\boldsymbol{b}_n]\rangle,$$

onde, por ($viii$), $n = lv(\boldsymbol{a}) = lv(\boldsymbol{b}) = lv(\boldsymbol{y}^r)$ e $p = lv(\boldsymbol{h})$.

(x) Como, por (vii), $\boldsymbol{b}_i \angle \boldsymbol{a}_i$, para $0 \leq i \leq n$, aplicando n vezes o Lema 5.1.14.1 a cada componente $\boldsymbol{h}_j$ de $\boldsymbol{h}$ obtemos, por transitividade de $\underline{\angle}$:

$$\boldsymbol{h}_j[y_0^r/\boldsymbol{b}_0]\ldots[y_n^r/\boldsymbol{b}_n] \mathrel{\underline{\angle}} \boldsymbol{h}_j[y_0^r/\boldsymbol{a}_0]\ldots[y_n^r/\boldsymbol{a}_n] \quad , \quad \text{para } (0 \leq j \leq lv(\boldsymbol{h})) \Rightarrow_{(5.1.10)}$$

$$(\boldsymbol{h}[\boldsymbol{y}^r/\boldsymbol{b}])_j \mathrel{\underline{\angle}} (\boldsymbol{h}[\boldsymbol{y}^r/\boldsymbol{a}])_j \quad , \quad \text{para } (0 \leq j \leq lv(\boldsymbol{h})) \Rightarrow_{(iv)}$$

(xi) $\boldsymbol{g}_j \mathrel{\underline{\angle}} \boldsymbol{f}_j$ para $(0 \leq j \leq lv(\boldsymbol{f}))$, o que prova o Item ($a$).

Como, por (i), x_r não ocorre em Δ, então y_i^r não ocorre em $\boldsymbol{a}$ nem em $\boldsymbol{b}$ $(1 \leq i \leq n)$. Assim, a ordem das substituições em $\boldsymbol{h}_j[y_0^r/\boldsymbol{b}_0]\ldots[y_n^r/\boldsymbol{b}_n]$ e $\boldsymbol{h}_j[y_0^r/\boldsymbol{a}_0]\ldots[y_n^r/\boldsymbol{a}_n]$ não importa, portanto:

$$(xii)\ \boldsymbol{h}_j[y_0^r/\boldsymbol{b}_0][y_1^r/\boldsymbol{b}_1]\ldots[y_n^r/\boldsymbol{b}_n] \equiv \boldsymbol{h}_j[y_1^r/\boldsymbol{b}_1]\ldots[y_n^r/\boldsymbol{b}_n][y_0^r/\boldsymbol{b}_0] \text{ e}$$

$$\boldsymbol{h}_j[y_0^r/\boldsymbol{a}_0][y_1^r/\boldsymbol{a}_1]\ldots[y_n^r/\boldsymbol{a}_n] \equiv \boldsymbol{h}_j[y_1^r/\boldsymbol{a}_1]\ldots[y_n^r/\boldsymbol{a}_n][y_0^r/\boldsymbol{a}_0].$$

Como, por (vi), $\boldsymbol{h}_0$ está em C_0 e por (iii), $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{a}$ estão em C, então, pelo Lema 5.1.12.3, temos que $\boldsymbol{h}_0[y_0^r/\boldsymbol{b}_0]\ldots[y_n^r/\boldsymbol{b}_n]$ está em C_0. Além disso, como por (v), y_0^r ocorre em $\boldsymbol{h}_0$, é claro que y_0^r também ocorre em $\boldsymbol{h}_0[y_1^r/\,\boldsymbol{b}_1]\ldots[y_n^r/\,\boldsymbol{b}_n]$, pois y_0^r não é uma das variáveis que sofreram substituição. Portanto, como por (*vii*) $\boldsymbol{b}_0 \angle \boldsymbol{a}_0$, podemos aplicar o Lema 5.1.14.2 em $\boldsymbol{h}_0[y_1^r/\,\boldsymbol{b}_1]\ldots[y_n^r/\,\boldsymbol{b}_n] \equiv \boldsymbol{h}_0[y_1^r/\,\boldsymbol{b}_1]\ldots[y_n^r/\,\boldsymbol{b}_n][y_0^r/\,\boldsymbol{b}_0]$ e obtemos:

(*xiii*) $\boldsymbol{h}_0[y_0^r/\,\boldsymbol{b}_0][y_1^r/\,\boldsymbol{b}_1]\ldots[y_n^r/\,\boldsymbol{b}_n] \angle \boldsymbol{h}_0[y_0^r/\,\boldsymbol{a}_0][y_1^r/\,\boldsymbol{b}_1]\ldots[y_n^r/\,\boldsymbol{b}_n]$.

Repetindo n-1 vezes este argumento temos:

(*xiv*) $\boldsymbol{h}_0[y_0^r/\,\boldsymbol{b}_0]\ldots[y_n^r/\,\boldsymbol{b}_n] \angle \boldsymbol{h}_0[y_0^r/\,\boldsymbol{a}_0]\ldots[y_n^r/\,\boldsymbol{a}_n] \Rightarrow_{(5.1.10)}$

$(\boldsymbol{h}[\boldsymbol{y}^r/\,\boldsymbol{b}])_0 \angle (\boldsymbol{h}[\boldsymbol{y}^r/\,\boldsymbol{a}])_0 \Rightarrow_{(iv)}$

(*xv*) $\boldsymbol{g}_0 \angle \boldsymbol{f}_0$.

Portanto, por (*ix*) e (*xv*) demonstramos o teorema. ♦

5.1.16 Extensão dos Resultados de Howard para Reduções Gerais

O sistema $\boldsymbol{T}$ de Gödel não é formalizado em $\lambda R^{\supset}$, mas em $\lambda^{\supset}$. Então, para o artigo de Howard funcionar, mesmo para os seus propósitos originais, ele precisa estender seus resultados para abranger as reduções gerais (Definição 5.1.1.5). Em outras palavras, ele precisa provar um teorema similar a 5.1.15.4, no qual o redex contraído possa ser um subtermo, e não apenas um I-subtermo. Com este resultado teríamos como conseqüência não um Ordinal Natural para $\lambda R^{\supset}$, mas um Ordinal Natural para $\lambda^{\supset}$.

Howard propõe uma maneira de estender seus resultados para o caso das reduções gerais através da definição de uma atribuição não unívoca de vetores a termos. A nova atribuição difere da anterior (5.1.3-(1)) apenas para o caso de termos do tipo: $\lambda x^r.\mathsf{H}$. Para este caso ele define:

(1) $\lfloor \lambda x^r.\mathsf{H} \rfloor = \delta^r \boldsymbol{d} + \boldsymbol{h}[\boldsymbol{y}^r/\,\boldsymbol{e}]$, onde:

$\boldsymbol{e} = \langle 1, \ldots, 1 \rangle$ com $lv(\boldsymbol{e}) = lv(\boldsymbol{y}^r)$,

$\boldsymbol{h}$ é qualquer vetor atribuído a H,

$\boldsymbol{d}$ é qualquer vetor atribuído a um termo D tal que D se reduz a H por um número finito de passos ($\mathsf{D} \equiv \mathsf{D}_0 \to \mathsf{D}_1 \to \ldots \to \mathsf{D}_k \equiv \mathsf{H}$ e $k \in \omega$).

Com esta nova atribuição, $\lfloor \lambda x.\mathsf{F} \rfloor$ não corresponde a um vetor específico, mas a um conjunto enumerável de vetores, com um vetor distinto para cada atribuição $\boldsymbol{d}$ de cada termo D distinto que se reduz finitamente a H. Genericamente, qualquer termo F que possua alguma subfórmula do tipo $\lambda x.\mathsf{G}$ terá uma quantidade enumerável de vetores a ele atribuídos.

Howard, utilizando esta nova atribuição de vetores, prova então um teorema substituto de 5.1.15.4 para o caso das reduções gerais.

5.1.16.1 TEOREMA:

Seja $\mathsf{F} \rightarrow_{\Delta} \mathsf{G}$ uma redução geral.

Seja $\boldsymbol{f}$ algum vetor atribuído a F por 5.1.16-(1).

Então **existe** um vetor $\boldsymbol{g}$ atribuído à G tal que:

$(\boldsymbol{g})_i \preceq (f)_i$, para $1 \leq i \leq lev(f)$ e $(\boldsymbol{g})_0 \angle (f)_0$.

5.1.16.2 COMENTÁRIO: Restrição da Extensão dos Resultados de Howard

A nova atribuição de vetores a termos permite uma quantidade enumerável de vetores atribuídos a um único termo. O Teorema 5.1.16.1, dada a redução geral $\mathsf{F} \rightarrow \mathsf{G}$, não exibe qual dos possíveis vetores $\boldsymbol{g}$ atribuídos a G satisfaz $(\boldsymbol{g})_0 \angle (f)_0$, apenas mostra que existe um vetor $\boldsymbol{g}$ que satisfaz tal propriedade. Portanto, 5.1.16.1 é apenas um resultado existencial. Ao contrário, 5.1.15.4 é um resultado construtivo, que exibe exatamente qual o vetor que satisfaz a propriedade desejada.

Para a obtenção de normalização forte para $\lambda^{\supset}$, este resultado existencial é suficiente, pois assegura que para cada seqüência de redução $\mathsf{F}_1 \rightarrow \mathsf{F}_2 \rightarrow \mathsf{F}_3 \rightarrow \ldots$ existe uma seqüência de números naturais relacionados a cada termo da seqüência de redução tal que $f_1 > f_2 > f_3 \ldots$. Portanto, toda seqüência de redução termina.

Apesar de conter um resultado de normalização forte para $\lambda^{\supset}$, não podemos dizer, no entanto, que o artigo de Howard apresenta a definição construtiva de um ordinal natural para $\lambda^{\supset}$, pois, seguindo os seus passos, não sabemos como construir, para cada termo, este número que diminui com qualquer redução. Sabemos que existe um entre uma lista enumerável de possibilidades que Howard nos oferece, mas não sabemos exatamente qual é.

5.1.17 Comentários Finais sobre Howard[1968]

Como vimos, o artigo de Howard foi escrito com o objetivo de realizar uma análise ordinal da aritmética intuicionista de primeira ordem, formalizada pela teoria de funcionais de tipos finitos $\boldsymbol{T}$, de Gödel, que por sua vez pode ser formalizada em cálculo lambda tipificado. Realizar uma análise ordinal de uma teoria formal T significa identificar o "tamanho" dos recursos infinitos necessários para provar a consistência de T. No caso da aritmética intuicionista de primeira ordem $\boldsymbol{H}$, Howard provou, através da teoria $\boldsymbol{T}$, que, admitindo indução transfinita até o ordinal ε_0, conseguimos demonstrar a consistência de $\boldsymbol{H}$. Tal resultado é o mesmo obtido por **Gentzen[1938]**, que utilizou uma formalização de $\boldsymbol{H}$ em cálculo de seqüentes.

Neste estudo que fizemos do artigo de Howard, desconsideramos as peculiaridades de $\boldsymbol{T}$ e focalizamos apenas os seus resultados aplicados às reduções-β em $\lambda^{\supset}$. Agindo deste modo encontramos, como conseqüência imediata dos resultados de Howard, a prova do Teorema de Normalização Forte para $\lambda^{\supset}$.

Até bem pouco tempo atrás não tínhamos conhecimento de nenhum outro trabalho que apontasse, como conseqüência do artigo de Howard, uma prova de normalização forte para $\lambda^{\supset}$. Recentemente tivemos notícia da dissertação de mestrado "*Abschätzung der Berechnungskomplexität von Gödels T und seinen Teilsystemen*", de Gunnar Wilken, defendida em agosto de 1998 na Universidade de Münster, que, segundo o autor, aponta a normalização forte de $\lambda^{\supset}$ como uma das conseqüências do artigo **Howard[1968]**. Wilken realiza um bonito trabalho sobre a teoria $\boldsymbol{T}$ de Gödel, quando formalizada em $\lambda^{\supset}$, que tem por base o artigo **Howard[1968]**. Utilizando os resultados de Howard ele define uma atribuição numérica finitária I a termos da teoria $\boldsymbol{T}$ que diminui com as reduções:

Para t_1 e t_2, termos de $\boldsymbol{T}$, Wilken demonstra que:

$$I(t_1) < \omega.$$
$$t_1 \to t_2 \;\Rightarrow\; I(t_1) > I(t_2).$$

Como conseqüência deste fato Wilken demonstra a normalização forte de $\boldsymbol{T}$ e ainda apresenta uma estimativa para a complexidade do comprimento das seqüências de redução para $\boldsymbol{T}$.

À primeira vista, o resultado de Wilken reduz de ε_0 para ω a análise ordinal da teoria $\boldsymbol{T}$. No entanto, como comentamos no início desta seção, a normalização forte de $\boldsymbol{T}$ implica em uma prova finitária da consistência da aritmética intuicionista de primeira ordem $\boldsymbol{H}$, o que contraria o Teorema da Incompletude, de Gödel. Como explicar então o resultado de Wilken? A resposta está na utilização de uma função de colapso de ε_0 em ω (ψ : $\varepsilon_0 \rightarrow \omega$) introduzida por **Weiermann[1998]**.[45] Wilken utiliza uma versão suavemente modificada da atribuição de Howard de ordinais menores que ε_0 a termos de $\boldsymbol{T}$ e aplica a estes ordinais a função de colapso de Weiermann, obtendo assim um ordinal natural I para termos de $\boldsymbol{T}$ e, conseqüentemente, a normalização forte de $\boldsymbol{T}$. No entanto, a função de colapso ψ não é computável, é apenas ε_0-recursiva. Dessa forma, a prova de Wilken de que para cada termo de $\boldsymbol{T}$ existe uma seqüência de redução finita que termina em um termo normal não é, ela própria, finitária, pois sua atribuição numérica $I(t_1)$ necessita de pelo menos ε_0 passos para encontrar um número natural que diminua com as reduções de t_1. Assim, não podemos dizer que o resultado de Wilken reduz de ε_0 para ω a análise ordinal de $\boldsymbol{T}$, pois as seqüências de redução finitas indicadas por Wilken, que normalizam os termos de $\boldsymbol{T}$, não podem ser obtidas finitamente.

De qualquer forma, o trabalho de Wilken é bastante engenhoso e exigiu um conhecimento profundo do artigo **Howard[1968]**, além do que, aponta para um dado bastante importante sobre provas de normalização forte via ordinal natural: a complexidade da atribuição numérica utilizada. Um resultado de normalização forte, via ordinal natural, que tenha sido obtido por uma atribuição numérica de complexidade não finita tem significado restrito. Ou seja, a complexidade da atribuição numérica aos termos é tão importante quanto o comprimento das seqüências de redução.

[45] **Weiermann[1998]** apresenta os mesmos resultados que Wilken apresenta para a teoria $\boldsymbol{I}$, no entanto Weiermann utiliza uma formalização de $\boldsymbol{T}$ em lógica combinatória, e como conseqüência disso, obtém seus resultados de modo mais simples que Wilken.

§2 O Artigo Vrijer[1987]

Neste artigo o autor demonstra o Teorema de Normalização Forte para o sistema $\lambda^{\supset}$ de cálculo lambda tipificado de duas maneiras: na primeira e mais direta delas, ele atribui para cada termo M um número natural que é limitante superior para o comprimento de todas as seqüências de redução para M. Através de um refinamento deste método, Vrijer obtém uma segunda atribuição que, para cada termo M de $\lambda^{\supset}$, calcula exatamente o comprimento da árvore de redução de M. Tal expressão calcula "o número de passos de uma seqüência de redução para M de tamanho máximo"[46]. Esta seqüência de redução de tamanho máximo é obtida aplicando-se a estratégia perpétua, definida em **Barendregt[1990]** que, para cada termo de cálculo lambda livre de tipos, sempre acha uma seqüência de redução infinita, quando existe uma.

Por se aproximar mais da nossa definição de $o(\pi)$ para o caso de Dedução Natural, vamos aqui nos ater a esta segunda atribuição, denominada de *estimativa exata*. Quanto à primeira atribuição, a *estimativa frouxa*, apenas apresentaremos sua definição e alguns comentários.

A estimativa exata [M] é definida de modo a conter uma expressão para o comprimento da árvore de redução de M, denotado por h(M) e, além disso, conter todas as informações necessárias para calcular a estimativa exata para o termo MN a partir da estimativa de N, se o termo aplicativo MN for bem formado. Mais explicitamente: Se M é termo do tipo $A\supset B$, então a expressão [M] denota o par $\langle f, m\rangle$, onde m é um número que indica a altura da árvore de redução de M (m= h(M)), e f é um funcional tal que a equação f[N]= [MN] é válida para cada termo N do tipo A. Se o tipo de M é atômico, então [M] apenas denota a altura h(M). Assim, denotando [M]= ⟨[M]', [M]*⟩, o objetivo principal do artigo é demonstrar que [M]*= h(M), ou seja, que a estimativa exata [M] de fato calcula exatamente o comprimento da árvore de redução para M.

Estes pares de que estamos falando (⟨[M]', [M]*⟩) pertencem a uma hierarquia muito semelhante à hierarquia dos *funcionais de tipos finitos*, bastante estudada por Kleene. Tal

---

[46] Cf. **Vrijer [1987]**, p. 479. Na verdade, o resultado de Vrijer é obtido para um sistema mais simples que $\lambda^{\supset}$, e que possui apenas um tipo básico, ao invés de uma quantidade enumerável deles. No entanto, seus resultados se aplicam diretamente para $\lambda^{\supset}$ e vamos descrevê-los neste sistema.

hierarquia foi chamada por Vrijer de hierarquia dos *funcionais de tipos finitos hereditariamente rotulados*, ou, mais abreviadamente, de *funcionais rotulados*.[47]

Apresentamos a seguir a seqüência de definições e resultados do artigo relativos à estimativa exata. Nosso principal objetivo é esclarecer totalmente o método utilizado pelo autor, e para tanto não nos preocuparemos com as demonstrações dos resultados, mas com explicações intuitivas das motivações e conseqüências tanto dos resultados parciais quanto das definições. No entanto, apresentaremos algumas demonstrações quando julgarmos oportuno para a compreensão do método. Algumas destas provas, inclusive, não foram desenvolvidas originalmente no artigo.

5.2.1 DEFINIÇÃO: Os Funcionais Rotulados

A coleção de *funcionais rotulados do tipo* A, L_A, é definida por indução nos tipos da seguinte forma:

$$L_o = \omega,$$
$$L_{B\supset C} = (L_B \rightarrow L_C) \times \omega,$$

onde: o denota um tipo atômico qualquer,
ω o conjunto dos números naturais,
$\times$ o produto cartesiano e
$\rightarrow$ o espaço de funções.

5.2.1.1 NOTAÇÕES:

(*a*) Denotaremos $f \in L_{B\supset C}$ por $f = \langle f', f^* \rangle$ tal que f': $L_B \rightarrow L_C$ e $f^* \in \omega$.

(*b*) Dados $f \in L_{B\supset C}$ e $g \in L_B$ a notação $f'g$ denota o funcional pertencente a L_C, obtido da aplicação do componente funcional de f a g.

(*c*) Muitas vezes, por abuso de linguagem, denotaremos f' apenas por f. Dessa forma a notação fg é uma abreviação para $f'g$.

(*d*) Como regra, os subíndices de tipos serão omitidos sempre que for possível fazê-lo sem causar confusão. Assim, $f \in L$ significa que $f \in L_A$ para algum tipo A. Também, ao

[47] Para uma introdução à teoria de funcionais de tipos finitos ver **Kleene[1959]**, **Kleene[1978]**.

escrevermos uma expressão do tipo fg, estamos assumindo os tipos apropriados, ou seja, para certos tipos A e B, $f \in \mathsf{L}_{\mathsf{A \supset B}}$ e $g \in \mathsf{L}_{\mathsf{A}}$.

5.2.1.2 EXEMPLOS:

(i) $L_{o \supset o} = (L_o \to L_o) \times \omega = (\omega \to \omega) \times \omega$ e

$f \in L_{o \supset o} \Rightarrow f = \langle f', f^* \rangle$ tal que $f' : \omega \to \omega$ e $f^* \in \omega$.

(ii) $L_{(o \supset o) \supset (o \supset o)} = (L_{o \supset o} \to L_{o \supset o}) \times \omega \underset{(i)}{=} (((\omega \to \omega) \times \omega) \to ((\omega \to \omega) \times \omega)) \times \omega$ e

$g \in L_{(o \supset o) \supset (o \supset o)} \Rightarrow g = \langle g', g^* \rangle$ tal que $g' : ((\omega \to \omega) \times \omega) \to ((\omega \to \omega) \times \omega)$ e $g^* \in \omega$.

5.2.2 DEFINIÇÃO: A Operação $+_{\mathsf{A}}$

Para $f \in L_{\mathsf{A}}$ e $n \in \omega$ definimos $(f +_{\mathsf{A}} n) \in L_{\mathsf{A}}$ por indução em A da seguinte forma:

$m +_o n = m + n$,

$f +_{\mathsf{A \supset B}} n = \langle \Lambda g.(fg +_{\mathsf{B}} n), f^* + n \rangle$ (com $g \in \mathsf{L}_{\mathsf{A}}$).

5.2.2.1 OBSERVAÇÕES:

(a) O símbolo Λ é usado aqui para *abstração funcional* na metalinguagem, ou seja, está fazendo o papel que o símbolo λ faz na sintaxe de λ-cálculo.

(b) Como estamos lidando com funcionais sobre ω que possuem características extensionais tanto quanto as funções da aritmética, vale na semântica as reduções-η, e portanto $\Lambda g.fg = f$. Assim, a notação $\Lambda g.(fg +_{\mathsf{B}} \mathrm{n})$ representa uma maneira de dizer que estamos somando n à "expressão" da parte funcional de f. Ou seja, $\Lambda g.(fg +_{\mathsf{B}} n)$ representa um funcional que além de efetuar todas as operações descritas na expressão de f, realiza mais uma $(+_{\mathsf{B}}\ n)$.

(c) Note que se $f \in \mathsf{L}_{\mathsf{A \supset B}}$, então, como $g \in \mathsf{L}_{\mathsf{A}}$, temos que $fg \in \mathsf{L}_{\mathsf{B}}$ e $(fg +_{\mathsf{B}} n) \in \mathsf{L}_{\mathsf{B}}$. Logo, $\Lambda g.(fg +_{\mathsf{B}} n) \in \mathsf{L}_{\mathsf{A \supset B}}$.

(d) Demonstra-se facilmente, por indução nos tipos, que $+_{\mathsf{A}}$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $(f + n)g = fg + n$;

(ii) $(f + n)^* = f^* + n$;

(iii) $f + 0 = f$;

(iv) $(f + m) + n = f + (m + n)$.

5.2.2.2 EXEMPLO:

Seja $f \in L_{o\supset o} \mid f = \langle \Lambda m.(m+2), 3\rangle$ (Note que $m\in\omega$, $(\Lambda m.(m+2)) \in \omega\to\omega$ e $3\in\omega$).

Assim, $f +_{o\supset o} 3 = \langle \Lambda m.(m+2), 3\rangle +_{o\supset o} 3$

$= \langle \Lambda m.((m+2) +_o 3), 3+3\rangle$

$= \langle \Lambda m.(m+5), 6\rangle \in \mathsf{L}_{(o)o}$.

5.2.3 DEFINIÇÃO: Funcionais Minimamente Cumulativos

Por indução nos tipos definimos, para cada $n\in\omega$, o *funcional minimamente cumulativo* $c_n^{\mathsf{A}}\in\mathsf{L}_{\mathsf{A}}$ da seguinte maneira:

$$c_n^o = n,$$

$$c_n^{\mathsf{A}\supset\mathsf{B}} = < \Lambda f.c^{\mathsf{B}}_{n+f^*}, n> \qquad \text{(com } f\in\mathsf{L}_{\mathsf{A}}\text{).}$$

5.2.3.1 PROPRIEDADES:

Com relação a estes funcionais demonstra-se as seguintes propriedades:

(*a*) $c_n f_1 \ldots f_m = c_{n+f_1^*+\ldots+f_m^*}$ (acumulação);

(*b*) $(c_o f_1\ldots f_m)^* = f_1^* + \ldots + f_m^*$ (caso particular de (*i*));

(*c*) $c_n^{\alpha} + m = c^{\alpha}_{n+m}$.

Vejamos, como ilustração, as provas de (*a*) e (*c*).

<u>PROVA</u>:

• Item (*a*)

$c_n f_1\ldots f_m = (((c_n f_1) f_2)\ldots) f_m$ (por convenção de parênteses)

Mas pela Definição 5.2.3:

$c_n f_1 = (\Lambda f.c_{n+f^*}) f_1 \underset{\text{por } \beta\text{-redução}}{=} c_{n+f_1^*}$

Assim, $c_n f_1\ldots f_m = (((c_{n+f_1^*}) f_2)\ldots) f_m$.

Dessa forma, aplicando-se m vezes a Definição 5.2.3 temos:

$c_n f_1\ldots f_m = c_{n+f_1^*+\ldots+f_m^*}$. □

• Item (*c*)

Indução em A.

<u>BASE</u>: ($A = o$)

$c_n^o + m \underset{5.2.3}{=} n + m \underset{5.2.3}{=} c^o_{n+m}$.

<u>PASSO</u>: $A \equiv B\supset C$

$(i)\ (c_n^{B\supset C}+m)^* \underset{5.2.2.1\text{-(d)(ii)}}{=} (c_n^{B\supset C})^*+m \underset{5.2.3}{=} n+m \underset{5.2.3}{=} (c_{n+m}^{B\supset C})^*.$

Além disso, se $f\in L_B$, então:

$(ii)\ (c_n^{B\supset C}+m)f \underset{5.2.2.1\text{-(d)(i)}}{=} c_n^{B\supset C}f+m \underset{5.2.3.1(a)}{=} c_{n+f^*}^{C}+m.$

Mas por hipótese de indução:

$(iii)\ c_{n+f^*}^{C}+m = c_{n+f^*+m}^{C} \underset{5.2.3.1(a)}{=} c_{n+m}^{B\supset C}f.$

Portanto, por (ii) e (iii) temos:

$(c_n^{B\supset C}+m)f = c_{n+m}^{B\supset C}f$. Rigorizando a notação: $(c_n^{B\supset C}+m)'f = (c_{n+m}^{B\supset C})'f$.

Logo, por extensionalidade dos funcionais:

$(iv)\ (c_n^{B\supset C}+m)' = (c_{n+m}^{B\supset C})'$.

Assim, por (i) e (iv) temos: $c_n^{B\supset C}+m = c_{n+m}^{B\supset C}$. ♦

5.2.4 DEFINIÇÃO: Atribuição de Funcionais a Variáveis x^A

Seja x^A uma variável de $\lambda^{\supset}$ do tipo A. Uma *atribuição* v associa o valor $v(x^A)\in L_A$ para cada variável x^A.

Seja $f\in L$. Utilizaremos a notação $v(x/f)$ para a atribuição que corresponde a v para qualquer argumento com exceção de x, para o qual $v(x/f)$ associa o valor f. Assim temos:

$v(x/f)(x)=f;$

$v(x/f)(y)=v(y)$ se $y\neq x$.

5.2.5 DEFINIÇÃO: Estimativa Frouxa

Seja M um termo do tipo A. A *estimativa frouxa relativa a atribuição* v $\{M\}_v\in L_A$ é definida, para uma atribuição v qualquer, por indução na complexidade de M, da seguinte forma:

$(i)\ \{x\}_v = v(x);$

$(ii)\ \{M_0M_1\}_v = \{M_0\}_v\{M_1\}_v;$

$(iii)\ \{\lambda x^A.M_0\}_v = \langle \Lambda f.\{M_0\}_{v(x/f)}+f^*+1\ ,\ \{M_0\}_{v(x/c_0^A)}{}^*\rangle$ (com $f\in L_A$).

Considere e a atribuição definida por $e(x^A)=c_0^A$. A *estimativa frouxa* $\{M\}$ para um termo M é definida por: $\{M\}=\{M\}_e$.

5.2.6 DEFINIÇÃO: Estimativa Exata

Seja M um termo do tipo A. A *estimativa exata relativa à atribuição v* $[\mathsf{M}]_v \in L_A$ é definida para cada atribuição v, por indução na complexidade de M da seguinte forma:

(i) $[x]_v = v(x)$;

(ii) $[\mathsf{M}_0\mathsf{M}_1]_v = [\mathsf{M}_0]_v[\mathsf{M}_1]_v$;

(iii) $[\lambda x^{\alpha}.\,\mathsf{M}_0]_v = \langle \Lambda f.[\mathsf{M}_0]_v + f^* + 1\ ,\ [\mathsf{M}_0]_v{}^* \rangle$ (com $f \in L_A$) , se $x \notin FV(\mathsf{M}_0)$, e

$\langle \Lambda f.[\mathsf{M}_0]_{v(x/f)} + 1\ ,\ [\mathsf{M}_0]_{v(x/c_0^A)}{}^* \rangle$ (com $f \in L_A$) , se $x \in FV(\mathsf{M}_0)$.

Considere e a atribuição definida por $e(x^A) = c_0^A$. A *estimativa exata* $[\mathsf{M}]$ para um termo M é definida por: $[\mathsf{M}] = [\mathsf{M}]_e$.

5.2.6.1 OBSERVAÇÃO:

Note que se $x \notin FV(\mathsf{M})$, a atribuição v e a atribuição $v(x/f)$ têm o mesmo efeito sobre M e, portanto, $[\mathsf{M}]_v = [\mathsf{M}]_{v(x/f)}$.

5.2.6.2 EXEMPLOS:

Vamos, a título de ilustração, calcular a estimativa exata para os seguintes exemplos:

•(a) $[\lambda x^o.y^o] \underset{5.2.6(iii)}{=} \langle \Lambda f.[y^o]_e + f^* + 1\ ,\ [y^o]_e{}^* \rangle$ (com $f \in L_o$) (já que $y^o \notin x^o$)

$\underset{5.2.6(i)}{=} \langle \Lambda m.e(y^o) + m + 1\ ,\ e(y^o)^* \rangle$ (pois $f \in L_o \Rightarrow f = m \in \omega$)

$= \langle \Lambda m.c_0^o + m + 1\ ,\ c_0^{o*} \rangle$ (pois $e(x^A) = c_0^A$)

$\underset{5.2.3}{=} \langle \Lambda m.m + 1\ ,\ 0 \rangle$. □

•(b) $[\lambda x^{o\supset o}.(\lambda y^o.x(xy))]$.

(i) $[\lambda x^{o\supset o}.(\lambda y^o.x(xy))] = \langle \Lambda f.[\lambda y^o.x(xy)]_{e(x/f)} + 1,\ [\lambda y^o.x(xy)]_{e(x/c_o^{o\supset o})}{}^* \rangle$.

(ii) $[\lambda y^o.x(xy)]_{e(x/f)} = \langle \Lambda m.[x(xy)]_{e(x/f)\,(y/m)} + 1,\ [x(xy)]_{e(x/f)\,(y/c_o^o)}{}^* \rangle$.

(iii) $[x(xy)]_{e(x/f)\,(y/m)} = [x]_{e(x/f)\,(y/m)}([x]_{e(x/f)\,(y/m)}[y]_{e(x/f)\,(y/m)}) = f(fm)$.

(iv) $[x(xy)]_{e(x/f)\,(y/c_o^o)} = [x]_{e(x/f)\,(y/c_o^o)}([x]_{e(x/f)\,(y/c_o^o)}\ [y]_{e(x/f)\,(y/c_o^o)}) = f(fc_o^o) = f(f0)$.

(v) $[\lambda y^o.x(xy)]_{e(x/c_o^{o\supset o})}{}^* \underset{(ii)}{=} [x(xy)]_{e(x/c_o^{o\supset o})\,(y/c_o^o)}{}^* \underset{(iii)}{=} c_o^{o\supset o}(c_o^{o\supset o}c_o^o) = c_o^{o\supset o}c_o^o = c_o^o = 0$.

Por (ii), (iii) e (iv) temos:

(vi) $[\lambda y^o.x(xy)]_{e(x/f)} = \langle \Lambda m.f(fm) + 1, f(f0) \rangle$.

Por (i), (v) e (vi) temos:

$$
\begin{aligned}
[\lambda x^{\circ\supset\circ}.(\lambda y^{\circ}.x(xy))] &= \langle \Lambda f.\langle \Lambda m.f(fm)+1, f(f0)\rangle + 1, 0\rangle. \\
&= \langle \Lambda f.\langle \Lambda m.f(fm)+2, f(f0)+1\rangle, 0\rangle. \;\square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bullet(c)\; [(\lambda x^{(\circ)\circ}y^{\circ}.x(xy))\lambda z^{\circ}.z] &\underset{5.2.6(ii)}{=} [\lambda x^{(\circ)\circ}y^{\circ}.x(xy)][\lambda z^{\circ}.z] \\
&\underset{(a)\text{ e }(b)}{=} (\Lambda f.\langle \Lambda m.f(fm)+2\ , f(f0)+1\rangle)\langle \Lambda n.n+1\ , 0\rangle \\
&\underset{\text{redução-}\beta}{=} \langle \Lambda m.(\Lambda n.n+1)((\Lambda n.n+1)m)+2\ , (\Lambda n.n+1)((\Lambda n.n+1)0)+1\rangle \\
&= \langle \Lambda m.(\Lambda n.n+1)(m+1)+2\ , (\Lambda n.n+1)1+1\rangle \\
&= \langle \Lambda m.((m+1)+1)+2\ , (1+1)+1\rangle \\
&= \langle \Lambda m.m+4\ , 3\rangle. \;\blacklozenge
\end{aligned}
$$

5.2.7 COMENTÁRIOS: Entendendo a Definição 5.2.6

A expressão para [M] apresentada em 5.2.6 deve ser compreendida como uma contagem dos passos da redução de M de acordo com uma estratégia maximamente não econômica, que jamais permite um caminho curto quando uma rota mais longa possa ser efetuada. A estratégia contida nesta definição é exatamente a *estratégia perpétua* definida em **Barendregt[1990]** §13.4, que, em cálculo-λ livre de tipos, para cada termo M sempre encontra uma seqüência de redução infinita, se houver uma. No caso de cálculo-λ tipificado espera-se que esta estratégia produza, para um termo M, uma seqüência de redução de tamanho máximo, cujo comprimento portanto é h(M).

Analisemos cada uma das três cláusulas de 5.2.6, começando com a segunda.

(*a*) Entendendo 5.2.6-(*ii*):

A cláusula (*ii*) da Definição 5.2.6 descreve o comportamento da parte funcional da estimativa exata. Ela assegura que a estimativa [M]= ⟨[M]’, [M]*⟩ para o termo M não apenas contém o valor para h(M), que é [M]*, como também contém um funcional ([M]’) que calcula a estimativa de MN, a partir de [N], para todo N, tal que MN é bem formado. Assim, se $M \equiv M_0M_1$, então $[M] = [M_0M_1] = [M_0]'[M_1] = [M_0][M_1]$. Dessa forma, o que 5.2.6-(*ii*) faz é descrever o comportamento da parte funcional da estimativa exata.

(*b*) Entendendo 5.2.6-(*i*):

Considere o termo $x\mathsf{M}_1...\mathsf{M}_m$. Note que, colocando os parênteses, temos $(...((x\mathsf{M}_1)\mathsf{M}_2)...)\mathsf{M}_m$. Note também que em $x\mathsf{M}_1$ só ocorrem os redex de M_1, pois o termo aplicativo $x\mathsf{M}_1$ só teria novos redex além dos de M_1 se x fosse um termo da forma $\lambda y.\mathsf{N}$. Da mesma forma, $(x\mathsf{M}_1)\mathsf{M}_2$ só possui os redex que já ocorriam em M_1 e em M_2, pois $x\mathsf{M}_1$ não é da forma $\lambda y.\mathsf{N}$. Assim, o termo $x\mathsf{M}_1...\mathsf{M}_m$ possui apenas os redex internos a cada M_i, e a redução de algum deles só afeta o próprio M_i onde o redex ocorre, provocando um distúrbio apenas local. Dessa forma, se $\mathsf{M}_1,..., \mathsf{M}_m$ são fortemente normalizáveis (dos tipos apropriados), então $x\mathsf{M}_1...\mathsf{M}_m$ também o é. E mais ainda, o comprimento $h(x\mathsf{M}_1...\mathsf{M}_m)$ é dado pela equação $h(x\mathsf{M}_1...\mathsf{M}_m)= h(\mathsf{M}_1)+ ...+ h(\mathsf{M}_m)$. Isto ajusta-se com o fato de que:

$$[x\mathsf{M}_1...\mathsf{M}_m]^* \underset{5.2.6(ii)}{=} ([x][\mathsf{M}_1]...[\mathsf{M}_m])^* \underset{5.2.6(i)}{=} (c_0[\mathsf{M}_1]...[\mathsf{M}_m])^* \underset{5.2.3.1(b)}{=} [\mathsf{M}_1]^*+ ...+ [\mathsf{M}_m]^*.$$

A clausula 5.2.6(*i*), juntamente com 5.2.6(*ii*), garante portanto que a estimativa exata se comporta adequadamente no tratamento das variáveis.

(*c*) Entendendo 5.2.6-(*iii*):

É claro que $h(\lambda x^{\mathsf{A}}.\mathsf{M})= h(\mathsf{M})$, o que se ajusta ao fato de que, quer x ocorra livre ou não em M, $[\lambda x^{\mathsf{A}}.\mathsf{M}]^* \underset{5.2.6(ii)}{=} [\mathsf{M}]^*$, pois $e(x/ c_0^{\mathsf{A}})=e(x)$. Quanto à parte funcional de $[\lambda x.\mathsf{M}]$, ela se objetiva a que saibamos como calcular a estimativa para um termo do tipo $(\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N}$, a partir da estimativa $[\mathsf{N}]$ para o termo. Devemos portanto entender a cláusula 5.2.6-(*iii*) como uma tomada de decisão sobre qual redex deve ser reduzido em um termo do tipo $(\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N}$, de modo a obtermos uma seqüência de redução de tamanho máximo.

Se $x \notin FV(\mathsf{M})$, então a seguinte redução se aplica: $(\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N} \rightarrow \mathsf{M}$. Assim, para não prejudicarmos o potencial de passos de redução, o redex $(\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N}$ não deve ser contraído até que N esteja na forma normal, pois N desaparece na redução de $(\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N}$. Isto sugere que, se $x \notin FV(\mathsf{M})$, então $h((\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N})= h(\mathsf{N})+ h(\mathsf{M})+ 1$, pois a seqüência maximamente não econômica para $(\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N}$ inicialmente normaliza N (computado em $h(\mathsf{N})$), contrai o redex $(\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N}'$, onde N' representa a forma normal para N (computado em $+ 1$), e finalmente normaliza M, que é o resultado da contração de $(\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N}'$ (computado em $h(\mathsf{M})$). Tal fato está totalmente de acordo com o que ocorre em 5.2.6-(*iii*) quando $x \notin FV(\mathsf{M})$. Veja:

$$[(\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N}]^* \underset{5.2.6(ii)}{=} ([\lambda x.\mathsf{M}][\mathsf{N}])^* \underset{5.2.6(iii)}{=} ((\Lambda f.([\mathsf{M}]+f^*+1))[\mathsf{N}])^*$$
$$\underset{reducao-\beta}{=} ([\mathsf{M}]+[\mathsf{N}]^*+1)^* \underset{5.2.2.1(d)-(ii)e(iv)}{=} [\mathsf{M}]^*+[\mathsf{N}]^*+1.$$

Por outro lado, se $x \in FV(\mathsf{M})$, $((\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N} \to \mathsf{M}[x/\mathsf{N}]$. Assim, é melhor não executar reduções dentro de N antes de contrair $(\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N}$, pois a redução de $(\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N}$ multiplica N em M tantas vezes quantas forem as ocorrências de x em M. Assim, suponha que $h(\mathsf{N})=1$, e que existam 5 ocorrências de x em M. Uma seqüência de redução para $(\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N}$ que atue em N antes de contrair o redex $(\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N}$ terá pelo menos quatro passos a menos que uma seqüência que primeiro contraia $(\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N}$ e depois reduza cada uma das 5 cópias de N em $\mathsf{M}[x/\mathsf{N}]$. Isto sugere que se $x \in FV(\mathsf{M})$: $h((\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N}) = h(\mathsf{M}[x/\mathsf{N}])+1$, ou seja, a primeira redução que devemos fazer, para não prejudicarmos o potencial de redução do termo é a de $(\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N}$. Tal fato está totalmente de acordo com o que ocorre em 5.2.6-(*iii*) quando $x \notin FV(\mathsf{M})$.

Veja:

$$[(\lambda x.\mathsf{M})\mathsf{N}]^* = ([\lambda x.\mathsf{M}][\mathsf{N}])^* = ((\Lambda f.[\mathsf{M}]_{e(x/f)}+1)[\mathsf{N}])^*$$
$$= ([\mathsf{M}]_{e(x/[\mathsf{N}])}+1)^* = [\mathsf{M}]_{e(x/[\mathsf{N}])}{}^*+1 \underset{\substack{5.2.8\\ \text{veremos}\\ \text{adiante}}}{=} [\mathsf{M}[x/\mathsf{N}]]^*+1.$$

Note que a diferença entre a estimativa exata e a estimativa frouxa, definida em 5.2.5, é que a estimativa frouxa trata os dois casos possíveis para 5.2.6-(*iii*) como um único caso onde as duas possibilidades são somadas. Assim, a estimativa frouxa excede o valor exato de $h(\mathsf{M})$. No entanto, ainda que excedendo este valor, Vrijer provou que $\{\mathsf{M}\}^*$ é limitante superior finito para $h(\mathsf{M})$ que diminui com as reduções, ou seja, que $\{\mathsf{M}\}^*$ é ordinal natural para $\lambda^{\supset}$.

Apresentaremos agora, em detalhes, a demonstração de que $[\mathsf{M}]_{v(x/[\mathsf{N}])} = [\mathsf{M}[x/\mathsf{N}]]_v$. Faremos isso não apenas porque este resultado é importante para a compreensão intuitiva da definição da estimativa exata, mas também porque é uma prova simples que aparece apenas esboçada no artigo de Vrijer e pode ser tomada como um modelo para a estrutura geral da maioria das provas do artigo.

5.2.8 LEMA: da Substituição

$$[\mathsf{M}[x/\mathsf{N}]]_v = [\mathsf{M}]_{v(x/[\mathsf{N}]_v)}.$$

PROVA: Indução na complexidade de M

BASE: ($t = y^{\mathsf{A}}$)

CASO 1: $y \not\equiv x$

$$[\mathsf{M}[x/\mathsf{N}]]_v = [y[x/\mathsf{N}]]_v = [y]_v = v(y) = v(x/[\mathsf{N}]_v)(y) = [y]_{v(x/[\mathsf{N}]_v)} = [\mathsf{M}]_{v(x/[\mathsf{N}]_v)}.$$

CASO 2: $y \equiv x$

$$[\mathsf{M}[x/\mathsf{N}]]_v = [x[x/\mathsf{N}]]_v = [\mathsf{N}]_v = v(x/[\mathsf{N}]_v)(x) = [x]_{v(x/[\mathsf{N}]_v)} = [\mathsf{M}]_{v(x/[\mathsf{N}]_v)}.$$

PASSO:

CASO 1: $\mathsf{M} \equiv \mathsf{M}_0\mathsf{M}_1$.

$$\begin{aligned}
[\mathsf{M}[x/\mathsf{N}]]_v &= [(\mathsf{M}_0\mathsf{M}_1)[x/\mathsf{N}]]_v && \text{(por hipótese do caso)}\\
&= [(\mathsf{M}_0[x/\mathsf{N}])(\mathsf{M}_1[x/\mathsf{N}])]_v && \text{(por def. de substituição)}\\
&= [\mathsf{M}_0[x/\mathsf{N}]]_v[\mathsf{M}_1[x/\mathsf{N}]]_v && \text{(por 5.2.6-(}ii\text{))}\\
&= [\mathsf{M}_0]_{v(x/[\mathsf{N}]_v)}[\mathsf{M}_1]_{v(x/[\mathsf{N}]_v)} && \text{(por HI)}\\
&= [\mathsf{M}_0\mathsf{M}_1]_{v(x/[\mathsf{N}]_v)} && \text{(por 5.2.6-(}ii\text{))}\\
&= [\mathsf{M}]_{v(x/[\mathsf{N}]_v)} && \text{(por hipótese do caso).}
\end{aligned}$$

CASO 2: $\mathsf{M} = \lambda y.\mathsf{M}_0$

Pela convenção de variáveis temos:

(i) $y \not\equiv x$ e $y \notin FV(\mathsf{N})$.

SubCaso 2.1: $y \in FV(\mathsf{M})$

$$\begin{aligned}
[\mathsf{M}[x/\mathsf{N}]]_v &= [(\lambda y.\mathsf{M}_0)[x/\mathsf{N}]]_v && \text{(por hipótese do caso)}\\
&= [\lambda y.(\mathsf{M}_0[x/\mathsf{N}])]_v && \text{(por def. de subst.)}\\
&= \langle \Lambda f.[\mathsf{M}_0[x/\mathsf{N}]]_{v(y/f)} + 1\ ,\ [\mathsf{M}_0[x/\mathsf{N}]]_{v(y/c_0)}{}^*\rangle && \text{(5.2.6-(}iii\text{))}\\
&= \langle \Lambda f.[\mathsf{M}_0]_{v(y/f)\,(x/[\mathsf{N}]_{v(y/f)})} + 1\ ,\ [\mathsf{M}_0]_{v(y/c_0)\,(x/[\mathsf{N}]_{v(y/c_0)})}{}^*\rangle && \text{(por HI)}\\
&= \langle \Lambda f.\ [\mathsf{M}_0]_{v(y/f)\,(x/[\mathsf{N}]_v)} + 1\ ,\ [\mathsf{M}_0]_{v(y/c_0)\,(x/[\mathsf{N}]_v)}{}^*\rangle && ((i) \Rightarrow [\mathsf{N}]_v = [\mathsf{N}]_{v(y/g)})\\
&= \langle \Lambda f.\ [\mathsf{M}_0]_{v(x/[\mathsf{N}]_v)\,(y/f)} + 1\ ,\ [\mathsf{M}_0]_{v(x/[\mathsf{N}]_v)\,(y/c_0)}{}^*\rangle && ((i) \Rightarrow v(y/g)(x/[\mathsf{N}]_v) = v(x/[\mathsf{N}]_v)(y/g))\\
&= [\lambda y.\mathsf{M}_0]_{v(x/[\mathsf{N}]_v)} \underset{\substack{\text{hip. do}\\ \text{caso}}}{=} [\mathsf{M}]_{v(x/[\mathsf{N}]_v)} && \text{(5.2.6-(}iii\text{)) .}
\end{aligned}$$

SubCaso 2.2: $y \notin FV(\mathsf{M})$

$$\begin{aligned}
[\mathsf{M}[x/\mathsf{N}]]_v &= [(\lambda y.\mathsf{M}_0)[x/\mathsf{N}]]_v && \text{(por hipótese do caso)}\\
&= [\lambda y.(\mathsf{M}_0[x/\mathsf{N}])]_v && \text{(def de subst.)}\\
&= \langle \Lambda f.[\mathsf{M}_0[x/\mathsf{N}]]_v + f^* + 1,\ [\mathsf{M}_0[x/\mathsf{N}]]_v{}^*\rangle && ((i) \Rightarrow y \notin FV(\mathsf{M}_0[x/\mathsf{N}]) \text{ e por 5.2.6-(}iii\text{))}
\end{aligned}$$

$= \langle \Lambda f.[\mathsf{M}_0]_{v(x/[\mathsf{N}]_v)} + f^* + 1\ ,\ [\mathsf{M}_0]_{v(x/[\mathsf{N}]_v)}{}^* \rangle$ (hip. indução)

$= [\lambda y.\mathsf{M}_0]_{v(x/[\mathsf{N}]_v)} \underset{\text{hip. do caso}}{=} [\mathsf{M}]_{v(x/[\mathsf{N}]_v)}$. (5.2.6-(*iii*)) .♦

5.2.8.1 COROLÁRIO: Uniformidade da Estimativa

Se $[\mathsf{N}_1] = [\mathsf{N}_2]$, então $[\mathsf{M}[x/\mathsf{N}_1]] = [\mathsf{M}[x/\mathsf{N}_2]]$.

PROVA: Imediata a partir de 5.2.8. ♦

Se admitirmos como já demonstrado que $[\mathsf{M}]^* = h(\mathsf{M})$, então o Corolário 5.2.8.1 está afirmando que $h(\mathsf{N}_1) = h(\mathsf{N}_2) \Rightarrow h(\mathsf{M}[x/\mathsf{N}_1]) = h(\mathsf{M}[x/\mathsf{N}_2])$, o que significa dizer que o comprimento da árvore de derivação para um termo depende uniformemente dos comprimentos das árvores de derivações de seus subtermos constituintes. Este, segundo Vrijer, é um resultado inédito, não derivado de nenhuma outra prova de normalização forte para $\lambda^{\supset}$.

Para poder provar que $[\mathsf{M}]^* = h(\mathsf{M})$, Vrijer utiliza o fato de que os funcionais rotulados que satisfazem a definição 5.2.6 pertencem a uma classe $C \subset L$ que é cumulativa, com relação à operação $+_{\mathsf{A}}$, e monótona segundo as relações $<_{\mathsf{A}}$ e $\leq_{\mathsf{A}}$ que definiremos a seguir.

5.2.9 DEFINIÇÃO: Funcionais Hereditariamente Cumulativos "Monótonos"

As coleções C_{A} são definidas simultaneamente às relações $<_{\mathsf{A}}$ e $\leq_{\mathsf{A}}$ por indução em A da seguinte forma:

(*i*) $C_o = L_o$; $m <_o n \Leftrightarrow m < n$; $m \leq_o n \Leftrightarrow m \leq n$.

(*ii*) $C_{\mathsf{A}\supset\mathsf{B}} = \{f \in L_{\mathsf{A}\supset\mathsf{B}} \mid$ as condições (*a*) a (*d*) abaixo são satisfeitas$\}$.

(*a*) $(\forall g \in C_{\mathsf{A}})\ (fg \in C_{\mathsf{B}})$ (fechado p/ aplicação);

(*b*) $(\forall g, g' \in C_{\mathsf{A}})\ (g <_{\mathsf{A}} g' \Rightarrow fg <_{\mathsf{B}} fg')$ (< -monotonicidade);

(*c*) $(\forall g, g' \in C_{\mathsf{A}})\ (g \leq_{\mathsf{A}} g' \Rightarrow fg \leq_{\mathsf{B}} fg')$ (≤-monotonicidade);

(*d*) $(\forall g \in C_{\mathsf{A}})\ ((fg)^* \geq f^* + g^*)$ (acumulação).

(*iii*) Para $f, g \in C_{\mathsf{A}\supset\mathsf{B}}$,

(*a*) $f <_{\mathsf{A}\supset\mathsf{B}} g \Leftrightarrow (\forall h \in C_{\mathsf{A}})\ (fh <_{\mathsf{B}} gh) \wedge (f^* < g^*)$;

(*b*) $f \leq_{\mathsf{A}\supset\mathsf{B}} g \Leftrightarrow (\forall h \in C_{\mathsf{A}})\ (fh \leq_{\mathsf{B}} gh) \wedge (f^* \leq g^*)$.

5.2.9.1 COMENTÁRIOS:

(a) $C = \cup_{\mathbf{A}} C_{\mathbf{A}}$ é fechado para aplicações (condição (ii)(a)), e $<_{\mathbf{A}}$ e $\leq_{\mathbf{A}}$ são transitivos (o que é facilmente verificável por indução nos tipos).

(b) Poderíamos ficar tentados a pensar que $f \leq g$ pudesse ser definido simplesmente como: $f < g$ ou $f = g$. Este é o caso, é claro, para os tipos básicos, mas não para tipos maiores. Como um contra-exemplo em $o \supset o$ considere os funcionais $f = \Lambda n.n$ e $g = \Lambda n.n^2$. Neste caso $f \leq g$, mas $f \neq g$ e $f \not< g$.

(c) $<$-monotonicidade e $\leq$-monotonicidade são predicados independentes; um não implica no outro. Como contra-exemplos: funções constantes são $\leq$-monótonas mas não $<$-monótonas. Um funcional do tipo $(o \supset o)(o \supset o)$ que é $<$-monótono mas não é $\leq$-monótono pode ser definido por: $f(\Lambda n.n^2) = \Lambda n.n^2$, $fg = \Lambda n.gn + 1$ se $g \neq \Lambda n.n^2$.

(d) Freqüentemente escreveremos $f \geq g$ para $g \leq f$, e $f > g$ para $g < f$.

Com exceção do Item ($viii$), o lema seguinte, juntamente com os resultados apresentados em 5.2.2.1(d), estabelece propriedades sobre $<_{\mathbf{A}}$, $\leq_{\mathbf{A}}$ e $+_{\mathbf{A}}$, que dão a estes símbolos um comportamento semelhante ao que conhecemos na aritmética. O Item ($viii$), por sua vez, é conseqüência de (vii) por indução em n, e não tem correspondência na aritmética por se referir à operação de *aplicação*, exclusiva dos funcionais. As provas de cada item são simples e feitas por indução nos tipos ou em algum número natural envolvido na operação, utilizando apenas as definições e os itens anteriores.

5.2.10 LEMA:

(i) C é fechado para $+$.

(ii) $f < g \Rightarrow f + m < g + m$; $f \leq g \Rightarrow f + m \leq g + m$.

(iii) $m < n \Rightarrow f + m < f + n$; $m \leq n \Rightarrow f + m \leq f + n$.

(iv) $m > 0 \Rightarrow f < f + m$ e $f \leq f + m$.

(v) $f \leq f$.

(vi) $f < g \Rightarrow f \leq g$.

(vii) $f < g \leq h \Rightarrow f < h$; $f \leq g < h \Rightarrow f < h$.

($viii$) $f > g \Rightarrow f \geq g + 1$.

(ix) $f(g + n) \geq fg + n$. ♦

No lema seguinte, o item (*i*) estabelece que os funcionais c_n^{A} definidos em 5.2.3 pertencem à hierarquia C de funcionais monótonos, ou seja, que eles respeitam as restrições de monotonicidade e acumulação da Definição 5.2.9. Os Itens (*ii*) e (*iii*) estabelecem propriedades destes funcionais.

5.2.11 LEMA:

(*i*) $c_n^{\mathsf{A}} \in C$ para qualquer A e n.

(*ii*) $m < n \Rightarrow c_m^{\mathsf{A}} < c_n^{\mathsf{A}}$.

(*iii*) $m \leq n \Rightarrow c_m^{\mathsf{A}} \leq c_n^{\mathsf{A}}$. ♦

O lema seguinte explica o sentido de chamarmos os c_n^{A} de funcionais minimamente cumulativos. Sua prova é obtida facilmente por indução em A. O corolário do lema mostra que os verdadeiros elementos minimais na classe C são os c_0.

5.2.12 LEMA: $f \in C_{\mathsf{A}} \Rightarrow f \geq c_{f*}^{\mathsf{A}}$. ♦

5.2.12.1 COROLÁRIO: $f \in C_{\mathsf{A}} \Rightarrow f \geq c_0^{\mathsf{A}}$. ♦

5.2.13 NOTAÇÃO:

Uma atribuição v para a qual todos os seus valores estão em C é chamada de *C-atribuição*. A atribuição e definida em 5.2.1.2 ($e(x^{\mathsf{A}}) = c_0^{\mathsf{A}}$) é uma C-atribuição devido ao Lema 5.2.11.

No Item (*i*) do lema seguinte provamos que os funcionais que representam a estimativa exata para qualquer $\lambda^{\supset}$-termo M pertencem, de fato, à hierarquia C. Já o Item (*ii*) estabelece algumas propriedades da estimativa exata quando lidamos com C-atribuições do tipo $v(x/f)$. A prova deste lema é feita por indução na complexidade do termo M. Por possuir muitos casos é extensa, mas utiliza apenas as definições e os resultados anteriores.

5.2.14. *C*-Lema

(*i*) $[\mathsf{M}]_v \in C$ para qualquer C-atribuição v.

(*ii*) Se $x \in FV(\mathsf{M})$ e $f, g \in \mathsf{C}_{\mathsf{A}}$, então:

(*a*) $[\mathsf{M}]_{v(x/f)} \geq [\mathsf{M}]_{v(x/c_0)} + f^*$;

(*b*) $f < g \Rightarrow [\mathsf{M}]_{v(x/f)} < [\mathsf{M}]_{v(x/g)}$;

(*c*) $f \leq g \Rightarrow [\mathsf{M}]_{v(x/f)} \leq [\mathsf{M}]_{v(x/g)}$. ♦

5.2.14.1 COMENTÁRIO: Finitude da Estimativa Exata

O Item (*i*) do lema acima estabelece que os funcionais que representam a estimativa exata para qualquer $\lambda^{\supset}$-termo M pertencem, de fato, à hierarquia C. Este resultado é de extrema importância, pois como $C \subset L$ e $[\mathsf{M}] \in C$ então $[\mathsf{M}] \in L$. Mas se $[\mathsf{M}] \in L$, pela Definição 5.2.1 de L, temos que $[\mathsf{M}]^* \in \omega$. Logo, o Item (*i*) acima assegura que para qualquer termo M, $[\mathsf{M}]^* \in \omega$. Portanto, a estimativa exata para qualquer termo M é finita. Basta agora apenas provarmos que a estimativa exata diminui com as reduções para obtermos a normalização forte e completarmos os resultados de Vrijer.

5.2.15 DEFINIÇÃO:

Sejam M e N $\lambda^{\supset}$-termos, e v uma atribuição. Então $|\mathsf{M}|_v \in \omega$ e $|\mathsf{M}, \mathsf{N}|_v \in \omega$ são definidos da seguinte forma:

(*i*) $|\mathsf{M}|_v = \sum_{x \in FV(\mathsf{M})} v(x)^*$;

(*ii*) $|\mathsf{M}, \mathsf{N}|_v = \sum_{\substack{x \in FV(\mathsf{M}) \text{ e} \\ x \notin FV(\mathsf{N})}} v(x)^*$.

O Item (*i*) acima estabelece que $|\mathsf{M}|_v$ representa a somatória de $v(x_i)^*$ para toda variável livre x_i que ocorre livre em M. O que é importante sobre $|\mathsf{M}|_v$ é que ainda que x_1, por exemplo, possua 5 ocorrências livres em M, $|\mathsf{M}|_v$ computa apenas uma vez $v(x_1)^*$, e não cinco vezes. Assim, $|\lambda y.x(xy)|_v = v(x)^* = |\lambda y.xy|_v$. Já o item (*ii*) define $|\mathsf{M}, \mathsf{N}|_v$ como a somatória de $v(x_i)^*$, para toda variável x_i que possua ocorrência livre em M e não possua ocorrência livre em N. Assim, se $\mathsf{M} \equiv \lambda y.x(zy)$ e $\mathsf{N} \equiv \lambda y.zy$, temos que $|\mathsf{M}, \mathsf{N}|_v = v(x)^*$.

5.2.15.1 PROPRIEDADES:

(*i*) $|x|_v = v(x)^*$.

(*ii*) $|\mathsf{M}_0\mathsf{M}_1|_v \leq |\mathsf{M}_0|_v + |\mathsf{M}_1|_v$.

(iii) $x \notin FV(\mathsf{M}) \Rightarrow \mid \lambda x.\mathsf{M} \mid_{v} = \mid \mathsf{M} \mid_{v}$.

(iv) $x \in FV(\mathsf{M}) \Rightarrow \mid \lambda x.\mathsf{M} \mid_{v} + v(x)^{*} = \mid \mathsf{M} \mid_{v}$.

(v) $\mid \mathsf{M}, \mathsf{N} \mid_{v} \leq \mid \mathsf{M} \mid_{v}$.

(vi) $\mathsf{M} \to \mathsf{N} \Rightarrow \mid \mathsf{M} \mid_{v} = \mid \mathsf{N} \mid_{v} + \mid \mathsf{M}, \mathsf{N} \mid_{v}$. ♦

As propriedades (*i*) a (*v*) são demonstráveis, trivialmente, a partir da Definição 5.2.15. Com respeito à propriedade (*vi*), basta analisarmos os dois casos possíveis de redução, a de um *K*-redex e a de um *I*-redex, para concordarmos com sua validade.

5.2.16 LEMA:

$[\mathsf{M}]_{v} \geq c_{\mid \mathsf{M} \mid_{v}}$ para todo termo M e *C*-atribuição *v*. ♦

5.2.16.1 COROLÁRIO:

$[\mathsf{M}]_{v}^{*} \geq \mid \mathsf{M} \mid_{v}$.

