LÓGICA POSITIVA: PLENITUDE, POTENCIALIDADE E PROBLEMAS (DO PENSAR SEM NEGAÇÃO)

Tomás Andrés Barrero Guzmán

Dissertação apresentada ao
Departamento de Filosofia do
Instituto de Filosofia e Ciências Humanas
da Universidade Estadual de Campinas
para obtenção do grau de
Mestre em Filosofia (Lógica)

Orientador: **Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli**

Durante a elaboração deste trabalho,
o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

30 de agosto de 2004

À minha mãe, Clemencia Guzmán Martínez

Agradecimentos

Este trabalho (que, curiosamente, teve início na Colômbia como um projeto para estudar a filosofia de Leibniz) não é unicamente o produto do trabalho de uma única pessoa, mas sim o resultado de discussões, opiniões contrárias e sugestões variadas de colegas, professores e amigos durante estes dois anos de pesquisa na UNICAMP.

Contudo, houve participações mais influentes que outras na elaboração final, e acho justo mencionar com nome próprio àqueles que participaram em maior grau desta aventura.

Devo agradecer a meu orientador pela motivação e pelo interesse no meu enriquecimento inteletual, que tanto modificaram algumas das minhas visões do mundo.

Ao Paulo e à Eleonoura (*in absentia*) pelas horas de estudo, pela permanente curiosidade e pelo interesse nas coisas que digo e faço.

Aos colegas Peter, Juliana, Douglas, Victor, Luis e a todos os outros que compartilharam comigo seu tempo e suas idéias, por me permitir conhecê-los. Ao Victor, Juliana e Luis, em particular, pela ajuda com este quebra-cabeça que é o LateX, e ao Peter pela tradução de alguns trechos dos artigos de Wilhelm Ackermann. Sempre vou ter as melhores lembranças de todos vocês.

Quero exprimir minha gratidão aos membros da banca por terem se importado tanto com meu trabalho, com meus erros e com meus acertos, e por terem levado a sério sua função com a maior competência e seriedade.

Resumo

O trabalho estuda o papel da negação na lógica, abordando os fragmentos positivos da lógica proposicional, de forma a atender a dois problemas: a obtenção de teoremas de completude independentes da negação e o problema de paradoxos positivos, como o Paradoxo de Curry. Para o fragmento clássico, estuda-se o método construtivo de completude proposto por Leon Henkin. Investigam-se as razões pelas quais este método não pode ser estendido para fragmentos não-clássicos que conseguem evitar a ocorrência da objeção de Haskel Curry como, por exemplo, os das lógicas n-valentes de Jan Łukasiewicz e os (por nós denominados) intuicionistas de Wilhelm Ackermann, quer pelas características da implicação, quer pela presença de um tipo de argumento infinito. O estudo conjunto do método de Henkin e do fenômeno da trivialidade positiva permite estabelecer um processo de decidibilidade da lógica positiva clássica através de um sistema de tablôs que utiliza somente recursos metalinguísticos positivos, e propor uma rediscussão a respeito do papel da negação em lógica através do conceito de paratrivialidade. Nesse contexto discutimos, do ponto de vista conceitual, a relação da lógica positiva com o infinito, as possibilidades de se obter uma lógica de primeira ordem completa sem negação e o vínculo filosófico entre verdade e significado.

Palavras-chave: lógica positiva, completude construtiva, paradoxos positivos, trivialidade positiva, tablôs positivos, paratrivialidade.

Abstract

This work studies some problems connected to the role of negation in logic, treating the positive fragments of propositional calculus in order to deal with two main questions: the proof of the completeness theorems in systems lacking negation, and the puzzle raised by positive paradoxes like the well-known argument of Haskel Curry. We study the constructive completeness method proposed by Leon Henkin for classical fragments endowed with implication, and advance some reasons explaining what makes difficult to extend this constructive method to non-classical fragments equipped with weaker implications (that avoid Curry's objection). This is the case, for example, of Jan Łukasiewicz's n-valued logics and Wilhelm Ackermann's logic of restricted implication. Besides such problems, both Henkin's method and the triviality phenomenon enable us to propose a new positive tableau proof system which uses only positive meta-linguistic resources, and to motivate a new discussion concerning the role of negation in logic proposing the concept of paratriviality. In this way, some relations between positive reasoning and infinity, the possibilities to obtain a first-order positive logic as well as the philosophical connection between truth and meaning are discussed from a conceptual point of view.

Key-words: positive logic, constructive completeness, positive paradoxes, positive triviality, positive tableaux, paratriviality.

Sumário

Introdução

Num artigo de 1930 (vide [48]), considerado hoje um clássico no tema, Jan Łukasiewicz e Alfred Tarski apresentaram alguns resultados do grupo de pesquisa em lógica matemática de Varsóvia (principalmente devidos a Łukasiewicz) na época dirigido pelo primeiro, versando, principalmente, sobre a questão da axiomatização e interpretação das lógicas n-valentes e infinito-valentes.

O artigo não se reduz a esses tópicos, mas pretende estabelecer uma metodologia geral para o estudo do cálculo proposicional e, com esse intuito, no §4 de [48] é introduzido o "cálculo proposicional restrito", assim chamado pelo fato de não conter nenhum símbolo de negação. Os axiomas, a semântica e alguns teoremas desse cálculo (incluindo o da completude, enunciado sem prova) são alí discutidos.

A problemática a respeito do papel da negação na lógica, contudo, tem raízes muito mais profundas. Paul Bernays, o mais assíduo colaborador de David Hilbert em Göttingen, também pensava de forma independente de Łukasiewicz e Post nas questões hoje vistas como fundamentais em Lógica desde sua *Habilitationsschrift*:[1] de acordo com [54], Bernays já tinha resultados sobre semânticas tabulares antes da invenção vagamente atribuída a Ludwig Wittgenstein, sobre completude e decidibilidade antes da demonstração da completude do cálculo proposicional clássico atribuída a Emil Post (cf. [35]), e (embora isso seja de interesse menos imediato aqui) mesmo sobre semânticas gerais trivalentes e quadrivalentes independentemente de Jan Łukasiewicz.

No que concerne particularmente à lógica positiva, a ênfase em separar o conectivo da negação dos demais conectivos estava já essencialmente ligada às preocupações de Hilbert acerca do finitismo. Em uma conferência em 1923 perante a Sociedade Matemática de Göttingen, Bernays recomenda explici-

[1]Sua tese pós-doutoral, equivalente à Tese de Livre-Docência no Brasil, intitulada *Beiträge zur axiomatischen Behandlung des Logik-Kalküls, Universidade de Göttingen*, 1918.

tamente que “seria de interesse investigar o papel da negação”. Apesar de, anos mais tarde e independentemente, László Kalmár ter publicado uma elegantíssima demonstração construtiva da completude do cálculo proposicional clássico [28], a questão estava longe de ser vista como concluída. Tanto que mais uma demonstração veio à luz por Willard Van Orman Quine [36] [2].

Se existe, então, um interesse notável e justificado por demonstrações de completude do cálculo proposicional, não é menor o interesse intrínseco que oferece uma prova de completude do cálculo proposicional clássico positivo e de seus fragmentos. Um estudo mais detalhado do cálculo proposicional positivo (em particular, positivo-implicativo) pode servir como instrumento para se esclarecer as condições mínimas que fazem com que um fragmento do cálculo proposicional seja completo e para refletir sobre os mecanismos para se obter uma tal demonstração de completude, em particular sobre o papel da negação no patamar metamatemático. Como parte fundamental desse estudo, incluimos um apêndice onde distintas axiomáticas da lógica positiva clássica são consideradas com mais detalhe.

Ainda mais, a existência de paradoxos positivos, como o de Curry, proposto em [15], oferece uma oportunidade única para se aprofundar no significado e dificuldades da lógica puramente implicativa, e fazer uma releitura de conceitos como os de trivialidade e derivabilidade. O estudo deste paradoxo e das possíveis saídas nos leva naturalmente a nos aprofundar em pelo menos dois tipos de sistemas: os não-clássicos n-valentes e os não-clássicos intuicionistas. Essa variedade de aproximações ao tema revela-se também na literatura especializada, onde podemos distinguir pelo menos duas abordagens que nos conduzem à lógica positiva: a perspectiva clássica e a perspectiva não-clássica . Tal divisão é extremamente oportuna para salientar um aspecto da lógica positiva também presente em [48] e resumido na seguinte pergunta: Qual é a relação entre os fragmentos da lógica positiva clássica e os das lógicas n-valentes, das infinito-valentes e da intuicionista? No que diz respeito à trivialidade implicativa, podemos obter uma resposta à objeção de Curry tentando enfraquecer a implicação que gera a situação paradoxal. Existem pelo menos duas formas de se obter um tal enfraquecimento: introduzindo-se mais valores de verdade (com o intuito de se evitar um uma propriedade da implicação clássica conhecida como *Lei da Absorção* (vide Lema 1.2.1)) ou controlando-se a regra de Modus Ponens; ambas pos-

[2] Ainda alguns anos antes que Quine visitasse a Universidade de São Paulo como Professor Visitante a partir de 1942, onde publica um de seus primeiros livros (cf. [37], nunca traduzido do original em português.)

sibilidades serão avaliadas no momento oportuno. Este panorama inclui-se no que podemos chamar de problemática do raciocínio positivo.

Contudo, a lógica positiva continua a oferecer novas perspectivas, em particular no que diz respeito às possibilidades de se pensar a metamatemática de forma mais restrita, isto é, sem negações. Dentro deste quadro, podemos considerar a situação de "trivialidade positiva" imanente ao Paradoxo de Curry para construir sistemas de prova. Uma contribuição original deste trabalho é a proposta de um sistema de refutação via tablôs que utiliza somente recursos metalinguísticos positivos, aporta uma visão particularmente rica e sugestiva dos limites e do significado da implicação, apresentando de uma outra maneira as condições que fazem com que uma lógica seja trivial, independentemente da negação. Além disso, a proposta dos novos tablôs favorece uma perspectiva completamente inovadora no que diz respeito à aplicação de métodos de prova automáticos ou semi-automáticos (isto é, passíveis de serem mecanizados). As implicações de tal abordagem quanto à questão de mecanização porém permanecem aqui na forma apenas especulativa, esperando que possa interessar a uma vindoura investigação. É claro que propor sistemas de prova baseados no raciocínio positivo em nada ajuda a ressolver os dilemas a que nos referimos acima. Nesse caso, porém, nossa atitude é outra: ao invés de nos deter pelos difíceis problemas da lógica positiva, queremos realçar suas potencialidades.

Todas estas abordagens técnicas, contudo, contornam as principais preocupações filosóficas genuinas que motivaram esta pesquisa, tais como por exemplo: a existência de mecanismos para se reconhecer uma negação implícita, escondida nos meandros da linguagem. Nesse sentido, existem negações explícitas e outras ocultas? Mais ainda, quais são os limites expressivos de uma lógica positiva? Será que a ausência de negação leva inevitavelmente a introduzir algum tipo de infinitude no nosso sistema?[3] Seriam essas as razões da preocupação de Hilbert e sua escola em separar a negação dos demais conectivos, ou acreditaria Hilbert precisamente no contrário, isto é, que a negação envolve algum tipo de regresso ao infinito? De fato, é muito importante salientar a relação entre a redução ao absurdo (que precisa de negação na meta-linguagem) e um tipo de regressão ao infinito (que em teoria não dependeria de negação alguma), questão esta levantada por Smullyan

[3]Na seção 1.2.1 apresentamos evidências positivas para ambas as perguntas: de fato, usamos um tipo de negação implícita ao demonstrarmos o Teorema de Completude para lógica positiva (a letra proposicional c ou a fórmula atômica γ) e o conceito de infinito é imanente à propria definição da configuração para as fórmulas falsas (pois precisamos de um conjunto infinito de novas variáveis proposicionais).

em [45].

Por último, como pode um sistema lógico lidar com o fato de não haver um símbolo definido para os argumentos falsos, ou que deixam de ser verdadeiros? Não enfraquecemos demais o nosso conceito de verdade com tal procedimento? Será que a exclusão da negação é apenas um artifício sintático que diminui de forma aceitável a capacidade de expressão do nosso sistema? Será que não estaríamos reproduzindo formalmente uma discussão (clássica na filosofia analítica, vide [16] e [46]) sobre a relação entre significado e verdade?

Advertimos o leitor de que *não é* nossa intenção tentar responder diretamente a nenhuma dessas questões. Se alguma coisa se aprende ao se estudar lógica simbólica ou formal é que tais questões são demasiado difíceis para serem atacadas em conjunto, e que apenas uma delas consumiria muito mais do que os recursos de uma dissertação de mestrado. Contudo, na medida em que nosso estudo nos aproxima de tais questões, tampouco fugimos tomados de algum tipo de pânico filosófico, mas tomamos consciência de quão (perigosamente?) nos aproximamos delas.

Confessadas nossas reais intenções, podemos então com mais alívio notar que, no escopo da filosofia tradicional, deve-se chamar a atenção sobre o interesse que uma abordagem positiva pode produzir, por exemplo, numa leitura do argumento de Aristóteles no livro IV da *Metafísica* contra aqueles que duvidam do princípio de não contradição, chamando a atenção sobre a seguinte questão: não seria logicamente mais acertada uma leitura positiva da refutação aristotélica? No que segue, como afirmamos, a lógica positiva será estudada a partir das três perspectivas mencionadas: a clássica, a não-clássica e a partir da abordagem metamatemática dos métodos de prova.

No Capítulo 1 estudamos a lógica proposicional positiva L^+ em detalhes, analisando suas propriedades básicas e a completude. Avaliamos também outras demonstrações de completude, e esclarecemos o papel do paradoxo de Curry e sua derivação em L^+.

No Capítulo 2 estudamos, por um lado, as possibilidades de se obter uma resposta a essa objeção, quer introduzindo sistemas de lógica positiva não-clássica usando sistemas n-valentes (como por exemplo a hierarquia L_n de Łukasiewicz ou algumas lógicas paraconsistentes) quer estudando os sistemas introduzidos por Wilhelm Ackermann. Por outro lado, examinamos o problema da completude de tais sistemas, tentando esclarecer as principais dificuldades ao trabalhar com uma implicação diferente da padrão.

O Capítulo 3 é devotado a um sistema de tablôs puramente positivos e à definição do conceito de paratrivialidade, central ao abordarmos objeções do tipo da de Curry, e útil no estudo geral do fenômeno da trivialidade.

Demonstramos, ainda, a correção e completude desses tablôs com relação a uma semântica diádica.

No Capítulo 4 conectamos os resultados técnicos com questões conceituais de dois tipos: de um lado, problemas da lógica matemática, como, por exemplo a pergunta pela negação implícita e o infinito e a (possível) prova de completude para lógica positiva de primeira ordem; de outro, problemas filosóficos tradicionais como o da refutação aristotélica e o da relação entre significado e verdade.

Dessa forma, tentaremos colocar em sua devida perspectiva algumas questões que surgem da lógica matemática, mas que colocam indagações conceituais de seu próprio interesse, como esperamos deixar claro no decorrer do trabalho. Ao mesmo tempo manteremos o esforço de tentar abrir caminho a alguns temas e a certas questões que poderão resultar em proveitoso trabalho futuro, na direção da plenitude do pensar sem negação.

Capítulo 1

A lógica proposicional positiva clássica $\mathbf{L}^+$

Neste capítulo estudaremos a lógica proposicional positiva (lógica positiva clássica) tal como apresentada por Alfred Tarski e Jan Łukasiewicz em seu artigo de 1930. Demonstraremos os teoremas da correção e da completude da lógica proposicional positiva, seguindo os parâmetros gerais estabelecidos por Leon Henkin [26] e avaliaremos outras provas conhecidas [40], [34], [43] e [17]. Examinaremos, na mesma direção de Henkin, as condições mínimas envolvidas em uma prova de completude. Estenderemos o método de Henkin para outros fragmentos positivos com conectivos diferentes da implicação, e examinaremos a prova da completude de um sistema puramente implicativo diferente da de [43]. Como uma pequena contribuição original, propomos uma demonstração da independência dos axiomas de [26], comprovando uma conjectura de Henkin a esse respeito. Seguindo um uso informal, usamos os verbos "provar" e "demonstrar" (e seus derivados) como sinônimos.

Alem disso, discutiremos alguns problemas dos sistemas positivos, em particular dos sistemas implicativos, como expostos em [15], e apontaremos algumas respostas possíveis a argumentos desse tipo, respostas estas que serão examinadas detalhadamente no capítulo seguinte.

1.1 Os elementos de $\mathbf{L}^+$

Na metodologia geral estabelecida por Tarski e Łukasiewicz para o estudo do cálculo proposicional, os subsistemas (ou fragmentos) do sistema clássico desempenham um papel fundamental, desde que as lógicas finito e infinito-valentes introduzidas por Łukasiewicz são subsistemas da lógica proposicional clássica. Em particular, são examinadas numa seção desse trabalho (segundo suas próprias palavras) aquelas "sentenças onde não ocorre símbolo de negação algum" [1] [48]. Chamaremos a este conjunto de sentenças de fragmento positivo da lógica proposicional clássica, e o sistema que ele gera de L^+. Estabeleceremos as propriedades do cálculo proposicional positivo, segundo a ordem do artigo de Tarski e Łukasiewicz de 1930, apresentando as definições, os axiomas e a semântica de tal sistema lógico. Além do mais, adicionamos uma demonstração do Metateorema da Dedução. Apesar de este resultado ser de importância capital na metodologia da lógica, e de se tratar de um teorema a respeito da derivabilidade lógica (e não de um teorema dos sistemas lógicos) seguiremos um uso generalizado referindo-se a ele como "Teorema da Dedução"simplesmente.

1.1.1 Linguagem e semântica de L^+

Na presente seção apresentamos as principais definições do sistema de lógica proposicional positiva L^+ tal como introduzidas por Tarski e Łukasiewicz em [48].

Definição 1.1.1. Definimos a linguagem de L^+ da seguinte maneira[2]:

1. Símbolos Primitivos: Um conjunto infinito enumerável de variáveis proposicionais: $\{p_1, p_2, ...p_n, ...\}$
2. Conectivos: Um conjunto unitário de conectivos binários, $\{\rightarrow\}$
3. Símbolos Auxiliares: ¨(¨, ¨)¨.

Definição 1.1.2. Fórmulas:

Caso 1.1.2.1. *Qualquer variável proposicional é uma fórmula atômica.*

Caso 1.1.2.2. *Toda fórmula atômica é uma fórmula.*

Caso 1.1.2.3. *Se α e β são fórmulas, então $(\alpha \rightarrow \beta)$ é uma fórmula. Quando não houver risco de confusão, omitiremos os parênteses externos das fórmulas. Doravante denotaremos o conjunto das fórmulas da linguagem L^+ por For L^+.*

Definição 1.1.3. Regras de Inferência:

[1] Salientamos a equivalência entre o significado do termo 'sentença' nesse artigo e o de 'fórmula'. Doravante, serão considerados como sinônimos neste trabalho para evitar confusões.

[2] Respeitamos as definições originais de Tarski e Łukasiewicz.

- Modus Ponens: Dadas α,β fórmulas

$$\frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$$

- Substituição de uma variável por uma fórmula: se α é fórmula, p uma variável proposicional e β uma fórmula, então definimos por indução na complexidade da fórmula[3]:

Caso 1.1.3.1. *Se α for atómica*

$$\begin{array}{lll} \alpha[p \setminus \beta] = & \alpha & se\ \alpha \neq p \\ \alpha[p \setminus \beta] = & \beta & se\ \alpha = p \end{array}$$

Caso 1.1.3.2. *Se $\alpha = \delta \to \gamma$, então:*

$$\alpha[p \setminus \beta] = \delta[p \setminus \beta] \to \gamma[p \setminus \beta]$$

Definição 1.1.4. Uma *matriz* para L^+ é uma tripla ordenada $\mathfrak{M} = [A, B, f]$, que contém dois conjuntos disjuntos não-vazios A, B (com elementos de qualquer natureza), e uma função f de duas variáveis, definida em $A \cup B$. A matriz $\mathfrak{M}[A, B, f]$ é dita *normal* se $x \in$B e $y \in$A sempre implicarem $f(x, y) \in$ A.

Definição 1.1.5. A função h é dita uma *função que atribui valores na matriz* $\mathfrak{M}$ para L$^+$, $\mathfrak{M} = [A, B, f]$, se satisfizer às seguintes condições:

1. A função h é definida para cada $\alpha \in$For L$^+$.
2. Se p é uma variável proposicional, então $h(p) \in A \cup B$.
3. Se $\alpha, \beta \in$For L$^+$, então $h(\alpha \to \beta) = f(h(\alpha), h(\beta))$.

   Dizemos que uma fórmula α é *satisfeita* pela matriz $\mathfrak{M} = [A, B, f]$, denotado por $\mathfrak{M} \models \alpha$, se $h(\alpha) \in B$ para cada função h que atribui valores nesta matriz.

[3] A noção de complexidade de uma fórmula é a usual. Salientamos, ainda, que usaremos a substituição como regra dedutiva somente na demonstração do Teorema de Completude, como será oportunamente mencionado.

Em termos intuitivos, os conjuntos A e B agem como conjuntos arbitrários de valores-verdade, onde o primeiro representa os valores não-distinguidos e o segundo representa os valores distinguidos. A noção de matriz normal exige apenas que a implicação produza valores não-distinguidos, quando o antecedente da implicação é distinguido e o consequente é não-distinguido. Nos demais caso a interpretação da implicação é totalmente livre. Na verdade, podemos nos restringir aqui (e também no caso dos demais fragmentos da lógica clássica positiva) a matrizes com conjuntos unitários $A = \{0\}$ e $B = \{1\}$. O interesse de Łukasiewicz e Tarski era também estudar as relações entre lógica positiva e lógicas n-valentes, por tanto usavan matrizes arbitrárias. Optamos contudo por matrizes da forma acima, por fidelidade aos textos originais.

Definição 1.1.6. O sistema L^+ do cálculo proposicional é o conjunto das fórmulas satisfeitas por todas as funções h definidas sobre a matriz $\mathfrak{M} = [A, B, f]$, onde $A = \{0\}$, $B = \{1\}$ e a função f é definida pelas fórmulas $f(0,0) = f(0,1) = f(1,1) = 1$ e $f(1,0) = 0$.

Notamos que, desta forma, os valores da função h (que atribui valores na matriz) ficam totalmente determinados.

1.1.2 Axiomática e o Metateorema da Dedução

Definição 1.1.7. O seguinte conjunto constitui uma base axiomática para L^+:

Ax1. $\vdash_{L^+} \alpha \to (\beta \to \alpha)$

Ax2. $\vdash_{L^+} (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$

Ax3. $\vdash_{L^+} ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$

A seguir, provamos dois lemas proposicionais que usaremos na demonstração do Teorema da Dedução para L^+ (que depois será usado na demonstração *construtiva* de sua completude).

Lema 1.1.8. $\vdash_{L^+} \alpha \to \alpha$

Dem.:

1.	$\vdash_{L^+} \alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to [(((\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)]$	[Ax2]
2.	$\vdash_{L^+} \alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)$	[Ax1]
3.	$\vdash_{L^+} (((\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$	[MP 1 e 2]
4.	$\vdash_{L^+} ((\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha$	[Ax3]
5.	$\vdash_{L^+} \alpha \to \alpha$	[MP 3 e 4]

Lema 1.1.9. $\alpha \to (\alpha \to \beta) \vdash_{L^+} \alpha \to \beta$

Dem.:

1.	$\alpha \to (\alpha \to \beta)$	[Hip]
2.	$(((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha) \to [(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to (\alpha \to \beta))]$	[Ax2]
3.	$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$	[Ax3]
4.	$(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to (\alpha \to \beta))$	[MP 2, 3]
5.	$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to (\alpha \to \beta)$	[MP 1 e 4]
6.	$[((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to (\alpha \to \beta)] \to (\alpha \to \beta)$	[Ax3]
7.	$\alpha \to \beta$	[MP 5,6]

Teorema 1.1.10. *Teorema da Dedução para L^+: Se Γ é um conjunto de fórmulas, α e β são fórmulas e $\Gamma, \alpha \vdash_{L^+} \beta$, então $\Gamma \vdash_{L^+} \alpha \to \beta$.*

Dem.:

Seja $\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_n$ *uma prova* de β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$, onde $\beta = \beta_n$. Vamos provar, por indução sobre $1 \leq i \leq n$ que $\Gamma \vdash_{L^+} \alpha \to \beta_i$ para cada i.

Para $n = 1$ temos os seguintes subcasos

β é um axioma, ou

$\beta \in \Gamma$, ou

$\alpha = \beta$

Nos dois primeiros subcasos a prova é estritamente análoga: $\Gamma, \alpha \vdash_{L^+} \beta$ (por hip). Mas se β é axioma ou $\beta \in \Gamma$, pelo Ax1 temos $\vdash_{L^+} \beta \to (\alpha \to \beta)$. Daí, por MP, temos $\Gamma \vdash_{L^+} \alpha \to \beta$.
Se $\alpha = \beta$, então $\vdash_{L^+} \alpha \to \alpha$ pelo Lema 1.1.8 e, portanto, $\Gamma \vdash_{L^+} \alpha \to \beta$. Isto esgota o caso $n = 1$.

Se $n \neq 1$, assumimos que $\Gamma \vdash_{L^+} \alpha \to \beta_k$ para $k < i$ e vamos demonstrar para $n = i$. Então, ou β é um axioma, ou $\beta \in \Gamma$, ou $\alpha = \beta$, ou β é o resultado de aplicar MP em β_j e β_m, com $j < i, m < i$. Nos tres casos iniciais, a demonstração é estritamente análoga à do caso $n = 1$. Vamos demonstrar, portanto, o subcaso restante.
Por hipótese, temos $\Gamma \vdash_{L^+} \alpha \to \beta_j$ e $\Gamma \vdash_{L^+} \alpha \to \beta_m$, isto é $\Gamma \vdash_{L^+} \alpha \to (\beta_j \to \beta_i)$. Mas, pelo Ax2 $\Gamma \vdash_{L^+} (\alpha \to \beta_j) \to ((\beta_j \to \beta_i) \to (\alpha \to \beta_i))$, e, então por MP obtemos
$\Gamma \vdash_{L^+} (\beta_j \to \beta_i) \to (\alpha \to \beta_i)$. Por mais um uso do Ax2, temos
$\Gamma \vdash_{L^+} \alpha \to (\beta_j \to \beta_i) \to [((\beta_j \to \beta_i) \to (\alpha \to \beta_i)) \to (\alpha \to (\alpha \to \beta_i))]$.
Então, por MP com a hipótese de indução
$\Gamma \vdash_{L^+} ((\beta_j \to \beta_i) \to (\alpha \to \beta_i)) \to (\alpha \to (\alpha \to \beta_i))$. Usando de novo MP concluimos $\Gamma \vdash_{L^+} \alpha \to (\alpha \to \beta_i)$, mas pelo Lema 1.1.9 $\alpha \to (\alpha \to \beta_i) \vdash_{L^+} \alpha \to \beta_i$ e, portanto, $\Gamma \vdash_{L^+} \alpha \to \beta_i$ $\blacksquare$.

1.2 O método de Henkin

Na presente seção, demonstraremos construtivamente o teorema de completude para L^+ com relação à semântica da Definição 1.1.6 e também para outros fragmentos do cálculo proposicional que não contêm símbolos de negação, como para as extensões de L^+ que formam as lógicas positiva-disjuntiva $L^\vee$ e positiva-conjuntiva $L^\wedge$. Exploramos o método de Henkin como proposto em [26], por considerá-lo o mais simples e conceitualmente claro dos métodos disponíveis e por não ter sido ainda muito (nem razoavelmente bem) explorado: muito mais que uma técnica para completude construtiva, o método de Henkin permite ainda obter de forma imediata os axiomas de fragmentos que estendem L^+.

Ressaltamos, contudo, que o nosso enfoque é diferente do de outras provas de completude para estes fragmentos (como as de [40], [34], [43] e [17]), examinadas detalhadamente na próxima seção em dois aspectos fundamentais: vamos tomar L^+ como o fragmento *mais simples* da lógica positiva e, a partir dele, vamos construir a prova para os outros casos (quer dizer, nossa demonstração pretende ser minimal); na verdade, vamos dar uma demonstração *detalhada e construtiva*, sem recorrer a demonstrações, definições ou teoremas alem dos disponíveis em cada um dos sistemas examinados. Para tanto, vamos demonstrar alguns lemas proposicionais que nos permitirão aplicar sem restrições o método de Henkin a L^+.
O formato de apresentação de tais demonstrações é, basicamente, o mesmo de Mendelson em [33], representando as premisas e derivações como uma tabela numerada e assinalando as aplicações do Teorema da Dedução.

Lema 1.2.1. $\vdash_{L^+} (\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$

Dem. :
Basta aplicar o Teorema da Dedução no Lema 1.1.9

Lema 1.2.2. $\vdash_{L^+} ((\alpha \to \beta) \to \beta) \to [(\alpha \to \gamma) \to ((\gamma \to \beta) \to \beta)]$

Dem.:

1.	$(\alpha \to \beta) \to \beta$	[Hip]
2.	$\alpha \to \gamma$	[Hip]
3.	$\gamma \to \beta$	[Hip]
4.	$(\alpha \to \gamma) \to [(\gamma \to \beta) \to (\alpha \to \beta)]$	[Ax2]
5.	$(\gamma \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$	[MP 2 e 4]
6.	$\alpha \to \beta$	[MP 3 e 5]
7.	β	[MP 6 e 1]
8.	$(\alpha \to \beta) \to \beta,\ \alpha \to \gamma,\ \gamma \to \beta \vdash_{L^+} \beta$	[De 1, 2, 3 e 7]
9.	$(\alpha \to \beta) \to \beta,\ \alpha \to \gamma \vdash_{L^+} (\gamma \to \beta) \to \beta$	[Teorema 1.1.10 em 8]
10.	$(\alpha \to \beta) \to \beta \vdash_{L^+} (\alpha \to \gamma) \to [(\gamma \to \beta) \to \beta]$	[Teorema 1.1.10 em 9]
11.	$\vdash_{L^+} ((\alpha \to \beta) \to \beta) \to [(\alpha \to \gamma) \to ((\gamma \to \beta) \to \beta)]$	[Teorema 1.1.10 em 10]

Lema 1.2.3. [4] $\vdash_{L^+} (\alpha \to \gamma) \to [(\beta \to \gamma) \to (((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \gamma)]$

Dem.:

1.	$\alpha \to \gamma$	[Hip]
2.	$\beta \to \gamma$	[Hip]
3.	$(\alpha \to \beta) \to \beta$	[Hip]
4.	$((\alpha \to \beta) \to \beta) \to [(\alpha \to \gamma) \to ((\gamma \to \beta) \to \beta)]$	[Lema1.2.2]
5.	$(\alpha \to \gamma) \to ((\gamma \to \beta) \to \beta)$	[MP 3 e 4]
6.	$(\gamma \to \beta) \to \beta$	[MP 1 e 5]
7.	$((\gamma \to \beta) \to \beta) \to [(\beta \to \gamma) \to ((\gamma \to \beta) \to \gamma)]$	[Ax2]
8.	$(\beta \to \gamma) \to ((\gamma \to \beta) \to \gamma)$	[MP 6 e 7]
9.	$(\gamma \to \beta) \to \gamma$	[MP 2 e 8]
10.	$((\gamma \to \beta) \to \gamma) \to \gamma$	[Ax3]
11.	γ	[MP 9 e 10]
12.	$\alpha \to \gamma,\ \beta \to \gamma,\ (\alpha \to \beta) \to \beta \vdash_{L^+} \gamma$	[De 1, 2, 3 e 11]
13.	$\alpha \to \gamma,\ \beta \to \gamma \vdash_{L^+} ((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \gamma$	[Teorema 1.1.10 em 12]
14.	$\alpha \to \gamma \vdash_{L^+} (\beta \to \gamma) \to [((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \gamma]$	[Teorema 1.1.10 em 13]
15.	$\vdash_{L^+} (\alpha \to \gamma) \to [(\beta \to \gamma) \to (((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \gamma)]$	[Teorema 1.1.10 em 14]

Lema 1.2.4. $\vdash_{L^+} (\alpha \to \gamma) \to [((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to \gamma]$

Dem.:

1.	$\alpha \to \gamma$	[Hip]
2.	$(\alpha \to \beta) \to \gamma$	[Hip]
3.	$((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to [(\alpha \to \gamma) \to ((((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha) \to \gamma)]$	[Lema1.2.3]
4.	$(\alpha \to \gamma) \to ((((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha) \to \gamma)$	[MP 2 e 3]
5.	$(((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha) \to \gamma$	[MP 1 e 4]
6.	$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$	[Ax3]
7.	γ	[MP 5 e 6]
8.	$\alpha \to \gamma,\ (\alpha \to \beta) \to \gamma \vdash_{L^+} \gamma$	[De 1, 2 e 7]
9.	$\alpha \to \gamma \vdash_{L^+} ((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to \gamma$	[Teorema 1.1.10 em 8]
10.	$\vdash_{L^+} (\alpha \to \gamma) \to [((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to \gamma]$	[Teorema 1.1.10 em 9]

Lema 1.2.5. $\vdash_{L^+} (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to [(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)]$

Dem.:

1.	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	[Hip]
2.	$\alpha \to \beta$	[Hip]
3.	$(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$	[Ax2]
4.	$(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$	[MP 2 e 3]
5.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to [((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma))]$	[Ax2]
6.	$((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma))]$	[MP 1 e 4]
7.	$\alpha \to (\alpha \to \gamma)$	[MP 4 e 6]
8.	$(\alpha \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$	[Lema1.2.1]
9.	$\alpha \to \gamma$	[MP 6 e 8]
10.	$\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta \vdash_{L^+} \alpha \to \gamma$	[De 1, 2 e 9]
11.	$\alpha \to (\beta \to \gamma) \vdash_{L^+} (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	[Teorema 1.1.10 em 10]
12.	$\vdash_{L^+} (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to [(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)]$	[Teorema 1.1.10 em 11]

[4]Esta demonstração faz parte de [17].

