Filosofia

«Esiste negli esseri un principio rispetto al quale è necessario che si sia sempre nel vero: è questo il principio che afferma che non è possibile che la medesima cosa in un unico e medesimo tempo sia e non sia»: così, nella *Metafisica* di Aristotele, viene presentato il Principio di Non-Contraddizione, destinato a diventare la legge più autorevole nella storia dell'intero pensiero occidentale. Oggi, tuttavia, diversi filosofi sostengono che questa legge non ha validità universale, che vi sono situazioni in cui una stessa cosa può insieme essere e non essere, e l'assurdo si realizza nel mondo.
In questo volume, Francesco Berto esamina il vasto dibattito sulla contraddizione in corso nella comunità filosofica internazionale; introduce le più moderne strategie logico-filosofiche per descrivere mondi abitati da contraddizioni; e mostra come proprio nell'antica parola di Aristotele il Principio trovi risposte ai suoi critici attuali. Che ci si schieri dall'una o dall'altra parte, si esce dalla lettura di queste pagine con la convinzione che il regno dell'assurdo non sia un buco nero del pensiero, ma un affascinante terreno d'esplorazione filosofica.

Francesco Berto è *Chaire d'Excellence Fellow* alla Sorbona, insegna Ontologia all'École Normale Supérieure di Parigi e Logica alle università di Venezia e Milano-San Raffaele. Ha una *scholarship* alla University of Notre Dame (Indiana-USA) ed è *visiting professor* all'Institut Wiener Kreis dell'Università di Vienna. Ha pubblicato numerosi saggi sulle più prestigiose riviste internazionali e i volumi *La dialettica della struttura originaria* (Padova 2003), *Che cos'è la dialettica hegeliana?* (Padova 2005), *Logica da zero a Gödel* (Roma 2007[4]), *Tutti pazzi per Gödel* (Roma 2008[3]), *How to Sell a Contradiction* (London 2007), *There's Something About Gödel* (Oxford 2009). Cura le entries "Dialetheism" e "Impossible Worlds" della *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
Con la prima edizione di *Teorie dell'assurdo* ha vinto il Premio Castiglioncello giovani 2007.

€ 26,40

ISBN 978-88-430-4978-3

Grafica: Jumblies (Giovanni Lussu)

Francesco Berto
Teorie dell'assurdo

Teorie dell'assurdo

Francesco Berto

I rivali del Principio di Non-Contraddizione

Prefazione di Graham Priest

Carocci

BIBLIOTECA DI TESTI E STUDI / 351

FILOSOFIA

Il testo è disponibile sul sito Internet di Carocci editore

I lettori che desiderano
informazioni sui volumi
pubblicati dalla casa editrice
possono rivolgersi direttamente a:

Carocci editore

via Sardegna 50,
00187 Roma,
telefono 06 / 42 81 84 17,
fax 06 / 42 74 79 31

Visitateci sul nostro sito Internet:
http://www.carocci.it

Francesco Berto

Teorie dell'assurdo

I rivali del Principio di Non-Contraddizione

Prefazione di Graham Priest

Carocci editore

Il presente volume viene realizzato con un contributo a carico dei fondi MIUR ex 40%
del Dipartimento di Filosofia e Teoria delle Scienze dell'Università Ca' Foscari di Venezia

1ª edizione, marzo 2006

Realizzazione editoriale: studioagostini, Roma

Finito di stampare nel marzo 2006
dagli Stabilimenti Tipografici Carlo Colombo S.p.A.
via Roberto Malatesta, 296 – 00176 Roma

ISBN 88-430-3748-X

Indice

Ringraziamenti

Ho accumulato grandi debiti per un piccolo libro. Luca Illetterati e Vero Tarca mi hanno aiutato più di chiunque altro a renderlo possibile, e a loro è dedicato.

Da Vero ho imparato quali problemi sono davvero importanti in filosofia, e perché quelli connessi a negazione e contraddizione rivestono fra essi un ruolo non sovrastimabile.

Durante il mio postdottorato presso il Dipartimento di Filosofia dell'Università di Padova, la collaborazione con Luca e con i teoreti padovani – Franco Chiereghin, Federico Perelda, Francesca Menegoni e Antonio Nunziante – mi ha fornito stimoli filosofici e un ambiente confortevole in cui completare il presente lavoro. Le lezioni sui limiti del pensiero e sulla dialettica hegeliana, tenute nel corso di Filosofia teoretica e nella Scuola di dottorato di Padova, mi hanno dato l'opportunità di ordinare le mie idee sulla contraddizione.

La mia passione per Wittgenstein, e il mio interesse per la filosofia analitica del linguaggio, sono dovuti alla bravura di Luigi Perissinotto e all'impagabile stile delle sue lezioni.

Ho sottoposto il libro a diversi lettori, ricavandone utili consigli. Anzitutto, ringrazio di cuore Achille Varzi, Diego Marconi e Massimiliano Carrara, che hanno visto l'intero dattiloscritto in varie versioni, per la gentile disponibilità. Gli incoraggiamenti di Achille hanno sostenuto la mia fiducia nel progetto, e il coinvolgimento diretto di Graham Priest è una sua brillante iniziativa. Il debito verso gli studi di Marconi sulla dialettica, sulle logiche paraconsistenti, sulle questioni di competenza lessicale, pervade poi i miei lavori.

La parte dedicata alle logiche della rilevanza sviluppa un articolo in uscita su "Epistemologia" con il titolo *Some Issues Concerning Identity and Contradiction in Philosophical Logic*; devo a Dario Palladino ed Evandro Agazzi i primi pareri favorevoli su quello scritto.

Neil Tennant ha discusso con me una versione in inglese dell'ultimo capitolo, regalandomi preziosi suggerimenti. Il trattamento della negazione ivi proposto riprende un articolo sulla negazione dialettica, in uscita sull'"European Journal of Philosophy" con il titolo *Hegel's Dialectics as a Semantic Theory*.

Si impara anche dai più giovani. Con la loro reticenza intuitiva ad accettare che tutto segua da una contraddizione gli studenti di Ca' Foscari, che da qualche anno sopportano le mie lezioni, hanno instillato in me la curiosità per le strategie che disinnescano l'*explosion*. Assistendo Silvia Gaio nella stesura della sua tesi di laurea sul dialeteismo ho potuto chiarirmi le idee intorno a molti punti essenziali. Parlare di paradossi, mentitori e gödelismi con il formidabile Matteo Plebani mi ha regalato un proficuo divertimento.