PROVA:

$$\underset{(5.2.16)}{\Rightarrow} [\mathsf{M}]_{v} \geq c_{\mid \mathsf{M} \mid_{v}} \underset{(5.2.9)(\mathrm{iii})(\mathrm{b})}{\Rightarrow} [\mathsf{M}]_{v}^{*} \geq c_{\mid \mathsf{M} \mid_{v}}^{*} \underset{5.2.3}{\Rightarrow} [\mathsf{M}]_{v}^{*} \geq \mid \mathsf{M} \mid_{v} . ♦$$

O Lema 5.2.16 estabelece que a estimativa exata segundo *v* $[\mathsf{M}]_{v}$ é maior ou igual ao funcional minimamente cumulativo $c_{\mid \mathsf{M} \mid_{v}}$. Sua prova é obtida por indução na complexidade de M através dos resultados já estabelecidos. O Corolário 5.2.16.1 estabelece que a estimativa exata para qualquer termo M é maior ou igual que a somatória das atribuições de *v* às variáveis livres de M. Este resultado é fundamental para a prova do lema seguinte, que estabelece que a estimativa exata diminui com as reduções.

5.2.17 LEMA: da Redução

Se $\mathsf{M} \to \mathsf{N}$, então, para qualquer *C*-atribuição *v*, temos: $[\mathsf{M}]_{v} > [\mathsf{N}]_{v} + \mid \mathsf{M}, \mathsf{N} \mid_{v}$. ♦

5.2.17.1 COROLÁRIO: Ordinal Natural

$[\mathsf{M}]^{*}$ é Ordinal Natural para $\lambda^{\supset}$.

PROVA:

Pelo Lema 5.2.14-(i) temos que $[M]^* < \omega$ e pelo Lema 5.2.17 que $[M]^*$ diminui com as reduções. ♦

5.2.17.2 COROLÁRIO:

$h(M) \leq [M]^*$.

PROVA: Indução em $[M]^*$

BASE: $[M]^* = 0 \underset{5.2.17}{\Rightarrow} \neg\exists N \,/\, M \to N \Rightarrow h(M) = 0 \Rightarrow h(M) \leq [M]^*$.

PASSO: $[M]^* = n > 0$

(i) Seja $N \,/\, M \to N$.

(ii) Por 5.2.17 e (i) temos: $[M]^* > [N]^*$.

(iii) Por (ii) e HI temos: $h(N) \leq [N]^*$.

(iv) Mas por (i) é claro que $h(M) = h(N) + 1$.

Assim temos: $h(M) \underset{(iv)}{=} h(N) + 1 \underset{(iii)}{\leq} [N]^* + 1 \underset{(ii)}{<} [M]^* + 1 \leq [M]^* \Rightarrow h(M) \leq [M]^*$. ♦

Este corolário, obtido imediatamente a partir do lema da redução, prova que $[M]^*$ é limitante superior para o comprimento da árvore de redução de M ($h(M)$). Este resultado e o Lema 5.2.14-(i), que garante a finitude de $[M]^*$ para qualquer M, demonstram a normalização forte de $\lambda^{\supset}$, pois estabelecem que todo termo M possui um limitante superior finito para o comprimento de sua árvore de redução. No entanto, Vrijer quer mais. Ele quer demonstrar que sua estimativa é "exata", ou seja, é o menor limitante superior para $h(M)$ ($h(M) = [M]^*$). Para fazer isso demonstra, no teorema seguinte, que existe uma seqüência de redução específica para cada termo M cujo comprimento é exatamente igual a $[M]^*$. Esta seqüência é exatamente a seqüência obtida através da aplicação da estratégia perpétua de redução ao termo M.

5.2.18 TEOREMA:

Se $[M]^* > 0$, então existe um N com $M \to N$ tal que:

(i) Se M não é da forma $\lambda x.M_0$, então $[M] = [N] + 1$.

(ii) Se $M = \lambda x.M_0$, então $[M]^* = [N]^* + 1$. ♦

Se para todo M tal que $[M]^*>0$ existe N tal que $M \to N$ e $[M]^*=[N]^*+1$, então é claro que existe uma seqüência de redução específica cujo comprimento é exatamente igual a $[M]^*$, pois o teorema estabelece que existe a seguinte seqüência de redução para M:

$$M \equiv M_0 \to M_1 \to \ldots \to M_i \to \ldots \to M_n.$$
$$[M]^*=[M_0]^*=n,\ [M_1]^*=n-1,\ \ldots,\ [M_i]^*=n-i \quad [M_n]^*=n-n=0.$$

Este N que o teorema assegura que existe é exatamente $F_\infty(M)$, que definimos em 4.4.5. Assim, temos como conseqüência do Teorema 5.2.18 que $[M]^*=L_{F_\infty}(M)$.

5.2.18.1 COROLÁRIO:

$[M]^* \leq h(M)$.

<u>PROVA</u>:

É claro que se o comprimento de uma seqüência de redução específica para M é igual a $[M]^*$, então $[M]^* \leq h(M)$. ♦

5.2.19 TEOREMA:

$h(M)=[M]^*$.

<u>PROVA</u>: Imediata pelos Corolários 5.2.17.2 e 5.2.18.1. ♦

<u>§3 O Artigo Beckmann[1998]</u>

O objetivo principal de Beckmann, antes de provar a normalização forte ou encontrar um ordinal natural para $\lambda^{\supset}$, é apresentar um limitante superior finito para o comprimento da árvore de redução para um termo qualquer M, que seja fácil e diretamente obtido a partir de propriedades imediatamente reconhecíveis do termo M. A principal virtude de tal estimativa seria uma medida simples da complexidade de uma função que calcula o comprimento da árvore de redução para um termo M.

O método que Beckmann utiliza em seu artigo foi desenvolvido em **Schwichtenberg[1991]**, onde já aparece uma estimativa para a complexidade do comprimento da árvore de redução para termos de $\lambda^{\supset}$. O trabalho de Beckmann é um aprimoramento deste método, e sua estimativa representa um refinamento nos resultados de Schwichtenberg. Uma primeira estimativa deste tipo foi introduzida por **Schwichtenberg[1982]**, que utilizou o ordinal natural definido por **Gandy[1980]** para calcular sua estimativa. Schwichtenberg utilizou, para o desenvolvimento do seu método, os trabalhos de **Howard[1980**A**]**, **Sanchis[1967]** e **Diller[1968]**.

Vamos apresentar agora algumas definições importantes para a compreensão geral do método utilizado por Beckmann.

5.3.1 DEFINIÇÃO: Comprimento de M - l(M)

Definimos o *comprimento* de um termo M, e denotamos por $l(\mathsf{M})$, da seguinte forma:

(*i*) $l(x)= 1$;

(*ii*) $l(\lambda x.\mathsf{M})= l(\mathsf{M})+ 1$;

(*iii*) $l(\mathsf{MN})= l(\mathsf{M})+ l(\mathsf{N})$.

5.3.2 DEFINIÇÃO: Grau de M - g(M)

Considerando a Definição 5.1.1.2 de Howard para nível de um termo M, $lv(\mathsf{M})$, definimos o *grau* de um termo M, que denotamos por $g(\mathsf{M})$, como o nível máximo dos subtermos de M:

$$g(\mathsf{M})= max\{lv(\mathsf{N}) \,/\, \mathsf{N} \subset \mathsf{M}\}.$$

5.3.3 DEFINIÇÃO: Exponenciação K-Iterada na Base 2 - $2_k(n)$

Definimos a função $2_k(n)$ por:

$$\begin{cases} 2_0(n)= n \\ 2_{k+1}(n)= 2^{2_k(n)} \end{cases}$$

5.3.3.1 OBSERVAÇÃO:

Note que $2_n(m)= \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^m}}}}}}}$ n vezes.

Decidimos denominar de *número de Beckmann* a seguinte atribuição numérica definida por Beckmann, que veremos mais adiante representar, para cada termo M, um limitante superior finito para o comprimento da árvore de redução para M.

5.3.4 DEFINIÇÃO: Numero de Beckmann - $n_B(M)$

O *número de Beckmann* para um termo M é definido como:

$$n_B(M)= 2_{g(M)}(l(M)).$$

5.3.5 COMENTÁRIO: Esclarecimentos sobre o Método Schwichtenberg-Beckmann

O objetivo de Beckmann é mostrar que $n_B(M)= 2_{g(M)}(l(M))$ é limitante superior para o comprimento da árvore de redução para o termo M, ou seja, $h(M) \leq 2_{g(M)}(l(M))$. Fazendo isso temos não apenas um limitante superior finito para o comprimento das seqüências de redução para um termo M, mas temos uma estimativa sobre a complexidade de $h(M)$ definida de uma maneira bastante simples, em termos de propriedades visíveis de M ($l(M)$ e $g(M)$). Se tomarmos, por exemplo, a estimativa exata de Vrijer definida em 5.2.6, temos que $[M]^*= h(M)$. Mas olhando para a definição de $[M]^*$ não temos meios de estimar, de uma maneira simples, qual é o valor de $[M]^*$. Para saber este valor temos que seguir todos os passos da construção de M, aplicando a estimativa exata aos subtermos de M de acordo com a Definição 5.2.6.[48] O mesmo ocorre no sistema C', com as atribuições $o(\pi)$ e $lp(\pi)$ - olhando para suas definições não temos como estimar, de uma maneira direta, quão grandes são estes números.

Beckmann vai ainda mais longe. Constrói uma classe S de termos para a qual existe uma constante estritamente positiva, c_S, tal que se $M \in S$, então $h(M) \geq 2_{g(M)}(l(M)/ c_S)$. Dessa forma temos: $2_{g(M)}(l(M)/ c_S) \leq h(M) \leq 2_{g(M)}(l(M))$. Isso mostra que, para $M \in S$, $h(M)$ difere de $n_B(M)$ apenas por uma constante aplicada a $l(M)$, e que portanto, não pode haver estimativa para a complexidade de $h(M)$ definida sobre $g(M)$ e $l(M)$ que seja uma exponencial com menos iterações do que as de $n_B(M)$. Este resultado representa um aprimoramento de um resultado semelhante obtido por **Schwichtenberg[1982]**, o qual foi construído como um caso especial de um resultado mais genérico obtido por **Statman[1979]**. Statman

[48] Veja os Exemplos 5.2.6.2

demonstrou que nenhuma função elementarmente recursiva[49] pode ser limitante superior para o comprimento das árvores de redução em $\lambda^{\supset}$.

Ocorre, no entanto, que o número de Beckmann não é um ordinal natural no sentido que estamos tratando nesta tese, pois ele não possui a propriedade de diminuir com as reduções. Vejamos um contraexemplo simples:

Seja $\mathsf{M} \equiv (\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}$ tal que:

(i) P possui mais de uma ocorrência livre de x;

(ii) $l(\mathsf{Q}) > 1$;

(iii) $g(\mathsf{Q}) = g(\mathsf{M})$ (ou seja, $\exists \mathsf{R} \subset \mathsf{Q}\ /\ lv(\mathsf{R}) = g(\mathsf{M})$).

Considere a redução:

(iv) $\mathsf{M} \equiv (\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{P}[x/\mathsf{Q}] \equiv \mathsf{N}$.

Por (i), (ii) e (iv) é claro que:

(v) $l(\mathsf{N}) > l(\mathsf{M})$.

Por (i), (iii) e (iv) temos:

(vi) $g(\mathsf{N}) = g(\mathsf{M})$.

Portanto, por (iv), (v) e (vi) temos: $\mathsf{M} \rightarrow \mathsf{N}$ e $n_{\mathbf{B}}(\mathsf{N}) > n_{\mathbf{B}}(\mathsf{M})$. □

Apesar disso, Beckmann utiliza um ordinal natural para provar que $n_{\mathbf{B}}(\mathsf{M}) \geq h(\mathsf{M})$. Ele define uma atribuição numérica #M e prova que, para todo termo M:

(a) $\#\mathsf{M} \leq n_{\mathbf{B}}(\mathsf{M}) = 2_{g(\mathsf{M})}(l(\mathsf{M})) < \omega$.

pois se M é $\lambda^{\supset}$-termo, então $l(\mathsf{M}) < \omega$ e $g(\mathsf{M}) < \omega$.

(b) $\mathsf{M} \rightarrow \mathsf{N} \Rightarrow \#\mathsf{N} < \#\mathsf{M}$.

Assim, por (a) e (b) é fácil provar que: $h(\mathsf{M}) \leq \#\mathsf{M} \leq n_{\mathbf{B}}(\mathsf{M})$.

O número de Beckmann é então obtido como uma estimativa para a complexidade da função #M, que é de fato um ordinal natural para $\lambda^{\supset}$. É indiretamente portanto, através de #M, que o número de Beckmann estima a complexidade de $h(\mathsf{M})$.

O Método de Beckmann está baseado no seguinte teorema de caracterização para os termos de $\lambda^{\supset}$, cuja prova é trivialmente obtida por indução na complexidade de M.

---

[49] Uma função é elementarmente recursiva quando ela é uma função primitiva recursiva cujos passos da recursão são limitados por alguma exponenciação finitamente iterada.

5.3.6 TEOREMA: Caracterização para $\lambda^{\supset}$-termos

Se M é $\lambda^{\supset}$-termo então M tem uma das seguintes formas:

(*a*) $x\mathsf{N}_1 \ldots \mathsf{N}_n$ ou

(*b*) $(\lambda x.\mathsf{N}_0)\mathsf{N}_1 \ldots \mathsf{N}_n$ (para algum $0 \leq n \leq \omega$).

5.3.6.1 NOTAÇÕES:

(*a*) Denotaremos um termo da forma $\mathsf{MN}_1\mathsf{N}_2 \ldots \mathsf{N}_n$ por $\mathsf{M}\mathbf{N}$.

(*b*) $\mathsf{M}[\boldsymbol{x}/\ \mathbf{N}] \equiv \mathsf{M}[x_1/\ \mathsf{N}_1] \ldots [x_n/\ \mathsf{N}_n]$.

5.3.7 DEFINIÇÃO: "*Head Reduction Tree*"

Definimos *head reduction tree* $\mid\!\frac{\alpha}{\rho}\,\mathsf{M}$, para M arbitrário, com $\alpha,\ \rho < \omega$, indutivamente, da seguinte maneira:

(*a*) $\mid\!\frac{\alpha}{\rho}\,(\mathsf{P}[x/\ \mathsf{Q}])\mathbf{N}$ e $\mid\!\frac{\alpha}{\rho}\,\mathsf{Q} \Rightarrow\ \mid\!\frac{\alpha+1}{\rho}\,(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}\mathbf{N}$ ⟨*regra*-β⟩;

(*b*) $\mid\!\frac{\alpha}{\rho}\,\mathsf{M} \Rightarrow\ \mid\!\frac{\alpha+1}{\rho}\,\lambda x.\mathsf{M}$ ⟨*regra*-β_0⟩;

(*c*) $\mid\!\frac{\alpha}{\rho}\,\mathsf{M}_i$ (para $i = 1,\ldots,n$) $\Rightarrow\ \mid\!\frac{\alpha+n}{\rho}\,x\mathsf{M}_1 \ldots \mathsf{M}_n$ ⟨*regra*-Var⟩,

em particular, $\mid\!\frac{\alpha}{\rho}\,x$ (para qualquer variável x e $\alpha,\ \rho < \omega$);

(*d*) $\mid\!\frac{\alpha}{\rho}\,\mathsf{M}$, $\mid\!\frac{\alpha}{\rho}\,\mathsf{N}$ e $lv(\mathsf{M}) \leq \rho \Rightarrow\ \mid\!\frac{\alpha+1}{\rho}\,\mathsf{MN}$ ⟨*regra*-Cut⟩;

(*e*) $\mid\!\frac{\alpha}{\rho}\,\mathsf{M}$, $\alpha < \alpha' < \omega$ e $\rho < \rho' < \omega \Rightarrow\ \mid\!\frac{\alpha'}{\rho'}\,\mathsf{M}$ ⟨*regra estrutural*⟩.

5.3.7.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Cada um dos itens acima estabelece uma regra de formação da árvore para $\mid\!\frac{\alpha}{\rho}\,\mathsf{M}$. A *regra*-$\beta$, por exemplo, estabelece que a partir das árvores para $\mid\!\frac{\alpha}{\rho}\,(\mathsf{P}[x/\ \mathsf{Q}])\mathbf{N}$ e para $\mid\!\frac{\alpha}{\rho}\,\mathsf{Q}$, obtemos uma árvore para $\mid\!\frac{\alpha+1}{\rho}\,(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}\mathbf{N}$. Ou seja:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\pi_1 \mid\!\frac{\alpha}{\rho}\,(\mathsf{P}[x/\ \mathsf{Q}])\mathbf{N} \arrow[dr] & \\
& \mid\!\frac{\alpha+1}{\rho}\,(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}\mathbf{N}. \\
\pi_2 \mid\!\frac{\alpha}{\rho}\,\mathsf{S} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(b) Encarando a *regra*-Var para $n > 2$ como um encadeamento de aplicações de Var para $n = 2$, e a *regra-estrutural* como uma repetição de nós da árvore, um nó para cada unidade aumentada em α, é fácil ver que em $\vdash^{\alpha}_{\rho} \mathsf{M}$, α representa o comprimento do maior ramo da árvore para $\vdash^{\alpha}_{\rho} \mathsf{M}$.

A seguir temos uma série de lemas com o objetivo de demonstrar que, para todo termo M, escolhendo adequadamente α e ρ ($\alpha = l(\mathsf{M})$ e $\rho = g(\mathsf{M})$-1), a árvore para $\vdash^{\alpha}_{\rho} \mathsf{M}$ está definida. A demonstração de todos eles é feita de maneira simples, por indução no comprimento da árvore para $\vdash^{\alpha}_{\rho} \mathsf{M}$, utilizando apenas a Definição 5.3.7, resultados anteriores e resultados envolvendo substituição de variáveis (Seção 4.2). Apresentaremos a prova do Lema 5.3.10 abaixo, por ser um resultado importante do desenvolvimento de Beckmann que possui uma prova bastante representativa do modelo das provas do artigo.

5.3.8 LEMA da Troca de Nomes

Se $\vdash^{\alpha}_{\rho} \mathsf{M}$, então, $\vdash^{\alpha}_{\rho} \mathsf{M}[x/y]$. ♦

5.3.9 LEMA da Aplicação

Se $\vdash^{\alpha}_{\rho} \mathsf{M}$ e $\mathsf{M}y$ é $\lambda^{\supset}$-termos, então $\vdash^{\alpha+1}_{\rho} \mathsf{M}y$. ♦

5.3.10 LEMA da Substituição

Se $\vdash^{\alpha}_{\rho} \mathsf{M}$ e $\vdash^{\beta}_{\rho} \mathsf{S}_i$ (para $i = 1, \ldots, n$ e $lv(\mathsf{S}_i) \leq \rho$), então $\vdash^{\alpha+\beta}_{\rho} \mathsf{M}[\boldsymbol{x}/\mathbf{S}]$.

<u>PROVA</u>: Indução no comprimento da árvore para $\vdash^{\alpha}_{\rho} \mathsf{M}$.

A prova é feita por inspeção em todos os casos das regras de formação de $\vdash^{\alpha}_{\rho} \mathsf{M}$ descritas em 5.3.7.

Consideraremos a seguinte abreviação: $\mathsf{P}^{\mathbf{S}}$ para $\mathsf{P}[\boldsymbol{x}/\mathbf{S}]$.

<u>CASO 1</u>: $\vdash^{\alpha}_{\rho} \mathsf{M}$ foi obtido pela *regra*-β

Então: $\mathsf{M} \equiv (\lambda y.\mathsf{P})\mathsf{Q}\mathbf{N}$ e

$$\pi\Big|\frac{\alpha}{\rho}\,\mathsf{M} \equiv \begin{cases} \pi_1\Big|\frac{\alpha-1}{\rho}\,(\mathsf{P}[y/\,\mathsf{Q}])\mathbf{N} \\ \\ \pi_2\Big|\frac{\alpha-1}{\rho}\,\mathsf{Q} \end{cases} \longrightarrow \Big|\frac{\alpha}{\rho}\,(\lambda y.\mathsf{P})\mathsf{Q}\mathbf{N}.$$

(*i*) Por HI temos: $\Big|\frac{(\alpha-1)+\beta}{\rho}\,((\mathsf{P}[y/\,\mathsf{Q}])\mathbf{N})^{\mathsf{s}}$ e $\Big|\frac{(\alpha-1)+\beta}{\rho}\,\mathsf{Q}^{\mathsf{s}}$.

(*ii*) Por (*i*) e propriedades de substituição temos: $\Big|\frac{\alpha+\beta-1}{\rho}\,(\mathsf{P}^{\mathsf{s}}[y/\,\mathsf{Q}^{\mathsf{s}}])\mathbf{N}^{\mathsf{s}}$ e $\Big|\frac{\alpha+\beta-1}{\rho}\,\mathsf{Q}^{\mathsf{s}}$.

(*iii*) Por (*ii*) e pela *regra*-β temos: $\Big|\frac{\alpha+\beta}{\rho}\,(\lambda y.\mathsf{P}^{\mathsf{s}})\mathsf{Q}^{\mathsf{s}}\mathbf{N}^{\mathsf{s}}$.

Assim, por (*iii*) e propriedades de substituição temos:

$$\Big|\frac{\alpha+\beta}{\rho}\,((\lambda y.\mathsf{P})\mathsf{Q}\mathbf{N})^{\mathsf{s}}.$$

<u>CASO 2</u>: $\Big|\frac{\alpha}{\rho}\,\mathsf{M}$ foi obtido pela *regra*-β_0

Então: $\mathsf{M} \equiv \lambda y.\mathsf{N}$ e $\pi\Big|\frac{\alpha}{\rho}\,\mathsf{M} \equiv \Big\{\pi_1\Big|\frac{\alpha-1}{\rho}\,\mathsf{N} \longrightarrow \Big|\frac{\alpha}{\rho}\,\lambda y.\mathsf{N}$.

Assim: HI $\Rightarrow \Big|\frac{\alpha+\beta-1}{\rho}\,\mathsf{N}^{\mathsf{s}} \underset{\beta_0}{\Rightarrow} \Big|\frac{\alpha+\beta}{\rho}\,\lambda y.\mathsf{N}^{\mathsf{s}} \Rightarrow \Big|\frac{\alpha+\beta}{\rho}\,(\lambda y.\mathsf{N})^{\mathsf{s}}$.

<u>CASO 3</u>: $\Big|\frac{\alpha}{\rho}\,\mathsf{M}$ foi obtido pela *regra*-Var

Então: $\mathsf{M} \equiv y\mathsf{N}_1\ldots\mathsf{N}_n$ e

$$\pi\Big|\frac{\alpha}{\rho}\,\mathsf{M} \equiv \begin{cases} \pi_1\Big|\frac{\alpha-n}{\rho}\,\mathsf{N}_1 \\ \quad\vdots \\ \pi_n\Big|\frac{\alpha-n}{\rho}\,\mathsf{N}_n \end{cases} \longrightarrow \Big|\frac{\alpha}{\rho}\,y\mathsf{N}_1\ldots\mathsf{N}_n.$$

Temos dois subcasos possíveis de acordo com *y*:

<u>SubCaso 3.1</u>: $y \not\equiv x_i \in \boldsymbol{x}$

Neste caso: HI $\Rightarrow \Big|\frac{\alpha+\beta-n}{\rho}\,\mathsf{N}_i^{\mathsf{s}}$ $(i = 1,\ldots,n) \underset{\text{Var}}{\Rightarrow} \Big|\frac{\alpha+\beta}{\rho}\,y\mathsf{N}_1^{\mathsf{s}}\ldots\mathsf{N}_n^{\mathsf{s}} \Rightarrow \Big|\frac{\alpha+\beta}{\rho}\,(y\mathsf{N}_1\ldots\mathsf{N}_n)^{\mathsf{s}}$.

<u>SubCaso 3.2</u>: $y \equiv x_j \in \boldsymbol{x}$

(*iv*) (HI) $\Rightarrow \Big|\frac{\alpha+\beta-n}{\rho}\,\mathsf{N}_i^{\mathsf{s}}$ $(i = 1,\ldots,n)$.

Além disso:

(*v*) (Var) $\Rightarrow \Big|\frac{\alpha+\beta-n}{\rho}\,y \equiv \Big|\frac{\alpha+\beta-n}{\rho}\,x_j \underset{\text{HI}}{\Rightarrow} \Big|\frac{\alpha+\beta-n}{\rho}\,x_j^{\mathsf{s}} \equiv \Big|\frac{\alpha+\beta-n}{\rho}\,\mathsf{S}_j$ e $(lv(\mathsf{S}_j) \leq \rho)$.

(*vi*) Por (*iv*), (*v*) e *regra*-Cut temos: $\Big|\frac{\alpha+\beta-n+1}{\rho}\,\mathsf{S}_j\mathsf{N}_1^{\mathsf{s}}$.

(*vii*) Note que se $lv(\mathsf{S}_j) \leq \rho$, pelo Lema 5.1.1.3-(*b*)m $lv(\mathsf{S}_j\mathsf{N}_1^{\mathsf{s}}) \leq \rho$.

Assim, por (*vi*) e (*vii*), aplicando *n* vezes a *regra*-Cut temos:

$$\vdash^{\alpha+\beta}_{\rho} S_j N_1^{s} \ldots N_n^{s} \;\Rightarrow_{\text{substituição}}\; \vdash^{\alpha+\beta}_{\rho} (yN_1 \ldots N_n)^{s}.$$

<u>CASO 4</u>: $\vdash^{\alpha}_{\rho} M$ foi obtido pela *regra*-Cut

Então $M \equiv N_1N_2$ e

$$\pi \vdash^{\alpha}_{\rho} M \equiv \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \vdash^{\alpha-1}_{\rho} N_1 \searrow \\ \qquad\qquad\qquad \vdash^{\alpha}_{\rho} N_1N_2, \\ \pi_2 \vdash^{\alpha-1}_{\rho} N_2 \nearrow \end{array} \right. \quad \text{onde } lv(N_1) \leq \rho.$$

(*viii*) HI $\Rightarrow \vdash^{\alpha-1}_{\rho} N_1^{s}$ e $\vdash^{\alpha-1}_{\rho} N_2^{s}$.

(*xix*) Como $lv(N_1) \leq \rho$, é claro que $lv(N_1^{s}) \leq \rho$.

Assim, por (*viii*), (*xix*) e pela *regra*-Cut temos:

$$\vdash^{\alpha}_{\rho} N_1^{s}N_2^{s} \;\Rightarrow\; \vdash^{\alpha}_{\rho} (N_1N_2)^{s}. \;\blacklozenge$$

O lema seguinte estabelece o importante resultado de que para todo termo M, $\vdash^{\mathcal{I}(M)}_{g(M)-1} M$ está definido. Sua prova é simples, por indução na complexidade de M, e utiliza apenas a Definição 5.3.7 e os resultados anteriores.

5.3.11 LEMA do Encapsulamento

$g(M) \leq \rho + 1 \;\Rightarrow\; \vdash^{\mathcal{I}(M)}_{\rho} M.$ ♦

Note que com exceção da *regra*-Cut, todas as outras regras de formação de $\vdash^{\alpha}_{\rho} M$ não levam em consideração ρ. Isso significa que se na construção de $\vdash^{\alpha}_{\rho} M$ nenhuma regra do corte foi utilizada, então existe $\vdash^{\alpha}_{\rho} M$ onde $\rho = 0$. O lema seguinte estabelece um método para eliminarmos as utilizações da *regra*-Cut na construção de $\vdash^{\alpha}_{\rho} M$. Como corolário deste fato, provaremos que para todo termo M, escolhendo-se α adequadamente temos: $\vdash^{\alpha}_{0} M$.

5.3.12 LEMA da Eliminação do Corte

Se $\vdash^{\alpha}_{\rho+1} M$, então, $\vdash^{2^{\alpha}}_{\rho} M$. ♦

5.3.12.1 COROLÁRIO:

Para todo termo M, $\Big|\!\frac{2_{g(M)-1}(\ell(M))}{0} M$. ♦

A prova do Lema 5.3.12 é obtida de maneira simples, por indução no comprimento da árvore para $\Big|\!\frac{\alpha}{\rho+1} M$. A do Corolário 5.3.12.1 é obtida trivialmente a partir dos Lemas 5.3.11 e 5.3.12.

A seguir definiremos a atribuição numérica $\#M$, que Beckmann provará ser um Ordinal Natural para $\lambda^{\supset}$.

5.3.13 DEFINIÇÃO: Atribuição Numérica a Termos

Definimos, por indução em $\Big|\!\frac{\alpha}{0} M$, a seguinte atribuição numérica a $\lambda^{\supset}$-termos:

(*i*) $\#((\lambda x.P)Q\mathbf{S}) = \#((P[x/Q])\mathbf{S}) + 1 + \#\mathbf{S}$;

(*ii*) $\#((\lambda x.P) = \#P + 1$;

(*iii*) $\#(xN_1 \ldots N_n) = \sum_{i=1}^{n} \#N_i$.

5.3.13.1 OBSERVAÇÃO:

Note, pelos três itens da definição acima e pela Definição 5.3.7, que $\#M$ está definido para todo M tal que $\Big|\!\frac{\alpha}{0} M$ está definida, pois os três casos da definição de $\#M$ representam os três itens da definição de $\Big|\!\frac{\alpha}{\rho} M$ que não dependem de ρ. Como provamos em 5.3.12.1 que para todo M, temos, escolhendo um α adequado, $\Big|\!\frac{\alpha}{0} M$, então $\#M$ está definido para todo $\lambda^{\supset}$-termo M.

A seguir apresentamos um lema técnico com propriedades de $\#M$. Sua demonstração é simples e também obtida por indução no comprimento da árvore para $\Big|\!\frac{\alpha}{0} M$.

5.3.14 LEMA Técnico

(*a*) $\#M = \#M[x/y]$.

(*b*) $\#My \geq \#M$. ♦

O teorema seguinte relaciona a atribuição #M com o α de $\left|\frac{\alpha}{0}\right.$ M. Tal relação é obtida diretamente a partir da definição de #M e das regras de formação de $\left|\frac{\alpha}{\rho}\right.$ M que não dependem de ρ. Como corolário imediato deste teorema temos que o número de Beckmann para o termo M é maior que #M, ou seja, ($n_{\mathbf{B}}$(M) $\geq$ #M).

5.3.15 TEOREMA da Estimativa

Se $\left|\frac{\alpha}{0}\right.$ M, então #M $\leq 2^{\alpha}$. ♦

5.3.15.1 COROLÁRIO:

#M $\leq 2_{g(\mathrm{M})}(l(\mathrm{M}))$. ♦

A prova do corolário acima é obtida imediatamente através do Corolário 5.3.12.1 e do Teorema 5.3.15. O Corolário acima não apenas garante que a atribuição #M é finita, como apresenta uma estimativa para seu valor, em termos de g(M) e l(M). Para que o número de Beckmann seja uma estimativa para o comprimento da árvore de redução para M (h(M)), precisamos do resultado fundamental abaixo, que garante que a atribuição #M diminui com as reduções. Este resultado, juntamente com o corolário acima, garante que #M é ordinal natural para $\lambda^{\supset}$, e que portanto, h(M) $\leq$ #M.

5.3.16 TEOREMA Principal

Se M $\rightarrow$ N, então #N< #M. ♦

5.3.16.1 COROLÁRIO:

$h(\mathrm{M}) \leq \#\mathrm{M} \leq 2_{g(\mathrm{M})}(l(\mathrm{M})) = n_{\mathbf{B}}(\mathrm{M})$. ♦

A prova do Teorema 5.3.16 é obtida por indução em #M, inspecionando os três casos da Definição 5.3.13, utilizando apenas os resultados do Lema Técnico 5.3.14 e resultados envolvendo substituição de variáveis (Seção 4.2). A prova do Corolário 5.3.16.1 é obtida diretamente a partir do Teorema 5.3.16 e Corolário 5.3.15.1.

5.3.17 COMENTÁRIO: Igualdade entre #M e {M}

É fácil ver, sob a luz do Teorema 5.3.6, de caracterização para os $\lambda^{\supset}$-termos, que o ordinal natural de Beckmann, definido em 5.3.13 coincide com a estimativa frouxa de Vrijer, definida aqui em 5.2.5. Apesar de tal coincidência, também nos parece claro, devido às diferenças nas definições, que os dois resultados foram obtidos independentemente. Devido ao Teorema de Caracterização 5.3.6, Beckmann evita a análise do complicado caso $M \equiv M_0M_1$ e, portanto, seu ordinal possui uma definição mais simples que o de Vrijer. No entanto, considerando que Vrijer provou, de fato, que {M} é ordinal natural para um $\lambda^{\supset}$-termo M qualquer, podemos dizer que a grande contribuição de Beckmann foi apresentar uma estimativa, definida de uma maneira bastante simples, para a complexidade de uma atribuição que é ordinal natural para $\lambda^{\supset}$, e além disso provar que sua estimativa é a melhor possível definida nas variáveis que ela utiliza (l(M) e g(M)).[50]

[50] O artigo de Beckmann que utilizamos nesta análise ainda não foi publicado. Foi submetido ao JSL em 98, mas pelo menos até o momento em que escrevemos esta tese, não tínhamos notícia se foi aceito. Utilizamos uma versão preliminar que nos foi entregue em mãos no encontro europeu da ASL 98 pelo próprio autor, na qual muitos dos pontos que esclarecemos aqui estão ainda obscuros. Vale ressaltar também que, ao que parece, nem Schwichtenberg nem Beckmann conheciam o artigo **Vrijer[1987]**. O ordinal natural utilizado por **Schwichtenberg[1991]** foi obtido a partir de **Gandy[1980]**, e o de **Beckmann[1998]**, apesar de coincidir com a estimativa frouxa de Vrijer, foi obtido de uma maneira bastante diferente. Além do que, nenhum dos dois autores cita **Vrijer[1987]**.

Capítulo VI

Normalização Forte para $\lambda^{\supset}$ via Ordinal Natural

Neste capítulo apresentaremos o desenvolvimento completo do nosso método para o sistema de cálculo lambda tipificado $\lambda^{\supset}$. Tal desenvolvimento, apesar de acompanhar o que fizemos nos Capítulos II e III para o sistema C', não representa, entretanto, uma tradução direta desses resultados para $\lambda^{\supset}$ através da noção de fórmulas como tipos. Como vimos no Capítulo IV, o sistema $\lambda^{\supset}$ é isomorfo a C$\supset$, o fragmento implicativo do sistema C, que é mais simples que C'.

A apresentação destes resultados ocupará as três primeiras seções do capítulo. Na primeira delas demonstraremos que, assumindo a finitude do comprimento da pior seqüência de redução para todo termo M,[51] então este comprimento representa um ordinal natural para $\lambda^{\supset}$. Na segunda seção, definimos a atribuição numérica o(M), que mostramos ser única e finita para todo termo M. Na terceira seção provamos que o(M) corresponde ao comprimento da pior seqüência de redução do termo M, que portanto é finita. Utilizando então o resultado da Seção 1, provamos que o(M) é ordinal natural para $\lambda^{\supset}$. Como conseqüência destes resultados, ainda na Seção 3 obtemos provas simples para os Teoremas de Normalização Forte e Church-Rosser em $\lambda^{\supset}$. Na quarta e última seção apresentamos uma análise comparativa entre os nossos resultados e os artigos estudados no Capítulo V.

Sobre o conteúdo do capítulo gostaríamos de dizer que apesar de várias das demonstrações dos resultados que introduzimos não serem difíceis, optamos por apresentá-las todas no texto, para reforçar o argumento de que o nosso método, adequado para o sistema $\lambda^{\supset}$, é distinto dos métodos utilizados pelos autores discutidos no capítulo anterior.

§1 O Comprimento da Pior Seqüência, se Finito, Diminui com as Reduções

Este primeiro lema é um resultado auxiliar que estabelece como é o left-most redex de um termo N obtido de $\mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}] \equiv \mathsf{M} \rightarrow_{\Delta} \mathsf{N}$, onde $(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}$ é o left-most redex em M e $\Delta \not\equiv (\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}$.

[51] A seqüência definida a partir da estratégia perpétua em 4.4.5.1-(c).

6.1.1 LEMA:

Seja $M \equiv C[(\lambda x.P)Q]$, onde $((\lambda x.P)Q)$ é o left-most redex em M. Se $M \to_\Delta M'$, tal que $\Delta \not\equiv (\lambda x.P)Q$ então:

(*a*) $(\Delta \subset P)$ e $(P \to_\Delta P') \Rightarrow M' \equiv C[(\lambda x.P')Q]$, onde:

$(\lambda x.P')Q$ é o left-most redex de M'.

(*b*) $(\Delta \subset Q)$ e $(Q \to_\Delta Q') \Rightarrow M' \equiv C[(\lambda x.P)Q']$, onde:

$(\lambda x.P)Q'$ é o left-most redex de M'.

(*c*) $(\Delta \subset C[\ ]) \Rightarrow (C[\ ] \to_\Delta C'[\ ])$ e $M' \equiv C'[(\lambda x.P)Q]_\alpha$ onde:

$(\lambda x.P)Q$ é o left-most redex de M'.

(*d*) $(\Delta \subset C[\ ]_A) \Rightarrow C[N] \to_\Delta C'[N] \ \ \forall N \in \Lambda^A$.

<u>PROVA</u>:

Item (*a*): Hip: $(\Delta \subset P)$ e $(P \to_\Delta P')$

$P \to_\Delta P' \underset{4.3.1}{\Rightarrow} (\lambda x.P)Q \to_\Delta (\lambda x.P')Q$.

Assim, é claro que $M \equiv C[(\lambda x.P)Q] \to_\Delta C[(\lambda x.P')Q] \equiv M'$.

Além disso, como $(\lambda x.P')Q$ é um redex e $C[\ ]$ não se alterou com a redução de Δ, é claro que $(\lambda x.P')Q$ é o left-most redex de $C[(\lambda x.P')Q] \equiv M'$. □

Item (*b*): Hip: $(\Delta \subset Q)$ e $(Q \to_\Delta Q')$.

Análogo ao Item (*a*). □

Item (c): Hip: $(\Delta \subset C[\ ])$.

Como $\Delta \subset C[\ ]$ e $(\lambda x.P)Q$ é o left-most redex de $C[(\lambda x.P)Q]$, então Δ não pode ocorrer à esquerda do buraco [ ] em $C[\ ]$. Logo, $C[\ ]$ é do tipo: $C[\ ] \equiv C_1[\ ]N$, onde $\Delta \subset N$.

Então, pelo Comentário 4.3.5.1-(*d*) temos que:

$C[\ ] \equiv C_1[\ ]N \to_\Delta C_1[\ ]N' \equiv C'[\ ]$

Portanto temos:

$M \equiv C[(\lambda x.P)Q] \equiv C_1[(\lambda x.P)Q]N \to_\Delta C_1[(\lambda x.P)Q]N' \equiv C'[(\lambda x.P)Q] \equiv N'$

Além disso, como a única diferença entre $C[(\lambda x.P)Q]$ e $C'[(\lambda x.P)Q]$ é o subtermo N, que ocorre à direita de $(\lambda x.P)Q$, temos que $(\lambda x.P)Q$ é o left-most redex de $C'[(\lambda x.P)Q]$. □

Item(*d*): Hip: ($\Delta \subset \mathsf{C}[\ ]_{\mathsf{A}}$).

Pelo Item (*c*) temos que $\mathsf{C}[\ ]_{\mathsf{A}} \to_{\Delta} \mathsf{C}'[\ ]_{\mathsf{A}}$. Logo, pelo Lema 4.3.7 é imediato que $\forall \mathsf{N} \in \Lambda^{\mathsf{A}}$ temos: $\mathsf{C}[\mathsf{N}] \to_{\Delta} \mathsf{C}'[\mathsf{N}]$. ♦

O teorema seguinte é a contrapartida em cálculo lambda tipificado do resultado de **Massi[1990]** sobre a pior seqüência de redução. Ele estabelece que na hipótese do comprimento da estratégia perpétua para qualquer termo M ser finito ($\forall \mathsf{M}\ (L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M}) < \omega)$), então $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})$ diminui com as reduções e, além disso, estabelece que para qualquer M' tal que $\mathsf{M} \to \mathsf{M}'$, existe um termo N tal que tanto M quanto M' se reduzem através da estratégia perpétua a N: $\mathsf{M} \xrightarrow{p}\!\!\!\!\to_{\mathsf{R}} \mathsf{N}$ e $\mathsf{M}' \xrightarrow{p}\!\!\!\!\to_{\mathsf{R}} \mathsf{N}$. O primeiro resultado é uma parte da prova de que $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})$ é ordinal natural, e o segundo será utilizado na prova do Teorema de Church-Rosser sobre a unicidade da forma normal.

Apesar de longa, a prova do teorema seguinte é simples. É obtida por indução em $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})$, que estamos assumindo ser finito, e por inspeção em todas as possibilidades para M° e para a redução $\mathsf{M} \to \mathsf{M}'$. Constitui de fato uma aplicação para o sistema $\lambda^{\supset}$ do método de prova desenvolvido por Massi para o sistema C'.

6.1.2 TEOREMA:

Se para todo termo M, $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M}) < \omega$, então:

(1) $\mathsf{M} \to \mathsf{M}' \Rightarrow L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M}) > L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M}')$.

(2) $\mathsf{M} \to \mathsf{M}' \Rightarrow \exists m,n < \omega \ / \ \mathsf{M}'^{\circ m} \equiv \mathsf{M}^{\circ n}$.

<u>PROVA</u>: Provaremos os Itens (1) e (2) simultaneamente por indução em $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})$.

<u>BASE</u>: $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M}) = 1$

Neste caso, M é normal e o teorema é válido por vacuidade.

<u>PASSO</u>: $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M}) > 1$.

HI: $\forall \mathsf{N}$ tal que $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{N}) < L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})$, temos:

$\mathsf{N} \to \mathsf{N}' \Rightarrow$ (*a*) $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{N}) > L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{N}')$;

(*b*) $\exists k,j < \omega \ / \ \mathsf{N}^{\circ k} \equiv \mathsf{N}'^{\circ j}$.

Como por hipótese $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M}) < \omega$ é claro que:

(*i*) $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M}) = L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M}^\circ) + 1$.

Por (*i*) temos que $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M}^\circ) < L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})$. Logo, vale HI em M°. Portanto:

(*ii*) $\mathsf{M}^\circ \to \mathsf{N} \;\Rightarrow\; L_{F_\infty}(\mathsf{M}^\circ) > \; L_{F_\infty}(\mathsf{N})$.

(*iii*) $\mathsf{M}^\circ \to \mathsf{N} \;\Rightarrow \exists j,k < \omega \;/\; \mathsf{N}^{\circ j} \equiv (\mathsf{M}^\circ)^{\circ k}$.

($\bullet$) Seja $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}]$ tal que $(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}$ é o left-most redex de M.

Dividiremos a prova em casos, conforme os casos da definição de F_∞ para M.

<u>CASO 1</u>: $(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}$ é um I-redex

Pela Definição 4.4.5 de F_∞ temos:

(*iv*) $F_\infty(\mathsf{M}) \equiv \mathsf{M}^\circ \equiv \mathsf{C}[\mathsf{P}[x/\,\mathsf{Q}]]$.

Seja $\mathsf{M} \to_\Delta \mathsf{M}'$. Temos que todas as possibilidades para Δ são: $\Delta \subset \mathsf{P}$, ou $\Delta \subset \mathsf{Q}$, ou $\Delta \subset \mathsf{C}[\;]$, ou $\Delta \equiv (\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}$. Analisemos cada um destes casos.

<u>SubCaso 1.1</u>: $\Delta \subset \mathsf{C}[\;]$

Neste caso, pela forma de M em ($\bullet$) e pelo Lema 6.1.1-(*c*) temos:

$\mathsf{M}' \equiv \mathsf{C}'[(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}]$, onde $(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}$ é o left-most redex de M'.

(*v*) Então, pela Definição 4.4.5 de F_α temos: $\mathsf{M}'^\circ \equiv \mathsf{C}'[\mathsf{P}[x/\,\mathsf{Q}]]$.

Mas, pelo Lema 6.1.1-(*d*) temos:

$\mathsf{M}^\circ \equiv \mathsf{C}[\mathsf{P}[x/\,\mathsf{Q}]] \to_\Delta \mathsf{C}'[\mathsf{P}[x/\,\mathsf{Q}]] \underset{(v)}{\equiv} \mathsf{M}'^\circ$. Ou seja:

(*vi*) $\mathsf{M}^\circ \to \mathsf{M}'^\circ$.

Assim, por (*ii*) e (*vi*) temos:

(*vii*) $L_{F_\infty}(\mathsf{M}^\circ) > \; L_{F_\infty}(\mathsf{M}'^\circ)$.

Então: $L_{F_\infty}(\mathsf{M}) \underset{(i)}{=} L_{F_\infty}(\mathsf{M}^\circ) + 1 \underset{(vii)}{>} L_{F_\infty}(\mathsf{M}'^\circ) + 1 \underset{(i)}{=} L_{F_\infty}(\mathsf{M}')$, o que resolve o Item (1).

Além disso, por (*iii*) e (*vi*) temos:

$\exists j,k < \omega$ tais que: $(\mathsf{M}'^\circ)^{\circ j} \equiv (\mathsf{M}^\circ)^{\circ k}$.

Logo, pela Observação 4.4.5.1-(*d*) temos que $\mathsf{M}'^{\circ j+1} \equiv \mathsf{M}^{\circ k+1}$, o que resolve o Item (2).

<u>SubCaso 1.2</u>: $\Delta \subset \mathsf{Q}$ (Seja $\mathsf{Q} \to_\Delta \mathsf{Q}'$)

Neste caso, pela forma de M em ($\bullet$) e pelo Lema 6.1.1-(*b*) temos:

$\mathsf{M}' \equiv \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}']$, onde $(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}'$ é o left-most redex de M'.

(*viii*) Então, pela Definição 4.4.5 de F_∞ temos: $\mathsf{M}'^\circ \equiv \mathsf{C}[\mathsf{P}[x/\,\mathsf{Q}']]$.

Como, por hipótese do Caso 1, $(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}$ é um I-redex, então:

(*ix*) x ocorre livre em P.

Logo, como $\mathsf{Q} \to_\Delta \mathsf{Q}'$, por (*ix*) e pelo Lema 4.3.4-(*a*) temos:

(*x*) $\mathsf{P}[x/\,\mathsf{Q}] \twoheadrightarrow \mathsf{P}[x/\,\mathsf{Q}']$.

Logo, por (*x*) e pelo Corolário 4.3.9.1:

$\mathsf{M}^\circ \equiv \mathsf{C}[\mathsf{P}[x/\mathsf{Q}]] \twoheadrightarrow \mathsf{C}[\mathsf{P}[x/\mathsf{Q}']] \underset{(viii)}{\equiv} \mathsf{M}'^\circ$. Ou seja:

(*xi*) $\mathsf{M}^\circ \twoheadrightarrow \mathsf{M}'^\circ$.

Portanto existe uma redução não vazia:

(*xii*) $\mathsf{M}^\circ \equiv \mathsf{N}_1 \rightarrow \mathsf{N}_2 \rightarrow \mathsf{N}_3 \rightarrow \ldots \rightarrow \mathsf{N}_n \equiv \mathsf{M}'^\circ$.

Por (*xii*), (*ii*) e aplicando *n*-1 vezes HI, temos:

(*xiii*) $L_{F_\infty}(\mathsf{M}^\circ) = L_{F_\infty}(\mathsf{N}_1) > L_{F_\infty}(\mathsf{N}_2) > \ldots > L_{F_\infty}(\mathsf{N}_n) = L_{F_\infty}(\mathsf{M}'^\circ)$

Então: $L_{F_\infty}(\mathsf{M}) \underset{(i)}{=} L_{F_\infty}(\mathsf{M}^\circ) + 1 \underset{(xiii)}{>} L_{F_\infty}(\mathsf{M}'^\circ) + 1 \underset{(i)}{=} L_{F_\infty}(\mathsf{M}')$, o que resolve o Item (1).

Além disso, por (*xiii*) e (*iii*), aplicando *n*-1 vezes HI, temos que existem $k_1, \ldots, k_n < \omega$ tais que:

$(\mathsf{M}'^\circ)^{\circ k_n} \equiv (\mathsf{N}_n)^{\circ k_n} \equiv (\mathsf{N}_{n-1})^{\circ k_{n-1}} \equiv (\mathsf{N}_{n-2})^{\circ k_{n-2}} \equiv \ldots \equiv (\mathsf{N}_2)^{\circ k_2} \equiv (\mathsf{N}_1)^{\circ k_1} \equiv (\mathsf{M}^\circ)^{\circ k_1}$.

Logo, tomando $j = k_n + 1$ e $k = k_1 + 1$, pela Observação 4.4.5.1-(*d*) temos:

$\mathsf{M}'^{\circ j} \equiv \mathsf{M}^{\circ k}$, o que resolve o Item (2).

<u>SubCaso 1.3</u>: $\Delta \subset \mathsf{P}$ (Seja $\mathsf{P} \rightarrow_\Delta \mathsf{P}'$)

Neste caso, pela forma de M em (•) e pelo Lema 6.1.1-(*a*) temos:

(••) $\mathsf{M}' \equiv \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{P}')\mathsf{Q}]$, onde $(\lambda x.\mathsf{P}')\mathsf{Q}$ é o left-most redex de M'.

Temos dois subcasos para definir a forma de M'°:

(1) $(\lambda x.\mathsf{P}')\mathsf{Q}$ é um I-redex;

(2) $(\lambda x.\mathsf{P}')\mathsf{Q}$ é um K-redex.

<u>SubCaso 1.3.1</u>: $(\lambda x.\mathsf{P}')\mathsf{Q}$ é um I-redex

Então, pela forma de M' em (••) e pela Definição 4.4.5 de F_∞ temos:

(*xiv*) $\mathsf{M}'^\circ \equiv \mathsf{C}[\mathsf{P}'[x/\mathsf{Q}]]$.

Como, por hipótese do Caso 1, $(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}$ é um I-redex, então x ocorre livre em P. Além disso, temos que $\mathsf{P} \rightarrow_\Delta \mathsf{P}'$. Logo, pelo Lema 4.3.4-(*b*) temos:

(*xv*) $\mathsf{P}[x/\mathsf{Q}] \twoheadrightarrow \mathsf{P}'[x/\mathsf{Q}]$.

Logo, por (*xv*) e pelo Corolário 4.3.9.1:

$$\mathsf{M}^\circ \equiv \mathsf{C}[\mathsf{P}[x/\mathsf{Q}]] \twoheadrightarrow \mathsf{C}[\mathsf{P}'[x/\mathsf{Q}]] \underset{(xiv)}{\equiv} \mathsf{M}'^\circ.$$

Ou seja: $\mathsf{M}^\circ \twoheadrightarrow \mathsf{M}'^\circ$, e portanto o resultado segue como no Caso 1.1.2.

<u>SubCaso 1.3.2</u>: $(\lambda x.\mathsf{P}')\mathsf{Q}$ é um K-redex

Temos aqui mais dois subcasos para definir o tipo de M'°:

(1) Q está na forma normal;

(2) Q não está na forma normal.

SubCaso 1.3.2.1: Q está na forma normal

Então, pela forma de M' em (••) e pela Definição 4.4.5 de F_∞ temos:

(*xvi*) $\mathsf{M}'^\circ \equiv \mathsf{C}[\mathsf{P}']$.

Por hipótese do Caso 1, $(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}$ é um I-redex, então x ocorre livre em P. Além disso, temos que $\mathsf{P} \to_\Delta \mathsf{P}'$. Logo, pelo Lema 4.3.4-(*b*) temos:

(*xvii*) $\mathsf{P}[x/\mathsf{Q}] \twoheadrightarrow \mathsf{P}'[x/\mathsf{Q}]$.

Mas como $(\lambda x.\mathsf{P}')\mathsf{Q}$ é um K-redex, então x não ocorre livre em P'. Logo:

(*xviii*) $\mathsf{P}'[x/\mathsf{Q}] \equiv \mathsf{P}'$.

(*xix*) Assim, por (*xvii*) e (*xviii*) temos: $\mathsf{P}[x/\mathsf{Q}] \twoheadrightarrow \mathsf{P}'$.

Então por (*xix*) e pelo Corolário 4.3.9.1 temos:

$\mathsf{M}^\circ \equiv \mathsf{C}[\mathsf{P}[x/\mathsf{Q}]] \twoheadrightarrow \mathsf{C}[\mathsf{P}'] \underset{(xvi)}{\equiv} \mathsf{M}'^\circ$.

Ou seja: $\mathsf{M}^\circ \twoheadrightarrow \mathsf{M}'^\circ$, e portanto o resultado segue como no Caso 1.1.2.

SubCaso 1.3.2.2: Q não está na forma normal

Então, pela forma de M' em (••) e pela Definição 4.4.5 de F_∞ temos:

(*xx*) $\mathsf{M}'^\circ \equiv \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{P}')\mathsf{Q}^\circ]$.

Se $\mathsf{P} \to \mathsf{P}'$ tal que $(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}$ é um I-redex e $(\lambda x.\mathsf{P}')\mathsf{Q}$ é um K-redex, como é o caso, então a redução $\mathsf{P} \to \mathsf{P}'$ eliminou de P o subtermo que continha todas as ocorrências livres de x. Temos então a seguinte situação:

(*) $\mathsf{P} \equiv \mathsf{C}_1[(\lambda x.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q}_1] \to \mathsf{C}_1[\mathsf{P}_1] \equiv \mathsf{P}'$, onde toda ocorrência livre de x em P ocorre em Q_1.

Note que $(\lambda x.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q}_1$ é um K-redex e P' não possui mais ocorrência livre de x.

Assumindo $\mathsf{P} \equiv \mathsf{C}_1[(\lambda x.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q}_1]$ e $\mathsf{P}' \equiv \mathsf{C}_1[\mathsf{P}_1]$ como descritos acima, vamos rescrever os termos de que estamos tratando nesta prova.

(*xxi*) $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}] \equiv \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{C}_1[(\lambda x.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q}_1])\mathsf{Q}]$.

(*xxii*) $\mathsf{M}^\circ \equiv \mathsf{C}[\mathsf{P}[x/\mathsf{Q}]] \equiv \mathsf{C}[\mathsf{C}_1[(\lambda x.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q}_1][x/\mathsf{Q}]] \underset{\substack{x \text{ só ocorre} \\ \text{livre em } \mathsf{Q}_1}}{\equiv} \mathsf{C}[\mathsf{C}_1[(\lambda x.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q}_1[x/\mathsf{Q}]]]$.

(*xxiii*) $\mathsf{M}' \equiv \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{P}')\mathsf{Q}] \equiv \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{C}_1[\mathsf{P}_1])\mathsf{Q}]$.

(*xxiv*) $\mathsf{M}'^\circ \equiv \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{P}')\mathsf{Q}^\circ] \equiv \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{C}_1[\mathsf{P}_1])\mathsf{Q}^\circ]$.

Note por (*xxiv*) e pela Definição 4.4.5 de F_∞ que:

$\mathsf{M}'^{\circ 2} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{C}_1[\mathsf{P}_1])\mathsf{Q}^{\circ 2}]$, se Q° não for normal.

Em geral, $\mathsf{M}'^{\circ n} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{C}_1[\mathsf{P}_1])\mathsf{Q}^{\circ n}]$ se $\mathsf{Q}^{\circ(n-1)}$ não for normal.

Se $\mathsf{Q}^{\circ n}$ for normal então, pela Definição 4.4.5 temos:

(xxv) $\mathsf{M}'^{\circ(n+1)} \equiv \mathsf{C}[\mathsf{C}_1[\mathsf{P}_1]]$.

Dessa forma, o path da estratégia perpétua de M' é:

$\mathsf{M}' \underset{(xxiii)}{\equiv} \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{C}_1[\mathsf{P}_1])\mathsf{Q}] \xrightarrow{p} \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{C}_1[\mathsf{P}_1])\mathsf{Q}^{\circ 1}] \xrightarrow{p} \ldots \xrightarrow{p} \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{C}_1[\mathsf{P}_1])\mathsf{Q}^{\circ n}] \xrightarrow{p} \mathsf{C}[\mathsf{C}_1[\mathsf{P}_1]] \xrightarrow{p} \ldots$,

onde $\mathsf{Q}^{\circ n}$ é normal. Ou seja, $L_{\mathbf{F}_\infty}(\mathsf{Q}) = n$ e os $L_{\mathbf{F}_\infty}(\mathsf{Q})$ primeiros termos da redução de M' pela estratégia perpétua realizam a normalização de Q, e o que sobra disso é $\mathsf{C}[\mathsf{C}_1[\mathsf{P}_1]]$.

($xxvi$) Então temos: $L_{\mathbf{F}_\infty}(\mathsf{M}') = L_{\mathbf{F}_\infty}(\mathsf{Q}) + L_{\mathbf{F}_\infty}(\mathsf{C}[\mathsf{C}_1[\mathsf{P}_1]])$.

($xxvii$) Mas: $L_{\mathbf{F}_\infty}(\mathsf{M}) \underset{(i)}{=} L_{\mathbf{F}_\infty}(\mathsf{M}^\circ) + 1 \underset{(xxii)}{=} L_{\mathbf{F}_\infty}(\mathsf{C}[\mathsf{C}_1[(\lambda x.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q}_1[x/\mathsf{Q}]]]) + 1$.

($xxviii$) Então, por ($xxvi$) e ($xxvii$), para provarmos que $\mathsf{L}_{\mathbf{F}_\infty}(\mathsf{M}) > \mathsf{L}_{\mathbf{F}_\infty}(\mathsf{M}')$, é suficiente provarmos que $L_{\mathbf{F}_\infty}(\mathsf{C}[\mathsf{C}_1[(\lambda x.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q}_1[x/\mathsf{Q}]]]) \geq L_{\mathbf{F}_\infty}(\mathsf{Q}) + L_{\mathbf{F}_\infty}(\mathsf{C}[\mathsf{C}_1[\mathsf{P}_1]])$, o que faremos agora.

($xxix$) Seja $\mathsf{Q} \xrightarrow{p} \mathsf{Q}^\circ \xrightarrow{p} \ldots \xrightarrow{p} \mathsf{Q}^{\circ n}$ o path da redução de Q por F_∞ (Note que $\mathsf{Q}^{\circ n}$ é normal).

Como $x \in FV(\mathsf{Q}_1)$, por ($xxix$), pelos Lemas 4.3.3-(a) e 4.3.4-(a) temos:

(xxx) $(\lambda x.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q}_1[x/\mathsf{Q}] \twoheadrightarrow (\lambda x.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q}_1[x/\mathsf{Q}^\circ] \twoheadrightarrow \ldots \twoheadrightarrow (\lambda x.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q}_1[x/\mathsf{Q}^{\circ n}]$.

Por (xxx) e pelo Corolário 4.3.9.1 temos:

($xxxi$) $\mathsf{C}[\mathsf{C}_1[(\lambda x.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q}_1[x/\mathsf{Q}]]] \twoheadrightarrow \ldots \twoheadrightarrow \mathsf{C}[\mathsf{C}_1[(\lambda x.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q}_1[x/\mathsf{Q}^{\circ n}]]]$.

Esquematicamente temos:

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathsf{Q} & & \mathsf{C}[\mathsf{C}_1[(\lambda x.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q}_1[x/\mathsf{Q}]]] \equiv \mathsf{M}^\circ & & \mathsf{L}_{\mathbf{F}_\infty}(\mathsf{M}^\circ) \\
\downarrow & \underset{(xxx)\text{ e }(xxxi)}{\Rightarrow} & \twoheaddownarrow & \underset{HI}{\Rightarrow} & \vee \\
\mathsf{Q}^\circ & & \mathsf{C}[\mathsf{C}_1[(\lambda x.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q}_1[x/\mathsf{Q}^\circ]]] \equiv (\mathsf{M}^\circ)' & & \mathsf{L}_{\mathbf{F}_\infty}((\mathsf{M}^\circ)') \\
\downarrow & \underset{(xxx)\text{ e }(xxxi)}{\Rightarrow} & \twoheaddownarrow & \underset{HI}{\Rightarrow} & \vee \\
\mathsf{Q}^{\circ 2} & & \mathsf{C}[\mathsf{C}_1[(\lambda x.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q}_1[x/\mathsf{Q}^{\circ 2}]]] \equiv (\mathsf{M}^\circ)'^2 & & \mathsf{L}_{\mathbf{F}_\infty}((\mathsf{M}^\circ)'^2) \\
\downarrow & & \twoheaddownarrow & & \vee \\
\vdots & \underset{(xxx)\text{ e }(xxxi)}{\Rightarrow} & \vdots & \underset{HI}{\Rightarrow} & \vdots \\
\downarrow & & \twoheaddownarrow & & \vee \\
\mathsf{Q}^{\circ n} & & \mathsf{C}[\mathsf{C}_1[(\lambda x.\mathsf{P}_1)\mathsf{Q}_1[x/\mathsf{Q}^{\circ n}]]] \equiv (\mathsf{M}^\circ)'^n & & \mathsf{L}_{\mathbf{F}_\infty}((\mathsf{M}^\circ)'^n) \\
 & & \twoheaddownarrow & \underset{HI}{\Rightarrow} & \vee \\
 & & \mathsf{C}[\mathsf{C}_1[\mathsf{P}_1]] & & \mathsf{L}_{\mathbf{F}_\infty}(\mathsf{C}[\mathsf{C}_1[\mathsf{P}_1]])
\end{array}
$$

Temos então a seguinte situação:

$L_{F_\infty}(M^\circ)_{(1)} > L_{F_\infty}((M^\circ)')_{(2)} > L_{F_\infty}((M^\circ)'^2)_{(3)} > \ldots > L_{F_\infty}((M^\circ)'^n)_{(L_{F_\infty}(Q))} > L_{F_\infty}(C[C_1[P_1]])_{(L_{F_\infty}(Q)+1)}$.