Lema 1.2.6. $\vdash_{L^+} (\alpha \to \beta) \to [(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)]$

Dem.:

1.	$(\alpha \to \beta)$	[Hip]
2.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma))$	[Hip]
3.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to [(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)]$	[Lema1.2.5]
4.	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	[MP 2,3]
5.	$(\alpha \to \gamma)$	[MP 1,4]
6.	$\alpha \to \beta,\ \alpha \to (\beta \to \gamma) \vdash_{L^+} \alpha \to \gamma$	[De 1, 2 e 5]
7.	$\alpha \to \beta \vdash_{L^+} (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$	[Teorema 1.1.10 em 6]
8.	$\vdash_{L^+} (\alpha \to \beta) \to [(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)]$	[Teorema 1.1.10 em 7]

1.2.1 A completude de L^+

Para estabelecer se um fragmento implicativo do cálculo proposicional clássico é ou não completo, segundo Henkin [26], precisamos garantir algumas condições mínimas:

1. Um conjunto não-vazio de conectivos binários, pelo menos contendo $\to$.

2. Símbolos auxiliares[5].

3. Modus Ponens como regra de inferência.

4. O Teorema de Dedução (que, na demonstração padrão, depende de H1 e H2).

5. No mínimo o seguinte conjunto de fórmulas deriváveis (como axiomas ou teoremas)[6]:

H1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

H2. $(\alpha \to \beta) \to [(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)]$

H3. $(\alpha \to \gamma) \to [((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to \gamma]$

[5] Para simplificar a escrita, Henkin introduz a convenção de associar à esquerda logo depois de ¨.¨; contudo, por coerência com nossa linguagem inicial, vamos manter os parênteses como símbolos auxiliares.

[6] A rigor, Henkin explica como novos axiomas, por exemplo para a conjunção, podem ser estabelecidos observando-se as tabelas-verdade. Adiamos essa explicação para a próxima seção, onde será de fato relevante.

Por 1.1.1, 1.1.3 e 1.1.10, L^+ satisfaz às condições (1-4). É importante observar que H1=Ax1, H2=Lema 1.2.6 e H3=Lema 1.2.4. Então, de fato, o próprio L^+ satisfaz aos critérios de Henkin. Uma vez estabelecidas estas condições, vamos entrar na demonstração do Teorema da Completude para L^+, lembrando que vamos reproduzir (esclarecendo detalhes) os argumentos de Henkin. Para tanto, é preciso demonstrar o seguinte lema:

Lema 1.2.7. *Seja $h(p_1), \ldots, h(p_n)$ uma função que atribui valores para L^+ às diferentes variáveis $p_1, \ldots, p_n$. Seja α uma fórmula que contém somente estas variáveis $p_1, \ldots, p_n$ e $h(\alpha)$ o valor associado a α pela mesma atribuição. Seja γ uma fórmula qualquer, definamos α^* como $(\alpha \to \gamma) \to \gamma$ ou $\alpha \to \gamma$, se $h(\alpha) = 1$ ou $h(\alpha) = 0$ respectivamente. Então, $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^+} \alpha^*$.*

Dem.: Por indução no comprimento de α.

Caso 1.2.7.1. *Seja $\alpha = p_i$.*

Então (pela definição de demonstração a partir de um conjunto de fórmulas) $(p_i \to \gamma) \vdash_{L^+} (p_i \to \gamma)$ e $(p_i \to \gamma) \to \gamma \vdash_{L^+} (p_i \to \gamma) \to \gamma$ e, portanto, em qualquer caso $p_i^* \vdash_{L^+} p_i^* = \alpha^*$.

Suponha $\alpha = \beta \to \delta$ e suponha, como hipótese da indução, que o lema vale para β, δ.

Caso 1.2.7.2. $h(\beta) = 0$.

Daí, $\beta^* = (\beta \to \gamma)$, $h(\alpha) = h(\beta \to \delta) = 1$ e $\alpha^* = ((\alpha \to \gamma) \to \gamma)$. Por hipótese da indução, $p_i^*, ..., p_n^* \vdash_{L^+} \beta \to \gamma$, mas, pelo Lema 1.2.4 $\vdash_{L^+} (\beta \to \gamma) \to [((\beta \to \delta) \to \gamma) \to \gamma]$ e MP, temos $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^+} (((\beta \to \delta) \to \gamma) \to \gamma) = \alpha^*$

Caso 1.2.7.3. $h(\delta) = 1$.

Daí, $\delta^* = ((\delta \to \gamma) \to \gamma)$, $h(\alpha) = h(\beta \to \delta) = 1$, e $\alpha^* = ((\alpha \to \gamma) \to \gamma)$. Por hipótese, temos $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^+} (\delta \to \gamma) \to \gamma$. Pelo Ax1, temos $\delta \vdash_{L^+} \beta \to \delta$, e usando MP obtemos $\delta, (\beta \to \delta) \to \gamma \vdash_{L^+} \gamma$. Portanto, usando o Teorema 1.1.10, concluimos $(\beta \to \delta) \to \gamma \vdash_{L^+} \delta \to \gamma$, e, daí, por MP temos $(\beta \to \delta) \to \gamma, (\delta \to \gamma) \to \gamma \vdash_{L^+} \gamma$. Logo, pelo Teorema 1.1.10 $(\delta \to \gamma) \to \gamma \vdash_{L^+} ((\beta \to \delta) \to \gamma) \to \gamma$ e, então, $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^+} (((\beta \to \delta) \to \gamma) \to \gamma) = \alpha^*$.

Caso 1.2.7.4. *Suponha $h(\beta) = 1, h(\delta) = 0$.*

Daí, $\beta^* = (\beta \to \gamma) \to \gamma$, $\delta^* = \delta \to \gamma$, $h(\alpha) = $ o e $\alpha^* = (\alpha \to \gamma)$. Por hipótese, $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^+} (\beta \to \gamma) \to \gamma$ e $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^+} \delta \to \gamma$. Então, por MP $\beta, \beta \to \delta \vdash_{L^+} \delta$. Por MP de novo temos $\beta, \beta \to \delta, \delta \to \gamma \vdash_{L^+} \gamma$ e, então, usando o Teorema 1.1.10

$\beta \to \delta, \delta \to \gamma \vdash_{L^+} \beta \to \gamma$. Daí, por MP temos $(\beta \to \gamma) \to \gamma, \beta \to \delta, \delta \to \gamma \vdash_{L^+} \gamma$. Portanto, usando o Teorema 1.1.10

$\delta \to \gamma, (\beta \to \gamma) \to \gamma \vdash_{L^+} (\beta \to \delta) \to \gamma$. e, então, $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^+} ((\beta \to \delta) \to \gamma) = \alpha^*$, o que da conta do último caso a demonstrar $\blacksquare$.

Teorema 1.2.8. *Teorema de correção para L^+:*

$$\vdash_{L^+} \alpha \;\Rightarrow\; \mathfrak{M} \models \alpha$$

Dem.: Por indução no comprimento da derivação formal de α, isto é de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

Caso 1.2.8.1. *Suponha $n = 1$.*

Nesse caso, α é um axioma. Mas podemos verificar através das seguintes tabelas verdade que Ax1-3 são tautologias

α	β	$\beta \to \alpha$	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

α	β	$\alpha \to \beta$	$(\alpha \to \beta) \to \alpha$	$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

α	β	γ	$\alpha \to \beta$	$\beta \to \gamma = \eta$	$\alpha \to \gamma = \theta$	$\eta \to \theta = \varrho$	$(\alpha \to \beta) \to \varrho$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Então $\mathfrak{M} \models \alpha$.

Caso 1.2.8.2. *Seja $n \neq 1$.*

Se α é um axioma, então a prova decorre como no caso 1.2.8.1. Se existem $1 \leq i,\ j < n$ tais que $\alpha_j = \alpha_i \to \alpha$ supomos (por hipótese de indução) que $h(\alpha_i) = 1$ e $h(\alpha_i \to \alpha) = 1$, mas, pela definição de f, $h(\alpha) = 1$, isto é $\mathfrak{M} \models \alpha$, e a indução se conclui ■.

Teorema 1.2.9. *Teorema de completude para L^+:*

$$\mathfrak{M} \models \alpha \quad \Rightarrow \ \vdash_{L^+} \alpha$$

Dem.: Sejam $p_1, ..., p_n$ as diferentes variáveis que aparecem em α. Pela Definição 1.1.5 temos para cada uma das 2^n atribuições possíveis $h(p_1), ..., h(p_n)$, o valor calculado $h(\alpha)$. Daí, pelo Lema 1.2.7, se γ é uma fórmula bem formada arbitrária e p_i^*, α^* são definidos como antes, temos para cada um dos 2^n conjuntos possíveis $\Gamma_n = \{p_1^*, ..., p_n^*\}$,

$$\Gamma_n \vdash_{L^+} (\alpha \to \gamma) \to \gamma$$

Isto implica que para cada um dos 2^{n-1} conjuntos $\Gamma_{n-1} = \{p_1^*, ..., p_{n-1}^*\}$ temos

$$p_n \to \gamma,\ \ \Gamma_{n-1} \vdash_{L^+} (\alpha \to \gamma) \to \gamma,$$

e

$$(p_n \to \gamma) \to \gamma,\ \ \Gamma_{n-1} \vdash_{L^+} (\alpha \to \gamma) \to \gamma$$

Usando o Teorema 1.1.10, obtemos

$$\Gamma_{n-1} \vdash_{L^+} (p_n \to \gamma) \to ((\alpha \to \gamma) \to \gamma)$$

$$\Gamma_{n-1} \vdash_{L^+} ((p_n \to \gamma) \to \gamma) \to ((\alpha \to \gamma) \to \gamma)$$

Mas, pelo Lema 1.2.4 e a regra de substituição, temos

$$\vdash_{L^+} [(p_n \to \gamma) \to ((\alpha \to \gamma) \to \gamma)] \to [(((p_n \to \gamma) \to \gamma) \to ((\alpha \to \gamma) \to \gamma)) \to ((\alpha \to \gamma) \to \gamma)]$$

e MP duas vezes, temos

$$\Gamma_{n-1} \vdash_{L^+} (\alpha \to \gamma) \to \gamma$$

Se continuarmos assim, vemos que para cada $i = n-1, n-2, .., 2, 1$, obtemos, para cada um dos 2^i possíveis $\Gamma_i = \{p_1^*, ..., p_i^*\}$

$$\Gamma_i \vdash_{L^+} (\alpha \to \gamma) \to \gamma$$

Se $i = 1$, temos

$$p_1 \to \gamma \vdash_{L^+} (\alpha \to \gamma) \to \gamma, \quad ((p_1 \to \gamma) \to \gamma) \vdash_{L^+} (\alpha \to \gamma) \to \gamma$$

e, pelo Teorema 1.1.10 e oLema 1.2.4, temos

$$\vdash_{L^+} (\alpha \to \gamma) \to \gamma$$

Como γ é uma fórmula qualquer, em particular é verdade

$$\vdash_{L^+} (\alpha \to \alpha) \to \alpha$$

Mas, temos $\vdash_{L^+} (\alpha \to \alpha)$ (Lema 1.1.8) e, daí, por MP, temos

$$\vdash_{L^+} \alpha$$

■.

O teorema da completude que obtivemos é totalmente construtivo, baseia-se somente nas propriedades da implicação e, além do mais, explora uma relação entre a implicação e a negação, tirando partido do fato de que a negação pode ser vista como um mero caso particular da negação: intuitivamente, $\alpha \to \gamma$ torna-se $\neg\alpha$ e $(\alpha \to \gamma) \to \gamma$ torna-se $\neg\neg\alpha$ se γ coincidir com uma partícula minimal ("bottom" ou "falsum"). Em especial, Henkin em uma nota a rodapé em [26][7], esclarece que Alonzo Church, seu orientador de doutorado, chamou-lhe a atenção para a similaridade de seu procedimento como o hoje conhecido (mas, segundo todas as evidências, pelo próprio Henkin desconhecido) método de Lázló Kálmar em [28]. O método de Kálmár consiste sucintamente em internalizar o efeito semântico das variáveis de uma fórmula por meios sintáticos, de tal forma que se $p_1, \ldots, p_n$ são as variáveis de α e h é uma valoração binária clássica, então $p_1^*, ..., p_n^* \vdash \alpha^*$, onde

$$p_i^* = \begin{cases} p_i & \text{se } h(p_i) = 1 \\ \neg p_i & \text{se } h(p_i) = 0 \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq n$ (análogo para α).
Dessa forma, renomeando as variáveis podemos ter $h(p_1) = \ldots = h(p_m) = 1$, e $h(p_{m+1}) = \ldots = h(p_n) = 0$ e obteremos: $p_1, \ldots, p_m, \neg p_{m+1}, \ldots, \neg p_n \vdash \alpha^*$ e, dai, $p_1 \vee c, \ldots, p_m \vee c, \neg p_{m+1} \vee c, \ldots, \neg p_n \vee c \vdash \alpha^* \vee c$ para uma nova variável c que não ocorre na prova.

[7] página 44, nota.

Fazendo uso das equivalências $p \to c \Leftrightarrow \neg p \vee c$ e $(p \to c) \to c \Leftrightarrow p \vee c$ obtemos $((p_1 \to c) \to c), \ldots, ((p_m \to c) \to c), (p_{m+1} \to c), \ldots, (p_n \to c) \vdash \alpha^*$, onde

$$\alpha^* = \begin{cases} \alpha \to c & \text{se } \alpha^* \text{ é } \neg\alpha \\ (\alpha \to c) \to c & \text{se } \alpha^* \text{ é } \alpha \end{cases}$$

Isso nos leva, então, diretamente ao método de Henkin partindo do método de Kálmar mas sem introduzir nenhum tipo de negação *explícita* em L^+. Além do mais, este método usa uma idéia de infinito potencial ao definir $\neg\alpha$ como o conjunto de fórmulas $\{\alpha \to \gamma \mid \gamma$ é fórmula$\}$ Na seguinte seção vamos estender o método para fragmentos que têm outros conectivos além da implicação (seguindo uma sugestão de Henkin), em particular em nossos exemplos para os fragmentos que contêm conjunção e disjunção e disjunção exclusiva.

1.2.2 Completude dos fragmentos positivos $L^{\wedge}$, $L^{\vee}$ e $L^{\veebar}$

Para começar, é preciso ajustar as definições sintáticas e semânticas 1.1.2, 1.1.4 e 1.1.5 respectivamente para as extensões da lógica implicativa positiva por acréscimo da conjunção ($L^{\wedge}$), da disjunção ($L^{\vee}$) e da disjunção exclusiva ($L^{\veebar}$). A noção de matriz normal deverá, agora, refletir as propriedades mínimas que assegurem a interpretação do respectivo conectivo adicional.

Definição 1.2.10. Fórmulas $L^{\wedge}$: O caso das fórmulas atômicas permanece igual.

Caso 1.2.10.1. *Se α e β são fórmulas, então $\alpha \to \beta$ é uma fórmula.*

Caso 1.2.10.2. *Se α e β são fórmulas, então $\alpha \wedge \beta$ é uma fórmula.*

Definição 1.2.11. A matriz de $L^{\wedge}$ é uma quádrupla ordenada $\mathfrak{N} = [A, B, f, g]$, que contém dois conjuntos disjuntos A, B (com elementos de qualquer tipo), e duas funções f, g de duas variáveis, definidas em $A \cup B$. A definição de *matriz normal* é analoga à Definição 1.1.4, onde agora acrescentamos a função g que interpreta o novo conectivo $\wedge$.

Definição 1.2.12. A função h' é dita uma *função que atribui valores à matriz* $\mathfrak{N} = [A, B, f, g]$ para $L^{\wedge}$ se satisfizer as seguintes condições:

1. A função h' é definida para cada $\alpha \in$ For $L^{\wedge}$.
2. Se p é uma variável proposicional,então $h'(p) \in A \cup B$.

3. Se $\alpha, \beta \in$For L$^{\wedge}$, então $h'(\alpha \to \beta) = f(h'(\alpha), h'(\beta))$.

4. Se $\alpha, \beta \in$For L$^{\wedge}$, então $h'(\alpha \wedge \beta) = g(h'(\alpha), h'(\beta))$

   Dizemos que uma fórmula α é *satisfeita* pela matriz $\mathfrak{N} = [A, B, f, g]$, denotado por $\mathfrak{N} \models \alpha$, se $h'(\alpha) \in B$ para cada função h' que atribui valores a esta matriz.

Definição 1.2.13. O sistema L$^{\wedge}$ do cálculo proposicional é o conjunto de todas as sentenças (vide 1.2.10) que são satisfeitas pela matriz $\mathfrak{N} = [A, B, f, g]$, onde $A = \{0\}$, $B = \{1\}$ sendo a função f definida pelas fórmulas

$$f(0,0) = f(0,1) = f(1,1) = 1$$

e

$$f(1,0) = 0;$$

enquanto a função g é definida pelas fórmulas

$$g(1,1) = 1$$

e

$$g(0,0) = g(0,1) = g(1,0) = 0.$$

Definição 1.2.14. Fórmulas L$^{\vee}$: O caso das fórmulas atômicas permanece igual.

Caso 1.2.14.1. *Se α e β são fórmulas, então $\alpha \to \beta$ é uma fórmula.*

Caso 1.2.14.2. *Se α e β são fórmulas, então $\alpha \vee \beta$ é uma fórmula.*

Definição 1.2.15. A matriz de $L^{\vee}$ é uma quádrupla ordenada $\mathfrak{J} = [A, B, f, j]$, que contém dois conjuntos disjuntos A, B (com elementos de qualquer tipo), e duas funções f, j de duas variáveis, definidas em $A \cup B$. A definição de matriz normal é analoga à Definição1.1.4, onde agora acrescentamos a função j que interpreta o novo conectivo $\vee$.

Definição 1.2.16. A função h'' é dita uma *função que atribui valores à matriz* $\mathfrak{J} = [A, B, f, j]$ para $L^{\vee}$ se satisfizer às seguintes condições:

1. A função h'' é definida para cada $\alpha \in$For L$^{\vee}$.

2. Se p é uma variável proposicional,então $h''(p) \in A \cup B$.

3. Se $\alpha, \beta \in$For $L^{\vee}$, então $h''(\alpha \to \beta) = f(h''(\alpha), h''(\beta))$.

4. Se $\alpha, \beta \in$For $L^{\vee}$, então $h''(\alpha \vee \beta) = j(h''(\alpha), h''(\beta))$

   Dizemos que uma fórmula α é *satisfeita* pela matriz $\mathfrak{J} = [A, B, f, j]$, isto é $\mathfrak{J} \models \alpha$, se $h''(\alpha) \in B$ para cada função h'' que atribui valores a esta matriz.

Definição 1.2.17. O sistema $L^{\vee}$ do cálculo proposicional é o conjunto de todas as sentenças que são satisfeitas pela matriz $\mathfrak{J}[A, B, f, j]$, onde $A = \{0\}$, $B = \{1\}$ sendo a função f definida pelas fórmulas

$$f(0,0) = f(0,1) = f(1,1) = 1$$

e

$$f(1,0) = 0;$$

enquanto a função j é definida pelas fórmulas

$$j(0,1) = j(1,0) = j(1,1) = 1$$

e

$$j(0,0) = 0.$$

Definição 1.2.18. Fórmulas $L^{\veebar}$: O caso das fórmulas atômicas permanece igual.

Caso 1.2.18.1. *Se α e β são fórmulas, então $\alpha \to \beta$ é uma fórmula.*

Caso 1.2.18.2. *Se α e β são fórmulas, então $\alpha \veebar \beta$ é uma fórmula.*

Definição 1.2.19. A matriz de $L^{\veebar}$ é uma quádrupla ordenada $\mathfrak{K} = [A, B, f, k]$, que contém dois conjuntos disjuntos A, B (com elementos de qualquer tipo), e duas funções f, k de duas variáveis, definidas em $A \cup B$. A definição de matriz normal é a mesma para $\mathfrak{K}$, onde agora acrescentamos a função k que interpreta o novo conectivo $\veebar$.

Definição 1.2.20. A função h''' é dita uma *função que atribui valores à matriz* $\mathfrak{K} = [A, B, f, k]$ para $L^{\veebar}$ se satisfizer às seguintes condições:

1. A função h''' é definida para cada $\alpha \in$For $L^{\veebar}$.

2. Se p é uma variável proposicional, então $h'''(p) \in A \cup B$.

3. Se $\alpha, \beta \in$For $L^{\veebar}$, então $h'''(\alpha \to \beta)f(h'''(\alpha), h'''(\beta))$.
4. Se $\alpha, \beta \in$For $L^{\veebar}$, então $h'''(\alpha \veebar \beta) = k(h'''(\alpha), h'''(\beta))$

   Dizemos que uma fórmula α é *satisfeita* pela matriz $\mathfrak{K} = [A, B, f, k]$, isto é $\mathfrak{K} \models \alpha$, se $h'''(\alpha) \in B$ para cada função h''' que atribui valores a esta matriz.

Definição 1.2.21. O sistema $L^{\veebar}$ do cálculo proposicional é o conjunto de todas as sentenças (vide Definição 1.2.18) que são satisfeitas pela matriz $\mathfrak{K} = [A, B, f, k]$, onde $A = \{0\}$, $B = \{1\}$ sendo a função f definida pelas fórmulas

$$f(0,0) = f(0,1) = f(1,1) = 1$$

e

$$f(1,0) = 0;$$

enquanto a função k é definida pelas fórmulas

$$k(0,1) = k(1,0) = 1$$

e

$$k(0,0) = k(1,1) = 0.$$

Para estes casos, Henkin estabelece o seguinte procedimento: além dos três axiomas da implicação, podemos estabelecer diretamente quatro axiomas para $L^{\wedge}$, $L^{\vee}$ e $L^{\veebar}$ respectivamente, pois $\wedge$, $\vee$ e $\veebar$ são funções binárias e geram 2^2 atribuições. Vamos começar com $L^{\wedge}$, onde Axiomas de $L^{\wedge}$= Axiomas de L^{+}+Ax1$^{\wedge}$-4$^{\wedge}$ com

Ax1$^{\wedge}$. $((\delta \to \gamma) \to \gamma) \to [((\beta \to \gamma) \to \gamma) \to (((\delta \wedge \beta) \to \gamma) \to \gamma)]$

Ax2$^{\wedge}$. $((\delta \to \gamma) \to \gamma) \to [(\beta \to \gamma) \to ((\delta \wedge \beta) \to \gamma)]$

Ax3$^{\wedge}$. $(\delta \to \gamma) \to [((\beta \to \gamma) \to \gamma) \to ((\delta \wedge \beta) \to \gamma)]$

Ax4$^{\wedge}$. $(\delta \to \gamma) \to [(\beta \to \gamma) \to ((\delta \wedge \beta) \to \gamma)]$

O método heurístico para se estabelecer estes axiomas consiste em determinar as valorações das fórmulas em cada linha da tabela-verdade ou em cada argumento da função que atribui valores ao respectivo sistema, e usar a convenção $\alpha \to \gamma$ quando a atribuição para α for 0 e $(\alpha \to \gamma) \to \gamma$ quando for 1. Se $\alpha = \Phi(\beta, \delta)$, isto é, se α introduz um novo conectivo, a convenção é a mesma *mutatis mutandis.*

Lema 1.2.22. *Seja $h'(p_1), ..., h'(p_n)$ uma função que atribui valores para $L^\wedge$ às diferentes variáveis $p_1, ..., p_n$. Seja α uma fórmula que contem só estas variáveis $p_1, ..., p_n$ e $h'(\alpha)$ o valor associado a α pela mesma atribuição. Seja γ uma fórmula qualquer e defina α^* como no Lema 1.2.7. Então, $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^\wedge} \alpha^*$.*

Dem.:

Por indução na complexidade de α.
Para o caso atômico a demonstração é análoga a do caso atômico no Lema 1.2.7.
Se $\alpha = (\beta \to \delta)$, a demonstração é estritamente análoga à do Lema 1.2.7.

Seja $\alpha = \delta \wedge \beta$. Mas, como $\wedge$ é binária, temos 2^2 casos diferentes, dependendo dos diferentes valores possíveis para δ e β e usamos g, como definida em 1.2.13. Supomos por hipótese da indução que o lema vale para δ, β .

Caso 1.2.22.1. $g(\delta) = g(\beta) = 1$.

Então $\delta^* = (\delta \to \gamma) \to \gamma$ e $\beta^* = (\beta \to \gamma) \to \gamma$ e $(\delta \wedge \beta)^* = ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to \gamma$. Por hipótese de indução $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^\wedge} (\delta \to \gamma) \to \gamma$ e $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^\wedge} (\beta \to \gamma) \to \gamma$, mas, pelo Ax1$^\wedge$, temos $\vdash_{L^\wedge} ((\delta \to \gamma) \to \gamma) \to [((\beta \to \gamma) \to \gamma) \to (((\delta \wedge \beta) \to \gamma) \to \gamma)]$ e, daí, por MP $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^\wedge} ((\beta \to \gamma) \to \gamma) \to (((\delta \wedge \beta) \to \gamma) \to \gamma)$ e por MP de novo, temos $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^\wedge} ((\delta \wedge \beta) \to \gamma) \to \gamma = (\delta \wedge \beta)^*$

Caso 1.2.22.2. $g(\delta) = 1$, $g(\beta) = 0$.

Então $\delta^* = (\delta \to \gamma) \to \gamma$ e $\beta^* = (\beta \to \gamma)$ e $(\delta \wedge \beta)^* = ((\delta \wedge \beta) \to \gamma)$. Por hipótese de indução $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^\wedge} (\delta \to \gamma) \to \gamma$ e $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^\wedge} (\beta \to \gamma)$, mas, pelo Ax2$^\wedge$, temos $\vdash_{L^\wedge} ((\delta \to \gamma) \to \gamma) \to [(\beta \to \gamma) \to ((\delta \wedge \beta) \to \gamma)]$ e, daí, por MP, temos $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^\wedge} (\beta \to \gamma) \to ((\delta \wedge \beta) \to \gamma)$ e por MP de novo, $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^\wedge} (\delta \wedge \beta) \to \gamma = (\delta \wedge \beta)^*$

Caso 1.2.22.3. $g(\delta) = 0$, $g(\beta) = 1$.

Análogo, usando Ax3$^\wedge$

Caso 1.2.22.4. $g(\delta) = g(\beta) = 0$.

Análogo, usando Ax4$^\wedge$ $\blacksquare$.

Teorema 1.2.23. *Teorema de Correção para $L^\wedge$*

$$\vdash_{L^\wedge} \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{N} \models \alpha$$

Dem.: Por indução no comprimento da derivação formal de α, isto é, de $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Caso 1.2.23.1. *Seja* $n = 1$

Logo α é um dos axiomas Ax1-Ax3 ou Ax1^-4^. Verificamos Ax^4 através da seguinte tabela-verdade e salientamos que os outros casos são análogos

δ	β	γ	$\delta \to \gamma$	η	θ	$(\delta \wedge \beta)$	λ	$\theta \to \lambda$	$\eta \to (\theta \to \lambda)$
0	0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Com $(\delta \to \gamma) \to \gamma = \eta, \beta \to \gamma = \theta, (\delta \wedge \beta) \to \gamma = \lambda$
Então $\mathfrak{N} \models \alpha$

Caso 1.2.23.2. *Seja* $n \neq 1$.

Se α é um axioma, a demonstração é como acima. Caso contrário, existem $1 \leq i,\ j < n$ tais que $\alpha_j = \alpha_i \to \alpha$ e $\alpha_n = \alpha$. Supomos (por hipótese de indução) que $h'(\alpha_i) = \mathtt{1}$ e $h'(\alpha_i \to \alpha) = \mathtt{1}$, mas, pela definição de f, $h'(\alpha) = \mathtt{1}$, isto é $\mathfrak{N} \models \alpha$, e acaba a indução ■.

Teorema 1.2.24. *Teorema de Completude para* $L^{\wedge}$

$$\mathfrak{N} \models \alpha \quad \Rightarrow \ \vdash_{L^{\wedge}} \alpha$$

Dem.:
A prova é análoga a 1.2.9, onde agora utilizamos o resultado de 1.2.22■.
Vamos demonstrar agora o Teorema de Completude para L$^{\vee}$, tomando como axiomas de L$^{\vee}$ os axiomas de L^{+} mais os Axiomas de L$^{\vee}$, Ax1$^{\vee}$-4$^{\vee}$, com

Ax1$^{\vee}$. $((\delta \to \gamma) \to \gamma) \to [((\beta \to \gamma) \to \gamma) \to (((\delta \vee \beta) \to \gamma) \to \gamma)]$

Ax2$^{\vee}$. $((\delta \to \gamma) \to \gamma) \to [(\beta \to \gamma) \to (((\delta \vee \beta) \to \gamma) \to \gamma)]$

Ax3$^\vee$. $(\delta \to \gamma) \to [((\beta \to \gamma) \to \gamma) \to ((((\delta \vee \beta) \to \gamma) \to \gamma)]$

Ax4$^\vee$. $(\delta \to \gamma) \to [(\beta \to \gamma) \to ((\delta \vee \beta) \to \gamma)]$.

Os axiomas são heuristicamente determinados de forma análoga aos de L$^\wedge$, isto é, a partir das linhas da tabela verdade de $\vee$.

