Tomás Barrero, Walter Carnielli

Tableaux sin refutación

Matemáticas: Enseñanza Universitaria, vol. XIII, núm. 2, diciembre, 2005, pp. 81-99,
Escuela Regional de Matemáticas
Colombia

Matemáticas: Enseñanza Universitaria,
ISSN (Printed Version): 0120-6788
reviserm@univalle.edu.co
Escuela Regional de Matemáticas
Colombia

Vol. XIII Nº 2 Diciembre (2005)
Matemáticas: 81–99

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Tableaux sin refutación

Tomás Barrero Walter Carnielli

Recibido Marz. 8, 2005 Aceptado Jun. 21, 2005

Abstract

Motivated by H. Curry's well-known objection and by a proposal of L. Henkin, this article introduces the *positive tableaux*, a form of tableau calculus without refutation based upon the idea of implicational triviality. The completeness of the method is proven, which establishes a new decision procedure for the (classical) positive propositional logic. We also introduce the concept of *paratriviality* in order to contribute to the question of paradoxes and limitations imposed by the behavior of classical implication.

Keywords: Positive logic, implicative triviality, paratriviality, positive tableaux.

AMSC(2000): Primary: 03B50, Secondary: 03B53, 03B60.

Resumen

Usando como motivación la objeción de H. Curry y una propuesta de L. Henkin, el artículo introduce los *tableaux positivos*, una forma de tableaux sin refutación construidos a partir de la idea de trivialidad implicativa. Se establece el teorema de completitud que garantiza un nuevo proceso de decisión para la lógica positiva clásica. Se introduce también el concepto de *paratrivialidad* como posible respuesta a paradojas y limitaciones de la implicación clásica.

Palabras y frases claves: Lógica positiva, trivialidad implicativa, paratrivialidad, tableaux positivos.

1 Introducción

El surgimiento de paradojas como la derivada por Bertrand Russell en la teoría intuitiva de conjuntos y la publicación de los teoremas de la incompletitud de la aritmética por parte de Kurt Gödel levantaron sospechas no sólo con respecto a la consistencia de algunos sistemas formales, sino con relación al uso indiscriminado de la autoreferencia en matemática y lógica. La solución de esas dificultades, si es posible hablar de una respuesta definitiva, provino de la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel en un caso, y en el abandono de la pretensión de pruebas absolutas de consistencia para sistemas formales de cierto tipo, en el otro.

Sin embargo, un nuevo método para reproducir los argumentos de Russell y de Gödel en sistemas esencialmente más débiles (en los cuales ni siquiera es necesario definir la negación) fue descubierto y expuesto de una manera muy simple por Curry en [8]: las dificultades en uno y otro caso no se generan a partir de algún tipo de autoreferencia que involucre negación, sino de ciertas características de la implicación de la lógica clásica, características tan aparentemente neutras y admisibles como la reflexividad de la implicación, la propiedad conocida como "absorción" (cfr. Ejemplos 1 y 2 de la Sección 3.3

respectivamente) y la validez de la regla de Modus Ponens (cfr. Regla (MP) de la Sección 3.2). Como el concepto de inconsistencia incluye siempre algún tipo de negación (cfr. [4] páginas 17-32), en el caso de la situación que describe la objeción de Curry resulta más acertado hablar de "trivialidad", pues en realidad lo que se demuestra es que, dadas ciertas condiciones, podemos derivar cualquier fórmula en nuestro sistema de lógica positiva. En contraposición, acuñaremos el término "paratrivialidad" para designar la propiedad de algunos sistemas de lógica no-clásica que consiguen controlar las condiciones que producen la trivialidad deductiva en la lógica positiva clásica.

El estudio de sistemas que no poseen símbolos definidos para la negación, sino que abordan la falsedad de una fórmula a través de la implicación dada, por lo menos, de 1906 cuando Bertrand Russell [15] estableció la siguiente definición para fórmulas negadas:

$$\neg\alpha \equiv \forall x(\alpha \to x),$$

ejemplificando lo que denominaremos "trivialidad positiva", y las siguientes fórmulas de primer orden para definir la conjunción y la disyunción[1]

$$\alpha \wedge \beta \equiv \forall x(\alpha \to (\beta \to x)) \to x$$

$$\alpha \vee \beta \equiv \forall x(\alpha \to x) \to ((\beta \to x) \to x),$$

aunque, desde su punto de vista, no poder señalar las fórmulas falsas constituye una limitación que nos puede conducir a ambigüedades sistemáticas (ver [1], capítulo 4, secciones 4.3 y 4.4 para una discusión más completa de este aspecto).

Una vez hechas estas aclaraciones preliminares podemos entrar en materia: el presente trabajo tiene por objetivo obtener un proceso de demostrabilidad y decidibilidad para lógicas positivas (en particular, en este caso para la lógica clásica positiva) a través de un sistema de tableaux enteramente positivos [2].

En vez de usar el concepto de contradicción, constitutivo de la noción de "rama cerrada" y "tableau cerrado" característicos de los sistemas de tableau usuales, los (así denominados por nosotros) *tableaux positivos* utilizan el concepto de *rama trivial* y *tableau trivial*: el criterio de parada no es ahora una contradicción, sino la obtención directa de una trivialidad deductiva potencial. De esta forma, los tableaux positivos se conforman con un meta-lenguaje mucho más frugal (sin negación), con interesantes consecuencias para los fundamentos de la teoría de la demostración.

[1]Ver [15] definiciones 7.22, 7.41 y 7.5. Para la disyunción se introduce otra posible definición $\alpha \vee \beta \equiv (\alpha \to \beta) \to \beta$. Es importante resaltar también que la notación usada por Russel para estas definiciones adelanta algunas ideas de lo que constituirá el $\lambda-$cálculo de A. Church .

[2]Tomando en consideración la intuición de León Henkin en [11], ver Sección 4.

En lugar de partir de la presuposición de que el concepto de contradicción es abominable en lógica o en el razonamiento en general, se parte del principio de que el concepto de *trivialidad* es el abominable. En un contexto distinto, Newton da Costa ya manifestaba una posición filosófica análoga, al afirmar en 1959 (cf. [10]) que "desde el punto de vista sintáctico-semántico, toda teoría matemática es admisible, a menos que sea trivial" (véase tambiém [4], páginas 3-5). Por lo tanto, partimos del principio de que nuestro sistema de pruebas no puede conducir a la trivialidad deductiva. Para demostrar una cierta fórmula α, hacemos la suposición de que α conduzca a la trivialidad deductiva, en el sentido de que empezamos por asumir $\alpha \to c$, donde la letra c es una variable proposicional ajena a la fórmula α. Si de ahí logramos probar la misma c, entonces concluímos α.