Pela atribuição de índices acima, podemos notar que esta cadeia estritamente ordenada tem $L_{F_\infty}(Q)+1$ termos, onde o primeiro é $L_{F_\infty}(M^\circ)$ e o último é $L_{F_\infty}(C[C_1[P_1]])$.

Portanto: $L_{F_\infty}(M^\circ) = L_{F_\infty}(Q) + L_{F_\infty}(C[C_1[P_1]])$.

Logo $L_{F_\infty}(C[C_1[(\lambda x.P_1)Q_1[x/Q]]]) \underset{(xxii)}{=} L_{F_\infty}(M^\circ) \geq L_{F_\infty}(Q) + L_{F_\infty}(C[C_1[P_1]])$.

Com isso provamos (*xxviii*) e portanto, por (*xxvi*) e (*xxvii*), temos que:

$L_{F_\infty}(M) > L_{F_\infty}(M')$, o que resolve o Item (1).

Além disso, por (*xxii*) e (*xxv*) temos que:

(*xxxii*) $M^\circ \to M'^{\circ(n+1)}$.

Portanto, por (*iii*) e (*xxxii*) temos que:

$\exists j,k < \omega$ tais que: $(M'^{\circ(n+1)})^{\circ j} \equiv (M^\circ)^{\circ k}$.

Portanto, $M'^{\circ(n+j+1)} \equiv M^{\circ k+1}$ o que resolve o Item (2).

<u>SubCaso 1.4</u>: $\Delta \equiv (\lambda x.P)Q$

Neste caso, como $(\lambda x.P)Q$ é um I-redex, pela forma de M em (•): $M' \equiv C[P[x/Q]]$.

Note que por (*iv*) temos $M' \equiv M^\circ$. Portanto, por (*i*) temos: $L_{F_\infty}(M) > L_{F_\infty}(M')$, o que resolve o Item (1), e $M'^{\circ 0} \equiv M^{\circ 0}$, o que resolve o Item (2).

Com isso esgotamos todos os casos possíveis para $M \to M'$ e portanto terminamos o Caso 1.

<u>Caso 2</u>: $(\lambda x.P)Q$ é um K-redex

Segundo a Definição 4.4.5 temos aqui dois subcasos para definir a forma de M°:

(1) Q está na forma normal;

(2) Q não está na forma normal.

<u>SubCaso 2.1</u>: Q está na forma normal

Então, pela forma de M em (•) e pela Definição 4.4.5 de F_∞ temos:

(*xxxiii*) $F_\infty(M) \equiv M^\circ \equiv C[P]$.

Seja $M \to_\Delta M'$. Como Q é normal, temos $\Delta \subset P$, ou $\Delta \subset C[\ ]$, ou $\Delta \equiv (\lambda x.P)Q$. Analisemos cada um destes casos:

<u>SubCaso 2.1.1</u>: $\Delta \subset C[\ ]$

Neste caso, pela forma de M em (•) e pelo Lema 6.1.1-(*c*) temos:

$M' \equiv C'[(\lambda x.P)Q]$, onde $(\lambda x.P)Q$ é o left-most redex de M'.

($xxxiv$) Então, como Q é normal, pela Definição 4.4.5 de F_∞ temos: $M'^\circ \equiv C'[P]$.

Mas, pelo Lema 6.1.1-(d) temos:

($xxxv$) $M^\circ \underset{(xxxiii)}{\equiv} C[P] \rightarrow_\Delta C'[P] \underset{(xxxiv)}{\equiv} M'^\circ$.

Ou seja: $M^\circ \rightarrow M'^\circ$. Logo o resultado segue como no Caso 1.1.1.

<u>SubCaso 2.1.2</u>: $\Delta \subset P$ (Seja $P \rightarrow_\Delta P'$)

Neste caso, pela forma de M em (•) e pelo Lema 6.1.1-(a) temos:

$M' \equiv C[(\lambda x.P')Q]$, onde $P \rightarrow P'$.

($xxxvi$) Então, como Q é normal, pela Definição 4.4.5 de F_∞ temos: $M'^\circ \equiv C[P']$.

($xxxvii$) Como $P \rightarrow P'$, então temos: $M^\circ \underset{(xxxiii)}{\equiv} C[P] \underset{4.3.9}{\rightarrow} C[P'] \underset{(xxxvi)}{\equiv} M'^\circ$.

Ou seja: $M^\circ \rightarrow M'^\circ$. Logo o resultado segue como no Caso 1.1.1.

<u>SubCaso 2.1.3</u>: $\Delta \equiv (\lambda x.P)Q$

Neste caso, pela forma de M em (•) e pelo Lema 6.1.1-(a) temos: $M' \equiv C[P]$.

Note que por ($xxxiii$) temos $M' \equiv M^\circ$. Portanto, por (i): $L_{F_\infty}(M) > L_{F_\infty}(M')$. Além disso, é claro que $M'^0 \equiv M^{\circ 0}$. Portanto os Itens (1) e (2) estão resolvidos.

Note que, como Q é normal, esgotamos todas as reduções possíveis para M e portanto terminamos o Subcaso 2.1.

<u>SubCaso 2.2</u>: Q não está na forma normal

Então, pela forma de M em (•), como $(\lambda x.P)Q$ é um K-redex, pela Definição 4.4.5 de F_∞ temos:

($xxxviii$) $F_\infty(M) \equiv M^\circ \equiv C[(\lambda x.P)Q^\circ]$.

Seja $M \rightarrow_\Delta M'$. Temos: $\Delta \subset P$, ou $\Delta \subset Q$, ou $\Delta \subset C[\ ]$, ou $\Delta \equiv (\lambda x.P)Q$. Analisemos cada um destes casos:

<u>SubCaso 2.2.1</u>: $\Delta \subset C[\ ]$

Neste caso, pela forma de M em (•) e pelo Lema 6.1.1-(c) temos:

$M' \equiv C'[(\lambda x.P)Q]$, onde $(\lambda x.P)Q$ é o left-most redex de M'.

($xxxix$) Então, pela Definição 4.4.5 de F_α temos: $M'^\circ \equiv C'[(\lambda x.P)Q^\circ]$.

Mas, pelo Lema 6.1.1-(d) temos:

(xl) $M^\circ \underset{(xxxviii)}{\equiv} C[(\lambda x.P)Q^\circ] \rightarrow_\Delta C'[(\lambda x.P)Q^\circ] \underset{(xxxix)}{\equiv} M'^\circ$.

Ou seja: $M^\circ \rightarrow M'^\circ$. Logo o resultado segue como no Caso 1.1.1.

<u>SubCaso 2.2.2</u>: $\Delta \subset P$ (Seja $P \rightarrow_\Delta P'$)

Neste caso, pela forma de M em (•) e pelo Lema 6.1.1-(a) temos:

$M' \equiv C[(\lambda x.P')Q]$, onde $(\lambda x.P')Q$ é o left-most redex de M'.

(*xli*) Então, pela Definição 4.4.5 de F_∞ temos: $M'^\circ \equiv C[(\lambda x.P')Q^\circ]$.

Como $P \to_\Delta P'$, pela Definição 4.3.1 temos:

(*xlii*) $(\lambda x.P)Q^\circ \to_\Delta (\lambda x.P')Q^\circ$.

Por (*xlii*) e pelo Teorema 4.3.9 temos:
$M^\circ \underset{(xxxviii)}{\equiv} C[(\lambda x.P)Q^\circ] \to C[(\lambda x.P')Q^\circ] \underset{(xli)}{\equiv} M'^\circ$.

Ou seja: $M^\circ \to M'^\circ$. Logo o resultado segue como no Caso 1.1.1.

SubCaso 2.2.3: $\Delta \subset Q$ (Seja $Q \to_\Delta Q'$)

Neste caso, pelo Lema 6.1.1-(*b*) temos:

$M' \equiv C[(\lambda x.P)Q']$, onde $(\lambda x.P)Q'$ é o left-most redex de M'.

Temos aqui dois subcasos possíveis para o tipo de Q':

(1) $Q' \equiv Q^\circ$;

(2) $Q' \not\equiv Q^\circ$.

SubCaso 2.2.3.1: $Q' \equiv Q^\circ$

Então, pela forma de M em $(\bullet)$ temos: $M' \equiv C[(\lambda x.P)Q^\circ]$.

Note, por (*xxxviii*) que $M' \equiv M^\circ$. Portanto, por (*i*) temos: $L_{F_\infty}(M) > L_{F_\infty}(M')$. Além disso, é claro que $M'^0 \equiv M^{\circ 0}$. Portanto os Itens (1) e (2) estão resolvidos.

SubCaso 2.2.3.2: $Q' \not\equiv Q^\circ$

Mais uma vez temos dois subcasos para analisar:

(1) Q' está na forma normal;

(2) Q' não está na forma normal.

SubCaso 2.2.3.2.1: Q' está na forma normal

(*xliii*) Então, pela forma de M em $(\bullet)$, pela Definição 4.4.5 de F_∞ temos: $M'^\circ \equiv C[P]$.

Efetuando a left-most redução em M° temos:
$M^\circ \underset{(xxxviii)}{\equiv} C[(\lambda x.P)Q^\circ] \to C[P] \underset{(xliii)}{\equiv} M'^\circ$.

Ou seja: $M^\circ \to M'^\circ$. Logo o resultado segue como no Caso 1.1.1.

SubCaso 2.2.3.2.2: Q' não está na forma normal

Note que, como em todo o Caso 2 $(\lambda x.P)Q$ é um K-redex, pela Definição 4.4.5 de F_∞ temos: $M^{\circ 2} \equiv C[(\lambda x.P)Q^{\circ 2}]$, se Q° não for normal.

Em geral, $M^{\circ n} \equiv M^{\overbrace{\circ\circ\cdots\circ}^{\text{n vezes}}} \equiv C[(\lambda x.P)Q^{\circ n}]$ se $Q^{\circ(n-1)}$ não for normal.

Se $Q^{\circ n}$ for normal então:

(*xliv*) $M^{\circ(n+1)} \equiv C[P]$.

Então, o path da estratégia perpétua de M é:

$$M \equiv C[(\lambda x.P)Q] \xrightarrow{p} \ldots \xrightarrow{p} C[(\lambda x.P)Q^{\circ n}] \xrightarrow{p} C[P] \xrightarrow{p} \ldots,$$

onde $Q^{\circ n}$ é normal. Ou seja, os $L_{F_\infty}(Q)$ primeiros termos da redução de M pela estratégia perpétua realizam a normalização de Q, e o que sobra disso é C[P].

(*xlv*) Então temos: $L_{F_\infty}(M) = L_{F_\infty}(Q) + L_{F_\infty}(C[P])$.

Logo, por (*xlv*), como para todo termo N, $L_{F_\infty}(N) \geq 1$, temos:

(*xlvi*) $L_{F_\infty}(M) \succ L_{F_\infty}(Q)$.

Como, por hipótese do caso 2.2.3 temos $M' \equiv C[(\lambda x.P)Q']$, onde $(\lambda x.P)Q'$ é o left-most redex de M', fazendo com M' o raciocínio análogo ao feito anteriormente com M temos:

(*xlvii*) $M'^{\circ(m+1)} \equiv C[P]$, onde $m = L_{F_\infty}(Q')$.

(*xlviii*) $L_{F_\infty}(M') = L_{F_\infty}(Q') + L_{F_\infty}(C[P])$.

Portanto, por (*xlv*) e (*xlviii*) temos:

(*xlix*) $L_{F_\infty}(M) \succ L_{F_\infty}(M') \Leftrightarrow L_{F_\infty}(Q) \succ L_{F_\infty}(Q')$.

Mas, por (*xlv*) vale HI em Q, portanto, para todo Q' tal que $Q \rightarrow Q'$ temos $L_{F_\infty}(Q) \succ L_{F_\infty}(Q')$. Logo, por (*xlix*), $L_{F_\infty}(M) \succ L_{F_\infty}(M')$, o que resolve o Item (1).

Além disso, por (*xliv*) e (*xlvii*) temos: $M'^{\circ(m+1)} \equiv M^{\circ(n+1)}$, o que resolve o Item (2).

<u>SubCaso 2.2.4</u>: $\Delta \equiv (\lambda x.P)Q$

(*l*) Neste caso, como $(\lambda x.P)Q$ é K-redex, pela forma de M em (•) temos: $M' \equiv C[P]$.

Efetuando a left-most redução em M° temos:

$M^{\circ} \underset{(xxxviii)}{\equiv} C[(\lambda x.P)Q^{\circ}] \rightarrow C[P] \underset{(l)}{\equiv} M'$. Ou seja:

(*li*) $M^{\circ} \rightarrow M'$.

Logo, por (*li*) e por (*ii*) temos:

(*lii*) $L_{F_\infty}(M^{\circ}) \succ L_{F_\infty}(M')$.

(*liii*) Mas, por (*i*) temos que: $L_{F_\infty}(M) \succ L_{F_\infty}(M^{\circ})$.

Logo, por (*lii*) e (*liii*) temos que: $L_{F_\infty}(M) \succ L_{F_\infty}(M')$, o que resolve o Item (1).

Além disso, por (*li*) e (*iii*) temos que $\exists j,k < \omega$ tais que: $M'^{\circ j} \equiv (M^{\circ})^{\circ k}$, e portanto, pela Observação 4.4.5.1-(*d*), $M'^{\circ j} \equiv M^{\circ k+1}$, o que resolve o Item (2).

Com isso, terminamos todos os casos possíveis para as reduções de M quando ele é um K-redex, terminando assim o Caso 2 e a prova do teorema.♦

Com o resultado do teorema acima, basta provarmos que $L_{F_\infty}(\mathsf{M}) < \omega$ para todo M para termos que $L_{F_\infty}(\mathsf{M})$ é ordinal natural para os termos de $\lambda^{\supset}$. É isso o que faremos nas duas seções seguintes deste capítulo através da definição da atribuição $o(\mathsf{M})$. A Seção 2 corresponde à contrapartida em $\lambda^{\supset}$ dos resultados do Capítulo II desta tese, e a Seção 3 aos resultados do Capítulo III.

§2 Finitude e Unicidade de $o(\mathsf{M})$.

O objetivo desta seção é definir a atribuição numérica $o(\mathsf{M})$ e provar que é única e finita para todo termo M. Na seção seguinte provaremos que $o(\mathsf{M}) = L_{F_\infty}(\mathsf{M})$ para todo termo M e portanto obteremos a partir do Teorema 6.1.2 acima que $o(\mathsf{M}) = L_{F_\infty}(\mathsf{M})$ é ordinal natural para $\lambda^{\supset}$.

Vamos inicialmente redefinir para o caso de $\lambda^{\supset}$ todos os conceitos fundamentais que utilizamos em nossa prova para C'. Dispensaremos aqui as explicações intuitivas sobre o método de prova que fizemos no Capítulo II.

6.2.1 DEFINIÇÃO: Comprimento de um Tipo - $l_\tau(\,)$

Definimos o comprimento de um tipo A, e denotamos por $l_\tau(A)$, como o número de ocorrências de tipos básicos em A. Mais formalmente:

(*i*) $A = o \quad \Rightarrow \quad l_\tau(A) = 1$;

(*ii*) $A = B \supset C \quad \Rightarrow \quad l_\tau(A) = l_\tau(B) + l_\tau(C)$.

Se $\mathsf{M} \in \Lambda^{A}$ (M é termo do tipo A), denotamos: $l_\tau(\mathsf{M}) =_{df} l_\tau(A)$.

6.2.2 DEFINIÇÃO: Segmento-α

$\mathsf{N} \subset \mathsf{M}$ é um *segmento-α de M*, se N tem a seguinte forma:

$$\mathsf{N} \equiv (\lambda x_1.\lambda x_2\ldots\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1\mathsf{Q}_2\ldots\mathsf{Q}_n.$$

6.2.2.1 OBSERVAÇÃO:

Como ocorre em C', a definição de segmento-α identifica os subtermos de um termo que têm a possibilidade de formarem um novo redex cada vez que uma certa redução é efetuada. Note que a expressão de N acima possui apenas 1 redex explícito $((\lambda x_1.\lambda x_2..\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1)$, cuja redução cria um novo redex, cuja redução, por sua vez, cria um terceiro redex, e assim n vezes. Veja:

$(\lambda x_1.\lambda x_2..\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1\mathsf{Q}_2...\mathsf{Q}_n$ $\qquad$ $((\lambda x_1.\lambda x_2..\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1$ é o redex explicito)

$\downarrow$

$(\lambda x_2..\lambda x_n.\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])\mathsf{Q}_2...\mathsf{Q}_n$ $\qquad$ $((\lambda x_2.\lambda x_2..\lambda x_n.\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])\mathsf{Q}_2$ é o redex)

$\downarrow$

$\vdots$

$\downarrow$

$\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1][x_2/\mathsf{Q}_2]...[x_n/\mathsf{Q}_n]$.

6.2.3 DEFINIÇÃO: Subtermo Pesado (*SP*)

Cada um dos Q_is em um segmento-α $((\lambda x_1.\lambda x_2..\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1\mathsf{Q}_2...\mathsf{Q}_n) \subset \mathsf{M}$ é um *subtermo pesado* (*SP*) *de* M.

6.2.3.1 OBSERVAÇÃO:

Considere o segmento-α $(\lambda x_1.\lambda x_2..\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1\mathsf{Q}_2...\mathsf{Q}_n \subset \mathsf{M}$. Definimos *o* λ *de um subtermo pesado* Q_i $(1 \le i \le n)$ como sendo o símbolo "λ" de λx_i em M.

6.2.4 DEFINIÇÃO: Subtermo Multiplicativo (*SM*)

Considere o segmento-α $(\lambda x_1.\lambda x_2..\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1\mathsf{Q}_2...\mathsf{Q}_n \subset \mathsf{M}$. Dizemos que Q_i $(1 \le i \le n)$ é *subtermo multiplicativo* (*SM*) *em* M se $x_i \in FV(\mathsf{P})$.

6.2.5 DEFINIÇÃO: Grau de um Subtermo Pesado - ($gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_k)$)

Seja $(\lambda x_1.\lambda x_2..\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1\mathsf{Q}_2...\mathsf{Q}_n \subset \mathsf{M}$. O *grau em* M de um subtermo pesado Q_k $(1 \le k \le n)$ (denotado por $gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_k)$) é definido como o comprimento do <u>tipo</u> de $\lambda x_k..\lambda x_n.\mathsf{P}$.

Ou seja: $gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_k)= l_{\tau}(\lambda x_k..\lambda x_n.\mathsf{P})$.

6.2.6 DEFINIÇÃO: Grau Máximo Multiplicativo de um termo M - (g(M))

O *grau máximo de um termo* M, denotado por g(M), é o valor máximo dos graus dos subtermos multiplicativos de M. Ou seja:

$g(\mathsf{M}) = max\{gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}) \,/\, \mathsf{Q}$ é SM em $\mathsf{M}\}$.[52]

6.2.7 DEFINIÇÃO: Numero Máximo de um termo M (ng(M))

Definimos o *número máximo de um termo* M, $ng(\mathsf{M})$, como a quantidade total de *SM*s em M com grau igual a $g(\mathsf{M})$.

6.2.8 DEFINIÇÃO: Multiplicação Estrela

Considere $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_i .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_i .. \mathsf{Q}_n]$, tal que Q_i é *SM* em M. Definimos a *multiplicação estrela* de Q_i como a operação que transforma M em:

$\mathsf{M}^{\#} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_i .. \lambda x_n.\mathsf{P}[x_i / \mathsf{Q}_i])\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_{i-1}\ y_i\ \mathsf{Q}_{i+1} .. \mathsf{Q}_n]$, onde y_i é variável nova.

6.2.8.1 NOTAÇÕES:

(*a*) Quando $\mathsf{M}^{\#}$ é obtido de M através de uma multiplicação-* denotamos: $\mathsf{M} \xrightarrow{*} \mathsf{M}^{\#}$.

(*b*) Quando $\mathsf{M} \equiv \mathsf{M}_1 \xrightarrow{*} \mathsf{M}_2 \xrightarrow{*} ... \xrightarrow{*} \mathsf{M}_m$ e $1 < m < \omega$, denotamos: $\mathsf{M} \overset{*}{\twoheadrightarrow} \mathsf{M}_m$.

6.2.8.2 COMENTÁRIO:

Considere $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}]$ tal que x ocorre livre em P. Pelas Definições 6.2.2 e 6.2.4 temos que $(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}$ é segmento-α e Q é *SM* em M. Se efetuarmos a multiplicação estrela de Q obtemos:

(*i*) $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}] \xrightarrow{*} \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{P}[x/\mathsf{Q}])y] \equiv \mathsf{M}^{\#}$, onde y é variável nova.

Já a redução de $(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}$ em M produz:

(*ii*) $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}] \rightarrow \mathsf{C}[\mathsf{P}[x/\mathsf{Q}]] \equiv \mathsf{M}'$.

Se prestarmos atenção em (*i*) e (*ii*) vemos que a multiplicação-* em (*i*) efetuou exatamente as multiplicações de Q em P que a redução em (*ii*). Além disso, o redex que existia em M continua existindo em $\mathsf{M}^{\#}$, sendo que a sua redução recupera a forma de M' obtido pela redução direta. Veja:

[52] Esta noção de grau é distinta da que apresentamos em 5.3.2, introduzida por Beckmann. Na nossa definição acima, $g(\mathsf{M})$ se refere ao comprimento máximo dos subtermos multiplicativos de M. Na definição de Beckmann, $g(\mathsf{M})$ se refere ao comprimento do encadeamento máximo de símbolos "$\supset$" nos tipos dos subtermos de M.

(iii) $\mathsf{M}^{\#} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x.\mathsf{P}[x/\,\mathsf{Q}])y] \rightarrow \mathsf{C}[\mathsf{P}[x/\,\mathsf{Q}]] \equiv \mathsf{M}'$.

y é variável nova $\Rightarrow (\lambda x.\mathsf{P}[x/\,\mathsf{Q}])y$ é K-redex.

Ou seja, a definição de multiplicação-* efetua aqui o mesmo papel que em C', isto é, provoca todos os "aumentos" que uma redução poderia fazer, sem no entanto eliminar o redex cuja redução produziria estes "aumentos".

6.2.9 DEFINIÇÃO: Subtermo Estrela - T(M)

Seja $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[\mathsf{Q}]$ um termo de $\lambda^{\supset}$. Dizemos que Q é o *subtermo estrela de M*, e denotamos por Q= T(M), se Q for o *SM* em M de máximo grau cujo λ ocorre mais à direita em M.

6.2.9.1 OBSERVAÇÕES:

(a) Como para cada termo M só pode existir um subtermo multiplicativo de máximo grau cujo λ ocorre mais à direita em M, é claro que para cada termo não normal M T(M) é único.

(b) Se $\mathsf{R} \neq T(\mathsf{M})$ é *SM* em M, é imediato pela definição acima que:

(i) O λ de R ocorre à direita do λ de T(M) em M $\Rightarrow gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{R}) < gr_{\mathsf{M}}(T(\mathsf{M}))$.

(ii) O λ de R ocorre à esquerda do λ de T(M) em M $\Rightarrow gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{R}) \leq gr_{\mathsf{M}}(T(\mathsf{M}))$.

6.2.10 DEFINIÇÃO: Termo Estrela

Dizemos que o termo M é um *termo estrela* quando M não possui nenhum subtermo multiplicativo.

6.2.10.1 OBSERVAÇÃO:

É claro que se M é termo estrela, então $g(\mathsf{M})= 0$ e $ng(\mathsf{M})= 0$.

6.2.11 DEFINIÇÃO: Seqüência Estrela

Uma *seqüência estrela* para um $\lambda^{\supset}$-termo M, denotada por β_{M}, é uma seqüência de termos $\mathsf{M}^{\bullet 0}, \mathsf{M}^{\bullet 1}, \mathsf{M}^{\bullet 2}, \ldots$, tal que são satisfeitas as seguintes condições:

(a) $\mathsf{M}^{\bullet 0} \equiv \mathsf{M}$;

(b) Cada $\mathsf{M}^{\bullet i+1}$ é obtido de $\mathsf{M}^{\bullet i}$ através da multiplicação-* de $T(\mathsf{M}^{\bullet i})$;

(c) O último termo da seqüência, quando existe, é um termo estrela.

6.2.11.1 OBSERVAÇÕES:

(a) Note que se M é termo estrela, então $\beta_{\mathsf{M}} = \mathsf{M}$ é uma seqüência unitária.

(b) Note também que como para cada termo M não estrela existe apenas um subtermo estrela $T(\mathsf{M})$, então para cada termo M a seqüência estrela é única.

(c) A notação $\mathsf{M} \xrightarrow{*}_{\circ} \mathsf{M}^{\bullet}$ indica que M se reduz a $\mathsf{M}^{\bullet}$ pela multiplicação estrela de $T(\mathsf{M})$.

(d) Utilizaremos para as seqüências estrela a notação $\beta_{\mathsf{M}} = \mathsf{M}^{\bullet 0} \xrightarrow{*}_{\circ} \mathsf{M}^{\bullet 1} \xrightarrow{*}_{\circ} \mathsf{M}^{\bullet 2} \xrightarrow{*}_{\circ} \ldots$, onde $\mathsf{M}^{\bullet 0} \equiv \mathsf{M}$, $\mathsf{M}^{\bullet} \equiv \mathsf{M}^{\bullet 1}$ e, genericamente, $\mathsf{M}^{\bullet n}$ representa o (n+ 1)-ésimo termo da seqüência estrela para M.

(e) Denotaremos por M^* o último termo da seqüência estrela para M, quando esta for finita.

(f) Se M^* está definido ($\exists n < \omega$ / $\mathsf{M}^{\bullet m}$ é termo estrela), então é claro que para todo $m \leq n$ temos $(\mathsf{M}^{\bullet m})^* \equiv \mathsf{M}^*$, pois a seqüência estrela para M é única e $\mathsf{M}^{\bullet m}$ pertence à seqüência estrela de M.

(g) Pela unicidade da seqüência estrela também é trivial que, se M^* está definido, $\mathsf{M} \equiv \mathsf{N} \Rightarrow \mathsf{M}^* \equiv \mathsf{N}^*$.

(h) É claro pela Definição acima que: $(\mathsf{M}^{\bullet n})^{\bullet m} \equiv \mathsf{M}^{\bullet n+m}$. Ou seja, o ($m$+ 1)-ésimo termo da seqüência estrela para $\mathsf{M}^{\bullet n}$ é o (n+ m+ 1)-ésimo termo da seqüência estrela para M.

Considerando $\mathsf{M} \xrightarrow{*} \mathsf{M}^{\#}$, uma multiplicação-* qualquer em M, a definição a seguir relaciona os subtermos de $\mathsf{M}^{\#}$ com os subtermos de M. Veremos que, com exceção da variável nova de $\mathsf{M}^{\#}$, para cada $\mathsf{S} \subset \mathsf{M}^{\#}$ existe um $\mathsf{R} \subset \mathsf{M}$ que deu origem a S.

6.2.12 DEFINIÇÃO: Resíduo-*

Sejam M e $\mathsf{M}^{\#}$ termos tais que $\mathsf{M} \xrightarrow{*} \mathsf{M}^{\#}$. Podemos representar M e $\mathsf{M}^{\#}$ como:

(i) $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 \ldots \mathsf{Q}_n]$ e

$\mathsf{M}^{\#} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.\mathsf{P}[x_i / \mathsf{Q}_i])\mathsf{Q}_1 \ldots \mathsf{Q}_{i-1}\, y_i\, \mathsf{Q}_{i+1} \ldots \mathsf{Q}_n]$.

Seja $\mathsf{R} \subseteq \mathsf{M}$. Definiremos $(\mathsf{R})_1, \ldots, (\mathsf{R})_m \subseteq \mathsf{M}^{\#}$ como os *resíduos-* de R em $\mathsf{M}^{\#}$* da seguinte forma:

Como $\mathsf{R} \subseteq \mathsf{M}$, pela forma de M em (i) temos três possibilidades básicas para R:

• $\mathsf{R} \subset (\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_n$;

• R é disjunto em relação a $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_n$;

• $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_n \subseteq \mathsf{R}$.

Analisemos cada uma delas:

(1) $\mathsf{R} \subset (\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_n$.

Neste caso temos três possibilidades para R, que são:

(1.1) $\mathsf{R} \subseteq \mathsf{Q}_k$ $(1 \leq k \leq n$ e $k \neq i)$ $\Rightarrow$ $\mathsf{Q}_k \equiv \mathsf{C}_1[\mathsf{R}]$. Por (i) temos:

$\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_{k-1}\mathsf{C}_1[\mathsf{R}]\mathsf{Q}_{k+1} ... \mathsf{Q}_n]$ e

$\mathsf{M}^\# \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P}[x_i/\mathsf{Q}_i])\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_{k-1}\mathsf{C}_1[\mathsf{R}]\mathsf{Q}_{k+1} ... \mathsf{Q}_{i-1}\ y_i\ \mathsf{Q}_{i+1} ... \mathsf{Q}_n]$ (se $i > k$)

$\mathsf{M}^\# \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P}[x_i/\mathsf{Q}_i])\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_{i-1}\ y_i\ \mathsf{Q}_{i+1} ... \mathsf{Q}_{k-1}\mathsf{C}_1[\mathsf{R}]\mathsf{Q}_{k+1} ... \mathsf{Q}_n]$ (se $i < k$).

Neste caso, $m = 1$ e $(\mathsf{R})_1 \equiv \mathsf{R} \subset \mathsf{M}^\#$.

(1.2) $\mathsf{R} \subseteq \mathsf{P}$ $\Rightarrow$ $\mathsf{P} \equiv \mathsf{C}_1[\mathsf{R}]$. Por (i) temos:

$\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{C}_1[\mathsf{R}])\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_n]$ e

$\mathsf{M}^\# \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{C}_1[\mathsf{R}][x_i/\mathsf{Q}_i])\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_{i-1}\ y_i\ \mathsf{Q}_{i+1} ... \mathsf{Q}_n]$

$\equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{C}_1[x_i/\mathsf{Q}_i][\mathsf{R}[x_i/\mathsf{Q}_i]])\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_{i-1}\ y_i\ \mathsf{Q}_{i+1} ... \mathsf{Q}_n]$.

Note que o subtermo R de M transformou-se em $\mathsf{R}[x_i/\mathsf{Q}_i]$ em $\mathsf{M}^\#$.

Neste caso, $m = 1$ e $(\mathsf{R})_1 = \mathsf{R}[x_1/\mathsf{Q}_1] \subset \mathsf{M}^\#$.

(1.3) $\mathsf{R} \subseteq \mathsf{Q}_i$ $\Rightarrow$ $\mathsf{Q}_i \equiv \mathsf{C}_1[\mathsf{R}]$. Por (i) temos:

$\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_{i-1}\mathsf{C}_1[\mathsf{R}]\mathsf{Q}_{i+1} ... \mathsf{Q}_n]$.

$\mathsf{M}^\# \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P}[x_i/\mathsf{C}_1[\mathsf{R}]])\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_{i-1}\ y_i\ \mathsf{Q}_{i+1} ... \mathsf{Q}_n]$.

Note que existem tantas ocorrências de R em $\mathsf{M}^\#$ quantas são as ocorrências livres de x_1 em P.

Neste caso, $m =$ número de ocorrências livres de x_i em P e, para $1 \leq i \leq m$, $(\mathsf{R})_i = \mathsf{R} \subset \mathsf{M}^\#$ tal que índices menores de $(\mathsf{R})_i$ correspondem a subtermos mais à esquerda em $\mathsf{M}^\#$.

(2) R é disjunto em relação a $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_n$.

Isso significa que R ocorre em uma parte de M externa ao segmento-α $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_n$, ou seja, R ocorre ou à esquerda ou à direita deste segmento-α. Portanto, um dos dois subcasos abaixo ocorre:

(2.1) $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}_1[\mathsf{R}]\mathsf{C}_2[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_n]$.

(2.2) $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}_2[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_n]\mathsf{C}_1[\mathsf{R}]$.

Para cada um destes casos $M^{\#}$ tem as seguintes formas:

$M^{\#} \equiv C_1[R]C_2[(\lambda x_1..\lambda x_n.P[x_i/Q_i])Q_1...Q_{i-1}\ y_i\ Q_{i+1}...Q_n]$ (Caso 2.1).

$M^{\#} \equiv C_2[(\lambda x_1..\lambda x_n.P[x_i/Q_i])Q_1...Q_{i-1}\ y_i\ Q_{i+1}...Q_n]C_1[R]$ (Caso 2.2).

Note que em nenhum dos dois casos R se alterou em $M^{\#}$.

Neste caso, m= 1 e $(R)_1 \equiv R \subset M^{\#}$.

(3) $(\lambda x_1..\lambda x_n.P)Q_1...Q_n \subseteq R$.

Isso significa que o segmento-α no qual estamos realizando a multiplicação-* é um subtermo de R. Neste caso, $R \equiv C_1[(\lambda x_1..\lambda x_n.P)Q_1...Q_n]$. Logo, como R é subtermo de M, temos que M e $M^{\#}$ têm as seguintes formas:

$M \equiv C_2[C_1[(\lambda x_1..\lambda x_n.P)Q_1...Q_n]]$ e

$M^{\#} \equiv C_2[C_1[(\lambda x_1..\lambda x_n.P[x_i/Q_i])Q_1...Q_{i-1}\ x_i\ Q_{i+1}...Q_n]]$.

Neste caso, m= 1 e $(R)_1 \equiv C_1[(\lambda x_1..\lambda x_n.P[x_i/Q_i])Q_1...Q_{i-1}\ x_i\ Q_{i+1}...Q_n]$.

6.2.12.1 OBSERVAÇÃO:

É claro, pela definição de resíduo-*, que se $M \xrightarrow{*} M^{\#}$, então todo subtermo S de $M^{\#}$ é resíduo de algum subtermo R de M, com exceção apenas para y_i em $Q_1...Q_{i-1}\ y_i\ Q_{i+1}...Q_n$.

Veremos agora um lema que relaciona o grau dos subtermos pesados de um segmento-α com suas posições no segmento.

6.2.13 LEMA:

Considere $M \equiv C[(\lambda x_1..\lambda x_n.P)Q_1...Q_n]$. Se $1 \le r < s \le n$, então $gr_M(Q_r) > gr_M(Q_s)$.

<u>PROVA</u>:

Considere r e s números naturais satisfazendo as condições do lema.

Considere, para ($1 \le i \le n$):

(i) $x_i \in \Lambda^{A_i}$ (cada x_i é do tipo A_i).

(ii) $P \in \Lambda^{B}$ (P é do tipo B).

Pelas Definições 6.2.1 e 6.2.5 de comprimento de tipos e grau temos:

(iii) $gr_M(Q_s) = l_\tau(\lambda x_s..\lambda x_n.P) = l_\tau(A_s \supset .. \supset A_n \supset B)$.

(iv) $gr_M(Q_r) = l_\tau(\lambda x_r..\lambda x_s..\lambda x_n.P) = l_\tau(A_r \supset .. \supset A_s \supset .. \supset A_n \supset B)$.

É claro pela Definição 6.2.1 de comprimento de tipos que:

$(v)\ l_\tau(A_r \supset .. \supset A_s \supset .. \supset A_n \supset B) > \ l_\tau(A_s \supset .. \supset A_n \supset B)$.

Portanto, por (*iii*), (*iv*) e (*v*) temos: $gr_{M}(Q_r) > gr_{M}(Q_s)$ ♦

O lema seguinte é uma conseqüência imediata da Observação 6.2.12.1.

6.2.14 LEMA:

Considere M e $M^{\#}$ $\lambda^{\supset}$-termos tais que $M \xrightarrow{*} M^{\#}$. Se $S \subset M^{\#}$ é *SM* em $M^{\#}$, então existe $R \subset M$ tal que S é resíduo-* de R.

PROVA:

Seja $S \subset M^{\#}$ *SM* em $M^{\#}$.

Pela Observação 6.2.12.1, todo subtermo S de $M^{\#}$ ou é resíduo-* de algum subtermo R de M, ou é a ocorrência de y_i expressa na Definição 6.2.4 de *SM*.

Mas, pela Definição 6.2.4 , esta ocorrência de y_i não é *SM* em $M^{\#}$.

Logo existe $R \subset M$ tal que S é resíduo-* de R. ♦

O lema a seguir estabelece vários resultados com relação à operação $\xrightarrow{*}$. O objetivo do lema é provar todos os principais argumentos que utilizaremos na prova de que a seqüência estrela para cada termo M é finita. As provas de cada item são simples e obtidas diretamente a partir das definições que elas envolvem, apenas por inspeção dos casos possíveis. Devido à importância que a finitude da seqüência estrela tem no nosso desenvolvimento, optamos por apresentar detalhadamente as provas de todos os itens do lema.

6.2.15 LEMA:

Considere a seguinte multiplicação-*:

$M \equiv C[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.P)Q_1 .. Q_n] \xrightarrow{*} C[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.P[x_i / Q_i])Q_1 .. Q_{i-1}\ y_i\ Q_{i+1} .. Q_n] \equiv M^{\#}$

Seja $R \subset M$. Para todo k tal que $(R)_k$ é resíduo-* de R em $M^{\#}$ valem os seguintes resultados:

(1) $R \not\equiv Q_i$ é *SM* em M $\Rightarrow$ $(R)_k$ é *SM* em $M^{\#}$ e $gr_{M}(R) = gr_{M^{\#}}((R)_k)$;

(2) R não é *SM* em M e $(R)_k$ é *SM* em $M^{\#}$ $\Rightarrow$ $gr_{M^{\#}}((R)_k) < gr_{M}(Q_i)$;

(3) $(R \not\subseteq Q_i)$ e $(R = T(M))$ $\Rightarrow$ $k = 1$ e $(R)_k = T(M^{\#})$;

(4) Se $Q_i = T(M)$ e algum $(Q_i)_k$ é *SM* em $M^{\#}$, então:

$$gr_{M\#}((Q_i)_k) < gr_M(Q_i) \quad (\forall k \ / \ (Q_i)_k \text{ é resíduo-* de } Q_i);$$

(5) $Q_i = T(M) \Rightarrow g(M) \geq g(M^{\#})$;

(6) $Q_i = T(M)$ e $ng(M) = 1 \Rightarrow g(M) > g(M^{\#})$;

(7) $Q_i = T(M)$ e $g(M) > g(M^{\#}) \Rightarrow ng(M) = 1$;

(8) $Q_i = T(M)$ e $ng(M) > 1 \Rightarrow g(M) = g(M^{\#})$ e $ng(M) = ng(M^{\#}) + 1$;

(9) $Q_i = T(M)$ e $g(M) = g(M^{\#}) \Rightarrow ng(M) > 1$ e $ng(M) = ng(M^{\#}) + 1$.

PROVA:

Item (1)

Pela forma de M temos que se R é algum outro *SM* de M diferente de Q_i, então todas as possibilidades para R são:

(*a*) $R \subset (\lambda x_1 .. \lambda x_n.P)Q_1 ... Q_n$. Neste caso:

- R é algum Q_s $(1 \leq s \leq n$ e $s \neq i)$,
- R ocorre em algum Q_r (possivelmente no próprio Q_i),
- R ocorre em P;

(*b*) R é disjunto de $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.P)Q_1 ... Q_n$;

(*c*) $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.P)Q_1 ... Q_n \subseteq R$.

Analisemos cada caso.

CASO 1: R é algum Q_s $(1 \leq s \leq n$ e $s \neq i)$

Neste caso, pela Definição 6.2.12, $(R)_1 \equiv Q_s \subset M^{\#}$ é o único resíduo-* de Q_s em $M^{\#}$.

É fácil ver pela forma de M e de $M^{\#}$ que qualquer Q_s $(s \neq i)$ continua ou não *SM* em $M^{\#}$ conforme ele seja ou não *SM* em M.

Além disso, como x_i e Q_i têm o mesmo tipo, temos que:

$l_\tau(P) = l_\tau(P[x_i / Q_i])$ e portanto: $l_\tau(\lambda x_s .. \lambda x_n.P) = l_\tau(\lambda x_s .. \lambda x_n.P[x_i / Q_i])$.

Logo, pela Definição 6.2.5 de grau temos: $gr_M(Q_s) = gr_{M\#}(Q_s) = gr_{M\#}((R)_1)$ $(s \neq i)$.

CASO 2: R ocorre em algum Q_r $(1 \leq r \leq n)$ (Ou seja: $R \subset Q_r$)

Neste caso, como R é *SM* em M, o Q_r em que R ocorre é do tipo:

(*i*) $Q_r \equiv C_1[(\lambda y_1. .. \lambda y_t.N)S_1 ... S_{s-1}RS_{s+1} ... S_t]$.

Além disso, pela Definição 6.2.12:

se $r \neq i$, $(R)_1 \equiv R \subset Q_r \subset M^{\#}$ é o único resíduo-* de R em $M^{\#}$;

se $r = i$, $(R)_1 \equiv \ldots \equiv (R)_k \equiv R \subset M^\#$ são os k resíduos-* de R em $M^\#$, e k representa o número de ocorrências livres de x_i em P.

Pelas formas de M e $M^\#$ e por (*i*) temos que a estrutura interna de Q_r não se altera com a multiplicação-* $M \xrightarrow{*} M^\#$, mesmo quando $r = i$. Logo:

(R é SM em M) $\Rightarrow$ ($(R)_k$ é SM em $M^\#$) e, além disso, $gr_M(R) = gr_{M\#}((R)_k)$.

<u>CASO 3</u>: R ocorre em P

(*ii*) Neste caso, P é do tipo: $P \equiv C_1[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.N)S_1 \ldots S_{s-1}RS_{s+1} \ldots S_t] \equiv C_2[R]$.

Além disso, pela Definição 6.2.12, $(R)_1 \equiv R[x_i / Q_i]$ é o único resíduo-* de R em $M^\#$.

Pelas formas de M e $M^\#$ e por (*ii*) temos:

(*iii*) $M \equiv C[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.C_2[R])Q_1 \ldots Q_n]$.

(*iv*) $M^\# \equiv C[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.C_2[R][x_i / Q_i])Q_1 \ldots Q_{i-1}\ y_i\ Q_{i+1} \ldots Q_n]$.

Note que:

$$P[x_i / Q_i] \underset{(vi)}{\equiv} C_2[R][x_i / Q_i] \equiv C_2[x_i / Q_i][R[x_i / Q_i]] \equiv$$

$$\equiv C_1[x_i / Q_i][(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.N[x_i / Q_i])S_1[x_i / Q_i] \ldots S_{s-1}[x_i / Q_i]R[x_i / Q_i]S_{s+1}[x_i / Q_i] \ldots S_t[x_i / Q_i]].$$

(*v*) É claro que se y_s ocorre livre em N, então y_s também ocorre livre em $N[x_i / Q_i][y_1 / S_1] \ldots [y_{s-1} / S_{s-1}]$.

Portanto, por (*iii*), (*iv*) e (*v*), e pela Definição 6.2.4 de *SM* temos que se R é *SM* em P então $R[x_i / Q_i] \equiv (R)_1$ é *SM* em $P[x_i / Q_i]$. Ou seja, $(R)_1$ é *SM* em $M^\#$.

Além disso, como substituições não alteram o tipo de um termo, temos que $l_\tau(\lambda y_s \ldots \lambda y_t.N) = l_\tau(\lambda y_s \ldots \lambda y_t.N[x_i / Q_i])$. Logo, $gr_M(R) = gr_{M\#}(R[x_i / Q_i]) = gr_{M\#}((R)_1)$.

<u>CASO 4</u>: R é disjunto de $(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.P)Q_1 \ldots Q_n$ em M

Neste caso temos duas possibilidades para M:

(*vi*) $M \equiv C_1[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.N)S_1 \ldots S_{s-1}RS_{s+1} \ldots S_t]C_2[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.P)Q_1 \ldots Q_n]$, ou

$M \equiv C_2[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.P)Q_1 \ldots Q_n]C_1[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.N)S_1 \ldots S_{s-1}RS_{s+1} \ldots S_t]$.

E, além disso, pela Definição 6.2.12 $(R)_1 \equiv R$ é o único resíduo de R em $M^\#$.

Por (*vi*) temos:

(*vii*) $M^\# \equiv C_1[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.N)S_1 \ldots S_{s-1}RS_{s+1} \ldots S_t]C_2[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.P[x_i / Q_i])Q_1 \ldots Q_{i1}y_iQ_{i+1} \ldots Q_n]$,

ou

$$M^\# \equiv C_2[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.P[x_i / Q_i])Q_1 \ldots Q_{i-1}y_iQ_{i+1} \ldots Q_n]C_1[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.N)S_1 \ldots S_{s-1}RS_{s+1} \ldots S_t].$$

É claro, por (*vi*) e (*vii*) que o segmento-α ao qual R pertence não se alterou com a multiplicação-* de Q_i. Logo, se R é SM em M, $(R)_1 \equiv R$ também o é em $M^{\#}$ e $gr_M(R) = gr_{M\#}((R)_1)$.

<u>CASO 5</u>: $(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.P)Q_1 \ldots Q_n \subseteq R$

Neste caso, $R \equiv C_1[(\lambda x_1. \ldots \lambda x_n.P)Q_1 \ldots Q_n]$.

Como R é *SM* e subtermo de M temos que M e $M^{\#}$ são das seguintes formas:

$M \equiv C_2[(\lambda y_1. \ldots \lambda y_t.N)S_1 \ldots S_{s-1}C_1[(\lambda x_1. \ldots \lambda x_n.P)Q_1 \ldots Q_n]S_{s+1} \ldots S_t]$ e

$M^{\#} \equiv C_2[(\lambda y_1. \ldots \lambda y_t.N)S_1 \ldots S_{s-1}C_1[(\lambda x_1. \ldots \lambda x_n.P[x_i/ Q_i])Q_1 \ldots Q_{i-1}\ x_i\ Q_{i+1} \ldots Q_n]S_{s+1} \ldots S_t]$.

Além disso, pela Definição 6.2.12 temos que o único resíduo de R em $M^{\#}$ é definido como:

$$(R)_1 \equiv C_1[(\lambda x_1. \ldots \lambda x_n.P[x_i/ Q_i])Q_1 \ldots Q_{i-1}\ y_i\ Q_{i+1} \ldots Q_n].$$

Rescrevendo M e $M^{\#}$ temos:

$M \equiv C_2[(\lambda y_1. \ldots \lambda y_t.N)S_1 \ldots S_{s-1}RS_{s+1} \ldots S_t]$ e

$M^{\#} \equiv C_2[(\lambda y_1. \ldots \lambda y_t.N)S_1 \ldots S_{s-1}(R)_1S_{s+1} \ldots S_t]$.

É claro, olhando para M e $M^{\#}$ acima que se R é *SM* em M, então $(R)_1$ também o é em $M^{\#}$, uma vez que as alterações que a multiplicação-* de Q_i provocaram têm escopo apenas interno a R, não alterando a forma do segmento-α no qual R ocorre em M. Além disso, pela Definição 6.2.5 de grau temos:

$gr_M(R) = l_\tau(\lambda y_s. \ldots \lambda y_t.N) = gr_{M\#}((R)_1)$.

Com isso analisamos todos os casos possíveis e provamos o Item 1. □

Item (2)

Não é difícil ver, pela Definição 6.2.12 de resíduo-*, que o único caso possível no qual R não é *SM* em M e algum $(R)_j$ é *SM* em $M^{\#}$ ocorre quando as condições (1) a (3) abaixo forem satisfeitas.

(1) Q_i tem a forma:

(*i*) $Q_i \equiv \lambda y_1 \ldots \lambda y_t.N$.

(2) $R \subset P$ e, para alguma ocorrência livre de x_i em P, temos P do tipo:

(*ii*) $P \equiv C_1[x_iS_1 \ldots S_{s-1}RS_{s+1} \ldots S_t]$.

(3) y_s ocorre livre em N.

Neste caso, por (*i*) e (*ii*) temos que M e $M^{\#}$ têm as formas:

(iii) $M \equiv C[(\lambda x_1..\lambda x_n.C_1[x_i S_1..S_{s-1} R S_{s+1}..S_t])Q_1..Q_{i-1}(\lambda y_1..\lambda y_t.N)Q_{i+1}..Q_n]$.[53]

(iv) $M^{\#} \equiv C[(\lambda x_1..\lambda x_n.C_1^{\square}[(\lambda y_1..\lambda y_t.N)S_1^{\square}..S_{s-1}^{\square} R^{\square} S_{s+1}^{\square}..S_t^{\square}])Q_1..Q_{i-1} y_1 Q_{i+1}..Q_n]$, onde o índice $\square$ que acrescentamos denota: $X^{\square} \equiv X[x_i/Q_i]$.

Além disso, pela Definição 6.2.12 temos que $(R)_1 \equiv R^{\square}$ é o único resíduo-* de R em $M^{\#}$. Ou seja, $k=1$.

Neste caso, pela Definição 6.2.4 e por (iv) a ocorrência $(R)_1 \equiv R^{\square}$ é *SM* em $M^{\#}$.

Note também, por (iii), que R não é *SM* em M, pois ocorre em $x_1 S_1..S_{r-1} R$.

Temos que x_i e Q_i são do mesmo tipo, caso contrário M não seria termo de $\lambda^{\supset}$.

Considere:

(v) $x_i \in \Lambda^{A}$ e $Q_i \equiv \lambda y_1.....\lambda y_t.N \in \Lambda^{A}$ (A é o tipo de x_i e de Q_i).

(vi) $\lambda x_{i+1}..\lambda x_n.P \in \Lambda^{B}$.

Então, por (v), (vi) e pela definição de tipos, temos:

(vii) $\lambda x_i.\lambda x_{i+1}..\lambda x_n.P \in \Lambda^{A\supset B}$.

Além disso, pela Definição 6.2.1 de comprimento de tipos e por (v) temos:

($viii$) $l_\tau(A) = l_\tau(\lambda y_1..\lambda y_t.N) \geq l_\tau(\lambda y_s..\lambda y_t.N)$, onde $(1 \leq s \leq t)$.

Por (iv), ($viii$) e pela Definição 6.2.5 de grau temos que:

(ix) $gr_{M\#}((R)_1) = l_\tau(\lambda y_s..\lambda y_t.N) \leq l_\tau(A) \underset{6.2.1}{<} l(A \supset B)$.

Pela forma de M e pela Definição 6.2.5 de grau temos:

(x) $gr_M(Q_i) = l_\tau(\lambda x_i.\lambda x_{i+1}..\lambda x_n.P) \underset{(xvi)}{=} l(A \supset B)$.

Portanto, por (ix) e (x) temos que $gr_{M\#}((R)_1) < gr_M(Q_i)$. $\square$

Item (3)

Pela Definição 6.2.12 de resíduo-*, os únicos casos nos quais um subtermo R possui mais de um resíduo em $M^{\#}$ ocorrem quando, ou R é o próprio *SM* multiplicado ($R \equiv Q_i$), ou R é subtermo do *SM* multiplicado ($R \subset Q_i$). Mas por hipótese do Item 3, nenhum destes dois casos ocorre, logo R só possui um resíduo-* em $M^{\#}$, ou seja:

(i) $k=1$.

Note, pelo Item (1) deste lema, que $(R)_1$ é *SM* em $M^{\#}$ e:

---

[53] Olhando para M ficamos tentados a pensar que a parte $(\lambda y_1..\lambda y_r.N)Q_{i+1}..Q_n$ de M é um redex, o que na verdade é falso, porque devido à <u>precedência</u> na operação de aplicação em λ-termos Q_{i+1} não está sendo aplicado a $(\lambda y_1..\lambda y_r.N)$ apenas, mas a $((..((\lambda x_1..\lambda x_n.C[x_i S_1..S_{s-1} R S_{s+1}..S_t])Q_1)..Q_{i-1})(\lambda y_1.....\lambda y_t.N))$.

(*ii*) $gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{R}) = gr_{\mathsf{M}^\#}((\mathsf{R})_1)$.

Pela Definição 6.2.9 de subtermo estrela, para provarmos que $(\mathsf{R})_1 = T(\mathsf{M}^\#)$ temos que provar que:

(*iii*) Para qualquer S, *SM* de $\mathsf{M}^\#$, vale:

(*a*) o λ de S ocorre à direita do λ de $(\mathsf{R})_1$ em $\mathsf{M}^\#$ $\Rightarrow$ $gr_{\mathsf{M}^\#}(\mathsf{S}) < gr_{\mathsf{M}^\#}((\mathsf{R})_1)$;

(*b*) o λ de S ocorre à esquerda do λ de $(\mathsf{R})_1$ em $\mathsf{M}^\#$ $\Rightarrow$ $gr_{\mathsf{M}^\#}(\mathsf{S}) \leq gr_{\mathsf{M}^\#}((\mathsf{R})_1)$.

Pelo Lema 6.2.14 vale:

(*iv*) Para todo S, SM em $\mathsf{M}^\#$, existe um $\mathsf{S'} \subset \mathsf{M}$ do qual S é resíduo-*.

Temos duas possibilidades para $\mathsf{S'}$: ou $\mathsf{S'}$ é *SM* em M, ou $\mathsf{S'}$ não é *SM* em M.

<u>CASO 1</u>: $\mathsf{S'}$ não é *SM* em M

Neste caso, pelo Item (2) deste lema temos:

(*v*) $gr_{\mathsf{M}^\#}((\mathsf{R})_1) \underset{\text{(ii)}}{=} gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{R}) \underset{\text{item 2}}{>} gr_{\mathsf{M}^\#}(\mathsf{S})$.

É claro, por (*v*), que (*iii*)(*a*) e (*iii*)(*b*) são válidos e portanto $(\mathsf{R})_1 = T(\mathsf{M}^\#)$.

<u>CASO 2</u>: $\mathsf{S'}$ é *SM* em M

Neste caso, pelo Item (1) deste lema temos:

(*vi*) $gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{S'}) = gr_{\mathsf{M}^\#}(\mathsf{S})$.

Dessa forma, por (*ii*) e (*vi*), como R é $T(\mathsf{M})$, pela Definição 6.2.9 temos:

(*vii*) o λ de $\mathsf{S'}$ ocorre à direita do λ de R em M $\Rightarrow$ $gr_{\mathsf{M}^\#}(\mathsf{S}) < gr_{\mathsf{M}^\#}((\mathsf{R})_1)$;

(*viii*) o λ de $\mathsf{S'}$ ocorre à esquerda do λ de R em M $\Rightarrow$ $gr_{\mathsf{M}^\#}(\mathsf{S}) \leq gr_{\mathsf{M}^\#}((\mathsf{R})_1)$.

Considere a afirmação:

(*) O λ de $\mathsf{S'}$ ocorre à esquerda do λ de R em M $\Rightarrow$

o λ de S ocorre à esquerda do λ de $(\mathsf{R})_1$ em $\mathsf{M}^\#$.

Por (*vii*), (*viii*) e (*) temos:

- O λ de S ocorre à direita do λ de $(\mathsf{R})_1$ em $\mathsf{M}^\#$ $\Rightarrow$ $gr_{\mathsf{M}^\#}(\mathsf{S}) < gr_{\mathsf{M}^\#}((\mathsf{R})_1)$.
- O λ de S ocorre à esquerda do λ de $(\mathsf{R})_1$ em $\mathsf{M}^\#$ $\Rightarrow$ $gr_{\mathsf{M}^\#}(\mathsf{S}) \leq gr_{\mathsf{M}^\#}((\mathsf{R})_1)$.

(*ix*) Assim, se assumirmos a afirmação (*), então (*iii*)(*a*) e (*iii*)(*b*) são válidos para S e portanto, pela Definição 6.2.9, $(\mathsf{R})_1 = T(\mathsf{M}^\#)$.

Mas analisando a Definição 6.2.8 de multiplicação-*, é fácil perceber que as únicas mudanças de posições de subtermos que a multiplicação-* de Q_i provoca são da direita para a esquerda. Isto para o caso dos resíduos-* de Q_i e dos subtermos de Q_i. Como R não é Q_i nem ocorre em Q_i o máximo que pode ocorrer é o λ de $\mathsf{S'}$ ocorrer à direita do λ de R em M

e o λ de S ocorrer à esquerda do λ de $(\mathsf{R})_1$ em $\mathsf{M}^{\#}$. Nunca o contrário disso. Logo, a afirmação (*) é válida e, portanto, por (*ix*), provamos o Item 3. $\square$

Item (4)

Pela forma de $\mathsf{M}^{\#}$ e pela Definição 6.2.4 de *SM* temos que para $(\mathsf{Q}_i)_m$ ser *SM* em $\mathsf{M}^{\#}$, é porque $(\mathsf{Q}_i)_m$ ocorre em algum subtermo N de $\mathsf{M}^{\#}$ que tem a seguinte forma:

(*i*) $\mathsf{N} \equiv (\lambda y_1 .. \lambda y_t.\mathsf{D})\mathsf{E}_1 ... \mathsf{E}_{s-1}\ (\mathsf{Q}_i)_m\ \mathsf{E}_{s+1} ... \mathsf{E}_r$,

com y_s ocorrendo livre em D.

Pela Definição 6.2.8 de multiplicação-*, para que uma situação como a descrita em (*i*) ocorra em $\mathsf{M}^{\#}$, as seguintes propriedades têm que ser válidas em $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_n]$:

(*ii*) $\mathsf{P} \equiv \mathsf{C}_1[(\lambda y_1 .. \lambda y_t.\mathsf{N})\mathsf{S}_1 ... \mathsf{S}_{s-1}\ x_i\ \mathsf{S}_{s+1} ... \mathsf{S}_t]$;

(x_i expresso é a *m*-ésima ocorrência de x_i em P)

(*iii*) y_s ocorre livre em N.

Pela forma de M e $\mathsf{M}^{\#}$ e por (*ii*) temos:

(*iv*) $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{C}_1[(\lambda y_1 .. \lambda y_t.\mathsf{N})\mathsf{S}_1 ... \mathsf{S}_{s-1}\ x_i\ \mathsf{S}_{s+1} ... \mathsf{S}_t])\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_n]$.

(*v*) $\mathsf{M}^{\#} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{C}_1[(\lambda y_1 .. \lambda y_t.\mathsf{N})\mathsf{S}_1 ... \mathsf{S}_{s-1}\ x_i\ \mathsf{S}_{s+1} ... \mathsf{S}_t][x_i/\ \mathsf{Q}_i])\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_{i-1}\ y_i\ \mathsf{Q}_{i+1} ... \mathsf{Q}_n]$

$\equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{C}_1^{\square}[(\lambda y_1 .. \lambda y_t.\mathsf{N}^{\square})\mathsf{S}_1^{\square} ... \mathsf{S}_{s-1}^{\square}\ \mathsf{Q}_i\ \mathsf{S}_{s+1}^{\square} ... \mathsf{S}_t^{\square}])\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_{i-1}\ y_i\ \mathsf{Q}_{i+1} ... \mathsf{Q}_n]$,

onde usamos a seguinte abreviação: $\mathsf{X}^{\square} \equiv \mathsf{X}[x_i/\ \mathsf{Q}_i]$.

Como, por (*ii*), estamos considerando a *m*-ésima ocorrência de x_i em P, então, pela Definição 6.2.12 temos que a ocorrência de Q_i em $\mathsf{M}^{\#}$ é $(\mathsf{Q}_i)_m$. Portanto, por (*v*) temos:

(*vi*) $\mathsf{M}^{\#} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{C}_1^{\square}[(\lambda y_1 .. \lambda y_t.\mathsf{N}^{\square})\mathsf{S}_1^{\square} ... \mathsf{S}_{s-1}^{\square}\ (\mathsf{Q}_i)_m\ \mathsf{S}_{s+1}^{\square} ... \mathsf{S}_t^{\square}])\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_{i-1}\ x_i\ \mathsf{Q}_{i+1} ... \mathsf{Q}_n]$.

Como, por (*iii*), y_s ocorre livre em N, y_s certamente também ocorre livre em $\mathsf{N}^{\square}$, pois a substituição $^{\square}$ é definida em x_i. Logo, considerando: $\mathsf{D} \equiv \mathsf{N}^{\square}$ e $\mathsf{E}_j \equiv \mathsf{S}_j^{\square}$ $(1 \leq j \leq t)$, por (*vi*) temos que $(\mathsf{Q}_i)_m$ ocorre em um contexto do tipo expresso em (*i*), e portanto é *SM* em $\mathsf{M}^{\#}$.