Lema 1.2.25. *Seja $h''(p_1), ..., h''(p_n)$ uma função que atribui valores para $L^\vee$ às diferentes variáveis $p_1, ..., p_n$. Seja α uma fórmula que contém só estas variáveis $p_1, ..., p_n$ e $f''(\alpha)$ o valor associado à α pela mesma atribuição. Seja γ uma fórmula qualquer e defina α^* como em 1.2.7. Então, $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^\vee} \alpha^*$.*

Dem.:

Por indução na complexidade de α.
Para o caso atômico a demonstração é análoga a do caso atômico no Lema 1.2.7.
Se $\alpha = (\beta \to \delta)$, a demonstração é estritamente análoga à do Lema 1.2.7.
Seja $\alpha = \delta \vee \beta$. Temos, então, 2^2 casos diferentes, dependendo dos diferentes valores possíveis para δ e β e usamos j como definida em 1.2.17. Supomos que o lema vale para δ, β como hipótese da indução. Temos 4 casos:

Caso 1.2.25.1. $j(\delta) = 1 = j(\beta) = 1$.

Então $\delta^* = (\delta \to \gamma) \to \gamma$ e $\beta^* = (\beta \to \gamma) \to \gamma$ e $(\delta \vee \beta)^* = ((\delta \vee \beta) \to \gamma) \to \gamma$. Por hipótese de indução $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^\vee} (\delta \to \gamma) \to \gamma$ e $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^\vee} (\beta \to \gamma) \to \gamma$, mas, pelo Ax1$^\vee$, temos $\vdash_{L^\vee} ((\delta \to \gamma) \to \gamma) \to [((\beta \to \gamma) \to \gamma) \to ((\delta \vee \beta) \to \gamma) \to \gamma)]$ e, daí, por MP temos $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^\vee} ((\beta \to \gamma) \to \gamma) \to ((\delta \vee \beta) \to \gamma) \to \gamma)$ e, por MP de novo $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^\vee} (\delta \vee \beta) \to \gamma) \to \gamma = (\delta \vee \beta)^*$

Caso 1.2.25.2. $j(\delta) = 1, \quad j(\beta) = 0$.

Análogo, usando Ax2$^\vee$.

Caso 1.2.25.3. $j(\delta) = 0, \quad j(\beta) = 1$.

Análogo, usando Ax3$^\vee$.

Caso 1.2.25.4. $j(\delta) = j(\beta) = 0$.

Então $\delta^* = \delta \to \gamma$ e $\beta^* = \beta \to \gamma$ e $(\delta \vee \beta)^* = ((\delta \vee \beta) \to \gamma)$. Por hipótese $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^\vee} (\delta \to \gamma)$ e $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^\vee} (\beta \to \gamma)$, mas, pelo Ax4$^\vee$, temos $(\delta \to \gamma) \to [(\beta \to \gamma) \to ((\delta \vee \beta) \to \gamma)]$ e, daí, por MP com a hipótese da indução, temos $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^\vee} (\beta \to \gamma) \to ((\delta \vee \beta) \to \gamma)$ e por MP com a hipótese da indução $p_1^*, ..., p_n^* \vdash_{L^\vee} (\delta \vee \beta) \to \gamma = (\delta \vee \beta)^*$

Teorema 1.2.26. *Teorema de correção para $L^{\vee}$*

$$\vdash_{L^{\vee}} \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{J} \models \alpha$$

Dem.: : Por indução no comprimento da derivação formal de α, $\alpha_1, ..., \alpha_n$ De novo, para o fragmento puramente implicativo de $\mathrm{L}^{\vee}$, ver Teorema 1.2.8.

Caso 1.2.26.1. *Seja* $n = 1$

Então α é qualquer elemento do conjunto $\mathrm{Ax}1^{\vee}$-$4^{\vee}$ e devemos verificar através da tabela-verdade que é válida. Escolhemos $\mathrm{Ax}^{\vee}2$ (os outros casos são provados analogamente).

δ	β	γ	θ	η	$(\delta \vee \beta)$	λ	$\eta \to \lambda$	$\theta \to (\eta \to \lambda)$
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Com $\delta \to \gamma = \theta, \beta \to \gamma = \eta, (\delta \vee \beta) \to \gamma = \lambda$.
Então $\mathfrak{J} \models \alpha$

Caso 1.2.26.2. *Seja* $n \neq 1$

Se α é um axioma, a demonstração é como acima. Caso contrário, existem $1 \leq i,\ j < n$ tais que $\alpha_j = \alpha_i \to \alpha$ e $\alpha_n = \alpha$. Supomos (por hipótese de indução) que $h''(\alpha_i) = 1$ e $h''(\alpha_i \to \alpha) = 1$, mas, pela definição de f, $h''(\alpha) = 1$, isto é $\mathfrak{J} \models \alpha$, e acaba a indução $\blacksquare$.

Teorema 1.2.27. *Teorema de Completude para $L^{\vee}$*

$$\mathfrak{J} \models \alpha \quad \Rightarrow \vdash_{L^{\vee}} \alpha.$$

Dem.: :
A prova é análoga a 1.2.9, onde agora utilizamos o resultado de 1.2.25$\blacksquare$.

Para $\mathrm{L}^{\underline{\vee}}$, basta estabelecer os axiomas que introduzem o novo conectivo, desde que as demonstrações dos teoremas de correção e completude são quase idênticas às de $L^{\vee}$.[8] A seguinte é uma base axiomática para $L^{\underline{\vee}}$: H1-H3+$Ax1^{\underline{\vee}} - 4^{\underline{\vee}}$ com

Ax1$^{\underline{\vee}}$. $((\delta \to \gamma) \to \gamma) \to [((\beta \to \gamma) \to \gamma) \to ((\delta \veebar \beta) \to \gamma)]$

Ax2$^{\underline{\vee}}$. $((\delta \to \gamma) \to \gamma) \to [(\beta \to \gamma) \to (((\delta \veebar \beta) \to \gamma) \to \gamma)]$

Ax3$^{\underline{\vee}}$. $(\delta \to \gamma) \to [((\beta \to \gamma) \to \gamma) \to (((\delta \veebar \beta) \to \gamma) \to \gamma)]$

Ax4$^{\underline{\vee}}$. $(\delta \to \gamma) \to [(\beta \to \gamma) \to ((\delta \veebar \beta) \to \gamma)]$

1.2.3 A independência dos axiomas de Henkin

Respondendo a uma conjectura de Henkin[9] e a uma sugestão de Walter Carnielli[10] demonstramos nesta seção a independência de H1, H2 e H3 os quais, como estabelecido em 1.2.1, podem ser derivados dos axiomas de L^{+}. A demonstração de independência deve satisfazer a uma condição: preservar Modus Ponens (MP), que é a única regra de derivação em [26]. Em geral, afirmamos que uma matriz $\mathfrak{M}'$ *preserva* MP se concorda com $\mathfrak{M}$ nos valores $\mathfrak{o}, \mathfrak{1}$(sendo este último o único valor distinguido), isto é se $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}'$. Além do mais, sabemos que $\vdash_{L^+} \alpha \to \alpha$ e, portanto, $\mathfrak{M}' \models \alpha \to \alpha$, o que quer dizer que a diagonal sempre tem valor distinguido. Por outro lado, vamos tentar modificar a tabela minimamente, para simplificar a prova (por exemplo, introduzimos somente um valor de verdade a mais e preservamos a primeira coluna e a última linha, ou seja, o comportamento clássico da implicação quando 1 é o valor do consequente e 0 o valor do antecedente e, além do mais, fixamos $\frac{1}{2} \to \frac{1}{2} = 1$ e estabelecemos a seguinte convenção: se $f(\alpha) \leq f(\beta)$, então $\alpha \to \beta = 1$). Portanto, o conjunto das matrizes trivalentes possíveis $\mathfrak{M}'$ pode ser representado pela seguinte tabela

$\to$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	?	0
$\frac{1}{2}$	1	1	?
0	1	1	1

Levando isto em consideração, obtemos $\mathfrak{H}_1$, representada pela seguinte tabela (sendo 1 o único valor distinguido)

[8] Somente muda o caso que envolve o $Ax1^{\underline{\vee}}$.

[9] [26], p 47.

[10] Quem propôs o contra-modelo para H3.

$\to$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	1	1	1

Tomando $h^*(\alpha) = \frac{1}{2}, h^*(\beta) = 1$ e $h^*(\gamma) = 0$, então $\mathfrak{H}_1 \models$ H2, $\mathfrak{H}_1 \models$ H3, mas $\mathfrak{H}_1 \not\models$ H1. Como $\mathfrak{H}_1$ preserva MP, então concluimos que H2, H3 $\nvdash$ H1.

Para o caso de H2, seja $\mathfrak{H}_2$ (com 1 como único valor distinguido)

$\to$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

Tome $h'(\alpha) = \frac{1}{2}, h'(\beta) = \frac{1}{2}$ e $h'(\gamma) = 0$, então $\mathfrak{H}_2 \models$ H1, $\mathfrak{H}_2 \models$ H3, mas $\mathfrak{H}_2 \not\models$ H2. Como $\mathfrak{H}_2$ preserva MP, então H1, H3 $\nvdash$ H2.

Para o caso de H3, seja $\mathfrak{H}_3$ (com 1 como único valor distinguido)

$\to$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	1	1	1

Tome $h''(\alpha) = \frac{1}{2}, h''(\beta) = 0$ e $h''(\gamma) = \frac{1}{2}$, então $\mathfrak{H}_3 \models$ H1, $\mathfrak{H}_3 \models$ H2, mas $\mathfrak{H}_3 \not\models$ H3. Como $\mathfrak{H}_3$ também preserva MP, então H1, H2 $\nvdash$ H3.

Dessa forma, os três axiomas H1, H2 e H3 são independentes, como a intuição de Henkin havia previsto.

1.3 Outras demonstrações de completude

As demonstrações do teorema de completude para L^+ e suas extensões $L^\wedge$ e $L^\vee$ apresentadas até aqui não são, obviamente, as únicas existentes na literatura especializada. Nosso levantamento bibliográfico revelou pelo menos quatro demonstrações alternativas de completude para L^+, uma para $L^\wedge$ e duas para $L^\vee$.

É importante, porém, avaliar essas provas para compreender a natureza do problema envolvido, e para que se possa obter algum grau de sucesso nessa avaliação devemos estabelecer alguns critérios. Um deles esta diretamente relacionado com a motivação filosófica deste trabalho, a saber, a preocupação pelo minimalismo conceitual: como podemos obter um sistema correto e completo usando a menor quantidade de pressupostos? Do ponto de vista minimalista, um sistema que atinge o objetivo com economia de meios é, por si mesmo, interessante pois determina um roteiro metodológico, resultando em maior expressabilidade ou poder dedutivo com a menor quantidade de definições e pressupostos envolvidos, ou seja, o maior impacto com a estratégia mais simples. Eis nosso primeiro critério e a sua justificativa. De outra parte, um aprofundamento no estudo da implicação deveria estar acompanhado por uma tentativa real de afastar métodos alheios à própria implicação, ou seja, esta, pelo menos do ponto de vista sintático, deveria ser estudada implicativamente. Esta escolha envolve uma questão que será abordada no Capítulo 3: um sistema sem negação tem uma semântica que inclui um tipo de negação (o 0 na nossa matriz) e, daí, o grande problema da negação é simplesmente deslocado para o nível metamatemático de nosso sistema. Minimalismo e abordagem implicativa são, portanto, nossos critérios de adequação ao examinar uma prova de completude para L^+.

1.3.1 A prova de Rose

Logo depois da publicação de [26] e seguindo de perto o que chamamos de método de Henkin, Alan Rose [40], numa comunicação muito curta, apresenta uma demonstração de completude que resulta particularmente interessante para nosso trabalho. Ali, Rose completa uma prova que Tarski e Łukasiewicz só enunciaram em [48]: tendo um fragmento do cálculo proposicional onde a implicação é definida como primitiva, podemos demonstrar que se esse fragmento é fracamente completo, então também é fortemente completo. Denotamos com o conceito de 'fracamente completo' a propriedade de um sistema ter como teoremas somente suas tautologias, ou seja, de haver um sistema que não sabe lidar com fórmulas que não são tautologias. Com o conceito de 'fortemente completo' denotamos o fato de um sistema poder derivar uma fórmula a partir de outra que não é tautologia. Portanto, neste segundo caso pode acontecer que a derivação seja falsa (pois a fórmula a ser derivada não precisa ser tautologia). A intuição da prova é fazer depender o valor de verdade da fórmula total do valor de verdade da fórmula que estamos tentando derivar. Trabalhando com a implicação como único conectivo temos a seguinte solução: fixar o valor do antecedente da fórmula na qual o consequente é a fórmula que desejamos derivar. Esta demonstração de completude forte tem, portanto, o mesmo objetivo da nossa, mas ela começa supondo que o sistema é fracamente completo e usa a regra de substituição. O teorema que temos que demonstrar é o seguinte:

1. Teorema: Se num fragmento do cálculo proposicional a implicação material é definida em termos das funções primitivas, então qualquer formalização fracamente completa do sistema fragmentário que tenha por regras de dedução a de substituição e Modus Ponens, é também fortemente completa.

Para tanto, Rose introduz um novo axioma *à la* Henkin: $\Phi(p_1, ..., p_n)$ que recebe o valor 0 (ou F) quando, para todo i, p_i recebe o valor de verdade ti. Levando isto em conta, vamos aplicar a regra de substituição da seguinte maneira:
(i) Se $ti = 1$, então substituimos x_i por $x \to x$.
(ii) Se $ti = 0$, então substituimos x_i por $(x \to x) \to y$.
Vamos chamar de $\Psi(x, y)$ a fórmula resultante da substituição. Mas $f(x_i \to x_i) = 1$ sempre (denotaremos este fato por $\top$), e daí, quando $f(y) = 0$, então $f((x_i \to x_i) \to y) = 0$, ou, equivalentemente, $f(\top \to y) = 0$ se $f(y) = 0$. Daí, o valor de $\Psi(x, y)$ só depende do valor de y. Levando isto em conta, podemos examinar a seguinte fórmula:

$$\Psi(x, y) \to y.$$

Pela análise anterior, se $f(y) = 1$, então $f(\Psi f(x, y) \to y) = 1$, pois $f((\top \to y) \to y)$ só depende de y e, analogamente, quando $f(y) = 0$ $f(\Psi f(x, y) = 0$ e $f(\Psi f(x, y) \to y) = 1$.
Portanto, $\Psi(x, y) \to y$ é uma tautologia, e, pelo teorema da completude fraca, $\vdash (\Psi(x, y) \to y)$. Mas, por hipótese temos $\vdash \Psi(x, y)$ e, daí, por MP, temos $\vdash y$, obtendo o Teorema de Completude forte.
Assim, aplicando a regra de substituição de certa maneira, obtemos a completude desejada para um sistema puramente implicativo. É preciso observar, porém, que foi necessário introduzir um novo axioma e, assim, a demonstração foge do critério de minimalismo estabelecido. Além do mais, o novo axioma produzido partindo da atribuição de valores para Φ, faz sentido intuitivamente quando pensarmos nele como uma disjunção de fórmulas verdadeiras e de fórmulas falsas; como um tipo de forma normal não explícita. É justamente este detalhe o que, a nosso ver, não é preciso para obter a completude, incorporar uma forma normal na prova indicaria que a implicação não é suficiente, ou seja, que de algum modo precisamos mais regras além do Modus Ponens e isso se reflete no forte uso da regra de substituição na prova de Rose. O que é importante neste artigo é a conexão que se estabelece entre a prova de completude para um fragmento implicativo e a introdução da disjunção, em particular de uma forma normal implícita.

1.3.2 As provas de Lopes dos Santos e de Pollock

Na seção anterior observamos como Rose introduz um tipo de forma normal para obter o teorema da completude forte nos fragmentos implicativos do cálculo proposicional.

Reunimos aqui duas demonstrações que exploram explicitamente a disjunção com o intuito de obter o teorema da completude para o fragmento implicativo. Contudo, essas provas usam roteiros diferentes para aproveitar as propriedades da disjunção, [17] faz uso do método de Kálmar[11], [34] usa o método geral de Henkin, obtendo a completude por contraposição dos conceitos de teoria consistente e de existência de modelos, como de hábito.

Vamos examinar, esquematicamente, ambas as provas, começando pela de Lopes dos Santos.

O seguinte conjunto de fórmulas constitui a base axiomática usada nesse artigo:

Ax1^L. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

Ax2^L. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow [(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)]$

Ax3^L. $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$

Ax4^L. $\alpha \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

Ax5^L. $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

Ax6^L. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow [(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma)]$

Ax7^L. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$

Ax8^L. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$

Ax9^L. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$

Além disso temos Modus Ponens como única regra, e assumimos os teoremas da dedução e da equivalência como já demonstrados.

A idéia desta demonstração é usar um tipo de forma normal que garanta a eliminação das premissas usando a seguinte convenção: para um conjunto de fórmulas $K = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$ denotamos por $(K)^\alpha$ a fórmula α se K for vazio e a fórmula $\beta_1 \vee ... \vee \beta_n \vee \alpha$ caso contrário. Analogamente, denotamos $(K)^{-\alpha} = \alpha$ se K for vazio e a fórmula $\alpha \rightarrow \beta_1 \vee ... \vee \beta_n$, caso contrário.

[11]Como ele mesmo reconhece em op. cit, página 199, mas sem fazer qualquer menção do artigo de Henkin.

Por $\Delta_\vartheta;\alpha$ denotamos o conjunto das partes atômicas γ de α tal que $\vartheta(\gamma) = V$, onde V é valoração. Munidos com os axiomas, as regras e estas convenções, conseguimos provar um lema análogo a 1.2.22. Depois, usando o conceito de conjuntos exclusivos (intuitivamente, o das premissas verdadeiras e o das premissas falsas) e ajustando este conceito a cada uma das premissas, demonstramos por indução o Teorema de Completude.
Com esse teorema e explorando a seguinte equivalência proposicional, estabelecemos uma tradução[12] do cálculo implicativo-disjuntivo para o cálculo implicativo:

$$\alpha \vee \beta \Leftrightarrow (\alpha \to \beta) \to \beta$$

A seguir, apresentamos uma demonstração dessa equivalência usando os axiomas acima referidos[13] por considerá-la fundamental na compreensão do método de completude de Henkin.

Dem.: $\Rightarrow$

1.	$\alpha \vee \beta$	[Hip]
2.	$\alpha \to \beta$	[Hip]
3.	$(\alpha \to \beta) \to [(\beta \to \beta) \to ((\alpha \vee \beta) \to \beta)]$	[Ax6^L]
4.	$(\beta \to \beta) \to ((\alpha \vee \beta) \to \beta)$	[MP 2 e 3]
5.	$(\alpha \vee \beta) \to \beta$	[MP $4, 1.1.8$]
6.	β	[MP 1 e 5]
7.	$\alpha \vee \beta,\ \alpha \to \beta \vdash_L \beta$	[De 1, 2 e 6]
8.	$\alpha \vee \beta \vdash_L (\alpha \to \beta) \to \beta$	[Teorema da Dedução 7]
9.	$\vdash_L (\alpha \vee \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$	[Teorema da Dedução 8]

Para $\Leftarrow$, precisamos de dois lemas auxiliares[14]:

$$(a)((\alpha \vee (\alpha \to \beta)) \to \beta) \to (\alpha \vee (\alpha \to \beta))$$

[12] Com o termo "tradução" denotamos simplesmente o resultado da substituição de fórmulas logicamente equivalentes.

[13] Observe que para demonstrar nosso Lema 1.1.8 neste sistema (que justifica a passagem $\Rightarrow$ 3, 4) basta usar Ax1 e Ax3^L = Lema 1.2.4, vide a primeira seção do Apêndice.

[14] As seguintes demonstrações fazem parte de [6].

Dem.:

1.	$(\alpha \vee (\alpha \to \beta)) \to \beta$	[Hip]
2.	α	[Hip]
3.	$\alpha \to \alpha \vee (\alpha \to \beta)$	[Ax5^L]
4.	$\alpha \vee (\alpha \to \beta)$	[MP 2 e 3]
5.	β	[MP 1 e 4]
6.	$(\alpha \vee (\alpha \to \beta)) \to \beta,\ \alpha \vdash_L \beta$	[De 1, 2 e 5]
7.	$(\alpha \vee (\alpha \to \beta)) \to \beta \vdash_L (\alpha \to \beta)$	[Teorema da Dedução 6]
8.	$(\alpha \to \beta) \to \alpha \vee (\alpha \to \beta)$	[Ax4^L]
9.	$(\alpha \vee (\alpha \to \beta)) \to \beta \vdash_L \alpha \vee (\alpha \to \beta)$	[MP 7 e 8]
10.	$\vdash_L (\alpha \vee (\alpha \to \beta) \to \beta) \to (\alpha \vee (\alpha \to \beta))$	[Teorema da Dedução 9]

$$(b)\alpha \vee (\alpha \to \beta)$$

Dem.:

1.	$[(\alpha \vee (\alpha \to \beta)) \to \beta) \to (\alpha \vee (\alpha \to \beta))] \to (\alpha \vee (\alpha \to \beta))$	[Ax3^L]
2.	$(\alpha \vee (\alpha \to \beta) \to \beta) \to (\alpha \vee (\alpha \to \beta))$	[(a)]
3.	$\alpha \vee (\alpha \to \beta)$	[MP 1 e 2]

Podemos demonstrar agora $\Leftarrow$

Dem.:

1. $(\alpha \to \beta) \to \beta$
   [Hip]
2. $\alpha \to \beta$
   [Hip]
3. β
   [MP 1 e 2]
4. $\beta \to \alpha \vee \beta$
   [$Ax4^L$]
5. $\alpha \vee \beta$
   [MP 3 e 4]
6. $(\alpha \to \beta) \to \beta,\ (\alpha \to \beta) \vdash_L \alpha \vee \beta$
   [De 1, 2 e 5]
7. $(\alpha \to \beta) \to \beta \vdash_L (\alpha \to \beta) \to (\alpha \vee \beta)$
   [Teorema da Dedução 6]
8. $\alpha \to \alpha \vee \beta$
   [$Ax5^L$]

9. $(\alpha \to (\alpha \vee \beta)) \to [((\alpha \to \beta) \to (\alpha \vee \beta)) \to ((\alpha \vee (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \vee \beta)]$
[$Ax6^L$]

10. $((\alpha \to \beta) \to (\alpha \vee \beta)) \to [((\alpha \vee (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \vee \beta)]$
[MP 8 e 9]

11. $(\alpha \to \beta) \to \beta \vdash_L ((\alpha \vee (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \vee \beta)$
[MP 7 e 10]

12. $(\alpha \to \beta) \to \beta \vdash_L (\alpha \vee \beta)$
[MP (b) e 11]

14. $\vdash_L ((\alpha \to \beta) \to \beta) \to (\alpha \vee \beta)$
[Teorema da Dedução 12]

Assim, trocando cada ocorrência de $\alpha \vee \beta$ por $(\alpha \to \beta) \to \beta$ e traduzindo os lemas respectivos, obtemos a completude para o fragmento implicativo. Finalmente, usando os axiomas e teoremas adequados, estendemos a prova do fragmento implicativo para o fragmento implicativo-conjuntivo.
A demostração de Lopes dos Santos compartilha com a nossa a equivalência entre ¨$\vee$¨e ¨$\to$¨, explorada por nós em 1.1.9 e 1.2.1. Metodologicamente, porém, a prova de Lopes dos Santos difere da nossa: obtém um teorema da completude para o fragmento implicativo-disjuntivo e, quase como corolário, traslada essa demonstração para o fragmento implicativo. Achamos que não é necessária tal digressão; podemos, de fato, provar a completude de L^+ e, depois, estender essa completude para $L^\vee$, partindo, assim, do menor fragmento possível e acrescentando alguns detalhes na demonstração para obtermos a completude de fragmentos maiores. Em outras palavras, acreditamos que nossa prova consegue o mesmo objetivo de uma maneira mais simples e construtiva.
No caso de Pollock [34], usamos a construção geral de Henkin: construimos duas cadéias de teorias usando somente ¨$\vee$¨, uma contendo as fórmulas verdadeiras e a outra as falsas e mostramos, usando indução, que elas são, de fato, disjuntas. Para tanto, usamos

P. Se $\alpha \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \alpha$

Trans. Se $\Gamma \subseteq \Lambda$ e $\Gamma \vdash \alpha$, então $\Lambda \vdash \alpha$

AE. Se $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$, $\Lambda \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$ e $\Phi \cup \{\beta\} \vdash \gamma$, então $\Gamma \cup \Lambda \cup \Phi \vdash \gamma$

AI. Se $\Gamma \vdash \alpha$, então $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$ e $\Gamma \vdash \beta \vee \alpha$

I. Se $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$ e $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$, então $\Gamma \vdash \gamma \vee \beta$

II. Se $\Gamma \vdash (\alpha_1 \vee ... \vee \alpha_n)$, então $\Gamma \vdash \alpha_i \vee (\alpha_1 \vee ... \vee \alpha_{i-1} \vee \alpha_{i+1} \vee ... \vee \alpha_n)$

II. Se $\Gamma \vdash (\alpha_1 \vee ... \vee \alpha_n) \vee (\beta_1 \vee ... \vee \beta_n)$, então $\Gamma \vdash \alpha_1 \vee ... \vee \alpha_n \vee \beta_1 \vee ... \vee \beta_n$

A intuição da prova consiste em demonstrar que para todo Γ, P se $\Gamma \models P$, então $\Gamma \vdash P$ usando um raciocínio por contraposição, ou seja, supondo que $\Gamma \nvdash P$. Para tanto consideramos a enumeração P_n das fórmulas dessa linguagem e definimos $\Gamma \vdash \Sigma\Lambda$ denotando o fato de existirem $R_1, \ldots, R_k \in \Lambda$ tal que $\Gamma \vdash R_1 \vee \ldots \vee R_k$. Logo, definimos indutivamente:

$$A_0 = \Gamma$$

$$A_{n+1} = \begin{cases} A_n \cup \{P_n\} & \text{se } A_n \cup \{P_n\} \nvdash \Sigma B_n \\ A_n & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$A = \bigcup_{n \in \omega} A_n$$

$$B_0 = \{P\}$$

$$B_{n+1} = \begin{cases} B_n & \text{se } P_n \in A_{n+1} \\ B_n \cup \{P_n\} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$B = \bigcup_{n \in \omega} B_n$$

Onde A, intuitivamente, denota a cadéia das fórmulas verdadeiras, enquanto B denota a cadéia das fórmulas falsas. O seguinte passo consiste em mostrar que existe uma atribuição de valores que contém exatamente estes conjuntos de fórmulas e, daí, satisfaz Γ, enquanto falsifica P. Esta valoração substitui o conjunto maximal consistente da construção padrão e, por exemplo, podemos verificar que $\alpha \vee \beta$ pertence a ela sse α ou β pertencem a ela. Pollock observa aqui que poderiamos introduzir novos conectivos, fixando mais condições para este conjunto maximal consistente não-construtivo (por exemplo, $\alpha \to \beta$ pertence a ele sse α não pertence a ele ou β pertence a ele) e estabelecendo as regras de introdução e eliminação adequadas.
Pollock fecha seu artigo observando que ¨$\vee$¨ e ¨$\to$¨ são interdefiníveis, fato que temos explorado na nossa demonstração e ressaltado na prova de completude anterior. O método de Pollock identifica-se com o nosso num aspecto importante: toma um conectivo ¨$\vee$¨ (no nosso caso¨$\to$¨), demonstra a completude do sistema usando somente esse conectivo e estende essa prova para outros conectivos, ou seja, o intuito das demonstrações é igual. Mesmo assim, a prova de Pollock não usa o método de Kálmar, diferentemente da nossa e da prova anterior: o método de Henkin que Pollock usa é um método geral. Sua prova é, portanto, minimal mas não construtiva.

1.3.3 A prova de Schumm

A prova de Schumm [43] é a única que compartilha com a nossa e com a de Henkin o fato de ter ¨→¨ como único conectivo. Os Axiomas 1 e 2 de seu sistema coincidem com os nossos e o Axioma 3 coincide com 1.2.4.
Usando os seguintes conceitos e os de teoria consistente e maximal consistente[15]:

T1. Se $\alpha \in \Gamma$, ou α é um axioma, então $\Gamma \vdash \alpha$

T2. Se $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ e $\Gamma \vdash \alpha$, então $\Gamma \vdash \beta$

T3. Se $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ então $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

T4. Se $\Gamma \vdash \alpha$, então $\Gamma \cup \Delta \vdash \alpha$

T5. Se $\Gamma \vdash \alpha$ então $\Delta \vdash \alpha$ para algum subconjunto finito Δ de Γ.

T6. Se Γ é maximal consistente, então: $\alpha \to \beta \in \Gamma$, sse $\alpha \notin \Gamma$ ou $\beta \in \Gamma$

T7. Se Γ é maximal consistente, então existe uma valoração ω, tal que para cada fórmula $\alpha, \omega(\alpha) = V$ sse $\alpha \in \Gamma$.

provamos por indução

T8. Se $\Gamma \nvdash \alpha$, então existe uma extensão maximal consistente Θ de Γ tal que $\alpha \notin \ \Gamma$.

Daí, supondo que $\Gamma \nvdash \alpha$, obtemos pelos teoremas 7 e 8, que existe uma valoração ω' tal que $\omega(\gamma) = V$ para todo $\gamma \in \Gamma$ e $\omega(\alpha) = F$, isto é $\Gamma \nvDash \alpha$ e, por contraposição, obtemos o teorema da completude. Esta demonstração tem a vantagem de recorrer somente à implicação, como a nossa. Contudo, a nossa demonstração, pelo fato de estar em estreita relação com a de Kálmar, é construtiva, pois não apela para propriedades metamatemáticas especiais; somente usa recursos do sistema e indução. Não queremos dizer com isto que seja mais correta ou necessariamente melhor; simplesmente é mais adequada para nossos objetivos (vide pp 9,23). A prova de Schumm é minimal, mas não é construtiva e, por isso, achamos que faz sentido optar pela nossa, devido aos critérios conceituais e metodológicos acima referidos. Além disso, nossa prova (seguindo Henkin) pode-se adaptar a outras situações.
Portanto, a prova de Schumm é mais geral, embora perca o caráter construtivo da nossa (caráter herdado do método de Kálmar)

[15] A definição de teoria consistente e maximal consistente é a usual.

1.4 O Paradoxo de Curry e sua derivação em L^+

Uma prova da trivialidade de alguns sistemas formais, apresentada originalmente por Kleene e Rosser e um trabalho de Carnap motivaram o artigo [15], onde Curry ataca a questão das condições básicas para se obter inconsistência[16] no interior de qualquer lógica implicativa que satisfaça certos critérios. O paradoxo equivale ao seguinte teorema[17]:

Teorema: "Se $\mathfrak{G}$ é um sistema combinatoriamente completo[18] em que existe uma operação de implicação $\rightarrow$ tal que para termos α, β arbitrários

1. [19]$\vdash \alpha \rightarrow \alpha$
2. $\vdash \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) / \vdash \alpha \rightarrow \beta$
3. $\vdash \alpha, \vdash \alpha \rightarrow \beta / \vdash \beta$

então cada termo de $\mathfrak{G}$ é uma asserção. "

Em termos de nosso trabalho, isto quer dizer que, dado um sistema de lógica de combinadores tendo $\rightarrow$ como conectivo e 1,2 e 3 como acima, então cada fórmula de $\mathfrak{G}$ é um teorema, ou seja, $\mathfrak{G}$ é trivial. Note, porém que um sistema de lógica combinatória envolve *condições* em que se aplica a lógica proposicional *junto* com a própria lógica [20]. A condição 2 equivale ao Lema 1.2.1 e a 3 a MP. Feitas estas observações iniciais, voltamos à demonstração da trivialidade de $\mathfrak{G}$, através da demonstração do seguinte:

Lema 1: Se $\mathfrak{G}$ satisfaz às condições do Teorema e se β' é um termo qualquer tal que existe um termo α para o qual $\alpha \equiv \alpha \rightarrow \beta'$, então $\vdash \beta'$.