Vemos entonces que no se recurre a la idea de refutación (presente en los métodos usuales de tableau o en el método de resolución); por el contrario, hay una especie de "círculo virtuoso" involucrado en el método: si suponer que α es deductivamente trivial nos lleva a la trivialidad deductiva, entonces α no lo es, y por lo tanto puede ser aceptado como un legítimo teorema.

La idea general de tomar la negación como un caso particular de la implicación y, en consecuencia, de tomar la implicación como la causa primera del concepto de trivialidad deductiva ha sido ampliamente explotada desde el punto de vista de la teoría de la demostración en [16]. Presentamos, sin embargo, un enfoque completamente diferente a una “teoría de la demostración positiva” para el cálculo proposicional, que nos conduce a nuevas propuestas con respecto a las posibilidades de escapar a la objeción de Curry[3].

El razonamiento proposicional es central en la teoría de computación, y hay un debate en curso sobre la eficiencia relativa de los sistemas de tableau (debidos al trabajo de E. Beth [2] y R. Smullyan [18]) en los años 50 y 60) respecto al método de resolución (propuesto más recientemente por J. Robinson en [14]), aunque dichos sistemas se presenten también para el caso cuantificacional. Ambos son sistemas de refutación, que utilizan el metodo de reducción al absurdo en el metalenguaje. La diferencia esencial entre ellos es que los sistemas de tableau se basan en las formas normales disyuntivas, mientras la resolución parte de las formas normales conjuntivas.

En un artículo ya clásico, S.A. Cook y R. Reckhow en [7] creyeron haber demostrado que los tableaux son inherentemente más ineficientes que la resolución. Este pretendido resultado fué usado para argumentar que los tableaux no pueden simular polinomialmente el metodo de resolución.

Sin embargo, resulta que el contra-ejemplo de [7] está equivocado, como lo demuestra F.Massacci en [13]. En vista de eso, la comparación entre tableux y resolución tiene que ser reconsiderada[4]

[3]Para una relación de otras salidas a la paradoja, cfr. [1], Capítulo 2.

[4]No conocemos la complejidad de nuestro sistema de tableaux positivos; en la literatura se conocen diversas clases de fórmulas puramente implicativas cuyo problema de

Por tales razones, los sistemas de tableau en general continúan siendo de pleno interés, y nuestros sistemas de tableaux positivos que no se valen de la refutación (y por lo tanto son inmunes a las cuestiones de la contradicción en el metalenguaje) pueden ser una interesante alternativa para puntualizar el debate acerca de la comparación entre tableux y resolución, además de aportar recursos teóricos para escapar de la referida paradoja de Curry.

2 El sistema L^+

En [20] Tarski y Łukasiewicz proponen una metodología para el estudio sintáctico y semántico de diferentes fragmentos del cálculo proposicional e, incluso, una de las primeras aproximaciones sistemáticas al cálculo de predicados. Este trabajo tiene, además, el atractivo de presentar rigurosamente la propuesta de lógicas finito- e infinitovalentes de Łukasiewicz en términos fundamentalmente algebraicos (es decir, a través de matrices) y por esta razón los autores se ven obligados a examinar diferentes sistemas del cálculo proposicional, como por ejemplo, el fragmento que contiene como conectivo únicamente la implicación (es decir, la lógica positiva puramente implicativa) que denotaremos por L^+. Presentamos aquí, siguiendo de cerca los originales, el lenguaje, los axiomas y la semántica de tal lógica con el fin de introducir en seguida un sistema de tableaux puramente positivos para L^+.

Definición 1. *Definimos el lenguaje de L^+ de la siguiente manera:*

1. *Símbolos proposicionales: Un conjunto infinito enumerable de variables proposicionales:* $\{p_1, p_2, ...p_n, ...\}$.
2. *Conectivos: Un único conectivo binario,* $\{\rightarrow\}$.
3. *Símbolos auxiliares: ¨(¨, ¨)¨.*

Definición 2. *Fórmulas:*

Caso. Cualquier variable proposicional es una fórmula atómica.

Caso. Toda fórmula atómica es una fórmula.

Caso. Si α y β son fórmulas, entonces $(\alpha \rightarrow \beta)$ es una fórmula. [5]

De aquí en adelante denotaremos el conjunto de las fórmulas del lenguaje L^+ por $For(L^+)$.

El siguiente conjunto constituye una base axiomática para L^+ formada por tres axiomas:

Ax1. $\vdash_{L^+} \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$.

satisfactibilidad se resuelve en tiempo polinomial.

[5] Cuando no haya riesgo de confusión, omitiremos los paréntesis externos de las fórmulas.

Ax2. $\vdash_{L^+} (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$.

Ax3. $\vdash_{L^+} ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$,

y cerrado bajo la regla de substitución (SUB) (que permite substituir uniformemente fórmulas atómicas por fórmulas cualesquiera) y Modus Ponens (MP):

Si α y $\alpha \to \beta$ son teoremas, entonces β es un teorema.

Definición 3. *Una matriz para L^+ es una tripla ordenada $\mathfrak{M} =< A, B, f >$, que contiene dos conjuntos disyuntos no vacíos A, B (con elementos de cualquier tipo), y una función f de dos variables, definida en $A \cup B$. La matriz $\mathfrak{M}$ es llamada normal si $x \in B$ e $y \in A$ siempre implican $f(x, y) \in A$.*

Definición 4. *La función h es llamada una función que atribuye valores en la matriz $\mathfrak{M}$ para L^+ si satisface las siguientes condiciones:*

1. *La función h es definida para cada $\alpha \in For(L^+)$.*

2. *Si p es una variable proposicional, entonces $h(p) \in A \cup B$.*

3. *Si $\alpha, \beta \in For(L^+)$, entonces $h(\alpha \to \beta) = f(h(\alpha), h(\beta))$.*

   Notamos que, de esta forma, los valores de la función h (que asigna valores en la matriz) quedan totalmente determinados.

   Decimos que una fórmula α es satisfecha por la matriz $\mathfrak{M} =< A, B, f >$, denotado por $\mathfrak{M} \models \alpha$, si $h(\alpha) \in B$ para alguna función h que atribuye valores en esta matriz.