Por (*iii*), (*iv*) e pela Definição 6.2.4 de *SM* temos:

(*vii*) a ocorrência de x_i expressa em M é *SM* em M.

Além disso, por (*iii*):

(*viii*) O segmento-α de x_i em M ocorre mais à direita que o segmento-α de Q_i.

Como, por hipótese do item, $\mathsf{Q}_i = T(\mathsf{M})$, então por (*vii*), (*viii*) e pela Definição 6.2.9 de $T(\mathsf{M})$ temos:

(ix) $gr_{\mathsf{M}}(x_i) < gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_i)$.

Pela Definição 6.2.5 de grau, por (*iv*) e por (*vi*) temos:

(x) $gr_{\mathsf{M}}(x_i) = l_\tau(\lambda y_s \ldots \lambda y_t.\mathsf{N})$.

(xi) $gr_{\mathsf{M}\#}((\mathsf{Q}_i)_m) = l_\tau(\lambda y_s \ldots \lambda y_t.\mathsf{N}^{\square}) = l_\tau(\lambda y_s \ldots \lambda y_t.\mathsf{N}[x_i / \mathsf{Q}_i])$.

Mas como x_i e Q_i têm que ser do mesmo tipo, caso contrário M não seria termo de $\lambda^{\supset}$, temos, por (*x*) e (*xi*):

(xii) $gr_{\mathsf{M}}(x_i) = l_\tau(\lambda y_s \ldots \lambda y_t.\mathsf{N}) = l_\tau(\lambda y_s \ldots \lambda y_t.\mathsf{N}[x_i / \mathsf{Q}_i]) = gr_{\mathsf{M}\#}((\mathsf{Q}_i)_m)$.

Assim, por (*ix*) e por (*xii*) temos:

$gr_{\mathsf{M}\#}((\mathsf{Q}_i)_m) < gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_i)$. □

Item (5)

Considere a proposição:

(*) Para qualquer S, *SM* em $\mathsf{M}^\#$, vale $gr_{\mathsf{M}\#}(\mathsf{S}) \leq g(\mathsf{M})$.

(*i*) É claro, pela Definição 6.2.6 de grau de um termo, que (*) $\Rightarrow$ $g(\mathsf{M}) \geq g(\mathsf{M}^\#)$.

Vamos portanto provar (*).

Seja $\mathsf{S} \subset \mathsf{M}^\#$ *SM* em $\mathsf{M}^\#$.

(*ii*) Pelo Lema 6.2.14 existe $\mathsf{R} \subset \mathsf{M}$ tal que S é resíduo-* de R.

Temos duas possibilidades para R e Q_i: ou $\mathsf{R} \equiv \mathsf{Q}_i$ ou $\mathsf{R} \not\equiv \mathsf{Q}_i$.

CASO 1: $\mathsf{R} \equiv \mathsf{Q}_i$

Neste caso, por (*ii*) e pelo Item (4) deste lema temos:

$gr_{\mathsf{M}\#}(\mathsf{S}) < gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_i) = g(\mathsf{M})$.

CASO 2: $\mathsf{R} \not\equiv \mathsf{Q}_i$

Neste caso, por (*ii*) e pelo Item (1) deste lema temos:

(iii) $gr_{\mathsf{M}\#}(\mathsf{S}) = gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{R})$.

Além disso, como $\mathsf{Q}_i = T(\mathsf{M})$, pela Definição 6.2.6 de grau de um termo temos:

(iv) $gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{R}) \leq gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_i) = g(\mathsf{M})$.

Logo, por (*iii*) e (*iv*) temos:

$gr_{\mathsf{M}\#}(\mathsf{S}) \leq g(\mathsf{M})$. □

Item (6)

Analogamente ao item anterior, provar que $g(\mathsf{M}^{\#}) < g(\mathsf{M})$ é provar:

(*) Para qualquer S, *SM* de $\mathsf{M}^{\#}$, vale $gr_{\mathsf{M}\#}(\mathsf{S}) < g(\mathsf{M})$.

Seja $\mathsf{S} \subset \mathsf{M}^{\#}$ *SM* em $\mathsf{M}^{\#}$.

(*i*) Pelo Lema 6.2.14 existe $\mathsf{R} \subset \mathsf{M}$ tal que S é resíduo-* de R.

Temos duas possibilidades para R e Q_i: ou $\mathsf{R} \equiv \mathsf{Q}_i$ ou $\mathsf{R} \not\equiv \mathsf{Q}_i$.

<u>CASO 1</u>: $\mathsf{R} \equiv \mathsf{Q}_i$

Neste caso, por (*i*) e pelo Item (4) deste lema temos:

$$gr_{\mathsf{M}\#}(\mathsf{S}) < gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_i) = g(\mathsf{M}).$$

<u>CASO 2</u>: $\mathsf{R} \not\equiv \mathsf{Q}_i$

Neste caso, por (*i*) e pelo Item (1) deste lema temos:

(*ii*) $gr_{\mathsf{M}\#}(\mathsf{S}) = gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{R})$.

Além disso, como $\mathsf{Q}_i = T(\mathsf{M})$ e $ng(\mathsf{M}) = 1$, pela Definição 6.2.7 temos:

(*iii*) $gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{R}) < gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_i) = g(\mathsf{M})$.

Logo, por (*ii*) e (*iii*) temos:

$gr_{\mathsf{M}\#}(\mathsf{S}) < g(\mathsf{M})$. □

Item (7)

Como $\mathsf{Q}_i = T(\mathsf{M})$, provar que $ng(\mathsf{M}) = 1$ é provar que para qualquer $\mathsf{R} \subset \mathsf{M}$:

(*) $\mathsf{R} \not\equiv \mathsf{Q}_i$ e R é *SM* em M $\Rightarrow$ $gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{R}) < g(\mathsf{M})$.

Seja $\mathsf{R} \subset \mathsf{M}$ tal que R é *SM* em M.

Pelo Item (1) deste lema, como $\mathsf{R} \not\equiv \mathsf{Q}_i$ temos:

(*i*) $(\mathsf{R})_k$ é *SM* em $\mathsf{M}^{\#}$ e $gr_{\mathsf{M}\#}((\mathsf{R})_k) = gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{R})$ $(\forall k \,/\, (\mathsf{R})_k$ é resíduo-* de $\mathsf{R})$.

Como $g(\mathsf{M}^{\#}) < g(\mathsf{M})$, pela Definição 6.2.6 temos:

(*ii*) $gr_{\mathsf{M}\#}((\mathsf{R})_k) < g(\mathsf{M})$.

Assim, por (*i*) e (*ii*): $gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{R}) < g(\mathsf{M})$. □

Item (8)

Se $ng(\mathsf{M}) > 1$, então existe pelo menos um subtermo $\mathsf{R} \not\equiv \mathsf{Q}_i$ tal que:

(*i*) R é *SM* em M e $gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{R}) = g(\mathsf{M})$.

Como $\mathsf{R} \not\equiv \mathsf{Q_i}$, pelo Item (1) deste lema temos:

(*ii*) $(\mathsf{R})_\mathsf{k}$ é *SM* em $\mathsf{M}^\#$ e $gr_{\mathsf{M}\#}((\mathsf{R})_\mathsf{k}) = gr_\mathsf{M}(\mathsf{R})$ ($\forall k$ / $(\mathsf{R})_\mathsf{k}$ é resíduo-* de R).

Por (*i*) e (*ii*):

(*iii*) $gr_{\mathsf{M}\#}((\mathsf{R})_\mathsf{k}) = g(\mathsf{M})$.

Mas como $\mathsf{Q_i} = T(\mathsf{M})$, pelo Item (5) deste lema:

(*iv*) $g(\mathsf{M}) \geq g(\mathsf{M}^\#)$.

Portanto, por (*iii*), (*iv*) e pela Definição 6.2.6 de grau de um termo temos:

(*v*) $g(\mathsf{M}) = g(\mathsf{M}^\#)$.

(*vi*) Seja S *SM* em $\mathsf{M}^\#$ tal que $gr_{\mathsf{M}\#}(\mathsf{S}) = g(\mathsf{M}^\#) \underset{(v)}{=} g(\mathsf{M})$.

Pelo Lema 6.2.14 existe $\mathsf{R} \subset \mathsf{M}$ tal que S é resíduo-* de R.

Temos dois casos possíveis para R: R não é *SM* em M ou R é *SM* em M.

Se R não é *SM* em M, então, pelo Item (2) deste lema, $gr_{\mathsf{M}\#}(\mathsf{S}) < gr_\mathsf{M}(\mathsf{Q_i}) = g(\mathsf{M})$, o que, por (*vi*), é um absurdo. Portanto:

(*vii*) S é resíduo-* de R que é *SM* em M.

Pelo Item (4) deste lema, se S é resíduo de $\mathsf{Q_i}$, então $gr_{\mathsf{M}\#}(\mathsf{S}) < gr_\mathsf{M}(\mathsf{Q_i}) = g(\mathsf{M})$, o que, por (*vi*), é um absurdo. Portanto:

(*viii*) $\mathsf{R} \not\equiv \mathsf{Q_i}$.

Por (*vii*), (*viii*) e pelo Item (1) deste lema temos:

(*ix*) $gr_{\mathsf{M}\#}(\mathsf{S}) = gr_\mathsf{M}(\mathsf{R})$.

Assim, por (*vi*), (*vii*), (*viii*) e (*ix*) temos:

(*x*) Os únicos *SM* em M que têm grau igual a $g(\mathsf{M}^\#)$ são os resíduos dos $ng(\mathsf{M})$-1 *SM* de M com grau igual a $g(\mathsf{M})$ que são distintos de $\mathsf{Q_1} = T(\mathsf{M})$.

É claro, pela forma de M, que se B é *SM* em M e $\mathsf{B} \subset \mathsf{Q_i}$, então o λ de B ocorre à direita do λ de $\mathsf{Q_i}$. Portanto, pela Definição 6.2.9 de subtermo estrela temos:

(*xi*) $\mathsf{B} \subset \mathsf{Q_i}$ é *SM* em M $\Rightarrow$ $gr_\mathsf{M}(\mathsf{B}) < g(\mathsf{M})$.

Logo, por (*vi*), (*ix*) e (*xi*) temos:

(*xii*) $\mathsf{R} \not\subset \mathsf{Q_i}$.

(*xiii*) Pela Definição 6.2.12 de resíduo-*, os únicos casos em que um *SM* B em M possui mais de um resíduo-* em $\mathsf{M}^\#$ ocorrem quando $\mathsf{B} \equiv \mathsf{Q_i}$ ou quando $\mathsf{B} \subset \mathsf{Q_i}$.

Portanto, por (*viii*), (*xii*) e (*xiii*) temos:

(*xiv*) R só possui um resíduo em $\mathsf{M}^\#$.

Sejam $R_1, \ldots, R_r$ os $ng(M)$-1 *SM* de M, distintos de $Q_i = T(M)$, com grau igual a $g(M)$.

(*xv*) Por (*xiv*) $(R_1)_1, \ldots, (R_r)_1$ são todos os $ng(M)$-1 resíduos-* destes *SM*s em $M^\#$.

(*xvi*) Por (*x*) e (*xv*), $(R_1)_1, \ldots, (R_r)_1$ são os únicos *SM* em $M^\#$ com grau igual a $g(M^\#)$.

Logo, por (*xvi*) temos: $ng(M^\#) = ng(M)-1$. □

Item (9)

(*i*) Seja S *SM* em $M^\#$ tal que $gr_{M\#}(S) = g(M^\#) = g(M)$.

Pelo Lema 6.2.14 existe $R \subset M$ tal que S é resíduo-* de R.

Temos dois casos possíveis para R: R não é *SM* em M ou R é *SM* em M.

Se R não é *SM* em M, então pelo Item (2) deste lema $gr_{M\#}(S) < gr_M(Q_i) = g(M)$, o que, por (*i*), é um absurdo. Portanto:

(*ii*) S é resíduo-* de R que é *SM* em M.

Pelo Item (4) deste lema, se S é resíduo de Q_i, então $gr_{M\#}(S) < gr_M(Q_i) = g(M)$, o que, por (*vi*), é um absurdo. Portanto:

(*iii*) $R \not\equiv Q_i$.

Por (*ii*), (*iii*) e pelo Item (1) deste lema temos:

(*iv*) $gr_M(R) = gr_{M\#}(S) \underset{(i)}{=} g(M)$.

Assim, por (*iii*), (*iv*) e pela Definição 6.2.7 temos:

(*v*) $ng(M) > 1$.

Como $Q_i = T(M)$ e, por (*v*), $ng(M) > 1$, pelo Item (8) deste lema temos:

(*vi*) $ng(M) = ng(M^\#) + 1$.

Logo, por (*v*) e (*vi*) provamos o Item (9). ♦

Vamos agora iniciar o argumento principal da prova de finitude da seqüência estrela. No lema seguinte provamos que para um termo não estrela M qualquer é necessário um número finito de passos da seqüência estrela para diminuir o grau de M. Ou seja, existe $M^{\bullet n}$ em β_M, com $n < \omega$, tal que $g(M) > g(M^{\bullet n})$.

6.2.16 LEMA:

Se M é um $\lambda^{\supset}$-termo tal que $ng(M) \geq 1$, então existe $n < \omega$ tal que $g(M^{\bullet n}) < g(M)$.

PROVA:

Provaremos por indução em $ng(\mathsf{M})$.

BASE: $ng(\mathsf{M}) = 1$

Pelo Lema 6.2.15-(6) temos: $ng(\mathsf{M}) = 1 \Rightarrow g(\mathsf{M}) > g(\mathsf{M}^\bullet)$.

Portanto, $n = 1 < \omega$ já prova o caso básico.

PASSO: $ng(\mathsf{M}) > 1$

HI: Se N é um $\lambda^{\supset}$-termo tal que $ng(\mathsf{N}) < ng(\mathsf{M})$, então existe $k < \omega$ tal que $g(\mathsf{N}^{\bullet k}) < g(\mathsf{N})$.

Pelo Lema 6.2.15-(8), como $ng(\mathsf{M}) > 1$ temos:

(*i*) $g(\mathsf{M}) = g(\mathsf{M}^\bullet)$ e $ng(\mathsf{M}) = ng(\mathsf{M}^\bullet) + 1$.

Logo, vale HI para $\mathsf{M}^\bullet$ e portanto temos:

(*ii*) Existe um $(\mathsf{M}^\bullet)^{\bullet k}$ tal que $g((\mathsf{M}^\bullet)^{\bullet k}) < g(\mathsf{M}^\bullet)$ e $k < \omega$.

(*iii*) Mas pela Observação 6.2.11.1-(*h*) temos: $(\mathsf{M}^\bullet)^{\bullet k} \equiv \mathsf{M}^{\bullet k+1}$. Logo:

(*iv*) $g(\mathsf{M}) \underset{\text{(i)}}{=} g(\mathsf{M}^\bullet) \underset{\text{(ii)}}{>} g((\mathsf{M}^\bullet)^{\bullet k}) \underset{\text{(iii)}}{\equiv} g(\mathsf{M}^{\bullet k+1})$. Além disso, como $k < \omega$, $k + 1 < \omega$.

Portanto, fazendo $n = k + 1$, temos, por (*iv*): $g(\mathsf{M}^{\bullet n}) < g(\mathsf{M})$ e $n < \omega$. ♦

No teorema seguinte provamos finalmente que a seqüência estrela de qualquer termo M é finita.

6.2.17 TEOREMA: Finitude de β

A seqüência estrela de todo $\lambda^{\supset}$-termo M é finita ($l(\beta_{\mathsf{M}}) < \omega$).

PROVA: Indução em $g(\mathsf{M})$.

Dizer que $l(\beta_{\mathsf{M}}) < \omega$ é o mesmo que dizer que existe $r < \omega$ tal que $\mathsf{M}^{\bullet r}$ é termo estrela. É isto que provaremos.

BASE: $g(\mathsf{M}) = 0$

Neste caso, M é estrela, e portanto $\mathsf{M}^{\bullet 0} \equiv \mathsf{M}$ é termo estrela.

PASSO: $g(\mathsf{M}) > 0$

HI: para todo $\lambda^{\supset}$-termo N em que $g(\mathsf{N}) < g(\mathsf{M})$, existe $s < \omega$ tal que $\mathsf{N}^{\bullet s}$ é termo estrela.

(*i*) Pelo Lema 6.2.16 existe $n < \omega$ tal que $g(\mathsf{M}^{\bullet n}) < g(\mathsf{M})$.

Logo vale HI em $\mathsf{M}^{\bullet n}$, e portanto:

(*ii*) Existe $s < \omega$ tal que $(\mathsf{M}^{\bullet n})^{\bullet s}$ é termo estrela.

Logo, por (*ii*) e pela Observação 6.2.11.1-(*h*) temos: $M^{\bullet n+s}$ é termo estrela, e como, por (*i*) e (*ii*) $n< \omega$ e $s< \omega$, é claro que $n+ s< \omega$. ♦

6.2.18 DEFINIÇÃO: Função Peso - *p*(M)

Seja M um $\lambda^{\supset}$-termo. Definimos o *peso* de M, e denotamos por *p*(M), como sendo o número de todas os subtermos pesados *SP* de M.

6.2.19 DEFINIÇÃO: Função Ordinal - *o*(M)

Seja M um $\lambda^{\supset}$-termo. Definimos o *ordinal natural* associado a M, e o denotamos por *o*(M), como: $o(M)= p(M^*)+ 1$.

6.2.20 TEOREMA: Existência, Finitude e Unicidade de *o*(M)

Para qualquer termo M, *o*(M) está definido, é único e finito.

<u>PROVA</u>:

O Comentário 6.2.11.1-(*b*) e o Teorema 6.2.17 garantem que, para cada termo M, M* existe e é único. Logo, pela Definição 6.2.19, *o*(M) existe e é único para todo termo M.

Como a seqüência estrela que produziu M* a partir de M é finita (Teorema 6.2.17), e a multiplicação-*, executada a cada passo da seqüência, é uma operação finitária (Definição 6.2.8), então é claro que se M é um termo finito, M* também o é.

Logo, sendo finito, M* possui um número finito de subtermos pesados *SP*, ou seja, $p(M^*)< \omega$. Portanto, pela Definição 6.2.19, temos que $o(M)< \omega$. ♦

§3 Finitude da Pior Seqüência - $o(M) = L_{F_\infty}(M)$

Nesta seção provaremos que a atribuição *o*(M), que verificamos ser única e finita para cada termo M, corresponde ao comprimento da seqüência de redução obtida aplicando-se a estratégia perpétua a M ($L_{F_\infty}(M)$). Fazendo isso, provamos que $L_{F_\infty}(M)< \omega$ e portanto, pelo Teorema 6.1.2 temos que $L_{F_\infty}(M)= o(M)$ é ordinal natural para $\lambda^{\supset}$.

6.3.1 LEMA:

Se M é um termo estrela e $M \to M'$, então M' também é termo estrela.

PROVA:

Considere:

(*i*) $M \equiv C[(\lambda x.P)Q] \to C[P[x/Q]] \equiv M'$

Como M é termo estrela, então $(\lambda x.P)Q$ é K-redex (x não ocorre livre em P), caso contrário Q seria um *SM* em M e portanto M não seria termo estrela. Portanto, por (*i*) temos:

(*ii*) $M' \equiv C[P[x/Q]] \equiv C[P]$

Temos que provar que:

(*) Não existe *SM* em $M \equiv C[(\lambda x.P)Q] \Rightarrow$ não existe *SM* em $M' \equiv C[P]$.

Provaremos (*) por contraposição. Ou seja, provaremos que:

(**) Existe *SM* em $M' \equiv C[P] \Rightarrow$ Existe *SM* em $M \equiv C[(\lambda x.P)Q]$.

Considere que existe *SM* em M'. Então:

(*iii*) Existe $R \equiv (\lambda y_1 .. \lambda y_n.N)B_1 .. B_n \subset M' \equiv C[P]$ tal que algum B_i é *SM* em M'.

Temos três possibilidades para R com relação a P:

(*a*) $R \subseteq P$;

(*b*) $P \subset R$;

(*c*) R e P são disjuntos.

Analisemos cada uma delas:

CASO 1: $R \subseteq P$

Neste caso, $R \subset (\lambda x.P)Q$ e portanto M também possui *SM*.

CASO 2: $P \subset R$

Neste caso, por (*iii*) temos $P \subseteq N$, ou $P \subseteq B_i$ $(1 \leq i \leq n)$

Consideremos o caso $P \subseteq N$.

Então: $N \equiv C_1[P]$ e temos, por (*iii*):

(*iv*) $M' \equiv C_1[(\lambda y_1 .. \lambda y_n.C_1[P])B_1 .. B_n]$.

Então, por (*i*), (*iii*) e (*iv*) temos:

$M \equiv C_1[(\lambda y_1 .. \lambda y_n.C[(\lambda x.P)Q])B_1 .. B_n]$, e portanto algum B_i é *SM* em M.

O caso em que $P \subseteq B_i$ é análogo a este.

CASO 3: P e R são disjuntos

Neste caso: $\mathsf{M'} \equiv \mathsf{C_1[R]C_2[P]}$ ou $\mathsf{M'} \equiv \mathsf{C_2[P]C_1[R]}$.

Para cada um destes casos temos:

$$\mathsf{M} \equiv \mathsf{C_1[R]C_2}[(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}] \text{ ou } \mathsf{M'} \equiv \mathsf{C_2}[(\lambda x.\mathsf{P})\mathsf{Q}]\mathsf{C_1[R]}.$$

Logo R ocorre em M, que portanto possui *SM*. ♦

6.3.2 LEMA:

Seja $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1..\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1...\mathsf{Q}_n]$, onde $(\lambda x_1..\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1...\mathsf{Q}_n$ é o segmento-α mais à esquerda de M e Q_1 não é *SM* em M. Todos os casos possíveis para T(M) são os listados abaixo e as seguintes propriedades são válidas:

(*a*) Se $T(\mathsf{M}) \subset \mathsf{P}$ então:

(1) $\mathsf{M}^{\bullet} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1..\lambda x_n.\mathsf{P}^{\bullet})\mathsf{Q}_1...\mathsf{Q}_n]$, onde:
$(\lambda x_1..\lambda x_n.\mathsf{P}^{\bullet})\mathsf{Q}_1...\mathsf{Q}_n$ é o left-most segmento-α de $\mathsf{M}^{\bullet}$.

(2) $\mathsf{M}^{\square\bullet} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_2..\lambda x_n.\mathsf{P}^{\bullet})\mathsf{Q}_2...\mathsf{Q}_n]$, onde:
$(\lambda x_2..\lambda x_n.\mathsf{P}^{\bullet})\mathsf{Q}_2...\mathsf{Q}_n$ é o left-most segmento-α de $\mathsf{M}^{\square\bullet}$.[54]

(*b*) Se $(T(\mathsf{M}) \subset \mathsf{C}[\ ])$ então:

(1) $\mathsf{M}^{\bullet} \equiv \mathsf{C}^{\bullet}[(\lambda x_1..\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1...\mathsf{Q}_n]$, onde:
$(\lambda x_1..\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1...\mathsf{Q}_n$ é o left-most redex de $\mathsf{M}^{\bullet}$.

(2) $\mathsf{M}^{\square\bullet} \equiv \mathsf{C}^{\bullet}[(\lambda x_2..\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_2...\mathsf{Q}_n]$, onde:
$(\lambda x_2..\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_2...\mathsf{Q}_n$ é o left-most redex de $\mathsf{M}^{\square\bullet}$.

(*c*) Se $(T(\mathsf{M}) \subset \mathsf{Q}_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ então:

(1) $\mathsf{M}^{\bullet} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1..\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1,...,\mathsf{Q}_{i-1}, \mathsf{Q}_i^{\bullet}, \mathsf{Q}_{i+1},...,\mathsf{Q}_n]$, onde:
$(\lambda x_1..\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1,...,\mathsf{Q}_{i-1}, \mathsf{Q}_i^{\bullet}, \mathsf{Q}_{i+1},...,\mathsf{Q}_n$ é o left-most segmento-α de $\mathsf{M}^{\bullet}$.

(2) $(i \neq 1) \Rightarrow \mathsf{M}^{\square\bullet} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_2..\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_2,...,\mathsf{Q}_{i-1}, \mathsf{Q}_i^{\bullet}, \mathsf{Q}_{i+1},...,\mathsf{Q}_n]$, onde:
$(\lambda x_2..\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_2,...,\mathsf{Q}_{i-1}, \mathsf{Q}_i^{\bullet}, \mathsf{Q}_{i+1},...,\mathsf{Q}_n$ é o left-most segmento-α de $\mathsf{M}^{\square\bullet}$.

(*d*) Se T(M) é algum Q_i $(1 \leq i \leq n)$ então:

(1) $\mathsf{M}^{\bullet} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1..\lambda x_n.\mathsf{P}[x_i/\mathsf{Q}_i])\mathsf{Q}_1,...,\mathsf{Q}_{i-1}, y, \mathsf{Q}_{i+1},...,\mathsf{Q}_n]$, onde:
$(\lambda x_1..\lambda x_n.\mathsf{P}[x_i/\mathsf{Q}_i])\mathsf{Q}_1,...,\mathsf{Q}_{i-1}, y, \mathsf{Q}_{i+1},...,\mathsf{Q}_n$ é o left-most segmento-α de $\mathsf{M}^{\bullet}$.
e y é uma variável nova do mesmo tipo de x_i.

(2) $(i \neq 1) \Rightarrow \mathsf{M}^{\square\bullet} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_2..\lambda x_n.\mathsf{P}[x_i/\mathsf{Q}_i])\mathsf{Q}_2,...,\mathsf{Q}_{i-1}, y, \mathsf{Q}_{i+1},...,\mathsf{Q}_n]$, onde:
$(\lambda x_2..\lambda x_n.\mathsf{P}[x_i/\mathsf{Q}_i])\mathsf{Q}_2,...,\mathsf{Q}_{i-1}, y, \mathsf{Q}_{i+1},...,\mathsf{Q}_n$ é o left-most segmento-α de $\mathsf{M}^{\square\bullet}$.

[54] Como definido em 4.4.4.1-(*c*), $\mathsf{M}^{\square}$ é o termo obtido de M pela redução do seu left-most redex.

e y é uma variável nova do mesmo tipo de x_i.

(*e*) $p(\mathsf{M}) = p(\mathsf{C}[\ ]) + p(\mathsf{P}) + n + \sum_{i=1}^{n} p(\mathsf{Q}_i)$.

<u>PROVA</u>:

As propriedades para os Itens (*a*), (*c*) e (*d*) são imediatas pela definição de multiplicação-*. Vamos nos concentrar nos Itens (*b*) e (*e*), e no fato dos 4 casos ((*a*) a (*d*)) esgotarem todas as possibilidades para $T(\mathsf{M})$.

Seja:

(*i*) $\mathsf{S} \equiv (\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_n$ o left-most segmento-α de M e

(*ii*) $\mathsf{R} \equiv (\lambda y_1 .. \lambda y_m.\mathsf{N})\mathsf{B}_1 ... \mathsf{B}_m$ o segmento-α em que $T(\mathsf{M})$ ocorre.

Por (*i*): $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[\mathsf{S}]$.

Temos quatro possibilidades para R, com relação a S:

(1) $\mathsf{R} \subset \mathsf{S}$ (2) $\mathsf{R} \equiv \mathsf{S}$

(3) $\mathsf{S} \subset \mathsf{R}$ (4) R e S são disjuntos.

Analisemos cada uma delas:

O caso (1) representa os Itens (*a*) e (*c*) do teorema.

O caso (2) representa o Item (*d*) do teorema.

O caso (3) não ocorre, pois, uma vez que se $\mathsf{S} \subset \mathsf{R}$, o λ de R ocorre à esquerda do λ de S, o que é absurdo, pois S é o segmento-α mais à esquerda em M.

No caso (4), como S é o left-most segmento-α de M temos, $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}_1[\mathsf{S}]\mathsf{C}_2[\mathsf{R}]$, ou seja, R ocorre à direita de S em M. Dessa forma, qualquer multiplicação-* em R ou em qualquer outro segmento-α de M não altera S nem multiplica S. Portanto podemos, sem problemas, utilizar a seguinte abreviação:

$$\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[\mathsf{S}] \xrightarrow{*}_{\circ} (\mathsf{C}[\mathsf{S}])^{\bullet} \equiv \mathsf{C}^{\bullet}[\mathsf{S}] \equiv \mathsf{M}^{\bullet}.$$

Dessa forma, os resultados para o Item (*b*) também seguem naturalmente.

Vamos provar o Item (*e*).

O caso (3) acima é falso para R e para qualquer outro segmento-α de M, portanto, se N é segmento-α qualquer em M temos um dos casos:

N é disjunto de $\mathsf{S} \Rightarrow \mathsf{M} \subset \mathsf{C}[\ ]$,

$\mathsf{N} \subset \mathsf{P}$,

$\mathsf{N} \subset \mathsf{Q}_i$ $(1 \le i \le n)$ ou

$\mathsf{N} \equiv \mathsf{S}$.

Dessa forma, contar todas as ocorrências pesadas de M é contar todas as ocorrências pesadas de cada um desses possíveis Ns, e portanto:

$$p(\mathsf{M}) = p(\mathsf{C}[\,]) + p(\mathsf{P}) + n + \sum_{i=1}^{n} p(\mathsf{Q}_i). \;\blacklozenge$$

6.3.4 LEMA:

Considere $\mathsf{Q} \subset \mathsf{M}$ tal que Q é *SM* em M e $g(\mathsf{M}^{\bullet}) < gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q})$.

Então $g(\mathsf{M}) = gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q})$.

<u>PROVA:</u>

Suponha, por absurdo, que $g(\mathsf{M}) > gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q})$.

Isto implica que $T(\mathsf{M}) \neq \mathsf{Q}$, logo, pelo Lema 6.2.15-(1), todo resíduo $(\mathsf{Q})_{\mathsf{k}}$ de Q é *SM* em $\mathsf{M}^{\bullet}$ e, portanto, $g(\mathsf{M}^{\bullet}) \geq gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q})$, o que é um absurdo, pois $g(\mathsf{M}^{\bullet}) < gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q})$ por hipótese.

Logo, descartamos a hipótese do absurdo e temos $g(\mathsf{M}) \leq gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q})$.

Mas pela Definição 6.2.6 não é possível que $g(\mathsf{M}) < gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q})$. Logo, $g(\mathsf{M}) = gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q})$. ♦

O teorema seguinte apresenta uma caracterização de M* a partir de M quando o left-most redex de M é um K-redex. Os Itens (*a*) e (*b*) são necessários na prova do Item (*c*) que será essencial para provarmos que $o(\mathsf{M}) = p(\mathsf{M}^*) + 1 = L_{\mathbf{F}_\infty}(\mathsf{M})$.

6.3.5 TEOREMA:

Seja $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 \ldots \mathsf{Q}_n]$, onde $(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 \ldots \mathsf{Q}_n$ é o segmento-α mais à esquerda de M. Se $(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1$ é um K-redex então:

(*a*) $\mathsf{M}^* \equiv \mathsf{C}^*[(\lambda x_1.\lambda x_2 \ldots \lambda x_n.\mathsf{R})\mathsf{Q}_1^*\mathsf{S}_2 \ldots \mathsf{S}_n]$,

onde $(\lambda x_1.\lambda x_2 \ldots \lambda x_n.\mathsf{R})\mathsf{Q}_1^*\mathsf{S}_2 \ldots \mathsf{S}_n$ é o segmento-α mais à esquerda de M*;

(*b*) $\mathsf{M}^{\square *} \equiv \mathsf{M}^{*\square} \equiv \mathsf{C}^*[(\lambda x_2 \ldots \lambda x_n.\mathsf{R})\mathsf{S}_2 \ldots \mathsf{S}_n]$;

(*c*) $p(\mathsf{M}^*) = p(\mathsf{M}^{\square *}) + p(\mathsf{Q}_1^*) + 1$.

<u>PROVA</u>:

Itens (*a*) e (*b*)

Seja $\beta_{\mathsf{M}} = \mathsf{M}^1, \ldots, \mathsf{M}^s$ a seqüência estrela para M. Provaremos os Itens (*a*) e (*b*) por indução em $l(\beta_{\mathsf{M}}) = s$.

BASE: $l(\beta_{\mathsf{M}}) = 1$

Se $l(\beta_{\mathsf{M}}) = 1$, então M é termo estrela, e temos:

(i) $\mathsf{M} \equiv \mathsf{M}^*$, $\mathsf{C}[\ ] \equiv \mathsf{C}^*[\ ]$, $\mathsf{Q}_i \equiv \mathsf{Q}_i{}^*$ $(1 \leq i \leq n)$ e $\mathsf{P} \equiv \mathsf{P}^*$.

Logo, $\mathsf{M}^* \equiv \mathsf{C}^*[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P}^*)\mathsf{Q}_1{}^* ... \mathsf{Q}_n{}^*]$, onde $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P}^*)\mathsf{Q}_1{}^* ... \mathsf{Q}_n{}^*$ é o segmento-α mais à esquerda de M^*. Assim, considerando $\mathsf{R} \equiv \mathsf{P}^*$ e $\mathsf{S}_j \equiv \mathsf{Q}_j{}^*$ $(2 \leq j \leq n)$ temos o caso básico do Item (a) resolvido.

Pelo Lema 6.3.1 temos que $\mathsf{M}^{\square}$ é termo estrela. Logo:

(ii) $\mathsf{M}^{\square} \equiv \mathsf{M}^{\square *}$.

(iii) Portanto: $\mathsf{M}^{\square *} \underset{\text{(ii)}}{\equiv} \mathsf{M}^{\square} \underset{\text{(i)}}{\equiv} \mathsf{M}^{*\square}$.

Note que como, por hipótese do teorema, $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1$ é um K-redex, temos que $\mathsf{M}^{\square} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_2 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_2 ... \mathsf{Q}_n]$. Logo, por ($iii$) e ($i$) temos:

$\mathsf{M}^{\square *} \underset{\text{(ii)}}{\equiv} \mathsf{M}^{\square} \underset{\text{(i)}}{\equiv} \mathsf{M}^{*\square} \equiv \mathsf{C}^*[(\lambda x_2 .. \lambda x_n.\mathsf{P}^*)\mathsf{Q}_2{}^* ... \mathsf{Q}_n{}^*]$. Assim, considerando $\mathsf{R} \equiv \mathsf{P}^*$ e $\mathsf{S}_j \equiv \mathsf{Q}_j{}^*$ $(2 \leq j \leq n)$ temos o caso básico do Item (b) resolvido.

PASSO: $l(\beta_{\mathsf{M}}) > 1$

HI: Se N é um termo cujo left-most redex é um K-redex e $l(\beta_{\mathsf{N}}) < l(\beta_{\mathsf{M}})$, então os Itens ($a$) e ($b$) do teorema valem para N.

Note que como $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1$ é um K-redex temos :

(i) $\mathsf{M}^{\square} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_2 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_2 ... \mathsf{Q}_n]$.

(ii) É claro, pela Observação 6.2.11.1-(h) que $l(\beta_{\mathsf{M}\bullet}) < l(\beta_{\mathsf{M}})$.

Como $\mathsf{M}^{\bullet}$ é obtido de M pela multiplicação-* de $T(\mathsf{M})$, vamos analisar todos os casos possíveis para $T(\mathsf{M})$.

<u>CASO 1</u>: $T(\mathsf{M})$ ocorre em P

Neste caso, pelo Teorema 6.3.2(a)(1) temos:

(iii) $\mathsf{M}^{\bullet} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P}^{\bullet})\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_n]$, onde:

$(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P}^{\bullet})\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_n$ é o left-most segmento-α de $\mathsf{M}^{\bullet}$.

(iv) Note que $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P}^{\bullet})\mathsf{Q}_1$ também é um K-redex, pois se x_1 não ocorre livre em P, também não ocorre em $\mathsf{P}^{\bullet}$.

Assim, por (iii) e (iv) temos que:

(v) $\mathsf{M}^{\bullet\square} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_2 .. \lambda x_n.\mathsf{P}^{\bullet})\mathsf{Q}_2 ... \mathsf{Q}_n]$.

Alem disso, pelo Teorema 6.3.2(a)(2) temos:

(vi) $\mathsf{M}^{\square\bullet} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_2 .. \lambda x_n.\mathsf{P}^{\bullet})\mathsf{Q}_2 ... \mathsf{Q}_n]$.

(vii) Logo, por (v) e (vi): $\mathsf{M}^{\bullet\square} \equiv \mathsf{M}^{\square\bullet}$.

Por (ii), (iii) e (iv) temos que vale para $\mathsf{M}^{\bullet}$ a hipótese indutiva. Logo

($viii$) $\mathsf{M}^{\bullet *} \equiv \mathsf{C}^*[(\lambda x_1.\lambda x_2 .. \lambda x_n.\mathsf{R})\mathsf{Q}_1^*\mathsf{S}_2 ... \mathsf{S}_n]$ e

$\mathsf{M}^{\bullet \Box *} \equiv \mathsf{M}^{\bullet * \Box} \equiv \mathsf{C}^*[(\lambda x_2 .. \lambda x_n.\mathsf{R})\mathsf{S}_2 ... \mathsf{S}_n]$.

Mas, pela definição da seqüência estrela temos:

(ix) $\mathsf{M}^{\bullet *} \equiv \mathsf{M}^*$.

(x) $\mathsf{M}^{\Box \bullet *} \equiv \mathsf{M}^{\Box *}$.

(xi) Então: $\mathsf{M}^{\Box *} \underset{(x)}{\equiv} \mathsf{M}^{\Box \bullet *} \underset{(vii)}{\equiv} \mathsf{M}^{\bullet \Box *} \underset{(viii)}{\equiv} \mathsf{M}^{\bullet * \Box} \underset{(ix)}{\equiv} \mathsf{M}^{* \Box}$.

Assim, por ($viii$), (ix) e (xi) temos:

$\mathsf{M}^* \equiv \mathsf{C}^*[(\lambda x_1.\lambda x_2 .. \lambda x_n.\mathsf{R})\mathsf{Q}_1^*\mathsf{S}_2 ... \mathsf{S}_n]$ e

$\mathsf{M}^{* \Box} \equiv \mathsf{M}^{\Box *} \equiv \mathsf{C}^*[(\lambda x_2 .. \lambda x_n.\mathsf{R})\mathsf{S}_2 ... \mathsf{S}_n]$, o que resolve o Caso 1.

<u>CASO 2</u>: $T(\mathsf{M})$ ocorre em $\mathsf{C}[\ ]$

A solução é análoga à do Caso 1, aplicando-se aqui o Teorema 6.3.2(*b*).

<u>CASO 3</u>: $T(\mathsf{M})$ ocorre em Q_i ($2 \leq i \leq n$)

A solução é análoga à do Caso 1, aplicando-se aqui o Teorema 6.3.2(*c*).

<u>CASO 4</u>: $T(\mathsf{M})$ ocorre em Q_1

Neste caso, pelo Teorema 6.3.2(*c*)(1) temos:

(xii) $\mathsf{M}^{\bullet} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1^{\bullet} .. \mathsf{Q}_n]$, onde:

$(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1^{\bullet} .. \mathsf{Q}_n$ é o left-most segmento-α de $\mathsf{M}^{\bullet}$.

($xiii$) Note que $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1^{\bullet}$ também é um K-redex.

Assim, por (xii) e ($xiii$) temos que:

(xiv) $\mathsf{M}^{\bullet \Box} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_2 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_2 ... \mathsf{Q}_n]$.

(xv) Por (i) e (xiv) temos que $\mathsf{M}^{\Box} \equiv \mathsf{M}^{\bullet \Box}$.

Por (ii), (xii) e ($xiii$) temos que vale para $\mathsf{M}^{\bullet}$ a hipótese indutiva. Logo:

(xvi) $\mathsf{M}^{\bullet *} \equiv \mathsf{C}^*[(\lambda x_1.\lambda x_2 .. \lambda x_n.\mathsf{R})\mathsf{Q}_1^{\bullet *}\mathsf{S}_2 ... \mathsf{S}_n]$ e

$\mathsf{M}^{\bullet \Box *} \equiv \mathsf{M}^{\bullet * \Box} \equiv \mathsf{C}^*[(\lambda x_2 .. \lambda x_n.\mathsf{R})\mathsf{S}_2 ... \mathsf{S}_n]$.

Mas, pela definição da seqüência estrela temos:

($xvii$) $\mathsf{M}^{\bullet *} \equiv \mathsf{M}^*$.

($xviii$) $\mathsf{Q}_1^{\bullet *} \equiv \mathsf{Q}_1^*$.

(xix) Então: $\mathsf{M}^{\Box *} \underset{(xv)}{\equiv} \mathsf{M}^{\bullet \Box *} \underset{(xvi)}{\equiv} \mathsf{M}^{\bullet * \Box} \underset{(xvii)}{\equiv} \mathsf{M}^{* \Box}$.

Assim, por (xvi), ($xvii$), ($xviii$) e (xix) temos:

$\mathsf{M}^* \equiv \mathsf{C}^*[(\lambda x_1.\lambda x_2 .. \lambda x_n.\mathsf{R})\mathsf{Q}_1^*\mathsf{S}_2 ... \mathsf{S}_n]$ e

$\mathsf{M}^{* \Box} \equiv \mathsf{M}^{\Box *} \equiv \mathsf{C}^*[(\lambda x_2 .. \lambda x_n.\mathsf{R})\mathsf{S}_2 ... \mathsf{S}_n]$, o que resolve o Caso 4.

CASO 5: $T(\mathsf{M})$ é algum Q_i $(2 \leq i \leq n)$

A solução é análoga ao Caso 1, aplicando aqui o Teorema 6.3.2(*d*).

Note que não ocorre o caso de $T(\mathsf{M})$ ser Q_1, pois $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1$ é um K-redex, ou seja, Q_1 não é subtermo multiplicativo em M. Portanto todos os casos possíveis já foram tratados o que termina a prova dos Itens (*a*) e (*b*). □

Item (*c*)

Pelo Item (*a*) e Teorema 6.3.2-(*e*) temos:

$$(xx)\ p(\mathsf{M}^*) = p(\mathsf{C}^*[\ ]) + p(\mathsf{R}) + n + p(\mathsf{Q}_1{}^*) + \sum_{i=2}^{n} p(\mathsf{S}_i).$$

Pelo Item (*b*) e Teorema 6.3.2-(*e*) temos:

$$(xxi)\ p(\mathsf{M}^{\square *}) = p(\mathsf{M}^{*\square}) = p(\mathsf{C}^*[\ ]) + p(\mathsf{R}) + (n\text{-}1) + \sum_{i=2}^{n} p(\mathsf{S}_i).$$

Logo, por (*xx*) e (*xxi*) temos:

$$p(\mathsf{M}^*) = p(\mathsf{M}^{\square *}) + p(\mathsf{Q}_1{}^*) + 1.\ \blacklozenge$$

As duas definições seguintes serão muito utilizadas para a caracterização de M^* a partir de M quando o left-most redex de M é um I-redex.

6.3.6 DEFINIÇÃO: Termo Limite (o equivalente de derivação limite)

Seja M um termo, $n > 0$ um número natural e $\beta_{\mathsf{M}} = \mathsf{M}^{\bullet 0}, \ldots, \mathsf{M}^{\bullet s}$ a seqüência estrela para M. Definimos o *termo limite de* M *para* n, e denotamos por $\mathsf{M}^{[n]}$, como o termo $\mathsf{M}^{\bullet i}$ $(0 \leq i \leq s)$ da seqüência β_{M} tal que:

(*i*) Se $g(\mathsf{M}) < n$, então $\mathsf{M}^{[n]}$ é $\mathsf{M}^{\bullet 0} \equiv \mathsf{M}$.

(*ii*) Se $g(\mathsf{M}) \geq n$, então $\mathsf{M}^{[n]}$ é o primeiro $\mathsf{M}^{\bullet i}$ de β_{M} tal que: $g(\mathsf{M}^{\bullet i}) < n$ e $g(\mathsf{M}^{\bullet i-1}) \geq n$.

6.3.6.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Como, pelo Lema 6.2.15-(5), $g(\mathsf{M}^{\bullet i}) \geq g(\mathsf{M}^{\bullet i+1})$ $(1 \leq i < s)$, o que a definição acima estabelece é que $\mathsf{M}^{[n]}$ é o termo da seqüência β_{M} de menor índice que tem grau máximo multiplicativo menor que n.

(*b*) Como $g(\mathsf{M}^{\bullet s}) = 0$ (pois $\mathsf{M}^{\bullet s}$ é termo estrela) e, pelo Lema 6.2.15-(5), $g(\mathsf{M}^{\bullet i}) \geq g(\mathsf{M}^{\bullet i+1})$ $(0 \leq i < s)$, então, para todo $n > 0$, temos que existe um $\mathsf{M}^{\bullet i}$ $(0 \leq i \leq s)$ tal que $\mathsf{M}^{\bullet i} \equiv \mathsf{M}^{[n]}$.

(*c*) É claro, por propriedades da seqüência estrela, que $\beta_{\mathsf{M}}^{[n]} = \mathsf{M}^{\bullet 0}, \ldots, \mathsf{M}^{\bullet k} \equiv \mathsf{M}^{[n]}$, a *seqüência estrela limite de* M *para* n é única, e para cada M e n existe um e apenas um $\mathsf{M}^{[n]}$ associado. Além disso, se $\mathsf{M}^{[n]} \equiv \mathsf{M}^{\bullet k}$ e $r \leq k$, então $(\mathsf{M}^{\bullet r})^{[n]} \equiv \mathsf{M}^{[n]}$.

6.3.7 DEFINIÇÃO: Subtermo Pesado Local

Seja $\mathsf{S} \subset \mathsf{P}[x/\mathsf{Q}]$ um subtermo pesado (*SP*) em $\mathsf{P}[x/\mathsf{Q}]$. Dizemos que S é um *subtermo pesado local a* P *em* $\mathsf{P}[x/\mathsf{Q}]$, e denotamos por *SPL* em $\mathsf{P}[x/\mathsf{Q}]$, se P tem a forma:

$$\mathsf{P} \equiv \mathsf{C}[(\lambda y_1.\ldots\lambda y_n.\mathsf{N})\mathsf{B}_1\ldots\mathsf{B}_{s-1}\mathsf{R}\mathsf{B}_{s+1}\ldots\mathsf{B}_n] \text{ e } \mathsf{S} \equiv \mathsf{R}[x/\mathsf{Q}].$$

Neste caso, considerando a abreviação $\mathsf{X}' \equiv \mathsf{X}[x/\mathsf{Q}]$ temos:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}[x/\mathsf{Q}] &\equiv \mathsf{C}[(\lambda y_1.\ldots\lambda y_n.\mathsf{N})\mathsf{B}_1\ldots\mathsf{B}_{s-1}\mathsf{R}\mathsf{B}_{s+1}\ldots\mathsf{B}_n][x/\mathsf{Q}] \\ &\equiv \mathsf{C}'[(\lambda y_1.\ldots\lambda y_n.\mathsf{N}')\mathsf{B}_1'\ldots\mathsf{B}_{s-1}'\mathsf{R}[x/\mathsf{Q}]\mathsf{B}_{s+1}'\ldots\mathsf{B}_n'].\end{aligned}$$

No teorema seguinte provamos uma longa série de itens, com o objetivo principal de demonstrar que podemos reduzir o caso em que o left-most redex de M é um I-redex ao caso em que ele é um K-redex, para o qual, no Teorema 6.3.5, já apresentamos uma caracterização para M^* e demonstramos propriedades sobre $p(\mathsf{M}^*)$. Basicamente o resultado que interessa é apenas o Item (12), que demonstra que se $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1\ldots\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1\ldots\mathsf{Q}_n]$, onde $(\lambda x_1\ldots\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1$ é o left-most redex de M e um I-redex, então $\mathsf{M}^* \equiv \mathsf{M}_\Delta^*$, onde $\mathsf{M}_\Delta \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1\ldots\lambda x_n.\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])y_1\mathsf{Q}_2\ldots\mathsf{Q}_n]$ obtido pela multiplicação estrela de Q_1 em M. Note que em M_Δ, $(\lambda x_1\ldots\lambda x_n.\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])y_1$ é o left-most redex e é um K-redex, pois y_1 é variável nova. Todos os demais 11 itens do teorema abaixo só são úteis na medida em que são necessários para a prova do último.

6.3.8 TEOREMA:

Seja $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1\ldots\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1\ldots\mathsf{Q}_n]$, onde:

- $(\lambda x_1\ldots\lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1\ldots\mathsf{Q}_n$ é o segmento-α mais à esquerda em M,

• $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1$ é um I-redex e

• $gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1)= k$.

Seja $\mathsf{M}_\Delta \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])y_1\mathsf{Q}_2 .. \mathsf{Q}_n]$ obtido pela multiplicação estrela de Q_1 em M.

Considere também $\mathsf{P}_d \equiv \mathsf{P}\langle x_1/y_1 .. y_s\rangle$ um termo obtido de P pela substituição das ocorrências livres de x_1, da esquerda para a direita, respectivamente, pelas variáveis novas $y_1, \ldots, y_s$. Então:

(1) $\mathsf{M}^{[k]-1} \equiv \mathsf{C}^{[k]}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P}^{[k]})\mathsf{Q}_1^{[k]} .. \mathsf{Q}_n^{[k]}]$.[55]

(2) $\mathsf{M}^{[k]} \equiv \mathsf{C}^{[k]}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P}^{[k]}[x_1/\mathsf{Q}_1^{[k]}])y_1\mathsf{Q}_2^{[k]} .. \mathsf{Q}_n^{[k]}]$.

(3) $\mathsf{M}_\Delta^{[k]} \equiv \mathsf{C}^{[k]}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])^{[k]})y_1\mathsf{Q}_2^{[k]} .. \mathsf{Q}_n^{[k]}]$.

(4) $g(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]) \geq gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1) \Rightarrow T(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])$ é $SPL(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])$ ou $T(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]) \subset \mathsf{Q}_1$.

(5) $g(\mathsf{P}) \leq g(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])$.

(6) $T(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])$ é $SPL(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]) \Rightarrow g(\mathsf{P})= g(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])$.

(7) $T(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])$ é $SPL(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]) \Rightarrow (\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])^\bullet \equiv \mathsf{P}^\bullet[x_1/\mathsf{Q}_1]$.

(8) $\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1] \equiv \mathsf{P}_d[y_1/\mathsf{Q}_1] .. [y_s/\mathsf{Q}_1]$.

(9) $\mathsf{P}^{[k]}[x_1/\mathsf{Q}_1^{[k]}] \equiv \mathsf{P}_d^{[k]}[y_1/\mathsf{Q}_1^{[k]}] .. [y_s/\mathsf{Q}_1^{[k]}]$.

(10) $(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])^{[k]} \equiv \mathsf{P}^{[k]}[x_1/\mathsf{Q}_1^{[k]}]$.

(11) $\mathsf{M}^{[k]} \equiv \mathsf{M}_\Delta^{[k]}$.

(12) $\mathsf{M}^* \equiv \mathsf{M}_\Delta^*$.

PROVA:

Itens (1) e (2)

(*i*) Seja $\mathsf{M}^* \equiv \mathsf{M}^{\bullet s}$ o último termo de β_{M}.

(*ii*) Considere $\mathsf{M}^{[k]} \equiv \mathsf{M}^{\bullet m}$ $(0 \leq m \leq s)$.

Como Q_1 é *SM* em M, então $g(\mathsf{M}) \geq gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1)= k$. Logo, por (*ii*) e pela Definição 6.3.6 de $\mathsf{M}^{[k]}$ temos que $m> 0$. Portanto, por (*ii*) temos que: $\mathsf{M}^{[k]-1} \equiv \mathsf{M}^{\bullet m-1}$ está definido.

Provaremos os Itens (1) e (2) por indução em m.

BASE: $m= 1$

Neste caso temos:

$$(iii)\ \mathsf{M}^{[k]-1} \underset{(ii)}{\equiv} \mathsf{M}^{\bullet m-1} \equiv \mathsf{M}^{\bullet 0} \equiv \mathsf{M} \quad \text{e} \quad \mathsf{M}^{[k]} \equiv \mathsf{M}^\bullet.$$

Mas se $\mathsf{M}^{[k]} \equiv \mathsf{M}^\bullet$, pela Definição 6.3.6 temos que:

55 A notação $\mathsf{M}^{[k]-1}$ é uma abreviação para $\mathsf{M}^{\bullet m-1}$ tal que $\mathsf{M}^{\bullet m} \equiv \mathsf{M}^{[k]}$.

(iv) $g(\mathsf{M}^{\bullet}) < k = gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1)$.

(v) $g(\mathsf{M}^{\bullet 0}) = g(\mathsf{M}) \geq k = gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1)$.

(vi) Logo, por *(iv)* e *(v)*: $g(\mathsf{M}) > g(\mathsf{M}^{\bullet})$.

(vii) Mas por *(vi)* e pelo Lema 6.2.15-(7): $ng(\mathsf{M})= 1$.

Por *(iv)* e pelo Lema 6.3.4 temos:

(viii) $g(\mathsf{M})= gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1)$.

Mas, se $g(\mathsf{M})= gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1)$, $ng(\mathsf{M})= 1$ e Q_1 é *SM* em M, então é claro que:

(ix) $\mathsf{Q}_1= T(\mathsf{M})$.

Dessa forma, por *(vii)* e *(ix)* temos que nenhum outro *SM* de M além de Q_1 tem grau maior ou igual a $gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1)$. Logo, pela forma de M temos:

(x) $g(\mathsf{C}[\ ]) < gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1)$, $g(\mathsf{P}) < gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1)$ e $g(\mathsf{Q}_i) < gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1)$ $(1 \leq i \leq n)$.

Assim, como $gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1) = k$, por *(x)* e pela Definição 6.3.6 temos:

(xi) $\mathsf{C}^{[k]}[\ ] \equiv \mathsf{C}[\ ]$; $\mathsf{P}^{[k]} \equiv \mathsf{P}$ e $\mathsf{Q}_i{}^{[k]} \equiv \mathsf{Q}_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

Então, por *(iii)* e por *(xi)*, temos:

(xii) $\mathsf{M}^{[k]-1} \equiv \mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 \ldots \mathsf{Q}_n] \underset{(\mathrm{xi})}{\equiv} \mathsf{C}^{[k]}[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.\mathsf{P}^{[k]})\mathsf{Q}_1^{[k]} \ldots \mathsf{Q}_n^{[k]}]$.

Além disso, por *(ix)* e *(xii)* temos:

(xiii) $\mathsf{M}^{[k]} \equiv \mathsf{C}^{[k]}[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.\mathsf{P}^{[k]}[x_1/\mathsf{Q}_1^{[k]}])y_1\mathsf{Q}_2^{[k]} \ldots \mathsf{Q}_n^{[k]}]$.

Logo, por *(xii)* e *(xiii)* provamos o caso básico dos Itens (1) e (2).

<u>PASSO</u>: $(m > 1)$.

HI: Se N é uma derivação com a forma de M e $\mathsf{N}^{[k]} \equiv \mathsf{N}^{\bullet j}$ com $j < m$, então os Itens (1) e (2) do teorema valem para N.

Como $m > 1$ e $\mathsf{M}^{[k]} \equiv \mathsf{M}^{\bullet m}$, então pela Definição 6.3.6 e Observação 6.3.6.1-(*c*) temos:

(xiv) $g(\mathsf{M}) \geq k$ e $g(\mathsf{M}^{\bullet}) \geq k$;

(xv) $\mathsf{M}^{[k]} \equiv (\mathsf{M}^{\bullet})^{[k]}$ e $\mathsf{M}^{[k]-1} \equiv (\mathsf{M}^{\bullet})^{[k]-1}$.

Dessa forma temos:

(xvi) $(\mathsf{M}^{\bullet})^{[k]} \underset{(\mathrm{xv})}{\equiv} \mathsf{M}^{[k]} \underset{(\mathrm{ii})}{\equiv} \mathsf{M}^{\bullet m} \underset{6.2.11.1(\mathrm{e})}{\equiv} (\mathsf{M}^{\bullet})^{\bullet m-1}$.

Como $\mathsf{M}^{\bullet}$ é obtido de M pela multiplicação-* de $T(\mathsf{M})$, vamos analisar todos os casos possíveis para $T(\mathsf{M})$.

<u>CASO 1</u>: $T(\mathsf{M})$ ocorre em P

Neste caso, pelo Teorema 6.3.2(*a*)(1) temos:

(xvii) $\mathsf{M}^{\bullet} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.\mathsf{P}^{\bullet})\mathsf{Q}_1 \ldots \mathsf{Q}_n]$, onde:

$(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P}^\bullet)\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_n$ é o left-most segmento-α de $\mathsf{M}^\bullet$.

(*xviii*) Note que $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P}^\bullet)\mathsf{Q}_1$ também é um I-redex, pois se x_1 ocorre livre em P, também ocorre em $\mathsf{P}^\bullet$.

Por (*xvi*), (*xvii*) e (*xviii*) vale HI para $\mathsf{M}^\bullet$ e portanto:

(*xix*) $(\mathsf{M}^\bullet)^{[k]-1} \equiv \mathsf{C}^{[k]}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.(\mathsf{P}^\bullet)^{[k]})\mathsf{Q}_1^{[k]} ... \mathsf{Q}_n^{[k]}]$.

(*xx*) $(\mathsf{M}^\bullet)^{[k]} \equiv \mathsf{C}^{[k]}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.(\mathsf{P}^\bullet)^{[k]}[x_1/\, \mathsf{Q}_1^{[k]}])y_1\mathsf{Q}_2^{[k]} ... \mathsf{Q}_n^{[k]}]$.

Mas se $T(\mathsf{M})$ ocorre em P, é claro que $g(\mathsf{P}) = g(\mathsf{M}) \underset{(\mathrm{xiv})}{\geq} k$, e portanto, pela Definição 6.3.6 $\mathsf{P}^{[k]} \equiv \mathsf{P}^{\bullet j}$ tal que $j \geq 1$. Portanto, pela Observação 6.3.6.1-(*c*) temos:

(*xxi*) $(\mathsf{P}^\bullet)^{[k]} \equiv \mathsf{P}^{[k]}$.

Assim, por (*xv*) (*xix*), (*xx*) e (*xxi*) temos:

$\mathsf{M}^{[k]-1} \equiv (\mathsf{M}^\bullet)^{[k]-1} \equiv \mathsf{C}^{[k]}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P}^{[k]})\mathsf{Q}_1^{[k]} ... \mathsf{Q}_n^{[k]}]$.

$\mathsf{M}^{[k]} \equiv (\mathsf{M}^\bullet)^{[k]} \equiv \mathsf{C}^{[k]}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\, \mathsf{P}^{[k]}[x_1/\, \mathsf{Q}_1^{[k]}])y_1\mathsf{Q}_2^{[k]} ... \mathsf{Q}_n^{[k]}]$.

E com isso resolvemos o Caso 1.

<u>CASO 2</u>: $T(\mathsf{M})$ ocorre em $\mathsf{C}[\ ]$

A solução é análoga à do Caso 1, aplicando-se aqui o Teorema 6.3.2(*b*).

<u>CASO 3</u>: $T(\mathsf{M})$ ocorre em Q_i $(1 \leq i \leq n)$

A solução é análoga à do Caso 1, aplicando-se aqui o Teorema 6.3.2(*c*).

<u>CASO 4</u>: $T(\mathsf{M})$ é algum Q_i

Note que como Q_1 é *SM* em M, o único dentre os Q_is de M que pode ser $T(\mathsf{M})$ é Q_1, pois, pelo Lema 6.2.13, $gr(\mathsf{Q}_i) > gr(\mathsf{Q}_j)$ $(1 \leq i < j \leq n)$. Então $T(\mathsf{M}) = \mathsf{Q}_1$.

Como $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_n$ é o left-most segmento-α de M e $\mathsf{Q}_1 = T(\mathsf{M})$, então $ng(\mathsf{M}) = 1$, pois caso contrário existiria algum subtermo R, *SM* em M, com $gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{R}) = gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1)$ e com o λ de R ocorrendo à direita do λ de Q_1. Mas isso seria um absurdo, de acordo com a Observação 6.2.9.1-(*b*), pois Q_1 é $T(\mathsf{M})$.

Dessa forma, como $ng(\mathsf{M}) = 1$ e $T(\mathsf{M}) = \mathsf{Q}_1$, temos que nenhum outro *SM* de M além de Q_1 tem grau maior ou igual a $gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1)$. Logo, pela forma de M temos:

(*xxii*) $g(\mathsf{C}[\ ]) < gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1)$, $g(\mathsf{P}) < gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1)$ e $g(\mathsf{Q}_i) < gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1)$ $(1 \leq i \leq n)$.