Dem.:

Por 1,

$$\vdash \alpha \rightarrow \alpha \quad (i)$$

Mas, pela hipótese do Lema e a regra de substituição isto equivale a

$$\vdash \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta') \quad (ii)$$

Daí (por 2 e 3)

$$\vdash \alpha \rightarrow \beta' \quad (iii)$$

[16]Em palavras de Curry. Nós preferimos usar o termo 'trivialidade'.

[17]Usamos a versão original de Curry adaptando-a a nossa linguagem.

[18]Isto é, temos à nossa disposição uma regra de substituição sem restrições.

[19]Na versão original por um erro de impressão lê-se $\vdash \alpha \rightarrow \beta$. Vide a resenha crítica [22].

[20]Não pretendemos nos aprofundar nesse ponto; ver a introdução de [15].

Mas, pela hipótese do lema como α equivale a $\alpha \to \beta'$ temos:

$$\vdash \alpha' \ (iv)$$

Daí (por (iii), (iv) e 3)

$$\vdash \beta'$$

Obtemos $\vdash \beta'$ para β' qualquer e, portanto, $\mathfrak{G}$ é trivial. Em que sentido podemos afirmar que uma lógica é trivial segundo este argumento? Precisamos mostrar que para cada termo β *podemos obter um* α tal que $\alpha \vdash \alpha \to \beta$ e $\alpha \to \beta \vdash \alpha$. A inconsistência depende da descoberta de um α com tais características e para tanto devemos *construir* um exemplo onde a derivação anterior possa ser reproduzida, ou seja, precisamos de alguns conceitos adicionais para obtermos a trivialidade positiva (por exemplo, a noção de pertinência ou algumas noções de aritmética que são produto de uma *interpretação* da teoria[21]). Portanto, L^+ é a lógica sujacente de uma possível objeção do tipo da de Curry, mas nem sempre que trabalharmos com L^+ teremos trivialização[22]. Ela acontece quando *representamos* um raciocínio matemático que envolve um universo semântico específico (por exemplo, conjuntista); L^+ pode ser a base da trivialidade, mas a causa depende de uma construção adicional (neste caso, da construção de α). O problema agora é encontrar uma situação onde o argumento de Curry possa ser aplicado. Ele mesmo apresenta dois tipos de situações onde, de fato, o argumento acontece, em ambos os casos usando auto-referência: uma reconstrução do paradoxo de Russell[23] e uma reconstrução do paradoxo de Epimênides (a rigor, uma construção análoga à que Kurt Gödel faz do paradoxo do mentiroso). A primeira situação (que basta para nossos objetivos) pode ser reformulada da maneira abaixo. Seja, para β arbitrário:

$$\alpha = \{x : (x \in x) \to \beta\} \quad (i)$$

Por uma aplicação de AIA (ver nota) obtemos:

$$(\alpha \in \alpha) \leftrightarrow ((\alpha \in \alpha) \to \beta)(ii)$$

[21] O próprio Curry reproduz o paradoxo usando o conceito de *número de Gödel*, por exemplo.

[22] Vide a Seção 2 do Apêndice para uma versão da trivialidade positiva que não depende de uma construção auxiliar, mas é direta.

[23] Observamos que é preciso aceitar mais uma condição para se derivar o paradoxo: toda propriedade define um conjunto; isto é, $x \in \{y : A(y)\} \Leftrightarrow A(x)$. Chamaremos esta condição de Axioma Irrestrito de Abstração e a denotaremos por AIA.

e a partir dai:

$$(\alpha \in \alpha) \to ((\alpha \in \alpha) \to \beta)(iii)$$

e

$$((\alpha \in \alpha) \to \beta) \to (\alpha \in \alpha)(iv)$$

Usando a Lei da Absorção (ítem 2 no argumento de Curry) obtemos, a partir de (iii):

$$(\alpha \in \alpha) \to \beta(v)$$

e de (v), usando (iv) obtemos:

$$(\alpha \in \alpha)(vi)$$

e imediatamente, a partir de (v) e (vi), obtemos o elemento arbitrário β, e portanto demonstramos o que quer que seja.

A partir daí, como será mostrado em seções posteriores, uma solução para objeções desse tipo pode ser fundamentalmente semântica (impedindo a construção de α) ou fundamentalmente sintática (revisando as características da implicação usada no Lema). Por outro lado, é importante observar que esta versão do paradoxo de Russell não faz qualquer menção à negação ou contradição via negação, mas sim à trivialidade através da implicação. Na nossa leitura, é a implicação o conceito-base para se obter trivialidade, enquanto, como explicamos na Seção 1.2, a negação vem a ser um conceito limite, o caso extremo da implicação (quando β é, de fato algo falso, isto é $\perp$). Portanto, podemos buscar a causa da trivialização positiva nas características da implicação em L^+, pois em L^+ valem 2, MP e substituição; em outras palavras, podemos tentar uma resposta ao argumento de Curry com o intuito de evitar a trivialização de *qualquer* lógica positiva modificando o comportamento da implicação clássica.

Esses meios, porém, podem visar dois objetivos: ou excluir a cláusula 2 como teorema, ou controlar MP (o que pode levar até ao abandono do Teorema da Dedução clássico, como é o caso de [39]). Optamos pela primeira alternativa, tentando a construção de um sistema positivo não clássico (não bivalente) onde, de fato, a condição 2, conhecida como Lei da Absorção não é teorema e, portanto, não podemos trivializar usando o argumento de Curry. No próximo capítulo examinamos os detalhes desse possível sistema, e no capítulo 3 exploraremos o fenômeno de trivialidade implicativa.

Também no próximo capítulo examinamos outra via para evitar o paradoxo de Curry através das restrições da implicação que estabelece Wilhelm Ackermann como apresentadas em [39] e relacionamos-as com nossa proposta.

1.5 Considerações

Partindo da proposta de Tarski-Łukasiewicz e usando o método estabelecido em [26], pudemos, como vimos, demonstrar que o sistema L^{+} e suas extensões $L^{\wedge}$ e $L^{\vee}$ são corretos e completos. Examinamos a literatura existente e concluimos que a prova satisfaz aos critérios metodológicos de minimalismo conceitual e construtividade, particularmente valiosos para uma caracterização adequada da lógica positiva. Munidos desses resultados, abordamos no próximo capítulo o problema da relação de L^{+} com alguns sistemas não clássicos, em particular com as lógicas n-valentes e com a lógica intuicionista. A abordagem não-clássica da lógica positiva aponta uma saida para evitar possíveis situações como as detectadas por Curry e esclarece a relação sintática entre implicação e trivialidade, que será explorada com proveito no Capítulo 3.

Capítulo 2

A perspectiva não-clássica

Seria possível evitar o argumento de Curry, mas conservando a possibilidade de se ter uma demonstração construtiva da completude? Neste capítulo vamos mostrar como, de fato, a lógica positiva não se reduz à lógica bivalente clássica, mas pode ser devidamente modificada para representar o fragmento implicativo de algumas lógicas n-valentes (onde possamos evitar o paradoxo de Curry) e que tem uma estreita relação com uma certa noção de infinito. Examinamos, ainda, a relação de L^+ com o fragmento positivo de uma lógica intuicionista (de Wilhem Ackermann) e tentamos precisar em que sentido ela satisfaz critérios construtivos, além dos referidos no Capítulo 1. Os resultados do capítulo são essencialmente pessimistas: tudo leva a conjecturar que qualquer das tentativas de se controlar ou restringir a implicação leva à perda da possibilidade de se manter uma demonstração construtiva da completude. Esta pode ser uma propriedade bastante profunda da implicação, que contudo, para ser demonstrada, exigirá métodos muito mais sofisticados. Nosos intuito é investigar esse fato em vários casos especiais e discutir os pontos positivos e negativos em cada um deles.

2.1 L_n e L_n^+

Em [48], Tarski e Łukasiewicz estabelecem uma relação entre L^+ e as lógicas n-valentes, indicando como deveriam ser adequadas algumas definições para estudar estes fragmentos. Essa vai ser nossa primeira tarefa nesta seção. Além do mais, vamos tomar L_3 (a lógica trivalente de Łukasiewicz) e investigar, usando a axiomatização de Wajsberg [52], a questão de se o método de Henkin usado no Capítulo 1, poderia também ser usado aqui para demonstrar o Teorema de Completude do fragmento puramente implicativo da lógica referida. Esclareceremos até que ponto tal método pode ser estendido para uma implicação muito semelhante à clássica.

2.1.1 Linguagem de L_n^+

Definição 2.1.1. Linguagem L_n^+: Definimos a linguagem de L_n^+ da seguinte maneira:

1. Símbolos Primitivos: Um conjunto infinito enumerável de variáveis proposicionais: $\{p_1, p_2, ...p_n, ...\}$
2. Conectivos: Um conjunto unitário de conectivos, $\{\rightarrow_n\}$
3. Símbolos Auxiliares: ¨(¨, ¨)¨.

Definição 2.1.2. Fórmulas L_n^+:

Caso 2.1.2.1. *Qualquer variável proposicional é uma fórmula atômica.*

Caso 2.1.2.2. *Toda fórmula atômica é uma fórmula.*

Caso 2.1.2.3. *Se α e β são fórmulas, então $(\alpha \rightarrow_n \beta)$ é uma fórmula.*

Definição 2.1.3. Regras de Inferência:

- Modus Ponens: Dadas α,β fórmulas

$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow_n \beta}{\beta}$$

- Substituição de uma variável por uma fórmula: se α é fórmula, p uma variável proposicional e β uma fórmula, então definimos por indução na complexidade da fórmula:

Caso 2.1.3.1. *Se α for atômica*

$$\begin{array}{lll} \alpha[p \setminus \beta] = & \alpha & se\ \alpha \neq p \\ \alpha[p \setminus \beta] = & \beta & se\ \alpha = p \end{array}$$

Caso 2.1.3.2. *Se $\alpha = \delta \rightarrow_n \gamma$, então:*

$$\alpha[p \setminus \beta] = \delta[p \setminus \beta] \rightarrow_n \gamma[p \setminus \beta]$$

Definição 2.1.4. Uma matriz para L_n^+ é uma tripla ordenada $\mathfrak{M} = [A, B, f]$, que contém dois conjuntos disjuntos A, B (com elementos de qualquer tipo), e uma função f de duas variáveis, definida em $A \cup B$. A matriz $\mathfrak{M} = [A, B, f]$ é dita *normal* se $x \in$B e $y \in$A sempre implicarem $f(x, y) \in$ A.

Definição 2.1.5. A função h é dita uma *função que atribui valores na matriz* $\mathfrak{M} = [A, B, f]$ para L_n^+ se satisfizer às seguintes condições:

1. A função h é definida para cada $\alpha \in$For L_n^+.
2. Se p é uma variável proposicional,então $h(p) \in A \cup B$.
3. Se $\alpha, \beta \in$For L_n^+, então $h(\alpha \rightarrow_n \beta) = f(h(\alpha), h(\beta))$.

Dizemos que uma fórmula α é *satisfeita* pela matriz $\mathfrak{M} = [A, B, f]$, isto é $\mathfrak{M} \models \alpha$, se $h(\alpha) \in B$ para cada função h que atribui valores à esta matriz.

Definição 2.1.6. O sistema proposicional L_n^+ (onde n é um número natural ou $n = \aleph_0$) é o conjunto de todas as sentenças que são satisfeitas pela matriz $\mathfrak{M}_\mathrm{n} = [A, B, f]$, onde, no caso $n = 1$ tem-se $A = \emptyset$. No caso $1 < n < \aleph_0$ $A = \{\frac{k}{n-1} \mid 0 \leq k < n-1\}$. No caso $n = \aleph_0$, $A = \{\frac{k}{l} \mid 0 \leq k < l \;\; k, l \in \mathbb{N}\}$, $B = \{1\}$ e a função f é definida pela fórmula $f(x, y) = min\{1, 1 - x + y\}$.

Vamos tomar como exemplo o sistema L_3^+, isto é, o cálculo positivo trivalente. Nesse caso, segundo a definição geral, teremos $A = \left\{\frac{0}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, $A = \{1\}$ e $f(x, y) = 1$ se $x \leq y$, caso contrário $f(x, y) < 1$. Usamos a matriz $\mathfrak{M}_3$ tal como foi apresentada por Wajsberg [52] (denotando por 2 o terceiro valor de verdade e por 1 o único valor distinguido[1] seguindo Wajsberg, onde muitos autores contemporâneos usam $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \ldots, 1$ para L_n):

$\rightarrow_3$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	2
2	2	1	1

Vamos levar em conta a tabela da negação para demonstrar a equivalência entre axiomas

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0
2	2

[1]Usamos valores $0, 1, \ldots, n$.

2.1.2 L_3^+: Axiomas, Metateorema da Dedução

Definição 2.1.7. A seguir temos a base axiomática para L_3, introduzida por Łukasiewicz e mostrada completa por Wajsberg :

1. $\vdash_{L^3} \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow_3 \alpha)$

2. $\vdash_{L^3} (\alpha \rightarrow_3 \beta) \rightarrow_3 ((\beta \rightarrow_3 \gamma) \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \gamma))$

3. $\vdash_{L^3} ((\alpha \rightarrow_3 \neg\alpha) \rightarrow_3 \alpha) \rightarrow_3 \alpha$

4. $\vdash_{L^3} (\neg\beta \rightarrow_3 \neg\alpha) \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta)$

No capitulo anterior, demonstramos o teorema da completude para um fragmento que tinha Ax1, Ax2 e um terceiro axioma com uma estrutura similar a Ax3, mas sem negação, o que sugere que devemos encontrar uma forma equivalente do Ax3 que evite a ocorrência da negação. Usando a intuição original de Henkin em 1.2.8, podemos atribuir a $\neg\alpha$ o sentido de $\alpha \rightarrow_3 \beta$, procedimento justificado semânticamente assim:

α	$\neg\alpha$	$\alpha \rightarrow_3 \neg\alpha$	$(\alpha \rightarrow_3 \neg\alpha) \rightarrow_3 \alpha$	$((\alpha \rightarrow_3 \neg\alpha) \rightarrow_3 \alpha) \rightarrow_3 \alpha$
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
2	2	1	2	1

α	β	$\alpha \rightarrow_3 \beta$	$\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta)$	$(\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta)) \rightarrow_3 \alpha$	$[(\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta)) \rightarrow_3 \alpha] \rightarrow_3 \alpha$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1
0	2	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	1	1
2	0	2	1	2	1
2	1	1	1	2	1
2	2	1	1	2	1

Ambas as fórmulas são válidas para qualquer valoração possível, e, além do mais, com as mesmas entradas obtêm-se as mesmas saídas[2] (observe a

[2]Esta axiomática alternativa foi considerada e justificada pelo próprio Wajsberg em [52], p 284.

quarta coluna da primeira tabela e a quinta da segunda): o valor é 0, quando $f(\alpha) = 0$; é 1, quando $f(\alpha) = 1$ e 2, quando $f(\alpha) = 2$. Daí,

$$\text{A3}((\alpha \to_3 \neg\alpha) \to_3 \alpha) \to_3 \alpha \Leftrightarrow \text{A3'}[(\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \beta)) \to_3 \alpha] \to_3 \alpha.$$

Observamos que em L_3^+ não vale a Lei da Absorção, isto é $\mathfrak{M}_3 \not\models (\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \beta)) \to_3 (\alpha \to_3 \beta)$, pois basta tomar $f(\alpha) = 2$ e $f(\beta) = 0$ e o resultado sera $f((\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \beta)) \to_3 (\alpha \to_3 \beta)) = 2$, o que faz de L_3^+ um bom candidato para contestar à objeção de Curry. Levando em conta os critérios do método de Henkin, devemos demonstrar o Teorema da Dedução para L_3^+. Para tanto, temos de usar (como em 1.1.10) Ax1 e Ax2 e os seguintes lemas:

Lema 2.1.8. $\vdash_{L_3^+} \alpha \to_3 \alpha$

Dem.:
1. $\vdash_{L_3^+} (\alpha \to_3 ((\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \alpha)) \to_3 \alpha)) \to_3 [(((\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \alpha)) \to_3 \alpha) \to_3 \alpha) \to_3 (\alpha \to_3 \alpha)]$
   [Ax2]
2. $\vdash_{L_3^+} \alpha \to_3 ((\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \alpha)) \to_3 \alpha)$
   [Ax1]
3. $\vdash_{L_3^+} (((\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \alpha)) \to_3 \alpha) \to_3 \alpha) \to_3 (\alpha \to_3 \alpha)$
   [MP 1 e 2]
4. $\vdash_{L_3^+} ((\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \alpha)) \to_3 \alpha) \to_3 \alpha$
   [Ax3']
5. $\vdash_{L_3^+} \alpha \to_3 \alpha$
   [MP 3 e 4]

Lema 2.1.9. $\vdash_{L_3^+} (\alpha \to_3 (\beta \to_3 \gamma)) \to_3 [(\delta \to_3 \beta) \to_3 (\alpha \to_3 (\delta \to_3 \gamma))]$

Dem.: Vide [52], p 267, Tese 6.

Lema 2.1.10. $\vdash_{L_3^+} (\alpha \to_3 (\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \beta))) \to_3 (\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \beta))$

Dem.: Vide [52], p 269, Tese 41.

Teorema 2.1.11. *Teorema da Dedução para L_3^+: Se Γ é um conjunto de fórmulas, α e β são fórmulas e $\Gamma, \alpha \vdash_{L_3^+} \beta$, então $\Gamma \vdash_{L_3^+} \alpha \to_3 (\alpha \to_3 \beta)$.*

Dem.:

Conservando a definição de prova (Teorema 1.1.10) e *mutatis mutandis*, temos três casos a demonstrar, (por indução no comprimento da prova):

Quando $n = 1$

β é um axioma,ou

$\beta \in \Gamma$, ou

$\alpha = \beta$

Nos dois primeiros subcasos a prova é estritamente análoga: $\Gamma, \alpha \vdash_{L_3^+} \beta$ (por hip). Mas se β é axioma ou $\beta \in \Gamma$,e, então $\Gamma \vdash_{L_3^+} \beta$. Pelo Ax1 temos $\Gamma \vdash_{L_3^+} \beta \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta)$. Daí, por MP, temos $\Gamma \vdash_{L_3^+} \alpha \rightarrow_3 \beta$ e, pelo Ax1 e MP $\Gamma \vdash_{L_3^+} \alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta)$. No último subcaso temos $\Gamma, \alpha \vdash_{L_3^+} \beta$ e $\alpha = \beta$(por hip), mas, pelo Lema 2.1.8, temos $\Gamma \vdash_{L_3^+} \alpha \rightarrow_3 \alpha$ e, portanto,$\Gamma \vdash_{L_3^+} \alpha \rightarrow_3 \beta$, e pelo AX1 e MP, $\Gamma \vdash_{L_3^+} \alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta)$.
Isto esgota o caso $n = 1$.

Se $n \neq 1$, assumimos que ou β é um axioma, ou $\beta \in \Gamma$, ou $\alpha = \beta$, ou β é o resultado de aplicar MP em β_j e β_m, com $j < i, m < i$ e vamos demonstrar para $n = i$. Nos três casos iniciais, a demonstração é estritamente análoga à do caso $n = 1$. Vamos demonstrar, portanto, o último subcaso. Por hipótese de indução, temos $\Gamma \vdash_{L_3^+} \alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta_j)$ e $\Gamma \vdash_{L_3^+} \alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\beta_j \rightarrow_3 \beta_i))$. Pelo Ax2 temos
$\Gamma \vdash_{L_3^+} (\alpha \rightarrow_3 \beta_j) \rightarrow_3 [(\beta_j \rightarrow_3 \beta_i) \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta_i)]$
e pelo Ax2 de novo $\Gamma \vdash_{L_3^+} (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta_j)) \rightarrow_3 [((\alpha \rightarrow_3 \beta_j) \rightarrow_3 ((\beta_j \rightarrow_3 \beta_i) \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta_i))) \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 ((\beta_j \rightarrow_3 \beta_i) \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta_i))]$
e por MP com a hipótese da indução, obtemos
$\Gamma \vdash_{L_3^+} ((\alpha \rightarrow_3 \beta_j) \rightarrow_3 ((\beta_j \rightarrow_3 \beta_i) \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta_i))) \rightarrow_3 [\alpha \rightarrow_3 ((\beta_j \rightarrow_3 \beta_i) \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta_i))]$ mas por MP com o Ax2 temos
$\Gamma \vdash_{L_3^+} \alpha \rightarrow_3 ((\beta_j \rightarrow_3 \beta_i) \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta_i))$. Daí, pelo Lema 2.1.9, temos
$\Gamma \vdash_{L_3^+} \alpha \rightarrow_3 ((\beta_j \rightarrow_3 \beta_i) \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta_i)) \rightarrow_3 [(\alpha \rightarrow_3 (\beta_j \rightarrow_3 \beta_i)) \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta_i)))]$ e por MP obtemos
$\Gamma \vdash_{L_3^+} (\alpha \rightarrow_3 (\beta_j \rightarrow_3 \beta_i)) \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta_i)))$.
Pelo Ax1 temos $\Gamma \vdash_{L_3^+} (\alpha \rightarrow_3 (\beta_j \rightarrow_3 \beta_i)) \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta_i)) \rightarrow_3 [\alpha \rightarrow_3 ((\alpha \rightarrow_3 (\beta_j \rightarrow_3 \beta_i)) \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta_i))))]$
e por MP obtemos $\Gamma \vdash_{L_3^+} \alpha \rightarrow_3 ((\alpha \rightarrow_3 (\beta_j \rightarrow_3 \beta_i)) \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta_i))))$.
Daí, pelo Lema 2.1.9 temos
$\Gamma \vdash_{L_3^+} \alpha \rightarrow_3 ((\alpha \rightarrow_3 (\beta_j \rightarrow_3 \beta_i)) \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta_i)))) \rightarrow_3 [(\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\beta_j \rightarrow_3 \beta_i))) \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta_i)))))]$. Mas por MP obtemos
$\Gamma \vdash_{L_3^+} (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\beta_j \rightarrow_3 \beta_i))) \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta_i)))))$.
Daí, por MP com a hipótese da indução, obtemos
$\Gamma \vdash_{L_3^+} \alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta_i)))))$. Pelo Lema 2.1.10,

temos
$\Gamma \vdash_{L_3^+} \alpha \to_3 (\alpha \to_3 (\alpha \to_3 (\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \beta_i))))) \to_3 [\alpha \to_3 (\alpha \to_3 (\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \beta_i)))]$ e por MP obtemos $\Gamma \vdash_{L_3^+} \alpha \to_3 (\alpha \to_3 (\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \beta_i)))$.
Daí, pelo Lema 2.1.10, temos $\Gamma \vdash_{L_3^+} \alpha \to_3 (\alpha \to_3 (\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \beta_i))) \to_3 (\alpha \to_3 (\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \beta_i)))$ e por MP obtemos $\Gamma \vdash_{L_3^+} \alpha \to_3 (\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \beta_i)))$ mas por um último uso do Lema 2.1.10 e Modus Ponens obtemos $\Gamma \vdash_{L_3^+} (\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \beta_i)))$ ■.

Salientamos que o Teorema da Dedução para L^+ depende de uma forma da Lei de Absorção que não é válida em L_3^+. Contudo, em L_3^+ vale uma Lei da Absorção fraca (vide 2.1.10) que usamos na demonstração do Teorema 2.1.11.
Por outro lado, é natural levantarmos a seguinte questão: por que devemos modificar a nossa demonstração de 1.1.10 para o caso de L_3^+? Porque em L_3^+ existem contra-exemplos para o Teorema da Dedução de L^+. Considere o seguinte:
$\Gamma, \alpha \to (\beta \to \gamma), \alpha \to \beta \vdash_{L^+} \alpha \to \gamma$. Segundo o Teorema 1.1.10, podemos concluir (vide Lema 1.2.4) $\Gamma \vdash_{L^+} (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to [(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)]$, mas em L_3^+, tomando $f(\alpha) = 2$, $f(\beta) = 2$ e $f(\gamma) = 0$, teremos

$$f((\alpha \to_3 (\beta \to_3 \gamma)) \to_3 [(\alpha \to_3 \beta) \to_3 (\alpha \to_3 \gamma)]) = 2$$

e, então, pela Definição 2.1.5

$$\mathfrak{M}_3 \nvDash ((\alpha \to_3 (\beta \to_3 \gamma)) \to_3 [(\alpha \to_3 \beta) \to_3 (\alpha \to_3 \gamma)]$$

Mas, de fato, em L_3 vale o Teorema da Correção (vide [52], Teorema 24), então

$$\Gamma \nvdash_{L_3^+} (\alpha \to_3 (\beta \to_3 \gamma)) \to_3 [(\alpha \to_3 \beta) \to_3 (\alpha \to_3 \gamma)].$$

Este fato muitas vezes passa despercebido ou, pelo menos, não é apresentado com a clareza que deveria, mesmo na literatura especializada:
Por exemplo, Robering em [39](página 5, nota) afirma que L_3 'possui um Teorema da Dedução sem restrições' e se baseia em [30]. Já nesse livro, Malinowski apresenta o Teorema da Dedução (denotado por (Ded)) para a lógica clássica em termos do operador de conseqüência tarskiano (p 34):

$$(Ded) \quad \beta \in C(X, \alpha) sse \;\; \alpha \to \beta \in C(X).$$

Mais para a frente (pp 63-64), estudando as propriedades padrão das construções polivalentes, ele descreve uma 'matriz standard de conseqüência', denotando por C_n^M um operador de conseqüência para a matriz M (em particular, para M polivalente) e afirma que 'apresenta uma semelhança muito grande com o operador de conseqüência da lógica clássica'. Em particular, dados $\alpha, \beta \in$ For e $X \subseteq For$:

$$(\rightarrow) \qquad \beta \in C_n^M(\alpha, X) sse \ \ \alpha \rightarrow \beta \in C_n^M(X).$$

Contudo, Malinowski está simplesmente estabelelecendo uma semelhança estrutural (algébrica) entre operadores de consequência, o que não quer dizer que '($\rightarrow$)' valha nas mesmas condições que '(Ded)', ou, equivalentemente, que o Teorema da Dedução da lógica clássica coincida com, pelo menos, o Teorema da Dedução de *algumas* lógicas polivalentes. O que temos, então, é um operador de consequência com propriedades gerais semelhantes às clássicas (é finito, estrutural, etc.) e outro de dedutibilidade, que, no caso da lógica clássica é denotado por $\alpha \rightarrow \beta$ e no caso da trivalente por $\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta)$[3].
Provavelmente o problema ao ler essa passagem do livro de Malinowski provenha do fato de ele usar o mesmo símbolo ("$\rightarrow$") para operadores de dedutibilidade diferentes e por isso acreditamos que seria desejável usar "$\rightarrow n$" ao invés de "$\rightarrow$" para evitar confusões como, por exemplo, a que leva Robering a afirmar que o Teorema da Dedução vale *sem restrições* para L_3 e, em particular, para seu fragmento implicativo L_3^+, pois, como vimos acima, podemos construir contra-exemplos que demonstram o contrário.

2.1.3 O problema da completude de L_3^+

Encarando as dificuldades de se encontrar uma demonstração construtiva de completude para L_3^+, devemos reconhecer dois fatos que representam uma forte evidência negativa para nossa tentativa.
Fato 1: O método de Henkin usado para L^+ depende da validade de alguns axiomas, do Modus Ponens e do teorema da dedução (na versão clássica do capítulo 1). Esta versão, porém, não é válida em L_3, nem, portanto, em L_3^+. Logo, é virtualmente impossível obter lemas proposicionais que ajudem na demonstração dos teoremas de correção e completude (como demonstrados no Capítulo 1). Poderiamos propor demonstrações usando o Teorema 2.1.11 MP e substituição, mas, mesmo assim, ficariamos numa

[3]Vide [14], página 125 para uma explicação mais detalhada deste aspecto.

situação difícil quando tentássemos demonstrar o análogo do Lema 1.2.6 em L_3^+ e, portanto, não conseguiriamos as ferramentas necessárias para obtermos o resultado desejado.

Fato 2: Supondo que o Teorema da Dedução na forma clássica coincidisse com o de L_3^+, restaria outro problema sério na aplicação do método de Henkin: Qual é a 'configuração' do valor de verdade 2? Para 0 e 1 temos $\alpha \to_3 \gamma$ e $(\alpha \to_3 \gamma) \to_3 \gamma$ como no capítulo 1. Depois de muitas tentativas para L_3^+, não foi possível isolarmos uma configuração para 2, pois sempre obtivemos mais que o necessário. Tomemos, por exemplo, $\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \gamma)$ como configuração de 2 e observemos a seguinte tabela verdade:

α	γ	$\alpha \to_3 \gamma$	$\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \gamma)$
0	0	1	1
0	1	1	1
0	2	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1
1	2	2	2
2	0	2	1
2	1	1	1
2	2	1	1

O problema é que $\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \gamma)$ não consegue isolar aqueles casos onde, se $f(\alpha) = 2$, então $f(\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \gamma)) = 1$, pois coincide com os casos onde $f(\alpha \to_3 \gamma) = 1$, isto é, $\alpha \to_3 (\alpha \to_3 \gamma)$ poderia representar também o caso $f(\alpha) = 0$. Esta particularidade faz com que não seja possível generalizar o método de Henkin para *qualquer* lógica polivalente, em particular, para a hierarquia L_n de Łukasiewicz. Resta procurar outro sistema polivalente que satisfaça às seguintes condições:

(1). Deve ter uma implicação com um comportamento clássico o suficiente para se obter um Teorema da Dedução irrestrito.

(2). Não pode validar a Lei de Absorção, para evitar o paradoxo de Curry.

2.2 Outros sistemas n-valentes

Os problemas de conseguir um sistema não-clássico com condições adequadas para se obter o teorema da completude no estilo de Henkin, e evitar o paradoxo de Curry, embora elementares, não têm uma solução nem trivial nem

imediata. A teoria das lógicas multivalentes tal como desenvolvida em [38] e [30], por exemplo, não sugere muito sucesso no que diz respeito aos dois problemas referidos, o que indicaria que, segundo nossa colocação anterior teriamos duas opções (possivelmente exclusivas)no que concerne a isitemas de lógica positiva implicativa:
Ou obtemos uma prova construtiva de completude, ou adotamos uma implicação suficientemente restrita de tal forma a invalidar a objeção de Curry. Em outras palavras:
(i) Algumas lógicas polivalentes finitárias controlam o paradoxo de Curry (como é o caso da lógica trivalente L_3 de Ł ukasiewicz), mas possuem uma estrutura que foge dos requisitos de Henkin, que garantem condições suficientes para completude construtiva.
ou
(ii) Podemos abrir mão de nossa preocupação para com o paradoxo e obter fragmentos completos, embora passíveis de trivialização positiva via Lei da Absorção.

Vamos adiar a discussão sobre a (aparente) incompatibilidade de (i) com (ii) para outra seção e, a seguir, estudamos o caso das lógicas da inconsistência formal intoduzidas em [12] através de um caso especial, o sistema LFI1 que pareceria particularmente apto para uma resposta afirmativa pelo menos ao caso (ii).