En términos intuitivos, los conjuntos A y B actúan como conjuntos arbitrarios de valores de verdad, donde el primero representa los valores no-distinguidos y el segundo representa los valores distinguidos. La noción de matriz normal exige solamente que la implicación produzca valores no-distinguidos, cuando el antecedente de la implicación es distinguido y el consecuente no-distinguido. En los demás casos la interpretación de la implicación es totalmente libre.

Podemos entonces definir el sistema L^+ del cálculo proposicional positivo en términos semánticos:

Definición 5. *El sistema L^+ del cálculo proposicional positivo es el conjunto de las fórmulas satisfechas por todas las funciones h definidas sobre la matriz $\mathfrak{M} =< A, B, f >$, donde $A = \{0\}$, $B = \{1\}$ y la función f está definida por las fórmulas $f(0, 0) = f(0, 1) = f(1, 1) = 1$ y $f(1, 0) = 0$.*

El *teorema de completitud* para la forma axiomática del sistema L^+ demuestra (vease por ejemplo [11]) que de hecho el sistema L^+ en la Definición 5 coincide con todas las consecuencias de los axiomas **Ax1**, **Ax2** y **Ax3** (dados arriba) por las reglas (SUB) y (MP).

Hay muchas otras axiomáticas para L^+, y con menos axiomas: en [17] se presentam cinco distintas axiomáticas con dos axiomas (tomandose (MP) y (SUB)como reglas), como por ejemplo:

1 $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\delta \to (\alpha \to \gamma)))$.

2 $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$.

Hay también sistemas con un único axioma, como por ejemplo el siguiente, propuesto por Łukasiewicz en [12]:

$((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to ((\gamma \to \alpha) \to (\delta \to \alpha))$.

El sistema L^+ representa mucho más que una simple curiosidad: históricamente, H. B. Curry y R. Feys en [9] notaron que algunos axiomas de L^+ corresponden a los combinadores básicos K y S de la teoría de tipos, en el sentido de que, por ejemplo, la fórmula $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ corresponde al conjunto de funciones $\alpha \times \beta \Rightarrow \gamma$, interpretándose α, β y γ como conjuntos.

La equivalencia formal entre ambos conceptos expresa una propiedad fundamental en computación, conocida como *isomorfismo de Curry-Howard* o como la analogía *proposiciones como tipos*, y es ampliamente utilizada en las investigaciones metamatemáticas de la matemática constructiva.

3 La trivialidad positiva como fundamento para pruebas

El concepto central de la propuesta consiste en explotar la idea de trivialidad deductiva, en el sentido de obtener, a partir de una fórmula, una nueva fórmula cualquiera como en el caso descrito por Curry, donde la trivialidad no depende de un conectivo diferente de la implicación, sino de una situación puramente implicativa. Resaltamos, sin embargo, que no tenemos otras condiciones presentes en el argumento de Curry (por ejemplo, L^+ no es interpretada como una "lógica de combinadores", sino simplemente un fragmento del cálculo proposicional clásico), sino que hemos intentado captar lo más fielmente posible la generación de un caos implicativo como señal de la improbabilidad de un argumento, usando de esta forma una condición paradójica o problemática de manera constructiva, es decir, como criterio de parada o de finalización de nuestro sistema. A continuación, presentamos el lenguaje y las reglas para un sistema con esas características.

3.1 Lenguaje y definiciones

Iniciamos esta sección discutiendo algunos problemas preliminares referentes a la aplicabilidad o adecuación de los métodos de [6] para demostrar la completitud de un sistema de tableaux para L^+. Para tal fin necesitamos aclarar un punto fundamental: cualquier propuesta de tableaux que pretenda ser completa según los criterios mencionados debe ser interpretada por una semántica diádica. En [6] encontramos la definición de tal tipo de semánticas, en el marco de las semánticas de Gentzen y por esa razón, reproducimos y comentamos las definiciones relevantes de tal trabajo.

Definición 6. *Una semántica de Gentzen para una lógica L es un conjunto adecuado (o sea, correcto y completo) de valoraciones bi-valentes* $b : \mathbb{N} \longrightarrow \{V,\ F\}$ *dado por cláusulas condicionales* $(\Phi \to \Psi)$ *donde* Φ *y* Ψ *son (meta)fórmulas de la forma* $\top$ *y* $\bot$, *o*

$$b(\varphi_1^1) = w_1^1, \ldots, b(\varphi_1^{n1}) = w_1^{n1} \mid \ldots \mid b(\varphi_m^1) = w_m^1, \ldots, b(\varphi_m^{n_m}) = w_m^{n_m} \qquad (G)$$

donde $w_i^j \in \{V,\ F\}$, *cada* φ_i^j *es una fórmula de L, las comas ”,” representan conjunciones y los trazos verticales ”|” representan disyunciones.*

Definición 7. *Decimos que una semántica de Gentzen B para una lógica L constituye una semántica diádica para L si la relación de consecuencia* $\vDash_B$ *(dada por las valoraciones en B) es recursiva.*

Observamos que una semántica diádica debe incluir $\top$ y $\bot$ como constantes lógicas (representando, respectivamente, la verdad y la falsedad). Sin embargo, en la semántica de L^+ no tenemos ninguno de esos símbolos definidos, entonces nuestras valoraciones (denotadas por ν) no contienen esos símbolos. Por otra parte, una semántica es considerada como diádica si la relación de consecuencia que ella define es recursiva (lo que sucede, de hecho, con L^+, pues la definición de h es recursiva). Vamos, entonces, a proponer una demostración de completitud para *un fragmento* de una semántica diádica que es suficientemente expresivo para ese fin. Introducimos las definiciones necesarias para construir el sistema de tableaux puramente positivos F^+.

Definición 8. *Sea* $P = \{p_n \mid n \in \omega\}$ *un conjunto infinito enumerable de variables proposicionales, y* $\Sigma = \{C_n \mid n \in \omega\}$ *una asignatura (esto es, un conjunto enumerable de conjuntos de símbolos que denotan conectivos n-arios). El conjunto de esquemas de fórmulas* $For(\Sigma)$ *es el álgebra libremente generada por* P *sobre* Σ.

Definición 9. *Dados* P *y* Σ *como antes, una substitución por esquemas es una función* $\rho : P \longrightarrow For(\Sigma)$. *La substitución por esquemas* ρ *puede ser extendida de la manera usual a todas las fórmulas en* $For(\Sigma)$*; escribimos* $\phi\rho$ *en vez de* $\varrho(\phi)$. *Si* $\Phi \subseteq For(\Sigma)$, *entonces* $\Phi\rho$ *denotará* $\{\phi\rho \mid \phi \in \Phi\}$.