Assim, por (*xxiv*), como $gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1) = k$, pela Definição 6.3.6 temos:

(*xxiii*) $\mathsf{C}^{[k]}[\ ] \equiv \mathsf{C}[\ ]$; $\mathsf{P}^{[k]} \equiv \mathsf{P}$ e $\mathsf{Q}_i^{[k]} \equiv \mathsf{Q}_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

Alem disso, como $T(\mathsf{M}) = \mathsf{Q}_1$ temos que:

(*xxiv*) $g(\mathsf{M}) = g(\mathsf{M}^{\bullet 0}) = gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1) = k$.

Como $ng(\mathsf{M})= 1$, por (*xxiv*) e pelo Lema 6.2.15-(6) temos:

(*xxv*) $g(\mathsf{M}^{\bullet}) < g(\mathsf{M}) = k$.

Logo, por (*xxiv*), (*xxv*) e pela Definição 6.3.6 temos:

(*xxvi*) $\mathsf{M}^{[k]} \equiv \mathsf{M}^{\bullet}$, e portanto, $\mathsf{M}^{[k]-1} \equiv \mathsf{M}^{\bullet 0} \equiv \mathsf{M}$.

Mas como $T(\mathsf{M}) = \mathsf{Q}_1$ temos:

(*xxvii*) $\mathsf{M}^{\bullet} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])y_1\mathsf{Q}_2 ... \mathsf{Q}_n]$.

Assim, como $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 ... \mathsf{Q}_n]$, por (*xxiii*), (*xxvi*) e (*xxvii*) temos:

$\mathsf{M}^{[k]-1} \equiv \mathsf{C}^{[k]}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P}^{[k]})\mathsf{Q}_1^{[k]} ... \mathsf{Q}_n^{[k]}]$ e

$\mathsf{M}^{[k]} \equiv \mathsf{C}^{[k]}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P}^{[k]}[x_1/\mathsf{Q}_1^{[k]}])y_1\mathsf{Q}_2^{[k]} ... \mathsf{Q}_n^{[k]}]$.

E com isso resolvemos o Caso 4 e os Itens (1) e (2) do teorema. □

Item (3)

(*i*) Considere $\mathsf{M}_{\Delta}^{[k]} \equiv \mathsf{M}^{\bullet j}$.

Provaremos o Item (3) por indução em j.

<u>BASE</u>: $(j= 0) \Rightarrow \mathsf{M}_{\Delta}^{[k]} \equiv \mathsf{M}_{\Delta}^{\bullet 0} \equiv \mathsf{M}_{\Delta}$

Neste caso, pela Definição 6.3.6 temos:

(*ii*) $g(\mathsf{M}_{\Delta}^{[k]}) < k$.

Logo, por (*ii*), todos os subtermos de $\mathsf{M}_{\Delta}^{[k]}$ têm grau máximo menor que k.

(*iii*) Portanto: $g(\mathsf{C}[\ ]) < k$, $g(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]) < k$ e $g(\mathsf{Q}_i) < k$ $(1 \leq i \leq n)$.

Portanto, pela Definição 6.3.6 e (*iii*) temos:

(*iv*) $\mathsf{C}^{[k]}[\ ] \equiv \mathsf{C}[\ ]$;

$(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])^{[k]} \equiv \mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]$ e

$\mathsf{Q}_i^{[k]} \equiv \mathsf{Q}_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

Assim, por (*iv*), pela hipótese do caso básico ($j= 0$) e pela forma de M_{Δ} temos:

$\mathsf{M}_{\Delta}^{[k]} \equiv \mathsf{M}_{\Delta} \equiv \mathsf{C}^{[k]}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])^{[k]})y_1\mathsf{Q}_2^{[k]} ... \mathsf{Q}_n^{[k]}]$.

<u>PASSO</u>**:** $j > 0$

HI: Se N é uma derivação com a forma de M_{Δ} e $\mathsf{N}^{[k]} \equiv \mathsf{N}^{\bullet i}$, com $i < j$, então o Item (3) do teorema vale para N.

Se $j > 0$, pela Definição 6.3.6 temos que:

(*v*) $g(\mathsf{M}_{\Delta}) \geq k$ e $\mathsf{M}_{\Delta}^{[k]} \equiv \mathsf{M}_{\Delta}^{\bullet i}$ tal que $i > 0$.

Logo, por (*v*) e pela Observação 6.3.6.1-(*c*) temos:

(vi) $\mathsf{M}_\Delta^{[k]} \equiv (\mathsf{M}_\Delta^\bullet)^{[k]}$.

Dessa forma temos:

(vii) $(\mathsf{M}_\Delta^\bullet)^{[k]} \underset{(vi)}{\equiv} \mathsf{M}_\Delta^{[k]} \underset{(i)}{\equiv} \mathsf{M}_\Delta^{\bullet j} \underset{6.2.11.1(e)}{\equiv} (\mathsf{M}_\Delta^\bullet)^{\bullet j-1}$.

Como $\mathsf{M}_\Delta^\bullet$ é obtido de M_Δ pela multiplicação-* de $T(\mathsf{M}_\Delta)$, vamos analisar todos os casos possíveis para $T(\mathsf{M}_\Delta)$.

<u>CASO 1</u>: $T(\mathsf{M}_\Delta)$ ocorre em $\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]$

Neste caso, pelo Teorema 6.3.2(a)(1) temos:

($viii$) $\mathsf{M}_\Delta^\bullet \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])^\bullet)y_1\mathsf{Q}_2\ldots\mathsf{Q}_n]$, onde:

$(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])^\bullet)y_1\mathsf{Q}_2\ldots\mathsf{Q}_n$ é o left-most segmento-α de $\mathsf{M}_\Delta^\bullet$.

Por (vii) e ($viii$) temos que vale HI para $\mathsf{M}_\Delta^\bullet$. Logo:

(ix) $(\mathsf{M}_\Delta^\bullet)^{[k]} \equiv \mathsf{C}^{[k]}[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.((\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])^\bullet)^{[k]})y_1\mathsf{Q}_2^{[k]}\ldots\mathsf{Q}_n^{[k]}]$.

Mas se $T(\mathsf{M}_\Delta)$ ocorre em $\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]$, é claro que $g(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]) = g(\mathsf{M}_\Delta) \underset{(v)}{\geq} k$.

(x) Logo, pela Observação 6.3.6.1-(c), $((\mathsf{P}[x/\mathsf{Q}_1])^\bullet)^{[k]} \equiv (\mathsf{P}[x/\mathsf{Q}_1])^{[k]}$.

Assim, por (vi), (ix) e (x) temos:

$\mathsf{M}_\Delta^{[k]} \equiv \mathsf{C}^{[k]}[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.(\mathsf{P}[x/\mathsf{Q}_1])^{[k]})y_1\mathsf{Q}_2^{[k]}\ldots\mathsf{Q}_n^{[k]}]$.

E com isso resolvemos o Caso 1.

<u>CASO 2</u>: $T(\mathsf{M}_\Delta)$ ocorre em $\mathsf{C}[\ ]$

A solução é análoga à do Caso 1, aplicando-se aqui o Teorema 6.3.2(b).

<u>CASO 3</u>: $T(\mathsf{M}_\Delta)$ ocorre em Q_i $(1< i \leq n)$

A solução é análoga à do Caso 1, aplicando-se aqui o Teorema 6.3.2(c).

Note que o caso em que $T(\mathsf{M}_\Delta) \subset \mathsf{Q}_1$ já foi tratado no Caso 1 ($T(\mathsf{M}_\Delta) \subset \mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]$).

<u>CASO 4</u>: $T(\mathsf{M}_\Delta)$ é algum Q_i $(2 \leq i \leq n)$

Pela forma de M_Δ e pelo Lema 6.2.13 temos:

(xi) $gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_j) > gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_{j+1})$ $(1 \leq j < n)$.

Como M_Δ foi obtido de M pela multiplicação-* de Q_1, pelo Lema 6.2.15-(1) temos:

(xii) $gr_{\mathsf{M}_\Delta}(\mathsf{Q}_i) = gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_i)$ $(2 \leq i \leq n)$.

($xiii$) Logo, por (xi) e (xii) temos: $k = gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1) > gr_{\mathsf{M}_\Delta}(\mathsf{Q}_i)$ $(2 \leq i \leq n)$.

Assim, como por hipótese do caso $T(\mathsf{M}_\Delta)$ é algum Q_i $(2 \leq i \leq n)$, por ($xiii$) temos:

(xiv) $g(\mathsf{M}_\Delta) = gr_{\mathsf{M}_\Delta}(\mathsf{Q}_i) \underset{(xiii)}{<} k$ (para algum $2 \leq i \leq n$).

Logo, por (xiv) e pela Definição 6.3.6 temos que $\mathsf{M}_\Delta^{[k]} \equiv \mathsf{M}_\Delta^{\bullet 0} \equiv \mathsf{M}_\Delta$, e portanto o Caso 4 se resolve exatamente como o caso básico. □

Item (4)

Seja $\mathsf{S} = T(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])$. Pelo Lema 6.2.14 existe $\mathsf{R} \subset \mathsf{P}$ / S é resíduo-* de R.

Temos duas possibilidades para R: ou R é *SM* em M, ou R não é *SM* em M.

Se R não é *SM* em M, pelo Lema 6.2.15-(2) temos:

$$gr_{\mathsf{M}_\Delta}(\mathsf{S}) = gr_{\mathsf{P}[x1/Q1]}(\mathsf{S}) = g(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]) < gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1).$$

O que é um absurdo, pois por hipótese do caso $g(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]) \geq gr_{\mathsf{M}}(\mathsf{Q}_1)$.

(*i*) Portanto, R é *SM* em M.

Mas pela Definição 6.2.12 de resíduo-*, se algum resíduo-* de R ocorre em $\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]$, então todas as possibilidades para R com relação a P são:

(*ii*) $\mathsf{R} \subset \mathsf{P}$, $\mathsf{R} \equiv \mathsf{Q}_1$ ou $\mathsf{R} \subset \mathsf{Q}_1$.

Analisemos cada caso:

<u>CASO 1</u>: $\mathsf{R} \subset \mathsf{P}$

Como, por (*i*), R é *SM* em M, temos que:

(*iii*) $\mathsf{P} \equiv \mathsf{C}_1[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.\mathsf{N})\mathsf{B}_1 \ldots \mathsf{B}_{s-1}\mathsf{R}\mathsf{B}_{s+1} \ldots \mathsf{B}_t]$ e

$$\begin{aligned}\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1] &\equiv \mathsf{C}_1[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.\mathsf{N})\mathsf{B}_1 \ldots \mathsf{B}_{s-1}\mathsf{R}\mathsf{B}_{s+1} \ldots \mathsf{B}_t][x_1/\mathsf{Q}_1] \\ &\equiv \mathsf{C}_1^{\square}[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.\mathsf{N}^{\square})\mathsf{B}_1^{\square} \ldots \mathsf{B}_{s-1}^{\square}\mathsf{R}[x_1/\mathsf{Q}_1]\mathsf{B}_{s+1}^{\square} \ldots \mathsf{B}_t^{\square}], \text{ onde: } \mathsf{X}^{\square} \equiv \mathsf{X}[x_1/\mathsf{Q}_1].\end{aligned}$$

(*iv*) Note, por (*iii*) e pela Definição 6.2.12 que $\mathsf{S} \equiv (\mathsf{R})_1 \equiv \mathsf{R}[x_1/\mathsf{Q}_1]$.

Portanto, por (*iii*), (*iv*) e pela Definição 6.3.7, $\mathsf{S} = T(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])$ é *SPL* em $\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]$.

<u>CASO 2</u>: $\mathsf{R} \equiv \mathsf{Q}_1$

Se $\mathsf{R} \equiv \mathsf{Q}_1$ e $\mathsf{S} = T(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])$ é resíduo-* de R ($\mathsf{S} \equiv (\mathsf{Q}_1)_k$), então, para alguma ocorrência livre de x_1 em P temos:

(*v*) $\mathsf{P} \equiv \mathsf{C}_1[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.\mathsf{N})\mathsf{B}_1 \ldots \mathsf{B}_{s-1}\ x_1\ \mathsf{B}_{s+1} \ldots \mathsf{B}_t]$.

$$\begin{aligned}\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1] &\equiv \mathsf{C}_1[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.\mathsf{N})\mathsf{B}_1 \ldots \mathsf{B}_{s-1}\ x_1\ \mathsf{B}_{s+1} \ldots \mathsf{B}_t][x_1/\mathsf{Q}_1] \\ &\equiv \mathsf{C}_1^{\square}[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.\mathsf{N}^{\square})\mathsf{B}_1^{\square} \ldots \mathsf{B}_{s-1}^{\square}\ x_1[x_1/\mathsf{Q}_1]\ \mathsf{B}_{s+1}^{\square} \ldots \mathsf{B}_t^{\square}] \\ &\equiv \mathsf{C}_1^{\square}[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.\mathsf{N}^{\square})\mathsf{B}_1^{\square} \ldots \mathsf{B}_{s-1}^{\square}\ \mathsf{Q}_1\ \mathsf{B}_{s+1}^{\square} \ldots \mathsf{B}_t^{\square}] \\ &\equiv \mathsf{C}_1^{\square}[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.\mathsf{N}^{\square})\mathsf{B}_1^{\square} \ldots \mathsf{B}_{s-1}^{\square}\ (\mathsf{Q}_1)_k\ \mathsf{B}_{s+1}^{\square} \ldots \mathsf{B}_t^{\square}],\end{aligned}$$

onde: $\mathsf{X}^{\square} \equiv \mathsf{X}[x_1/\mathsf{Q}_1]$.

Note, por (*v*) e pela Definição 6.3.7, que $T(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]) = \mathsf{S} \equiv (\mathsf{Q}_1)_k \equiv x_1[x_1/\mathsf{Q}_1]$ é *SPL* em $\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]$.

<u>CASO 3</u>: $R \subset Q_1$

Neste caso, é trivial pela Definição 6.2.12 de resíduo-* que, se S é resísuo-* de R, então $S = T(P[x_1/Q_1])$ ocorre em alguma cópia de Q_1, ou seja, $T(P[x_1/Q_1]) \subset Q_1$. $\square$

Item (5)

Seja $R = T(P)$. Temos que P tem a forma:

(i) $P \equiv C_1[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.N)B_1 \ldots B_{s-1} R B_{s+1} \ldots B_t]$.

É claro, por (i) que:

$$(ii)\ P[x_1/Q_1] \equiv C_1[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.N)B_1 \ldots B_{s-1} R B_{s+1} \ldots B_t][x_1/Q_1]$$
$$\equiv C_1'[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.N')B_1' \ldots B_{s-1}' R[x_1/Q_1] B_{s+1}' \ldots B_t'],$$

onde: $X' \equiv X[x_1/Q_1]$.

Como $R = T(P)$ é *SM* em P, então y_s ocorre livre em N, e também em N', logo, por (ii) temos:

(iii) $R[x_1/Q_1]$ é *SM* em $P[x_1/Q_1]$.

Como $l_\tau(\lambda y_s \ldots \lambda y_t.N) = l_\tau(\lambda y_s \ldots \lambda y_t.N')$, então, $g(P) = gr_P(R) = gr_{P[x1/Q1]}(R[x_1/Q_1])$, portanto, por (iii), existe um *SM* em $P[x_1/Q_1]$ com grau igual a $g(P)$.

Logo, $g(P) \leq g(P[x_1/Q_1])$. $\square$

Itens (6) e (7)

Se $T(P[x_1/Q_1])$ é *SPL* em $P[x_1/Q_1]$, então, pela Definição 6.3.7 temos:

(i) $P \equiv C_1[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.N)S_1 \ldots S_{s-1} R S_{s+1} \ldots S_t]$.

$$(ii)\ P[x_1/Q_1] \equiv C_1[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.N)S_1 \ldots S_{s-1} R S_{s+1} \ldots S_t][x_1/Q_1]$$
$$\equiv C_1'[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.N')S_1' \ldots S_{s-1}' R[x_1/Q_1] S_{s+1}' \ldots S_t'],$$

onde $X' \equiv X[x_1/Q_1]$ e $R[x_1/Q_1] = T(P[x_1/Q_1])$.

Note, por (i) e (ii), que se $R[x_1/Q_1]$ é *SM* em $P[x_1/Q_1]$, então R é *SM* em P.[56]

Além disso, também por (i) e (ii) é claro que:

(iii) $g(P) \geq gr_P(R) = gr_{P[x1/Q1]}(R[x_1/Q_1]) = g(P[x_1/Q_1])$.

Como, pelo Item (5), $g(P) \leq g(P[x_1/Q_1])$, então, por (iii) temos:

(iv) $g(P) = gr_P(R) = g(P[x_1/Q_1])$ (o que prova o Item (6)).

---

[56] A convenção de variáveis proíbe que exista y_s livre em Q_1, portanto, se $R[x_1/Q_1]$ é *SM* em $P[x_1/Q_1]$ é porque y_s ocorre livre em N, e portanto, R é *SM* em P.

Para provar o Item (7) vamos inicialmente provar que $R = T(P)$.

Suponha que R não é $T(P)$. Então, por (*iv*) e pela Definição 6.2.9, existe $S \subset P$ tal que o λ de S ocorre à esquerda do λ de R em P e $gr_P(S) = gr_P(R)$.

(*v*) Mas pela Definição 6.3.7, tal S define um $S[x_1/Q_1]$ que é *SPL* em $P[x_1/Q_1]$, cujo λ ocorre à esquerda do λ de $R[x_1/Q_1]$ e $gr_{P[x1/Q1]}(S[x_1/Q_1]) = gr_P(S)$.

Neste caso, por (*v*) e pela Definição 6.2.9, $R[x_1/Q_1]$ não poderia ser $T(P[x_1/Q_1])$, o que por (*ii*) é um absurdo. Portanto $R = T(P)$ e:

(*vi*) $P^\bullet \equiv C_1[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.N[y_s/R])S_1 \ldots S_{s-1}\ y_s\ S_{s+1} \ldots S_t]$.

Logo, por (*ii*) e (*vi*) temos:

$$\begin{aligned}(P[x_1/Q_1])^\bullet &\underset{(ii)}{\equiv} C_1^{\square}[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.N[x_1/Q_1][y_s/R[x_1/Q_1]])S_1^{\square} \ldots S_{s-1}^{\square}\ y_s\ S_{s+1}^{\square} \ldots S_t^{\square}]\\ &\underset{(4.2.4)}{\equiv} C_1^{\square}[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.N[y_s/R][x_1/Q_1])S_1^{\square} \ldots S_{s-1}^{\square}\ y_s\ S_{s+1}^{\square} \ldots S_t^{\square}]\\ &\equiv C_1[(\lambda y_1 \ldots \lambda y_t.N[y_s/R])S_1 \ldots S_{s-1}\ y_s\ S_{s+1} \ldots S_t][x_1/Q_1]\\ &\underset{(vi)}{\equiv} P^\bullet[x_1/Q_1]. \ \square\end{aligned}$$

Item (8)

Imediato pela definição de P_d. □

Item (9)

Assumindo a convenção de variáveis, esta prova também é imediata.

Em $P \overset{*}{\twoheadrightarrow}_o P^{[k]}$ e $P_d \overset{*}{\twoheadrightarrow}_o P_d^{[k]}$, nenhuma variável livre de P (P_d) foi eliminada ou tornou-se ligada. Como a única diferença entre P e P_d são nomes de variáveis livres, então a única diferença entre $P^{[k]}$ e $P_d^{[k]}$ são os nomes dos resíduos destas mesmas variáveis, que continuam sendo variáveis livres. Substituindo todas elas pelos mesmos termos obtemos termos idênticos. □

Item (10)

Considere $R \equiv P[x_1/Q_1] \subset M_\Delta$ e seja $R^{[k]} \equiv R^{\bullet j}$.

Provaremos o item por indução em *j*.

<u>BASE</u>: $j = 0$

Neste caso, pela Definição 6.3.6 temos:

(*i*) $(P[x_1/Q_1])^{[k]} \equiv (P[x_1/Q_1])^{\bullet 0} \equiv P[x_1/Q_1]$ e

$(ii)\ g(\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1]) < k$.

Como Q_1 é subtermo de $\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1]$, por (ii): $g(\mathsf{Q}_1) \leq g(\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1]) < k$. Logo, pela Definição 6.3.6 também temos:

$(iii)\ \mathsf{Q}_1^{[k]} \equiv \mathsf{Q}_1^{\bullet 0} \equiv \mathsf{Q}_1$.

Mas por (ii) e pelo Item (5) temos $g(\mathsf{P}) \leq g(\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1]) < k$. Logo:

$(iv)\ \mathsf{P}^{[k]} \equiv \mathsf{P}^{\bullet 0} \equiv \mathsf{P}$.

Assim, por (i), (iii) e (iv) temos:

$(\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1])^{[k]} \equiv \mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1] \equiv \mathsf{P}^{[k]}[x_1/\,\mathsf{Q}_1^{[k]}]$.

PASSO: $j > 0$

HI: Se S tem a forma: $\mathsf{S} \equiv \mathsf{N}[y/\,\mathsf{B}]$ tal que $\mathsf{S}^{[k]} \equiv \mathsf{S}^{\bullet q}$ e $q < j$, então vale o Item (10) para S.

Como $j > 0$, pela Definição 6.3.6 temos que:

$(v)\ g(\mathsf{R}) = g(\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1]) \geq k$.

Logo, por (v) e pela Observação 6.3.6.1-(c) temos:

$(vi)\ (\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1])^{[k]} \equiv ((\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1])^{\bullet})^{[k]}$.

Dessa forma temos:

$(vii)\ ((\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1])^{\bullet})^{[k]} \underset{(vi)}{\equiv} (\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1])^{[k]} \underset{hip}{\equiv} (\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1])^{\bullet j} \underset{6.2.11.1(e)}{\equiv} ((\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1])^{\bullet})^{\bullet j-1}$.

Por (v) e pelo Item (4) deste teorema, $T(\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1])$ é *SPL* em $\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1]$ ou está contido em alguma ocorrência de Q_1. Analisemos cada um destes casos.

<u>CASO 1</u>: $T(\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1])$ é *SPL* em $\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1]$

Neste caso, pelo Item (7) temos:

$(viii)\ \mathsf{R}^{\bullet} \equiv (\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1])^{\bullet} \equiv \mathsf{P}^{\bullet}[x_1/\,\mathsf{Q}_1]$.

Por (vii) e $(viii)$ vale HI em $\mathsf{R}^{\bullet}$. Portanto:

$(ix)\ ((\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1])^{\bullet})^{[k]} \underset{(viii)}{\equiv} (\mathsf{P}^{\bullet}[x_1/\,\mathsf{Q}_1])^{[k]} \underset{(HI)}{\equiv} (\mathsf{P}^{\bullet})^{[k]}[x_1/\,\mathsf{Q}_1^{[k]}]$.

Pela hipótese do caso, pelo Item (6) e por (v) temos $g(\mathsf{P}) = g(\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1]) \geq k$.

Logo, pela Definição 6.3.6 e Observação 6.3.6.1-(c):

$(x)\ (\mathsf{P}^{\bullet})^{[k]} \equiv \mathsf{P}^{[k]}$.

Portanto, por (vi), (ix) e (x), temos:

$(\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1])^{[k]} \underset{(vi)}{\equiv} ((\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1])^{\bullet})^{[k]} \underset{(ix)}{\equiv} (\mathsf{P}^{\bullet})^{[k]}[x_1/\,\mathsf{Q}_1^{[k]}] \underset{(x)}{\equiv} \mathsf{P}^{[k]}[x_1/\,\mathsf{Q}_1^{[k]}]$.

<u>CASO 2</u>: $T(\mathsf{P}[x_1/\,\mathsf{Q}_1]) \subset \mathsf{Q}_1$

Pelo Item (8):

(xi) $\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1] \equiv \mathsf{P}_d[y_1/\mathsf{Q}_1]\ldots[y_s/\mathsf{Q}_1]$.

(xii) É claro, pela hipótese do caso e pela Definição 6.2.9 de subtermo estrela, que $T(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])$ está na ocorrência de Q_1 mais à direita em $\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]$.

Assim, por (xi) e (xii) temos:

$$(xiii)\ \mathsf{R}^\bullet \equiv (\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])^\bullet \equiv (\mathsf{P}_d[y_1/\mathsf{Q}_1]\ldots[y_{s-1}/\mathsf{Q}_1])[y_s/\mathsf{Q}_1^\bullet].$$

Por (vii) e ($xiii$) vale HI em $\mathsf{R}^\bullet$. Portanto:

$$(xiv)\ ((\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])^\bullet)^{[k]} \underset{(\mathrm{xiii})}{\equiv} ((\mathsf{P}_d[y_1/\mathsf{Q}_1]\ldots[y_{s-1}/\mathsf{Q}_1])[y_s/\mathsf{Q}_1^\bullet])^{[k]}$$
$$\underset{(\mathrm{HI})}{\equiv} (\mathsf{P}_d[y_1/\mathsf{Q}_1]\ldots[y_{s-1}/\mathsf{Q}_1])^{[k]}[y_s/(\mathsf{Q}_1^\bullet)^{[k]}]).$$

Como, por hipótese do caso, $T(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]) \subset \mathsf{Q}_1$, $g(\mathsf{Q}_1)= g(\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]) \underset{(\mathrm{v})}{\geq} k$ e portanto, pela Observação 6.3.6.1-(3) temos:

$$(xv)\ (\mathsf{Q}_1^\bullet)^{[k]} \equiv \mathsf{Q}_1^{[k]}.$$

Logo, por (vi), (xiv) e (xv) temos:

$$(xvi)\ (\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])^{[k]} \underset{(\mathrm{vi})}{\equiv} ((\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])^\bullet)^{[k]}$$
$$\underset{(\mathrm{xiv})}{\equiv} (\mathsf{P}_d[y_1/\mathsf{Q}_1]\ldots[y_{s-1}/\mathsf{Q}_1])^{[k]}[y_s/(\mathsf{Q}_1^\bullet)^{[k]}])$$
$$\underset{(\mathrm{xv})}{\equiv} (\mathsf{P}_d[y_1/\mathsf{Q}_1]\ldots[y_{s-1}/\mathsf{Q}_1])^{[k]}[y_s/\mathsf{Q}_1^{[k]}].$$

Assumindo $((\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])^\bullet)^{[k]} \equiv ((\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])^\bullet)^{\bullet p}$,

$(\mathsf{P}_d[y_1/\mathsf{Q}_1]\ldots[y_{s-1}/\mathsf{Q}_1])^{[k]} \equiv (\mathsf{P}_d[y_1/\mathsf{Q}_1]\ldots[y_{s-1}/\mathsf{Q}_1])^{\bullet q}$ e

$(\mathsf{Q}_1^\bullet)^{[k]} \equiv (\mathsf{Q}_1^\bullet)^{\bullet r}$, então por ($xvi$) temos que:

$$(xvii)\ (\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])^{\bullet p+1} \equiv (\mathsf{P}_d[y_1/\mathsf{Q}_1]\ldots[y_s/\mathsf{Q}_1])^{\bullet p+1} \equiv (\mathsf{P}_d[y_1/\mathsf{Q}_1]\ldots[y_{s-1}/\mathsf{Q}_1])^{\bullet q}[y_s/\mathsf{Q}_1^{\bullet r+1}].$$

Por ($xvii$) é claro que $q< p+1$, pois o que ($xvii$) diz é que para efetuar todos os p+ 1 passos da seqüência estrela limite aplicada a $\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1]$ é necessário efetuar q passos da seqüência para $(\mathsf{P}_d[y_1/\mathsf{Q}_1]\ldots[y_{s-1}/\mathsf{Q}_1])$ além dos $r+1$ passos da seqüência de Q_1. Como $r+1 \geq 1$, é claro que $p+1> q$, e portanto vale HI para $(\mathsf{P}_d[y_1/\mathsf{Q}_1]\ldots[y_{s-1}/\mathsf{Q}_1])$ e temos:

$$(\mathsf{P}_d[y_1/\mathsf{Q}_1]\ldots[y_{s-1}/\mathsf{Q}_1])^{[k]} \equiv (\mathsf{P}_d[y_1/\mathsf{Q}_1]\ldots[y_{s-2}/\mathsf{Q}_1])^{[k]}[y_{s-1}/\mathsf{Q}_1^{[k]}].$$

Assim, através de s-1 aplicações de HI temos:

$$(xviii)\ (\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])^{[k]} \equiv (\mathsf{P}_d[y_1/\mathsf{Q}_1]\ldots[y_{s-1}/\mathsf{Q}_1])^{[k]}[y_s/\mathsf{Q}_1^{[k]}])$$
$$\equiv (\mathsf{P}_d[y_1/\mathsf{Q}_1]\ldots[y_{s-2}/\mathsf{Q}_1])^{[k]}[y_{s-1}/\mathsf{Q}_1^{[k]}][y_s/\mathsf{Q}_1^{[k]}])$$
$$\vdots$$
$$\equiv \mathsf{P}_d^{[k]}[y_1/\mathsf{Q}_1^{[k]}]\ldots[y_{s-1}/\mathsf{Q}_1^{[k]}][y_s/\mathsf{Q}_1^{[k]}].$$

Por outro lado, por (xi) e pelo Item (9) temos:

(xix) $P^{[k]}[x_1/Q_1^{[k]}] \equiv P_d^{[k]}[y_1/Q_1^{[k]}]\ldots[y_{s-1}/Q_1^{[k]}][y_s/Q_1^{[k]}]$.

Portanto, por $(xviii)$ e (xix) temos: $(P[x_1/Q_1])^{[k]} \equiv P^{[k]}[x_1/Q_1^{[k]}]$. □

Item (11)

(*i*) Pelo Item (2) temos: $M^{[k]} \equiv C^{[k]}[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.P^{[k]}[x_1/Q_1^{[k]}])y_1 Q_2^{[k]}\ldots Q_n^{[k]}]$.

(*ii*) Pelo Item (3) temos: $M_\Delta^{[k]} \equiv C^{[k]}[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.(P[x_1/Q_1])^{[k]})y_1 Q_2^{[k]}\ldots Q_n^{[k]}]$.

(*iii*) Pelo Item (10) temos: $P^{[k]}[x_1/Q_1^{[k]}] \equiv (P[x_1/Q_1])^{[k]}$.

Logo, por (*i*), (*ii*) e (*iii*) temos: $M^{[k]} \equiv M_\Delta^{[k]}$. □

Item (12)

Pelo Item (11) temos que $M^{[k]} \equiv M_\Delta^{[k]}$. Logo, pela unicidade da seqüência estrela:

(*i*) $(M^{[k]})^* \equiv (M_\Delta^{[k]})^*$.

Mas, como $M^{[k]}$ pertence à seqüência estrela de M e $M_\Delta^{[k]}$ pertence à seqüência estrela de M_Δ, então pela unicidade da seqüência estrela temos:

(*ii*) $M^* \equiv (M^{[k]})^*$ e $M_\Delta^* \equiv (M_\Delta^{[k]})^*$.

Portanto: $M^* \underset{(ii)}{\equiv} (M^{[k]})^* \underset{(i)}{\equiv} (M_\Delta^{[k]})^* \underset{(ii)}{\equiv} M_\Delta^*$. ♦

No teorema seguinte provamos que existe uma seqüência de redução específica para a qual $o(M)$ diminui com as reduções: a seqüência obtida da estratégia perpétua. Obteremos como corolário deste teorema que $o(M)= L_{F_\infty}(M)$.

6.3.9 TEOREMA:

$M \to M^\circ \;\Rightarrow\; o(M)= o(M^\circ)+ 1$.

<u>PROVA</u>:

De acordo com a Observação 4.4.5.1, estamos considerando $M^\circ= F_\infty(M)$.

Provaremos por indução em $p(M^*)$, onde M^* é o último termo da seqüência estrela para M.

<u>BASE</u>: $p(M^*)= 0$

Neste caso M é normal, logo M° não está definido e portanto o resultado é válido por vacuidade.

<u>PASSO</u>: $p(M^*)\succ 0$

H.I.: $p(\mathsf{N}^*) < p(\mathsf{M}^*) \;\Rightarrow\; o(\mathsf{N}) = o(\mathsf{N}^\circ) + 1$.

(*i*) Seja $\mathsf{M} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 \ldots \mathsf{Q}_n]$, onde:

$(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1 \ldots \mathsf{Q}_n$ é o left-most segmento-α de M.

Temos dois casos possíveis conforme $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1$ seja um K-redex ou um I-redex. Analisemos cada um deles:

<u>CASO 1</u>: $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1$ é um K-redex

Neste caso, por (*i*) temos:

(*ii*) $\mathsf{M}^{\square} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_2 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_2 \ldots \mathsf{Q}_n]$.

Neste caso, pelo Teorema 6.3.5 temos:

(*iii*) $\mathsf{M}^* \equiv \mathsf{C}^*[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{R})\mathsf{Q}_1^*\mathsf{S}_2 \ldots \mathsf{S}_n]$, onde

$(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{R})\mathsf{Q}_1^*\mathsf{S}_2 \ldots \mathsf{S}_n$ é o left-most segmento-α de M.

(*iv*) $\mathsf{M}^{\square *} \equiv \mathsf{M}^{*\square} \equiv \mathsf{C}^*[(\lambda x_2 .. \lambda x_n.\mathsf{R})\mathsf{S}_2 \ldots \mathsf{S}_n]$.

(*v*) $p(\mathsf{M}^*) = p(\mathsf{M}^{\square *}) + p(\mathsf{Q}_1^*) + 1$.

Por (*i*) e pela Definição de F_∞ temos duas possibilidades possíveis para M°, dependendo se Q_1 é ou não termo normal. Analisemos cada caso:

<u>SubCaso 1.1</u>: Q_1 é termo normal

Neste caso, por (*i*) e pela Definição 4.4.5 da estratégia perpétua, temos:

(*vi*) $\mathsf{M}^\circ \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_2 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_2 \ldots \mathsf{Q}_n]$.

(*vii*) Note por (*ii*) e (*vi*) que $\mathsf{M}^\circ \equiv \mathsf{M}^{\square}$.

Além disso, como Q_1 é normal, $p(\mathsf{Q}_1) = 0$ e $\mathsf{Q}_1 \equiv \mathsf{Q}_1^*$. Logo:

(*viii*) $p(\mathsf{Q}_1^*) = 0$.

Portanto, por (*v*), (*vii*) e (*viii*) temos:

$$p(\mathsf{M}^*) = p(\mathsf{M}^{\circ *}) + 1 \underset{(6.2.20)}{\Rightarrow} o(\mathsf{M}) = o(\mathsf{M}^\circ) + 1.$$

<u>SubCaso 1.2</u>: Q_1 não é termo normal

Neste caso, por (*i*) e pela Definição 4.4.5 da estratégia perpétua, temos:

(*ix*) $\mathsf{M}^\circ \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1^\circ\mathsf{Q}_2 \ldots \mathsf{Q}_n]$, onde

$(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1^\circ\mathsf{Q}_2 \ldots \mathsf{Q}_n$ é o left-most segmento-α de M°.

(*x*) Por (*ix*) e pelo Lema 6.3.5-(*c*): $p(\mathsf{M}^{\circ *}) = p(\mathsf{M}^{\circ\square *}) + p(\mathsf{Q}_1^{\circ *}) + 1$.

Como $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1$ é K-redex, então $(\lambda x_1 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1^\circ$ também o é. Logo, por (*ix*):

(*xi*) $\mathsf{M}^{\circ\square} \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_2 .. \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_2 \ldots \mathsf{Q}_n]$.

(*xii*) Note, por (*ii*) e (*xi*) que $\mathsf{M}^{\square} \equiv \mathsf{M}^{\circ\square}$.

Por (v) temos que $p(\mathsf{Q}_1^*) < p(\mathsf{M}^*)$, portanto vale HI para Q_1. Logo:

($xiii$) $o(\mathsf{Q}_1) = o(\mathsf{Q}_1^\circ) + 1$ e $p(\mathsf{Q}_1^*) = p(\mathsf{Q}_1^{\circ *}) + 1$.

(xiv) Por (x) e (xii): $p(\mathsf{M}^{\circ *}) = p(\mathsf{M}^{\square *}) + p(\mathsf{Q}_1^{\circ *}) + 1$.

Logo, por (v), ($xiii$) e (xiv) temos:

$$p(\mathsf{M}^*) = p(\mathsf{M}^{\circ *}) + 1 \underset{(6.2.20)}{\Rightarrow} o(\mathsf{M}) = o(\mathsf{M}^\circ) + 1.$$

<u>CASO 2</u>: $(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.\mathsf{P})\mathsf{Q}_1$ é um I-redex

Neste caso, por (i) e pela Definição da estratégia perpétua, temos:

(xv) $\mathsf{M}^\circ \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])\mathsf{Q}_2 \ldots \mathsf{Q}_n]$.

Seja M_Δ obtida de M pela multiplicação-* de Q_1. Então:

(xvi) $\mathsf{M}_\Delta \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])y_1\mathsf{Q}_2 \ldots \mathsf{Q}_n]$, onde

$(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])y_1\mathsf{Q}_2 \ldots \mathsf{Q}_n$ é o left-most segmento-α de M_Δ.

Por (i), (xvi) e pelo Teorema 6.3.8-(12) temos:

($xvii$) $\mathsf{M}^* \equiv \mathsf{M}_\Delta^*$.

Note, por (xvi), que como y_1 é variável nova, então $(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])y_1$ é K-redex. Além disso, como y_1 é normal, então, M_Δ satisfaz as condições do Subcaso 1.1 acima. Portanto temos:

($xviii$) $p(\mathsf{M}_\Delta^*) = p(\mathsf{M}_\Delta^{\circ *}) + 1$.

Além disso, como $(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])y_1$ é K-redex e y_1 é normal, pela Definição 4.4.5 temos:

(xix) $\mathsf{M}_\Delta^\circ \equiv \mathsf{C}[(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.\mathsf{P}[x_1/\mathsf{Q}_1])\mathsf{Q}_2 \ldots \mathsf{Q}_n] \underset{(xv)}{\equiv} \mathsf{M}^\circ$.

Assim, por ($xvii$), ($xviii$) e (xix) temos:

$$p(\mathsf{M}^*) = p(\mathsf{M}^{\circ *}) + 1 \underset{(6.2.20)}{\Rightarrow} o(\mathsf{M}) = o(\mathsf{M}^\circ) + 1. \blacklozenge$$

Finalmente obteremos agora a finitude da estratégia perpétua, igualando-a a $o(\mathsf{M})$.

6.3.10 TEOREMA:

A pior estratégia de redução aplicada a um $\lambda^{\supset}$-termo M gera uma seqüência de redução finita cujo comprimento é idêntico a $o(\mathsf{M})$ - $L_{\mathbf{F}_\infty}(\mathsf{M}) = o(\mathsf{M}) < \omega$.

<u>PROVA</u>:

Indução em $o(\mathsf{M})$.

BASE: $o(\mathsf{M})= 1$

$o(\mathsf{M})= 1 \;\Rightarrow\; p(\mathsf{M}^*)= 0 \;\Rightarrow\;$ M é normal $\Rightarrow L_{F_\infty}(\mathsf{M})= 1$.

Portanto, $o(\mathsf{M})= L_{F_\infty}(\mathsf{M})$.

PASSO:

HI: $o(\mathsf{N})< o(\mathsf{M}) \;\Rightarrow\; o(\mathsf{N})= L_{F_\infty}(\mathsf{N})$.

Pelo Teorema 6.3.9 temos:

(*i*) $o(\mathsf{M})= o(\mathsf{M}^\circ)+ 1$.

Por (*i*) vale HI em M°, e portanto:

(*ii*) $o(\mathsf{M}^\circ)= L_{F_\infty}(\mathsf{M}^\circ)$.

Logo, como pelo Teorema 6.2.20 $o(\mathsf{M}^\circ)< \omega$, temos, por (*ii*), que $L_{F_\infty}(\mathsf{M}^\circ)< \omega$ e, portanto, como definimos $F_\infty(\mathsf{M})= \mathsf{M}^\circ$, é claro que:

(*iii*) $L_{F_\infty}(\mathsf{M})= L_{F_\infty}(\mathsf{M}^\circ)+ 1$.

(*iv*) Assim, por (*i*), (*ii*) e (*iii*) temos: $L_{F_\infty}(\mathsf{M})= o(\mathsf{M}) \underset{6.2.20}{<} \omega$. ♦

Como conseqüência do resultado anterior e do Teorema 6.2.20, onde provamos que $o(\mathsf{M})< \omega$ para todo $\lambda^{\supset}$-termo M, obtemos o resultado abaixo, que estabelece que $o(\mathsf{M})$ é ordinal natural em $\lambda^{\supset}$.

6.3.11 TEOREMA: Ordinal Natural

Para todo $\lambda^{\supset}$-termo M temos:

(*a*) $o(\mathsf{M})< \omega$;

(*b*) $\mathsf{M} \to \mathsf{M}' \;\Rightarrow\; o(\mathsf{M})> o(\mathsf{M}')$.

PROVA:

(*i*) No Teorema 6.2.20 provamos que $\forall \mathsf{M},\ o(\mathsf{M})< \omega$.

(*ii*) No Teorema 6.3.10 acima provamos que $o(\mathsf{M})= L_{F_\infty}(\mathsf{M})$.

No Teorema 6.1.2 provamos que:

(*iii*) $L_{F_\infty}(\mathsf{M})< \omega \;\Rightarrow\; (\mathsf{M} \to \mathsf{M}' \Rightarrow L_{F_\infty}(\mathsf{M})> L_{F_\infty}(\mathsf{M}'))$.

Logo, por (*i*), (*ii*) e (*iii*) temos:

$\forall \mathsf{M}[\, o(\mathsf{M})< \omega$ e $(\mathsf{M} \to \mathsf{M}' \;\Rightarrow\; o(\mathsf{M})> o(\mathsf{M}'))]$. ♦

Como conseqüência direta do fato de $\lambda^{\supset}$ possuir um ordinal natural, obtemos de maneira simples, no teorema abaixo, a normalização forte para $\lambda^{\supset}$.

6.3.12 TEOREMA: Normalização forte

Para todo $\lambda^{\supset}$-termo M temos: $h(\mathsf{M}) \leq o(\mathsf{M}) < \omega$.

PROVA: Indução em $o(\mathsf{M})$.

BASE: $o(\mathsf{M}) = 1$

$o(\mathsf{M}) = 1 \Rightarrow p(\mathsf{M}^*) = 0 \Rightarrow$ M é normal $\Rightarrow h(\mathsf{M}) = 1$. Logo $h(\mathsf{M}) \leq o(\mathsf{M})$.

PASSO: $o(\mathsf{M}) > 1$

HI: $o(\mathsf{N}) < o(\mathsf{M}) \Rightarrow h(\mathsf{N}) \leq o(\mathsf{N})$.

(*i*) Seja $\mu = \mathsf{M} \equiv \mathsf{M}_0 \to \mathsf{M}_1 \to \mathsf{M}_2 \to \ldots$ a mais comprida seqüência de redução para M.

(*ii*) É claro que $h(\mathsf{M}) = l(\mu)$.

(*iii*) Consideremos também $\mu_1 = \mathsf{M}_1 \to \mathsf{M}_2 \to \ldots$ a seqüência obtida de μ desconsiderando-se seu primeiro termo. É claro que μ_1 é a mais comprida seqüência de redução para M_1 e:

(*iv*) $h(\mathsf{M}_1) = l(\mu_1)$.

Mas pelo Teorema 6.3.11, como $\mathsf{M} \to \mathsf{M}_1$ temos que:

(*v*) $o(\mathsf{M}_1) < o(\mathsf{M})$.

Logo, por (*iii*), vale HI em M_1, e portanto:

(*vi*) $h(\mathsf{M}_1) \leq o(\mathsf{M}_1)$.

Assim, por (*vi*) e (*iv*) temos:

(*vii*) $l(\mu_1) \leq o(\mathsf{M}_1)$.

Como $o(\mathsf{M}_1) < \omega$, por (*iii*) e (*vii*) é claro que $l(\mu) < \omega$ e portanto:

(*viii*) $l(\mu) = l(\mu_1) + 1$.

Portanto temos:

$$h(\mathsf{M}) \underset{(ii)}{=} l(\mu) \underset{(viii)}{=} l(\mu_1) + 1 \underset{(vii)}{\leq} o(\mathsf{M}_1) + 1 \underset{(v)}{<} o(\mathsf{M}) + 1 \Rightarrow h(\mathsf{M}) \leq o(\mathsf{M}) \underset{6.2.20}{<} \omega. \ \blacklozenge$$

Como conseqüência imediata dos Teoremas 6.3.10 e 6.3.12 provamos agora que $o(\mathsf{M})$ é o menor ordinal natural para $\lambda^{\supset}$.

6.3.13 TEOREMA: Menor Ordinal Natural

Para todo $\lambda^{\supset}$-termo M temos: o(M)= h(M).

<u>PROVA</u>:

Pelo Teorema 6.3.10 temos que o(M)= L_{F_∞}(M). Mas como L_{F_∞}(M) é o comprimento de uma seqüência de redução específica, então é claro que:

(i) o(M) $\leq$ h(M).

Mas pelo Teorema 6.3.12 temos:

(ii) o(M) $\geq$ h(M).

Logo, por (i) e (ii): o(M)= h(M). ♦

Para terminar, apresentamos um resultado extra que obtemos como conseqüência de todo o desenvolvimento deste capítulo: o Teorema de Church-Rosser de unicidade da forma normal.

6.3.14 TEOREMA: Church-Rosser - Unicidade da Forma Normal

Todas as seqüências de redução para cada $\lambda^{\supset}$-termo terminam no mesmo termo normal.

<u>PROVA</u>:

Seja μ = $M \equiv M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \ldots \rightarrow M_n$ uma seqüência de redução qualquer para M.

Pelo Teorema 6.3.12 temos que $n < \omega$ e M_n é termo normal.

Para provar o teorema provaremos que $M_n \equiv M^P$, onde M^P é, como definido em 4.4.5.1-(f), o último termo da pior seqüência de redução para M.

Provar que $M_n \equiv M^P$ garante a unicidade da forma normal porque, uma vez que μ é uma seqüência de redução qualquer, provando que $M_n \equiv M^P$ estamos provando que toda seqüência de redução para M termina no mesmo termo que a pior seqüência de redução para M termina. Logo, todas as seqüências de redução para M terminam no mesmo termo e, portanto, a forma normal para M é única.

Provaremos que $M_n \equiv M^P$ por indução em $l(\mu)= n$.

<u>BASE</u>: $l(\mu)= n= 1$

Neste caso:

(i) $M_n \equiv M_1 \equiv M$.

Logo, M é normal e portanto:

(*ii*) $M^P \equiv M$.

Assim, por (*i*) e (*ii*) temos: $M_n \equiv M^P$.

PASSO: $l(\mu) = n > 1$

Considere M_2 de μ e $\mu_2 \equiv M_2 \to \ldots \to M_n$.

É claro que $l(\mu_2) < l(\mu)$ e portanto vale HI para M_2. Então temos:

(*iii*) $M_n \equiv M_2^P$.

Mas como $M \to M_2$, pelo Teorema 6.1.2-(2) temos que existem $j,k < \omega$ tais que:

(*iv*) $M_2^{\circ j} \equiv M^{\circ k}$.

Por (*iv*) e pelas Observações 4.4.5.1-(*g*) e (*h*) temos, respectivamente:

(*v*) $(M_2^{\circ j})^P \equiv M_2^P$ e $(M^{\circ k})^P \equiv M^P$;

(*vi*) $(M_2^{\circ j})^P \equiv (M^{\circ k})^P$.

Portanto:

$M_n \underset{(iii)}{\equiv} M_2^P \underset{(v)}{\equiv} (M_2^{\circ j})^P \underset{(vi)}{\equiv} (M^{\circ k})^P \underset{(v)}{\equiv} M^P$. ♦

Com o teorema acima terminamos os nossos resultados para o sistema $\lambda^{\supset}$. Antes de passarmos à seção seguinte apresentaremos dois resultados interessantes para o cálculo lambda livre de tipos, que também são conseqüências do desenvolvimento que acabamos de apresentar.

6.3.15 Dois Resultados sobre o Cálculo Lambda Livre de Tipos

Se prestarmos atenção na prova do Teorema 6.1.2, e na prova de todos os resultados que ali utilizamos, veremos que em nenhum momento fazemos uso da noção de tipos. Isto significa que o Teorema 6.1.2 também é válido para o cálculo lambda livre de tipos. Como conseqüência deste fato conseguimos provas simples dos seguintes resultados:

6.3.15.1 TEOREMA: Church-Rosser para Cálculo Lambda Livre de Tipos

Se M é um termo fortemente normalizável do cálculo lambda livre de tipos, então a forma normal para M é única.

PROVA: Basta observarmos que a prova do Teorema 6.3.14 independe dos tipos. ♦

Barendregt provou que, para todo termo M que não é fortemente normalizável em cálculo lambda livre de tipos, a seqüência de redução obtida da estratégia perpétua não é finita. Ou seja, se $h(\mathsf{M})$ não é finito, então $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})$ também não é. No teorema seguinte provaremos que se M é fortemente normalizável, o comprimento da seqüência obtida da estratégia perpétua é igual a altura da árvore de redução para M.

6.3.15.2 TEOREMA: $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})= h(\mathsf{M})$

$h(\mathsf{M})< \omega \Rightarrow L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})= h(\mathsf{M})$, para todo termo M do cálculo-λ livre de tipos.

PROVA:

Indução em $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})$.

BASE: $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})= 1$

$L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})= 1 \Rightarrow \mathsf{M}$ é normal $\Rightarrow h(\mathsf{M})= 1$.

PASSO: $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})> 1$

HI: Se N é tal que $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{N})< L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})$, então $h(\mathsf{N})= L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{N})$.

Como $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})$ é o comprimento de uma seqüência de redução específica para M, é claro que:

(*i*) $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M}) \leq h(\mathsf{M})< \omega$.

Seja $\mu = \mathsf{M} \equiv \mathsf{M}_0 \to \mathsf{M}_1 \to \mathsf{M}_2 \to \ldots$ uma seqüência de redução para M tal que:

(*ii*) $l(\mu)= h(\mathsf{M})< \omega$.

Consideremos também $\mu_1= \mathsf{M}_1 \to \mathsf{M}_2 \to \ldots$ a seqüência obtida de μ desconsiderando-se seu primeiro termo. É claro, por (*ii*), que:

(*iii*) $h(\mathsf{M}_1)= l(\mu_1)$ e

(*iv*) $h(\mathsf{M})= h(\mathsf{M}_1)+ 1$.

Mas como $\mathsf{M} \to \mathsf{M}_1$, por (*i*) e pelo Teorema 6.1.2, que vimos que vale também para cálculo-λ livre de tipos temos:

(*v*) $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})> L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M}_1)$.

Logo, por (*v*), vale HI em M_1, e portanto:

(*vi*) $h(\mathsf{M}_1)= L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M}_1)$.

Por (*iv*), (*v*) e (*vi*) é claro que:

(*vii*) $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M}) \underset{(v)}{>} L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M}_1) \underset{(vi)}{=} h(\mathsf{M}_1) \Rightarrow L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M}) \geq h(\mathsf{M}_1)+ 1 \underset{(iv)}{\Rightarrow} L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M}) \geq h(\mathsf{M})$.

Portanto, por (*i*) e (*vii*): $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})= h(\mathsf{M})$. ♦

É sabido que vale Church-Rosser para cálculo-λ livre de tipos, no entanto, em 6.3.15.1 estamos apresentando uma nova demonstração para este fato. Quanto ao Teorema 6.3.15.2, Barendregt provou que a sua estratégia perpétua sempre encontra seqüências de redução de comprimento infinito quando existe alguma. A este fato estamos acrescentando que quando M é fortemente normalizável, a seqüência obtida da estratégia perpétua tem comprimento máximo.

§4 Comparação entre o Nosso Método os Artigos do Capítulo V.

Vamos inicialmente resumir os resultados que neste capítulo obtivemos para o sistema $\lambda^{\supset}$ e, nos Capítulos II e III, obtivemos para o sistema de dedução natural C'. Apresentaremos o resumo dos resultados na notação de $\lambda^{\supset}$. No entanto, os resultados para C' são os mesmos, com a diferença que, ao invés da estratégia perpétua de Barendregt, utilizamos a pior seqüência de redução de Massi.

6.4.1 Resumo dos Nossos Resultados

(1) Introduzimos o Ordinal Natural $o(\mathsf{M})$ para os termos de $\lambda^{\supset}$. Ou seja, definimos a atribuição numérica unívoca $o(\mathsf{M})$ e provamos que, para todo termo M:

- ♦(*a*) $o(\mathsf{M}) < \omega$;
- ♦(*b*) $\mathsf{M} \rightarrow \mathsf{N} \Rightarrow o(\mathsf{M}) > o(\mathsf{N})$.

(2) Provamos que, para todo termo M, $o(\mathsf{M})$ coincide com o comprimento $L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})$ de uma seqüência de redução específica para M (a seqüência obtida através da estratégia perpétua de Barendregt). Ou seja:

- ♦ $o(\mathsf{M}) = L_{\mathsf{F}_\infty}(\mathsf{M})$.

(3) Considerando que $\mathsf{M}^{\circ n}$ representa o $(n+1)$-ésimo termo da seqüência obtida através da estratégia F_∞ aplicada a M, provamos que:

- ♦ $\mathsf{M} \rightarrow \mathsf{N} \Rightarrow \exists j,k < \omega \ / \ \mathsf{M}^{\circ j} \equiv \mathsf{N}^{\circ k}$.

Como conseqüência de (1), (2) e (3), considerando $\mathsf{M} \in \Lambda^{\supset}$ um termo qualquer, obtivemos os seguintes resultados sobre o sistema $\lambda^{\supset}$:

(4) Normalização forte para $\lambda^{\supset}$:

- h(M)< ω.

(5) o(M) é o menor ordinal natural para M e, portanto, representa exatamente a altura da árvore de reduções para M:

- o(M)= h(M).

(6) F_∞ produz a mais longa seqüência de redução para M:

- L_{F_∞}(M)= h(M).

(7) Church-Rosser em $\lambda^{\supset}$:

- A forma normal de cada termo de $\lambda^{\supset}$ é única.

Podemos dizer que os Itens (1) a (3) acima representam resultados técnicos cujo objetivo foi viabilizar a obtenção de (4) a (7), que representam os resultados importantes que obtivemos para o sistema $\lambda^{\supset}$. No entanto, o nosso grande esforço aqui foi a obtenção dos resultados (1) a (3). As provas de (4) a (7), como vimos, são triviais a partir dos Itens (1) a (3).

Vamos agora sintetizar o método que utilizamos para a obtenção de (1) a (3).

6.4.2 Resumo do Nosso Método Geral

Podemos separar três passos fundamentais que utilizamos para a obtenção dos resultados (1) a (3) descritos acima.

(*a*) O primeiro passo foi definir uma estratégia de redução supostamente maximal, que jamais efetuasse uma redução capaz de eliminar a possibilidade do surgimento de novos redex a partir dos já existentes. Utilizamos para isto a estratégia F_∞ definida em **Barendregt[1990]**.

(*b*) O segundo passo foi, assumindo que L_{F_∞}(M)< ω para todo M, provar que:

- $M \rightarrow N \;\Rightarrow\; L_{F_\infty}(M) > L_{F_\infty}(N)$ e
- $M \rightarrow N \;\Rightarrow\; \exists j,k < \omega \,/\, M^{\circ j} \equiv N^{\circ k}$ (vale o Item 6.4.1-(3) acima).

(*c*) O terceiro passo foi provar a hipótese assumida no passo anterior, ou seja, provar que L_{F_∞}(M)< ω para todo termo M. Para isso definimos a atribuição numérica o(M) e provamos que, para todo M:

♦ $o(\mathsf{M}) < \omega$ e $o(\mathsf{M}) = L_{\mathbf{F}\infty}(\mathsf{M})$.

É claro que os passos (*a*), (*b*) e (*c*) implicam os Resultados 6.4.1-(1), (2) e (3).

Utilizando a estratégia F_∞ de Barendregt e alguns resultados conhecidos sobre $\lambda^{\supset}$, que apresentamos no Capítulo IV, efetuamos os passos (*a*) e (*b*) sem muita dificuldade, no Teorema 6.1.2. O passo (*c*), no entanto, exigiu a maior parte do trabalho aqui desenvolvido. Podemos sintetizar o método que utilizamos para efetuar (*c*) da seguinte forma: um desenvolvimento sintático foi feito sobre $\lambda^{\supset}$, onde um novo tipo de redex, os *subtermos multiplicativos*, e um tipo especial de redução para estes subtermos, a *multiplicação-**, foram introduzidos. Através deste desenvolvimento provou-se que para todo termo M existe uma seqüência específica destas *multiplicações-** que sempre termina, através de um número finito de passos, em um termo chamado de *termo estrela*, que não possui nenhum *subtermo multiplicativo*. Esta prova foi obtida sintaticamente, utilizando o método de Turing para obtenção de normalização fraca para $\lambda^{\supset}$.[57] Dessa forma relacionou-se cada termo M com um *termo estrela* M*, que como foi obtido finitamente, tem comprimento finito e um número finito de subtermos. O número $o(\mathsf{M})$ associado a M foi definido como o número de elementos de um subconjunto especial de subtermos de M* (os *subtermos pesados* de M*). Dessa forma temos que $o(\mathsf{M})$ associa univocamente cada termo M a um número natural (finito) $o(\mathsf{M})$. Feito isso, provou-se, sintaticamente, através das propriedades da definição de $o(\mathsf{M})$ que, para todo termo M, $o(\mathsf{M}) = L_{\mathbf{F}\infty}(\mathsf{M})$, e portanto, que $L_{\mathbf{F}\infty}(\mathsf{M}) < \omega$ para todo M.

6.4.3 Comentários sobre os resultados para o sistema C'

Com relação aos resultados obtidos nos Capítulos II e III para o sistema de dedução natural C', cabe ainda ressaltar que **Massi[1990]** efetuou os passos 6.4.2-(*a*) e (*b*) descritos anteriormente. Ele definiu uma seqüência de redução "não econômica", a pior seqüência de redução, e provou, assumindo que seu comprimento $lp(\pi)$ é finito para toda derivação π de C', os Teoremas de Normalização Forte e Church-Rosser. Massi, no entanto, não realizou o passo (*c*), e seus resultados ficaram condicionados à hipótese não provada de que $lp(\pi) < \omega$ para toda derivação π. Nós realizamos o passo (*c*) provando que $lp(\pi) = o(\pi) < \omega$, e retiramos assim a hipótese condicional dos resultados de Massi. Mas fizemos mais que isso. Para

[57] Este método foi descrito em **Gandy[1980a]**.

aumentar a independência dos nossos resultados com relação aos de Massi, provamos, independentemente de $lp(\pi)$, que $\pi \rightarrow \pi' \Rightarrow o(\pi) > o(\pi')$. Com este resultado obtivemos, independentemente, que $o(\pi)$ é ordinal natural para derivações em C' e que portanto vale normalização forte para C'. Além disso, como provamos que $lp(\pi) = o(\pi) < \omega$, então $o(\pi)$ é o menor ordinal natural para as derivações de C'.

6.4.4 Comparação entre os Nossos Resultados e os Pesquisados na Literatura

Nos 5 artigos aos quais nos referidos no Capítulo V, os três analisados (**Howard[1968]**, **Vrijer[1987]** e **Beckmann[1998]**) e os dois citados (**Gandy[1980]** e **Schwichtenberg[1991]**), o resultado 6.4.1-(1) e, conseqüentemente, o resultado 6.4.1-(4) foram obtidos. Ou seja, em todos eles encontramos um ordinal natural para os termos de $\lambda^{\supset}$ e, como conseqüência direta deste ordinal, uma prova do Teorema de Normalização Forte para $\lambda^{\supset}$.

Com exceção de **Howard[1968]**, todos os demais artigos apresentam explicitamente estes resultados. Howard não os apresenta, mas, na análise que fizemos daquele artigo em 5.1, verificamos que tais resultados são conseqüência direta dos resultados obtidos por Howard.

Com exceção de **Vrijer[1987]**, no que se refere aos resultados listados em 6.4.1, todos os demais artigos obtêm apenas os Itens (1) e (4), ou seja, ordinal natural e normalização forte para $\lambda^{\supset}$. Vrijer, no entanto, obteve, além destes dois resultados, o resultado 6.4.1-(2) e, como conseqüência disso, obteve também 6.4.1-(5) e (6). Ou seja, Vrijer provou que seu ordinal natural corresponde exatamente ao comprimento da seqüência de redução obtida da estratégia perpétua de Barendregt (6.4.1-(2)). Com isso provou que seu ordinal natural é o menor de todos (6.4.1-(5)), e que a estratégia perpétua de Barendregt produz a mais longa seqüência de redução em $\lambda^{\supset}$ (6.4.1-(6)).