2.2.1 O caso das lógicas paraconsistentes: LFI1

Desde que os sistemas polivalentes de Łukasiewicz não são apropriados para satisfazer (i) e (ii), examinamos o caso das lógicas paraconsistentes que estendem a base positiva (as lógicas da inconsistência formal intoduzidas em [12]) tomando uma delas (o sistema LFI1) como exemplo paradigmático. Concluimos que estas lógicas também não são adequadas para tratar com a trivialidade positiva. Para tanto, apresentamos o fragmento implicativo do sistema LFI1, como introduzido em [13], lembrando as definições de linguagem para L^+, adotando Modus Ponens como única regra de inferência e introduzindo as seguintes definições de matriz e base axiomática:

Definição 2.2.1. O sistema proposicional LFI1$^+$ é o conjunto de todas as sentenças que são satisfeitas pela matriz $\mathfrak{LFI}1^+$=$[A, B, g]$, onde $A = \{0\}$, $B = \{1, \frac{1}{2}\}$ e a função g é definida pelas fórmulas

$$g(0,0) = g(0,1) = g(0, \frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2}, 1) = g(1,1) = 1;$$

$$g(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = g(1,\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

e

$$g(\frac{1}{2},0) = g(1,0) = 0$$

Podemos representar esta matriz usando a seguinte tabela-verdade, onde 1 e $\frac{1}{2}$ são os valores distinguidos

$\rightarrow$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1	1

Definição 2.2.2. O seguinte conjunto constitui uma possível base axiomática para LFI1$^+$:

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

Observamos que a partir desses axiomas já podemos obter o Teorema da Dedução clássico (irrestrito). Entretanto, precisamos de mais um axioma para se conseguir o Teorema da Completude. Desde que a lógica paraconsistente foi originalmente concebida como conservando uma base clássica (estendendo o fragmento positivo, pelo menos na maioria delas, vide [12], em particular página 32), os axiomas restantes com as condições requeridas podem ser somente $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow [((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma]$ (seguindo a intuição de Henkin) ou $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ (seguindo a intuição de Tarski e Łukasiewicz). Mas em ambos os casos, a demonstração de completude é a clássica. Daí, o fragmento positivo de LFI1 e outras lógicas paraconsistentes (por exemplo P^1 ou J_3 como introduzidos em [44] e [18] respectivamente) coincide com o da lógica clássica e, portanto aquelas resultam inócuas para resolver o problema da trivialidade positiva. Apontamos, ainda, que a separabilidade dos valores de verdade através de configurações de fórmulas (como proposta em [11]) faz sentido nas lógicas paraconsistentes no caso de haver negação, operador de consistência ou qualquer operador diferente da simples implicação.

Com os recursos que temos, podemos afirmar que a implicação material só consegue lidar com o argumento de Curry pagando o preço de enfraquecer o Teorema da Dedução (como no caso de $Ł_3^+$). A rigor, $Ł_3^+$ seria um bom candidato para refutar positiva e minimalmente (sem introduzir novos conectivos) a Lei da Absorção e controlar a trivialidade implicativa. O fato de L_3^+ aparentemente não ser completo usando o método construtivo de Henkin esclarece um ponto na compreensão daquele problema: parece que não temos um sistema minimal e completo *à la* Henkin que invalide o paradoxo em questão. Uma resposta alternativa é construir um sistema onde a implicação pode ser observada em níveis diferentes ou, inclusive, onde possamos falar em duas implicações. Observamos, entretanto, que uma possível resposta paraconsistente-relevante é discutida em [19], usando uma *semântica da pertinência* no sentido em que não somente o valor de verdade das proposições, mas também o conteúdo (pertinência) deve ser levado em conta. Esta semântica, contudo, exige que uma noção de pertinência seja dada como primitiva e, ainda, inclui negação e, dessa forma, foge a nossos propósitos.. Examinamos a seguir outra proposta nesta direção, a de Ackermann, e observamos as semelhanças e divergências em relação à nossa.

2.3 A proposta de Whilhelm Ackermann

Como uma alternativa aos paradoxos que envolvem o princípio de compreensão ou abstração, Whilhelm Ackermann, um estudante de David Hilbert, famoso por seus trabalhos em funções recursivas (as conhecidas *funções de Ackermann de crescimento rápido*), desenvolveu alguns sistemas lógicos onde tal princípio pode ser aplicado sem restrições, e não valem argumentos como o de Russell.[4]

Esta proposta estava estreitamente vinculada com o programa formalista de fundamentação da matemática de seu mestre David Hilbert, e, portanto, pode ser considerada como uma tentativa de se evitar paradoxos (como o de Russell) usando meios formais. Como os teoremas da incompletude de Gödel já eram amplamente conhecidos na época, Ackermann mudou a idéia original de Hilbert: só queria evitar o paradoxo de Curry (não *qualquer* paradoxo) e, além do mais, não usou a lógica clássica, mas uma lógica intuicionista (construtiva e, portanto, mais confiável segundo o propósito do Programa de Hilbert, embora Hilbert não endossasse o intuicionismo). A proposta de Ackermann pode ser considerada, então, como uma parte dos restos do programa formalista.

Desde que a solução de Russell e Whitehead para este problema foi estabelecer uma teoria dos *tipos lógicos* (restringindo a extensão de cada conceito a um nível específico) e a solução de Ackermann não produz uma tal estra-

[4]A proposta de Ackermann está contida numa série de artigos [1] e [2]. Complementamos a proposta original com a apresentação que dela faz Robering em [39].

tificação, ele chamou a lógica subjacente à sua proposta de *lógica sem tipos* (*typefreien Logik*). A intuição de Ackermann foi, então, mudar a lógica subjacente e não a matemática, no caso, a teoria de conjuntos.

Nosso roteiro nas seguintes seções consistirá em discutir algumas generalidades nas motivações conceituais nessa intuição, para, logo depois, discutir os seguintes pontos específicos: (i) as restrições à implicação, (ii) o conceito de modalidade, (iii) o exame formal de tais sistemas (introduzindo sua linguagem, definições e demonstrando os principais fatos em relação a eles) e (iv) a idéia de hierarquia de lógicas de Ackermann.

2.3.1 Motivações conceituais

A proposta de Ackermann, como todo projeto sistemático, é complexa e extensa. Ela não se reduz a uma discussão a respeito de sistemas intuicionistas ou sem tipos[5], mas visa uma reestruturação de conceitos tais como os de implicação e dedução. Como ele estabelece diferentes tipos de implicação (a material, denotada em seus artigos por $\supset$ e a estrita, denotada por $\rightarrow$), precisa aprimorar sua noção de necessidade, o que, de fato, é levado a cabo em [3] e que, depois das melhoras introduzidas por Anderson e Belnap, dá origem à uma nova linha de pesquisa, *a lógica relevante*, (vide [4], cujos conceitos e resultados utilizaremos com o intuito de estudar a abordagem de Ackermann à modalidade). Salientamos que com o exame dos conceitos moDaís pretendemos complementar a apresentação de Robering em alguns pontos que julgamos incompletos. Com efeito, a proposta de [1] não é muito clara em relação ao caráter do operador Γ (que denotaremos por $\curlyvee$), mas, o uso que dele se faz e a intuição que o sustenta estão conectados com o conceito de necessidade, e, portanto, devemos esclarecer o tratamento modal de tal operador.

Depois destas considerações iniciais examinamos a seguir a solução do paradoxo de Curry usando os sistemas de Ackermann, tal como analisado em [39].

Definição 2.3.1. Dada uma fórmula A[6] e um termo x chamamos $\{x|A\}$ *um termo de classe* se x e A estiverem conectados pelos seguintes princípios de conversão:

$$t \in \{x|A\} \rightarrow [t\backslash x]A \quad (abs1)$$

[5] O que caracteriza explicitamente seu interesse inicial em relação ao tema.

[6] Mudamos a convenção das letras gregas para denotar fórmulas, pois no sistema de Ackermann usaremos o operador $\curlyvee$ que pode ser facilmente confundido com a letra grega γ.

$$[t\backslash x]A \to t \in \{x|A\} \quad (abs2)$$

Estas expressões denotam o fato de podermos trocar em A toda ocorrência de x por t, desde que x esteja numa certa relação com A (num certo nível referencial ou conceitual) e por outro lado, o fato de afirmarmos que, desde que a troca é possível, x e A estão numa certa relação de pertinência.

Definição 2.3.2. Chamamos de *combinatoriamente completo* um sistema onde valem (abs1) e (abs2).

Visando evitar paradoxos como o de Russell, Ackermann aceita predicados parciais que produzem fórmulas em que um dos valores de verdade (clássico) não ocorre e, portanto, não vale o princípio do terceiro excluido. A justificativa para a ausência desse princípio encontra-se em [1][7]. Ao estudarmos a derivabilidade não estamos estudando, a rigor, o conectivo que representa a implicação, mas *as condições de possibilidade* da dedução de uma fórmula a partir de outra. Nesse contexto, introduzimos uma constante lógica para exprimirmos uma fórmula que é sempre derivável e cuja negação, portanto, seria uma fórmula que nunca é derivável, ou seja, uma fórmula absurda. Ora, o princípio do terceiro excluido aplica-se a fórmulas *com sentido* passíveis de ser *verdadeiras ou falsas*, ao passo que uma fórmula absurda, pelo fato de não possuir sentido, foge dessa condição. Daí, o estudo da derivabilidade é *anterior*, por assim dizer, ao estudo do princípio do terceiro excluido pois não estabelece pontualmente as condições de verdade de uma fórmula, mas as condições nas quais podemos afirmar que uma fórmula faz sentido. É evidente, então, que a lógica de Ackermann tem pelo menos duas características próprias das lógicas intuicionistas (a ausência do princípio do terceiro excluido e a preocupação com o raciocínio construtivo, neste caso envolvendo a implicação), mas devemos notar que tem sido interpretada na literatura especializada como um sistema n-valente[8]. Apesar de todas essas ressalvas, outro tipo de paradoxo pode atingir os sistemas de Ackermann, por exemplo o paradoxo de Curry[9], supondo que tenhamos uma lógica que possua um símbolo $\curlywedge$ para denotar o falso ou a falsidade, que vale o Teorema da Dedução e MP como regra de inferência, teriamos o seguinte argumento:

Seja $c = \{x|(x \in x) \to \curlywedge\}$, então

$$(1)(c \in c) \to ((c \in c) \to \curlywedge) \text{ (abs1)}$$

[7] Págs 38-39.

[8] Esta possibilidade será considerada mais adiante.

[9] Embora o próprio Curry reduza o paradoxo de Russell a seu próprio argumento (cfr 1.4), aqui somente o primeiro é considerado.

$$(2) c \in c \quad \text{(hip)}$$

$$(3)(c \in c) \rightarrow \curlywedge \quad \text{(2,1 MP)}$$

$$(4) \curlywedge \text{(2, 3 MP)}$$

$$(5)(c \in c) \rightarrow \curlywedge \quad \text{(TD 2, 4)}$$

$$(6)((c \in c) \rightarrow \curlywedge) \rightarrow (c \in c) \quad \text{(abs2)}$$

$$(7) c \in c \quad \text{(MP 5,6)}$$

$$(8) \curlywedge \quad \text{(7,1 MP duas vezes)}$$

Observamos que esta demonstração explora o Teorema da Dedução (em (5)) e as duas regras de substituição (em (1) e (6)) para derivar $\curlywedge$ e além do mais, que a passagem de (2) a (4) depende da Lei da Absorção. Sabemos que uma forma possível de se controlar este argumento é restringir (abs1) e (abs2) (o que nos conduz à teoria dos tipos), ou controlar MP ou o Teorema da Dedução (como no caso de L_3^+). Ackermann considera esta última como a melhor opção. Levando em conta que, segundo ele, se representarmos a dedutibilidade de B a partir de A por $A \rightarrow B$, podemos estabelecer que um sistema é *dedutivamente completo*, o argumento de Curry pode ser interpretado como mostrando que um sistema não é, ao mesmo tempo, dedutiva e combinatoriamente completo.

2.3.2 Restrições à implicação

O nosso problema aqui é distinguir duas intepretações da implicação: uma (a material, que até agora temos explorado) onde qualquer prova de B partindo de A basta (na presença de algo como o Teorema da Dedução) para estabelecer a demonstrabilidade de $A \rightarrow B$; outra (a estrita) onde existe um tipo de prova que garante alguma conexão entre A e B. A idéia, segundo Robering, é intepretar *dedutivamente* a implicação, tentando esclarecer por quê A pode ser derivado de B, o que nos leva a introduzir conceitos *a respeito* da implicação. Nas suas próprias palavras[10]:

> Suponhamos que S seja o sistema da lógica proposicional tal que $A \rightarrow B$ é um teorema sse $A \vdash_S B$. A definição da relação de derivabilidade $\vdash_S$ vai depender das regras de inferência de S. Desde que $\rightarrow$ pertence à linguagem de S, existirão regras de inferência para este conectivo, como (MP). Mas, daí, a caracterização de $\rightarrow$ por meio de $\vdash_S$ seria circular.

[10] [39] p 6.

Devemos ter, portanto, axiomas ou princípios para esclarecer a interpretação dedutiva da implicação, mas os novos axiomas, naturalmente, não podem coincidir com os axiomas que não levam em conta as particularidades da nova implicação. Por exemplo[11]:

$$(vq)\ \ A \to (B \to A),$$

exprime o fato de que se A é derivável, então $B \to A$ é derivável, mas a noção de derivabilidade é metalinguística e, portanto, não podemos incorporá-la à nossa linguagem. Daí, (vq) não pode ser um axioma com a intepretação dedutiva da implicação. Outro exemplo notável é

$$(sd)\ \ A \to (B \to C) \to [(A \to B) \to (A \to C)]$$

que expressa o fato de que se $B \to C$ é derivável de A, também o são B e C, mas, de novo, estamos confundindo a noção metalinguística de derivabilidade com a noção linguística de implicação. Desde que, por um lado, não valem (vq) nem (sd), e por outro, estamos impondo condições adicionais à implicação, não podemos concluir que vale o Teorema da Dedução para a lógica positiva. Em outras palavras, vamos ter que demonstrar uma *versão* do Teorema da Dedução que leve em conta essas condições particulares. As referidas restrições têm o intuito de fixar níveis implicativos (não tipos lógicos) onde possamos descrever as características da derivabilidade de um sistema apenas fora dele, ou seja, as relações implicativas entre objetos de um sistema podem ser esclarecidas unicamente usando uma implicação de segundo nível. No caso clássico, entretanto, existe uma confusão ou identificação de níveis: o Teorema da Dedução é derivável no interior do sistema, mas é um meta-teorema (um teorema a respeito de teoremas). Adiando a apresentação da hierarquia dos sistemas dedutivos até a próxima seção, salientamos alguns pontos interessantes na resposta de Ackermann a argumentos como o de Curry:

(1) Não podemos resolver, segundo ele, o paradoxo se não relativizarmos profundamente a noção de implicação, chegando mesmo a abandonar os axiomas clássicos e, portanto, o Teorema da Dedução na versão padrão. Ackermann explicita dessa maneira uma questão colocada por nós na discussão do paradoxo: temos de esquecer o caráter clássico da implicação para evitarmos argumentos que trivializem positivamente nosso sistema. Podemos tentar uma solução aceitando alguns axiomas clássicos, mas enfraquecendo

[11]Usamos os nomes (vq) e (sd) para denotar oa Axioma 1 do capítulo 1 (por *verum ex quodlibet*) e o Lema 1.2.5 do mesmo capítulo (por *self-distribution*)

o Teorema da Dedução (por exemplo como em L_3^+) ou podemos reconstruir o argumento desde o início, erigindo todo um sistema novo (como ele faz). Provavelmente a principal virtude da proposta de Ackermann seja a sua radicalidade: enquanto nós procuramos adaptar um sistema para resolver nosso problema, ele resolve o problema, esclarecendo onde (no Teorema da Dedução) e por quê (confusão entre níveis implicativos) aquele acontece, e depois constrói o sistema.

(2) O Teorema da Dedução válido nas lógicas de Ackermann somente inclui os casos onde, de premissas verdadeiras que derivam a conclusão, derivamos efetivamente a conclusão, isto é, do ponto de vista desta lógica positiva intuicionista poderiamos conectar as premissas com a conclusão se tivermos uma derivação que garante ao mesmo tempo a validade de cada uma delas e da conclusão. O paradoxo de Curry aconteceria devido ao caráter arbitrário do teorema da dedução clássico: segundo Ackermann, não poderiamos aceitar premissas não deriváveis e obter uma conclusão derivável; no caso da objeção de Curry as premissas não podem ser deriváveis.

2.3.3 Conceitos preliminares

Nesta seção apresentamos o conteúdo técnico do trabalho de Ackermann, visando esclarecer a relação entre níveis implicativos, mencionada na seção anterior.

Definição 2.3.3. Definimos a linguagem $\mathfrak{L}^+$ contendo as operações $\curlyvee$ (o-ária), $\wedge, \vee$ e $\rightarrow$(binárias). A definição de fórmula se estabelece por aplicação recursiva de tais operações no conjunto S (infinito enumerável) de variáveis proposicionais $S = \{p, q, r \ldots\}$. $\mathfrak{L}^+$ também pode ser pensada como a álgebra livre $\mathfrak{L}^+ = \langle Form_{\mathfrak{L}^+}, \curlyvee, \wedge, \vee, \rightarrow \rangle$

Definição 2.3.4. Uma substituição s é um homomorfismo de $\mathfrak{L}^+$ em $\mathfrak{L}^+$, $s \in HOM(\mathfrak{L}^+, \mathfrak{L}^+)$. Denotamos por sA o resultado de se aplicar s à fórmula A e, para $M \subseteq Form_{\mathfrak{L}^+}$, sM é o conjunto $\{sA | A \in M\}$. Caso tenhamos $s \in HOM(\mathfrak{L}^+, \mathfrak{L}^+), p_i \in S$ $(1 \leq i \leq m), sp_i = B_i$ e $sq = q$ para todo $q \in S$ diferente de p_i, escrevemos $A[B_1/p_1 \ldots B_m/p_m]$ ao invés de sA.

Definição 2.3.5. Definimos indutivamente a operação $\curlyvee^m A$ $(m \in \mathbb{N})$ da seguinte maneira[12]

$\curlyvee^0 A = A$

[12] o Sentido intuitivo dessa operação é basicamente igual ao de um regra de necessidade, como veremos na seção 2.3.7.

$\curlyvee^{m+1}A = \curlyvee \rightarrow (\curlyvee^m A)$

Intuitivamente, o símbolo $\curlyvee$ poderia ser compreendido como "a conjunção de todas as verdades'construtíveis ou verdades deriváveis", e $\curlyvee^n$ simplesmente como uma iteração. Dessa forma, $\curlyvee \rightarrow A$ significa algo como "A é infalsificável". Discutimos esta questão em mais detalhes na seção 2.3.7.
Temos duas abordagens possíveis para estudar as principais propriedades do fragmento positivo das lógicas de Ackermann: A^+(a axiomática) e Σ^+ (usando dedução natural). A seguir, apresentamos as duas versões e algumas demonstrações importantes a respeito de A^+ e Σ^+.

2.3.4 O sistema A^+

Definição 2.3.6. A seguinte é uma base axiomática para o sistema A^+

A1 $A \rightarrow A$

A2 $(\curlyvee \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$

A3a $A \wedge B \rightarrow A$

A3b $A \wedge B \rightarrow B$

A4a $A \rightarrow A \vee B$

A4b $B \rightarrow A \vee B$

A5 $A \wedge (B \vee C) \rightarrow B \vee (A \wedge C)$

A6 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)$

A7 $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$

A8 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

A9 $(\curlyvee \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A)$

A10 $(\curlyvee \rightarrow A \vee B) \rightarrow ((\curlyvee \rightarrow A) \vee (\curlyvee \rightarrow B))$

A11 $(\curlyvee \rightarrow A) \rightarrow A$

Definição 2.3.7. As seguintes são as regras de inferência para A^+

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}(mp)$$

e[13]

$$\frac{A}{\curlyvee \to A}(up)$$

Seja $M \subseteq Form_{\mathfrak{L}^+}$ e $A \in Form_{\mathfrak{L}^+}$. Então escrevemos '$M \Vdash_{A^+} A$' para denotarmos que A é derivável em A$^+$ a partir de M. Podemos, a partir desta definição, demonstrar alguns fatos importantes[14] a respeito de $\Vdash_{A^+}$.

Teorema 2.3.8.

Caso 2.3.8.1. $\Vdash_{A^+} \curlyvee$

Dem.:

1.	$\curlyvee \to \curlyvee$	[A1]
2.	$(\curlyvee \to \curlyvee) \to \curlyvee$	[A11]
3.	$\curlyvee$	[MP 1,2]

Caso 2.3.8.2. $A, B \Vdash_{A^+} A \wedge B$

Dem.:

1.	A	[Hip]
2.	B	[Hip]
3.	$\curlyvee \to A$	[(up)em 1]
4.	$(\curlyvee \to A) \to (B \to A \wedge B)$	[A2]
5.	$B \to A \wedge B$	[MP 3, 4]
6.	$A \wedge B$	[MP 2, 5]

Caso 2.3.8.3. $A \Vdash_{A^+} B \to A$

Caso 2.3.8.4. $\Vdash_{A^+} A \to \curlyvee$

Caso 2.3.8.5. $A \to B, B \to C \Vdash_{A^+} A \to C$

Caso 2.3.8.6. $C \to A, C \to B \Vdash_{A^+} C \to A \wedge B$

Caso 2.3.8.7. $A \to C, B \to C \Vdash_{A^+} A \vee B \to C$

Como consequência destes fatos, obtemos o seguinte lema e o seguinte corolário

Lema 2.3.9. *Se '$A \leftrightarrow B$' abrevia a fórmula '$(A \to B) \wedge (B \to A)$'. Então:* $A_1 \leftrightarrow A_2, B_1 \leftrightarrow B_2 \Vdash_{A^+} A_1 \oplus B_1 \leftrightarrow A_2 \oplus B_2$ *para* $\oplus \in \{\wedge, \vee, \to\}$

[13] Na seção seguinte introduziremos as restrições para esta regra, desde que os sistemas de dedução natural permitem observar mais claramente suas dificuldades.

[14] Demonstramos somente dois, os outros provêm dos axiomas e de casos anteriores.

Corolário 2.3.10. *Seja p qualquer letra proposicional de S. Então,* $A \leftrightarrow B \Vdash_{A^+} [A/p]C \to [B/p]C$.

Lema 2.3.11. $A \to (B \to C),\ C \to D \Vdash_{A^+} A \to (B \to D)$

Dem.:

1.	$A \to (B \to C)$	[Hip]
2.	$C \to D$	[Hip]
3.	$\Upsilon \to (C \to D)$	[(up) em 2]
4.	$\Upsilon \to (C \to D) \to [A \to (C \to D)]$	[A9]
5.	$A \to (C \to D)$	[(mp) 3, 4]
6.	$(A \to (B \to C)) \wedge (A \to (C \to D))$	[Caso 2.3.8.2 1, 5]
7.	$(A \to (B \to C)) \wedge (A \to (C \to D)) \to [A \to ((B \to C) \wedge (C \to D))]$	[A6]
8.	$A \to ((B \to C) \wedge (C \to D))$	[(mp) 6, 7]
9.	$(B \to C) \wedge (C \to D) \to (B \to D)$	[A8]
10.	$A \to (B \to D)$	[Caso 2.3.8.5 8, 9]

Lema 2.3.12. $A \wedge B \to C \Vdash_{A^+} (\Upsilon \to A) \to (B \to C)$

Dem.:

1.	$A \wedge B \to C$	[Hip]
2.	$(\Upsilon \to A) \to (B \to A \wedge B)$	[A2]
3.	$(\Upsilon \to A) \to (B \to C)$	[Lema 2.3.11 1, 2]

Lema 2.3.13. $A \wedge B \to B \wedge A$

Dem.:

1.	$A \wedge B \to B$	[A3b]
2.	$A \wedge B \to A$	[A3a]
3.	$A \wedge B \to B \wedge A$	[Caso 2.3.8.6 1, 2]

Lema 2.3.14. $A \to B \Vdash_{A^+} (C \to A) \to (C \to B)$

Dem.:

1.	$A \to B$	[Hip]
2.	$\Upsilon \to (A \to B)$	[(up) em 1]
3.	$(A \to B) \wedge (C \to A) \to (C \to A) \wedge (A \to B)$	[Lema2.3.13]
4.	$(C \to A) \wedge (A \to B) \to (C \to B)$	[A8]
5.	$(A \to B) \wedge (C \to A) \to (C \to B)$	[Caso 2.3.8.5 3, 4]
6.	$\Upsilon \to (A \to B) \to [(C \to A) \to (C \to B)]$	[Lema 2.3.12 em 5]
7.	$(C \to A) \to (C \to B)$	[(mp) 2, 6]

Lema 2.3.15. *Se* $\Vdash_{A^+} A \to B$, *então* $\Vdash_{A^+} (A \wedge C) \to B$ *e* $\Vdash_{A^+} (C \wedge A) \to B$

Dem.:

1.	$A \to B$	[Hip]
2.	$A \wedge C \to A$	[A3a]
3.	$C \wedge A \to A$	[A3b]
4.	$A \wedge C \to B$	[Caso 2.3.8.5 1, 2]
5.	$C \wedge A \to B$	[Caso 2.3.8.5 1, 3]

Lema 2.3.16. $A \to (B \to C),\ A \to (C \to D) \Vdash_{A^+} A \to (B \to D)$

Dem.:

1.	$A \to (B \to C)$	[Hip]
2.	$A \to (C \to D)$	[Hip]
3.	$A \to (B \to C) \wedge A \to (C \to D)$	[Caso 2.3.8.2 1, 2]
4.	$A \to ((B \to C) \wedge (C \to D))$	[(mp) A6 e 3]
5.	$(B \to C) \wedge (C \to D) \to (B \to D)$	[A8]
6.	$A \to (B \to D)$	[Caso 2.3.8.5 4, 5]

Lema 2.3.17. $A \to B \Vdash_{A^+} A \wedge C \to B \wedge C$

Dem.:

1.	$A \to B$	[Hip]
2.	$A \wedge C \to B$	[Lema 2.3.15 1]
3.	$A \wedge C \to C$	[A3b]
4.	$A \wedge C \to B \wedge C$	[Caso 2.3.8.6 2, 3]

Lema 2.3.18. $\Vdash_{A^+} ((A \to A_1) \wedge \ldots \wedge (A \to A_n)) \to (A \to (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n))$

Dem.:
Por indução sobre o número m de conjunções.

Caso $m = 1$: Pelo A6 temos $\Vdash_{A^+} ((A \to A_1) \wedge (A \to A_2)) \to (A \to (A_1 \wedge A_2))$.

Caso $m \neq 1$: Por hipótese de indução temos $\Vdash_{A^+} \bigwedge_{i=1}^{m+1}(A \to A_i) \to (A \to \bigwedge_{i=1}^{m+1}(A_i))$, e pelo Lema 2.3.17 temos $\Vdash_{A^+} \bigwedge_{i=1}^{m+2}(A \to A_i) \to ((A \to \bigwedge_{i=1}^{m+1}(A_i)) \wedge (A \to A_{m+2}))$, mas pelo A6 temos $\Vdash_{A^+} ((A \to \bigwedge_{i=1}^{m+1}(A_i)) \wedge (A \to A_{m+2})) \to (A \to \bigwedge_{i=1}^{m+2}(A_i))$ e pelo Caso 2.3.8.5 obtemos $\Vdash_{A^+} \bigwedge_{i=1}^{m+2}(A \to A_i) \to (A \to \bigwedge_{i=1}^{m+2}(A_i))$.

Lema 2.3.19. *Se* $\Vdash_{A^+} \curlyvee^i A_1 \wedge \ldots \wedge \curlyvee^i A_m \to A_0$*, então* $\Vdash_{A^+} \curlyvee^j A_1 \wedge \ldots \wedge \curlyvee^j A_m \to A_0$ *para todo* $j \geq i$

Dem.:
Por hipótese temos $\Vdash_{A^+} \curlyvee^i A_1 \wedge \ldots \wedge \curlyvee^i A_m \to A_0$. Pela Definição 2.3.5 $\curlyvee^{j+1} A_1 \wedge \ldots \wedge \curlyvee^{j+1} A_m = (\curlyvee \to (\curlyvee^j A_1)) \wedge \ldots \wedge (\curlyvee \to (\curlyvee^j A_m))$ e pelo

Lema 2.3.18 temos $\Vdash_{A^+} ((\Upsilon \to (\Upsilon^j A_1)) \wedge \ldots \wedge (\Upsilon \to (\Upsilon^j A_m))) \to (\Upsilon \to (\Upsilon^j A_1 \wedge \ldots \wedge \Upsilon^j A_m))$, mas pelo A11 $\Vdash_{A^+} (\Upsilon \to (\Upsilon^j A_1 \wedge \ldots \wedge \Upsilon^j A_m)) \to (\Upsilon^j A_1 \wedge \ldots \wedge \Upsilon^j A_m)$, e pelo Caso 2.3.8.5, temos $\Vdash_{A^+} ((\Upsilon \to (\Upsilon^j A_1)) \wedge \ldots \wedge (\Upsilon \to (\Upsilon^j A_m))) \to (\Upsilon^j A_1 \wedge \ldots \wedge \Upsilon^j A_m)$, daí pelo Caso 2.3.8.5 com a hipótese, obtemos $\Vdash_{A^+} ((\Upsilon \to (\Upsilon^j A_1)) \wedge \ldots \wedge (\Upsilon \to (\Upsilon^j A_m))) \to A_0$.

Teorema 2.3.20. *Teorema da Dedução para A^+ : se $A_1, \ldots, A_m \Vdash_{A^+} A_0$, então existe um número i(efetivamente determinável) tal que $\Vdash_{A^+} \Upsilon^i A_1 \wedge \ldots \wedge \Upsilon^i A_m \to A_0$.*

Dem.:

Seja[15] $B_1, B_2 \ldots B_h$ *uma prova* de A_0 a partir de $A_1, A_2 \ldots A_m$, onde $A_0 = B_h$. Vamos provar, por indução sobre $1 \leq j \leq h$ que para cada j existe um i efetivamente construido tal que $\Vdash_{A^+} \Upsilon^i A \to B_j$.

Para $h = 1$ Ackermann distingue os seguintes subcasos:

A_0 é um axioma, ou

$A_0 = A_k$ para algum $1 \leq k \leq m$

No primeiro subcaso temos $\Vdash_{A^+} A_0$ (por hip). Mas, por (up), temos $\Vdash_{A^+} \Upsilon \to A_0$ e pelo A9, $\Vdash_{A^+} (\Upsilon \to A_0) \to ((A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \to A_0)$ e (mp), temos $\Vdash_{A^+} (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \to A_0$ e, então, $i = 0$.
No segundo subcaso pelo A1, $\Vdash_{A^+} (A_k \to A_0)$ e,pelo Lema 2.3.15 temos $\Vdash_{A^+} (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \to A_0$ e, de novo, $i = 0$, o que esgota o caso $m = 1$.

Para $h \neq 1$, supomos que a hipótese vale para $k < j$, ou seja para cada k existe um i efetivamente construtível tal que $\Vdash_{A^+} \Upsilon^i A_1 \wedge \ldots \wedge \Upsilon^i A_m \to B_k$, e vamos demonstrar para $n = j$. Então, ou B_j é um axioma ou $B_j = A_u$ para A_u com $1 \leq u \leq m$ ou B_j é obtido por (mp) em B_k e B_l com $k, l < j$ ou é obtida por (up) em B_l com $l < j$. Nos dois primeros casos, a prova é análoga à do caso $m = 1$. Se A_l é obtida por (up), temos por hipótese de indução $\Vdash_{A^+} \Upsilon^s A_1 \wedge \ldots \wedge \Upsilon^s A_m \to B_l$ e pelo Lema 2.3.14 temos $\Vdash_{A^+} (\Upsilon \to (\Upsilon^s A_1 \wedge \ldots \wedge \Upsilon^s A_m)) \to (\Upsilon \to B_l)$. Mas, pela Definição 2.3.5, temos que $\Upsilon^{s+1} A_1 \wedge \ldots \wedge \Upsilon^{s+1} A_m = (\Upsilon \to (\Upsilon^s A_1)) \wedge \ldots \wedge (\Upsilon \to (\Upsilon^s A_m))$ e pelo Lema 2.3.18 e o Caso 2.3.8.5 temos $\Vdash_{A^+} \Upsilon^{s+1} A_1 \wedge \ldots \wedge \Upsilon^{s+1} A_m \to (\Upsilon \to B_l)$.
Se B_j é obtida por (mp) temos por hipótese de indução $\Vdash_{A^+} \Upsilon^s A_1 \wedge \ldots \wedge \Upsilon^s A_m \to B_k$ e $\Vdash_{A^+} \Upsilon^r A_1 \wedge \ldots \wedge \Upsilon^r A_m \to (B_k \to B_j)$ com $(B_k \to B_j) = B_l$. Mas podemos tomar $t = max\{s + 1, r\}$ e, Daí,pela demonstração do caso anterior obtemos $\Vdash_{A^+} \Upsilon^t A_1 \wedge$

[15] Esta prova é adpatação direta da prova de Ackermann em [1], p 45.