Consideramos conocidas las nociones de árboles de fórmulas, ramas, etc.

Definición 10. *Sea* B *una rama de un árbol* F *de fórmulas. Decimos que* B *es una rama cerrada si existe una fórmula* α *tal que* $\{(\alpha \to c) \to c, \alpha \to c\} \subset B$ *donde* c *es una letra proposicional que no ocurre en* B. *Caso contrario, decimos que* B *es una rama abierta.*

Definición 11. *Una regla de tableau es un par* $R = \langle \mathsf{Prem}(R), \mathsf{Con}(R) \rangle$ *tal que* $\mathsf{Prem}(R)$ *es un conjunto finito de* $For(\Sigma)$ *y* $\mathsf{Con}(R)$ *es un subconjunto finito no vacío de subconjuntos finitos no vacíos de* $For(\Sigma,\ \Xi)$*. Un sistema de tableaux es un conjunto finito no vacío* T *de reglas de tableau.*

Definición 12. *Sea* F *un árbol de fórmulas. Decimos que* F *es cerrado si todo ramo* B *de* F *es cerrado. Caso contrario, decimos que* F *es abierto.*

Definición 13. *Sea* T *un sistema de tableaux, y* F *y* F' *árboles de fórmulas. Decimos que* F' *es una* T*-extensión de* F *si* F' *es obtenida de* F *por una extensión de una rama abierta* B *de* F *por la aplicación de una regla de tableau de* T *usando alguna substitución* ρ*. Es decir,* F *es obtenido al substituirse una rama abierta* B *de* T *por la rama*

$$B;\ (\phi_1\rho);\ldots;(\phi_r\rho)$$

por alguna substitución ρ *y alguna regla* $\langle \Upsilon, \{\Upsilon_1, \ldots, \Upsilon_k\}\rangle$ *de* T *tal que* $\Upsilon\rho \subseteq B$ *y* $\Upsilon_i = \{\phi_1, ;\ldots, ;\phi_r\}$ *para algún* i *con* $1 \leq i \leq k$*.*

Definición 14. *Sea* T *un sistema de tableaux. Un* T*-tableau es una secuencia* $F = \{F_n\}_{n\in\omega}$ *de árboles cuyos nudos son fórmulas, tal que:*

1. F_0 *tiene sólo un ramo;*

2. F_{n+1} *es una* T*-extensión de* F_n*, para cada* $n \geq 0$*.*

Si Υ *es el conjunto de fórmulas de* F_0*, entonces decimos que* F *es un* T*-tableau para* Υ*.*

Definición 15. *Sea* $F = \{F_n\}_{n\in\omega}$ *un* T*-tableau. Decimos que* F *está concluido en uno de los siguientes casos:*

1. F *es una secuencia finita tal que cada rama del último árbol de* F *cerró; o*

2. *para cada* $n \geq 0$*, para cada rama abierta* B *de* F_n*, para cada regla* $\langle \Upsilon, \{\Upsilon_1, \ldots, \Upsilon_k\}\rangle$ *de* T *y cada substitución por esquemas* ρ *: si* $\Upsilon\rho \subseteq B$*, entonces existe una rama* B' *en* F_m *(para algún* $m > n$*) que contiene* B *y* $\Upsilon_i\rho$ *para algún* i *con* $1 \leq i \leq k$*.*

3.2 Reglas

Con las definiciones de la sección anterior y teniendo en cuenta que L^+ posee una valoración diádica, podemos definir un sistema de tableaux para L^+ a través de las siguientes reglas:

$$\frac{(\beta \to \delta) \to c}{(\beta \to c) \to c,\ (\delta \to c)}(r1) \qquad \frac{((\beta \to \delta) \to c) \to c}{\beta \to c \mid (\delta \to c) \to c}(r2)$$

$$\frac{}{(\beta \to c) \to c \mid \beta \to c}(bi) \qquad \frac{\beta,\ \beta \to \delta}{\delta}(mp).$$

3.3 Ejemplos

A continuación demostramos dos fórmulas de L^+ particularmente interesantes ((identidad) y (absorción)) y La Ley de Peirce (que es nuestro axioma **Ax3**) a través del método de tableaux recién definidos. Por tratarse de un método adecuado a la inferencia visual, es conveniente introducir un esquema de tableau para cada ejemplo, señalando la regla utilizada en cada nudo y marcando las ramas cerradas con *. Siempre comenzaremos suponiendo que aquello que queremos demostrar lleva a la trivialidad deductiva; si, como resultado, obtenemos de hecho una trivialidad implicativa (es decir, todos los ramos de nuestro tableau están cerrados, situación que describiremos usando la letra c que representa una variable proposicional independiente de y ajena a la fórmula original) entonces concluimos que aquello que queremos demostrar no puede lleva a la trivialidad deductiva, y por lo tanto es demostrable.

3.3.1. **Ejemplo 1**

$$\beta \to \beta \ \ \text{(identidad)}$$

$$(\beta \to \beta) \to c$$

$$\Big| \, {\scriptstyle (r1)}$$

$$(\beta \to c) \to c,\ \beta \to c$$

$$\Big| \, {\scriptstyle (mp)}$$

$$c$$

$$*$$

Por lo tanto, $\beta \to \beta$ es una fórmula válida.

3.3.2. **Ejemplo 2**

$$(\beta \to ((\beta \to \delta)) \to (\beta \to \delta) \qquad (absorcion)$$

$$[(\beta \to (\beta \to \delta)) \to (\beta \to \delta)] \to c$$

$(r1)$

$$((\beta \to (\beta \to \delta)) \to c) \to c\ ,$$
$$(\beta \to \delta) \to c$$

$(r2)$ $(r2)$

$$\beta \to c\ ,$$
$$(\beta \to \delta) \to c$$

$(r1)$

$$\beta \to c\ ,$$
$$(\beta \to c) \to c\ ,$$
$$\delta \to c$$

(mp)

$$c$$
$$*$$

$$((\beta \to \delta) \to c) \to c\ ,$$
$$(\beta \to \delta) \to c$$

(mp)

$$c$$
$$*$$

En consecuencia, $(\beta \to ((\beta \to \delta)) \to (\beta \to \delta)$ es una fórmula válida.