Os resultados listados em 6.4.1-(3) e (7), que representam uma prova do Teorema de Church-Rosser, sobre a unicidade da forma normal, não foram encontrados em nenhum dos artigos vistos. Tal fato consiste, portanto, em um passo a mais do nosso trabalho com relação a todos os artigos vistos.

Cabe ressaltar também que, em termos de resultados sobre ordinal natural, os artigos de Beckmann e Schwichtenberg trazem um resultado não presente nem em nosso trabalho nem em nenhum dos outros artigos, que consideramos bastante relevante. Estes artigos apresentam uma estimativa finita, em termos de propriedades simples do termo M, para a complexidade do ordinal natural que eles definem. Schwichtenberg apresentou uma primeira estimativa que foi posteriormente aprimorada por Beckmann.

A seguinte tabela mostra comparativamente os resultados importantes que obtivemos para o sistema $\lambda^{\supset}$, juntamente com os de cada um dos artigos citados:

	Esta tese	Vrijer	Howard	Beckmann	Schwichtenberg	Gandy
6.4.1-(4)	●	●	●	●	●	●
6.4.1-(5)	●	●				
6.4.1-(6)	●	●				
6.4.1-(7)	●					
Estimativa				●	●	

6.4.5 Comentários sobre a extensão dos nossos resultados

Segundo o comentário 4.5.9 a respeito da transferência de provas de normalização forte, podemos transformar, de modo relativamente simples, provas de normalização forte para o sistema de cálculo lambda tipificado $\lambda^{\supset}$ em provas de normalização forte para o sistema de dedução natural C'. No entanto, vimos também que esta transferência não pode ser feita de maneira trivial do sistema $\lambda^{\supset}$ para os sistemas de dedução natural M, I e C, respectivamente de lógica intuicionista minimal, intuicionista de Heyting e lógica clássica definida em todos os conectivos clássicos. Como apresentaremos no Capítulo VII o esboço de uma extensão dos nossos resultados de C' para os sistemas M e I, podemos dizer que esta extensão representa outro avanço dos nossos resultados com relação aos resultados de todos os artigos citados, que se limitam ao sistema $\lambda^{\supset}$.

6.4.6 Comparação entre o nosso método e o método dos artigos pesquisados

Além destas diferenças que acabamos de apontar entre o nosso trabalho e os artigos pesquisados, relativas ao alcance dos resultados, vamos agora apontar mais algumas diferenças nos métodos de obtenção destes resultados. Foi com o objetivo de mostrar claramente que o nosso método de prova é distinto dos métodos utilizados pelos artigos vistos, que desenvolvemos nossos resultados também para o sistema $\lambda^{\supset}$.

Um primeiro ponto que fica claro, analisando os estudos dos artigos no capítulo anterior e o desenvolvimento do nosso método nas três primeiras seções deste capítulo, é que, mesmo para o resultado de normalização forte para $\lambda^{\supset}$ via ordinal natural, presente em todos os artigos, o nosso método é distinto do método dos artigos analisados. Em outras palavras, tratam-se de provas distintas para o mesmo resultado.

Com exceção do artigo de Vrijer, o nosso ordinal natural é menor que o ordinal de todos os demais artigos referidos. Mesmo sendo igual ao ordinal de Vrijer, foi obtido de uma maneira completamente diferente. Como descrevemos em 6.4.2, apesar de coincidir com o comprimento da pior seqüência de redução, o nosso ordinal $o(\mathsf{M})$ é obtido através de uma manipulação sintática finita no termo M que o transforma em M^*, um termo no qual podemos contar o número de todos os possíveis redex de M. Esse método para a definição de $o(\mathsf{M})$ teve por objetivo a obtenção da prova de finitude de $o(\mathsf{M})$ para todo termo M.

A prova de finitude da atribuição de Vrijer foi obtida de maneira completamente diferente. Vrijer definiu seu ordinal natural como um funcional pertencente a uma certa hierarquia. Desenvolveu a teoria desta hierarquia e provou que os funcionais desta hierarquia que representam os ordinais naturais para termos de $\lambda^{\supset}$ têm imagem em ω, e portanto são finitos. A maneira como Howard e Gandy obtiveram as provas de que suas atribuições numéricas a termos eram finitas segue uma linha de argumentação semelhante a esta.[58] Eles, cada um a seu modo, desenvolvem uma teoria formal distinta de $\lambda^{\supset}$, e definem uma correspondência entre $\lambda^{\supset}$-termos e termos destas teorias. Em seguida apresentam modelos para estas teorias que relacionam termos com números naturais. Assim, indiretamente, através destas teorias formais relaciona-se $\lambda^{\supset}$-termos com números naturais.

Já os artigos de Beckmann e Schwichtenberg utilizam, para provar a finitude de suas atribuições numéricas, uma técnica desenvolvida por **Howard[1980a]**, que foi baseada nos trabalhos de **Sanchis[1967]** e **Diller[1968]**. Este método, bastante engenhoso, é mais próximo ao nosso método que o dos outros artigos, pois também consiste em um certo desenvolvimento sintático que associa uma árvore, a "*head reduction tree*", a cada $\lambda^{\supset}$-termo

[58] Lembrando que Howard operou dessa forma para ordinais menores que ε_0 e termos de $\boldsymbol{T}$. Nossa análise do artigo de Howard moveu este universo para numeros naturais e $\lambda^{\supset}$-termos.

M. Através de manipulações sintáticas nesta árvore prova-se não apenas que a atribuição numérica #M é finita, como também exibe-se uma estimativa para seu valor em termos de propriedades simples de M. Apesar de mais próximo do nosso método que os demais, a análise do artigo de Beckmann, apresentada aqui em 5.3, e a prova da finitude de o(M), apresentada em 6.2, mostram claramente a diferença entre estes métodos.

Para o caso das provas de que as atribuições numéricas definidas para os termos de $\lambda^{\supset}$ diminuem com as reduções ($M \to N \;\Rightarrow\; n(M) > n(N)$), os resultados de todos os artigos e o nosso próprio estão mais próximos entre si. É claro que todos eles diferem, na medida em que mesmo que algumas destas atribuições numéricas sejam coincidentes,[59] todas elas foram definidas de maneiras distintas. Esta maior proximidade entre as provas para esta parte do resultado se deve ao fato de que todas elas, inclusive a nossa, foram obtidas de maneira sintática, por indução na complexidade do termo M, analisando todas as formas possíveis de M e as posições possíveis para o redex reduzido em $M \to N$.

No caso específico do nosso desenvolvimento, baseado no Teorema 1.5.4 demonstrado por Massi, obtivemos, juntamente com a prova de que $L_{F_\infty}(M)$ diminui com as reduções, um resultado fundamental (6.4.1-(3)) para a demonstração do Teorema de Church-Rosser, que nenhum dos artigos pesquisados apresentou.

6.4.7 Considerações Finais sobre Estas Comparações

Concluímos este capítulo dizendo que o motivo fundamental que nos levou a desenvolver nossos resultados também em $\lambda^{\supset}$ foi mostrar claramente que, apesar da semelhança nos resultados, o nosso método é distinto dos métodos dos artigos analisados e, especificamente, é distinto do método desenvolvido por Vrijer, cujo ordinal é igual ao nosso.

Contra o nosso método podemos apontar a seguinte "desvantagem": a **extensão** ou **não economia**. Necessitamos de mais lemas e teoremas para obtenção dos nossos resultados do que os artigos pesquisados. Acreditamos que esta desvantagem está fortemente relacionada com o fato de termos desenvolvido este método inicialmente para sistemas de

[59] Como é o caso da igualdade entre a estimativa foruxa {M}* de Vrijer e da atribuição #M de Beckmann, e da igualdade entre o nosso o(M) com a estimativa exata [M]* também de Vrijer.

dedução natural, que são muito menos econômicos que os sistemas de cálculo lambda tipificado.

Em favor do nosso método, porém, podemos resumir a argumentação desenvolvida nesta seção nos seguintes pontos:

(1) A extensão dos nossos resultados para os sistemas M e I, que proporemos no capítulo seguinte, representa um avanço em relação a resultados de normalização forte para $\lambda^{\supset}$, conforme discutido em 4.5.9.

(2) O Teorema de Church-Rosser, um dos resultados que obtivemos, não é conseqüência de nenhum dos artigos pesquisados.

(3) A nossa prova de que a estratégia perpétua de Barendregt, a mesma utilizada por Vrijer, produz seqüências de redução de comprimento máximo para termos fortemente normalizáveis de $\lambda^{\supset}$ foi produzida sem apelo ao uso de tipos, e portanto é válida também em cálculo-λ livre de tipos. Como conseqüência disso obtivemos uma nova prova para o Teorema de Church-Rosser para cálculo lambda livre de tipos (6.3.15.1) e um resultado novo sobre a estratégia perpétua de Barendregt que ele próprio não aponta: $h(\mathsf{M}) < \omega \Rightarrow L_{\mathbf{F}_\infty}(\mathsf{M}) = h(\mathsf{M})$ para todo termo M de cálculo-λ livre de tipos (6.3.15.2). Tal fato não é conseqüência dos trabalhos de Vrijer porque na sua prova de que a estratégia perpétua, quando aplicada a termos de $\lambda^{\supset}$, produz seqüências de redução de comprimento máximo, a noção de tipos é utilizada.

Finalmente observamos que, apesar da desvantagem da extensão do nosso desenvolvimento, que apontamos acima, nosso método é matematicamente simples e intuitivamente claro. A única teoria matemática que utilizamos (de maneira informal) é a *aritmética*, e a ferramenta matemática mais sofisticada utilizada em nossas definições e demonstrações é a *indução matemática finita*. Nosso método produz provas essencialmente combinatórias, que lidam apenas com propriedades estruturais dos termos ou derivações das teorias envolvidas.

Capítulo VII

Estendendo os Resultados para Outros Sistemas

Neste capítulo apresentaremos duas extensões dos nossos resultados para outros sistemas de dedução natural. Na primeira seção os estendemos para os sistemas M e I, de lógicas intuicionista minimal e intuicionista de Heyting, apresentados no Capítulo I. Na segunda seção apresentamos extensões para sistemas de dedução natural relativos às lógicas modais S_4 e S_5.

§ 1 Normalização Forte para M e I via Ordinal Natural

Nesta seção apresentaremos uma extensão, para os sistemas M e I, dos resultados que obtivemos nos Capítulos II e III para o sistema C'. Como o sistema M de lógica intuicionista minimal, apresentado em 1.2.8, é um subsistema do sistema I de lógica intuicionista de Heyting, apresentado em 1.2.9, ao estendermos nossos resultados para I estamos automaticamente estendendo para M. Assim, de agora para frente nesta seção, nos referiremos apenas ao sistema I.

Não faremos aqui todo o desenvolvimento formal que fizemos detalhadamente nos Capítulos II e III. Muitas demonstrações serão apenas esboçadas, sendo que algumas, no entanto, faremos com mais rigor. Maior prioridade será dada às extensões da pior seqüência de redução e à compreensão intuitiva da nova definição de $o(\pi)$. Quanto à prova de que $o(\pi)= lp(\pi)$, por ser ela mais longa e com mais detalhes técnicos, apresentaremos um esboço menos detalhado. Apesar disso, em virtude do que já vimos nos Capítulos II e III para o sistema C', acreditamos que o nível de detalhes que apresentaremos é suficiente para a compreensão desta extensão.

Vamos inicialmente apresentar a noção de *elemento*, que trata de maneira unificada seqüências de fórmulas consecutivas em um ramo e que são premissas menores de regras ($\exists$E) e ($\vee$E). Tal noção foi baseada na definição de *segmento máximo*, apresentada pela primeira vez em **Prawitz[1965]** na prova de normalização fraca para I.

7.1.1 DEFINIÇÃO: Seqüência Idêntica

Uma *seqüência idêntica* em uma derivação π é uma seqüência A_1, ..., A_n de ocorrências consecutivas de fórmulas em um ramo de π tal que:

(1) A_1 não é conseqüência de aplicação de ($\vee$E) ou ($\exists$E);

(2) A_i ($1 \leq i < n$) é premissa menor de uma aplicação de ($\vee$E) ou ($\exists$E);

(3) A_n não é premissa menor de uma aplicação de ($\vee$E) ou ($\exists$E).

7.1.1.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) É claro, pelas regras ($\vee$E) e ($\exists$E) (Definição 1.2.2), que todas as ocorrências de fórmula em uma seqüência idêntica são ocorrências da mesma fórmula.

(*b*) Seja S uma seqüência idêntica. Quando nos referirmos às premissas e conclusões de S estaremos nos referindo, por abuso de linguagem, respectivamente, às premissas da primeira ocorrência de S e às conclusões da última ocorrência de S. Analogamente, quando dissermos que S é premissa ou conseqüência de φ, estaremos dizendo que a última ocorrência de S é premissa de φ, ou que a primeira ocorrência de S é conseqüência de φ.

7.1.2 DEFINIÇÃO: Elemento

Um *elemento* em uma derivação π corresponde ou a uma seqüência idêntica em π ou a uma ocorrência de fórmula que não pertença a nenhuma seqüência idêntica em π.

7.1.2.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Diremos que os elementos que são ocorrências de fórmula fora das seqüências idênticas de π são *elementos unitários*.

(*b*) Por abuso de linguagem denotaremos elementos como temos denotado ocorrências de fórmula, ou seja, pelas letras gregas minúsculas (φ, ψ, ...) ou pelas letras latinas maiúsculas (A, B, ...) com ou sem índices numéricos.

(*c*) Denotaremos o número de ocorrências de um elemento φ por $l(\varphi)$

(*d*) Denotaremos a *n*-ésima ocorrência de fórmula no elemento φ por $(\varphi)^n$. Note que se φ é elemento unitário, então $\varphi = (\varphi)^1$.

(*e*) Utilizaremos a noção de elemento para tratar as seqüências idênticas como objetos individuais da mesma categoria que as ocorrências de fórmula que não pertencem a seqüências idênticas. Fazendo isso conseguiremos estender para derivações em I a maioria das definições apresentadas nos Capítulos II e III, apenas substituindo as referências a ocorrências de fórmula por referências a elementos.

Um primeiro conceito que podemos estender utilizando a noção de elemento é o conceito de fórmula máxima. Em I as fórmulas máximas serão substituídas por elementos máximos.

7.1.3 DEFINIÇÃO: Elemento Máximo

Um elemento φ em uma derivação π é um *elemento máximo* quando φ for conseqüência de regra de introdução ou do absurdo intuicionista ($\perp_I$) e premissa maior de regra de eliminação.

De posse destas ferramentas, vamos estender o conceito de pior seqüência de redução apresentado em 1.5.3. Para isso vamos redefinir, para derivações em I, os conceitos de $F(\pi)$ e $FP(\pi)$ introduzidos por Massi e que apresentamos aqui em 1.5.1 e 1.5.2.

7.1.4 DEFINIÇÃO: $F(\pi)$

Seja π uma derivação não normal em I, e R a primeira regra de eliminação de baixo para cima e mais à direita, tal que sua premissa maior é elemento máximo. Definimos $F(\pi)$ como sendo a última ocorrência do elemento que é premissa maior de R.

7.1.4.1 OBSERVAÇÃO:

Note que esta definição é diferente da apresentada em 1.5.1. Não mais tomamos a ocorrência de *FM* mais à direita de baixo para cima, mas a *FM* que está na "regra" mais à direita de baixo para cima. Isto é necessário porque nas regra ($\exists$E) e ($\vee$E) a premissa maior ocorre à esquerda das premissas menores, ao contrário do que ocorre na regra de ($\supset$E).

7.1.5 DEFINIÇÃO: Fórmula Principal - $FP(\pi)$

A *fórmula principal* de π, representada por $FP(\pi)$, é definida por indução no número de elementos máximos em π, da seguinte maneira:

(1) <u>BASE</u>: a última ocorrência do único elemento máximo de π é $FP(\pi)$;

(2) Se $\pi \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \bot\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}}$ ou $\pi \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ B\end{array}}{A \supset B}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}}$, tal que:

- $A \supset B$ é $F(\pi)$ e
- A regra ($\supset$I) mostrada não corta top-fórmula de π,

então:

$$FP(\pi) = \begin{cases} A \supset B, & \text{se } \pi_1 \text{ for normal;} \\ FP(\pi_1), & \text{se } \pi_1 \text{ não for normal.} \end{cases}$$

(3) Se $\pi \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_2\\ B\end{array}}{A \supset B}\,k}{\begin{array}{c}B\\ \pi_3\end{array}}$, onde:

- $A \supset B$ é $F(\pi)$ e
- A é cortada pela regra ($\supset$I) mostrada,

então:

$FP(\pi) = A \supset B$.

(4) Se $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ A_2\end{array}}{A_1 \wedge A_2}}{\begin{array}{c}A_i\\ \pi_3\end{array}}$ $(1 \leq i \leq 2)$, onde $A_1 \wedge A_2$ é $F(\pi)$,

então, para $(1 \leq j \leq 2$ e $j \neq i)$ temos que:

$$FP(\pi) = \begin{cases} A_1 \wedge A_2, & \text{se } \pi_j \text{ for normal;} \\ FP(\pi_j), & \text{se } \pi_j \text{ não for normal.} \end{cases}$$

(5) Se $\pi \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ \dfrac{\dfrac{\perp}{A_1 \wedge A_2}}{A_i} \\ \pi_3 \end{array}$ $(1 \leq i \leq 2)$, onde $A_1 \wedge A_2$ é $F(\pi)$, então $FP(\pi) = A_1 \wedge A_2$.

(6) Se $\pi \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ \dfrac{\dfrac{\perp}{\forall x A(x)}}{A(t)} \\ \pi_2 \end{array}$ ou $\pi \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ \dfrac{\dfrac{A(a)}{\forall x A(x)}}{A(t)} \\ \pi_2 \end{array}$, onde $\forall x A(x)$ é $F(\pi)$, então $FP(\pi) = \forall x A(x)$.

(7) Se $\pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ \dfrac{A_2}{A_2 \vee A_3}\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_2]^k \\ \pi_2 \\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k \\ \pi_3 \\ B\end{array}}{B}\,k \\ \pi_4 \end{array}$ ou $\pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ \dfrac{\perp}{A_2 \vee A_3}\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_2]^k \\ \pi_2 \\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k \\ \pi_3 \\ B\end{array}}{B}\,k \\ \pi_4 \end{array}$, onde:

- $A_2 \vee A_3$ é $F(\pi)$ e
- A_2 é cortada pela regra $(\vee E)$ mostrada,

então:

$$FP(\pi) = \begin{cases} FP(\pi_3), & \text{se } \pi_3 \text{ não for normal,} \\ A_2 \vee A_3, & \text{se } \pi_3 \text{ for normal.} \end{cases}$$

(8) Se $\pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ \dfrac{A_3}{A_2 \vee A_3}\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_2]^k \\ \pi_2 \\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k \\ \pi_3 \\ B\end{array}}{B}\,k \\ \pi_4 \end{array}$, onde

- $A_2 \vee A_3$ é $F(\pi)$ e
- A_3 é cortada pela regra $(\vee E)$ mostrada,

então:

$$FP(\pi) = \begin{cases} FP(\pi_2), & \text{se } \pi_2 \text{ não for normal,} \\ A_2 \vee A_3, & \text{se } \pi_2 \text{ for normal.} \end{cases}$$

(9) Se π é de uma das formas abaixo:

$$(a)\ \pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A_2\end{matrix}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_3]^k\\ \pi_3\\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_4\end{matrix}}\,k \quad \text{ou} \quad (b)\ \pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \bot\end{matrix}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_3]^k\\ \pi_3\\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_4\end{matrix}}\,k\text{, onde:}$$

- $A_2 \vee A_3$ é $F(\pi)$ e
- A_2 não é cortada pela regra ($\vee$E) mostrada,

então:

$$FP(\pi)=\begin{cases} FP(\pi_3)\,, & \text{se } \pi_3 \text{ não for normal;}\\ FP(\pi_1)\,, & \text{se } \pi_3 \text{ for normal e } \pi_1 \text{ não o for;}\\ A_2 \vee A_3\,, & \text{se } \pi_1 \text{ e } \pi_3 \text{ forem ambas normais.}\end{cases}$$

$$(10)\ \text{Se } \pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A_3\end{matrix}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{matrix}[A_2]^k\\ \pi_2\\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_3\\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_4\end{matrix}}\,k\text{, onde:}$$

- $A_2 \vee A_3$ é $F(\pi)$ e
- A_3 não é cortada pela regra ($\vee$E) mostrada,

então:

$$FP(\pi)=\begin{cases} FP(\pi_2)\,, & \text{se } \pi_2 \text{ não for normal;}\\ FP(\pi_1)\,, & \text{se } \pi_2 \text{ for normal e } \pi_1 \text{ não for;}\\ A_2 \vee A_3\,, & \text{se } \pi_1 \text{ e } \pi_2 \text{ forem ambas normais.}\end{cases}$$

$$(11)\ \text{Se } \pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \bot\end{matrix}}{\exists x A} \quad \begin{matrix}[A]^k\\ \pi_2\\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_3\end{matrix}}\,k \quad \text{ou} \quad \pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A\end{matrix}}{\exists x A} \quad \begin{matrix}[A]^k\\ \pi_2\\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_3\end{matrix}}\,k \quad \text{onde:}$$

- $\exists x A$ é $F(\pi)$ e
- A regra ($\exists$E) mostrada elimina hipótese de π,

então:

$FP(\pi) = \exists x\mathsf{A}$.

(12) Se $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \bot\end{matrix}}{\exists x\mathsf{A}} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ \mathsf{B}\end{matrix}}{\begin{matrix}\mathsf{B}\\ \pi_3\end{matrix}}$ ou $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \mathsf{A}\end{matrix}}{\exists x\mathsf{A}} \quad \begin{matrix}[\mathsf{A}]\\ \pi_2\\ \mathsf{B}\end{matrix}}{\begin{matrix}\mathsf{B}\\ \pi_3\end{matrix}}$, onde:

- $\exists x\mathsf{A}$ é $F(\pi)$ e
- A regra ($\exists$E) mostrada não elimina hipótese de π,

então:

$$FP(\pi) = \begin{cases} FP(\pi_1) & \text{, se } \pi_1 \text{ não for normal;} \\ \exists x\mathsf{A} & \text{, se } \pi_1 \text{ for normal.} \end{cases}$$

(13) Se $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \mathsf{A} \vee \mathsf{B}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ \mathsf{C}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_3\\ \mathsf{C}\end{matrix}}{\mathsf{C}} \qquad \Sigma_4}{\begin{matrix}\mathsf{D}\\ \pi_5\end{matrix}}$, onde a ocorrência de C que é conseqüência de ($\vee$E) é $F(\pi)$ e é a última ocorrência de um elemento máximo, então: $FP(\pi)= \mathsf{C}$.

(14) Se $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \exists x\mathsf{A}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ \mathsf{C}\end{matrix}}{\mathsf{C}} \qquad \Sigma_4}{\begin{matrix}\mathsf{D}\\ \pi_5\end{matrix}}$, onde a ocorrência de C que é conseqüência de ($\exists$E) é $F(\pi)$ e é a última ocorrência de um elemento máximo, então: $FP(\pi)= \mathsf{C}$.

7.1.5.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Todos os casos para todas as reduções possíveis aplicáveis a $F(\pi)$ foram analisados. Portanto, é fácil notar pela definição acima que, para cada derivação não normal π, existe uma e apenas uma ocorrência de fórmula φ tal que $\varphi= FP(\pi)$. Ou seja, $FP(\pi)$ existe e é única para toda derivação não normal π.

(*b*) Tendo por base esta nova definição de $FP(\pi)$, a pior seqüência de redução para derivações em I é então definida exatamente da mesma forma que para derivações de C'.

Ou seja, consideraremos válidas, para qualquer π em I, a Definição 1.5.3 e as Observações 1.5.3.1.

Antes de apresentarmos a demonstração do Teorema 1.5.4 relativo a derivações em I, vamos apresentar um lema auxiliar que será bastante útil na demonstração deste teorema.

7.1.6 LEMA:

Seja π é uma derivação não normal em I e π_1 é uma subárvore de π tal que:

(*a*) $r(\pi_1)$ é alguma premissa da regra R cuja premissa maior é $F(\pi)$;

(*b*) π_1 é eliminada na redução de $FP(\pi)$.

Então: $lp(\pi_1) < lp(\pi)$.

PROVA:

Não é difícil ver, pelas Definições 7.1.5 e 1.5.3, respectivamente de $FP(\pi)$ e pior seqüência de redução, que em todos os casos que π_1 satisfizer as condições do teorema, a pior seqüência para π_1 representa um segmento inicial da pior seqüência para π. Portanto $lp(\pi_1) \leq lp(\pi)$. Mas como $F(\pi)$ não ocorre em π_1, então a pior seqüência para π não se restringe às reduções em π_1. Portanto, $lp(\pi_1) < lp(\pi)$. ♦

Vamos agora provar que o resultado de Massi de que $lp(\pi)$, se finito, diminui com as reduções, também vale para derivações em I, considerando esta extensão da definição de pior seqüência que apresentamos.

7.1.7 TEOREMA:

Admita que $lp(\pi) < \omega$ para toda derivação π em I. Se π se reduz imediatamente a π' ($\pi \rightarrow \pi'$), então $lp(\pi) > lp(\pi')$ e existe uma derivação $\pi^{\#}$ tal que $\pi \overset{p}{\twoheadrightarrow}_{R} \pi^{\#}$ e $\pi' \overset{p}{\twoheadrightarrow}_{R} \pi^{\#}$.

PROVA:

Indução em $lp(\pi)$.

Para realizarmos esta prova, basta que completemos a prova de **Massi[1990]** feita para derivações de C'. Os casos para π tal que $F(\pi)$ tem como conectivo principal $\supset$, $\forall$ e $\wedge$ são idênticos aos de Massi. Vamos nos concentrar aqui nos conectivos $\vee$, $\exists$ e nas reduções permutativas, uma vez que todas as reduções do absurdo intuicionista são casos particulares das reduções dos conectivos.

A prova que apresentaremos não contém nenhum fato novo em relação à prova de Massi. Todas as situações novas dos conectivos introduzidos têm algum correspondente nos casos tratados por Massi. Nosso único trabalho foi o de organizar e verificar todos os casos possíveis, de acordo com a nova definição de $FP(\pi)$ que apresentamos.

<u>BASE</u>: $lp(\pi)= 1 \;\Rightarrow\; \pi$ é normal $\Rightarrow$ resultado válido por vacuidade.

<u>PASSO</u>: $lp(\pi)> 1$

Como $lp(\pi)< \omega$ por hipótese, é claro que:

(*i*) $lp(\pi)= lp(\pi^\circ)+ 1$.

(*) PROPOSIÇÃO: Se $\pi^\circ \twoheadrightarrow \pi_1$, então $lp(\pi_1)< lp(\pi^\circ)$ e existe $\pi_1^\#$ / $\pi^\circ \xrightarrow{p}\!\!\!\twoheadrightarrow_R \pi_1^\#$ e $\pi_1 \xrightarrow{p}\!\!\!\twoheadrightarrow_R \pi_1^\#$.

<u>PROVA de (*)</u>: Indução no comprimento da seqüência $\pi^\circ \twoheadrightarrow \pi_1$.

<u>BASE</u>: $\pi^\circ \rightarrow \pi_1$.

Como, por (*i*) $lp(\pi^\circ)< lp(\pi)$, o resultado é imediato pela hipótese indutiva do teorema.

<u>PASSO</u>: $\pi^\circ \twoheadrightarrow \pi_2 \rightarrow \pi_1$.

Por hipótese indutiva da Proposição (*), existe $\pi_2^\#$ tal que:

(*ii*) $\pi^\circ \xrightarrow{p}\!\!\!\twoheadrightarrow_R \pi_2^\#$, $\pi_2 \xrightarrow{p}\!\!\!\twoheadrightarrow_R \pi_2^\#$ e $lp(\pi_2)< lp(\pi^\circ)$.

Logo, por (*ii*), podemos aplicar a hipótese indutiva do teorema a π_2, e portanto existe $\pi_3^\#$ tal que:

(*iii*) $\pi_2 \xrightarrow{p}\!\!\!\twoheadrightarrow_R \pi_3^\#$, $\pi_1 \xrightarrow{p}\!\!\!\twoheadrightarrow_R \pi_3^\#$ e $lp(\pi_1)< lp(\pi_2)$.

(*iv*) Assim, por (*i*), (*ii*) e (*iii*), $lp(\pi_1)< lp(\pi^\circ)< lp(\pi)$.

Note, por (*ii*) e (*iii*) que $\pi_2 \xrightarrow{p}\!\!\!\twoheadrightarrow_R \pi_2^\#$ e $\pi_2 \xrightarrow{p}\!\!\!\twoheadrightarrow_R \pi_3^\#$. Assim, pela unicidade da pior seqüência temos três casos possíveis que relacionam $\pi_2^\#$ e $\pi_3^\#$: $\pi_2^\# \equiv \pi_3^\#$, ou $\pi_3^\# \xrightarrow{p}\!\!\!\twoheadrightarrow \pi_2^\#$, ou $\pi_2^\# \xrightarrow{p}\!\!\!\twoheadrightarrow \pi_3^\#$. Analisemos cada um deles.

<u>CASO (1*)</u>: $\pi_2^\# \equiv \pi_3^\#$

Neste caso:

(*v*) por (*ii*): $\pi \xrightarrow{p} \pi^\circ \xrightarrow{p}\!\!\!\twoheadrightarrow_R \pi_2^\# \equiv \pi_3^\#$ e

(*vi*) por (*iii*): $\pi_1 \xrightarrow{p}\!\!\!\twoheadrightarrow_R \pi_3^\#$.

Assim, por (*iv*), (*v*) e (*vi*) provamos a Proposição (*) para este caso.

CASO (2*): $\pi_3^{\#} \overset{p}{\twoheadrightarrow} \pi_2^{\#}$

Neste caso:

(*vii*) por (*ii*): $\pi \overset{p}{\rightarrow} \pi^{\circ} \overset{p}{\twoheadrightarrow}_{R} \pi_2^{\#}$ e

(*viii*) por (*iii*): $\pi_1 \overset{p}{\twoheadrightarrow}_{R} \pi_3^{\#} \overset{p}{\twoheadrightarrow} \pi_2^{\#}$.

Assim, por (*iv*), (*vi*) e (*viii*) provamos a Proposição (*) para este caso.

CASO (3*): $\pi_2^{\#} \overset{p}{\twoheadrightarrow} \pi_3^{\#}$

Neste caso:

(*ix*) por (*ii*): $\pi \overset{p}{\rightarrow} \pi^{\circ} \overset{p}{\twoheadrightarrow}_{R} \pi_2^{\#} \overset{p}{\twoheadrightarrow} \pi_3^{\#}$ e

(*x*) por (*iii*): $\pi_1 \overset{p}{\twoheadrightarrow}_{R} \pi_3^{\#}$.

Assim, por (*iv*), (*ix*) e (*x*) provamos a Proposição (*) para este caso. $\square$

Voltemos ao teorema.

Consideremos dois casos: $\pi' \equiv \pi^{\circ}$ e $\pi' \not\equiv \pi^{\circ}$.

Se $\pi' \equiv \pi^{\circ}$, o resultado é imediato, pois, por (*i*), $lp(\pi^{\circ}) < lp(\pi)$. Temos que analisar, portanto, todos os casos em que $\pi' \not\equiv \pi^{\circ}$. Temos várias possibilidades, de acordo com $F(\pi)$.

CASO 1: $$\pi \equiv \dfrac{\overset{\pi_1}{A} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\bot}}{A \supset B}}{\underset{\pi_3}{B}} \quad \text{ou} \quad \pi \equiv \dfrac{\overset{\pi_1}{A} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{B}}{A \supset B}}{\underset{\pi_3}{B}}$$, tal que

- $A \supset B$ é $F(\pi)$ e
- A regra ($\supset$I) mostrada não corta top-fórmula de π.

Ver **Massi[1990]**, pp. 92 – 95.

CASO 2: $$\pi \equiv \dfrac{\overset{\pi_1}{A} \qquad \dfrac{\overset{\overset{[A]^k}{\pi_2}}{B}}{A \supset B}\,k}{\underset{\pi_3}{B}}$$, onde

- $A \supset B$ é $F(\pi)$ e
- A é cortada pela regra ($\supset$I) mostrada,

Ver **Massi[1990]**, pp. 96 – 100.

CASO 3: $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\pi_1 & \pi_2\\ A_1 & A_2\end{array}}{A_1 \wedge A_2}}{\begin{array}{c}A_i\\ \pi_3\end{array}}$ $(1 \leq i \leq 2)$, ou $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \perp\end{array}}{A_1 \wedge A_2}}{\begin{array}{c}A_i\\ \pi_3\end{array}}$, onde $A_1 \wedge A_2$ é $F(\pi)$

Ver **Massi[1990]**, pp. 101-103.

CASO 4: $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \perp\end{array}}{\forall x A(x)}}{\begin{array}{c}A(t)\\ \pi_2\end{array}}$, ou $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A(a)\end{array}}{\forall x A(x)}}{\begin{array}{c}A(t)\\ \pi_2\end{array}}$, onde $\forall x A(x)$ é $F(\pi)$

Ver **Massi[1990]**, pp. 104-105.

CASO 5: π tem uma das seguintes formas:

$$(a)\ \pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A_2\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3\\ C\end{array}}{\begin{array}{c}C\\ \pi_4\end{array}}\,k \quad \text{ou} \quad \pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \perp\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3\\ C\end{array}}{\begin{array}{c}C\\ \pi_4\end{array}}\,k\text{, onde:}$$

- $A_2 \vee A_3$ é $F(\pi)$ e
- A_2 não é cortada pela regra $(\vee E)$ mostrada.

Como as duas formas de π se comportam de maneira idêntica com relação à redução da pior seqüência (Definição 7.1.5-(9)), vamos tratá-las de maneira unificada. Utilizaremos para estes dois casos de π a notação conveniente $\pi \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A_2 \vee A_3\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_3\\ C\end{array}}{\begin{array}{c}C\\ \pi_4\end{array}}$.

Temos aqui tantos subcasos quantas são as possibilidades para π'

SubCaso 5.1: $\pi' \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1'\\ A_2 \vee A_3\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_3\\ C\end{array}}{\begin{array}{c}C\\ \pi_4\end{array}}$, onde $\pi_1 \rightarrow \pi_1'$

Temos tantos subcasos quantas forem as possibilidades para $\pi°$.

SubCaso 5.1.1: π_3 não é normal

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(9) temos que $FP(\pi)= FP(\pi_3)= FP(\pi')$. Portanto:

$$\pi^\circ \equiv \frac{\overset{\pi_1}{A_2 \vee A_3} \quad \overset{\pi_2}{C} \quad \overset{\pi_3^\circ}{C}}{\underset{\pi_4}{C}} \quad \text{e} \quad \pi'^\circ \equiv \frac{\overset{\pi_1'}{A_2 \vee A_3} \quad \overset{\pi_2}{C} \quad \overset{\pi_3^\circ}{C}}{\underset{\pi_4}{C}}\ .$$

(*xi*) Note que, apenas efetuando a redução $\pi_1 \to \pi_1'$ em π°, temos que $\pi^\circ \to \pi'^\circ$.

Portanto, usando a Proposição (*) existe um $\pi^\#$ tal que:

(*xii*) $\pi^\circ \overset{p}{\twoheadrightarrow}_R \pi^\#$, $\quad \pi'^\circ \overset{p}{\twoheadrightarrow}_R \pi^\#$ $\quad$ e $\quad lp(\pi'^\circ)< lp(\pi^\circ)$.

Logo, por (*xi*) e (*xii*):

(*xiii*) $\pi \overset{p}{\to} \pi^\circ \overset{p}{\twoheadrightarrow}_R \pi^\#$ e $\quad \pi' \overset{p}{\to} \pi'^\circ \overset{p}{\twoheadrightarrow}_R \pi^\#$.

Note, por (*i*) que vale HI para π°. Logo, por (*xi*):

(*xiv*) $lp(\pi'^\circ)< lp(\pi^\circ)$.

Como $lp(\pi')= lp(\pi'^\circ)+ 1$, por (*xiv*) temos que:

(*xv*) $lp(\pi') \leq lp(\pi^\circ) \underset{(i)}{<} lp(\pi)$.

Portanto, por (*xiii*) e (*xv*) resolvemos o Caso 5.1.1.

SubCaso 5.1.2: π_3 é normal

Pelo Teorema 7.1.6 $lp(\pi_1)< lp(\pi)$, logo vale HI em π_1, portanto:

(*xvi*) Existe $\pi_1^\#$ tal que: $\pi_1 \overset{p}{\twoheadrightarrow}_R \pi_1^\#$, $\quad \pi_1' \overset{p}{\twoheadrightarrow}_R \pi_1^\#$ $\quad$ e $\quad lp(\pi_1')< lp(\pi_1)$.

(*xvii*) Considere $\pi^\#$ a seguinte derivação: $\pi^\# \equiv \dfrac{\overset{\pi_1^\#}{A_2 \vee A_3} \quad \overset{\pi_2}{C} \quad \overset{\pi_3}{C}}{\underset{\pi_4}{C}}$.

Como π_3 é normal, pela Definição 7.1.5-(9) é fácil ver que a normalização de π_1 via pior seqüência é segmento inicial da pior seqüência de π. Analogamente, a normalização de π_1' via pior seqüência é segmento inicial da pior seqüência de π'. Dessa forma, por (*xvi*), (*xvii*) e 7.1.5-(9) é claro que:

(*xviii*) $\pi \overset{p}{\twoheadrightarrow}_R \pi^\#$, $\quad \pi' \overset{p}{\twoheadrightarrow}_R \pi^\#$ e

como, por (*xvi*), $lp(\pi_1')< lp(\pi_1)$, também é claro que:

(*xix*) $lp(\pi')< lp(\pi)$.

Portanto, por (*xviii*) e (*xix*) resolvemos o Caso 5.1.2.

SubCaso 5.2: π' é da forma $\pi' \equiv \dfrac{\overset{\pi_1}{A_2 \vee A_3} \quad \overset{\pi_2'}{C} \quad \overset{\pi_3}{C}}{\underset{\pi_4}{C}}$, onde $\pi_2 \to \pi_2'$

Temos tantos subcasos quantas forem as possibilidades para $\pi°$.

SubCaso 5.2.1: π_3 não é normal

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(9) temos que $FP(\pi)= FP(\pi_3)= FP(\pi')$. Portanto:

$$\pi° \equiv \dfrac{\overset{\pi_1}{A_2 \vee A_3} \quad \overset{\pi_2}{C} \quad \overset{\pi_3^{\circ}}{C}}{\underset{\pi_4}{C}} \quad \text{e} \quad \pi'° \equiv \dfrac{\overset{\pi_1}{A_2 \vee A_3} \quad \overset{\pi_2'}{C} \quad \overset{\pi_3^{\circ}}{C}}{\underset{\pi_4}{C}}.$$

Note que, apenas efetuando a redução $\pi_2 \to \pi_2'$ em $\pi°$, temos que $\pi° \to \pi'°$.

A solução é portanto análoga à do Caso 5.1.1.

SubCaso 5.2.2: π_3 é normal mas π_1 não

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(9) temos que $FP(\pi)= FP(\pi_1)= FP(\pi')$. Portanto:

$$\pi° \equiv \dfrac{\overset{\pi_1^{\circ}}{A_2 \vee A_3} \quad \overset{\pi_2}{C} \quad \overset{\pi_3}{C}}{\underset{\pi_4}{C}} \quad \text{e} \quad \pi'° \equiv \dfrac{\overset{\pi_1^{\circ}}{A_2 \vee A_3} \quad \overset{\pi_2'}{C} \quad \overset{\pi_3}{C}}{\underset{\pi_4}{C}}.$$

Note que, apenas efetuando a redução $\pi_2 \to \pi_2'$ em $\pi°$, temos que $\pi° \to \pi'°$.

A solução é portanto análoga à do Caso 5.1.1.

SubCaso 5.2.3: π_3 e π_1 são ambos normais

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(9) temos que $FP(\pi)= A_2 \vee A_3= FP(\pi')$. Portanto:

$$\pi° \equiv \underset{\pi_4}{\overset{\pi_2}{C}} \quad \text{e} \quad \pi'° \equiv \underset{\pi_4}{\overset{\pi_2'}{C}}.$$

Note que, apenas efetuando a redução $\pi_2 \to \pi_2'$ em $\pi°$, temos que $\pi° \to \pi'°$.

A solução é portanto análoga à do Caso 5.1.1.

SubCaso 5.3: π' é da forma $\pi' \equiv \dfrac{\overset{\pi_1}{A_2 \vee A_3} \quad \overset{\pi_2}{C} \quad \overset{\pi_3'}{C}}{\underset{\pi_4}{C}}$, onde $\pi_3 \to \pi_3'$

Pelo Teorema 7.1.6 $lp(\pi_3)< lp(\pi)$, logo vale HI em π_3, portanto:

(xx) Existe $\pi_3^{\#}$ tal que: $\pi_3 \overset{p}{\twoheadrightarrow}_{\mathbf{R}} \pi_3^{\#}$, $\pi_3' \overset{p}{\twoheadrightarrow}_{\mathbf{R}} \pi_3^{\#}$ e $lp(\pi_3') < lp(\pi_3)$.

(xxi) Seja $\pi^{\#}$ a seguinte derivação: $$\pi^{\#} \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ A_2 \vee A_3\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_3^{\#} \\ C\end{matrix}}{\begin{matrix}C \\ \pi_4\end{matrix}}.$$

Pela Definição 7.1.5-(9) é fácil ver que a normalização de π_3 via pior seqüência é segmento inicial da pior seqüência de π. Analogamente, a normalização de π_3' via pior seqüência é segmento inicial da pior seqüência de π'. Dessa forma, por (xx), (xxi) e 7.1.5-(9) é claro que:

($xxii$) $\pi \overset{p}{\twoheadrightarrow}_{\mathbf{R}} \pi^{\#}$, $\pi' \overset{p}{\twoheadrightarrow}_{\mathbf{R}} \pi^{\#}$ e

como $lp(\pi_3') < lp(\pi_3)$ também é claro que:

($xxiii$) $lp(\pi') < lp(\pi)$.

Portanto, por ($xxii$) e ($xxiii$) resolvemos o Caso 5.3.

<u>SubCaso 5.4</u>: π' é da forma $$\pi' \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ A_2 \vee A_3\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_3 \\ C\end{matrix}}{\begin{matrix}C \\ \pi_4'\end{matrix}}, \text{ onde } \pi_4 \to \pi_4'$$

Como $A_2 \vee A_3$ é $F(\pi)$, π e π' devem ter as seguintes formas:

$$\pi \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_6 \\ E\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ A_2 \vee A_3\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_3 \\ C\end{matrix}}{C} \\ \pi_5 \\ D\end{matrix}}{\begin{matrix}F \\ \pi_7\end{matrix}} \quad \text{e} \quad \pi' \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_6' \\ E\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ A_2 \vee A_3\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_3 \\ C\end{matrix}}{C} \\ \pi_5 \\ D\end{matrix}}{\begin{matrix}F \\ \pi_7\end{matrix}}, \text{ onde } \pi_6 \to \pi_6'.$$

Temos tantos subcasos quantas forem as possíveis formas de $\pi°$.

<u>SubCaso 5.4.1</u>: π_3 não é normal

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(9) temos que $FP(\pi) = FP(\pi_3) = FP(\pi')$. Portanto:

$$\pi^\circ \equiv \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\pi_6\\ E\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A_2 \vee A_3\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_3^\circ\\ C\end{matrix}}{C}\\ \pi_5\\ D\end{matrix}}{F}\\ \pi_7\end{matrix} \quad \text{e} \quad \pi'^\circ \equiv \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\pi_6'\\ E\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A_2 \vee A_3\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_3^\circ\\ C\end{matrix}}{C}\\ \pi_5\\ D\end{matrix}}{F}\\ \pi_7\end{matrix} .$$

Note que, apenas efetuando a redução $\pi_6 \rightarrow \pi_6'$ em π°, temos que $\pi^\circ \rightarrow \pi'^\circ$.

A solução é portanto análoga à do Caso 5.1.1.

<u>SubCaso 5.4.2</u>: π_3 é normal mas π_1 não é.

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(9) temos que $FP(\pi)= FP(\pi_1)= FP(\pi')$. Portanto:

$$\pi^\circ \equiv \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\pi_6\\ E\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\pi_1^\circ\\ A_2 \vee A_3\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_3\\ C\end{matrix}}{C}\\ \pi_5\\ D\end{matrix}}{F}\\ \pi_7\end{matrix} \quad \text{e} \quad \pi'^\circ \equiv \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\pi_6'\\ E\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\pi_1^\circ\\ A_2 \vee A_3\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_3\\ C\end{matrix}}{C}\\ \pi_5\\ D\end{matrix}}{F}\\ \pi_7\end{matrix} .$$

Note que, apenas efetuando a redução $\pi_6 \rightarrow \pi_6'$ em π°, temos que $\pi^\circ \rightarrow \pi'^\circ$.

A solução é portanto análoga à do Caso 5.1.1.

<u>SubCaso 5.4.3</u>: π_3 e π_1 são normais

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(9) temos que $FP(\pi)= A_2 \vee A_3= FP(\pi')$. Portanto:

$$\pi^\circ \equiv \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\pi_6\\ E\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ C\\ \pi_5\\ D\end{matrix}}{F}\\ \pi_7\end{matrix} \quad \text{e} \quad \pi'^\circ \equiv \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\pi_6'\\ E\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ C\\ \pi_5\\ D\end{matrix}}{F}\\ \pi_7\end{matrix} .$$

Note que, apenas efetuando a redução $\pi_6 \rightarrow \pi_6'$ em π°, temos que $\pi^\circ \rightarrow \pi'^\circ$.

A solução é portanto análoga à do Caso 5.1.1.

<u>CASO 6</u>: $\pi \equiv \begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A_3\end{matrix}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{matrix}[A_2]^k\\ \pi_2\\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_3\\ B\end{matrix}}{B}\,k\\ \pi_4\end{matrix}$, onde:

• $A_2 \vee A_3$ é $F(\pi)$

• A_3 não é cortada pela regra ($\vee$E) mostrada

A solução deste caso é exatamente simétrica à do Caso 5 com relação às subárvores π_2 e π_3.

<u>CASO 7</u>: π tem uma das formas:

$$\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A_2\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}[A_2]^k\\ \pi_2\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}\,k, \quad \text{ou} \quad \pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \perp\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}[A_2]^k\\ \pi_2\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}\,k \text{ onde:}$$

• $A_2 \vee A_3$ é $F(\pi)$

• A_2 é cortada pela regra ($\vee$E) mostrada

Como estes dois casos se comportam de maneira semelhante com relação à definição de pior seqüência (Definição 7.1.5-(7)), vamos tratá-los de maneira unificada. Por economia escreveremos a solução apenas para a primeira forma de π, sendo que para a segunda o procedimento é análogo.

Temos tantos subcasos quantas forem as possibilidades para π'.

<u>SubCaso 7.1</u>: $$\pi' \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1'\\ A_2\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}[A_2]^k\\ \pi_2\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}\,k, \text{ onde } \pi_1 \to \pi_1'.$$

Temos tantos subcasos quantas forem as possibilidades para $\pi°$.

<u>SubCaso 7.1.1</u>: π_3 não é normal

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(7) temos que *FP*(π)= *FP*(π_3)= *FP*(π'). Portanto:

$$\pi^\circ \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A_2\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}[A_2]^k\\ \pi_2\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3^\circ\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}\,k, \quad \pi'^\circ \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1'\\ A_2\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}[A_2]^k\\ \pi_2\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3^\circ\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}\,k.$$

Note que, apenas efetuando a redução $\pi_1 \to \pi_1'$ em $\pi°$, temos que $\pi° \to \pi'°$.

A solução é portanto análoga à do Caso 5.1.1.

SubCaso 7.1.5: π_3 é normal

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(7) temos que $FP(\pi)= A_2 \vee A_3 = FP(\pi')$. Portanto:

$$\pi° \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ [A_2] \\ \pi_2 \\ B \\ \pi_4 \end{array} \quad \text{e} \quad \pi'° \equiv \begin{array}{c} \pi_1' \\ [A_2] \\ \pi_2 \\ B \\ \pi_4 \end{array}.$$

Note que fazendo a redução $\pi_1 \to \pi_1'$ em cada cópia de π_1 em $\pi°$ temos: $\pi° \twoheadrightarrow \pi'°$.

A solução é portanto análoga à do Caso 5.1.1.

SubCaso 7.2: π' é da forma $\pi' \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ A_2\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}[A_2]^k \\ \pi_2' \\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k \\ \pi_3 \\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B \\ \pi_4\end{array}}\, k$, onde $\pi_2 \to \pi_2'$

Temos aqui duas possibilidades, conforme o tipo de redução realizada em π_2.

SubCaso 7.2.1: A redução $\pi_2 \to \pi_2'$ é tal que $\pi_2' \equiv \begin{array}{c}\pi_5 \\ B\end{array}$ e A_2^k não ocorre em π_5

Ou seja, $\pi' \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ A_2\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}\pi_5 \\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k \\ \pi_3 \\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B \\ \pi_4\end{array}}\, k$, onde A_2 não é eliminada pela regra $(\vee E)$ mostrada.

Temos aqui tantas possibilidades quantos são os tipos de $\pi°$.

SubCaso 7.2.1.1: π_3 não é normal

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(7) temos que $FP(\pi)= FP(\pi_3)= FP(\pi')$. Portanto:

$$\pi^\circ \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A_i\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}[A_2]^k\\ \pi_2\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3^\circ\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}\,k \quad \text{e} \quad \pi'^\circ \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A_2\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}\pi_5\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3^\circ\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}\,k\,.$$

Note que, apenas efetuando a redução $\pi_2 \to \pi_5$ em π°, temos que $\pi^\circ \to \pi'^\circ$.

A solução é portanto análoga à do Caso 5.1.1.

<u>SubCaso 7.2.1.2</u>: π_3 é normal e π_1 não é

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(7) temos que $FP(\pi)= A_2 \vee A_3$ e $FP(\pi')= FP(\pi_1)$.

Portanto:

$$(xxiv)\ \pi^\circ \equiv \begin{array}{c}\pi_1\\ [A_2]\\ \pi_2\\ B\\ \pi_4\end{array} \quad \text{e} \quad \pi'^\circ \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^\circ\\ A_2\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}\pi_5\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}\,k\,.$$

$$\text{Seja } \Sigma \text{ a seguinte derivação: } \Sigma \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^\circ\\ A_i\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}[A_2]^k\\ \pi_2\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}\,k\,.$$

Sobre Σ sabemos que:

$$(xxv)\ \Sigma^\circ \equiv \begin{array}{c}\pi_1^\circ\\ [A_2]\\ \pi_2\\ B\\ \pi_4\end{array} \quad \text{e} \quad \Sigma' \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^\circ\\ A_2\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}\pi_5\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}\,k\,, \text{ onde } \Sigma \to \Sigma' \text{ através de } \pi_2 \to \pi_5.$$

(*xxvi*) Note, por (*xxiv*) e (*xxv*), que: $\pi^\circ \twoheadrightarrow \Sigma^\circ$ e $\Sigma' \equiv \pi'^\circ$.

Por (*xxvi*), usando a Proposição (*), existe um $\pi^\#$ tal que:

(*xxvii*) $\pi^\circ \overset{p}{\twoheadrightarrow}_R \pi^\#$, $\Sigma^\circ \overset{p}{\twoheadrightarrow}_R \pi^\#$ e $lp(\Sigma^\circ) < lp(\pi^\circ)$.

Logo, por (*xxvii*):

(*xxviii*) $\pi \overset{p}{\to} \pi^\circ \overset{p}{\twoheadrightarrow}_R \pi^\#$ e $\Sigma \overset{p}{\to} \Sigma^\circ \overset{p}{\twoheadrightarrow}_R \pi^\#$.

Além disso, como $lp(\Sigma)= lp(\Sigma^\circ)+ 1$ e, por (*xxvii*), $lp(\Sigma^\circ) < lp(\pi^\circ)$, temos:

($xxix$) $lp(\Sigma) \leq lp(\pi^\circ) < lp(\pi)$.

Logo, por ($xxix$), vale a hipótese indutiva para Σ. Portanto:

(xxx) Existe $\Sigma^\#$ tal que $\Sigma \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow_{\mathbf{R}} \Sigma^\#$, $\Sigma' \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow_{\mathbf{R}} \Sigma^\#$ e $lp(\Sigma') < lp(\Sigma)$.

Assim, por ($xxvi$), ($xxix$) e (xxx) temos:

($xxxi$) $lp(\pi'^\circ) = lp(\Sigma') < lp(\Sigma) < lp(\pi)$.

Como $lp(\pi') = lp(\pi'^\circ) + 1$, por ($xxxi$) temos:

($xxxii$) $lp(\pi') \leq lp(\Sigma) < lp(\pi)$.

Por ($xxviii$) e (xxx) temos que $\Sigma \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow \pi^\#$ e $\Sigma \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow_{\mathbf{R}} \Sigma^\#$. Logo, pela unicidade da pior seqüência temos que ou $\pi^\# \equiv \Sigma^\#$, ou $\pi^\# \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow \Sigma^\#$, ou $\Sigma^\# \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow \pi^\#$. Vejamos cada caso:

Se $\pi^\# \equiv \Sigma^\#$, por ($xxvi$), ($xxviii$) e (xxx) temos:

($xxxiii$) $\pi \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow \pi^\# \equiv \Sigma^\#$ e $\pi' \xrightarrow{p} \pi'^\circ \equiv \Sigma' \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow_{\mathbf{R}} \Sigma^\#$.

Se $\pi^\# \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow \Sigma^\#$, por ($xxvi$), ($xxviii$) e ($xxx$) temos:

($xxxiv$) $\pi \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow \pi^\# \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow \Sigma^\#$ e $\pi' \xrightarrow{p} \pi'^\circ \equiv \Sigma' \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow_{\mathbf{R}} \Sigma^\#$.

Se $\Sigma^\# \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow \pi^\#$, por ($xxvi$), ($xxviii$) e ($xxx$) temos:

($xxxv$) $\pi \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow \pi^\#$ e $\pi' \xrightarrow{p} \pi'^\circ \equiv \Sigma' \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow_{\mathbf{R}} \Sigma^\# \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow \pi^\#$.

Portanto, por ($xxxii$) a ($xxxv$) resolvemos o subcaso.

<u>SubCaso 7.2.1.3</u>: π_3 e π_1 são ambos normais

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(7) temos que $FP(\pi) = \mathsf{A}_2 \vee \mathsf{A}_3 = FP(\pi')$. Portanto:

$$\pi^\circ \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ [\mathsf{A}_2] \\ \pi_2 \\ \mathsf{B} \\ \pi_4 \end{array} \quad \text{e} \quad \pi'^\circ \equiv \begin{array}{c} \pi_5 \\ \mathsf{B} \\ \pi_4 \end{array}.$$

Mas observe que a redução $\pi_2 \rightarrow \pi_5$, se efetuada em π°, elimina todas as cópias de π_1 da mesma forma que em π eliminou as hipóteses A_2.

Logo: $\pi^\circ \equiv \begin{array}{c} \pi_1 \\ [\mathsf{A}_2] \\ \pi_2 \\ \mathsf{B} \\ \pi_4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \pi_5 \\ \mathsf{B} \\ \pi_4 \end{array} \equiv \pi'^\circ$. A solução é portanto análoga à do Caso 5.1.1.

<u>SubCaso 7.2.2</u>: A redução $\pi_2 \rightarrow \pi_2'$ é tal que $\pi_2' \equiv \begin{array}{c} [\mathsf{A}_2]^k \\ \pi_5 \\ \mathsf{B} \end{array}$, com $\mathsf{A}_2{}^k$ pertencendo a π_5

Ou seja, $$\pi' \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A_2\end{array}}{A_2 \vee A_3} \qquad \begin{array}{c}[A_2]^k\\ \pi_5\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}\, k\ .$$

Novamente temos dois subcasos, conforme a forma de π°.

<u>SubCaso 7.2.2.1</u>: π_3 não é normal

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(7) temos que $FP(\pi)= FP(\pi_3)= FP(\pi')$. Portanto:

$$\pi^\circ \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A_2\end{array}}{A_2 \vee A_3} \qquad \begin{array}{c}[A_2]^k\\ \pi_2\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3^\circ\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}\, k\ , \quad \pi'^\circ \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A_2\end{array}}{A_2 \vee A_3} \qquad \begin{array}{c}[A_2]^k\\ \pi_5\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3^\circ\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}\, k\ .$$

Note que, apenas efetuando a redução $\pi_2 \to \pi_5$ em π°, temos que $\pi^\circ \to \pi'^\circ$.

A solução é portanto análoga à do Caso 5.1.1.

<u>SubCaso 7.2.2.2</u>: π_3 é normal

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(7) temos que $FP(\pi)= A_2 \vee A_3= FP(\pi')$. Portanto:

$$\pi^\circ \equiv \begin{array}{c}\pi_1\\ [A_2]\\ \pi_2\\ B\\ \pi_4\end{array}\ , \quad \pi'^\circ \equiv \begin{array}{c}\pi_1\\ [A_2]\\ \pi_5\\ B\\ \pi_4\end{array}\ .$$

Note que, apenas efetuando a redução $\pi_2 \to \pi_5$ em π°, temos que $\pi^\circ \to \pi'^\circ$.

A solução é portanto análoga à do Caso 5.1.1.

<u>SubCaso 7.3</u>: $$\pi' \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A_2\end{array}}{A_2 \vee A_3} \qquad \begin{array}{c}[A_2]^k\\ \pi_2\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3'\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}\, k\ , \text{ onde } \pi_3 \to \pi_3'$$

O resultado segue de maneira análoga ao SubCaso 5.3.

SubCaso 7.4: $\pi' \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{A_i}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{matrix}[A_2]^k \\ \pi_2 \\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_3]^k \\ \pi_3 \\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B \\ \pi_4'\end{matrix}}\,k$, onde $\pi_4 \to \pi_4'$

O resultado segue de maneira análoga ao SubCaso 5.4.

CASO 8: $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{A_3}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{matrix}[A_2]^k \\ \pi_2 \\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_3]^k \\ \pi_3 \\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B \\ \pi_4\end{matrix}}\,k$, onde:

- $A_2 \vee A_3$ é $F(\pi)$
- A_3 é cortada pela regra ($\vee$E) mostrada

A solução deste caso é exatamente simétrica à do Caso 7, com relação às subárvores π_2 e π_3.

CASO 9: $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{A}}{\exists xA} \quad \begin{matrix}[A] \\ \pi_2 \\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B \\ \pi_3\end{matrix}}$ ou $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\perp}}{\exists xA} \quad \begin{matrix}\pi_2 \\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B \\ \pi_3\end{matrix}}$ onde:

- $\exists xA$ é $F(\pi)$;
- A regra ($\exists$E) mostrada não elimina hipótese de π

A solução deste caso segue de maneira análoga à do Caso 1, provada em **Massi[1990]**, pp. 92-95.

CASO 10: $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{A}}{\exists xA} \quad \begin{matrix}[A]^k \\ \pi_2 \\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B \\ \pi_3\end{matrix}}\,k$ ou $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\perp}}{\exists xA} \quad \begin{matrix}[A]^k \\ \pi_2 \\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B \\ \pi_3\end{matrix}}\,k$, onde:

- $\exists xA$ é $F(\pi)$
- A regra ($\exists$E) mostrada corta hipóteses de π

A solução deste caso segue de maneira análoga à do Caso 2, provada em **Massi[1990]**, pp. 96-100.

CASO 11: $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{A \vee B} \quad \overset{\pi_2}{C} \quad \overset{\pi_3}{C}}{C} \qquad \Sigma_4}{\underset{\pi_5}{D}}$, onde:

- C, conseqüência de ($\vee$E), é $F(\pi)$ e a última ocorrência de um segmento máximo

Temos tantos subcasos quantas forem as possibilidades para π'.

SubCaso 11.1: $\pi' \equiv \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1'}{A \vee B} \quad \overset{\pi_2}{C} \quad \overset{\pi_3}{C}}{C} \qquad \Sigma_4}{\underset{\pi_5}{D}}$, onde $\pi_1 \rightarrow \pi_1'$

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(13) temos que $FP(\pi)$= A$\vee$B= $FP(\pi')$. Portanto:

$$\pi^\circ \equiv \dfrac{\overset{\pi_1}{A \vee B} \quad \dfrac{\overset{\pi_2}{C} \quad \Sigma_4}{D} \quad \dfrac{\overset{\pi_3}{C} \quad \Sigma_4}{D}}{\underset{\pi_5}{D}} \quad \text{e} \quad \pi'^\circ \equiv \dfrac{\overset{\pi_1'}{A \vee B} \quad \dfrac{\overset{\pi_2}{C} \quad \Sigma_4}{D} \quad \dfrac{\overset{\pi_3}{C} \quad \Sigma_4}{D}}{\underset{\pi_5}{D}}.$$

Note que, apenas efetuando a redução $\pi_1 \rightarrow \pi_1'$ em π°, temos que $\pi^\circ \rightarrow \pi'^\circ$.