$\ldots \wedge \curlyvee^t A_m \rightarrow (\curlyvee \rightarrow B_k)$ e pelo Lema 2.3.19 podemos concluir $\Vdash_{A^+} \curlyvee^t A_1 \wedge \ldots \wedge \curlyvee^t A_m \rightarrow (B_k \rightarrow B_j)$. Pelo Lema 2.3.16, temos $\Vdash_{A^+} \curlyvee^t A_1 \wedge \ldots \wedge \curlyvee^t A_m \rightarrow (\curlyvee \rightarrow B_j)$, mas, pelo A11 $\Vdash_{A^+} (\curlyvee \rightarrow B_j) \rightarrow B_j$ e pelo Caso 2.3.8.5, temos $\Vdash_{A^+} \curlyvee^t A_1 \wedge \ldots \wedge \curlyvee^t A_m \rightarrow B_j$, e isso conclui a demonstração ■.

2.3.5 O Sistema Σ^+

Introduzimos o sistema Σ^+ de dedução natural por ser uma versão muito útil na construção da hierarquia das lógicas de Ackermann que nos ajudará a esclarecer o sentido do conceito de derivabilidade e, aínda, o papel que ao considerar esse conceito cabe a um possível Teorema da Dedução com restrições. Σ^+ inclui as seguintes regras:

$$\frac{}{\curlyvee}(\curlyvee int) \qquad \frac{A \quad B}{A \wedge B}(\wedge int) \qquad \frac{A \wedge B}{A}(\wedge el_r) \qquad \frac{A \wedge B}{B}(\wedge el_l)$$

$$\frac{C \rightarrow A \quad C \rightarrow B}{C \rightarrow A \wedge B}(\rightarrow \wedge int)$$

$$\frac{A}{A \vee B}(\vee int_r) \qquad \frac{A}{B \vee A}(\vee int_l)$$

$$\frac{A \vee B \quad \begin{matrix} \mathrm{A}^{(i)} \\ \vdots \\ \mathrm{C} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \mathrm{B}^{(i)} \\ \vdots \\ \mathrm{C} \end{matrix}}{C} \; ((i) \vee el)$$

$$\frac{A \rightarrow B \quad A \rightarrow C}{A \vee B \rightarrow C}(\vee \rightarrow int)$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{A}^{(i)} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{B}}{A \to B}((i) \to int) \end{array}$$

$$\frac{A}{\curlyvee \to A}(up) \qquad \frac{\curlyvee \to A}{A}(down) \qquad \frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}(trans)$$

$$\frac{\curlyvee \to A \vee B}{(\curlyvee \to A) \quad \vee (\curlyvee \to B)}(\to \vee dist)$$

Temos as seguintes restrições:
(a) ($\vee$el) e ($\to$int) somente podem ser usadas se todas as hipóteses livres nas demonstrações das premissas (B e C, respectivamente) são exatamente ocorrências das fórmulas indicadas (A e B no primeiro caso; A no segundo) e não há aplicações de (up) nas demonstrações que dependem das hipóteses.
(b) A regra ($\to$int) não admite que B provenha de uma uma hipótese diferente de A (para evitar a validade de (vq)).
Agora podemos colocar nosso problema entre níveis de implicação pontualmente. Às voltas com o paradoxo de Curry, excluimos o Teorema da Dedução de nosso sistema de dedução natural Σ^+ e, desde que (MP) é a regra que envolve a implicação, a proposta de Ackermann deve atingi-la. De fato, (MP) não é regra primitiva em Σ^+, o que quer dizer que podemos usá-la depois de ter aplicado as outras regras ou, equivalentemente, restringimos a aplicação de (MP) a *teoremas*: se já temos mostrado que $\vdash A$ e $\vdash A \to B$, então podemos concluir $\vdash B$. Logo, precisamos de uma derivação de A e $A \to B$ para provar B a partir delas. Nossa regra de (MP) para A^+, pelo contrário, deriva B de A e $A \to B$ sem restrições, o que quer dizer que a implicação de A^+ é mais abrangente. Esse fato se reflete em Σ^+ da seguinte maneira: podemos detectar duas relações de derivabilidade neste sistema, $\Vdash_{\Sigma^+}$ e $\vdash_{\Sigma^+}$, denotando com a primeira a derivação sem restrições e com a segunda a derivação estrita. Pode-se demonstrar (usando um argumento

indutivo[16]) que, de fato, $\Vdash_{A^+}$ e $\Vdash_{\Sigma^+}$ coincidem (podemos derivar em Σ^+ todos os axiomas de A^+ e, com base neles, todos os teoremas possíveis para $\Vdash_{A^+}$) e, portanto, que (MP) pode ser introduzida como regra adicional ou derivada em Σ^+, desde que a relação irrestrita de consequência de Σ^+ coincide com a de A^+ e (MP) é regra em A^+. Por outro lado, $\vdash_{\Sigma^+}$ é um caso especial de $\Vdash_{\Sigma^+}$, onde todas as hipóteses são produto de uma sequência de prova finita (no caso, de uma árvore finita) e onde (MP) pode ser usada unicamente quando tivermos mostrado tal sequência. Como $\Vdash_{A^+}$ e $\Vdash_{\Sigma^+}$ coincidem e $\Vdash_{A^+}$ determina uma relação de equivalência $\leftrightarrow$ que abrange os outros conectivos, podemos estabelecer o seguinte resultado a respeito de $\vdash_{\Sigma^+}$.

Definição 2.3.21. $A \equiv B$ sse $A \vdash_{\Sigma^+} B$ e $B \vdash_{\Sigma^+} A$.

Lema 2.3.22.

1. $\equiv$ é uma relação de equivalência em $Form_{\mathcal{L}^+}$
2. Se $A_1 \equiv A_2$ e $B_1 \equiv B_2$ então $A_1 \oplus B_1 \equiv A_2 \oplus B_2$ para $\oplus \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

2.3.6 Uma hierarquia de sistemas dedutivos

O sistema Σ^+, com duas relações de derivabilidade $\Vdash_{\Sigma^+}$ e $\vdash_{\Sigma^+}$, consegue representar com exatidão a intuição de uma hierarquia de sistemas dedutivos: suponhamos que temos um cálculo onde não ocorre símbolo de implicação algum, isto é, o cálculo k_0, contendo $(\curlyvee int), (\wedge int), (\wedge el_r), (\wedge el_l)$, $(\vee int_r), (\vee int_l)$, mais a seguinte regra de conclusão múltipla:

$$\frac{A \vee B}{A \quad B}(\vee mel)$$

Doravante a idéia é a seguinte, todos os teoremas que conseguirmos demonstrar a respeito de k_0 podem ser traduzidos em termos de $\rightarrow$ no cálculo k_1. Por exemplo, se $C \vdash_{k_0} B$ e B$\vdash_{k_0} A \vee B$, então C $\vdash_{k_0} A \vee B$. Mas B$\vdash_{k_0} A \vee B$ por $(\vee int_r)$ e $\vdash_{k_0}$ é transitiva (pois é um operador de consequência). Daí, obtemos

$$\frac{C \vdash_{k_0} B}{C \vdash_{k_0} A \vee B}$$

e podemos traduzir este fato a respeito de teoremas de k_0. Usando nossa convenção escrevemos

$$\frac{\vdash_{k_1} C \rightarrow B}{\vdash_{k_1} C \rightarrow A \vee B},$$

[16]Vide [39],pp 11-12 .

uma dedução de nível superior. Explorando este método de tradução[17], construimos o sistema k_1, com as seguintes regras:

$$\frac{}{A \to B}(mdt_0) \quad Se \;\; A \vdash_{k_0} B$$

$$\frac{C \to A \quad C \to B}{C \to A \wedge B}(\to \wedge int) \qquad \frac{C \to A \wedge B}{C \to A}(\to \wedge el_r)$$

$$\frac{C \to A \wedge B}{C \to B}(\to \wedge el_l) \qquad \frac{C \to A}{C \to A \vee B}(\to \vee int_r)$$

$$\frac{C \to B}{C \to A \vee B}(\to \vee int_l) \qquad \frac{\curlyvee \to A \vee B}{\curlyvee \to A \quad \curlyvee \to B}(\to \vee el)$$

$$\frac{\curlyvee \to A}{A}(down) \qquad \frac{A \to C \quad B \to C}{A \vee B \to C}(\vee \to int)$$

$$\frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}(trans)$$

Como consequência destas regras, obtemos o seguinte conjunto de teoremas[18]

Teorema 2.3.23.

Caso 2.3.23.1. $\vdash_{k_1} A \to A$

Caso 2.3.23.2. $\curlyvee \to A \vdash_{k_1} B \to A \wedge B$

[17]Esta "tradução" simplesmente transforma os fatos relativos ao operador de conseqüência em um nível em fatos relativos à implicação no seguinte nível.

[18]Demonstramos 2.3.23.2; a prova dos outros casos é semelhante.

Caso 2.3.23.3. $(A \to B) \wedge (A \to C) \vdash_{k_1} (A \to B \wedge C)$

Caso 2.3.23.4. $(A \to C) \wedge (B \to C) \vdash_{k_1} (A \vee B \to C)$

Caso 2.3.23.5. $\Upsilon \to A \vdash_{k_1} B \to A$

Caso 2.3.23.6. $\Upsilon \to A \vee B \vdash_{k_1} (\Upsilon \to A) \vee (\Upsilon \to B)$

Caso 2.3.23.7. $\Upsilon \to A \vdash_{k_1} A$

Para 2.3.23.2, precisamos de 2.3.23.5, que demonstramos a seguir
Dem.:

1.	$\Upsilon \to A$	[Hip]
2.	$B \vdash_{k_0} \Upsilon$	[Υint]
3.	$\vdash_{k_1} B \to \Upsilon$	[(mtd_0)em 1]
4.	$B \to A$	[(trans) 1 e 3]

Demonstramos agora 2.3.23.2
Dem.:

1.	$\Upsilon \to A$	[Hip]
2.	$B \to B$	[2.3.23.1]
3.	$B \to A$	[2.3.23.5 em 1]
4.	$B \to A \wedge B$	[($\to \wedge int$) 2 e 3]

Observamos que k_2 consegue demonstrar as traduções implicativas de todos os itens do teorema anterior e que são equivalentes a A1, A2, A6, A7, A9 e A10. Daí, com a nossa idéia de níveis implicativos conseguimos nos aproximar do sistema A^+, usando uma relação de consequência mais fraca que $\Vdash_{A^+}$ (que faz uso de derivações a partir de teoremas, denotada por $\vdash_{\Sigma^+}$) e podemos introduzir o seguinte Teorema da Dedução.

$$Se\ A \vdash_{k_m} B \;\; \vdash_{k_m+1} A \to B (mtd_m).$$

Usando esta idéia para uma sequência arbitrária de fragmentos dedutivos, obtemos o sistema k_∞[19] caracterizado pelas seguintes propriedades:

1. Todas as instâncias dos esquemas axiomáticos de A^+ são teoremas de k_∞

2. Se $\vdash k_\infty A$ e $\vdash k_\infty A \to B$ então $\vdash k_\infty B$

3. Se $\vdash k_\infty A$ então $\vdash k_\infty \Upsilon \to A$

[19] Uma dedução em k_∞ é uma derivação em algum nível k_n para algum n.

Estamos agora em condições de responder ao paradoxo de Curry: não podemos, no caso das lógicas de Ackermann, aplicar o teorema da dedução, a menos de termos uma derivação de um nível inferior, mas esta derivação controla alguns tipos de argumentos, em particular os argumentos que não usam teoremas como hipóteses. Como no caso do paradoxo de Curry, temos uma hipótese que não conseguimos demonstrar como teorema ($c \in c \to \curlywedge$ na versão de Ackermann), não podemos derivar o que resta a partir dela. Esta restrição ao Teorema da Dedução garante que, se nossas regras são aceitáveis, nossas conclusões obtidas delas também o são. Outro ponto central na resposta de Ackermann é que não podemos obter auto-referência implicativa no interior da hierarquia, um sistema é incompleto dedutivamente (a menos de k_∞) e o poder da derivabilidade nele é exprimível somente no sistema imediatamente superior. Argumentos que *se referem à* implicação (no paradoxo de Curry o conjunto c) não podem ser aceitos como demonstrando alguma coisa nesse nível implicativo. Observamos, ainda, que o sistema limite k_∞ possui um Teorema da Dedução com infinitas instâncias e que, portanto, esclarece um ponto central deste capítulo, no que diz respeito à ausência da negação e ao infinito, ou seja os sistemas de Ackermann envolvem efetivamente um Teorema da Dedução infinito. A negação parece introduzir um limite, uma cota para sistemas fortemente vinculados com a noção de infinito. Uma questão relevante que surge das considerações anteriores é a relação entre o Teorema da Dedução de Ackermann (com infinitas instâncias) e a regra ω[20].

2.3.7 O conceito de necessidade

No decorrer das seções anteriores não examinamos o conceito de necessidade (denotado pelo operador $\curlyvee$). A rigor, Ackermann não trata detalhadamente das modalidades até [3], mas esse artigo contém o sistema axiomático Π, diferente e essencialmente mais forte do que A^{+}[21]. De fato, Anderson e Belnap[4] conseguiram demonstrar que o conceito de necessidade de Π' (o sistema Π mais os axiomas e regras moDaís) coincide com o do sistema S4 de Lewis, desde que em Π' conseguimos derivar o axioma característico de S4, isto é $\vdash_{\Pi'} NA \to NNA$, onde NA (por *notwending*, necessário em alemão) denota 'necessariamente A'. Além do mais, introduzem uma definição implicativa da necessidade da seguinte maneira: $NA = (A \to A) \to A$, o que, de fato, resulta interessante pois não faz uso da negação, diferentemente da

[20] Para uma explicação mais completa deste tópico, vide [21]

[21] Por exemplo, em A^{+} não vale a contraposição (vide [1],p 44) que é um axioma em Π.

proposta original de Ackermann em [3][22].
Contudo, nós não temos todas essas ferramentas para esclarecer o conceito de necessidade para A^+. Em [1] Ackermann só diz que o operador Γ (que temos denotado por $\curlyvee$) é 'uma fórmula derivável sem variáveis livres[23]' mas, mesmo assim, podemos argumentar no seguinte sentido: se $\curlyvee$ é derivável, então ao afirmarmos que $\curlyvee \to A$, estamos afirmando que A não pode deixar de ser derivável; caso contrário, para o condicional ser válido, teríamos uma fórmula não derivável (a negação de $\curlyvee$) implicando uma fórmula falsa, mas uma fórmula não derivável seria absurda e derivaria qualquer coisa, tornando o sistema trivial. Desse ponto de vista, se $\curlyvee \to A$, então A é necessário. A nossa proposta consiste em ler esta derivabilidade como necessidade, assumindo que uma fórmula que sempre pode consistentemente ser derivada tem de ser verdadeira. Logo, é possível pensar uma semântica para os axiomas modais de A^+ construida usando um conceito padrão de necessidade (ou seja, é necessário aquilo que é válido em todos os mundos possíveis) e propondo um tipo específico de relação de visibilidade entre esses mundos.

2.4 O Problema da Completude para A^+

Até este ponto não temos aprofundado na questão de uma semântica adequada para A^+, aspecto central ao tentarmos estabelecer o Teorema de Completude para tal sistema. Em [39] existem alguns traços de uma semântica algébrica para A^+, mas o autor reconhece que não está tentando demonstrar a completude de A^+ com relação a essa semântica (vide [39], p 20 nota 9), mas obter alguns resultados prévios que possam ser úteis em uma futura prova de completude.
Em [25] encontramos uma abordagem muito diferente ao mesmo problema, que envolve dados significativos para tal prova. Nesse artigo Harrop concentra-se no sistema A (cujo fragmento positivo é A^+) e mostra que esse sistema não possui um Teorema de Equivalência irrestrito, a menos da introdução de algumas regras derivadas e de um axioma auxiliar. O sistema resultante, denotado por A", é uma extensão própria do sistema A', considerado por Ackermann em [2], possui um Teorema da Equivalência irrestrito e, além do mais, um Teorema da Dedução com a mesma estrutura do Teorema 2.3.20. Outro resultado relevante é que $\neg$, $\vee$, $\wedge$ e $\to$ são independentes em A e,

[22] Onde tínhamos, na página 126, as seguintes definições: a impossibilidade $UA = A \to \curlywedge$ (por *unmöglich*), a necessidade $NA = \neg A \to \curlywedge$ e a possibilidade $MA = \neg(A \to \curlywedge)$, (por *möglich*).
[23] Detalhe importante, pois ele também introduz um cáculo de predicados nesse artigo.

consequentemente, uma prova de completude de A^+ não pode explorar nenhum tipo de equivalência clássica entre $\neg$, $\vee$ e $\rightarrow$ (diferentemente de L^+), mas pode usar somente das propriedades 'positivas' de $\vee$, $\wedge$ e $\rightarrow$.

Por último, Harrop mostra que, por causa das características da disjunção em A, esse sistema não pode ser interpretado através de um modelo com um número finito de valores de verdade, ou seja, qualquer modelo de A é infinito-valente. A prova dessa asserção, segundo Harrop, decorre de uma adaptação da prova de Gödel para o cálculo proposicional intuicionista (proposta em [24]) e faz parte de outro trabalho do primeiro autor.

Diante de tais argumentos, vamos fixar três elementos que consideramos fundamentais para uma futura prova de completude de A^+.

(i) Desde que $\neg$ e $\vee$ são independentes em A, qualquer resultado que envolva unicamente a disjunção pode ser aplicado a A^+. Daí, um modelo completo de A^+ deve ter um número infinito de valores de verdade.

(ii) Seguindo nossas considerações da seção anterior, pode-se pensar em uma intepretação modal de A^+, lendo $\curlyvee \rightarrow A$ como $\Box$A e construindo modelos de Kripke que, segundo todas todas as evidências apontadas em seções anteriores, devem ser intuicionistas.

(iii) Tais modelos existem desde que o próprio Ackermann demonstrou que A (e portanto A^+) não é uma teoria contraditória. A dificuldade principal é determinar o tipo de relação de acesibilidade ou visibilidade entre esses modelos. Por enquanto, podemos afirmar que essa relação é reflexiva desde que em A^+ temos A11 (equivalente na nossa leitura ao axioma $\Box A \rightarrow A$ que determina uma acessibilidade com tais características) e não é transitiva pois em A^+ não conseguimos derivar $(\curlyvee \rightarrow A) \rightarrow (\curlyvee \rightarrow (\curlyvee \rightarrow A))$ como teorema (vide seção anterior).

Contudo, reconhecemos que tal descrição é ainda insuficiente e vaga, mas constitui a base de uma proposta de pesquisa que o presente trabalho não pretende desenvolver por causa de restrições de tempo e espaço. Entretanto, mesmo sem dar resposta definitiva a tais problemas, podemos atender a duas questões que estão no centro de nossa abordagem à lógica positiva: o infinito e o critério de construtividade.

(a) A^+, segundo todas as evidências, é uma lógica infinito-valente, provavelmente modal e esse fato esclarece uma questão que abre este capítulo: existe uma estrita relação entre a ausência de negação e o infinito, quer seja do ponto de vista de k_∞ com um Teorema da Dedução infinito, quer seja do ponto de vista de A^+ com um modelo de infinitos valores de verdade.[24].

[24]Outro tipo de infinito seria a equivalência $\neg\alpha \Leftrightarrow$ para todo β, $\alpha \rightarrow \beta$, usada amplamente na demonstração de completude para L^+.

(b) A^+ é uma lógica positiva intuicionista, entretanto, não é construtiva no mesmo sentido de L^+, já que o método construtivo de completude de Henkin usado no caso de L^+ é recursivamente decidível e por essa razão denominado construtivo. A^+ é construtiva no sentido rigoroso do termo, ou seja, no sentido atribuido à lógica intuicionista de Heyting[25], pois o princípio do terceiro excluido não vale e existe um compromisso com a construtividade dos condicionais (como já foi discutido anteriormente).

2.5 Considerações

Procurando uma extensão para o método construtivo de Henkin, por um lado, e uma resposta ao paradoxo de Curry, por outro, examinamos alguns sistemas positivos não-clássicos, em particular finito-valentes e intuicionistas. No que diz respeito ao primeiro problema, obtivemos evidências para uma resposta negativa, quer nas lógicas finito-valentes de Łukasiewicz, quer nas lógicas paraconsistentes. Mesmo assim, isto não exclui outras abordagens às lógicas finito-valentes (por exemplo a algébrica[26]), mas esse ponto foge do escopo da nossa perspectiva neste trabalho. A prova construtiva de completude depende, no caso da lógica paraconsistente, da introdução de um novo conectivo (que na literatura especializada está vinculado em geral com a negação ou com a noção de consistência, em estreita relação com a negação). No que diz respeito ao segundo problema, acreditamos ter mostrado (com a ajuda do trabalho de Ackermann) estarmos frente a uma escolha muito radical: o abandono do Teorema da Dedução e, portanto, do método de completude construtiva de Henkin, que daquele depende. O argumento de Curry coloca uma espécie de nó górdio para sistemas com uma implicação que incorpore certos aspectos do comportamento clássico; a melhor saída parece ser o enfraquecimento do conceito de derivabilidade e, portanto, controlar Modus Ponens como regra de inferência (é a saída que, usando dedução natural, examinamos com atenção em 2.3). Outra posibilidade é controlar a regra de substituição no interior de nosso sistema, ou seja, oferecer uma alternativa na direção da teoria dos tipos que não admita certas relações entre termos (por exemplo, $x \in x$), mas isto nos levaria a

[25] Onde, por exemplo, não valem nem a Lei de Peirce nem H3, vide [6].

[26] Vide [27], onde são estudados os fragmentos positivos-conjuntivos das lógicas finito-valentes de Łukasiewicz complementados com alguns esquemas axiomáticos adicionais. A existência de uma contraparte algébrica desses cálculos, conhecida como a classe de BCK-álgebras com ínfimo, mostra que tais fragmentos são completos, no sentido em que uma fórmula é teorema semântico se somente se recebe o valor designado em qualquer atribuição possível. Vide [14] para uma introdução detalhada ao tema das BCK-álgebras.

compromissos conceituais com a matemática e com a teoria de conjuntos clássicas.
Parece, portanto, frente à questão da adoção da lógica positiva mais adequada concluir o seguinte:
Primeiro, o que se entende por "lógica positiva" não é unicamente determinado e há diversas gradações e nuences nas posições que se pode tomar a respeito (clássica, intuicionista, multivalente, relevante, etc.). Segundo, tais escolhas não podem ser feitas de forma inocente sem refletir na estrutura de boa parte do construto matemático, através da noção de conjunto.

Capítulo 3

Tablôs puramente positivos e a questão da paratrivialidade

Neste capítulo apresentamos uma proposta para um sistema de tablôs que funciona usando a idéia de trivialidade implicativa e que resulta particularmente apto para se obter um processo de decidibilidade e dedutibilidade alternativo para L^+. Ao inves de usar o conceito de contradição inerente à noção de "ramo fechado" e "tablô fechado" (vide [10]), os (chamados por nós) *tablôs puramente positivos*, utilizam o conceito de *ramo trivial* e *tablô trivial*: o critério de parada não é agora uma contradição, mas diretamente a obtenção de uma trivialidade potencial. Dessa forma, os tablôs puramente positivos se contentam com uma meta-linguagem muito mais frugal (sem negação), com interessantes consequências para os fundamentos da teoria da prova. A idéia geral de mostrar como a negação pode ser um caso particular da implicação e, dai, como a implicação consegue se aproximar mais precisamente ao conceito de trivialidade tem sido amplamente explorado do ponto de vista da Teoria da Prova em [42]. Este capítulo apresenta, contudo, uma abordagem completamente diferente a uma "teoria da prova positiva", que leva ainda mais a novas propostas quanto às possibilidades de se escapar à objeção de Curry.

Introduzimos as regras e o critério de fecho, salientando de novo que neste sistema não temos negação na linguagem, e, o que é mais interessante, não temos sinais na metalinguagem, isto é, não se trata de tablôs assinalados. Obtemos, portanto, um sistema estritamente positivo implicativo completo segundo as condições gerais estabelecidas por Walter Carnielli, Marcelo Coniglio e João Marcos em [10].

3.1 Trivialidade: o conceito fundamental

O conceito central da proposta é explorar a idéia de trivialidade, no sentido de obter, a partir de uma fórmula, uma nova fórmula qualquer, esboçando uma situação semelhante à descrita por Curry, onde a trivialidade não depende de um símbolo diferente da implicação, mas de uma situação puramente implicativa. A seguir, apresentamos a linguagem e as regras desse sistema.

3.1.1 Linguagem, Definições

Iniciamos esta seção considerando algumas questões preliminares referentes à aplicabilidade ou adequação dos métodos de [10] para se demonstrar completude no caso de L^+. Para tanto, é preciso esclarecer um ponto fundamental: qualquer proposta de tablôs que pretenda ser completa segundo os referidos critérios deve possuir uma semântica diádica. Em [11] encontramos a definição de tais semânticas, no contexto da semânticas de Gentzen. Para tanto, reproduzimos e comentamos ambas as Definições 3.1 e 3.2 do artigo referido.

Definição 3.1.1. Uma semântica de Gentzen para uma lógica L é um conjunto adequado (ou seja, correto e completo) de valorações bi-valentes $b : \mathbb{N} \longrightarrow \{V,\ F\}$ dado por cláusulas condicionais $(\Phi \to \Psi)$ onde Φ e Ψ são (meta)fórmulas da forma $\top$ e $\bot$ ou

$$b(\varphi_1^1) = w_1^1, \ldots, b(\varphi_1^{n1}) = w_1^{n1} \mid \ldots \mid b(\varphi_m^1) = w_m^1, \ldots, b(\varphi_m^{n_m}) = w_m^{n_m} \qquad (G)$$

onde $w_i^j \in \{V,\ F\}$, cada φ_i^j é uma fórmula de L, as vírgulas "," representam conjunções e os traços verticais "|" representam disjunções. Por melhor legibilidade em relação aos textos citados usamos aqui V e F como valores de verdade ao invés de 0 e 1.

Definição 3.1.2. Dizemos que uma semântica de Gentzen B para uma lógica L constitui uma *semântica diádica* para L se a relação de conseqüência $\vDash_B$ (dada pelas valorações em B) é recursiva.

Observamos que uma semântica diádica deve incluir $\top$ e $\bot$ como constantes lógicas (representando, respectivamente, a verdade e a falsidade). Contudo, na semântica de L^+ como introduzida no Capítulo 1 não temos nenhum desses símbolos definidos, então nossas valorações (denotadas por ν) não contêm esses símbolos, logo $\top,\ \bot\ \notin\ VAL(L^+)$. Por outro lado, uma semântica é diádica se a operação de consequência que ela define é recursiva (o que acontece, de fato, com L^+, pois a definição de f é recursiva). Então, vamos tentar uma demonstração de completude para *um fragmento* de uma semântica diádica que é expressivo o suficiente para se obter o resultado desejado. Introduzimos as definições necessárias para construir o sistema de tablôs puramente positivos F^+.

Definição 3.1.3. Seja P=$\{p_n \mid n \in \omega\}$ um conjunto infinito enumerável de variáveis proposicionais, Σ uma assinatura e $\Xi = \{C_n \mid n \in \omega\}$ um conjunto enumerável de comjuntos de símbolos[1] disjuntos de Σ_n para todo $n \in \omega$, e disjuntos de P. O conjunto de *esquema de fórmulas* é a álgebra livremente gerada por Ξ sobre Σ_n.

Definição 3.1.4. Dados Σ, Ξ como acima, uma *substituição por esquemas* é uma função $\rho : \Xi \longrightarrow For$. Como usual, a substituição por esquemas ρ pode ser estendida a um Σ-morfismo $\varrho : For(\Sigma,\ \Xi) \longrightarrow For$, doravante escrevemos $\phi\rho$ ao invés de $\varrho(\phi)$. Se $\Phi \subseteq For(\Sigma,\ \Xi)$, então $\Phi\rho$ denotará $\{\phi\rho \mid \phi \in \Phi\}$.

Definição 3.1.5. Seja B um ramo de uma árvore F de fórmulas. Dizemos que B é um *ramo fechado* se existir uma fórmula α tal que $(\alpha \to c) \to c, \alpha \to c \in B$ onde c é uma letra proposicional que não ocorre em B. Caso contrário, dizemos que B é um *ramo aberto.*

Definição 3.1.6. Uma *regra de tablô* é um par $R = \langle \mathsf{Prem}(R), \mathsf{Con}(R)\rangle$ tal que $\mathsf{Prem}(R)$ é um conjunto finito de $For(\Sigma,\ \Xi)$ e $\mathsf{Con}(R)$ é um subconjunto finito não vazío de subconjuntos finitos não vazíos de $For(\Sigma,\ \Xi)$. Um *sistema de tablôs* é um conjunto finito não vazío T de regras de tablô.

Definição 3.1.7. Seja F uma árvore de fórmulas. Dizemos que F é *fechado* se todo ramo B de F é fechado. Caso contrário, dizemos que F é *aberto.*

Definição 3.1.8. Seja T um sistema de tablôs, e F e F' árvores de fórmulas. Dizemos que F' é uma T-*extensão* de F se F' é obtida de F por uma extensão de um ramo aberto B de F pela aplicação de uma regra de tablô de T usando alguma substituição ρ. Isto é, F é obtido substituindo um ramo aberto B de T pelo ramo

$$B;\ (\phi_1\rho); \ldots; (\phi_r\rho)$$

por alguma substituição ρ e alguma regra $\langle \Upsilon, \{\Upsilon_1, \ldots, \Upsilon_k\}\rangle$ de T tal que $\Upsilon\rho \subseteq B$ e $\Upsilon_i = \{\phi_1, ; \ldots, ; \phi_r\}$ para algum i com $1 \le i \le k$.

[1] Que, intuitivamente, denotam conectivos n-ários.

Definição 3.1.9. Seja T um sistema de tablôs. Um T-tablô é uma sequência $F = \{F_n\}_{n\in\omega}$ de árvores cujos nós são fórmulas, tal que:

1. F_0 tem só um ramo (ou seja, é uma sequência não vazia de fórmulas);
2. F_{n+1} é uma T-extensão de F_n, para cada $n \geq 0$

Se Υ é o conjunto de fórmulas de F_0, então dizemos que F é um T-*tablô para* Υ

Definição 3.1.10. Seja $F = \{F_n\}_{n\in\omega}$ um T-tablô. Dizemos que F está *concluido* em um dos seguintes casos:

1. F é uma sequência finita tal que cada ramo da última árvore de F fechou; ou
2. para cada $n \geq 0$, para cada ramo aberto B de F_n, para cada regra $\langle \Upsilon, \{\Upsilon_1, \ldots, \Upsilon_k\}\rangle$ de T e cada substituição por esquemas $\rho : \Upsilon\rho \subseteq B$, então existe um ramo B' em F_m (para algum $m > n$) que contém B e $\Upsilon_i\rho$ para algum i com $1 \leq i \leq k$.