3.3.3. **Ejemplo 3**

$$((\beta \to \delta) \to \beta) \to \beta \quad \text{(Ley de Peirce)}$$

$$[((\beta \to \delta) \to \beta) \to \beta] \to c$$

$(r1)$

$$(((\beta \to \delta) \to \beta) \to c) \to c,$$
$$\beta \to c$$

$(r2)$ $(r2)$

$$(\beta \to \delta) \to c,$$
$$\beta \to c$$

$(r1)$

$$(\beta \to c) \to c,$$
$$\delta \to c,$$
$$\beta \to c$$

(mp)

$$c$$
$$*$$

$$(\beta \to c) \to c,$$
$$\beta \to c$$

(mp)

$$c$$
$$*$$

Verificamos que la Ley de Peirce es una fórmula válida.

Vale la pena recordar que en las reglas la coma denota una conjunción y el trazo vertical |, una disyunción, diferencia que se reflejará en un nudo que genera solamente una rama y uno que se bifurca, respectivamente.

4 Completitud del sistema de tableaux positivos

En esta sección demostramos que nuestro sistema de tableaux es correcto y completo con respecto a una semántica diádica. A lo largo de ella usaremos ampliamente las ideas de Leon Henkin en [11] para la demostración de completitud de la lógica positiva clásica, en el sentido de interiorizar el efecto semántico de una variable proposicional o fórmula en términos de una "configuración implicativa", de manera que podamos representar la imposibilidad sin usar la negación. Para preservar la intuición, podemos pensar que usamos $(\beta \to c) \to c$ para representar la afirmación de una fórmula, y $\beta \to c$ para representar su negación. Para una discusión detallada de éste y otros puntos relacionados ver [1] Capítulo 1, sección 1.2. Necesitamos ahora de la siguiente proposición, necesaria para obtener el teorema de completitud para cualquier sistema de tableaux construido a partir de una semántica diádica (cf. [6]).

Proposición 16. *Sea Γ un conjunto no vacío de fórmulas y T un sistema de tableaux. Entonces existe un tableau concluido abierto para Γ, o existe un T-tableau cerrado para Γ.*

Demostración. Análoga a la proposición correspondiente en [6]. □

Una vez verificada la proposición, continuamos con las demostraciones y definiciones necesarias para la obtención del mencionado Teorema. En efecto:

Definición 17. *Sea $\{p_1 \ldots p_n\}$ el conjunto de las variables proposicionales de α y c una variable proposicional tal que $c \notin \{p_1 \ldots p_n\}$. Definimos $SFor$ de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} SFor(\alpha) = &\{p_i \to c \mid VAR(\alpha) \subseteq \{p_1 \ldots p_n\}\} \cup \\ &\{(p_i \to c) \to c \mid VAR(\alpha) \subseteq \{p_1 \ldots p_n\}\}. \end{aligned}$$

Definición 18. *Sea $v \in Val$, $\Gamma = \{p_1 \ldots p_n\}$ el conjunto de las variables proposicionales de α y c una variable proposicional tal que $c \notin VAR(\alpha)$, definimos $\overline{v}(p_i)$ tal que*

$$\overline{v}(p_i) = \begin{cases} v(p_i) & si\ p_i \neq c \\ 0 & si\ p_i = c \end{cases}.$$

Luego: si $p_i \in VAR(\alpha)$, entonces $\overline{v}(p_i) = v(p_i)$.

Definición 19. *Sea $v \in VAL(L^+)$ y c una variable proposicional tal que $c \notin VAR(\alpha)$. La extensión de v a $SFor$ es la función $\overline{v} : SFor \longrightarrow 2$ definida de la siguiente manera para cada $\alpha \in ForL^+$:*

$$\overline{v}((\alpha \to c) \to c) = \begin{cases} 1 & si\ v(\alpha) = 1 \\ v(c) & si\ v(\alpha) = 0 \end{cases},$$

$$\overline{v}(\alpha \to c) = \begin{cases} 1 & si\ v(\alpha) = 0 \\ v(c) & si\ v(\alpha) = 1 \end{cases}.$$

Entonces $\overline{v}(\alpha) = v(\alpha)$. Definimos, además, $\overline{\Gamma} = \{(\alpha \to c) \to c \mid \alpha \in \Gamma\}$.

A continuación, verificamos que (r1), (r2), (bi) y (mp) están bien definidas con respecto a las valoraciones (o sea, que el valor atribuido a una fórmula o conjunto de fórmulas depende solamente de las variables examinadas al aplicar tales reglas). En otras palabras, vamos a verificar la siguiente aserción:

Proposición 20. *Sea $\Gamma = \{p_1 \dots p_n\}$ un conjunto de variables proposicionales. Sea v una valoración de esas variables. Entonces, el valor de Γ según v depende de $v(p_i)$, $1 \leq i \leq n$.*

Demostración. Para comenzar, tomemos (r1): Supongamos $v((p \to q) \to c) = 1$; esto es verdad si $v(p \to q) = 0$ o $v(c) = 1$, pero lo segundo no puede suceder, por construcción, y en consecuencia $v((p \to q) \to c)$ es verdadera si $v(p) = 1,\ v(q) = 0$.

Tomemos ahora (r2): Supongamos $v(((p \to q) \to c) \to c) = 1$, pero esto es verdad si $v(c) = 1$ (de nuevo excluido por construcción) o si $v(c) = 0$ y $v(p \to q) = 1$, y, en consecuencia, o $v(p) = 0$ y $v(p \to c) = 1$ o $v(q) = 1$ y $v((q \to c) \to c) = 1$. Por lo tanto, o $v(p \to c) = 1$ o $v((q \to c) \to c) = 1$.

Para (bi), basta observar la restricción: esta regla puede ser utilizada con variables que están en la rama (y c no está en esa rama, por construcción).

Para (mp), basta tener en la propia definición de esta regla: el valor de una aplicación de (mp) depende del valor de las variables o fórmulas involucradas. $\square$

Lema 21. *Sea Γ un conjunto finito de variables proposicionales tal que $c \notin Var(\Gamma)$. Entonces $v(\alpha) = \overline{v}((\alpha \to c) \to c)$ para toda $\alpha \in \Gamma$ (siendo $\overline{v}$ la extensión de v tal que $\overline{v}(c) = 0$).*

Demostración. Suponga $v(\alpha) = 1$; luego $\overline{v}(\alpha \to c) = 0$, por lo tanto $\overline{v}((\alpha \to c) \to c) = 1 = v(\alpha)$.