A solução é portanto análoga à do Caso 5.1.1.

SubCaso 11.2: $\pi' \equiv \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{A \vee B} \quad \overset{\pi_2'}{C} \quad \overset{\pi_3}{C}}{C} \qquad \Sigma_4}{\underset{\pi_5}{D}}$, onde $\pi_2 \rightarrow \pi_2'$

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(13) também temos que $FP(\pi)$= A$\vee$B= $FP(\pi')$, e portanto a solução segue análoga à do Casso 11.1.

SubCaso 11.3: $\pi' \equiv \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{A \vee B} \quad \overset{\pi_2}{C} \quad \overset{\pi_3'}{C}}{C} \qquad \Sigma_4}{\underset{\pi_5}{D}}$, onde $\pi_3 \rightarrow \pi_3'$

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(13) também temos que $FP(\pi)$= A∨B= $FP(\pi')$, e portanto a solução segue análoga à do Casso 11.1.

SubCaso 11.4: $\pi' \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\\ A\vee B & C & C\end{matrix}}{C} \quad \Sigma'_4}{\begin{matrix}D\\ \pi_5\end{matrix}}$, onde $\Sigma_4 \to \Sigma'_4$

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(13) temos que $FP(\pi)$= A∨B= $FP(\pi')$. Portanto:

$$\pi^\circ \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A\vee B\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\pi_2\\ C\end{matrix} \quad \Sigma_4}{D} \quad \dfrac{\begin{matrix}\pi_3\\ C\end{matrix} \quad \Sigma_4}{D}}{\begin{matrix}D\\ \pi_5\end{matrix}} \quad \text{e} \quad \pi'^\circ \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A\vee B\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\pi_2\\ C\end{matrix} \quad \Sigma'_4}{D} \quad \dfrac{\begin{matrix}\pi_3\\ C\end{matrix} \quad \Sigma'_4}{D}}{\begin{matrix}D\\ \pi_5\end{matrix}}.$$

Note que, apenas efetuando duas vezes a redução $\Sigma_4 \to \Sigma'_4$ em π°, uma em cada cópia de Σ_4, temos que $\pi^\circ \twoheadrightarrow \pi'^\circ$.

A solução é portanto análoga à do Caso 5.1.1.

SubCaso 11.5: $\pi' \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\\ A\vee B & C & C\end{matrix}}{C} \quad \Sigma_4}{\begin{matrix}D\\ \pi'_5\end{matrix}}$, onde $\pi_5 \to \pi'_5$

Neste caso, como C é $F(\pi)$, π e π' devem ter as seguintes formas:

$$\pi \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_6\\ F\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\\ A\vee B & C & C\end{matrix}}{C} \quad \Sigma_4}{D}\\ \pi_5\\ E\end{matrix}}{\begin{matrix}G\\ \pi_7\end{matrix}} \quad \text{e} \quad \pi' \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi'_6\\ F\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\\ A\vee B & C & C\end{matrix}}{C} \quad \Sigma_4}{D}\\ \pi_5\\ E\end{matrix}}{\begin{matrix}G\\ \pi_7\end{matrix}}, \text{ onde } \pi_6 \to \pi'_6.$$

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(13) também temos que $FP(\pi)$= A∨B= $FP(\pi')$, e a solução segue análoga à do Casso 11.1.

Caso 12: $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 & \pi_2\\ \exists xA & C\end{matrix}}{C} \quad \Sigma_4}{\begin{matrix}D\\ \pi_5\end{matrix}}$, onde:

- C, conseqüência de (∃E), é $F(\pi)$ e a última ocorrência de um segmento máximo

A solução deste caso segue análoga à do Caso 11.

Assim, por verificação de todos os casos possíveis para $FP(\pi)$, demonstramos o teorema. ♦

Considerando a descrição do nosso método de prova apresentada em 6.4.2, com este resultado já temos realizados até aqui os passos (*a*) e (*b*) daquela descrição. Para completarmos a extensão dos nossos resultados para o sistema I, temos que efetuar o passo (*c*). Para isso vamos estender a definição de $o(\pi)$ para I e provar que $o(\pi) < \omega$ e $o(\pi) = lp(\pi)$ para toda derivação π de I. O primeiro passo é estender a definição de segmento-α para I.

7.1.8 Extensão da Noção de Segmento-α de C' para I

Esta extensão é feita de maneira bastante direta. Basta considerarmos as Definições 2.1.1 a 2.1.10 apresentadas no Capítulo II e substituirmos as seguintes referências:

(*a*) onde se lê C' leia-se I;
(*b*) onde se lê *ocorrência* leia-se *elemento* (Definição 7.1.2);
(*c*) onde se lê *fórmula máxima* leia-se *elemento máximo* (Definição 7.1.3).

Fazendo estas substituições já temos definida a noção de segmento-α para derivações em I. Aplicando estas substituições às Definições 2.1.11 e 2.1.13 também estendemos para I as noções de ocorrência pesada *OP*, ocorrência candidata a fórmula máxima *CM* e ocorrência associada a ocorrência pesada, que passam, respectivamente, a serem referidas, por *elemento pesado EP*, *elemento candidato a elemento máximo CM* e *elemento associado a elemento pesado*.

7.1.8.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) É importante frisarmos que o comprimento de um segmento ρ (Definição 2.1.4) em uma derivação π de I não corresponde ao número de ocorrências de fórmulas em ρ, mas ao número de elementos em ρ e, portanto, as Definições 2.1.7 e 2.1.8 de centro e ocorrência simétrica têm elementos como base, e não ocorrências de fórmula.

(*b*) É fácil ver, pela definição das regras ($\exists$E) e ($\vee$E), que se $\rho = A_1, \ldots, A_n$ é segmento-α de nível 1 em π, então os únicos elementos de ρ cujas fórmulas podem ter os conectivos $\exists$ ou $\vee$ como conectivos principais são A_1 ou A_n. O conectivo principal das fórmulas de cada A_i ($1 < i < n$) é certamente $\supset$ ou $\wedge$ ou $\forall$.

(*c*) Também é fácil ver, pela definição da regra ($\perp_I$), que a única ocorrência de $\rho = A_1, \ldots, A_n$ que pode ser conseqüência de ($\perp_I$) é A_1.

(*d*) Quando ψ é EP_π tal que ψ é o primeiro elemento seguinte a X, uma cadeia-φ em π, dizemos que *ψ é elemento pesado limite* em π, o que denotamos por EPl_π.

(*e*) Chamamos de *peso-1* de uma derivação π em I, e denotamos por $p_1(\pi)$, o número de elementos pesados de π. Note que estamos chamando de peso-1 o que em C' chamávamos simplesmente de *peso*.

(*f*) Uma observação que merece destaque é o fato de que um único elemento pesado φ pode ter mais de um elemento associado, cada um deles devido a um segmento-α ao qual φ pertence. Vejamos o seguinte exemplo:

$$\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ B\vee D\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[B]^k\\ \pi_2\\ A\end{array}}{(\exists xA)_1} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[D]^k\\ \pi_3\\ A\end{array}}{(\exists xA)_2}{\scriptstyle (k)}}{(\exists xA)_3} \quad \begin{array}{c}\pi_4\\ G\end{array}}{(\exists xA)\wedge G}}{(\exists xA)_4} \quad \begin{array}{c}[A]^r\\ \pi_5\\ C\end{array}{\scriptstyle (r)}}{\begin{array}{c}C\\ \pi_6\end{array}}\ .$$

π tem dois segmentos-α de nível 1, que são:

$$\rho_1 = [(\exists xA)_1, (\exists xA)_3], [(\exists xA)\wedge G], [(\exists xA)_4] \quad \text{e}$$
$$\rho_2 = [(\exists xA)_2, (\exists xA)_3], [(\exists xA)\wedge G], [(\exists xA)_4].$$

Os subíndices são apenas para distinção de referência entre ocorrências com a mesma forma e os colchetes delimitam os elementos. Podemos ver que o elemento $[(\exists xA)_4]$ possui dois elementos associados, que são $[(\exists xA)_1, (\exists xA)_3]$, devido a ρ_1, e $[(\exists xA)_2, (\exists xA)_3]$, devido a ρ_2. Apesar de compartilharem a ocorrência de fórmula $(\exists xA)_3$, estes dois elementos são distintos.

Devido à introdução de novos conectivos e à presença dos elementos com comprimento maior que 1, a extensão da definição de ocorrência multiplicativa não se faz de maneira tão direta. Vejamos.

7.1.9 DEFINIÇÃO: Elemento Multiplicativo (EM_π)

φ é *elemento multiplicativo em* π (EM_π) quando φ é EP_π e uma das três condições abaixo é satisfeita por φ em π.

(1) $l(\varphi) > 1$ ou $l(\psi) > 1$, onde $\psi = ass_\pi(\varphi)$;

(2) φ é EPl_π e ξ, uma das pontes da cadeia X que antecede φ, é tal que $l(\xi) > 1$;

(3) $l(\varphi) = 1$ e, considerando R a regra de eliminação da qual φ é premissa maior, uma das condições abaixo é satisfeita:

(3.1) R é ($\supset$E) e a regra de introdução que gera alguma das $ass_\pi(\varphi)$ corta top-fórmula de π;

(3.2) R é ($\exists$E) ou ($\vee$E) e corta alguma top-fórmula de π.

7.1.9.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Se φ é EM_π e a condição (2) acima é satisfeita ou existe $\psi \neq \varphi$ tal que $l(\psi) > 1$ e $\psi = ass_\pi(\varphi)$, então dizemos que *φ é elemento multiplicativo de tipo 1 em π*, o que denotamos por EM^1_π .

(*b*) Se φ é EM_π, $l(\varphi) = 1$ e φ não é EM^1_π, então dizemos que *φ é elemento multiplicativo de tipo 3 em π*, o que denotamos por EM^3_π.

(*c*) Se φ é EM_π e não é EM^1_π nem EM^3_π, então dizemos que *φ é elemento multiplicativo de tipo 2 em π*, o que denotamos por EM^2_π.

(*d*) Se φ é EM^2_π, então é claro que $l(\varphi) > 1$ e π tem a seguinte forma: $\pi \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1 & \\ A & \Sigma_2\end{matrix}}{\begin{matrix}B \\ \pi_4\end{matrix}}$,

onde A é a última ocorrência do elemento φ e é premissa maior de regra de eliminação em π. Neste caso, se A é da forma $C \supset B$, então $\Sigma_2 = \{\pi_2\}$ e ocorre à esquerda de A; se A é de uma das formas $\forall x B$ ou $C \wedge B$ ou $B \wedge C$, então $\Sigma_2 = \emptyset$ (a seqüência vazia); se A é da forma $C \vee D$, $\Sigma_2 = \{\pi_2, \pi_3\}$; e se A é da forma $\exists x C$, então $\Sigma_2 = \{\pi_2\}$.

(*e*) A uma derivação que não possui elemento multiplicativo chamamos *derivação estrela*.

(*f*) O *grau de um elemento* φ, $gr(\varphi)$, é definido, exatamente como em C', como o número de conectivos da fórmula de φ. O *grau máximo multiplicativo* da derivação π, $g(\pi)$, também como em C' é definido por: $g(\pi)= max\{gr(\varphi) \,/\, \varphi \text{ é } EM_\pi\}$.

Vamos agora apresentar todos os passos formais da extensão da definição de $o(\pi)$, entre eles a nova seqüência estrela. Após estas definições formais faremos um comentário informal explicando a intuição da estratégia adotada nesta extensão.

7.1.10 DEFINIÇÃO: Operação $\xrightarrow{1}$

Seja φ um EM^1_π. Sejam $\psi_1, ..., \psi_m$ todos os elementos associados a φ, distintos de φ, tais que $l(\psi_i) > 1$, para $1 \leq i \leq m$. Sejam $\psi_{m+1}, ..., \psi_n$ todas as pontes de todos os segmentos-α de π, nos quais a condição 7.1.9-(2) é satisfeita para φ. Seja ψ_k um elemento tal que $1 \leq k \leq n$ e, para todo $j \neq k$ tal que $1 \leq j \leq n$, $pos_\pi((\psi_k)^1) > pos_\pi((\psi_j)^1)$.

Nestas condições é certo que π tem uma das seguintes formas:

$$\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{ccc}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\\ C\vee D & A & A\end{array}}{A}\begin{array}{c}\\ \pi_4\\ A\end{array}\quad \Sigma_5}{D}\ \pi_6 \qquad \text{ou} \qquad \pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\pi_1 & \pi_2\\ \exists xB & A\end{array}}{A}\begin{array}{c}\\ \pi_4\\ A\end{array}\quad \Sigma_5}{D}\ \pi_6$$

, onde:

(*a*) A ocorrência A, raiz de π_4, é a última ocorrência do elemento φ, e é premissa maior de regra de eliminação.

(*b*) A ocorrência A, top-fórmula destacada de π_4, é $(\psi_k)^2$. $(\psi_k)^1$ é ou $r(\pi_2)$ ou $r(\pi_3)$.

Definimos a operação $\xrightarrow{1}$ da seguinte forma:

Quando $(\psi_k)^1 = r(\pi_2)$, temos:

$$\pi \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\overset{\pi_1}{C\vee D}\quad \overset{\pi_2}{A}\quad \overset{\pi_3}{A}}{A}\\ \pi_4\\ A\end{array}\qquad \Sigma_5}{D}\\ \pi_6\end{array} \quad \overset{1}{\rightarrow} \quad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{C\vee D}\quad \begin{array}{c}\pi_2\\ A\\ \pi_4\\ A\end{array}\quad \overset{\pi_3}{A}}{A}\qquad \Sigma_5}{D}\\ \pi_6\end{array} \quad \text{ou}$$

$$\pi \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\overset{\pi_1}{\exists xB}\qquad \overset{\pi_2}{A}}{A}\\ \pi_4\\ A\end{array}\qquad \Sigma_5}{D}\\ \pi_6\end{array} \quad \overset{1}{\rightarrow} \quad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\exists xB}\qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ A\\ \pi_4\\ A\end{array}}{A}\qquad \Sigma_5}{D}\\ \pi_6\end{array}\ .$$

Quando $(\psi_k)^1 = r(\pi_3)$ temos:

$$\pi \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\overset{\pi_1}{C\vee D}\quad \overset{\pi_2}{A}\quad \overset{\pi_3}{A}}{A}\\ \pi_4\\ A\end{array}\qquad \Sigma_5}{D}\\ \pi_6\end{array} \quad \overset{1}{\rightarrow} \quad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{C\vee D}\quad \overset{\pi_2}{A}\quad \begin{array}{c}\pi_3\\ A\\ \pi_4\\ A\end{array}}{A}\qquad \Sigma_5}{D}\\ \pi_6\end{array}\ .$$

7.1.10.1 OBSERVAÇÃO:

Seja $\psi = A_1, \ldots, A_n$ um elemento tal que $\psi = ass_\pi(\varphi)$ e $n > 1$, ou seja, $l(\psi) > 1$. A operação $\overset{1}{\rightarrow}$ se aplica a elementos como ψ e tem por objetivo tornar ψ um elemento unitário, transferindo as ocorrências $A_1, \ldots, A_{n-1}$ de ψ para φ. Note que após a operação $\overset{1}{\rightarrow}$ em ψ, o comprimento de ψ diminui uma unidade e o de φ aumenta uma unidade.

7.1.11 DEFINIÇÃO: Derivação Marcada

Dizemos que π é uma *derivação marcada* quando toda ocorrência φ que é premissa maior de regra ($\exists$E) ou ($\vee$E) possui uma marca numérica para algum número natural n. Denotaremos estas ocorrências por $(\varphi)^{(n)}$.

7.1.11.1 NOTAÇÕES:

(*a*) Denotamos a soma total das marcas numéricas de uma derivação marcada π por $m(\pi)$.

(*b*) Definimos o *peso* de uma derivação marcada π, $p(\pi)$, por: $p(\pi) = p_1(\pi) + m(\pi)$, onde $p_1(\pi)$ é como definido em 7.1.8.1-(*e*).

(*c*) Dizemos que $\pi \xrightarrow{0} \pi'$, quando π' é obtido de π marcando-se todas as premissas maiores das regras ($\exists$E) e ($\vee$E) de π com zero.

7.1.12 DEFINIÇÃO: Operação $\xrightarrow{2}$

Seja π uma derivação marcada e φ um EM^2_π. π tem uma das seguintes formas:

$$\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\(B \vee C)^{(n)}\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\A\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_3\\A\end{array}}{A} \quad \Sigma_4}{\begin{array}{c}D\\\pi_5\end{array}} \quad \text{ou} \quad \pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\(\exists xB)^{(m)}\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\A\end{array}}{A} \quad \Sigma_4}{\begin{array}{c}D\\\pi_5\end{array}}, \text{ onde:}$$

a ocorrência A, conseqüência da regra de ($\vee$E) ou ($\exists$E) mostrada, é a última ocorrência do elemento φ e é premissa maior de regra de eliminação, sendo que Σ_4 pode ocorrer à esquerda de A.

Definimos então a operação $\xrightarrow{2}$ da seguinte forma:

$$\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\(B \vee C)^{(n)}\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\A\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_3\\A\end{array}}{A} \quad \Sigma_4}{\begin{array}{c}D\\\pi_5\end{array}} \quad \xrightarrow{2} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\(B \vee C)^{(n+1)}\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\A\end{array} \quad \Sigma_4}{D} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_3\\A\end{array} \quad \Sigma_4}{D}}{\begin{array}{c}D\\\pi_5\end{array}}$$

e

$$\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\(\exists xB)^{(m)}\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\A\end{array}}{A} \quad \Sigma_4}{\begin{array}{c}D\\\pi_5\end{array}} \quad \xrightarrow{2} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\(\exists xB)^{(m+1)}\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\A\end{array} \quad \Sigma_4}{D}}{\begin{array}{c}D\\\pi_5\end{array}}.$$

7.1.12.1 OBSERVAÇÃO:

Note que a operação $\overset{2}{\rightarrow}$ é de fato uma redução permutativa (Definições 1.4.9 e 1.4.10) que, além de realizar a redução, acrescenta uma unidade na marca numérica da premissa maior da regra de ($\exists$E) ou ($\vee$E) expressa.

7.1.13 DEFINIÇÃO: Multiplicação Estrela ($\overset{*}{\rightarrow}$)

Seja φ um EM_{π}^{3} e ψ o único elemento em π tal que $\psi = ass_{\pi}(\varphi)$. Definimos a multiplicação-* de φ em π como uma das transformações abaixo, dependendo da forma de φ:

(*a*) Se $\varphi \equiv A \supset B$, definimos:

$$\pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array}\quad \begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_2\\ A\supset B\end{array}}{B} \\ \pi_3 \end{array} \quad \overset{*}{\rightarrow} \quad \begin{array}{c} \dfrac{A \quad \begin{array}{c}\pi_1\\ [A]\\ \pi_2\\ A\supset B\end{array}}{B}\\ \pi_3\end{array}$$

, onde:

- as hipóteses destacadas de π_2 são todas cortadas pela regra de introdução que gera o elemento associado a φ em π.

(*b*) Se $\varphi \equiv \exists xA$, definimos:

$$\pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\\ \pi_2\\ \exists xA\end{array}\quad \begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_3\\ B\end{array}}{B}\,k \\ \pi_4 \end{array} \quad \overset{*}{\rightarrow} \quad \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}A\\ \pi_2\\ \exists xA\end{array}\quad \begin{array}{c}\pi_1\\ [A]\\ \pi_3\\ B\end{array}}{B}\\ \pi_4\end{array}$$

, onde:

- $A = r(\pi_1)$ é a premissa do elemento associado a φ, e as hipóteses destacadas de π_3 são todas cortadas pela regra ($\exists$E) expressa.

(*c*) Se $\varphi \equiv A \vee B$, definimos:

$$(c.1)\ \pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\\ \pi_2\\ A\vee B\end{array}\quad \begin{array}{c}[A]^k\\ \pi_3\\ C\end{array}\quad \begin{array}{c}\pi_4\\ C\end{array}}{C}\,k \\ \pi_5 \end{array} \quad \overset{*}{\rightarrow} \quad \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}A\\ \pi_2\\ A\vee B\end{array}\quad \begin{array}{c}\pi_1\\ [A]\\ \pi_3\\ C\end{array}\quad \begin{array}{c}\pi_4\\ C\end{array}}{C}\\ \pi_5\end{array}$$

, onde:

- $A = r(\pi_1)$ é a premissa do elemento associado a φ, e as hipóteses destacadas de π_3 são todas cortadas pela regra ($\vee$E) expressa.

$$(c.2)\ \pi \equiv \dfrac{\begin{array}{ccc} \pi_1 & & \\ \mathrm{B} & & [\mathrm{B}]^k \\ \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \\ \mathrm{A} \vee \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{C} \end{array}}{\begin{array}{c} \mathrm{C} \\ \pi_5 \end{array}}{\scriptstyle k} \quad \overset{*}{\rightarrow} \quad \dfrac{\begin{array}{ccc} & & \pi_1 \\ \mathrm{B} & & [\mathrm{B}] \\ \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \\ \mathrm{A} \vee \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{C} \end{array}}{\begin{array}{c} \mathrm{C} \\ \pi_5 \end{array}}, \text{ onde:}$$

• B= $r(\pi_1)$ é a premissa do elemento associado a φ, e as hipóteses destacadas de π_4 são todas cortadas pela regra (∨E) expressa.

7.1.14 DEFINIÇÃO: Quantidade de Ocorrências de Grau Máximo do Tipo 1 - $ng_1(\pi)$

Seja Σ_1 um subconjunto das ocorrências de fórmula de π definido por:

$\zeta \in \Sigma_1 \Leftrightarrow$ existe um EM_π φ, com $gr(\varphi)= g(\pi)$, tal que uma das propriedades seguintes é válida:

(1) ζ pertence a algum elemento ψ, distinto de φ, tal que $\psi= ass_\pi(\varphi)$;

(2) φ é EPl_π e ζ pertence a algum elemento ξ que é ponte da cadeia-φ que antecede φ.

Ao número total de ocorrências de fórmula em π que pertencem a Σ_1 chamamos *quantidade de ocorrências de grau máximo do tipo 1*, e denotamos por $ng_1(\pi)$.

7.1.14.1 OBSERVAÇÃO:

$ng_1(\pi)$ representa a soma do número total de ocorrências pertencentes aos elementos associados dos EM_π de grau máximo, com o número total de ocorrências pertencentes às pontes dos EM_π de grau máximo que são EPl_π. Note que não estamos considerando aqui os elementos que são associados a si mesmos (se $\varphi= ass_\pi(\varphi)$, as ocorrências de φ não são computadas em $ng_1(\pi)$). Note também que mesmo que uma dessas ocorrências pertença a mais de um segmento-β, ela só é contada uma vez por nossa definição.

7.1.15 DEFINIÇÃO: Quantidade Total de Ocorrências de Grau Máximo - $ng_2(\pi)$

Seja Σ_2 um subconjunto das ocorrências de fórmula de π definido por:

$\zeta \in \Sigma_2 \Leftrightarrow$ ζ pertence a algum EM_π φ, onde $gr(\varphi)= g(\pi)$.

À soma do número total de ocorrências de fórmula em π que pertencem a Σ_2, com $ng_1(\pi)$, chamamos *quantidade total de ocorrências de grau máximo*, e denotamos por $ng_2(\pi)$.

7.1.15.1 OBSERVAÇÃO:

$ng_2(\pi)$ representa a soma do número total de ocorrências pertencentes a algum EM_π de grau máximo, com o número total de ocorrências de fórmulas que pertencem aos elementos associados a estes elementos multiplicativos mais as ocorrências que pertencem aos elementos que são pontes das cadeias X que antecedem os EPl_π de grau máximo. Aqui também, mesmo que uma dessas ocorrências pertença a mais de um segmento-α, ela só é contada uma vez por nossa definição.

A seguir apresentamos a extensão das definições de ocorrência estrela e seqüência estrela.

7.1.16 DEFINIÇÃO: Elemento Estrela - $T(\pi)$

Seja π uma derivação e φ um EM_π tal que:

$$gr(\varphi)= g(\pi) \text{ e } pos_\pi((\varphi)^1)= max\{pos_\pi((\xi)^1) \ / \ \xi \text{ é } EM_\pi \text{ e } gr(\xi)= g(\pi)\}.$$

Definimos $T(\pi)$ por indução em $l(\pi)$ da seguinte forma:

(1) Se φ é EM_π^1 ou EM_π^3, então $T(\pi)= \varphi$;

(2) Se φ é EM_π^2 temos que π tem a seguinte forma: $\pi \equiv \dfrac{\overset{\pi_1}{A} \quad \Sigma_2}{\underset{\pi_4}{B}}$, onde A é a última ocorrência de φ, como descrito na Observação 7.1.9.1-(*d*). Neste caso:

(2.1) Se existe em Σ_2 alguma ocorrência com mesmo grau que φ e que pertença a algum EM_π ou a elemento associado a EM_π, então:

$$T(\pi)= T(\pi_\square), \text{ onde } \pi_\square \equiv \dfrac{A \quad \Sigma_2}{\underset{\pi_4}{B}}.$$

(2.2) Caso contrário, $T(\pi)= \varphi$.

7.1.16.1 OBSERVAÇÃO:

Não é difícil ver que, para toda derivação não estrela π, $T(\pi)$ existe e é único.

7.1.17 DEFINIÇÃO: Seqüência Estrela

Uma *seqüência estrela* para uma derivação π é uma seqüência de derivações denotadas por $\pi^{\bullet 0}$, $\pi^{\bullet 1}$, $\pi^{\bullet 2}$, ..., tal que são satisfeitas as seguintes condições:

(1) $\pi \xrightarrow{0} \pi^{\bullet 0}$;

(2) Cada $\pi^{\bullet i+1}$ é obtido de $\pi^{\bullet i}$ por uma das seguintes operações:

(2.1) Se $T(\pi^{\bullet i})$ é $EM^1_{\pi i}$, então: $\pi^{\bullet i} \xrightarrow{1} \pi^{\bullet i+1}$;

(2.2) Se $T(\pi^{\bullet i})$ é $EM^2_{\pi i}$, então: $\pi^{\bullet i} \xrightarrow{2} \pi^{\bullet i+1}$;

(2.3) Se $T(\pi^{\bullet i})$ é $EM^3_{\pi i}$ e $T(\pi^{\bullet i})$ possui apenas um elemento associado, então: $\pi^{\bullet i} \xrightarrow{*} \pi^{\bullet i+1}$;

(3) A seqüência estrela termina em $\pi^{\bullet n}$ se $\pi^{\bullet n}$ é derivação estrela ou se nenhuma transformação definida em (2) se aplica a $\pi^{\bullet n}$.

7.1.17.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Vale lembrar que segundo a Observação 7.1.11.1-(*c*), a operação $\pi \xrightarrow{0} \pi^{\bullet 0}$ apenas marca com 0 todas as premissas maiores das regras ($\exists$E) e ($\vee$E) de π.

(*b*) Temos pela Observação 7.1.16.1 que, para toda derivação não estrela π, $T(\pi)$ existe e é único. Portanto é claro que a seqüência estrela existe e é única para toda derivação π.

(*c*) Se a seqüência estrela para π é finita e $\pi^{\bullet n}$, sua última derivação, é derivação estrela, então denotamos $\pi^{\bullet n}$ por π^*.

(*d*) Note que em uma derivação estrela π^* todos os elementos pesados e todos os elementos associados a elementos pesados têm comprimento igual a 1. Caso contrário, pela Definição 7.1.9, π^* não seria derivação estrela. Além disso, $ng_1(\pi^*)= ng_2(\pi^*)= 0$.

(*e*) Note, pela Definição 7.1.13 de multiplicação-*, que se $T(\pi^{\bullet n})$ é EM^3 e $T(\pi^{\bullet n})$ possui mais de um elemento associado, então $\pi^{\bullet n}$ é o último elemento da seqüência estrela para π e não é elemento estrela.

(*f*) Vamos provar mais adiante que a seqüência estrela de toda derivação π termina em uma derivação estrela $\pi^{\bullet n}$, para algum $n< \omega$. Ou seja, a cada derivação π temos uma e apenas uma derivação estrela π^* associada.

7.1.18 DEFINIÇÃO: Ordinal Natural - o(π)

Seja π uma derivação em I cuja seqüência estrela é finita e termina em π*. Definimos o *ordinal natural de π*, e denotamos por *o*(π), como: *o*(π)= *p*(π*).

7.1.18.1 OBSERVAÇÕES:

(*a*) Note que, como definimos em 7.1.11.1-(*b*), *p*(π*)= p_1(π*)+ *m*(π*). Assim, *o*(π) representa o número de todos os elementos pesados em π* somado à somatória de todas as marcas de π*.

(*b*) Mais adiante vamos provar que *o*(π) está definido, é único e finito para toda derivação π. Faremos isto provando que a seqüência estrela de π está definida, é única e termina em um número finito de passos em uma derivação estrela π*.

Vamos agora explicar um pouco da intuição por trás desta definição de *o*(π).

7.1.19 Entendendo a Nova Seqüência Estrela

O objetivo da seqüência estrela é, como no caso de C', transformar π em uma derivação π* na qual podemos contar efetivamente todas as possíveis fórmulas máximas de π. Para isso a seqüência estrela tem que realizar todas as multiplicações de subárvores possíveis de ocorrerem nas seqüências de redução para π, sem no entanto reduzir de fato nenhum elemento máximo. Além disso, para que tenhamos uma atribuição numérica finita, temos que mostrar que a seqüência estrela para toda derivação π é finita e termina em uma derivação estrela.

Da mesma forma que em C', a multiplicação-* definida em 7.1.13 realiza a multiplicação de subárvores exatamente como as reduções operacionais fariam, sem no entanto eliminar nenhuma fórmula máxima atual nem potencial. Mas para o sistema I temos, além das reduções operacionais, as reduções permutativas. Definimos as operações $\xrightarrow{1}$ e $\xrightarrow{2}$ acima justamente para realizarmos, na seqüência estrela, as multiplicações que as reduções permutativas promovem. Vamos apresentar um exemplo para entendermos melhor o papel das operações $\xrightarrow{1}$ e $\xrightarrow{2}$ na seqüência estrela.

Considere π a seguinte derivação:

$$
\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ B\vee D\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[B]^k\\ \pi_2\\ A\end{matrix}}{(\exists xA)_1} \quad \dfrac{\begin{matrix}[D]^k\\ \pi_3\\ A\ .\end{matrix}}{(\exists xA)_2}\,{\scriptstyle (k)}}{(\exists xA)_3} \quad \begin{matrix}\pi_4\\ G\end{matrix}}{(\exists xA)\wedge G}}{(\exists xA)_4} \quad \begin{matrix}[A]^r\\ \pi_5\\ C\end{matrix}\,{\scriptstyle (r)}}{\begin{matrix}C\\ \pi_6\end{matrix}}
$$

Temos em π dois segmentos-α de nível 1, que são:

$\rho_1 = [(\exists xA)_1, (\exists xA)_3], [(\exists xA)\wedge G], [(\exists xA)_4]$ e

$\rho_2 = [(\exists xA)_2, (\exists xA)_3], [(\exists xA)\wedge G], [(\exists xA)_4]$.

Os índices inferiores são apenas para distinção de referência entre as várias ocorrências de $\exists xA$, e os colchetes separam os *elementos* que constituem os segmentos-α. Repare que π tem apenas uma fórmula máxima ($(\exists xA)\wedge G$). Realizando sua redução temos como resultado a seguinte derivação π':

$$
\pi' \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ B\vee D\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[B]^k\\ \pi_2\\ A\end{matrix}}{(\exists xA)_1} \quad \dfrac{\begin{matrix}[D]^k\\ \pi_3\\ A\ .\end{matrix}}{(\exists xA)_2}\,{\scriptstyle (k)}}{(\exists xA)_4} \quad \begin{matrix}[A]^r\\ \pi_5\\ C\end{matrix}\,{\scriptstyle (r)}}{\begin{matrix}C\\ \pi_6\end{matrix}}
$$

A redução de π', por sua vez, através da redução permutativa de $(\exists xA)_4$ resulta na derivação π" que tem a seguinte forma:

$$
\pi'' \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ B\vee D\end{matrix} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[B]^k\\ \pi_2\\ A\end{matrix}}{(\exists xA)_1} \quad \begin{matrix}[A]^r\\ \pi_5\\ C\end{matrix}\,{\scriptstyle (r)}}{C} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[D]^k\\ \pi_3\\ A\ .\end{matrix}}{(\exists xA)_2} \quad \begin{matrix}[A]^s\\ \pi_5\\ C\end{matrix}\,{\scriptstyle (s)}}{C}\,{\scriptstyle (k)}}{\begin{matrix}C\\ \pi_6\end{matrix}} \quad .
$$

π" possui duas fórmulas máximas ($(\exists x\mathrm{A})_1$ e $(\exists x\mathrm{A})_2$). Reduzindo cada uma destas FMs temos π''' e π'''' com a s seguintes formas:

$$\pi''' \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \mathrm{B}\vee\mathrm{D}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\mathrm{B}]^k\\ \pi_2\\ [\mathrm{A}]\\ \pi_5\\ \mathrm{C}\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\mathrm{D}]^k\\ \pi_3\\ \dfrac{\mathrm{A}}{(\exists x\mathrm{A})_2}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\mathrm{A}]^s\\ \pi_5\\ \mathrm{C}\end{matrix}}{\mathrm{C}}\,{\scriptstyle(s)}}{\begin{matrix}\mathrm{C}\\ \pi_6\end{matrix}}\,{\scriptstyle(k)}$$

$$\pi'''' \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \mathrm{B}\vee\mathrm{D}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\mathrm{B}]^k\\ \pi_2\\ [\mathrm{A}]\\ \pi_5\\ \mathrm{C}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\mathrm{D}]^k\\ \pi_2\\ [\mathrm{A}]^r\\ \pi_5\\ \mathrm{C}\end{matrix}}{\begin{matrix}\mathrm{C}\\ \pi_6\end{matrix}}\,{\scriptstyle(r)}\ .$$

Note que a redução de $(\exists x\mathrm{A})\wedge\mathrm{G}$ em π fez unir em π' os elementos associados a $(\exists x\mathrm{A})_4$ com a própria $(\exists x\mathrm{A})_4$. Esta união transformou $(\exists x\mathrm{A})_4$ de π' na última ocorrência de um segmento máximo que deve ser reduzido com redução permutativa. Tal redução transformou a ocorrência pesada $(\exists x\mathrm{A})_4$ de π' em duas fórmulas máximas de π", uma para cada elemento associado que $(\exists x\mathrm{A})_4$ possuía em π. Além disso, a subárvore π_5 foi duplicada em tal redução.

A nossa seqüência estrela deve portanto ser capaz de prever que elementos multiplicativos que possuam elementos associados com comprimento maior que 1, quando se tornarem segmentos máximos, serão segmentos máximos nos quais as reduções permutativas se aplicam.

É importante notarmos também, que a fórmula máxima $(\exists x\mathrm{A})\wedge\mathrm{G}$, que possuía apenas um elemento associado em π (ela própria), e que ocorria entre $(\exists x\mathrm{A})_4$ e seus elementos associados, não foi duplicada pela seqüência de redução, tendo sido reduzida uma única vez. Dessa forma, a nossa definição de $o(\pi)$ tem que ser boa o suficiente para prever que a ocorrência pesada $(\exists x\mathrm{A})_4$ vai ser duplicada por redução permutativa, mas que $(\exists x\mathrm{A})\wedge\mathrm{G}$ não vai, pois é reduzida antes de tal duplicação.

Assim, uma possível operação para a seqüência estrela seria transportar para junto dos elementos pesados, os elementos associados a estes EP_π que tenham comprimento maior que 1. Sem que, no entanto, tal transformação multiplicasse qualquer ocorrência de fórmula de π. É exatamente esta tarefa que a operação $\xrightarrow{1}$ definida em 7.1.10 realiza.

Uma outra possível operação para a seqüência estrela seria realizar as multiplicações que as reduções permutativas fariam nas seqüências de reduções. Esta tarefa é efetuada pela operação $\xrightarrow{2}$.

Vamos agora realizar a seqüência estrela para π para compararmos com a seqüência de redução acima.

Considere a derivação π do nosso primeiro exemplo e assuma que $\pi_1, \dots \pi_6$ são derivações estrela, ou seja, não possuem elemento multiplicativo. Pela Definição 7.1.17, $\pi^{\bullet 0}$, a primeira derivação da seqüência estrela de π tem a forma:

$$\pi^{\bullet 0} \equiv \begin{matrix} \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ (B \vee D)^{(0)}\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[B]^k\\ \pi_2\\ A\end{matrix}}{(\exists x A)_1} \quad \dfrac{\begin{matrix}[D]^k\\ \pi_3\\ A\end{matrix}}{(\exists x A)_2}}{(\exists x A)_3}\,k \quad \begin{matrix}\pi_4\\ G\end{matrix}}{\dfrac{(\exists x A) \wedge G}{((\exists x A)^{(0)})_4}} \quad \begin{matrix}[A]^r\\ \pi_5\\ C\end{matrix}}{C}\,r \\ \pi_6 \end{matrix} .$$

Nestas condições, pela Definição 7.1.16 de $T(\pi)$, temos que $[(\exists x A)_4] = T(\pi)$. Como já vimos, $[(\exists x A)_4]$ pertence a dois segmentos-β de π e possui dois elementos associados:

$\rho_1 = [(\exists x A)_1, (\exists x A)_3], [(\exists x A) \wedge G], [(\exists x A)_4]$;

$\rho_2 = [(\exists x A)_2, (\exists x A)_3], [(\exists x A) \wedge G], [(\exists x A)_4]$.

$[(\exists x A)_1, (\exists x A)_3] = ass_\pi([(\exists x A)_4])$, devido a ρ_1;

$[(\exists x A)_2, (\exists x A)_3] = ass_\pi([(\exists x A)_4])$, devido a ρ_2.

Note também que $[(\exists x A)_4]$ é EM^1 em $\pi^{\bullet 0}$, pois possui elemento associado distinto do próprio $[(\exists x A)_4]$ e com comprimento maior que 1. Portanto, o primeiro passo da seqüência estrela para π é $\pi^{\bullet 0} \xrightarrow{1} \pi^{\bullet 1}$.

Note que o elemento ψ_k no qual se aplica a operação $\xrightarrow{1}$, descrito na Definição 7.1.10, é $[(\exists x A)_1, (\exists x A)_3]$. Portanto, também pela Definição 7.1.10, $\pi^{\bullet 1}$ tem a seguinte forma:

$$\pi^{\bullet 1} \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\(B\vee D)^{(0)}\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[B]^k\\ \pi_2\\ A\end{array}}{(\exists x A)_1} \quad \begin{array}{c}\pi_4\\ G\end{array}}{\exists x A\wedge G}}{(\exists x A)_2} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[D]^k\\ \pi_3\\ A\end{array}}{(\exists x A)_3}}{((\exists x A)^{(0)})_4}\,{\scriptstyle k} \quad \begin{array}{c}[A]^r\\ \pi_5\\ C\end{array}}{C}\,{\scriptstyle r} \\ \pi_6 \end{array}$$

Os segmentos-α de $\pi^{\bullet 1}$ são:

$\rho_1^{\bullet 1} = [(\exists x A)_1], [(\exists x A)\wedge G], [(\exists x A)_2, (\exists x A)_4]$ e
$\rho_2^{\bullet 1} = [(\exists x A)_3], [(\exists x A)_4]$.

Como estamos considerando que $\pi_1, ..., \pi_6$ são derivações estrela, pela forma de $\pi^{\bullet 1}$ e pela Definição 7.1.16, temos que $[(\exists x A)_2, (\exists x A)_4] = T(\pi^{\bullet 1})$. Note também, pelas Observações 7.1.9.1, que $[(\exists x A)_2, (\exists x A)_4]$ é EM² em $\pi^{\bullet 1}$. Portanto, pela Definição 7.1.17, o segundo passo da seqüência estrela é $\pi^{\bullet 1} \xrightarrow{2} \pi^{\bullet 2}$. Assim, pela forma de $\pi^{\bullet 1}$ e pela Definição 7.1.12, $\pi^{\bullet 2}$ tem a seguinte forma:

$$\pi^{\bullet 2} \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\(B\vee D)^{(1)}\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[B]^k\\ \pi_2\\ A\end{array}}{(\exists x A)_1} \quad \begin{array}{c}\pi_4\\ G\end{array}}{\exists x A\wedge G}}{((\exists x A)^{(0)})_2} \quad \begin{array}{c}[A]^s\\ \pi_5\\ C\end{array}}{C}\,{\scriptstyle s} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[D]^k\\ \pi_3\\ A\end{array}}{((\exists x A)^{(0)})_3} \quad \begin{array}{c}[A]^r\\ \pi_5\\ C\end{array}}{C}\,{\scriptstyle r}}{C}\,{\scriptstyle k} \\ \pi_6 \end{array}$$

Os segmentos-α de $\pi^{\bullet 2}$ são:

$\rho_1^{\bullet 2} = [(\exists x A)_1], [\exists x A \wedge G], [(\exists x A)_2]$ e $\rho_2^{\bullet 2} = [(\exists x A)_3]$.

Note que $[(\exists x\mathsf{A})_2] = T(\pi^{\bullet 2})$ é EM^3. Como $[(\exists x\mathsf{A})_2]$ possui um único elemento associado em π, a multiplicação-* está definida para $[(\exists x\mathsf{A})_2]$ em π. Portanto, o terceiro passo da seqüência estrela é $\pi^{\bullet 2} \overset{*}{\rightarrow} \pi^{\bullet 3}$. Assim, pela forma de $\pi^{\bullet 2}$ e pela Definição 7.1.13-(*b*), $\pi^{\bullet 3}$ tem a seguinte forma:

$$\pi^{\bullet 3} \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\(B\vee D)^{(1)}\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A}{(\exists_x A)_1} \quad \begin{array}{c}\pi_4\\G\end{array}}{\exists_x A \wedge G}}{((\exists_x A)^{(0)})_2} \quad \begin{array}{c}[B]^k\\\pi_2\\{[A]}\\\pi_5\\C\end{array}}{C} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[D]^k\\\pi_3\\A\end{array}}{((\exists_x A)^{(0)})_3} \quad \begin{array}{c}[A]^r\\\pi_5\\C_r\end{array}}{C_k}}{C}\\C\\\pi_6\end{array}$$

Os segmentos-β de $\pi^{\bullet 3}$ são:[60]

$$\rho_1^{\bullet 3} = [(\exists x\mathsf{A})_1],\ [\exists x\mathsf{A} \wedge \mathsf{G}],\ [(\exists x\mathsf{A})_2] \quad \text{e} \quad \rho_2^{\bullet 3} = [(\exists x\mathsf{A})_3]$$

Note que $[(\exists x\mathsf{A})_3]$ é o único EM em $\pi^{\bullet 3}$ e é EM^3. Alem disso, $(\exists x\mathsf{A})_3$ é, ele próprio, seu único elemento associado. Portanto, o quarto passo da seqüência estrela para π é: $\pi^{\bullet 3} \overset{*}{\rightarrow} \pi^{\bullet 4}$. Assim, pela forma de $\pi^{\bullet 3}$ e pela Definição 7.1.13-(*b*), $\pi^{\bullet 4}$ tem a seguinte forma:

$$\pi^{\bullet 4} \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\(B\vee D)^{(1)}\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A}{(\exists_x A)_1} \quad \begin{array}{c}\pi_4\\G\end{array}}{\exists_x A \wedge G}}{((\exists_x A)^{(0)})_2} \quad \begin{array}{c}[B]^k\\\pi_2\\{[A]}\\\pi_5\\C\end{array}}{C} \quad \dfrac{\dfrac{A}{((\exists_x A)^{(0)})_3} \quad \begin{array}{c}[D]^k\\\pi_3\\{[A]}\\\pi_5\\C\end{array}}{C_k}}{C}\\C\\\pi_6\end{array}$$

60 Não estamos considerando aqui, apenas por simplicidade, que a junção $\begin{array}{c}\pi_2\\A\\\pi_5\end{array}$ criou novos segmentos-β que não existiam em π_2 nem em π_5. Isso pode de fato ocorrer, mas não interfere nos esclarecimentos que estamos apresentando.

Como estamos considerando $\pi_1, ..., \pi_6$ derivações estrela, e que as junções $\begin{matrix}\pi_2\\ [A]\\ \pi_5\end{matrix}$ e $\begin{matrix}\pi_3\\ [A]\\ \pi_5\end{matrix}$ não criam novas fórmulas máximas, temos que $\pi^{\bullet 4}$ é derivação estrela, e portanto a seqüência estrela para π é: $\pi \xrightarrow{0} \pi^{\bullet 0} \xrightarrow{1} \pi^{\bullet 1} \xrightarrow{2} \pi^{\bullet 2} \xrightarrow{*} \pi^{\bullet 3} \xrightarrow{*} \pi^{\bullet 4} \equiv \pi^*$. A nova definição de $o(\pi)$ que propusemos, além de somar todas as ocorrências pesadas de π^*, acrescenta a este número a soma total de todas as marcas numéricas das ocorrências de π^*. Vamos calcular este valor em $\pi^{\bullet 4} \equiv \pi^*$.

Note que $\pi^{\bullet 4}$ possui dois segmentos-β, que são:

$$\rho_1^* = [(\exists x A)_1], [\exists x A \wedge G], [(\exists x A)_2] \qquad \text{e} \qquad \rho_2^* = [(\exists x A)_3].$$

Este dois segmentos possuem 3 ocorrências pesadas, que são: $\exists x A \wedge G$, $(\exists x A)_2$ e $(\exists x A)_3$. Além disso, a soma das marcas numéricas em $\pi^{\bullet 4}$ é 1+ 0+ 0= 1. Logo, $p(\pi^*)$= 3+ 1= 4 e portanto, como $o(\pi)= p(\pi^*)+ 1$, temos $o(\pi)$= 5.

Voltando à seqüência de redução para π que apresentamos acima, podemos ver que ela era a única possível, e portanto era a pior seqüência para π. Além disso, ela tinha comprimento 5. Portanto, para este exemplo com π, temos $o(\pi)= lp(\pi)$.

Vamos agora explicar melhor o papel das operações $\xrightarrow{1}$ e $\xrightarrow{2}$ dentro da seqüência estrela.

A redução permutativa de um segmento máximo pode duplicar ocorrências em uma derivação. Tais duplicações têm que ser computadas na seqüência estrela por algum tipo de operação. Isso de fato é feito pela operação $\xrightarrow{2}$. Mas diferentemente das reduções operacionais, as reduções permutativas não eliminam nenhuma ocorrência da derivação. Dessa forma, não é possível alterá-las como fizemos com as reduções operacionais quando definimos as multiplicações-*. Como a operação $\xrightarrow{2}$ de fato realiza uma redução, temos que, de alguma maneira, contar esta redução em $p(\pi^*)$. Para isso introduzimos as marcas numéricas em premissas maiores de ($\exists$E) e ($\vee$E).

Mas apenas a operação $\xrightarrow{2}$ não é suficiente para tratar todos os casos. Em π, por exemplo, não é a ocorrência multiplicativa $(\exists x A)_4$ que é segmento máximo e pode sofrer redução permutativa, mas sim seus elementos associados. Não podemos aplicar redução permutativa a estes elementos associados porque ela duplicaria a fórmula máxima $\exists x A \wedge G$

que, como já vimos, não é duplicada em nenhuma seqüência de redução para π. Para resolver este problema criamos a operação $\xrightarrow{1}$. O que a operação $\xrightarrow{1}$ essencialmente faz é "abaixar" para junto da ocorrência pesada o segmento máximo que estava junto de uma das ocorrências associadas. Note, pela forma da transformação descrita na Definição 7.1.10, que a operação $\xrightarrow{1}$ não duplica nenhuma ocorrência ou subárvore da derivação. Apenas troca uma regra de lugar.

Assim, como as operações da seqüência estrela parecem, intuitivamente, realizar todas as multiplicações de ocorrências que as reduções fariam, se provarmos que para toda derivação π temos uma derivação π^* associada, obtida através de finitas operações da seqüência estrela, teremos em $o(\pi)$ uma atribuição numérica unívoca e finita que intuitivamente representa o número de todas as possíveis fórmulas máximas para π. Testar se esta intuição é correta é provar que $o(\pi)= lp(\pi)$ para toda derivação π. Antes disso vamos apresentar o esboço da prova de que, para toda derivação π, a seqüência estrela associa, através de finitos passos, uma derivação estrela finita π^*. Como corolário deste teorema obteremos a prova de que para toda derivação π, $o(\pi)$ está definido e é finito.

7.1.20 TEOREMA: Existência, Finitude e Unicidade de π^*

Para toda derivação π a seqüência estrela existe, é única, e termina, em um número finito de passos, em uma derivação estrela π^*.

<u>PROVA</u>:

Vamos apresentar aqui apenas o esboço da prova de que a nova seqüência estrela, que definimos em 7.1.17, associa a cada derivação π uma única derivação estrela, π^*, através de um número finito de passos.

Que a seqüência estrela existe e é única para toda derivação π, já vimos na Observação 7.1.17.1-(*b*). Resta portanto provar que para toda derivação π a seqüência estrela é finita e termina em uma derivação estrela π^*.

Usaremos como *índice de indução* da prova a seguinte tripla: $\langle g(\pi), ng_2(\pi), ng_1(\pi)\rangle$.

Dizemos que $\langle g(\pi), ng_2(\pi), ng_1(\pi)\rangle > \langle g(\pi'), ng_2(\pi'), ng_1(\pi')\rangle$

quando: $g(\pi)> g(\pi')$ ou

$g(\pi)= g(\pi')$ e $ng_2(\pi)> ng_2(\pi')$ ou

$g(\pi)= g(\pi')$ e $ng_2(\pi)= ng_2(\pi')$ e $ng_1(\pi)> ng_1(\pi')$.

Note que, pelas definições de $g(\pi)$, $ng_1(\pi)$ e $ng_2(\pi)$, π é uma derivação com índice de indução $\langle 0,0,0\rangle$ se, e somente se, π é uma derivação estrela. Basta portanto provarmos que, para toda derivação não estrela π, a operação da seqüência estrela está definida e transforma π em π' tal que $\langle g(\pi), ng_2(\pi), ng_1(\pi)\rangle > \langle g(\pi'), ng_2(\pi'), ng_1(\pi')\rangle$.

Analisemos cada caso da Definição 7.1.17 da seqüência estrela:

<u>CASO 1</u>: $\varphi = T(\pi)$ é EM^1_π

Neste caso a operação da seqüência estrela é: $\pi \xrightarrow{1} \pi'$.

Conforme a forma de π, de acordo com a Definição 7.1.10, um dos três casos abaixo ocorre:

$$\pi \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\\ C\vee D & A & A\end{matrix}}{A}\\ \pi_4\\ A\end{array}\quad \Sigma_5}{D}\\ \pi_6\end{array} \quad \xrightarrow{1} \quad \pi' \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} & \begin{matrix}\pi_2\\ A\\ \pi_4\end{matrix} & \\ \pi_1 & & \pi_3\\ C\vee D & A & A\end{matrix}}{A}\quad \Sigma_5}{D}\\ \pi_6\end{array} \qquad \text{ou}$$

$$\pi \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 & \pi_2\\ \exists_x B & A\end{matrix}}{A}\\ \pi_4\\ A\end{array}\quad \Sigma_5}{D}\\ \pi_6\end{array} \quad \xrightarrow{1} \quad \pi' \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} & \begin{matrix}\pi_2\\ A\\ \pi_4\end{matrix}\\ \pi_1 & \\ \exists_x B & A\end{matrix}}{A}\quad \Sigma_5}{D}\\ \pi_6\end{array} \qquad \text{ou}$$

$$\pi \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\\ C\vee D & A & A\end{matrix}}{A}\\ \pi_4\\ A\end{array}\quad \Sigma_5}{D}\\ \pi_6\end{array} \quad \xrightarrow{1} \quad \pi' \equiv \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} & & \begin{matrix}\pi_3\\ A\\ \pi_4\end{matrix}\\ \pi_1 & \pi_2 & \\ C\vee D & A & A\end{matrix}}{A}\quad \Sigma_5}{D}\\ \pi_6\end{array}\ ,$$

onde A, raiz de π_4 é, em π, a última ocorrência do elemento φ e é premissa maior de regra de eliminação . A, top-fórmula de π_4 é, em π, a segunda ocorrência do elemento associado ou da ponte relacionada a φ, segundo a Definição 7.1.10.

Não é difícil provar que a operação $\xrightarrow{1}$ não altera em nada os demais segmentos-α de π. Apenas diminui em uma unidade o comprimento de um elemento associado a φ e aumenta em uma unidade o comprimento de φ. Temos então neste caso que:

$g(\pi)= g(\pi')$, $ng_2(\pi)= ng_2(\pi')$ e $ng_1(\pi)= ng_1(\pi')+ 1$.

Portanto: $\langle g(\pi), ng_2(\pi), ng_1(\pi)\rangle > \langle g(\pi'), ng_2(\pi'), ng_1(\pi')\rangle$.

<u>CASO 2</u>: $\varphi= T(\pi)$ é EM^2_π

Neste caso a operação da seqüência estrela é: $\pi \xrightarrow{2} \pi'$.

Conforme a forma de π, de acordo com a Definição 7.1.12, um dos dois casos abaixo ocorre:

$$\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{(B \vee C)^{(n)}} \quad \overset{\pi_2}{A} \quad \overset{\pi_3}{A}}{A} \quad \Sigma_4}{\underset{\pi_5}{D}} \quad \xrightarrow{2} \quad \dfrac{\overset{\pi_1}{(B \vee C)^{(n+1)}} \quad \dfrac{\overset{\pi_2}{A} \quad \Sigma_4}{D} \quad \dfrac{\overset{\pi_3}{A} \quad \Sigma_4}{D}}{\underset{\pi_5}{D}} \quad \text{ou}$$

$$\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{(\exists_x B)^{(m)}} \quad \overset{\pi_2}{A}}{A} \quad \Sigma_4}{\underset{\pi_5}{D}} \quad \xrightarrow{2} \quad \dfrac{\overset{\pi_1}{(\exists_x B)^{(m+1)}} \quad \dfrac{\overset{\pi_2}{A} \quad \Sigma_4}{D}}{\underset{\pi_5}{D}} \quad ,$$

onde a ocorrência A, conseqüência da regra de ($\vee$E) ou ($\exists$E) mostrada, é a última ocorrência do elemento $\varphi= T(\pi)$ e é premissa maior de regra de eliminação, sendo que Σ_4 pode ocorrer à esquerda de A.

Vamos provar, neste caso, que $g(\pi)= g(\pi')$ e $ng_2(\pi)> ng_2(\pi')$.

Note que a operação $\xrightarrow{2}$ diminui o comprimento do elemento $\varphi= T(\pi)$ em uma unidade e aumenta o comprimento do elemento que contém D também em uma unidade. Além disso, no primeiro caso para a forma de π, a operação $\xrightarrow{2}$ duplicou Σ_4 e uma ocorrência de D. Os demais segmentos-α não se alteram com a operação $\xrightarrow{2}$. O próprio φ continua elemento multiplicativo em π', e portanto, $g(\pi)= g(\pi')$.

Pelo critério de escolha de $T(\pi)$, sabemos que:

(*i*) D não pertence a EM_π nem a elemento associado a EM_π que tenha mesmo grau que φ.

(ii) Σ_4 não possui elemento multiplicativo de mesmo grau que φ.

Logo $ng_2(\pi) = ng_2(\pi') + 1$, pois todos os possíveis aumentos no número de ocorrências em elementos multiplicativos se dão em elementos de grau menor que o grau de $\varphi = T(\pi)$.

Portanto: $\langle g(\pi), ng_2(\pi), ng_1(\pi)\rangle > \langle g(\pi'), ng_2(\pi'), ng_1(\pi')\rangle$.

<u>CASO 3</u>: $\varphi = T(\pi)$ é EM^3_π

Neste caso a operação da seqüência estrela é: $\pi \xrightarrow{*} \pi'$.

Como a multiplicação-* só é definida para elementos multiplicativos que possuam um único elemento associado, temos primeiramente que provar que se $\varphi = T(\pi)$ é EM^3_π, então φ possui apenas um elemento associado. O que não é difícil de perceber.

Pelas Observações 7.1.9.1, se φ é EM^3_π é porque $l(\varphi) = 1$ e para todo $\psi = ass_\pi(\varphi)$, temos $l(\psi) = 1$. Mas φ só pode ter mais de um elemento associado, se entre φ e seus elementos associados houver pelo menos uma regra (∨E) que bifurque o segmento-α ao qual φ pertence. Mas se isso ocorre, esta regra produz um elemento de comprimento maior que 1, que portanto será EM_π ou elemento associado a EM_π. Mas como este elemento ocorre entre φ e seus elementos associados, ele certamente tem grau maior que φ. Neste caso, φ não seria $T(\pi)$. Este elemento é que seria.

Portanto, se $\varphi = T(\pi)$ é EM^3_π, então φ tem apenas um elemento associado.

A prova, daqui para frente, é como no caso de C'. $\varphi = T(\pi)$ tem comprimento 1, e após a multiplicação-* deixa de ser elemento multiplicativo. Todos os elementos multiplicativos da subárvore multiplicada, e também os novos que podem surgir devido às novas junções de π', têm grau menor que $g(\pi)$. Portanto, se φ fosse o último EM_π com grau igual a $g(\pi)$ teríamos que $g(\pi') < g(\pi)$. Caso houvesse outros, $g(\pi) = g(\pi')$ mas $ng_2(\pi) > ng_2(\pi')$.

Portanto: $\langle g(\pi), ng_2(\pi), ng_1(\pi)\rangle > \langle g(\pi'), ng_2(\pi'), ng_1(\pi')\rangle$. ♦

7.1.21 COROLÁRIO: Existência, Finitude e Unicidade de $o(\pi)$

Para toda derivação π em I, $o(\pi)$ está definido, é único e finito.

<u>PROVA</u>:

Como provamos que a seqüência estrela é única e finita para toda derivação π, terminando em uma derivação estrela π*, então, pela Definição 7.1.18, já temos que $o(\pi)$ existe e é único para todo π.

Como as operações $\xrightarrow{*}$, $\xrightarrow{1}$ e $\xrightarrow{2}$ são operações finitárias (modificam finitamente a derivação), então π^* é uma derivação que tem comprimento finito. Logo π^* tem finitas ocorrências pesadas. Assim, $p_1(\pi^*)$ e $m(\pi^*)$ são finitos. Portanto, $o(\pi)= p(\pi^*)= p_1(\pi^*)+ m(\pi^*)+ 1$ é uma atribuição numérica unívoca e finita para cada derivação π de I. ♦

Com a Definição de $o(\pi)$ já devidamente estabelecida, vamos agora apresentar um esboço da prova de que $o(\pi)= lp(\pi)$ para toda derivação π de I. Com tal resultado e o Teorema 7.1.7 teremos todos os passos principais do nosso método estendidos para o sistema I.

7.1.22 Esboço Geral da Prova de que $o(\pi)= lp(\pi)$

Para o sistema C', obtivemos o resultado de que, para toda derivação π, $o(\pi)= lp(\pi)$, como um corolário do Teorema 3.4.2, onde provamos que $o(\pi)= o(\pi^\circ)+ 1$. Para provarmos que este resultado também vale para derivações em I, vamos mostrar que todos os casos novos a tratar se encaixam, de alguma maneira, nos passos da solução apresentada no Capítulo III.

Quando provamos que $o(\pi)= o(\pi^\circ)+ 1$ no Capítulo III, dividimos a solução em casos conforme a forma de $F(\pi)$. Àqueles casos temos que acrescentar as novas formas possíveis para $F(\pi)$ quando π é derivação em I. Para fazer isso vamos primeiramente apresentar, sem demonstração, algumas propriedades de derivações π nas quais $F(\pi)$ se enquadra nos novos casos devido aos conectivos $\exists$ e $\vee$. Condicionalmente a estes resultados, esboçaremos a prova de que $o(\pi)= o(\pi^\circ)+ 1$ e, conseqüentemente, $o(\pi)= lp(\pi)$ para qualquer derivação π em I. Feito isso, esboçaremos a prova de cada uma destas propriedades.

7.1.22.1 Propriedades sobre Derivações com os Novos Casos de $F(\pi)$

(*a*) Se π é uma derivação como descrita em 7.1.5-(9) tal que π_1 e π_3 são normais, ou como descrita em 7.1.5-(10) tal que π_1 e π_2 são normais, então:

- $p(\pi^*)= p(\pi^{\circ *})+ 1$.

(*b*) Se π é uma derivação como descrita em 7.1.5-(12), então:

- $p(\pi^*)= p(\pi_1^*)+ p(\pi^{\square *})+ 1$.