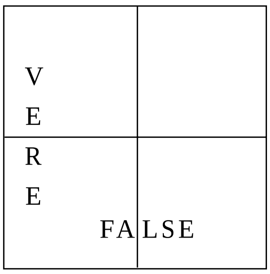
Grazie ai teoreti veneziani, e particolarmente ad Attilio Pisarri, Laura Candiotto, Stefano Sangiorgio, Chiara Fornasiero ed Elisabetta Favaretto, per le numerose discussioni filosofiche; a Marianna, che abita un luogo inespugnabile del mio cuore; e a Sara Zampieri, *Ote*, per avermi insegnato a diffidare dei filosofi che si prendono troppo sul serio.

Prefazione

di *Graham Priest*

Nel libro IV della *Metafisica*, Aristotele si assunse il compito di difendere due principi non sottoscritti, a suo dire, da alcuni dei filosofi che lo avevano preceduto. I principi erano destinati a diventare celebri, nella logica occidentale, con i nomi di Principio del Terzo Escluso e Principio di Non-Contraddizione. Il primo afferma che ogni proposizione è vera o falsa; il secondo, che nessuna proposizione è sia l'una che l'altra cosa.

Non è inevitabile che i due principi stiano o cadano insieme. Eppure, vi è un'ovvia dualità fra di essi; e ciò suggerisce, quantomeno *prima facie*, che considerazioni analoghe potrebbero applicarsi a entrambi. Data una coppia qualsiasi di stati di cose, vi sono in generale quattro possibilità: che sussista uno e non l'altro, o viceversa, o che sussistano entrambi, o nessuno dei due. Applicando ciò al vero e al falso, potremmo dunque attenderci che l'insieme delle proposizioni sia diviso in quattro:



Ma il Principio del Terzo Escluso dice che non vi è nulla nella regione in alto a destra; e il Principio di Non-Contraddizione dice che non vi è nulla in basso a sinistra (la loro dualità emerge nel modo più chiaro nella semantica per la logica dell'implicitazione di primo grado, in cui i casi *entrambi* e *nessuno dei due* sono perfettamente simmetrici).

Dato tutto questo, a partire da Aristotele la storia dei due principi nella filosofia occidentale è piuttosto strana. Pur avendo sottoscritto il Terzo Escluso, lo stesso Aristotele ipotizzò che potesse fallire. Com'è noto, a detta di alcuni interpreti egli avrebbe argomentato nel capitolo 9 del *De interpretatione* che, se vogliamo sfuggire al fatalismo, le proposizioni contingenti che vertono sul futuro, come "Domani ci sarà una battaglia navale", non devono essere vere né false.

Numerosi autori medioevali ripresero la questione, in connessione a varie tematiche, fra cui quella della prescienza divina. A pochi anni dall'avvio della rivoluzione logica dovuta a Frege e Russell, rifacendosi ad Aristotele Jan Lukasiewicz introdusse la prima logica moderna con *gaps* nei valori di verità; Heyting propose quindi la prima formalizzazione della logica intuizionistica, in cui il Terzo Escluso non è logicamente valido. E oggi – nella logica contemporanea – i *gaps* nei valori di verità si ritrovano ovunque: nelle proposte avanzate per risolvere i paradossi dell'autoriferimento, nel trattamento della vaghezza, dei fallimenti presupposizionali e così via.

Per contro, il Principio di Non-Contraddizione è stato considerato come pura ortodossia per quasi duemilacinquecento anni: come qualcosa di talmente ovvio che, dopo Aristotele, pochi hanno ritenuto di doverne produrre una difesa. Si è pensato, in effetti, che sottoscrivere una contraddizione costituisca il culmine dell'assurdità. Qualche illustre filosofo ha messo in discussione la prospettiva ortodossa: il nome per eccellenza è quello di Hegel. Ma si può ritenere che anch'egli sottoscrivesse il Principio a livello dinamico, in quanto le contraddizioni, che sono il motore del mutamento dialettico, si risolvono nel processo (se poi questa sia una descrizione accurata dei rapporti fra Hegel e il Principio, è un'altra questione).

Stando così le cose, sarebbe naturale chiedersi perché i due principi abbiano ricevuto trattamenti tanto diversi. Potremmo lasciare la discussione agli storici della filosofia; ma quel che ci interessa è che *oggi* il Principio di Non-Contraddizione è sotto attacco. Negli ultimi anni, vari filosofi hanno sostenuto che vi sono proposizioni, le quali abitano la regione in basso a sinistra nel nostro diagramma. E hanno anche coniato per esse un nuovo nome: *dialetheie*. Questa prospettiva è stata quindi chiamata *dialeteismo*. Non entrerò qui nei dettagli, perché ne troverete in abbondanza in questo libro. Naturalmente, dato il livello di sofisticazione raggiunto dalla logica moderna, non si potrebbe prendere sul serio una simile dottrina se non se ne fornisse una sistemazione logica attraverso un'adeguata teoria formale. In particolare, se si assume che le sole logiche accettabili siano quelle in cui le contraddizioni implicano tutto, il dialeteismo è insensato: manifestamente, non tutto è vero. Lo sviluppo di logiche in cui le contraddizioni non implicano qualsiasi cosa, logiche *paraconsistenti*, è stato dunque una precondizione necessaria per l'accettabilità del dialeteismo. Questo sviluppo ha avuto luogo nella seconda metà del Ventesimo secolo. Daccapo, non occorre che mi soffermi qui sulle sue tappe, perché se ne parla diffusamente in questo libro. Vi sono oggi molte logiche del genere, ma nella grande maggioranza di esse la rispettiva semantica ci chiede di considerare situazioni (o interpretazioni, come di solito le chiamano i logici) in cui possono darsi contraddizioni. Naturalmente, la logica di per sé non ci forza a supporre che situazioni del genere possano sussistere realmente, così da rendere vere le corrispondenti proposizioni contraddittorie. Le situazioni in questione potrebbero essere puramente ipotetiche, controfattuali, impossibili, o anche descrizioni del mondo contenute in database corrotti. I logici paraconsistenti, dunque, possono benissimo evitare di essere dialeteisti. E forse, la maggior parte di essi lo evita. Ciò non cambia il fatto che l'edificazione di logiche formali paraconsistenti ha fornito l'ambito in cui il dialeteismo ha potuto svilupparsi come una teoria seria.