3.1.2 Regras

Com as definições de seção anterior e levando em conta que L^+ possui uma valoração diádica, podemos definir um sistema de tablôs para L^+ através das seguintes regras:

$$\frac{(\beta \to \delta) \to c}{(\beta \to c) \to c,\ (\delta \to c)}(r1) \qquad \frac{((\beta \to \delta) \to c) \to c}{\beta \to c \mid (\delta \to c) \to c}(r2)$$

$$\frac{}{(\beta \to c) \to c \mid \beta \to c}(bi) \qquad \frac{\beta,\ \beta \to \delta}{\delta}(mp)$$

3.1.3 Exemplos

A seguir demonstramos o Ax3 e três fórmulas de L^+ através do método dos Tablôs acima definidos

$$Ax3\ ((\beta \to \delta) \to \beta) \to \beta$$

$$[((\beta \to \delta) \to \beta) \to \beta] \to c$$

$(r1)$

$$(((\beta \to \delta) \to \beta) \to c) \to c,\ \beta \to c$$

$(r2)$ $(r2)$

$$(\beta \to \delta) \to c,\ \beta \to c \qquad\qquad (\beta \to c) \to c,\ \beta \to c$$

$(r1)$ (mp)

$$(\beta \to c) \to c,\ \delta \to c,\ \beta \to c \qquad\qquad c$$

$*$

(mp)

$$c$$

$*$

Verificamos que Ax3 é uma fórmula válida

(i) Lema1.1.8 $\beta \to \beta$

$$(\beta \to \beta) \to c$$

$(r1)$

$$(\beta \to c) \to c,\ \beta \to c$$

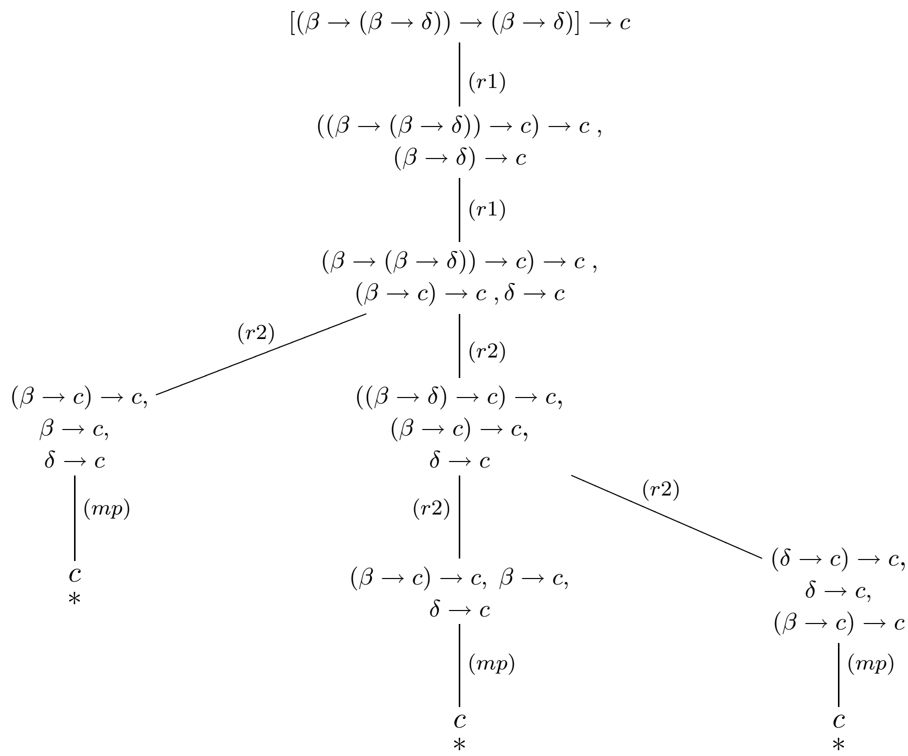
(mp)

$$c$$

$*$

Então, $\beta \to \beta$ é uma fórmula válida

$(ii)(\beta \to ((\beta \to \delta)) \to (\beta \to \delta)$ Lema 1.2.1



Conseqüentemente, $(\beta \to ((\beta \to \delta)) \to (\beta \to \delta)$ é uma fórmula válida.

3.2 Completude do sistema de Tablôs positivos

Nesta seção demonstramos que nosso sistema de Tablôs é correto e completo. Apoiamos nossa idéia no fato de termos (bi) como regra, o que segundo [10], é uma 'condição crítica' para se obter completude. Este fato pode ser expresso através da seguinte proposição, necessária para se demonstrar o Teorema de Completude para qualquer sistema de Tablôs construido a partir de uma semântica diádica.

Proposição 3.2.1. *Seja* Γ *um conjunto não vazio de fórmulas e* T *um sistema de Tablôs. Então existe um tablô concluido aberto para* Γ*, ou existe um* T*-tablô fechado para* Γ.

Dem.: Adaptação direta da proposição 181, p 94 de [10]■.
Uma vez verificada a proposição, continuamos com as demostrações e definições necessárias para obtermos o Teorema referido. Com efeito:

Definição 3.2.2. Seja $\{p_1 \dots p_n\}$ o conjunto das variáveis proposicionais de α e c uma variável proposicional tal que $c \notin \{p_1 \dots p_n\}$. Definimos $SFor$ da seguinte maneira:
$SFor(p_1 \dots p_n) =$

$$\left\{\alpha \to c \mid \alpha \in ForL^+ \text{ e } VAR(\alpha) \subseteq \{p_1 \dots p_n\}\right\} \cup$$
$$\left\{(\alpha \to c) \to c \mid \alpha \in ForL^+ \text{ e } VAR(\alpha) \subseteq \{p_1 \dots p_n\}\right\}.$$

Definição 3.2.3. Seja $v \in Val$, $\Gamma = \{p_1 \dots p_n\}$ om conjunto das variáveis proposicionais de α e c uma variável proposicional tal que $c \notin VAR(\alpha)$, definimos $\overline{v}(p_i)$ tal que

$$\overline{v}(p_i) = \begin{cases} v(p_i) & \text{se } p_i \neq c \\ 0 & \text{se } p_i = c \end{cases}$$

Logo: se $p_i \in VAR(\alpha)$, então $\overline{v}(p_i) = v(p_i)$.

Definição 3.2.4. Seja $v \in VAL(L^+)$ e c uma variável proposicional tal que $c \notin VAR(\alpha)$. A extensão de v a $SFor$ é a função $\overline{v} : SFor \longrightarrow 2$ definida da seguinte maneira para cada $\alpha \in ForL^+$:

$$\overline{v}((\alpha \to c) \to c) = \begin{cases} 1 & \text{se } v(\alpha) = 1 \\ v(c) & \text{se } v(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\overline{v}(\alpha \to c) = \begin{cases} 1 & \text{se } v(\alpha) = 0 \\ v(c) & \text{se } v(\alpha) = 1 \end{cases}$$

Então $\overline{v}(\alpha) = v(\alpha)$. Definimos, ainda, $\overline{\Gamma} = \{(\alpha \to c) \to c \mid \alpha \in \Gamma\}$

A seguir, verificamos que (r1), (r2), (bi) e (mp) estão bem definidas com relação às valorações (ou seja, que o valor atribuido a uma fórmula ou conjunto de fórmulas depende somente das variáveis examinadas ao aplicar tais regras). Em outras palavras, vamos verificar a seguinte asserção:

> Seja $\Gamma = \{p_1 \ldots p_n\}$ um conjunto de variáveis proposicionais. Seja v uma valoração dessas variáveis. Então, o valor de Γ segundo v depende de $v(p_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Para começar, tomemos (r1):
Suponhamos $v((p \to q) \to c) = 1$, isto é verdade se $v(p \to q) = 0$ ou $v(c) = 1$ (o que não pode acontecer, por construção) mas isto é verdade se $v(p) = 1$, $v(q) = 0$.
Tomemos agora (r2):
Suponhamos $v(((p \to q) \to c) \to c) = 1$, mas isto é verdade se $v(c) = 1$ (de novo excluido por construção) ou se $v(c) = 0$ e $v(p \to q) = 1$, e, dai, ou $v(p) = 0$ e $v(p \to c) = 1$ ou $v(q) = 1$ e $v((q \to c) \to c) = 1$. Portanto, ou $v(p \to c) = 1$ ou $v((q \to c) \to c) = 1$.
Para (bi), basta observar a restrição: esta regra pode ser utilizada com variáveis que estão no ramo (e c não está nesse ramo, por construção).
Para (mp), basta levar em conta o Teorema 1.2.8: o valor de uma aplicação de (mp) depende do valor das variáveis ou fórmulas envolvidas.

Lema 3.2.5. *Seja Γ um conjunto finito de variáveis proposicionais tal que $c \notin Var(\Gamma)$. Então $v(\alpha) = \overline{v}((\alpha \to c) \to c)$ para toda $\alpha \in \Gamma$ (sendo $\overline{v}$ a extensão de v tal que $\overline{v}(c) = 0$).*

Dem.:
Suponha $v(\alpha) = 1$; logo $\overline{v}(\alpha \to c) = 0$, portanto $\overline{v}((\alpha \to c) \to c) = 1 = v(\alpha)$.
Se $v(\alpha) = 0$, então $\overline{v}(\alpha \to c) = 1$, portanto $\overline{v}((\alpha \to c) \to c) = 0 = v(\alpha)$ ■.

Proposição 3.2.6. *Dada uma regra R com*

$$R = \cfrac{\alpha_1 \ldots \alpha_n}{\begin{matrix} \beta_1^1 & \ldots & \beta_{1^n}^n \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \beta_{k_1}^1 & \ldots & \beta_{k^n}^n \end{matrix}}$$

Se $\overline{v}(\alpha_1) = \ldots = \overline{v}(\alpha_n) = 1$, então existe j com $1 \leq j \leq n$ tal que $\overline{v}({\beta_1}^j) = \ldots = \overline{v}(\beta {j_k}^j) = 1$.
Dem.:
Suponha, por absurdo, que existe uma regra R e $v \in Val(L^+)$ tal que $\overline{v}(\alpha_1) = \ldots = \overline{v}(\alpha_n) = 1$, mas para todo j como definido acima temos $\overline{v}({\beta_1}^j) = \ldots = \overline{v}(\beta {k_j}^j) = 0$.

Caso 3.2.6.1. $n = 0$.

Então, a única regra à considerar é (bi). Por hipótese $\overline{v}(\alpha \to c) = 0$ e $\overline{v}((\alpha \to c) \to c) = 0$. Dai, $\overline{v}(\alpha) = 1$ e $\overline{v}(c) = 0$ e, portanto $\overline{v}((\alpha \to c) \to c) = 1$, absurdo.

Caso 3.2.6.2. $n \neq 0$.

Devemos considerar (r1), (r2) e (mp) e demonstrar a Proposição por indução na complexidade de α.
Se R=(r1), então temos por hipótese $\overline{v}((\beta \to \delta) \to c) = 1$ e $\overline{v}((\beta \to c) \to c) = 0$ ou $\overline{v}(\delta \to c) = 0$.
(i) Se $\overline{v}((\beta \to c) \to c) = 0$, desde que, pela Definição 3.2.3 $\overline{v}(c) = 0$, temos $\overline{v}(\beta) = 0$. Mas, daí $\overline{v}((\beta \to \delta) \to c) = 0$, absurdo.
(ii) Se $\overline{v}(\delta \to c) = 0$, por um raciocínio análogo ao de (i), obtemos $\overline{v}(\delta) = 1$. Daí, $\overline{v}((\beta \to \delta) \to c) = 0$, absurdo.
Se R=(r2), então temos por hipótese $\overline{v}(((\beta \to \delta) \to c) \to c) = 1$, mas $\overline{v}(\beta \to c) = 0$ e $\overline{v}((\delta \to c) \to c) = 0$. Então, pela Definição 3.2.3 temos $\overline{v}(c) = 0$, e, consequentemente, $\overline{v}(\beta) = 1$ e $\overline{v}(\delta) = 0$, mas, daí, $\overline{v}(((\beta \to \delta) \to c) \to c) = 0$, absurdo.
Se R=(mp) então temos por hipótese $\overline{v}(\beta) = 1, \;\; \overline{v}(\beta \to \delta) = 1$, mas $\overline{v}(\delta) = 0$. Mas, se $\overline{v}(\beta) = 1$ e $\overline{v}(\beta \to \delta) = 1$, então $\overline{v}(\delta) = 1$, absurdo, e com este caso conclui a demonstração da Proposição $\blacksquare$.

Definição 3.2.7. Seja v uma valoração e F uma árvore de fórmulas dizemos que v *satisfaz* F, denotado por $v \models F$ se existe uma ramo B de F tal que $v \models B$.

Corolário 3.2.8. *Dada uma árvore F e uma valoração v, se F' estende F pela aplicação de uma regra e $v \models F$, então $v \models F'$.*

Dem.: Suponha, por absurdo, que existe uma árvore F e uma valoração v tal que F' estende F pela aplicação de uma regra e $v \models F$, mas $v \not\models F'$. Então, existe uma regra R tal que $\overline{v}[Prem(R)\rho] \subseteq \{1\}$, mas $\overline{v}[\Upsilon\rho] = \{0\}$, para $\Upsilon \in Con(R)$, absurdo, pela Proposição 3.2.6$\blacksquare$.

Teorema 3.2.9. *Teorema de correção para Tablôs: Seja Γ um conjunto de fórmulas. Se existir um tablô fechado $\overline{F}$ para Γ, então Γ é insatisfatível.*

Dem.: Seja $\overline{\Gamma}$ como definido acima com c uma variável proposicional tal que $c \notin Var(\Gamma)$. Suponha que existe um tablô fechado $\overline{F}$ para Γ e uma valoração v tal que $v(\Gamma) = \{1\}$. Então, pelo Lema 3.2.5 temos $\overline{v}(\overline{\Gamma}) = \{1\}$.

Mas $\overline{F} = \{F_n\}_{n\in\omega}$ é uma sequência de árvores começando por $F_0 = \overline{\Gamma}$ e $\overline{v}$ é uma valoração tal que $\overline{v(\Gamma)} = \{1\}$, isto é, $\overline{v} \models F_0$. Pelo corólário 3.2.8 e, por indução sobre n, $\overline{v} \models F_n$ para todo n, em particular $\overline{v} \models \overline{F}$, mas $\overline{F}$ é fechado (por hipótese), então $(p \to c) \to c$, $p \to c$ ocorrem em cada ramo e, daí (por (mp)) c ocorre em cada ramo, absurdo, pois $\overline{v}(c) = 0$ ■.

Definição 3.2.10. Seja T um sistema de Tablôs, e seja $\Gamma \subseteq SFor(p_1 \dots p_n)$. Dizemos que Γ é *um conjunto saturado* se:

Sat1 é aberto, ou seja: para cada fórmula $\alpha \in For(p_1 \dots p_n)$,
$\{(\alpha \to c) \to c,\ \alpha \to c\} \nsubseteq \Gamma$.

Sat2 para toda regra R de T e para cada substituição por esquemas ρ:
$\mathsf{Prem}(R)\rho \subseteq \Gamma$ implica $\Upsilon\rho \subseteq \Gamma$, para alguma $\Upsilon \in \mathsf{Con}(R)$.

Proposição 3.2.11. *Seja Γ um conjunto de $SFor$ de um ramo aberto de um tablô concluido. Então Γ é saturado.*

Dem.: Direta, usando 3.2.10 ■.

Proposição 3.2.12. *Se $\Gamma \subseteq SFor(p_1 \dots p_n)$, então todo tablô construido a partir de Γ consiste em fórmulas de $SFor(p_1 \dots p_n)$.*

Dem.: Direta, aplicando as definições de (mp), (bi), (r1) e (r2)■.

Teorema 3.2.13. *Teorema de Existência de Modelos para Tablôs: Se $\Delta \subseteq SFor(p_1 \dots p_n)$ é saturado, então existe uma valoração v tal que:*

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & se\ (\alpha \to c) \to c \in \Delta \\ 0 & se\ \alpha \to c \in \Delta \end{cases}$$

Dem.: Definimos

$$v(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } (p_i \to c) \to c \in \Delta \\ 0 & \text{se } p_i \to c \in \Delta \end{cases}$$

Observe que o Item 1 da Definição 3.2.10 garante que v atribui um valor de verdade determinado a cada fórmula atômica de Δ e o Item 2 da mesma definição e a regra (bi) garantem que v atribui um valor de verdade determinado a cada fórmula de Δ de complexidade maior. Verificamos, então que v está bem definida. Estendemos v a uma valoração $v : For(p_1 \dots p_n) \longrightarrow 2$ (ou seja $v(\beta \to \delta) = 1$ sse $v(\beta) = 0$ ou $v(\delta) = 1$.)
Por indução na complexidade de α, demonstraremos

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } (\alpha \to c) \to c \in \Delta \\ 0 & \text{se } \alpha \to c \in \Delta \end{cases}$$

Caso 3.2.13.1. *α é atômica, então vale pela Definição de v.*

Caso 3.2.13.2. *Se $\alpha = \beta \to \delta$ vamos demonstrar $v(\alpha) = v(\beta) \to v(\delta)$.*

Caso 3.2.13.3. $v(\alpha) = 1$

Subcaso 3.2.14. $v(\beta) = 0$.

Por hipótese de indução $\beta \to c \in \Delta$. Suponha por absurdo $(\beta \to \delta) \to c \in \Delta$. Por (r1) temos $(\beta \to c) \to c \in \Delta$, absurdo, pois Δ é saturado.

Subcaso 3.2.15. $v(\delta) = 1$.

Por hipótese de indução $(\delta \to c) \to c \in \Delta$. Suponha por absurdo que $(\beta \to \delta) \to c \in \Delta$. Por (r1) temos $\delta \to c \in \Delta$, absurdo, pois Δ é saturado. Portanto se $v(\alpha) = 1$, então $(\alpha \to c) \to c \in \Delta$.

Caso 3.2.15.1. $v(\alpha) = 0$.

Logo $v(\beta) = 1, v(\delta) = 0$. Por hipótese de indução $(\beta \to c) \to c$, $\delta \to c \in \Delta$. Suponha, por absurdo, $((\beta \to \delta) \to c) \to c$, logo, por (r2) temos $\beta \to c \in \Delta$ ou $(\delta \to c) \to c \in \Delta$.

Subcaso 3.2.16. *Seja $\beta \to c \in \Delta$.*

Como, por hipótese de indução, $(\beta \to c) \to c \in \Delta$, então Δ não é saturado (absurdo).

Subcaso 3.2.17. *Seja $(\delta \to c) \to c \in \Delta$.*

Como, por hipótese de indução, $\delta \to c \in \Delta$, então Δ não é saturado (absurdo). Portanto, se $v(\alpha) = 0$, então $\alpha \to c \in \Delta$ $\blacksquare$.

Teorema 3.2.18. *Teorema de completude para Tablôs: Seja $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(p_1 \ldots p_n)$ um conjunto finito de fórmulas tal que $\Gamma \models \alpha$. Então existe um tablô fechado para $\overline{\Gamma} \cup \{\alpha \to c\}$, onde c é uma variável proposicional que não ocorre em $\{p_1 \ldots p_n\}$.*

Dem.: Suponha que todo tablô concluido para $\overline{\Gamma} \cup \{\alpha \to c\}$ é aberto. Seja F um tablô concluido aberto para $\overline{\Gamma} \cup \{\alpha \to c\}$, seja Δ o conjunto de fórmulas de um ramo aberto de F. Logo, $\overline{\Gamma} \cup \{\alpha \to c\} \subseteq \Delta$ e $\Delta \subseteq SFor(p_1 \ldots p_n)$ é saturado pela Proposição 3.2.11. Pelo Teorema 3.2.13, existe uma valoração $v : For(p_1 \ldots p_n) \longrightarrow 2$ tal que

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } (\alpha \to c) \to c \in \Delta \\ 0 & \text{se } \alpha \to c \in \Delta \end{cases}$$

Dado que $\overline{\Gamma} \subseteq \Delta$, então $v(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Desde que $\alpha \to c \in \Delta$, então $v(\alpha) = 0$ e, portanto,$\Gamma \not\models \alpha$ absurdo. Então se $\Gamma \models \alpha$, existe tablô fechado para $\overline{\Gamma} \cup \{\alpha \to c\}$ $\blacksquare$.

3.3 Considerações

Salientamos que o conceito fundamental no sistema de provas e dedutibilidade descrito até aqui é o de trivialidade, isto é, o fato de uma fórmula produzir outra qualquer (denotada pela letra proposicional c), o que nos leva a esclarecer um ponto que, em geral, é relegado: a noção de trivialidade nem sempre está vinculada com a noção de negação. Em particular, podemos obter trivialidades (como na objeção de Curry) sem ter definido sequer o símbolo de negação.

Para dar conta, de maneira abstrata, de um arcabouço lógico que pudesse lidar com a trivialidade positiva de forma análoga à que o programa paraconsistentista trata da trivialidade ligada à negação, teríamos de controlar não necessariamente a ocorrência de uma fórmula e a sua negação, mas o fato de uma fórmula implicar em qualquer outra, o que nos levaria a introduzir o conceito de *paratrivialidade*, significando o fato de existirem sistemas que só são trivializáveis com alguma condição adicional. Nesse sentido, a paratrivialidade seria um conceito mais geral que a paraconsistência pois nem sequer depende de termos à disposição um símbolo definido para a negação (fato indispensável na lógica paraconsistente). Um projeto de trabalho ambicioso que não pretendemos levar a cabo nesta dissertação, mas apenas defender sua relevância, seria reescrever o tratamento dado à consistência em [12] em termos de um novo operador de trivialização. Nesse sentido, poderíamos pensar em adicionar à lógica positiva novas regras do tipo

$$\alpha^{\varnothing}, \alpha, \alpha \to c \vdash c,$$

ou axiomas como

$$(\alpha^{\varnothing} \to (\alpha \to (\alpha \to c))) \to c$$

reproduzindo[2] desta forma todo o desenvolvimento proposto para as LFI's.

[2]Onde $\varnothing$ denotaria o operador de trivialidade positiva.

Capítulo 4

Da negação implícita à verdade sem sinais

Duas ênfases têm norteado este trabalho: de um lado, problemas fundamentalmente técnicos (por exemplo, a completude de sistemas de lógica positiva) e de outro indagações conceituais (por exemplo, o interesse pelo caráter construtivo desses sistemas). Remetemos às conclusões parciais de cada capítulo com relação a esses dois tipos de problemas. Conservando a divisão original entre os pontos de vista técnico e conceitual, reunimos a seguir certas idéias que consideramos relevantes quer como fecho de algumas colocações anteriores, quer como perspectivas de trabalho, ou ainda como conexões de nosso trabalho com questões da filosofia tradicional.

4.1 Negação implícita e o infinito

4.1.1 Negação espúria e genuína: Smullyan, o infinito e o absurdo

Em [45], o conhecido lógico (e também mágico amador, além de pianista) Raymond Smullyan introduz o paradoxo do hiperjogo (um jogo que começa, mas não termina), com o intuito de apresentar uma prova alternativa de um teorema de Cantor (a respeito de que não existe bijeção entre um conjunto e seu conjunto potência)[1]. Ao invés disso Smullyan usa um argumento positivo que deriva um absurdo através do infinito. Esse absurdo decorre do

[1]É sobradamente conhecido que o argumento de Cantor utiliza o método diagonal (devido a ele próprio).

fato de aceitarmos uma certa parcela de autoreferência[2] (x pertence a seu próprio conjunto-sequência) e, portanto, resulta extremamente interessante para discutir a noção de regresso ao infinito no interior da lógica positiva e a sua relação com o absurdo derivado através do paradoxo de Curry. Nesta seção vamos expor o argumento de Smullyan discutindo seu pretenso caráter positivo e vinculando-o com a questão do infinito, discutida no Capítulo 2.
O primeiro passo é lembrar brevemente o argumento de Cantor para perceber as diferenças com relação ao argumento usado por Smullyan: Temos que demonstrar que para qualquer conjunto X, $\mid X \mid < \mid \wp(X) \mid$, onde $\mid X \mid$ denota o cardinal do conjunto X. Para tanto, devemos mostrar que toda função injetora $f : X \longrightarrow \wp(X)$ não pode ser sobrejetora.
Definimos agora o conjunto $C = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. De fato $C \subseteq X$ e, daí, $C \in \wp(X)$. Vamos demonstrar $C \notin f[X]$. Supomos, na procura de um absurdo, $C = f(z)$ para $z \in X$. Daí, temos $z \in C \leftrightarrow z \in f(z)$ (por hipótese) mas $z \in C \leftrightarrow z \notin f(z)$ (pela definição de C), absurdo.
Smullyan observa que o argumento de Cantor depende necessariamente da negação, pois ela faz parte da própria definição do conjunto diagonal C e expõe a versão de Zwicker para obter o conjunto Z que desempenha o mesmo papel usando o conceito de finitude ao invés do conceito de negação. Tendo obtido uma f' injetora qualquer que leva $x \in X$ no conjunto S_x, definimos o conceito de *caminho*: um caminho é uma seqüência finita ou infinita de elementos de X tal que para cada termo z da seqüência, z é o último termo da seqüência ou o seguinte termo é elemento de S_x.
Por exemplo, tomamos $x \in X$. Se S_x é vazio, o caminho acaba, caso contrário, tomamos $y \in S_x$ diferente de x e teríamos o caminho $\langle x,\ y \rangle$; se S_y é vazio, o caminho acaba, caso contrário, tomamos $z \in S_y$ e obtemos o caminho $\langle x,\ y,\ z \rangle$. Se S_z é vazio acaba o caminho; se não, continuamos com a mesma construção. Resumindo, o caminho continua até acharmos um $v \in X$ tal que S_v é vazio; caso não achemos tal v, o caminho será infinito.
Introduzimos agora a definição de elemento normal de X como aquele que gera caminhos finitos e denotamos o conjunto de elementos normais de X como Z. Usando esse conceito, vamos demonstrar a seguinte asserção[3]:

O conjunto Z é diferente de S_x para todo x.

[2] O que estabelece uma relação com o paradoxo de Curry.

[3] Equivalente ao Teorema de Cantor, onde usamos o conjunto Z ao invés do conjunto C como exemplo de um elemento de $\wp(X)$ que não pertence à imagem de X por f'.

Vamos supor, então, que existe $x \in X$ tal que S_x coincide com Z e que esse conjunto não é vazio[4]. Tomamos y de entre os elementos de S_x, ou seja, um elemento normal. Como y é normal, todo caminho que começa com y deve terminar e, portanto, o caminho $\langle x,\ y\rangle$ deve terminar, quer dizer x deve ser normal. De outro lado, desde que x é normal e S_x é o conjunto dos elementos normais, $x \in S_x$ e, daí, existe o caminho infinito $\langle x,\ x,\ x\ldots\rangle$ e x não é normal, absurdo.
De fato, o argumento não usa de qualquer negação na definição do conjunto Z, ou seja, não se baseia na negação explícita. Vamos mostrar, porém, que se baseia em dois tipos de negação implícita.
Por um lado, o argumento precisa da distinção finito-infinito para definir o conjunto dos elementos normais e para obter o absurdo. Tal distinção não pode evitar a negação pois, mesmo tendo várias definições estritamente positivas de conjunto infinito[5], fatalmente devemos usar da negação na definição de conjunto finito e vice-versa. A única saída para tal problema seria evitar os conceitos de finito e infinito na prova, mas isso é impossível pelo menos nesta prova. Tal dificuldade está no centro de nossa discussão sobre o infinito no Capítulo 2: a negação é uma cota em um sistema que, de outro modo, conteria algum tipo de infinito.
Por outro lado, a redução ao absurdo de Smullyan depende, obviamente, da ocorrência da negação e, por exemplo, é fundamentalmente distinta e independente de objeções estritamente positivas que podem ser expressas através da implicação. Também aqui encontramos uma negação implícita e inevitável na meta-linguagem.
Dessa maneira, a negação aparece mais sutilmente em dois pontos cruciais da argumentação de Smullyan e, portanto, ela não poder ser considerada como uma demonstração positiva no mesmo sentido, por exemplo, da argumentação de Curry.

4.1.2 Completude para lógica positiva de primeira ordem

Neste trabalho consideramos métodos de completude para o cálculo proposicional positivo, adiando a questão de uma possível demonstração de completude para lógica positiva clássica de primeira ordem. A seguir apresentamos algumas considerações úteis para uma futura pesquisa nessa direção.
Seguindo a intuição de Henkin para L^+ e o esquema de prova apresentado

[4] Se Z for vazio, então, de fato, não coincide com S_x para algum x, pois todo x é não normal e, daí S_x *não pode* ser vazio para qualquer que seja o x.

[5] Por exemplo, um conjunto que possui uma bijeção com os naturais.

em [7] [6], podemos propor a seguinte axiomática para $\mathbb{L}^+$, a lógica positiva clássica de primeira ordem:

I. Axiomas proposicionais

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to [(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)]$
3. $((\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma)) \to [(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to \gamma) \to ((\alpha \to \gamma) \to \gamma)]$

II. Axiomas de primeira ordem

1. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\beta)$ se x não ocorre livre em α.[7]
2. $\forall x(\alpha) \to \alpha(t)$ se t é um termo livre para x em α.

Como regras de inferência temos:

1. Modus Ponens: $\frac{\alpha,\, \alpha\to\beta}{\beta}$(MP)
2. Generalização: $\frac{\alpha}{\forall x(\alpha)}$(GEN)

Existe, porém, uma limitação séria nessa axiomática para aplicarmos o método não construtivo que o próprio Henkin tornou célebre para o caso da lógica de predicados: quando usarmos raciocínios que envolvem testemunhas (constantes), deveremos fixar um significado para fórmulas do tipo $\exists x\alpha(x)$, mas, desde que $\forall$ e $\exists$ são interdefiníveis usando a negação e somente temos uma definição explícita de $\forall$ na axiomática de $\mathbb{L}^+$, $\exists$ não possui significado nessa linguagem. Poderíamos tratar o quantificador existencial $\exists$ definido como

$$\exists x\alpha(x) \equiv [\forall x(\alpha(x) \to c)] \to c$$

onde c é uma variável proposicional que não ocorre em $\alpha(x)$. Nos resta investigar se este tipo de "existência" é compatível com a lógica de predicados padrão.

Por outro lado, se superarmos a dificuldade acima apontada, ainda não conseguiremos usar o método de completude não construtiva de Henkin. Para

[6]O leitor pode consultar esse trabalho para conferir a definição de prova e os axiomas da identidade.

[7]A definição de variável livre é a usual.

tanto precisamos refletir sobre uma das apresentações do conceito tradicional (não-positivo) de teoria consistente. Dizemos que uma teoria $\mathbb{T}$ é consistente se existe uma fórmula α tal que $\mathbb{T} \nvdash \alpha$ e essa definição, como evidenciam as provas de completude não-construtivas examinadas no Capítulo 1, não envolve negação na linguagem.
Entretanto, o método de completude usado nos Capítulos 1 e 3 não pode ser usado aqui, desde que não temos uma construção envolvendo variáveis proposicionais e, portanto, é necessário 'simular' sintaticamente a negação de outra maneira. Essa simulação, obviamente, deve estar aconpanhada de uma interpretação no modelo de $\mathbb{L}^+$, interpretação essa que não parece ser muito evidente nem intuitiva. É possível que ainda seja cedo para tentarmos uma construção desse tipo, desde que é muito difícil pensar uma metamatemática estritamente positiva e esse parece ser um desafio para a lógica positiva clássica de primeira ordem[8].