(c) Se π é uma derivação como descrita em 7.1.5-(13) ou 7.1.5-(14), então:

- $p_1(\pi^*) = p_1(\pi^{\circ *})$ e $m(\pi^*) = m(\pi^{\circ *}) + 1 \;\Rightarrow\; p(\pi^*) = p(\pi^{\circ *}) + 1$.

(d) Se π é uma derivação como descrita em 7.1.5-(7), 7.1.5-(8) ou 7.1.5-(11), então:

- $\pi^* \equiv \pi^*_\Delta$, onde π_Δ é obtida de π pela multiplicação-* de $F(\pi)$.

7.1.22.2 Esboço da Extensão para I da prova de que $o(\pi) = o(\pi^\circ) + 1$

Trataremos aqui apenas os novos casos para $F(\pi)$ que não foram tratados na prova do Teorema 3.4.2. Os novos casos possíveis para $F(\pi)$ são:

<u>CASO 5</u>: π é como em 7.1.5-(9)

$$\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A_2\end{matrix}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_3]^k\\ \pi_3\\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_4\end{matrix}}\,k \quad \text{ou} \quad (b)\; \pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \bot\end{matrix}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_3]^k\\ \pi_3\\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_4\end{matrix}}\,k\text{, onde:}$$

- $A_2 \vee A_3$ é $F(\pi)$ e
- A_2 não é cortada pela regra ($\vee$E) mostrada.

Note que podemos escrever π como $\pi \equiv \begin{matrix}\pi_6\\ A_2 \vee A_3\\ \pi_7\end{matrix}$, onde:

$$\pi_6 \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A_2\end{matrix}}{A_2 \vee A_3} \quad \text{ou} \quad \pi_6 \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \bot\end{matrix}}{A_2 \vee A_3} \quad \text{e} \quad \pi_7 \equiv \dfrac{A_2 \vee A_3 \quad \begin{matrix}\pi_2\\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_3]^k\\ \pi_3\\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_4\end{matrix}}\,k\,.$$

Além disso, não é difícil ver, pela Observação 7.1.8.1-(6), que as operações da seqüência estrela são todas locais a π_6 e π_7, e portanto:

$$(i)\; \pi^* \equiv \begin{matrix}\pi_6^*\\ A_2 \vee A_3\\ \pi_7^*\end{matrix}, \quad p(\pi^*) = p(\pi_6^*) + p(\pi_7^*) + 1.$$

Vamos analisar tantos subcasos quantas forem as possibilidades para π° devido à Definição 7.1.5-(9).

<u>SubCaso 5.1</u>: π_3 não é normal

Neste caso, por 7.1.5-(9) temos que:

$$\pi^\circ \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A_2\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3^\circ\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}k \quad \text{ou} \quad \pi^\circ \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \perp\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3^\circ\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}k\ .$$

Note que $\pi_7^\circ \equiv \dfrac{A_2 \vee A_3 \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3^\circ\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}k$, e que portanto: $\pi^\circ \equiv \begin{array}{c}\pi_6\\ A_2 \vee A_3\\ \pi_7^\circ\end{array}$.

(*ii*) Além disso, como em π, temos: $\pi^{\circ *} \equiv \begin{array}{c}\pi_6^*\\ A_2 \vee A_3\\ \pi_7^{\circ *}\end{array}$ e $p(\pi^{\circ *}) = p(\pi_6^*) + p(\pi_7^{\circ *}) + 1$.

Note, por (*i*), que $p(\pi_7^*) < p(\pi^*)$ e portanto vale HI para π_7. Assim temos: $p(\pi_7^*) = p(\pi_7^{\circ *}) + 1$. Portanto, por (*i*) e (*ii*), $p(\pi^*) = p(\pi^\circ)^* + 1$ e $o(\pi) = o(\pi^\circ) + 1$.

<u>SubCaso 5.2</u>: π_3 é normal mas π_1 não

Neste caso, por 7.1.5-(9) temos que:

$$\pi^\circ \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^\circ\\ A_2\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}k \quad \text{ou} \quad \pi^\circ \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^\circ\\ \perp\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}k\ .$$

Note que $\pi_6^\circ \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^\circ\\ A_2\end{array}}{A_2 \vee A_3}$ ou $\pi_6 \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1^\circ\\ \perp\end{array}}{A_2 \vee A_3}$, e que portanto: $\pi^\circ \equiv \begin{array}{c}\pi_6^\circ\\ A_2 \vee A_3\\ \pi_7\end{array}$.

(*iii*) Além disso, como em π, temos: $\pi^{\circ *} \equiv \begin{array}{c}\pi_6^{\circ *}\\ A_2 \vee A_3\\ \pi_7^*\end{array}$ e $p(\pi^{\circ *}) = p(\pi_6^{\circ *}) + p(\pi_7^*) + 1$.

Note, por (*i*), que $p(\pi_6^*) < p(\pi^*)$ e portanto vale HI para π_6. Assim temos: $p(\pi_6^*) = p(\pi_6^{\circ *}) + 1$. Portanto, por (*i*) e (*iii*), $p(\pi^*) = p(\pi^\circ)^* + 1$ e $o(\pi) = o(\pi^\circ) + 1$.

<u>SubCaso 5.3</u>: π_1 e π_3 são normais

Neste caso o resultado é imediato por 7.1.22.1-(*a*).

CASO 6: π é como em 7.1.5-(10)

$$\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A_3\end{matrix}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{matrix}[A_2]^k\\ \pi_2\\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_3\\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_4\end{matrix}}\,{}_k \text{, onde}$$

- $A_2 \vee A_3$ é $F(\pi)$ e
- A_3 não é cortada pela regra ($\vee$E) mostrada.

Este caso é análogo ao Caso 5, apenas simétrico em relação às subárvores π_2 e π_3.

CASO 7: π é como em 7.1.5-(12)

$$\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A\end{matrix}}{\exists xA} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_3\end{matrix}} \quad \text{ou} \quad \pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \perp\end{matrix}}{\exists xA} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_3\end{matrix}} \quad \text{tal que:}$$

- $\exists x A$ é $F(\pi)$;
- A regra ($\exists$E) mostrada não elimina hipótese de π.

Note que, neste caso, $\pi^{\square} \equiv \begin{matrix}\pi_2\\ B\\ \pi_3\end{matrix}$, onde $\pi^{\square}$ é obtido de π pela redução de $F(\pi)$.

(*iv*) Além disso, pela Propriedade 7.1.22.1-(*b*) temos: $p(\pi^*)= p(\pi_1^*)+ p(\pi^{\square *})+ 1$.

Temos tantos subcasos quantas são as possibilidades para π° de acordo com a Definição 7.1.5-(12).

SubCaso 7.1: π_1 não é normal

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(12) temos:

$$(v)\ \pi^\circ \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1^\circ\\ A\end{matrix}}{\exists xA} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_3\end{matrix}}.$$

Note que $\pi^{\circ\square} \equiv \begin{array}{c}\pi_2\\ \mathsf{B}\\ \pi_3\end{array} \equiv \pi^{\square}$. Além disso, em π° também se aplica 7.1.5-(12) e, portanto, pela Propriedade 7.1.22.1-(*b*) aplicada a π° temos:

(*vi*) $p(\pi^{\circ *}) = p(\pi_1^{\circ *}) + p(\pi^{\circ\square *}) + 1 \underset{(v)}{\Rightarrow} p(\pi^{\circ *}) = p(\pi_1^{\circ *}) + p(\pi^{\square *}) + 1$.

Por (*iv*) é claro que $p(\pi_1^{*}) < p(\pi^{*})$, portanto vale HI para π_1 e: $p(\pi_1^{*}) = p(\pi_1^{\circ *}) + 1$.

Assim, por (*iv*), (*v*) e (*vi*), temos $p(\pi^{*}) = p(\pi^{\circ *}) + 1 \;\Rightarrow\; o(\pi) = o(\pi^{\circ}) + 1$.

<u>SubCaso 7.2</u>: π_1 é normal

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(12) temos:

$\pi^{\circ} \equiv \begin{array}{c}\pi_2\\ \mathsf{B}\\ \pi_3\end{array} \equiv \pi^{\square}$. Assim, por (*iv*) temos: $p(\pi^{*}) = p(\pi^{\circ *}) + p(\pi_1^{*}) + 1$. Mas como π_1 é normal, então $p(\pi_1^{*}) = 0$. Logo, $p(\pi^{*}) = p(\pi^{\circ *}) + 1 \;\Rightarrow\; o(\pi) = o(\pi^{\circ}) + 1$.

<u>CASO 8</u>: π é como em 7.1.5-(13) ou 7.1.5-(14)

$$\pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{ccc}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\\ \mathsf{A} \vee \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{C}\end{array}}{\mathsf{C}} \qquad \Sigma_4}{\mathsf{D}} \\ \pi_5 \end{array} \quad \text{ou} \quad \pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\pi_1 & \pi_2\\ \exists x\mathsf{A} & \mathsf{C}\end{array}}{\mathsf{C}} \qquad \Sigma_4}{\mathsf{D}} \\ \pi_5 \end{array}, \text{ onde:}$$

- C, conseqüência de ($\vee$E) ou ($\exists$E), é $F(\pi)$.

Neste caso o resultado é imediato por 7.1.22.1-(*c*).

<u>CASO 9</u>: π é como em 7.1.5-(7)

$$(a)\ \pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \mathsf{A}_2\end{array}}{\mathsf{A}_2 \vee \mathsf{A}_3} \quad \begin{array}{c}[\mathsf{A}_2]^k\\ \pi_2\\ \mathsf{B}\end{array} \quad \begin{array}{c}[\mathsf{A}_3]^k\\ \pi_3\\ \mathsf{B}\end{array}}{\mathsf{B}}\,k \\ \pi_4 \end{array} \quad \text{ou} \quad (b)\ \pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \perp\end{array}}{\mathsf{A}_2 \vee \mathsf{A}_3} \quad \begin{array}{c}[\mathsf{A}_2]^k\\ \pi_2\\ \mathsf{B}\end{array} \quad \begin{array}{c}[\mathsf{A}_3]^k\\ \pi_3\\ \mathsf{B}\end{array}}{\mathsf{B}}\,k \\ \pi_4 \end{array}, \text{ onde:}$$

- $\mathsf{A}_2 \vee \mathsf{A}_3$ é $F(\pi)$ e
- A_2 é cortada pela regra ($\vee$E) mostrada.

Vamos considerar aqui apenas o caso (*a*) de π. O caso (*b*) é análogo, apenas substituindo A_2 por $\perp$.

Neste caso, pela Propriedade 7.1.22.1-(*d*) temos:

$$(vii)\ \pi^* \equiv \pi^*_\Delta, \quad \text{onde} \quad \pi_\Delta \equiv \dfrac{\dfrac{A_2}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{matrix}\pi_1\\ [A_2]^k\\ \pi_2\\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_3]^k\\ \pi_3\\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_4\end{matrix}}\,k\ .$$

Note que π_Δ é uma derivação que se enquadra no Caso 5 acima, e que, portanto:

$(viii)$ $p(\pi^*_\Delta) = p(\pi^{\circ *}_\Delta) + 1$.

Temos tantos subcasos possíveis quantas são as possibilidades para π° e π°_Δ.

<u>SubCaso 9.1</u>: π_3 não é normal

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(7) e 7.1.5-(9) temos:

$$\pi^\circ \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A_2\end{matrix}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{matrix}[A_2]^k\\ \pi_2\\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_3]^k\\ \pi_3^\circ\\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_4\end{matrix}}\,k \quad \text{e} \quad \pi^\circ_\Delta \equiv \dfrac{\dfrac{A_2}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{matrix}\pi_1\\ [A_2]^k\\ \pi_2\\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_3]^k\\ \pi_3^\circ\\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_4\end{matrix}}\,k\ .$$

Também pela Propriedade 7.1.22.1-(d) temos $\pi^{\circ *} \equiv \pi^{\circ *}_\Delta$ e, portanto, $p(\pi^{\circ *}) = p(\pi^{\circ *}_\Delta)$. Assim, por (vii) e $(viii)$ temos: $p(\pi^*) = p(\pi^{\circ *}) + 1 \Rightarrow o(\pi) = o(\pi^\circ) + 1$.

<u>SubCaso 9.2</u>: π_3 é normal

Neste caso, pela Definição 7.1.5-(7) e 7.1.5-(9) temos:

$$\pi^\circ \equiv \begin{matrix}\pi_1\\ [A_2]\\ \pi_2\\ B\\ \pi_4\end{matrix} \equiv \pi^\circ_\Delta.$$ Assim, é claro que $\pi^{\circ *} \equiv \pi^{\circ *}_\Delta$ e que, portanto, $p(\pi^{\circ *}) = p(\pi^{\circ *}_\Delta)$.

Logo, por (vii) e $(viii)$ temos: $p(\pi^*) = p(\pi^{\circ *}) + 1 \Rightarrow o(\pi) = o(\pi^\circ) + 1$.

<u>CASO 10</u>: π é como em 7.1.5-(8)

$$\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A_3\end{matrix}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{matrix}[A_2]^k\\ \pi_2\\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_3]^k\\ \pi_3\\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_4\end{matrix}}\,k, \text{ onde:}$$

• $A_2 \vee A_3$ é $F(\pi)$ e

• A_3 é cortada pela regra ($\vee$E) mostrada.

Neste caso, pela Propriedade 7.1.22.1-(*d*) temos:

$$\pi^* \equiv \pi^*_\Delta, \quad \text{onde } \pi_\Delta \equiv \cfrac{\cfrac{A_3}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{matrix} [A_2]^k \\ \pi_2 \\ B \end{matrix} \quad \begin{matrix} \pi_1 \\ [A_3]^k \\ \pi_3 \\ B \end{matrix}}{\begin{matrix} B \\ \pi_4 \end{matrix}}\,k\,.$$

Note que π_Δ é uma derivação que se enquadra no Caso 6 acima, e que, portanto: $p(\pi^*_\Delta)= p(\pi^{\circ *}_\Delta)+ 1$.

O resultado segue de maneira análoga ao Caso 9, apenas simétrico em relação às subárvores π_2 e π_3.

<u>CASO 11</u>: π é como em 7.1.5-(11)

$$\pi \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ \perp\end{matrix}}{\exists x A} \quad \begin{matrix} [A]^k \\ \pi_2 \\ B \end{matrix}}{\begin{matrix} B \\ \pi_3 \end{matrix}}\,k \quad \text{ou} \quad \pi \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ A\end{matrix}}{\exists x A} \quad \begin{matrix} [A]^k \\ \pi_2 \\ B \end{matrix}}{\begin{matrix} B \\ \pi_3 \end{matrix}}\,k \quad \text{onde:}$$

• $\exists x A$ é $F(\pi)$ e

• A regra ($\exists$E) mostrada elimina hipótese de π.

Vamos considerar aqui apenas o caso (*a*) de π. O caso (*b*) é análogo, apenas substituindo A por $\perp$.

Neste caso, pela Propriedade 7.1.22.1-(*d*) temos:

$$(ix)\ \pi^* \equiv \pi^*_\Delta, \quad \text{onde } \pi_\Delta \equiv \cfrac{\cfrac{A}{\exists x A} \quad \begin{matrix} \pi_1 \\ [A]^k \\ \pi_2 \\ B \end{matrix}}{\begin{matrix} B \\ \pi_3 \end{matrix}}\,k\,.$$

Note que π_Δ é uma derivação que se enquadra no Caso 7 acima, e que, portanto:

$(x)\ p(\pi^*_\Delta)= p(\pi^{\circ *}_\Delta)+ 1$.

Mas pelas Definições 7.1.5-(11) e 7.1.5-(12) temos:

$$\pi^\circ \equiv \begin{matrix}\pi_1\\ [A]\\ \pi_2\\ B\\ \pi_3\end{matrix} \equiv \pi^\circ_\Delta.$$ Assim, é claro que $\pi^{\circ *} \equiv \pi^{\circ *}_\Delta$ e que portanto, $p(\pi^{\circ *}) = p(\pi^{\circ *}_\Delta)$.

Logo, por (*ix*) e (*x*) temos: $p(\pi^*) = p(\pi^{\circ *}) + 1 \Rightarrow o(\pi) = o(\pi^\circ) + 1$.

Com isso analisamos todos os novos casos possíveis para $F(\pi)$ e terminamos o esboço da prova. ♦

Antes de completarmos esta extensão de nossos resultados para os sistemas M e I, vamos fazer um comentário importante a respeito das simplificações para derivações que possuem regras (∃E) ou (∨E) que não cortam hipóteses.

7.1.22.3 COMENTÁRIO: Simplificações-∃∨

Seja π é uma derivação com uma das seguintes formas:

$$\pi \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A_2 \vee A_3\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_4\\ C\end{matrix}}{\begin{matrix}C\\ \pi_3\end{matrix}} \quad \text{ou} \quad \pi \equiv \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \exists xA\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ C\end{matrix}}{\begin{matrix}C\\ \pi_3\end{matrix}},$$ onde nenhuma hipótese de π é cortada pelas regras (∨E) e (∃E) mostradas.

Note que apesar de $A_2 \vee A_3$ e $\exists x A$ não serem *EM* em π, π pode ser simplificada pela eliminação destas regras (∃E) e (∨E). Em ambos os casos a seguinte derivação formaliza a mesma dedução que π (possivelmente utilizando menos hipóteses):

$$\pi' \equiv \begin{matrix}\pi_2\\ C\\ \pi_3\end{matrix}.$$

Note também que a simplificação de π para π' possui as seguintes propriedades:

(*a*) $l(\pi') < l(\pi)$;

(*b*) não existe em π' nenhum *EP* que não seja *EP* em π;

(*c*) não existe em π' nenhuma regra (∃E) ou (∨E) como descritas acima que não existia em π.

Essas três propriedades garantem que podemos eliminar todas as regras (∨E) e (∃E) que não cortem hipóteses em uma derivação sem o risco de criarmos novos *EP* ou novas regras do mesmo tipo.

Devido a este fato não necessitamos incluir este tipo de simplificação em nossas reduções, e ainda que estendamos a noção de derivação normal para contemplar este caso, os nossos resultados de normalização forte e unicidade da forma normal continuam válidos.

Para completarmos a extensão destes resultados para M e I, vamos agora apresentar os esboços das demonstrações das Propriedades 7.1.22.1 que utilizamos na prova acima.

7.1.22.4 Esboço das Provas das Propriedades Apresentadas em 7.1.22.1

Item (*a*)

Se π é uma derivação como descrita em 7.1.5-(9) tal que π_1 e π_3 são normais, ou π é como em 7.1.5-(10) tal que π_1 e π_2 são normais, então:

• $p(\pi^*)= p(\pi^{\circ *})+ 1$.

<u>PROVA</u>:

Esboçarei a prova para o caso em que $\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A_2\end{array}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}k$, com $A_2 \vee A_3 = F(\pi)$.

Os demais casos são análogos a este.

(*i*) Como π_1 e π_3 são normais, pela Definição 7.1.5-(9) temos: $\pi^\circ \equiv \begin{array}{c}\pi_2\\ B\\ \pi_4\end{array}$.

(*ii*) Considere π_5 a seguinte derivação: $\pi_5 \equiv \dfrac{\dfrac{A_2}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_3]^k\\ \pi_3\\ B\end{array}}{\begin{array}{c}B\\ \pi_4\end{array}}k$.

É claro que $\pi \equiv \begin{array}{c}\pi_1\\ A_2\\ \pi_5\end{array}$ e que $\pi^* \equiv \begin{array}{c}\pi_1\\ A_2\\ \pi_5^*\end{array}$, pois π_1 é normal e, pela forma de π e Observação 7.1.8.1-(*b*), não é possível haver elemento pesado em π_5 com elemento associado em π_1. Portanto:

(*iii*) $p(\pi^*)= p(\pi_5^*)$.

Como π_3 é normal e $A_2 \vee A_3 = F(\pi_5)$ é *FM* em π_5, por (*i*) e (*ii*) não é difícil ver que:

(*iv*) $p(\pi_5^*) = p(\pi^{\circ *}) + 1$.

Isto se dá porque todas as operações da seqüência estrela de π_5 ocorrem em π_2 e π_4 da mesma forma que em π°. Além disso, $A_2 \vee A_3$ nunca é multiplicada pela seqüência estrela em π_5, pois é $F(\pi_5)$.

Logo, por (*iii*) e (*iv*), $p(\pi^*) = p(\pi^{\circ *}) + 1$. $\square$

Item (*b*)

Se π é uma derivação como descrita em 7.1.5-(12), então $p(\pi^*) = p(\pi_1^*) + p(\pi^{\square *}) + 1$.

<u>PROVA</u>:

$$(a)\ \pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array}}{\exists xA} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ B\end{array}}{B} \\ \pi_3 \end{array} \quad \text{ou} \quad (b)\ \pi \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \perp\end{array}}{\exists xA} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ B\end{array}}{B} \\ \pi_3 \end{array}, \text{ onde:}$$

- $\exists xA$ é $F(\pi)$ e
- A regra ($\exists$E) mostrada elimina hipótese de π.

Esboçarei a prova para o caso (*a*) de π. O caso (*b*) é análogo, substituindo A por $\perp$.

(*i*) Como $\exists xA$ é $F(\pi)$, note que: $\pi^{\square} \equiv \begin{array}{c}\pi_2\\ B\\ \pi_3\end{array}$.

(*ii*) Considere π_5 a seguinte derivação: $\pi_5 \equiv \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{A}{\exists xA} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ B\end{array}}{B} \\ \pi_3 \end{array}$.

É claro que $\pi \equiv \begin{array}{c}\pi_1\\ A\\ \pi_5\end{array}$ e que $\pi^* \equiv \begin{array}{c}\pi_1^*\\ A\\ \pi_5^*\end{array}$, pois, pela forma de π e Observação 7.1.8.1-(*b*), não é possível haver elemento pesado em π_5 com elemento associado em π_1. Portanto:

(*iii*) $p(\pi^*) = p(\pi_1^*) + p(\pi_5^*)$.

Note que $\exists xA = F(\pi_5)$ é *FM* em π_5. Assim, por (*i*) e (*ii*) não é difícil ver que:

(*iv*) $p(\pi_5^*) = p(\pi^{\square *}) + 1$.

Isto se dá porque todas as operações da seqüência estrela de π_5 ocorrem em π_2 e π_3 da mesma forma que em $\pi^{\square}$. Além disso, $\exists xA$ nunca é multiplicada pela seqüência estrela em π_5, pois é $F(\pi_5)$.

Logo, por (*iii*) e (*iv*), $p(\pi^*) = p(\pi^{\square *}) + p(\pi_1^*) + 1$. □

Item (*c*)

Se π é uma derivação como descrita em 7.1.5-(13) ou 7.1.5-(14), então:

• $p_1(\pi^*) = p_1(\pi^{\circ *})$ e $m(\pi^*) = m(\pi^{\circ *}) + 1 \quad \Rightarrow \quad p(\pi^*) = p(\pi^{\circ *}) + 1$.

PROVA:

Vamos esboçar a prova para o caso em que π é como em 7.1.5-(13), ou seja:

$$\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{B \vee C} \quad \overset{\pi_2}{A} \quad \overset{\pi_3}{A}}{A} \qquad \Sigma_4}{\underset{\pi_5}{D}}$$

, onde A, conseqüência de ($\vee$E), é $F(\pi)$.

Quando π é como em 7.1.5-(14) o mesmo argumento é válido.

Note, pela Definição 7.1.5-(13) que se π é como descrito acima, então:

$$\pi^{\circ} \equiv \dfrac{\overset{\pi_1}{B \vee C} \quad \dfrac{\overset{\pi_2}{A} \qquad \Sigma_4}{D} \quad \dfrac{\overset{\pi_3}{A} \qquad \Sigma_4}{D}}{\underset{\pi_5}{D}} .$$

Se considerarmos a extensão para I da Definição 3.3.1 de derivação limite, temos que não é difícil ver, a partir do Teorema 3.3.4, que os seguintes resultados devem ser válidos no sistema I:

Se $\pi^{\bullet m} \equiv \pi^{[A]}$ é a derivação limite de π para A, então:

$$\blacklozenge \ \pi^{\bullet (m-1)} \equiv \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1^{[A]}}{(B \vee C)^{(0)}} \quad \overset{\pi_2^{[A]}}{A} \quad \overset{\pi_3^{[A]}}{A}}{A} \qquad \Sigma_4^{[A]^+}}{\underset{\pi_5^{[A]^-}}{D}} ,$$

$$\blacklozenge \ \pi^{\bullet m} \equiv \pi^{[A]} \equiv \dfrac{\overset{\pi_1^{[A]}}{(B \vee C)^{(1)}} \quad \dfrac{\overset{\pi_2^{[A]}}{A} \qquad \Sigma_4^{[A]+}}{D} \quad \dfrac{\overset{\pi_3^{[A]}}{A} \qquad \Sigma_4^{[A]+}}{D}}{\underset{\pi_5^{[A]-}}{D}} \quad \text{e}$$

$$\bullet\ \pi^{\circ[\mathsf{A}]} \equiv \dfrac{\mathsf{(B \vee C)^{(0)}} \quad \begin{array}{c}\pi_1^{[A]}\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2^{[A]}\\ \mathsf{A}\end{array} \quad \Sigma_4^{[A]+}}{\mathsf{D}} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_3^{[A]}\\ \mathsf{A}\end{array} \quad \Sigma_4^{[A]+}}{\mathsf{D}}}{\begin{array}{c}\mathsf{D}\\ \pi_5^{[A]-}\end{array}} .$$

Utilizamos aqui $\pi_5^{[A]-}$ no lugar de $\pi_5^{[A]}$ e $\Sigma_4^{[A]+}$ no lugar de $\Sigma_4^{[A]}$ porque, como *gr*(D) pode ser maior que *gr*(B∨C), podemos ter tanto em π quanto em π° *EM* em π_5 cuja multiplicação-* leve subárvore de π_5 para Σ_4. No entanto, é importante notarmos que se tal fato ocorre ele ocorre da mesma forma tanto para π quanto para π°. Dessa forma, com exceção da marca numérica em B∨C, $\pi^{[A]} \equiv \pi^{\circ[A]}$. Portanto, com exceção desta mesma marca numérica, $\pi^* \equiv \pi^{\circ *}$ e então:

$p_1(\pi^*)= p_1(\pi^{\circ *})$ e $m(\pi^*)= m(\pi^{\circ *})+ 1$ (diferença esta devida à marca de B∨C).

Assim, pela Observação 7.1.11.1-(*b*) $p(\pi^*)= p(\pi^{\circ *})+ 1$. □

Item (*d*)

Se π é uma derivação como descrita em 7.1.5-(7), 7.1.5-(8) ou 7.1.5-(11), então:

$\pi^* \equiv \pi_\Delta^*$, onde π_Δ é obtida de π pela multiplicação-* de $F(\pi)$.

<u>PROVA</u>:

Vamos esboçar a prova para o caso em que π é como em 7.1.5-(7). Ou seja,

$$(a)\ \pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \mathsf{A_2}\end{array}}{\mathsf{A_2 \vee A_3}} \quad \begin{array}{c}[\mathsf{A_2}]^k\\ \pi_2\\ \mathsf{B}\end{array} \quad \begin{array}{c}[\mathsf{A_3}]^k\\ \pi_3\\ \mathsf{B}\end{array}}{\begin{array}{c}\mathsf{B}\\ \pi_4\end{array}}\,k \quad \text{ou} \quad (b)\ \pi \equiv \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \bot\end{array}}{\mathsf{A_2 \vee A_3}} \quad \begin{array}{c}[\mathsf{A_2}]^k\\ \pi_2\\ \mathsf{B}\end{array} \quad \begin{array}{c}[\mathsf{A_3}]^k\\ \pi_3\\ \mathsf{B}\end{array}}{\begin{array}{c}\mathsf{B}\\ \pi_4\end{array}}\,k, \text{ onde:}$$

- $\mathsf{A_2 \vee A_3}$ é $F(\pi)$ e
- $\mathsf{A_2}$ é cortada pela regra (∨E) mostrada.

Vamos tratar apenas o caso (*a*) de π. O caso (*b*) é análogo, substituindo $\mathsf{A_2}$, raiz de π_1, por $\bot$.

Note, pela forma de π, que: $$\pi_\Delta \equiv \dfrac{\dfrac{\mathsf{A_2}}{\mathsf{A_2 \vee A_3}} \quad \begin{array}{c}\pi_1\\ [\mathsf{A_2}]^k\\ \pi_2\\ \mathsf{B}\end{array} \quad \begin{array}{c}[\mathsf{A_3}]^k\\ \pi_3\\ \mathsf{B}\end{array}}{\begin{array}{c}\mathsf{B}\\ \pi_4\end{array}}\,k .$$

Novamente considerando a extensão para I da Definição 3.3.1 de derivação limite, não é difícil ver, a partir do Teorema 3.3.4, que os seguintes resultados também devem ser válidos no sistema I:

Se $\pi^{\bullet m} \equiv \pi^{[A]}$, a derivação limite de π para $A \equiv A_2 \vee A_3$, então:

$$\pi^{\bullet(m-1)} \equiv \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\pi_1^{[A]}\\ A_2\end{matrix}}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{matrix}[A_2]^k\\ \pi_2^{[A]+}\\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_3]^k\\ \pi_3^{[A]+}\\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_4^{[A]-}\end{matrix}}\,k \quad \text{e}$$

$$\pi^{\bullet m} \equiv \pi^{[A]} \equiv \cfrac{\cfrac{A_2}{A_2 \vee A_3} \quad \begin{matrix}\pi_1^{[A]}\\ [A_2]^k\\ \pi_2^{[A]+}\\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_3]^k\\ \pi_3^{[A]+}\\ B\end{matrix}}{\begin{matrix}B\\ \pi_4^{[A]-}\end{matrix}}\,k \equiv \pi_\Delta^{[A]}.$$

Utilizamos novamente aqui $\pi_2^{[A]+}$ e $\pi_3^{[A]+}$ nos lugares de $\pi_2^{[A]}$ e $\pi_3^{[A]}$, e $\pi_4^{[A]-}$ no lugar de $\pi_4^{[A]}$, porque como $gr(B)$ pode ser maior que $gr(A_2 \vee A_3) = gr(A)$, podemos ter tanto em π quanto em π_Δ *EM* em π_4 cuja multiplicação-* leve subárvore de π_4 para π_2 ou π_3. No entanto, é importante notarmos que:

(*a*) se tal fato ocorre, ele ocorre da mesma forma tanto para π quanto para π°;

(*b*) não é possível que as operações da seqüência estrela limite de π_Δ para A multipliquem subárvore de π_4 ou de π_2 em π_1, porque $gr(A_2) < gr(A_2 \vee A_3)$, e, segundo a Definição 3.3.1, nenhuma operação da seqüência estrela é efetuada para *EM* cujo grau seja menor que $gr(A_2 \vee A_3) = gr(A)$ na seqüência estrela limite de π_Δ para A.

Como $\pi^{[A]} \equiv \pi_\Delta^{[A]}$, então, pela unicidade da seqüência estrela, $\pi^* \equiv \pi_\Delta^*$.

Os casos em que π é como em 7.1.5-(8) ou 7.1.5-(11) são análogos a este. ♦

Com isso terminamos o esboço da extensão de nossos resultados para os sistemas M e I. Considerando os Teoremas 7.1.7 e 7.1.22.2, todos os resultados sobre C' que apresentamos na Seção 4 do Capítulo III são válidos para os sistemas M e I. São portanto válidos para M e I:

- finitude da pior seqüência (Corolário 3.4.3),
- normalização forte (Corolário 3.4.4),
- menor ordinal natural (Teorema 3.4.5) e
- unicidade da forma normal (Teorema 3.4.6).

§2 Normalização Forte via Ordinal Natural para Sistemas de Lógica Modal

Prawitz[1965] apresenta os sistemas de Dedução Natural C'_{S_4} e C'_{S_5} para as Lógicas Modais S_4 e S_5 respectivamente. Tais sistemas são formulados como extensões de C', onde a noção de fórmula é estendida de maneira óbvia para considerar o operador unário N (lê-se necessariamente), e duas regras simples de introdução e eliminação da necessidade são acrescentadas. [61] Antes de apresentarmos estas regras vamos ver duas importantes definições.

7.2.1 DEFINIÇÃO: Fórmula Essencialmente Modal com Respeito ao Sistema S_4

Definimos a noção de *fórmula essencialmente modal com respeito a S_4* por indução no comprimento das fórmulas da seguinte maneira:

(1) $\perp$ é essencialmente modal com respeito a S_4.

(2) NA é essencialmente modal com respeito a S_4.

(3) Se A e B são essencialmente modais com respeito a S_4, então $A \wedge B$ e $A \vee B$ também o são.

(4) Se A^x_t é essencialmente modal com respeito a S_4, então $\exists x A$ também o é.

7.2.2 DEFINIÇÃO: Fórmula Essencialmente Modal com Respeito ao Sistema S_5

Dizemos que uma fórmula A é *essencialmente modal com respeito a S_5* quando todo símbolo de predicado em A ocorre no escopo de um operador de necessidade N. [62]

---

[61] Para uma introdução aos sistemas de lógica modal indicamos **Chellas[1980]**.

[62] Esta definição é equivalente a estender as clausulas 3 e 4 da Definição 7.2.1 para o caso dos demais conectivos (negação, quantificador universal e implicação).

7.2.3 Os sistemas C'_{S_4} e C'_{S_5}

As regras de introdução e eliminação da necessidade têm a mesma forma em C'_{S_4} e C'_{S_5}. O que diferencia os dois sistemas, como veremos adiante, é a restrição imposta à regra (NI). As regras são:

$$\boxed{\frac{B}{NB}\,(NI) \qquad e \qquad \frac{NB}{B}\,(NE)}\;.$$

7.2.3.1 Restrição de C'_{S_4} a NI

Se a premissa B de uma aplicação de (NI) depende de uma ocorrência A, então existe uma ocorrência C que ocorre entre A e B (possivelmente idêntica a A ou B) que satisfaz as seguintes condições:

(*a*) C não depende de nenhuma hipótese da qual B não dependa.

(*b*) C não contém nenhuma ocorrência de um parâmetro próprio de uma aplicação de (∀I) [(∃E)] cuja premissa [premissa menor] ocorre acima de B ou é igual a B.

(*c*) C é essencialmente modal com respeito a S_4.

7.2.3.2 Restrição de C'_{S_5} a NI

Se a premissa B de uma aplicação de (NI) depende de hipóteses com a forma A, então toda conexão[63] entre qualquer ocorrência de A da qual B dependa, e B, contém uma ocorrência de fórmula que é essencialmente modal com respeito a S_5.

7.2.3.3 OBSERVAÇÃO:

Combinando a Definição 7.2.1, de fórmula essencialmente modal com respeito a S_4, e a Restrição 7.2.3.1 de aplicação de NI em derivações de C'_{S_4}, temos o que Prawitz chamou de *terceira formulação de* C'_{S_4}. Por sua vez, combinando a Definição 7.2.2, de fórmula essencialmente modal com respeito a S_5, e a Restrição 7.2.3.2 de aplicação de NI em derivações de C'_{S_5}, temos o que Prawitz chamou de *quarta formulação de* C'_{S_5}.[64]

[63] Uma conexão entre as ocorrências A e B é um segmento (Definição 2.1.3) cuja primeira ocorrência é A e a última é B.

[64] Cf. **Prawitz[1965]**, pp. 79, 80.

7.2.4 Validade dos Nossos Resultados para C'_{S4} e C'_{S5}

Prawitz demonstrou que os sistemas C'_{S4} e C'_{S5} acima definidos realizam as lógicas modais S_4 e S_5 e possuem um "bom comportamento" com respeito a reduções. Ou seja, se π é uma derivação em C'_{S_i} (i= 4 ou 5) então toda regra (NI) em π satisfaz as restrições de C'_{S_i}. Este "bom comportamento" representa que: se $\pi \rightarrow \pi'$, então toda regra (NI) em π' também satisfaz as restrições de C'_{S_i}. Dessa forma, a extensão do nosso resultado para estes sistemas se faz de uma maneira imediata, pois o operador unário N se comporta, com respeito às reduções, de modo idêntico ao quantificador universal $\forall$, para o qual os nossos resultados valem.

Logo todos os resultados de Massi sobre a pior seqüência de redução e os nossos sobre o ordinal $o(\pi)$ são válidos em C'_{S4} e C'_{S5}. Assim, temos que qualquer derivação π nestes sistemas é fortemente normalizável, $o(\pi)= lp(\pi)< \omega$ representa o menor limitante superior para o comprimento das seqüências de redução para π e a forma normal de toda derivação π é única.

7.2.5 Extensão dos Nossos Resultados para M_{S_4} e I_{S_4}

Os sistemas M_{S_4} e I_{S_4} são obtidos estendendo os sistemas M e I através das regras (NE) e (NI), na qual a Restrição 7.2.3.1 é aplicada. Estes são sistemas de lógica modal baseados em S_4 que têm por base, no entanto, as lógicas minimal e intuicionista, respectivamente, ao invés da lógica clássica.

Prawitz mostrou que tais sistemas também são bem comportados com respeito a reduções, da mesma forma que C'_{S_4} e C'_{S_5} o são. Assim, considerando a extensão de nossos resultados para os sistemas M e I, que apresentamos na seção anterior, temos que os nossos resultados também são estendidos a estes sistemas.

Considerações Finais

Vale a pena retomarmos aqui o percurso da realização deste trabalho, que apresentamos na introdução. A motivação inicial desta tese foi resolver um problema aberto, relativo à Tese de Doutorado de Massi, que apresentou uma prova sintática, porém condicional, dos Teoremas de Normalização Forte e Church-Rosser (unicidade da forma normal) para o sistema de Dedução Natural C'. Massi introduziu uma definição, intuitivamente bastante aceitável, de uma seqüência de redução maximamente não econômica para derivações em C' (a pior seqüência de redução) e, considerando $lp(\pi)$ como o comprimento desta seqüência de redução para a derivação π, provou o seguinte teorema, que apresentamos aqui, no Capítulo I, em 1.5.4:

(*i*) Se $lp(\pi) < \omega$ então: (*a*) $\pi \to \pi' \Rightarrow lp(\pi) > lp(\pi')$;
(*b*) $\exists \pi^{\#} \,/\, \pi \xrightarrow{p}\!\!\twoheadrightarrow_{\mathbf{R}} \pi^{\#}$ e $\pi' \xrightarrow{p}\!\!\twoheadrightarrow_{\mathbf{R}} \pi^{\#}$.

O que o teorema de Massi estabelece é que, na hipótese do comprimento da pior seqüência de redução para uma derivação π ser finito, então: (*a*) este mesmo comprimento diminui com as reduções e (*b*) existe uma derivação pertencente à pior seqüência de redução para π que também pertence à pior seqüência de redução para π', obtida a partir de π por uma redução qualquer.

Se considerarmos que $lp(\pi) < \omega$ para toda derivação π em C', o Item (*a*) do teorema de Massi leva a uma prova trivial do Teorema de Normalização Forte para C', que apresentamos em 3.4.4, e o Item (*b*) leva a uma prova trivial do Teorema de Church-Rosser para C', que apresentamos em 3.4.6.

Diante disso, a nossa principal motivação foi provar que $lp(\pi) < \omega$ para toda derivação π em C', tornando assim incondicionais os resultados de Massi. A estratégia que utilizamos para isso foi uma tentativa de redefinir $lp(\pi)$, de uma maneira que fosse possível provar sua finitude. Após uma longa série de definições e resultados sobre propriedades estruturais e combinatórias das derivações de C', conseguimos definir, no Capítulo II, a atribuição numérica $o(\pi)$. Todo o longo percurso da definição de $o(\pi)$ foi construído tendo por base a intuição de que estávamos introduzindo uma definição que atenderia a dois compromissos absolutamente fundamentais para os nossos propósitos:

(*a*) teríamos que conseguir provar que $o(\pi)$ atribuía univocamente a cada derivação π um número natural (finito);

(*b*) $o(\pi)$ teria que ser capaz de contar o número de todas as possíveis fórmulas máximas que poderiam ocorrer em uma seqüência de redução qualquer para π, representando portanto uma definição alternativa para $lp(\pi)$.

Provamos que $o(\pi)$ satisfaz o compromisso (*a*) no Capítulo II, como uma conseqüência direta de sua própria definição. De fundamental importância para esta prova foi a utilização de uma adaptação da seqüência de redução que Prawitz mostrou normalizar qualquer derivação π de C'. O compromisso (*b*) foi demonstrado no Capítulo III, após outro longo desenvolvimento de resultados sobre propriedades estruturais e combinatórias de derivações em C'. Dessa forma, provamos que $lp(\pi)= o(\pi)< \omega$ e obtivemos o resultado inicialmente desejado de que $lp(\pi)< \omega$, para toda derivação π, retirando a hipótese condicional dos resultados de normalização forte e Church-Rosser para C', apresentados por Massi.

Após todo o esforço que a prova de igualdade entre $o(\pi)$ e $lp(\pi)$ exigiu, não foi difícil obter, em 3.4.1, a prova de que $o(\pi)$ diminui com as reduções, independentemente da pior seqüência de redução. Dessa forma, a prova do Teorema de Normalização Forte para C' que obtivemos em 3.4.4 independe dos resultados de Massi.

Durante o desenvolvimento destes resultados, soubemos de um artigo (**Vrijer[1987]**) que prova normalização forte para cálculo lambda tipificado utilizando uma estratégia bastante semelhante à nossa. Vrijer definiu uma atribuição numérica para termos de cálculo lambda tipificado, que diminui com as reduções e coincide com o comprimento de uma seqüência de redução específica – a seqüência obtida através da estratégia perpétua, definida por **Barendregt[1990]**. Como a noção de fórmulas como tipos, que vimos aqui no Capítulo IV, relaciona sistemas de dedução natural com sistemas de cálculo lambda tipificado, resolvemos estudar detalhadamente o artigo de Vrijer. Além disso, a descoberta deste artigo nos levou aos outros artigos que vimos no Capítulo V, onde também encontramos definições de atribuições numéricas finitas que diminuem com as reduções. Destacamos o artigo **Howard[1968]**, sobre o qual mostramos que uma prova do teorema de normalização forte para $\lambda^{\supset}$, não apontada pelo autor, era conseqüência dos seus resultados.

A título de mostrar a diferença entre o nosso método de obtenção destes resultados e o método utilizado por de Vrijer e pelos outros artigos, realizamos, no Capítulo VI, o desenvolvimento do nosso método para o sistema $\lambda^{\supset}$ de cálculo lambda tipificado. Por fim, no Capítulo VII, estendemos os nossos resultados para os sistemas de dedução natural M, de lógica minimal, I, de lógica intuicionista de Heyting, e para alguns sistemas de lógica modal, e com isso ampliamos um pouco mais o alcance dos nossos resultados, completando assim este trabalho.

Destacamos na introdução que o nosso compromisso principal seria de que o método que introduzíssemos fosse construtivo e elementar, produzido apenas através da análise de propriedades estruturais e combinatórias das deduções formalizadas, sem apelo a nenhuma ferramenta matemática sofisticada. A nossa fidelidade a este compromisso fez com que, no percurso para a obtenção dos resultados desejados, desenvolvêssemos uma minuciosa análise de propriedades estruturais e combinatórias das deduções formalizadas em importantes sistemas de dedução natural e cálculo lambda tipificado. Esta análise, que garantiu a obtenção dos resultados que aqui buscávamos, pode ser útil como ferramenta para projetos futuros e deve ser considerada como um dos frutos desta tese.

Temos ainda algumas sugestões para desenvolvimentos futuros, que acreditamos serem possíveis de realizar a partir dos resultados aqui obtidos.

- Com base na extensão dos nossos resultados que obtivemos para os sistemas M e I, acreditamos não ser difícil obter extensões para muitos sistemas de lógicas não clássicas, tais como os sistemas de dedução natural para as lógicas paraconsistentes C_n, de da Costa, e para alguns sistemas de lógicas polivalentes.

- Também acreditamos ser possível apresentar uma extensão destes resultados para o sistema C, de lógica clássica definida em todos os conectivos. Para isso utilizaríamos como base a prova do Teorema de Normalização Fraca para C, apresentada em **Massi[1990]**, para definirmos uma seqüência estrela finita que viabilizasse a definição de um ordinal natural para derivações em C.

♦ O número de Beckmann, que vimos no Capítulo V, fornece uma estimativa simples para a complexidade do comprimento da árvore de redução para termos de $\lambda^{\supset}$. Acreditamos não ser difícil, através da noção de fórmulas como tipos, traduzir o número de Beckmann para dedução natural, apresentando uma estimativa para a complexidade do comprimento da árvore de redução para derivações de C'.

♦ O Teorema de Normalização Forte pode ser utilizado como ferramenta poderosa para provar a completude de semânticas que implementam sistemas de dedução automática e programação lógica, como mostram **Troelstra & Schwichtenberg[1996]**, que apresentam uma prova da completude para SLD-resolução, que é conseqüência imediata do Teorema de Normalização Forte para M. Estamos atualmente investigando sistemas não standard de dedução automática e uma possível aplicação prática do nosso método de obtenção de normalização forte nesta área. Poderíamos utilizar o nosso método como ferramenta para obtenção de provas de normalização forte para sistemas de lógicas não clássicas que levassem a provas de completude para sistemas de dedução automática não standard.

♦ Por fim, gostaríamos de discutir um pouco uma suspeita bastante intrigante que o nosso método do obtenção de provas de normalização forte via ordinal natural nos suscitou.

Consideremos os nossos resultados para C'. Como vimos, o resultado (*i*) acima, juntamente com uma prova de que $lp(\pi) < \omega$ para toda derivação π, levam à normalização forte de C'. Mas (*i*) é um resultado que, sozinho, não tem nada a ver com normalização forte. Uma prova disso é que em 6.3.15 provamos que (*i*) vale para um cálculo lambda livre de tipos, onde não vale nem normalização fraca.

Parece, portanto, bastante razoável que, mesmo em sistemas nos quais não valha a normalização forte, seja sempre possível definir uma seqüência de redução maximamente não econômica para os termos fortemente normalizáveis deste sistema e obter uma prova de (*i*). Dessa forma, o que parece ser um resultado exclusivo dos sistemas onde vale normalização forte, é a prova de que $lp(\pi) < \omega$ para toda derivação π.

O método que utilizamos para isso foi definir uma atribuição numérica $o(\pi)$, que intuitivamente deveria representar o número de todas possíveis fórmulas máximas para π e provar que, para toda derivação π, $o(\pi)= lp(\pi)$ e $o(\pi)< \omega$. Se voltarmos às definições de $lp(\pi)$ e de $o(\pi)$, é razoável acreditar que ambas representem o número de todas as possíveis fórmulas máximas de π, e que portanto sejam iguais. A prova de que $o(\pi)= lp(\pi)$, que realizamos no Capítulo III, representou uma confirmação desta intuição. Esta prova, apesar de longa, foi produzida apenas a partir das definições de $lp(\pi)$ e $o(\pi)$, e, a princípio, não tem relação direta com a normalização forte de C'. Significa apenas que as duas definições, aparentemente distintas, representam maneiras distintas de contar os mesmos objetos. Em um sistema em que não valha a normalização forte poderíamos provar, por exemplo, $o(\pi)< \omega \Rightarrow o(\pi)= lp(\pi)$.

Diante disso, a parte fundamental do nosso método, que nos parece determinante para provar o Teorema de Normalização Forte, é a prova da finitude de $o(\pi)$ para toda derivação π. O método que desenvolvemos para provar este resultado utilizou, basicamente, o mesmo argumento da prova do Teorema de Normalização Fraca para C'. Definimos um certo tipo especial de redução, a multiplicação-*, e provamos, utilizando o método da prova do Teorema de Normalização Fraca para C', apresentado em **Prawitz[1965]**, que a seqüência estrela de toda derivação π é finita, terminando em uma derivação de comprimento finito π^*. Com isso provamos a finitude de $o(\pi)$, pois $o(\pi)$ foi definido como o número de elementos de um subconjunto especial de ocorrências de fórmula em π^*. Para os outros sistemas em que obtivemos os nossos resultados o argumento é o mesmo. Sempre utilizamos um resultado de normalização fraca para provar a finitude da nossa atribuição.

Por outro lado, a nossa definição de multiplicação-* não é privilégio de sistemas que admitem normalização forte. Por exemplo, nada impede que estendamos as definições de segmento-α e multiplicação-*, que apresentamos no Capítulo VI, para cálculo lambda livre de tipos. O que não conseguiríamos fazer para o cálculo lambda livre de tipos é apresentar uma seqüência-* finita para todo termo M. Isso simplesmente porque não vale normalização fraca neste sistema e, portanto, o nosso argumento para a finitude da seqüência estrela não funcionaria neste caso. Dessa forma, retirando tudo o que é supérfluo, parece que o argumento principal e determinante que utilizamos para demonstrar o Teorema de Normalização Forte foi o Teorema de Normalização Fraca.

Seguindo esta linha de raciocínio, poderíamos então interpretar os nossos resultados como uma prova de que, para o caso específico dos sistemas nos quais trabalhamos (C', $\lambda^{\supset}$, M, I, C'$_{\mathbf{S_4}}$, C'$_{\mathbf{S_5}}$, M$_{\mathbf{S_4}}$ e I$_{\mathbf{S_4}}$) temos:

$$\boxed{\textbf{Normalização Fraca} \Rightarrow \textbf{Normalização Forte}}\ .$$

Com base nesta conjectura, tivemos a idéia de que talvez possa ser possível provar, genericamente, que normalização fraca, ou pelo menos normalização fraca aliada a alguma outra propriedade genérica implica normalização forte, o que seria um resultado bastante forte.

Um caminho para a obtenção deste resultado, como desenvolvimento futuro de nossa tese, seria estender os nossos resultados para um sistema de redução genérico, utilizando, por exemplo, a notação introduzida em **Klop[1980]**. Se conseguíssemos desenvolver um resultado semelhante ao nosso em um sistema genérico, demonstrando que todos os passos, com exceção da prova de finitude para $o(\pi)$, podem ser obtidos para um sistema que não satisfaça normalização fraca, então talvez pudéssemos provar a nossa conjectura.

Bibliografia

BARENDREGT, H. P. (1990) *The Lambda Calculus*, North-Holland, Amsterdan. 3ª edição; 1ª edição (1984).

BARENDREGT, H. P. & NIPKON, T. (1994) (eds.) *Types for Proofs and Programs*, Lecture Notes in Computer Science #806, Springer-Verlag, Berlim.

BACHMANN, H. (1955) *Transfinite Zahlen*, Springer-Verlag, Berlim.

BECKMANN, A. (1998) *Exact bounds for lengths of reductions in Typed λ-calculus*. (submetido)

BECKMANN, A. & WEIERMANN, A. (1999) *Analyzing Gödel's T via expanded head reduction trees*. (submetido)

CHELLAS, B. F. (1980) *Modal logic: an introduction*, Cambridge University Press, Cambridge.

CHURCH, A. (1932/3) "A set of postulates for the foundation of logic", In: *Annals of Math*. (2) v. 33, pp. 346-366 e (3) v. 34, pp. 839-864.

CURRY, H. B. (1934) "Functionality in combinatory logic", *Proceedings of the National Academy of the U.S.A.*, v. 20, pp. 584-590.

CURRY, H. B. (1942) "The combinatory foundations of mathematical logic", *The Journal of Symbolic Logic*, v. 7, pp. 49-64.

CURRY, H. B. & FEYS, R. (1958) *Combinatory Logic Vol I*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland Publ. Co., Amsterdan. 2ª edição (1968).

DILLER, J. (1968) "Zur Berechenbarkeit primitiv-rekursiver Funktionale endlicher Typen". In: *Contributions to mathematical logic*, editado por SCHÜTTE, K. North-Holland, Amsterdan, pp. 109-120.

GANDY, R. O. (1980) "Proofs of Strong Normalization", In: *To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda-Calculus and Formalism*, editado por HINDLEY, J. R. e SELDIN, J. P. Academic Press, NewYork.

GANDY, R. O. (1980a) "An early proof of normalization by A. M. Turing", In: *To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda-Calculus and Formalism*, editado por HINDLEY, J. R. e SELDIN, J. P. Academic Press, NewYork.

GENTZEN, G. (1935) "Untersuchungen über das Logische Schliessen", *Matematische Zeitschrift*, v. 39, pp. 176-210, 405-431.

GENTZEN, G. (1938) "Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie", In: *Forsch. Logik u. Grundl. Exakten Wissenschaften* N. S. 4, Hirzel, Leipzig.

GIRARD, J.Y. (1971) "Une extension de l'interprétacion de Gödel à l'analyse et son application à l'élimination des coupures dans l'analyse et la théorie des types". In: *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, editado por FENSTAD, J. E., Studies in Logic v.63, North-Holland, Amsterdan.

GIRARD, J. Y., LAFONT, Y. & TAYLOR, P. (1989) *Proofs and Types*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, v. 7. Cambridge University Press, Cambridge.

GIRARD, J. Y. (1987) *Proof Theory and Logical Complexity*, Bibliopolis, Napoli.

GÖDEL, K. (1958) "Über eine bisher noch nicht benützete Erweiterung des finiten Standpunktes", Dialectica #12, pp. 280-287.

HEIJENOORT, J. van (1967) ed., *From Frege to Gödel. A source Book in Mathematical Logic 1879 – 1931*, Harvard University Press, Cambridge.

HELMAN, G. (1977) *Restricted Lambda-abstraction and the Interpretation of Some Non-classical Logics*, Dissertação, University of Pittsburg.

HEYTING, A. (1930) "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik", *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie von Wissenschaften. Physikalish-matematische Klasse. Math*, pp. 42-56.

HEYTING, A. (1930A) "Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik", *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie von Wissenschaften. Physikalish-matematische Klasse. Math*, pp. 57-71.

HILBERT, D. (1923) "Die logischen Grundlagen der Mathematik", *Mathematische Annalen*, v. 88, pp. 151-165.

HINDLEY, J. R. & SELDIN, J. P. (1986) *Introduction to Combinators and λ-cálculus*, Cambridge University Press, Cambridge.

HOWARD, W. A. (1968) "Assignment of Ordinals to Terms for Primitive Recursive Functionals of Finite Type". In: *Intuitionism and Proof Theory, Proceedings of the Summer Conference at Buffalo*, New York.

HOWARD, W. A. (1980) "The Formulae-as-Types Notion of Constructions". In: *To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda-Calculus and Formalism*, editado por HINDLEY, J. R. e SELDIN, J. P. Academic Press, NewYork.

HOWARD, W. A. (1980A) "Ordinal analysis of terms of finite type", *Journal of Symbolic Logic*, v. 45 (3), pp. 493-504.

JAŠKOWSKI, S. (1967)) “On the rules of suppositions in formal logic”. In: *Polish Logic 1920 – 1929*, editado por McCALL, S. The Claredon Press, Oxford, pp. 232–258.

JOHANSSON, I. (1936) “Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus”, *Compositio Mathematik*, v. 4, pp. 119-136.

KLEENE, S. C. (1959) “Recursive Functionals and Quantifiers of Finite Types I”, *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 90, pp. 1–52.

KLEENE, S. C. (1978) “Recursive Functionals and Quantifiers of Finite Types Revisited I”. In: *Generalized Recursion Theory II*, editado por FENSTAD, J. E., GANDY, G. E., SACKS, G. E. North-Holland, Amsterdan.

KLOP, J. W. (1980) *Combinatory Reduction Systems*, Mathematical Center Tracts #129, Amsterdan.

KOLMOGOROV, A. N. (1925) “*On the pricicple of the excluded midle*”, *Matematiceskij Sbornik*, v. 32, pp. 646-667; english translated in: **Heijenoort[1967]**, pp. 416-437.

LLOYD, J. W. (1987) “Foundations of Logic Programming”, *Symbolic Computation – Artificial Inteligence*, v. XII, Springer-Verlag. 1^a edição (1984).

MARTIN-LÖF, P. (1971) “Hauptsatz for The Intuitionistic Theory of Iterated Inductive Definitions”. In: *Proceedings of the Second Scandinaviam Logic Symposium*, ed. By J. E. Fenstad, North-Holland, Amsterdan, pp. 179-216.

MASSI, C. D. B. (1989) *Normalização e Normalização Forte para a Lógica Clássica de Primeira Ordem*, Dissertação de Mestrado, UNICAMP/ CLE.

MASSI, C. D. B. (1990) *Provas de Normalização para a Lógica Clássica*, Tese de Doutorado, UNICAMP/ CLE.

MELDELSON, E. (1964) *Introduction to Mathematical Logic*. D. van Nostrand, Princeton.

PEREIRA, L. C. P. D. (1974) "Normalização forte para a Lógica Intuicionista de primeira ordem com reduções permutativas", *Cadernos de Historia e Filosofia da Ciência*, v. 7, CLE – UNICAMP.

PEREIRA, L. C. P. D. (1982) *On the Estimation of Length of Normal Derivations*, Philosophical Studies, v. 4, Akademilitteratur, Stockholm.

POHLERS, W. (1989) *Proof Theory. An Introduction*, Lecture Notes in Mathematics, v. 1407. Springer-Verlag, Berlim.

PRAWITZ, D. (1965) *Natural Deduction*, *A proof-theoretical study*, Almquist & Wiksell, Stockholm.

PRAWITZ, D. (1971) "Ideisa and Results in Proof Theory". In: *Proceedings of the Second Scandinaviam Logic Symposium*, ed. By J. E. Fenstad, North-Holland, Amsterdan. pp. 239-308;

SANCHIS, L. E. (1967) "Functionals defined by recursion", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 8, pp. 161-174.

SCHÜTE, K. (1951) "Beweistheoreitische Erfassung der Unendlichen Induktion in der Zahlentheorie", *Mathematische Annalen*, v. 122, pp. 369-380.

SCHÜTE, K. (1977) *Proof Theory*, Springer-Verlag, Berlim.

SCHWICHTENBERG, H. (1982) "Complexity of normalization in the pure typed λ-calculus". In: *Brouwer Centenary Symposium. Proceedings of the Conference held in Noordwijkerhout*. Editado por TROELSTRA, A. S., DALEN, D. van. North-

Holland, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdan. pp. 453-458.

SCHWICHTENBERG, H. (1991) "An Upper Bound for Reduction Sequences in the Typed λ-calculus", *Arch. Math. Logic*, v. 30, pp. 405-408.

SHOENFIELD, J. R. (1967) *Mathematical Logic.* Addison-Wesley, New York.

STATMAN, R. (1979) "The Typed λ-Calculus is not Elementary Recursive", *Theoretical Computer Science*, v. 9, pp. 73-81.

TAIT, W. (1965) "Infinitely long terms of transfinite type". In: *Formal Systems and Recursive Functions*, editado por CROSSLEY, J. N. e DUMMETT, M. A. E., Proccedings of the 8th Logic Coloquium, Oxford, July 1963. North-Holand, Amsterdan.

TAIT, W. (1967) "Intentional Interpretations of functionals of finite type I", *Journal of Symbolic Logic*, v. 32, pp. 198-212.

TAKEUTI, G. (1975) *Proof Theory*, Studies in Logic and Foundations of Mathematics, v.81, North-Holland, Amsterdan.

TROELSTRA, A. S. (1973) (ed.), *Metamathematical Investigations of Intuitionistic Arithmetic and Analysis*, Lecture Notes in Mathematics #344. Springer-Verlag, Berlim.

TROELSTRA, A. S. & DALEN, D. van (1988) *Constructivism in Mathematics an Introduction v. 1*, "Studies in Logic and The Foundations of Mathematics, v. 121, North-Holland, Amsterdan.

TROELSTRA, A. S. & SCHWICHTENBERG, H. (1996) *Basic Proof Theory*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, v. 43. Cambridge University Press, Cambridge.

VRIJER, R. C. de (1987) "Exactly Estimate Functionals and Strong Normalization"[♣]

WEIERMANN, A. (1998) "How is it that infinitary methods can be applied to finitary mathematics? Gödel *T*: a case study", *Journal of Symbolic Logic*, v. 63, pp. 1348-1370.

WILKEN, G. & WEIERMANN, A. (1997) *Sharp upper bounds for the depths of reduction trees of typed λ-calculus with recursors*. (submetido)

WILKEN, G. (1998) *Abschätzung der Berechnungskomplexität von Gödels T und seinen Teilsystemen*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Münster.

[♣] Referência incompleta. O autor é membro do *Centrale Interfaculteit, Universidade de Amsterdan*. Endereço: *Grimburgwal 10, bldg 13, 1012 GA Amsterdan, the Nethrlands*.

Índice remissivo

Símbolos e Notações

Derivações transformadas

Termos transformados

Transformações

Ocorrências, elementos e subtermos

Valores numéricos

Conjuntos e seqüências

Símbolos especiais de Beckmann[1998]

Símbolos especiais de Howard[1968]

Símbolos especiais de Vrijer[1987]