Com'era da attendersi, sia le logiche paraconsistenti che il dialeteismo hanno incontrato un'accanita resistenza iniziale da parte di logici e filosofi ortodossi. Soprattutto durante i primi anni di sviluppo di queste idee, molti le hanno trovate così inammissibili da ritenere di ignorarle completamente. Fortunatamente, tali filosofi oggi sono in diminuzione, e gli ultimi anni hanno visto sorgere numerose interessanti discussioni sul tema in libri e riviste. Buona parte di queste discussioni – ancorché, certo, non tutte – ha però avuto luogo in pubblicazioni in lingua inglese. Poiché anche logici che non parlano questa come lingua madre spesso scelgono di pubblicare i propri lavori in inglese, gli sviluppi del dibattito logico sulla contraddizione sono poco noti in vari paesi non anglosassoni. La pubblicazione di libri come quello che state per leggere è dunque un evento importante. In esso troverete una spiegazione di molte delle idee più rilevanti, delle tecniche adoperate, dei risultati acquisiti. Perciò sono profondamente grato a Francesco Berto per aver intrapreso il compito di scriverlo – e con me lo saranno certamente molti colleghi, che si sono impegnati intorno a questi problemi.

Eppure, il libro non è affatto una neutrale introduzione a quest'area di studi. Francesco ha scelto di approfondire aspetti della materia che ha trovato filosoficamente intriganti, e ha discusso in modo originale molti degli argomenti più importanti. Questa è, naturalmente, la prerogativa di un autore: assumiamo tutti la responsabilità degli argomenti di cui scegliamo di occuparci, e di ciò che ne diciamo. Penso comunque che sia stata una buona scelta. Alcuni fra noi hanno lavorato sulle logiche paraconsistenti e sul dialeteismo per oltre trent'anni, e si è trattato di un periodo di grandi sfide e di coinvolgimento e partecipazione intellettuale; nessuno poteva prevedere quale sarebbe stato lo sviluppo successivo. Il presente libro, attraverso l'impegno del suo autore, mira anche a far presente questo clima e, si spera, a trasmetterlo ai suoi lettori.

E la storia, ne sono certo, non finisce qui. Molto è stato ottenuto attraverso la sistemazione dei fondamenti logici in quest'area. Ma molto ancora dev'essere fatto: ci sono concetti, tecniche, argomenti e controargomenti, connessioni con questioni filosofiche e con filosofi storici (occidentali e orientali), ancora da investigare. Questo dibattito, io credo, è appena agli inizi: abbiamo passato duemila anni senza pensare seriamente al problema, e probabilmente impiegheremo un po' di tempo anche solo per mettere a punto le domande più importanti. Oltre a contribuire in proprio alla discussione, il libro di Francesco aiuterà i filosofi italiani a fare lo stesso. Gli auguro il miglior successo nell'impresa.

St Andrews e Melbourne
gennaio 2006

Introduzione

> Il mio scopo è quello di cambiare l'atteggiamento nei confronti della contraddizione.
>
> L. Wittgenstein (ca. 1940)

Quanto alla dichiarazione delle *Osservazioni sui fondamenti della matematica* che avete appena letto, non si può dire che Wittgenstein abbia avuto successo nel breve periodo, almeno fra i filosofi analitici. Naturalmente, essi si erano (pre)occupati delle contraddizioni fin dall'inizio: il mito di fondazione della filosofia analitica include la storia dell'avventura logicista di Frege e Russell, di come incapparono nella più famosa contraddizione del pensiero contemporaneo, e tentarono di uscirne. Sulla loro scia, tutti i grandi autori appartenenti a questa tradizione – con la rilevante eccezione, per l'appunto, del cosiddetto secondo Wittgenstein – hanno inteso evitare le contraddizioni e salvaguardare il Principio che le vieta. Ma oggi la situazione è cambiata e, se voleste spiegazioni su come e perché sia accaduto, vi consiglierei di leggere questo libro.

Infatti, sessant'anni dopo le affermazioni contenute nelle *Bemerkungen*, molti filosofi analitici vanno scoprendo che si può convivere con le contraddizioni. Nel 2004 Clarendon ha pubblicato un volume di 450 pagine intitolato *The Law of Non-Contradiction*[1]. Il volume contiene contributi di David Lewis, R. M. Sainsbury, Achille Varzi, Patrick Grim, Stewart Shapiro, Michael Resnik e molti altri. Delle sue cinque sezioni, le ultime due si intitolano rispettivamente *Contro* e *A favore* (del Principio di Non-Contraddizione). Quella che Lukasiewicz chiamava "l'incrollabile fiducia"[2] nel Principio ha ceduto il posto a un dibattito vasto, ricco e interessante. Se scorrete la *Bibliografia* alla fine di questo libro noterete l'estensione della discussione, che occupa le più importanti riviste internazionali: da "Mind", al "Journal of Philosophy", a "Erkenntnis". Ciò è dovuto soprattutto allo sviluppo delle cosiddette *logiche paraconsistenti*, sistemi logici che funzionano (in un senso tutto da precisare) pur consentendo (in un senso tutto da precisare) contraddizioni; e alla diffusione dell'ideologia filosofica sottostante, per la quale si va diffondendo il nome di *dialeteismo*, coniato da Graham Priest e Richard Routley. Purtroppo, tutto questo dibattito è inattingibile al lettore italiano. Di qui l'idea di scrivere un libro che ne illustri i temi e, se avrò fortuna, favorisca la produzione di traduzioni e stimoli l'interesse dei filosofi nostrani.

Il libro è diviso in quattro sezioni. La prima, *Motivazioni*, presenta qualche buona ragione per mettere in discussione l'"incrollabile fiducia". Al CAP. 1, propongo una tassonomia delle diverse formulazioni della nozione di contraddizione e del Principio di Non-Contraddizione presenti in letteratura. Considero rapidamente la questione della cosiddetta "versione psicologica" del Principio, con il problema se sia possibile credere in una contraddizione. I CAPP. 2 e 3 presentano alcune delle proposte più note per salvaguardare il Principio, rispettivamente, dai paradossi semantici e da quelli matematico-insiemistici. Qui riporto numerosi argomenti, sia tradizionali che avanzati dai nuovi teorici della contraddizione, in virtù dei quali nessuna di queste proposte funziona. Nel CAP. 4 presento infine un argomento contro il Principio proposto da Graham Priest mediante un'ardita interpretazione del Primo Teorema di Incompletezza di Gödel.