Si $v(\alpha) = 0$, entonces $\overline{v}(\alpha \to c) = 1$, por lo tanto $\overline{v}((\alpha \to c) \to c) = 0 = v(\alpha)$. $\square$

Proposición 22. *Dada una regla R con:*

$$R = \cfrac{\alpha_1 \ldots \alpha_n}{\begin{array}{ccc} \beta_1^1 & \ldots & \beta_{1^n}^n \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \beta_{k_1}^1 & \ldots & \beta_{k^n}^n \end{array}}.$$

Si $\overline{v}(\alpha_1) = \ldots = \overline{v}(\alpha_n) = 1$, *entonces existe* j *con* $1 \leq j \leq n$ *tal que* $\overline{v}({\beta_1}^j) = \ldots = \overline{v}(\beta {j_k}^j) = 1$.

Demostración. Suponga, por absurdo, que existe una regla R y $v \in Val(L^+)$ tal que $\overline{v}(\alpha_1) = \ldots = \overline{v}(\alpha_n) = 1$, pero para todo j definido como antes tenemos $\overline{v}({\beta_1}^j) = \ldots = \overline{v}(\beta {k_j}^j) = 0$.

Caso. $n = 0$.

Entonces, la única regla a considerar es (bi). Por hipótesis $\overline{v}(\alpha \to c) = 0$ y $\overline{v}((\alpha \to c) \to c) = 0$. Entonces, $\overline{v}(\alpha) = 1$ y $\overline{v}(c) = 0$ y, por lo tanto $\overline{v}((\alpha \to c) \to c) = 1$, absurdo.

Caso. $n \neq 0$.

Debemos considerar (r1), (r2) y (mp) y demostrar la Proposición por inducción en la complejidad de α.[6] Si R=(r1), entonces tenemos por hipótesis $\overline{v}((\beta \to \delta) \to c) = 1$ y $\overline{v}((\beta \to c) \to c) = 0$ o $\overline{v}(\delta \to c) = 0$. (i) Si $\overline{v}((\beta \to c) \to c) = 0$, ya que, por la Definición 18 $\overline{v}(c) = 0$, tenemos $\overline{v}(\beta) = 0$. Pero, en consecuencia $\overline{v}((\beta \to \delta) \to c) = 0$, absurdo.

(ii) Si $\overline{v}(\delta \to c) = 0$, por un raciocinio análogo al de (i), obtenemos $\overline{v}(\delta) = 1$. Luego, $\overline{v}((\beta \to \delta) \to c) = 0$, absurdo.

Si R=(r2), entonces tenemos por hipótesis $\overline{v}(((\beta \to \delta) \to c) \to c) = 1$, pero $\overline{v}(\beta \to c) = 0$ y $\overline{v}((\delta \to c) \to c) = 0$. Entonces, por la Definición 18 tenemos $\overline{v}(c) = 0$, y, consecuentemente, $\overline{v}(\beta) = 1$ y $\overline{v}(\delta) = 0$, pero, entonces, $\overline{v}(((\beta \to \delta) \to c) \to c) = 0$, absurdo.

Si R=(mp) entonces tenemos por hipótesis $\overline{v}(\beta) = 1$, $\overline{v}(\beta \to \delta) = 1$, y $\overline{v}(\delta) = 0$. Pero, si $\overline{v}(\beta) = 1$ y $\overline{v}(\beta \to \delta) = 1$, entonces $\overline{v}(\delta) = 1$, absurdo, y con este caso concluye la demostración de la Proposición. $\square$

Definición 23. *Sea* v *una valoración y* F *un árbol de fórmulas decimos que* v *satisface* F*, denotado por* $v \models F$ *si existe una rama* B *de* F *tal que* $v \models B$.

Corolario 24. *Dado un árbol* F *y una valoración* v*, si* F' *extiende* F *por la aplicación de una regla y* $v \models F$*, entonces* $v \models F'$.

Demostración. Suponga, por absurdo, que existe un árbol F y una valoración v tal que F' extiende F por la aplicación de una regla y $v \models F$, pero $v \not\models F'$. Entonces, existe una regla R tal que $\overline{v}[Prem(R)\rho] \subseteq \{1\}$, pero $\overline{v}[\Upsilon\rho] = \{0\}$, para $\Upsilon \in Con(R)$, absurdo, por la Proposición 22. $\square$

[6] La noción de "complejidad de una fórmula" es la usual.

Teorema 25. *Teorema de validez para Tableaux: Sea* Γ *un conjunto de fórmulas. Si existe un tableau cerrado* $\overline{F}$ *para* Γ*, entonces* Γ *es insatisfactible.*

Demostración. Sea $\overline{\Gamma}$ definido antes con c una variable proposicional tal que $c \notin Var(\Gamma)$. Suponga que existe un tableau cerrado $\overline{F}$ para Γ y una valoración v tal que $v(\Gamma) = \{1\}$. Entonces, por el Lema 21 tenemos $\overline{v}(\overline{\Gamma}) = \{1\}$. Pero $\overline{F} = \{F_n\}_{n\in\omega}$ es una secuencia de árboles comenzando por $F_0 = \overline{\Gamma}$ y $\overline{v}$ es una valoración tal que $\overline{v}(\overline{\Gamma}) = \{1\}$, es decir, $\overline{v} \models F_0$. Por el corolario 24 y, por inducción sobre n, $\overline{v} \models F_n$ para todo n, en particular $\overline{v} \models \overline{F}$, mas $\overline{F}$ es cerrado (por hipótesis), entonces $(p \to c) \to c$, $p \to c$ ocurren en cada rama y, en consecuencia (por (mp)) c ocurre en cada rama, absurdo, pues $\overline{v}(c) = 0$. □

Definición 26. *Sea* T *un sistema de tableaux, y sea* $\Gamma \subseteq SFor(p_1 \dots p_n)$*. Decimos que* Γ *es un conjunto saturado si:*

Sat1 es abierto, o sea: para cada fórmula

$$\alpha \in For(p_1 \dots p_n), \quad \{(\alpha \to c) \to c,\ \alpha \to c\} \nsubseteq \Gamma.$$

Sat2 Para toda regla R de T y para cada substitución por esquemas ρ: $\mathsf{Prem}(R)\rho \subseteq \Gamma$ implica $\Upsilon\rho \subseteq \Gamma$, para alguna $\Upsilon \in \mathsf{Con}(R)$.