4.2 Algumas questões filosóficas

4.2.1 Aristóteles, *De refutatione*

No livro IV da *Metafísica*[41], Aristóteles refuta a posição de quem aceita contradições, apoiado na divisão linguagem significativa/linguagem assertiva, segundo a qual corresponde à segunda trabalhar com a noção de verdade ou mentira. Quem se contradiz não afirma alguma coisa falsa, afirma algo sem significado. Baseados em nosso tratamento de negações implícitas (a triviliade implicativa do Capítulo 3), levantamos a seguinte questão: não poderiamos tratar o argumento de Aristóteles mais adequadamente em termos positivos? Poderia acontecer que o absurdo que se deriva decorra de um tipo de negação implícita, o que esclarecería os limites e a correção da sua demonstração.
Em *Metafisica* IV, 4 Aristóteles apresenta vários argumentos que evidenciam a importância do princípio de não contradição. O primeiro deles, que basta para exemplificar o uso implícito da negação, começa esclarecendo que tipo de demonstração pode-se desenvolver para esse princípio, desde que ele próprio é a base de qualquer demonstração. A rigor, não demonstraremos que tal princípio é verdadeiro (pois esse procedimento seria circular), mas mostraremos que não é possível supor que ele seja falso (1006 a16-18). Ou seja, a hipótese depende da pessoa que desconfia da va-

[8]Contudo, pelo menos conhecemos que tipo de complexidade teria essa construção: [29] consegue mostrar que a lógica positiva de primeira ordem é NP-completa.

lidade do princípio, mas não podemos pedir para ela realizar uma asserção verdadeira ou falsa[9], mas uma asserção significativa, comunicável (1006 a 18-23). Portanto, Aristóteles constrói uma demonstração refutativa que depende do objetor proferir alguma coisa com significado. Desde que as palavras têm um número finito de significados (caso contrário qualquer comunicação através da linguagem seria impossível), então ao afirmarmos o predicado 'ser homem' escolhemos um significado definido que garante a identificação do objeto designado (1006 a 26 - 1006 b 17). Mas se 'ser homem' significa a mesma coisa que 'não ser homem', então não temos um significado definido para esse predicado e, dai, ele não tem significado em absoluto e, segundo a particular teoria aristotélica do significado segundo a qual o significado de um termo corresponde a alguma característica de alguma coisa real, não teriamos nenhum objeto no mundo que pudesse ser designado com essa expressão, pois um objeto com propriedades necessárias contraditórias não pode existir (1006 b 18-34). Logo, o princípio de não contradição garante a própria estrutura significativa da linguagem e, consequentemente, a estrutura de qualquer demonstração.

Fora a referência à teoria essencialista do significado, o esquema formal da prova de Aristóteles distingue claramente entre a negação na linguagem e a negação na meta-linguagem. Com efeito, suponhamos que estamos trabalhando com uma lógica positiva com uma meta-linguagem não-positiva. Sem afirmar ou negar nada na linguagem, examinamos na meta-linguagem os predicados que podem ser considerados significativos. O ponto de Aristóteles pode ser expresso da seguinte maneira: se a função que interpreta os predicados na estrutura respectiva não consegue isolar os termos que satisfazem a um predicado daqueles que não, então o predicado está mal definido, o que informalmente quer dizer que não tem significado e, portanto, não pode ser verificado. A analogia com o argumento de Ackermann examinado na seção 2.3.1 é estreita: as condições de verdade de uma proposição somente podem ser fixadas depois de ter atribuido a ela um sentido ou significado.

Desse ponto de vista, a demonstração aristotélica pode ser compreendida adequadamente como evidência de uma condição básica da comunicação, não unicamente como a prova da validade de um príncipio lógico. O absurdo de quem duvida do princípio de não contradição não é exatamente considerar uma proposição como ao mesmo tempo sendo verdadeira e falsa, mas tentar falar com sentido esvaziando de sentido suas próprias palavras. O símbolo de negação, então, pode ser desconsiderado como parte fundamental desse raciocínio e, portanto, um estudo detalhado do argumento aristotélico

[9]Pois as asserçãoes verdadeiras e as falsas são governadas pelo princípio.

a partir de uma lógica positiva não é nem impossível nem insensato.

4.2.2 Verdade sem sinais?

Levando em conta nossa formalização da verdade sem sinais (nem na linguagem, nem na metalinguagem), abordamos o problema, sugerido na seção anterior, da relação do significado e a verdade, exemplificado nos trabalhos clássicos [46] e [16]: a ausência da negação coloca uma questão profunda: como distinguir argumento verdadeiros de argumentos falsos? A verdade de um enunciado é produto de algum tipo de teste, mas nosso teste abre mão do símbolo para abreviar o fato de o argumento ter falhado. Qual seria o critério para aceitarmos um enunciado? Poderiamos supor que é seu significado (por exemplo, o fato de não identificar nenhum objeto ou situação, seria uma prova da sua falsidade) e, então, o significado dependeria das condições de verdade (como argumenta [16]), ou poderiamos rejeitar esta visão e supor que, de alguma maneira, a teoria da verdade não dá conta de aspectos fundamentais da teoria do significado (como acontece em [46]). Em termos deste trabalho, a ocorrência da trivialidade seria o sinal de o argumento ser falso e, portanto, o significado do argumento dependeria de uma condição implícita: a sua verdade, e esse fato apoiaria a posição de [16].

Contudo, precisamos distinguir, de novo, dois pontos de vista dos quais tal problema pode ser abordado. De um lado, tecnicamente a teoria positiva da verdade não representa mais do que uma aplicação do método semântico de Tarski, como apontado no início do Capítulo 1. Na visão com nuances algébricos que ele propunha, a diferença entre as lógicas clássica e clássica-positiva consiste na ausência de uma função unária na matriz que intepreta o segundo sistema.

De outro lado, a construção do sistema de tablôs no Capítulo 3 a partir da trivialidade implicativa e a possibilidade de se atribuir uma configuração positiva às premissas falsas através da implicação são elementos instigantes do ponto de vista conceitual desde que estamos lidando com uma teoria que representa a verdade sem usar sinal algum. O raciocínio que desenvolvimos recorre à sintaxe para preencher essa lacuna: a verdade de uma proposição depende de sua 'forma implicativa'. Assim, mesmo sem representação explícita da falsidade na linguagem, a implicação é rica o suficiente para contornarmos a dificuldade de tratar com premissas falsas[10]. Nesse sentido, o estudo das expressões condicionais na linguagem natural através

[10]De fato, é a implicação o único conectivo clássico que consege dar uma solução completa para esse problema, como evidencia a prova de completude proposta por Henkin e estudada no Capítulo 1.

de uma lógica implicativa poderia satisfazer aos critérios de Davidson em [16], em particular com relação ao caráter recursivo que ele deseja para uma teoria do significado aceitável, ou seja com relação ao fato do significado da sentença depender dos elementos constituintes.
Entretanto, o maior problema de tal teoria do significado seria a impossibilidade de estudar outro fator importante na linguagem cotidiana: a intenção de comunicar coisas diferentes usando estruturas formalmente equivalentes[11]. Uma possível linha de trabalho para atender essas questões consistiria em tentar codificar expressões cotidianas condicionais onde não usamos a negação e observar até que ponto tais expressões são afetadas pelo fenômeno da trivialidade potencial, agora no contexto de palavras que não identificam nenhum objeto ou conteúdo, pois referem-se a qualquer coisa. O estudo que propomos poderia pensar-se como uma lógica do significado, onde examinamos o poder expressivo da linguagem natural sem negação, determinando se tal lógica consegue captar pelo menos em parte a idéia da paratrivialidade no contexto da filosofia da linguagem ou se simplesmente é impossível trabalhar com ela fora do contexto da lógica matemática.

[11] Como aponta Strawson em [46], página 105.

Apêndice A

Apêndice A: Axiomatizações da Lógica Positiva Clássica

Apresentamos aqui um estudo mais detalhado das axiomatizações da lógica positiva clássica corretas e completas com relação à matriz $\mathfrak{M}$ do Capítulo 1.
Podemos estabelecer dois tipos de axiomáticas com as propriedades requeridas das apresentadas na literatura especializada (em particular [48], [49], [50], [26],[17], [20] e [6]), as de três axiomas (por exemplo a de [26]) ou as de um único axioma (consideradas em [48] e [50]). Vamos acolher essa ordem de exposição no que segue.

A.1 Axiomáticas com três elementos

A primeira axiomática considerada na literatura especializada é a do Capítulo 1 que, apesar de ser apresentada por Tarski e Łukasiewicz é conhecida como Tarski-Bernays por serem estes os que a introduziram originalmente (vide [48] página 52 e [49], página 296):

A1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

A2. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$

A3. $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$

Outra axiomática bastante explorada por nós é a introduzida por Henkin em [26], que consta das seguintes fórmulas:

H1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

H2. $(\alpha \to \beta) \to [(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)]$

H3. $(\alpha \to \gamma) \to [((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to \gamma]$

Também estudamos no Capítulo 1 a axiomática considerada em [17], cujo fragmento puramente implicativo consta dos seguintes elementos:

Ax1^L**.** $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

Ax2^L**.** $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to [(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)]$

Ax3^L**.** $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$

Existe outra opção em [20]:

E^1**.** $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

E^2**.** $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to [(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)]$

E^3**.** $(\alpha \to \gamma) \to [(\beta \to \gamma) \to (((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \gamma)]$

Por último, em [6] são consideradas pelo menos quatro axiomáticas partindo de

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to [(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)]$

e establecendo equivalências entre os seguintes axiomas[1]

3. $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ (Lei de Peirce))

4. $(\alpha \to \gamma) \to [((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to \gamma]$ (Princípio Campinas)

5. $\alpha \vee (\alpha \to \beta)$ (Lei de Dummett)

6. $((\beta \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \vee \beta)$ (o Princípio Ghent)

O primeiro passo ao examinar essas axiomáticas todas consiste em estabelecer a função de cada um dos elementos que as constituem, para, depois, demonstrar a equivalência entre axiomas. No que diz respeito ao primeiro item podemos observar que, em geral, temos dois axiomas que garantem a demonstração do Teorema da Dedução e outro usado na demonstração do Teorema de Completude. O primeiro grupo consta das seguintes fórmulas

[1] O nome de "Princípio Campinas" e "Princípio Ghent" são introduzidos nesse artigo com o intuito de gerar uma discussão dos axiomas da lógica positiva clássica.

A1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ e

H2. $(\alpha \to \beta) \to [(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)]$ ou

Ax2^L. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to [(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)]$

No caso de [48], porém, a situação é um pouco diferente pois para provar o Teorema da Dedução precisamos dos três axiomas (vide Lema 1.1.9 e Teorema 1.1.10).
Para obtermos o Teorema de Completude temos as seguintes opções

A3. $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$

H3. $(\alpha \to \gamma) \to [((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to \gamma]$

E^3. $(\alpha \to \gamma) \to [(\beta \to \gamma) \to (((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \gamma)]$

LD. $\alpha \vee (\alpha \to \beta)$

PG. $((\beta \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \vee \beta)$

Supondo que já demonstramos o Teorema da Dedução (TD), provamos a seguir as equivalências entre axiomas, começando por A2 $\leftrightarrow$ Ax2^L

A2 $\to$ Ax2^L
Dem.: Vide Lema 1.2.5

Ax2^L $\to$ A2
Dem.:

1.	$\alpha \to \beta$	[Hip]
2.	$\beta \to \gamma$	[Hip]
3.	$\beta \to \gamma \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$	[Ax1^L]
4.	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	[MP 2 e 3]
5.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to [(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)]$	[Ax2^L]
6.	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	[MP 4 e 5]
7.	$\alpha \to \gamma$	[MP 1 e 6]
8.	$\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$	[De 1, 2 e 7]
9.	$\alpha \to \beta \vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$	[TD 8]
10.	$(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$	[TD 9]

Vamos demonstrar A2 $\leftrightarrow$ H2

A2 $\to$ H2
Dem.: Vide Lema 1.2.6

Demonstramos H2 $\to$ A2

Dem.: Análoga à da equivalência anterior, mudando únicamente a ordem na aplicação de MP, ou seja, os passos 5 a 7.

A equivalência Ax$2^L \leftrightarrow$ H2 é trivial, desde que vale o Teorema da Dedução e a prova depende da ordem na aplicação de MP.

Provamos agora A3 $\leftrightarrow$ H3

A3 $\to$ H3

Dem.: Vide Lema 1.2.4

H3 $\to$ A3[2]

Neste caso, precisamos demonstrar antes (id) $= \alpha \to \alpha$ usando H1 e H2.

1.	$(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to [(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)]$	[Ax2^L]
2.	$\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)$	[A1]
3.	$(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$	[MP 1 e 2]
4.	$\alpha \to (\alpha \to \alpha)$	[A1]
5.	$\alpha \to \alpha$	[MP 3 e 4]

Usando este resultado

1.	$(\alpha \to \alpha) \to [((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha]$	[H3]
2.	$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$	[MP (id) e 1]

Estabelecemos agora A3 $\leftrightarrow$ E^3

A3 $\to$ E^3

Dem.: Vide Lema 1.2.5

$E^3 \to$ A3

Para demonstrar este fato precisamos da Lei da Absorção (abs) $= (\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$, uma prova alternativa da qual apresentamos a seguir

1.	$\alpha \to (\alpha \to \beta)$	[Hip]
2.	α	[Hip]
3.	$\alpha \to \beta$	[MP 1 e 2]
4.	β	[MP 2 e 3]
5.	$\alpha \to (\alpha \to \beta),\ \alpha \vdash \beta$	[De 1, 2 e 4]
6.	$\alpha \to (\alpha \to \beta) \vdash \alpha \to \beta$	[TD 5]
7.	$(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$	[TD 6]

Usando este resultado

[2] Esta prova faz parte de [6].

1.	$(\alpha \to \beta) \to \alpha$	[Hip]
2.	$(\alpha \to \alpha) \to [((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to (((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)) \to \alpha)]$	[E^3]
3.	$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to [((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)) \to \alpha]$	[Mp 2 e (id)]
4.	$((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)) \to \alpha$	[Mp 3 e 1]
5.	α	[Mp 4 e (abs)]
6.	$(\alpha \to \beta) \to \alpha \vdash \alpha$	[De 1 e 5]
7.	$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$	[TD 6]

Demonstramos agora $E^3 \leftrightarrow H3$[3]

$H3 \to E^3$

Dem.: [4]

1.	$\alpha \to \gamma$	[Hip]
2.	$\beta \to \gamma$	[Hip]
3.	$(\alpha \to \beta) \to \beta$	[Hip]
4.	$(\alpha \to \beta) \to \gamma$	[Mp 2, 3 e A2]
5.	$(\alpha \to \gamma) \to [((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to \gamma]$	[H3]
6.	$((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to \gamma$	[Mp 1 e 5]
7.	γ	[Mp 4 e 6]
8.	$\alpha \to \gamma,\ \beta \to \gamma,\ (\alpha \to \beta) \to \beta \vdash \gamma$	[De 1, 2, 3 e 7]
9.	$\alpha \to \gamma,\ \beta \to \gamma \vdash ((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \gamma$	[TD 8]
10.	$\alpha \to \gamma \vdash (\beta \to \gamma) \to [((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \gamma]$	[TD 9]
11.	$(\alpha \to \gamma) \to [(\beta \to \gamma) \to (((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \gamma)]$	[TD 10]

$E^3 \to H3$

Dem.: Desde que $E^3 \to A3$, podemos inserir aqui a prova do Lema 1.2.4

Restam por examinar dois axiomas possíveis (LD e PG) que usam da disjunção e por essa razão precisamos introduzir três axiomas não estritamente implicativos que envolvem a disjunção:

Ax4^L**.** $\alpha \to (\beta \vee \alpha)$

Ax5^L**.** $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$

Ax6^L**.** $(\alpha \to \gamma) \to [(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma)]$

Com essas novas ferramentas, vamos demonstrar $A3 \leftrightarrow LD$

$A3 \to LD$ *Dem.*: Vide Capítulo 1, seção 1.3.2, página 31. $LD \to A3$[5]

Dem.:

---

[3]Esta demonstração faz parte de [6].

[4]Idem.

[5]Idem.

1.	$(\alpha \to \beta) \to \alpha$	[Hip]
2.	$\alpha \to \beta$	[Hip]
3.	α	[MP 1 e 2]
4.	$(\alpha \to \beta) \to \alpha,\ \alpha \to \beta \vdash \alpha$	[De 1, 2 e 3]
5.	$\alpha \to \beta \vdash ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$	[TD 4]
6.	$(\alpha \to \beta) \to [((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha]$	[TD 5]
7.	$\alpha \to [((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha]$	[A1]
8.	$(\alpha \vee (\alpha \to \beta)) \to (((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha)$	[Ax6^{l}e MP 6 e 7]
9.	$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$	[MP LD e 8]

As equivalências LD $\leftrightarrow$ H3 e LD $\leftrightarrow$ E^3 são resultado das equivalências anteriores.

A.2 O caso do Axioma A1

Em [50], Łukasiewicz examina o axioma A1 (que faz parte de todas as axiomáticas estudadas na seção anterior) e, generalizando uma idéia de Wajsberg, conclui que esta fórmula é um caso particular do esquema[6]

$$\alpha \to (\varphi \to \psi)$$

ao demonstrar A1 a partir de A2, A3 e do referido esquema. Este esquema, porém, tem de ser usado com a ressalva de que o resultado da substituição de φ e ψ deve produzir uma fórmula com valor distinguido, ou seja, a substituição deve gerar uma tautologia.
As colocações de Łukasiewicz são importantes para nosso trabalho por duas razões. Por um lado, aplicando o esquema proposto obtemos outras axiomáticas completas da lógica proposicional positiva clássica trocando A1 por

A1'. $\alpha \to [(\alpha \to \beta) \to \beta]$ ou

A1". $\alpha \to [\beta \to ((\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma))]$,

por exemplo. Por outro lado, o autor examina o caso onde a substituição gera uma fórmula contingente (não-tautológica) através de considerações a respeito do que, em nosso jargão, seria uma teoria trivial positiva. Por exemplo, se tomarmos $\varphi = \alpha$ e $\psi = \beta$, teríamos como axioma a fórmula $\alpha \to (\alpha \to \beta)$ que não é tautologia e dai gera qualquer fórmula, em particular A1. O ponto instigante aqui é a proposta de prova da trivialidade que

[6] Onde α é variável e φ e ψ denotam, respectivamente, o antecedente e o consequente de um condicional.

Łukasiewicz apresenta a partir desse 'axioma':
Suponhamos que $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ seja o caso. Então, se tomarmos α como sendo $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$, teremos por substituição $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow [(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta]$ e por MP com a hipótese, obteremos $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta$ e, repetindo o processo, deduzimos β para β qualquer, ou seja, chegamos em uma teoria trivial. Observamos que Curry necessita de $\alpha \Leftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ que, por definição é $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha$ para obter a trivialização e Łukasiewicz somente precisa $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$, ou seja, ainda menos que Curry. Podemos propor, então, que a objeção de Curry (de 1942) foi revista por Łukasiewicz em 1948, apesar de que aparentemente não há menção de Łukasiewicz sobre isso. Salientamos, ainda, que essa abordagem à trivialidade positiva não precisa assumir como hipótese nem $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$ nem a Lei da Absorção, mas mostra por que não podemos assumir certas fórmulas como axiomas. Para Łukasiewicz o problema encontra-se não exatamente na Lei da Absorção, mas na escolha de $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ como axioma. Nesse caso, o problema é da própria lógica, não da teoria matemática que ela visa representar, diferentemente do argumento de Curry.

A.3 Axiomáticas com um único elemento

Em [50] são consideradas 5 axiomáticas de um único elemento e é demonstrada a equivalência de I com A1, A2 e A3[7]. As axiomáticas estudadas são:

I. $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow [(\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow (\delta \rightarrow \alpha)]$

II. $[(\theta \rightarrow (\iota \rightarrow \theta)) \rightarrow (((((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow \delta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \delta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta)) \rightarrow \eta)] \rightarrow \eta$

III. $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow \eta)) \rightarrow [(\iota \rightarrow ((\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow \eta)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \iota) \rightarrow (\delta \rightarrow \eta))]$

IV. $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \delta)) \rightarrow [\eta \rightarrow ((\delta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\gamma \rightarrow \alpha))]$

V. $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \delta)) \rightarrow [(\delta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\eta \rightarrow (\gamma \rightarrow \alpha))]$

[7] Os axiomas I e II já tinham sido introduzidos por Tarski e Łukasiewicz em [48] e Wajsberg em [53], respectivamente. Wajsberg demonstra, ainda, a equivalência de II com A1, A2 e A3.

Apêndice B

Apêndice B: A independência dos axiomas de Henkin

Como complemento das tabelas introduzidas na Seção 1.2.3, apresentamos aqui a justificativa das provas de independência de H1, H2 e H3.

B.1 H1

Temos, pela atribuição h^*:

H1. $h^*(\alpha) = \frac{1}{2}$ e $h^*((\beta \to \alpha)) = 0$ e, daí $h^*(\alpha \to (\beta \to \alpha)) = 0$

H2. $h^*(\alpha \to \beta) = 1$, $h^*(\alpha \to (\beta \to \gamma)) = 0$ e $h^*(\alpha \to \gamma) = 0$. Logo, $h^*((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)) = 1$ e, daí, $h^*((\alpha \to \beta) \to [(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)]) = 1$

H3. $h^*(\alpha \to \gamma) = 0$ e, então, em qualquer caso, $h^*((\alpha \to \gamma) \to [((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to \gamma]) = 1$

B.2 H2

Temos, pela atribuição h':

H2. $h'(\alpha \to \beta) = 1$, $h'(\alpha \to (\beta \to \gamma)) = 1$ e $h'(\alpha \to \gamma) = \frac{1}{2}$. Logo $h'((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)) = \frac{1}{2}$ e, daí, $h'((\alpha \to \beta) \to [(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)]) = \frac{1}{2}$.

H1. $h'(\beta \to \alpha) = 1$ e, daí, $h'(\alpha \to (\beta \to \alpha)) = 1$.

H3. $h'(\alpha \to \gamma) = \frac{1}{2}$, $h'(\alpha \to \beta) = 1$ e $h'((\alpha \to \beta) \to \gamma) = 0$, logo $h'(((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to \gamma) = 1$ e, daí, $h'((\alpha \to \gamma) \to [((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to \gamma]) = 1$.

B.3 H3

Temos, pela atribuição h'':

H3. $h''(\alpha \to \gamma) = 1$, $h''(\alpha \to \beta) = 0$ e $h''((\alpha \to \beta) \to \gamma) = 1$. Logo $h''(((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to \gamma) = frac12$ e, daí, $h''((\alpha \to \gamma) \to [((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to \gamma]) = \frac{1}{2}$.

H1. $h''(\beta \to \alpha) = 1$ e, daí, $h''(\alpha \to (\beta \to \alpha)) = 1$.

H3. $h''(\alpha \to \beta) = 0$ e, daí, $h''((\alpha \to \beta) \to [(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)]) = 1$.

Referências Bibliográficas

[1] WHILHELM ACKERMANN. Widerspruchsfreier Aufbau der Logik I. Typenfreies System ohne Tertium non datur. *Journal of Symbolic Logic* **15**(1), 33–57 (1950).

[2] WHILHELM ACKERMANN. Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik (Erweitertes System). *Mathematische Zeitschrift* **3**(55), 364–384 (1952).

[3] WHILHELM ACKERMANN. Begründung einer strengen Implikation. *Journal of Symbolic Logic* **21**(3), 113–128 (1956).

[4] ALAN R. ANDERSON, NUEL D. BELNAP. Modalities in Ackermann's 'Rigorous Implication'. *Journal of Symbolic Logic* **24**(2), 107–111 (1959).

[5] AYDA I. ARRUDA, NEWTON C. A. DA COSTA, ANTONIO M. SETTE (EDTS.). "Brazilian Conference on Mathematical Logic: Proceedings of the III Brazilian Conference on Mathematical Logic". Sociedade Brasileira de Lógica, São Paulo (1980).

[6] WALTER A. CARNIELLI. Axiomatizations of positive logic: an exercise in heuristics. manuscrito.

[7] WALTER A. CARNIELLI, MARCELO E. CONIGLIO. O Teorema de Completude para lógica de primeira ordem: um mínimo. Manuscrito.

[8] WALTER A. CARNIELLI, MARCELO E. CONIGLIO, ITALA M. LOFFREDO D'OTTAVIANO. "An event on Brazilian logic. Proceedings of the XIII Brazilian Logic Conference". Numero especial do Logic Journal of the IGPL. Oxford University Press. A aparecer.

[9] WALTER A. CARNIELLI, MARCELO E. CONIGLIO, ITALA M. LOFFREDO D'OTTAVIANO. "Paraconsistency: the logical way to the incon-

sistent. Proceedings of the II world congress on Paraconsistency held in São Paulo". Marcel Dekker (2002).

[10] Walter A. Carnielli, Marcelo E. Coniglio, João Marcos. Logics of formal inconsistency. Em [23].

[11] Walter A. Carnielli, Marcelo E. Coniglio, João Marcos, Carlos Caleiro. Dyadic semantics for many-valued logics. Manuscrito.

[12] Walter A. Carnielli, João Marcos. A taxonomy of c-sistems. Páginas 1–94 (2001). Em [9].

[13] Walter A. Carnielli, João Marcos, Sandra de Amo. Formal inconsistency and evolutionary databases. *Logic and Logic Philosophy* **8**, 115–152 (2000).

[14] Robeto L.O Cignoli, Itala M. Loffredo D'Ottaviano, Daniele Mundici. "Álgebras das Lógicas de Łukasiewicz", volume 8. Coleção CLE (1994).

[15] Haskell Curry. The inconsistency of certain formal logics. *The Journal of Symbolic Logic* **7**(3), 115–117 (1942).

[16] Donald Davidson. Truth and meaning. Páginas 72–83. Em [31].

[17] Luis Henrique Lopes dos Santos. Constructive completeness proofs for positive propositional calculi. Páginas 199–209 (1980). Em [5].

[18] Itala M. Loffredo D'Ottaviano. The completeness and compactness of a three-valued first-order logic. (1985). Em *Proceedings of the V Latin American Symposium on Mathematical Logic*, Bogotá, 1981,*Revista Colombiana de Matemáticas* 19(1-2), páginas 77-94.

[19] Richard Epstein. Paraconsistent Logics with Simple Semantics. A aparecer em *Logique et Analyse*.

[20] Richard Epstein. "The Semantic Foundations of Logic", volume 1 Propositional Logics. Wadsworth, Canada, 2 edição (2001).

[21] Edgard G.K López Escobar, Itala M. Loffredo D'Ottaviano. "A regra ω : passado, presente e futuro.", volume 2. Coleção CLE (1987).

[22] O Frink. Review de [15]. *Mathematical Reviews* **4**(MR0007366), 125.

[23] Dov Gabbay, F Guenter (edts.). "Handbook of Philosophical Logic", volume 12. Kluwer Academic Publishers. No prelo.

[24] Kurt Gödel. Zum intuitionistischen Aussagenkalküll. *Akademie der Wissenschaften in Wien, Math-natur. Klasse* **69**, 65–66 (1932).

[25] Ronald Harrop. An investigation of the propositional calculus in a particular system of logic. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **50**(4), 495–512 (1954).

[26] Leon Henkin. Fragments of propositional calculus. *The Journal of Symbolic Logic* **14**(1), 42–48 (1949).

[27] Aldo Figallo Jr, Martin Figallo, Alicia Ziliani. Łukasiewicz BCK-algebras with infimum. *Universidad de Costa Rica. XIIth Latin American Symposium on Mathematical Logic (San José, January 7-16 2004). Abstracts of Contributed Papers* Página 9 (2004).

[28] László Kalmár. Über Axiomatisiebarkeit des Aussagenkalkuels. *Acta Scientiarium Mathematicarum* **7**, 222–243 (1934-1935). Szeged.

[29] Dexter Kozen. Positive First-Order Logic Is NP-Complete. *IBM Journal of Research and Development* **25**(4), 327–332 (1981).

[30] Grzegorz Malinowski. "Many-Valued Logic". Oxford University Press (1993).

[31] Aloysius P. Martinich(ed.). "The Phylosophy of Language". Oxford University Press University Press, Oxford University Press (1985).

[32] Storr S. McCall(ed.). "Polish Logic: 1920-1939". Oxford University Press (1967).

[33] Elliott Mendelson. "Introduction to Mathematical Logic". Chapman and Hall, Londres, 4ª edição (1997).

[34] John Pollock. Henkin style completeness proofs in theories lacking negation. *Notre Dame Journal of Formal Logic* **12**(4), 509–511 (1971).

[35] Emil Post. Introduction to a general theory of elementary propositions. *American Journal of mathematics* **21**, 163–195 (1921).

[36] Willard V. Quine. Completeness of the Propositional Calculus. *The Journal of Symbolic Logic* **3**(1), 37–40 (1938).

[37] Willard V. Quine. "O Sentido da Nova Lógica". Martins Fontes, São Paulo (1944). Reeditado pela Universidade Federal do Paraná em 1996.

[38] Nicholas Rescher. "Many-Valued Logic". Gregg Revivals (1993).

[39] Klaus Robering. Ackermann's Implication for Typefree Logic. *The Journal of Logic and Computation* **11**(1), 5–23 (2001).

[40] Alan Rose. Strong completeness of fragments of propositional calculus. *Journal of Simbolic Logic* **16**(3), 204 (1951).

[41] W David. Ross(ed.). "Aristotle´s Metaphysics". Oxford University Press (1924).

[42] Wagner Sanz. Relating Negation and Triviality. Em [8].

[43] George Schumm. A Henkin-style completeness proof for the pure implicational calculus. *Notre Dame Journal of Formal Logic* **16**(3), 402–404 (1975).

[44] Antonio M Sette. On the propositional calculus P^1. *Mathematica Japonicae* (18), 181–203 (1973).

[45] Raymond Smullyan. "Satán, Cantor y el infinito". Gedisa, Barcelona (1992).

[46] Peter F. Strawson. Meaning and Truth. Páginas 101–112. Em [31].

[47] Alfred Tarski. "Alfred Tarski. Logic, Semantics, Metamathematics: papers from 1923 to 1938, translated by J.H. Woodger". Oxford University Press, 2ª edição (1963).

[48] Alfred Tarski, Jan Łukasiewicz. Untersuchungen über den Aussagenkalkül. *Comptes rendus des séances de la Société des sciences et des Lettres de Varsovie* **23**(cl iii), 30–50 (1930). Traduzido em [47] sob o título 'Investigations into the sentential calculus', páginas 38–59.

[49] Jan Łukasiewicz. The shortest axiom of the implicational calculus of propositions. *Proceedings of the Royal Irish Academy* **52**, 25–33 (1948). Reimpreso em [51] páginas 295-305.

[50] Jan Łukasiewicz. W sprawie aksjomatyki implikacyjnego rachunku zdań. *Annales de la Société Polonaise de Mathématique* **22**, 87–92 (1950). Traduzido em [51] sob o título 'On the system of axioms of the implicational propositional calculus', páginas 306-310.

[51] Jan Łukasiewicz. "Jan Łukasiewicz Selected Works edited by L. Borkowski". North Holland Publishing Company - PWN (Polish Scientific Publishers), Amsterdam - London - Warszawa (1970).

[52] Mordchaj Wajsberg. Aksjiomatyzacja trójwartościowego rachunku zdań. *Comptes rendus des séances de la Société des sciences et des Lettres de Varsovie* **24**(cl iii), 126–145 (1931). Traduzido em [32] sob o título 'Axiomatization of the three-valued propositional calculus', páginas 264–284.

[53] Mordchaj Wajsberg. Beiträge zum Metaaussagenkalkül I. *Monatshefte für Mathematik und Physic* **24**(42), 221–242 (1935).

[54] Richard Zach. Completeness before Post: Bernays, Hilbert, and the development of propositional logic. *The Bulletin of Simbolic Logic* **5**, 331–366 (1999).

Índice Remissivo