Nella seconda sezione, *Logiche della contraddizione*, introduco le famiglie più accreditate di logiche paraconsistenti, e indico anche qualche loro applicazione più strettamente semantica. Il preliminare CAP. 5 raccoglie dalla letteratura una serie di condizioni che dovrebbero essere soddisfatte da qualsiasi logica in cui si ammettano contraddizioni, e fornisce così un riferimento metodologico per valutare i sistemi presentati. Il CAP. 6 espone una serie di teorie complessivamente etichettate come *non aggiuntive*, dovute a Stanislaw Jaskowski, Nicholas Rescher e Robert Brandom, Achille Varzi, David Lewis e altri. Il CAP. 7 parla dei cosiddetti sistemi *positive-plus* di Newton da Costa e dei suoi collaboratori (di cui si è occupato anche Diego Marconi), e accenna all'approccio adattivo di Diderik Batens. Il CAP. 8 è dedicato alla logica del paradosso di Priest, e tratta anche di alcune idee filosofiche dell'autore (insieme a Routley, Priest è colui che in ambito analitico ha scritto i lavori di più ampio respiro filosofico sul tema della contraddizione). Il CAP. 9 è dedicato ai sistemi della logica della rilevanza, e soprattutto alla vasta discussione in corso sulla loro semantica.

La terza sezione, *Applicazioni*, fornisce qualche esempio di uso cui le logiche esposte nella sezione precedente possono prestarsi. Nel CAP. 10 considero la semantica paraconsistente proposta da Priest per un linguaggio "semanticamente chiuso" nel senso tarskiano. Nel CAP. 11, dopo aver detto qualcosa sull'interessante situazione metamatematica che viene a crearsi per le teorie contraddittorie formalizzate, parlo degli sviluppi dell'insiemistica paraconsistente. Nel CAP. 12, infine, tratto delle aritmetiche contraddittorie, che costituiscono le applicazioni più stravaganti dei sistemi logici in questione.

L'ultima sezione, *Problemi*, considera per l'appunto i guai. Il CAP. 13 introduce il tema delle cosiddette *ipercontraddizioni*: contraddizioni particolarmente infettive, il cui trattamento sembra costituire un problema anche per le semantiche paraconsistenti. Il CAP. 14 esamina le difficoltà espressive a carico della paraconsistenza, in particolare quelle connesse alla necessità di fornire una nozione accettabile di *esclusione*.

Due parole sul simbolismo adottato. Ho cercato di non sacrificare troppo la comprensibilità intuitiva all'esattezza formale – per riciclare una vecchia battuta: penso che il rigore non dovrebbe mai diventare *rigor mortis*. Una delle conseguenze di ciò è una certa elasticità sulla distinzione uso-menzione: ho tralasciato sia le virgolette che altri espedienti citazionali come le quasi-virgolette di Quine, in tutti i casi in cui (1) sembravano appesantire troppo il testo, e (2) la loro omissione non avrebbe prodotto alcuna grave confusione, adoperando così alcune espressioni (anche del formalismo) come nomi di se stesse. Questo uso autonimo si chiarisce contestualmente, sicché per il lettore è del tutto innocuo.

Per il resto, la notazione per il linguaggio logico è quella standard e il metalinguaggio è in buona sostanza l'italiano informale, con l'eccezione di un metaconnettivo per il condizionale, $\Rightarrow$ (con il corrispondente bicondizionale, $\Leftrightarrow$), che mi era comodo – peraltro, vedremo che far collassare la distinzione di linguaggio e metalinguaggio è uno dei punti d'onore dei teorici della contraddizione. Talora è stato necessario introdurre appositi simboli per connettivi non classici utilizzati nelle logiche alternative, soprattutto condizionali e negazioni. Ne do conto, comunque, di volta in volta. Ho tradotto nel simbolismo standard anche i formalismi di scritti, come quelli di Jaskowski, che impiegavano la notazione polacca. Tuttavia, talvolta ho conservato certi accorgimenti notazionali dei lavori originali, che mi sembravano interessanti e/o perspicui. Confido sempre nell'elasticità del mio lettore.

Il sistema di calcolo usato nelle non numerose dimostrazioni formalizzate è la nota deduzione naturale di Gentzen, con una presentazione lineare delle prove e l'utilizzo sistematico di una "colonna delle assunzioni": si contrassegna ogni assunzione con un numerale (quello della riga in cui viene introdotta), e si trasferisce il numerale a ogni applicazione di una regola d'inferenza, in modo da tener traccia delle ipotesi da cui ogni formula dipende (fatto salvo lo scaricamento di assunzioni da parte di alcune delle regole). Le formule che sono considerate come principi logici o specifici di una teoria sono invece introdotte direttamente senza dipendere da alcuna assunzione.

Wittgenstein diceva che il *Tractatus logico-philosophicus* «non è [...] un manuale»[3]. Neppure questo molto più modesto libro lo è, in diversi sensi. Naturalmente, data la sterminata quantità di materiale pubblicato negli ultimi quarant'anni sul tema trattato, si sono imposte molte selezioni. Alcune sono dovute alle mie incompetenze – ad esempio, ho trascurato del tutto certe applicazioni delle logiche paraconsistenti nei linguaggi informatici di programmazione e nella fisica quantistica, semplicemente perché di queste cose non so praticamente nulla. Ma altre sono dovute a valutazioni di merito (e quindi, forse, ai miei pregiudizi): ad esempio, ho sacrificato un poco l'esposizione delle cosiddette logiche dell'inconsistenza formale, perché a mio avviso sono, fra i sistemi paraconsistenti, quelli che vanno incontro alle maggiori difficoltà filosofiche. Invece, ho dedicato ampio spazio all'approccio a mio parere più sviluppato e promettente, costituito dalle logiche della rilevanza. Il risultato è quella che gli anglosassoni chiamerebbero una *opinionated introduction*, in cui l'autore non rinuncia a dire la sua su questioni che gli stanno a cuore. Ciò accade un po' in tutti i capitoli, ma è particolarmente evidente nell'ultimo, dove espongo quella che a mio parere è *la* difficoltà decisiva a carico dei paladini della contraddizione.