Proposición 27. *Sea* Γ *un conjunto de* $SFor$ *de una rama abierta de un tableau concluido. Entonces* Γ *es saturado.*

Demostración. Directa, usando 26. □

Proposición 28. *Si* $\Gamma \subseteq SFor(p_1 \dots p_n)$*, entonces todo tableau construido a partir de* Γ *consiste en fórmulas de* $SFor(p_1 \dots p_n)$*.*

Demostración. Se aplican las definiciones de (mp), (bi), (r1) y (r2). □

Teorema 29. *Teorema de Existencia de Modelos para tableaux: Si* $\Delta \subseteq SFor(p_1 \dots p_n)$ *es saturado, entonces existe una valoración* v *tal que:*

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & si\ (\alpha \to c) \to c \in \Delta \\ 0 & si\ \alpha \to c \in \Delta \end{cases}.$$

Demostración. Definimos

$$v(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } (p_i \to c) \to c \in \Delta \\ 0 & \text{si } p_i \to c \in \Delta \end{cases}.$$

Observamos que el ítem 1 de la Definición 26 garantiza que v atribuye un valor de verdad determinado a cada fórmula atómica de Δ y el ítem 2 de la misma definición y la regla (bi) garantizan que v atribuye un valor de verdad determinado a cada fórmula de Δ de complejidad mayor. Verificamos, entonces que v está bien definida. Extendemos v a una valoración $v : For(p_1 \dots p_n) \longrightarrow 2$ (o sea $v(\beta \to \delta) = 1$ se $v(\beta) = 0$ o $v(\delta) = 1$.) Por inducción en la complejidad de α, demostraremos

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\alpha \to c) \to c \in \Delta \\ 0 & \text{si } \alpha \to c \in \Delta \end{cases}.$$

Caso. α es atómica, entonces vale por la definición de v.

Caso. Si $\alpha = \beta \to \delta$ vamos a demostrar $v(\alpha) = v(\beta) \to v(\delta)$.

Caso. $v(\alpha) = 1$.

Subcaso. $v(\beta) = 0$.

Por hipótesis de inducción $\beta \to c \in \Delta$. Suponga por absurdo $(\beta \to \delta) \to c \in \Delta$. Por (r1) tenemos $(\beta \to c) \to c \in \Delta$, absurdo, pues Δ es saturado.

Subcaso. $v(\delta) = 1$.

Por hipótesis de inducción $(\delta \to c) \to c \in \Delta$. Suponga por absurdo que $(\beta \to \delta) \to c \in \Delta$. Por (r1) tenemos $\delta \to c \in \Delta$, absurdo, pues Δ es saturado. Por lo tanto si $v(\alpha) = 1$, entonces $(\alpha \to c) \to c \in \Delta$.

Caso. $v(\alpha) = 0$.

Luego $v(\beta) = 1, v(\delta) = 0$. Por hipótesis de inducción $(\beta \to c) \to c$, $\delta \to c \in \Delta$. Suponga, por absurdo, $((\beta \to \delta) \to c) \to c$, luego, por (r2) tenemos $\beta \to c \in \Delta$ o $(\delta \to c) \to c \in \Delta$.

Subcaso. Sea $\beta \to c \in \Delta$.

Como, por hipótesis de inducción, $(\beta \to c) \to c \in \Delta$, entonces Δ no es saturado (absurdo).

Subcaso. Sea $(\delta \to c) \to c \in \Delta$.

Como, por hipótesis de inducción, $\delta \to c \in \Delta$, entonces Δ no es saturado (absurdo). Por lo tanto, si $v(\alpha) = 0$, entonces $\alpha \to c \in \Delta$. □

Teorema 30. *Completitud para Tableaux: Sea* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(p_1 \dots p_n)$ *un conjunto finito de fórmulas tal que* $\Gamma \models \alpha$. *Entonces existe un tableau cerrado para* $\overline{\Gamma} \cup \{\alpha \to c\}$, *donde* c *es una variable proposicional que no ocurre en* $\{p_1 \dots p_n\}$.

Demostración. Suponga que todo tableau concluido para $\overline{\Gamma} \cup \{\alpha \to c\}$ es abierto. Sea F un tableau concluido abierto para $\overline{\Gamma} \cup \{\alpha \to c\}$, sea Δ el conjunto de fórmulas de un ramo abierto de F. Luego, $\overline{\Gamma} \cup \{\alpha \to c\} \subseteq \Delta$ y

$\Delta \subseteq SFor(p_1 \dots p_n)$ es saturado por la Proposición 27. Por el Teorema 29, existe una valoración $v : For(p_1 \dots p_n) \longrightarrow 2$ tal que

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\alpha \to c) \to c \in \Delta \\ 0 & \text{si } \alpha \to c \in \Delta \end{cases} .$$

Dado que $\overline{\Gamma} \subseteq \Delta$, entonces $v(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Ya que $\alpha \to c \in \Delta$, entonces $v(\alpha) = 0$ y, por lo tanto, $\Gamma \nvDash \alpha$ absurdo. Entonces si $\Gamma \models \alpha$, existe un tableau cerrado para $\overline{\Gamma} \cup \{\alpha \to c\}$. $\square$

5 Conclusiones

El concepto de trivialidad deductiva es el fundamento del sistema que hemos descrito, es decir, el hecho de que una fórmula produzca otra cualquiera (denotada por la letra proposicional c), lo que nos permite aclarar un aspecto, en general pasado por alto: el concepto de trivialidad deductiva no siempre está vinculado con el de negación. En particular, podemos obtener trivialidades (como la de la objeción de Curry) sin definir siquiera el símbolo de negación.

Para dar cuenta, de manera abstracta, de un arsenal lógico que pudiera tratar la trivialidad positiva de forma análoga a la que el programa de la lógica paraconsistente se encarga de la trivialidad vinculada a la negación, tendríamos que controlar no necesariamente la aparición de una fórmula y su negación, sino el hecho de que una fórmula implique cualquier otra, lo que nos llevaría a introducir el concepto de *paratrivialidad*, es decir, la posibilidad de que existan sistemas que sólo son deductivamente trivializables bajo alguna condición adicional en la implicación. En consecuencia, la paratrivialidad sería un concepto más general que la paraconsistencia pues, primero, ni siquiera depende de que tengamos a disposición un símbolo lingüístico para la negación (condición indispensable para las lógicas paraconsistentes), y segundo, teniendo a disposición un símbolo para la partícula minimal (*bottom*) se puede trabajar la paraconsistencia como caso particular de la paratrivialidad. Un proyecto de trabajo muy natural (actualmente en desarrollo en el GLTA por el primer autor) sería, entonces, re-escribir el tratamiento dado a la consistencia en [4] en términos de un nuevo operador de trivialización. En ese sentido, se podría pensar en adicionarle a la lógica (positiva o no) nuevas reglas del tipo [7]:

$$\circledast\alpha, \alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta$$

o axiomas como:

$$\circledast\alpha \to (\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to \beta$$

de manera que

$$\alpha, \alpha \to \beta \nvdash \beta$$

[7] Donde $\circledast\alpha$ denotaría el operador de *plenitud implicativa*.