Questo libro viene pubblicato nell'ambito del PRIN *La teoria filosofica come pratica filosofica*. Mi fa molto piacere che, entro un tema di gran moda come quello delle pratiche filosofiche, ottenga spazio la questione dell'argomentazione logico-dialettica, in cui le figure della contraddizione e della confutazione svolgono un ruolo fondamentale.

Note

1. Priest, Beall, Armour-Garb, 2004.
2. Lukasiewicz, 1910, p. 126.
3. Wittgenstein, 1921, p. 23.

Parte prima
Motivazioni

Mi sembra infatti che chi si occuperà in futuro in modo scientifico del principio di contraddizione, non potrà affermare senza prove che esso sia vero di per sé, che solo un folle può non credere in esso e che con uno che lo nega non vale la pena di discutere. [...] In futuro bisognerà affrontare numerosi argomenti che impediranno di trattare in modo superficiale e leggero una questione scientifica così seria.

J. Łukasiewicz (1910)

1
"Il principio più saldo di tutti"

1.1
Uno strano cliente

Aristotele lo chiama βεβαιοτάτη πασῶν ἀρχή, "il principio più saldo di tutti"[1] – *firmissimum omnium principiorum*, dicevano i medioevali. È il Principio di Non-Contraddizione – d'ora in poi: (PNC). La qualifica di *firmissimum* esprime il fatto che il (PNC) è stato considerato *la* legge più certa e incontrovertibile del pensiero e dell'essere, e quindi è stato posto come fondamento supremo della conoscenza e della scienza. Ancora nel 1910, Lukasiewicz scriveva: «Oggi, come nei tempi antichi, crediamo che il principio di contraddizione[2] sia la legge più sicura del pensiero e dell'ente, che solo un folle potrebbe negarlo, che la sua verità s'impone a ciascuno con un'evidenza immediata e che questo principio non esige alcuna giustificazione né può averla»[3].

Questa sistemazione dello status logico, ontologico e psicologico del (PNC) è dovuta proprio ad Aristotele, e buona parte di questo capitolo sarà dedicata ad analizzare il modo in cui egli ha impostato la questione nel celebre libro Γ della *Metafisica*: molto del dibattito contemporaneo sul (PNC), infatti, si svolge all'interno del quadro teorico stabilito da Aristotele. Prima, però, proporrò nei due sottoparagrafi che seguono una tassonomia di formulazioni, con vari riferimenti alla letteratura. L'esposizione potrebbe risultare un po' noiosa, ma è il caso di prestarle attenzione perché ci tornerà utile in tutto il seguito del libro. Se infatti il (PNC) è una configurazione linguistica, che cosa *dice* esattamente?

Già quando si comincia a intravederlo da lontano, il Principio presenta strane caratteristiche. Se è un enunciato, è qualcosa di cui ha senso chiedersi se è vero o falso; eppure, alcuni dubitano che si possa anche solo ipotizzare che sia falso. Il suo status di principio, inoltre, ci dice che dovrebbe essere qualcosa da cui *segue* qualcos'altro – visto che per "principio" intendiamo: ragion d'essere di qualcos'altro, fondamento (della verità) di altri enunciati. Eppure, già gli antichi e i medioevali si erano accorti che dal (PNC), in realtà, si deduce molto poco – *nulla demonstratio accipit hoc principium*, diceva san Tommaso. È abbastanza ovvio, peraltro, che esso intende in qualche modo *proibire*, o *escludere*, la contraddizione. Dunque il nostro problema ora è il seguente.

1.1.1. Che cos'è una contraddizione?

Ebbene, a quanto pare "contraddizione" è, per attenersi al gergo aristotelico, un πολλαχῶς λεγόμενον: si dice in molti modi. Anzi, moltissimi: in un recente studio, Patrick Grim ha identificato nella letteratura così tante formulazioni delle nozioni in gioco che, combinandole, si ottengono circa 240 diverse definizioni![4] Possiamo tuttavia ordinare questa varietà in quattro gruppi principali.

1. Abbiamo anzitutto quelle che potremmo chiamare formulazioni *sintattiche*. Qui una contraddizione è considerata un oggetto sintattico della tal *forma*:

(C1) $\alpha \wedge \neg\alpha$,

ossia, è la congiunzione di un enunciato[5] e della sua negazione. Talvolta una contraddizione è presa non come una congiunzione, ma come una coppia di enunciati, di cui uno nega l'altro:

($C1_{dist}$) $\alpha, \neg\alpha$.

È invalso l'uso di chiamare (C1) e ($C1_{dist}$), rispettivamente, formulazione *collettiva* e *distributiva*. Questa distinzione sarà rilevante quando ci occuperemo di certe teorie, dette *non aggiuntive*, che alterano il trattamento standard della congiunzione[6]. Qualche esempio di formulazione sintattica (collettiva o distributiva) dato in letteratura:

Una contraddizione è una congiunzione in cui il secondo congiunto è una negazione del primo; così $P \wedge -P$, $R \wedge -R$, $(P \rightarrow Q) \wedge -(P \rightarrow Q)$ sono tutte contraddizioni (Lemmon, 1965, p. 30).

Contraddizione: fbf* della forma 'A & –A'; enunciato della forma 'A e non A' (Haack, 1978, p. 244).

Una contraddizione consiste in una coppia di enunciati, uno dei quali è la negazione dell'altro (Kalish, Montague, Mar, 1980, p. 18).

L'uso *formale* di 'contraddizione' assume che le contraddizioni siano enunciati *della forma* $A \wedge \neg A$, dove $\wedge$ è la congiunzione e [...] $\neg$ è la negazione (Beall, 2004, p. 4).

2. Abbiamo poi formulazioni che possiamo chiamare *logico-semantiche*, perché vi si fa uso delle nozioni semantiche per eccellenza: quelle di verità e falsità. Adoperiamo dunque *V* e *F* per i predicati di verità e falsità, applicati a nomi di enunciati, e stabiliamo che in generale $\ulcorner\alpha\urcorner$ è il nome di α. Avremo:

(C2a) $V(\ulcorner\alpha\urcorner) \wedge F(\ulcorner\alpha\urcorner)$,

la cui lettura intuitiva è qualcosa come: "L'enunciato α è vero e falso". (C2a) equivale a:

(C2b) $V(\ulcorner\alpha\urcorner) \wedge V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner)$, ("L'enunciato α e la sua negazione sono entrambi veri"), se accettiamo la caratterizzazione della falsità come verità della negazione, ossia se accettiamo:

(Neg1) $F(\ulcorner\alpha\urcorner) \leftrightarrow V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner)$;

informalmente: "L'enunciato α è falso se e solo se la sua negazione è vera". L'equivalenza di falsità e verità della negazione è generalmente accettata sia dai difensori del (PNC), che (con qualche eccezione) dai suoi detrattori. Io mi atterrò a (Neg1) sostanzialmente in tutto questo libro.

Molto più controversa è l'equivalenza tra falsità – ossia, in base a (Neg1), verità della negazione – e non-verità (*untruth*, dicono gli inglesi):

(Neg2) $V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner) \leftrightarrow \neg V(\ulcorner\alpha\urcorner)$;

informalmente: "La negazione dell'enunciato α è vera se e solo se α non è vero". Si dice che (Neg2) esprima la semantica della negazione *classica*, ovvero la cosiddetta condizione di esclusione per la negazione classica[7]. Come vedremo in seguito, in varie logiche non classiche si rifiuta (Neg2) pur accettando (Neg1). Se invece accettiamo (Neg2), (C2a) e (C2b) sono equivalenti a:

(C2c) $V(\ulcorner\alpha\urcorner) \wedge \neg V(\ulcorner\alpha\urcorner)$,

("L'enunciato α è vero e non è vero"). Seguendo Priest (1987, cap. 4) possiamo chiamare cose come (C2a) e (C2b) contraddizioni *interne*, e cose come (C2c) contraddizioni *esterne*. Qualche esempio dalla letteratura:

La prospettiva secondo cui alcuni enunciati sono né veri né falsi è di antica dinastia. [...] La prospettiva duale secondo cui alcuni enunciati sono sia veri che falsi (dialeteismo) è di egualmente antico lignaggio (Priest, 1993, p. 35).

...Dialeteismo, la tesi che una singola proposizione può essere sia vera che falsa nello stesso tempo (Saka, 2001, p. 6).

3. Abbiamo poi formulazioni propriamente *metafisiche* – in cui, cioè, si adoperano nozioni tipiche dell'ontologia, come quelle di oggetto, individuo, proprietà, situazione, stato di cose ecc. Esprimeremo la portata ontologica attraverso un linguaggio predicativo e la quantificazione; ci tornerà utile una formulazione al secondo ordine (ossia, in cui si quantificano variabili predicative):

(C3) $\exists x \exists P(P(x) \wedge \neg P(x))$[8],

la cui lettura intuitiva è qualcosa come: "Qualche oggetto x ha e non ha una qualche proprietà P". Alcuni esempi di formulazioni qualificabili come metafisiche:

K ha *b* e nello stesso tempo non ha *b*. Per questo motivo, *K* è un oggetto contraddittorio (Lukasiewicz, 1910, p. 64).

Una situazione contraddittoria è una in cui sia B che ~B (non si dà il caso che B) valgono per qualche B (Routley, Routley, 1985, p. 204).

Una situazione contraddittoria sarebbe una in cui si dà il caso che qualcosa sia P e anche il caso che quella cosa sia non P (Grim, 2004, p. 67).

Una verità come $F(a) \wedge \neg F(a)$ significa in prima istanza che l'oggetto *a* ha la proprietà F e non ha la proprietà F (Bremer, 2005, p. 199).

Si dice a volte che non ha senso parlare di oggetti contraddittori, o di situazioni o stati di cose contraddittori: contraddittorietà e incontraddittorietà sono proprietà di enunciati – o magari di *sensi* di enunciati, o dei pensieri che questi enunciati esprimono ecc. Il mondo (con i suoi abitanti non linguistici e non mentali), invece, non sarebbe il *tipo* di cosa che può essere contraddittoria o incontraddittoria[9]. Ma naturalmente, questo genere di qualifica può convenirgli in senso derivato: dire che il (un pezzo del) mondo è incontraddittorio è come dire che ogni enunciato vero puramente descrittivo (di qualche pezzo) del mondo è incontraddittorio[10]. Sicché nella letteratura si parla del tutto correntemente di oggetti, stati di cose e anche di interi *mondi* contraddittori, nonché della *realtà* della contraddizione, o di contraddizioni reali. E così farò anche io.

4. Infine, un quarto gruppo è costituito da una varietà di formulazioni che radunerò sotto l'etichetta di *psicologico-pragmatiche*. La qualifica è dovuta al fatto che vi si fa uso di nozioni variamente attinenti alla pragmatica, più che all'ontologia, alla sintassi, o alla semantica *stricto sensu*. Avviso subito, tuttavia, che intenderò il termine "pragmatica" in un'accezione molto ampia, che riguarda sia l'attività linguistica umana che quella razionale in senso lato. Sotto questo titolo intendo quindi raggruppare anche concetti tipici di contesti epistemico-psicologici, come quello di *credenza*.

Per fare un po' di ordine – e seguendo la letteratura sull'argomento – stabiliamo allora quanto segue. Intendiamo per *accettazione* (*acceptance*) un atteggiamento mentale che un soggetto *x* può avere nei confronti di un enunciato (spesso si preferisce dire: del *senso* di, o del *pensiero espresso* da un enunciato, ma la distinzione qui è poco rilevante). Questo atteggiamento o stato mentale sarà inteso come equivalente allo stato mentale di *credenza* (*belief*), o *persuasione*: *x* accetta α se e solo se *x* crede o è persuaso che α. L'atteggiamento o stato mentale opposto all'accettazione è il rifiuto, o rigetto (*rejection*). *Asserzione* (*assertion*) e *diniego* (*denial*) sono invece gli atti linguistici che esprimono, rispettivamente, accettazione e rifiuto[11].