pero

$$\circledast\alpha, \alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta.$$

De esta forma se podría reproducir todo el desarrollo para las Lógicas de la Inconsistencia Formal como ha sido expuesto en [5], lo que abre toda una nueva línea de investigación como, por ejemplo, determinar si dichas lógicas podrían ser fundamento para las cuestiones referentes a la implicación suscitadas por las llamadas implicaciones relevantes, y extender el método de las semánticas de traducciones posibles (cf. [3], vease también [5], sección 3.4), para tales lógicas paratriviales.

Agradecimientos

Este trabajo corresponde a una reelaboración del Capítulo 3 de [1], Disertación de Maestría en Filosofía (Lógica) dirigida por el primer autor, sustentada y aprobada por el segundo con grado de 'distinção e louvor' en agosto de 2004. Los autores agradecen a Marcelo Esteban Coniglio (GLTA-CLE e IFCH) por su relevante colaboración durante la elaboración de este trabajo.

Referencias

[1] T. Barrero, *Lógica Positiva: plenitud, potencialidad y problemas (del pensar sin negación)*(en portugués), Disertación de Maestría, Centro de Lógica, Epistemología e Historia de la Ciencia (CLE)- Instituto de Filosofía y Ciencias Humanas (IFCH), Universidad Estatal de Campinas (UNICAMP), (2004).

[2] E. W.Beth, *The Foundation of Mathematics*, North-Holland Publishing, 1959.

[3] W. A. Carnielli, Possible-translations semantics for paraconsistent logics, en *Frontiers of Paraconsistent Logic: Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency*, editores D. Batens, C. Mortensen, G. Priest y J. P van Bendegem,, Baldock: Research Studies Press, King's College Publications, Logic and Computation Series, (2000), 149-163.

[4] W. A. Carnielli y J. Marcos, A Taxonomy of C-Sistems (2001), en W. A. Carnielli, M. E. Coniglio y I. M. Loffredo D'Ottaviano, *Paraconsistency: the Logical Way to the Inconsistent. Proceedings of the II World Congress on Paraconsistency held in São Paulo*, Marcel Dekker, (2002) 1-94. Versión preliminar disponible en *CLE e-Prints* vol. 1(5), 2001, `http://www.cle.unicamp.br/e-prints/abstract_5.htm`.

[5] W. A. Carnielli, M. E. Coniglio y J. Marcos. Logics of Formal inconsistency, en *Handbook of Philosophical Logic*,(editores D. Gabbay y F. Guenthner) volume 14, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, en

imprenta. Versión preliminar disponible en *CLE e-Prints* vol. 5(1), 2005, `http://www.cle.unicamp.br/e-prints/vol_5,n_1,2005.html`.

[6] C. Caleiro, W. A. Carnielli, M. E. Coniglio y J. Marcos, How many logic values are there? Dyadic semantics for many-valued logics. Manuscrito.

[7] S.A. Cook y R. Reckhow, On the length of proofs in the propositional calculus. en *Proceedings of the 6th Annual Symposium on the Theory of Computing*, (1974),135-148.

[8] H. B. Curry, The inconsistency of certain formal logics,*The Journal of Symbolic Logic*. (7) Nro. 3 (1942) 115-117.

[9] H. B. Curry y R. Feys. *Combinatory Logic*, volume I. North-Holland, 1958.

[10] N. C. A. da Costa, Observações sobre o conceito de existência em matemática, *Anuário da Sociedade Paranaense de Matemática* 2 Nro. 2(1959), 16-19.

[11] L. Henkin, Fragments of propositional calculus, *The Journal of Symbolic Logic*. (14) Nro. 1 (1949), 42-48.

[12] J. Łukasiewicz, W sprawie aksjomatyki implikacyjnego rachunku zdań, *Annales de la Société Polonaise de Mathématique* 22 1950, 87-92, (traducido em *Jan Łukasiewicz Selected Works*) editado por L. Borkowski, North Holland Publishing Company y PWN-Polish Scientific Publishers, (1970), Amsterdam-London, bajo el título “On the system of axioms of the implicational propositional calculus", pp 306-310.

[13] F.Massacci, Cook and Reckhow are wrong: Subexponential tableaux proofs for their family of formulae, en *European Conference on Artificial Intelligence* (1998), 408-409, disponible en `citeseer.ist.psu.edu/massacci98cook.html`.

[14] J.A. Robinson, A machine-oriented logic based on the resolution principle, *Journal of the Association for Computing Machinery* 12, (1965), 23-41.

[15] B. Russell, The theory of implication, *American Journal of Mathematics* 28 (1906), 159-202.

[16] W. Sanz, Relating Negation and Triviality, en W. A. Carnielli, M. E. Coniglio y I. M. Loffredo D'Ottaviano, *An event on Brazilian Logic. Proceedings of the XIII Brazilian Logic Conference*, número especial del *Logic Journal of the IGPL*, Oxford University Press, en imprenta.

[17] B. Sobociński, Note about Łukasiewicz's theorem concerning the system of axioms of the implicational propositional calculus, Notre Dame Journal of Formal Logic 19 (1978), Nro. 3, 450-457.

[18] R. M. Smullyan, *First-Order Logic*, Springer-Verlag, 1968.

[19] A. Tarski, *Alfred Tarski. Logic, Semantics, Metamathematics: papers from 1923 to 1938, translated by J.H. Woodger*, Second edition, Oxford University Press, Oxford, 1963.

[20] A. Tarski y J. Łukasiewicz, Untersuchungen über den Aussagenkalkül, *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie* (23) cl iii (1930) 30-50, traducido en J.H. Woodger, *Alfred Tarski. Logic, Semantics, Metamathematics: papers from 1923 to 1938*, Oxford 1963,2a. edición, 38-59, bajo el título "Investigations into the sentential calculus".

Dirección de los autores: Tomás Barrero Candidato a Doctor en Filosofía, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá tbarrero@unal.edu.co — Walter Carnielli GLTA- CLE e IFCH, Universidad Estatal de Campinas carniell@cle.unicamp.br