Adoperiamo ora una notazione dovuta a Graham Priest e Richard Routley[12]. $\vdash_x$ e $\dashv_x$ sono due operatori epistemici, la cui lettura intuitiva è, rispettivamente, qualcosa come: "L'individuo – o l'agente razionale – *x* accetta-crede (che)..." e: "L'individuo – o l'agente razionale – *x* rifiuta (che)..."[13]. Avremo allora:

(C4a) $\vdash_x \alpha \wedge \vdash_x \neg\alpha$,

la cui lettura intuitiva è dunque: "L'individuo *x* accetta, o crede (che) α, e accetta, o crede (che) non-α". Oppure:

(C4b) $\vdash_x \alpha \wedge \dashv_x \alpha$,

"L'individuo *x* accetta e rifiuta (che) α". (C4a) e (C4b) risultano equivalenti, se accettiamo che il rifiuto equivalga all'accettazione della negazione, ossia se accettiamo:

(Acc) $\dashv_x \alpha \leftrightarrow \vdash_x \neg\alpha$[14].

Un paio di esempi di formulazione psicologico-pragmatica:

Contraddizione: l'asserzione e diniego congiunto di una proposizione (Brody, 1967, p. 61).

Una *contraddizione* insieme fa un'asserzione e nega [*denies*] quella stessa asserzione (Kahane, 1995, p. 308).

1.1.2. "Principio di Non-Contraddizione" si dice in molti modi

Se l'essenza del (PNC) sta nel proibire la contraddizione, visto che ci sono diverse forme di contraddizione, vi saranno anche diverse forme di proibizione. Si potrà dire che tutte le contraddizioni sono false, o che è impossibile che siano vere (proibizione logico-semantica). Oppure, si dirà che è impossibile asserirle sensatamente, o magari crederci (una proibizione psicologica, su cui mi soffermerò più avanti in questo capitolo). Oppure si potrà dire che le contraddizioni non possono *esistere*, nel senso che non ci possono essere oggetti, o stati di cose, contraddittori (proibizione ontologica). In corrispondenza alla quadruplice distinzione del sottoparagrafo precedente, possiamo avere in particolare quattro tipi di formulazione del (PNC).

1. Abbiamo versioni sintattiche della forma:

(PNC1) $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$,

ad esempio:

...La legge di non contraddizione, $\neg(a \wedge \neg a)$ (Priest, 1987, p. 96).

$\sim(A \wedge \sim A)$ [...] la legge di non contraddizione, è tradizionalmente stata vista come una proprietà centrale, se non una caratteristica definitoria, della negazione (Priest, Routley, 1989c, pp. 164-5).

...I[l] celebr[e] *principi*[*o*] *di noncontraddizione* [...] è minimale: $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ (Casari, 1997, p. 98).

2. Abbiamo poi formulazioni logico-semantiche, corrispondenti alle contraddizioni del tipo di (C2a)-(C2c):

(PNC 2a) $\neg(V(\ulcorner\alpha\urcorner) \wedge F(\ulcorner\alpha\urcorner))$,

la cui lettura intuitiva è qualcosa come: "Lo stesso enunciato α non può essere sia vero che falso";

(PNC 2b) $\neg(V(\ulcorner\alpha\urcorner) \wedge V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner))$,

"Un enunciato e la sua negazione non possono essere entrambi veri"; e:

(PNC 2c) $\neg(V(\ulcorner\alpha\urcorner) \wedge \neg V(\ulcorner\alpha\urcorner))$,

"Lo stesso enunciato α non può essere e non essere vero". Fra gli esempi, dobbiamo ricordare anzitutto quello aristotelico:

> Che, dunque, la nozione più salda di tutte sia questa: che le affermazioni contraddittorie non possono essere vere insieme (*Met.* 1011 b 13-4).

Per capire cosa intenda Aristotele, occorre tener presente che si adoperano le nozioni di verità e falsità anche per caratterizzare la relazione di *contraddittorietà* fra enunciati. Si dice infatti, seguendo uno schema codificato nel famoso "quadrato di opposizione" della logica tradizionale, che due enunciati α e β sono *contrari* se e solo se non possono mai essere veri insieme (ossia, se la loro congiunzione è una falsità logica); che α e β sono *subcontrari* se e solo se non possono mai essere falsi insieme (ossia, se la loro disgiunzione è una verità logica); infine, che sono *contraddittori* se e solo se sono insieme contrari e subcontrari. Qualche esempio di questa caratterizzazione:

> Contraddittorie, o proposizioni una delle quali dev'essere vera e l'altra falsa... (DeMorgan, 1846, p. 4).

> Contraddittorio: il contraddittorio di una fbf* (di un enunciato) A è una fbf* (un enunciato) che dev'essere falso se A è vero e vero se A è falso (Haack, 1978, p. 244).

> Contraddittorie: due proposizioni sono contraddittorie se e solo se è logicamente impossibile che siano entrambe vere e logicamente impossibile che siano entrambe false (Sainsbury, 1991, p. 369).

Ora, a essere in rapporto di contraddittorietà (ἀντικειμένας φάσεις) per Aristotele sono per l'appunto un enunciato (o la sua affermazione, κατάφασις) e la sua negazione (ἀπόφασις). Perciò, dire che affermazioni contraddittorie non possono essere vere insieme è come dire che non possono valere sia un enunciato che la sua negazione, come in (PNC 2b). È soprattutto a partire dal lavoro di Jan Lukasiewicz che questo genere di formulazione è stato qualificato come *logico*:

Non possono essere veri nello stesso tempo due giudizi, dei quali uno assegna all'oggetto proprio quell'attributo che dall'altro gli viene negato. Questo principio si chiama logico perché riguarda la veridicità dei giudizi e cioè dei fatti logici (Lukasiewicz, 1910, p. 20).

Altri esempi:

La legge di contraddizione asserisce che un enunciato e la sua negazione diretta non possono essere veri insieme (Prior, 1967, p. 481).

Il principio di contraddizione asserisce che nessun asserto può essere sia vero sia falso (Copi, Cohen, 1994, p. 387).

…La *legge di noncontraddizione*: niente è sia vero che falso (Priest, 1998, p. 416).

3. Possiamo dare la versione ontologica o metafisica del (PNC) ancora in un linguaggio predicativo e al secondo ordine:

(PNC3) $\forall x \forall P \neg(P(x) \wedge \neg P(x))$,

la cui lettura intuitiva sarebbe: "Uno stesso oggetto non può avere e non avere una stessa proprietà". Questa è la prima formulazione aristotelica della *Metafisica*:

È impossibile che la stessa cosa, ad un tempo, appartenga e non appartenga a una medesima cosa, secondo lo stesso rispetto (e si aggiungano pure anche tutte le altre determinazioni che si possono aggiungere, al fine di evitare difficoltà di indole dialettica) (*Met.* 1005b19-22).

Dico subito qualcosa sulle famose «determinazioni da aggiungere» per «evitare difficoltà di indole dialettica». Nel *De interpretatione*, Aristotele nota che «un giudizio si contrappone a un altro», nel senso che lo contraddice davvero, soltanto «se afferma o nega una medesima determinazione rispetto ad un medesimo oggetto, prescindendo dall'omonimia»[15]. Solo se il significato del soggetto, e quello del predicato, è il medesimo in ambo gli enunciati, si ha una vera contraddizione. Queste osservazioni aristoteliche hanno a che fare con la bimillenaria tecnica della *parametrizzazione*, o *distinzione dei rispetti*. In seguito vedremo ampiamente come, quando ci si trova di fronte a una contraddizione come $\alpha \wedge \neg\alpha$, una strategia comune consiste nel trattare l'enunciato α, o qualche suo pezzo, come avente diversi significati, ossia come ambiguo (magari solo come ambiguo *contestualmente*). Ad esempio, se sembra che $P(a) \wedge \neg P(a)$, si dice che, in effetti, a è P e non è P sotto diversi parametri o rispetti – poniamo, r_1 e r_2. Che questa differenza non emerga, è ciò che fa scattare la contraddizione; la quale però si risolve precisando che $P_{r_1}a \wedge \neg P_{r_2}a$ (Juliette Binoche è una stella e non è una stella, ma è una stella nel senso che è una grande attrice, e non è una stella nel senso di un corpo celeste). Perciò, nella *Metafisica* Aristotele sostiene che non ha molta importanza se l'avversario del (PNC) gioca sull'equivocità delle parole: «basterà designare ognuno dei diversi significati con una parola differente»[16].

La più concisa versione del (PNC) nella *Metafisica* è probabilmente la seguente variante ontologica:

È impossibile essere e non essere ad un tempo (*Met.* 996 b 30)[17].

A qualificare come ontologiche queste formulazioni del (PNC) è stato daccapo Lukasiewicz:

Nessun oggetto può possedere e non possedere uno stesso attributo nello stesso tempo. [...] Chiamo "ontologico" il principio appena descritto, poiché riguarda tutti quanti gli enti, τὸ ὄν, ovvero tutto ciò che è qualcosa e non "un niente" (Lukasiewicz, 1910, p. 20).

Di certo, quella ontologica era la variante cui Aristotele dava maggior peso. È per questo che il problema dell'incontrovertibilità del (PNC) è trattato non nell'*Organon*, ossia negli scritti di logica, dove pure se ne ritrovano formulazioni, bensì proprio nella *Metafisica*. Qui Aristotele afferma che la discussione degli "assiomi" – e l'assioma per eccellenza è appunto il (PNC) – spetta soltanto alla filosofia prima, alla metafisica, poiché «essi valgono per tutti quanti gli esseri, e non sono proprietà peculiari di qualche genere particolare di essere»; perciò «competerà a colui che studia l'essere in quanto essere anche lo studio di questi assiomi»[18]. Altri esempi dalla letteratura:

Niente può essere e non essere la stessa cosa allo stesso tempo (Prior, 1967, p. 461).

Niente può possedere sia una proprietà che la proprietà complementare (van Benthem, 1979, p. 335).

(Non-)Contraddizione Ontologica: Nessun "ente" può istanziare proprietà contraddittorie (Beall, 2004, p. 3).

4. Infine, abbiamo le varianti psicologico-pragmatiche del (PNC), corrispondenti a (C4a) e (C4b):

(PNC 4a) $\neg(\vdash_x \alpha \wedge \vdash_x \neg\alpha)$,

(PNC 4b) $\neg(\vdash_x \alpha \wedge \dashv_x \alpha)$.

Aristotele diceva:

È impossibile a chicchessia di credere che una stessa cosa sia e non sia, come, secondo alcuni, avrebbe fatto Eraclito (*Met.* 1005 b 23-5).

Come vedremo tra poco, alcuni dubitano che sia opportuno chiamare "Principio di Non-Contraddizione" anche questo tipo di formulazioni. Tuttavia, Lukasiewicz parlava in proposito di "principio psicologico":

Due convinzioni, a cui corrispondono giudizi contraddittori, non possono sussistere nello stesso tempo nella stessa mente. Questo principio riguarda fenomeni psichici, perciò è un principio psicologico (Lukasiewicz, 1910, p. 21).

Qualche altro esempio di formulazione psicologico-pragmatica:

È impossibile insieme accettare e rigettare la stessa cosa (Priest, 1987, p. 128).

Chiunque rigetti *A* non può simultaneamente accettarlo, più di quanto una persona possa simultaneamente prendere e perdere un autobus, o vincere e perdere una gara di scacchi (Priest, 1989, p. 618).

Sembra perciò vi sia nel dialogo un ruolo per un'espressione il cui significato è catturato dalla legge di non contraddizione: dal principio per cui una proposizione e la sua negazione non possono essere accettate entrambe (Price, 1990, p. 224).

(Non-)Contraddizione Razionale: è irrazionale accettare (consapevolmente) una contraddizione (Beall, 2004, p. 3).

1.2
Principio logico e ontologico: il nostro primo approccio al T-schema

Che rapporti vi sono tra le diverse formulazioni del Principio? Lukasiewicz riteneva che (PNC) logico-semantico e ontologico fossero equivalenti. In effetti, le cose stanno così se accettiamo il famoso schema tarskiano (T-schema) per la caratterizzazione della verità:

(T) $V(\ulcorner\alpha\urcorner) \leftrightarrow \alpha$[19].

Che Aristotele accettasse (T) è abbastanza chiaro, perché accettava entrambi i versi del bicondizionale. Questi a volte vengono chiamati *Principio di Riflessione* e *Principio di Completezza*:

(Rifl) $V(\ulcorner\alpha\urcorner) \rightarrow \alpha$,

(Comp) $\alpha \rightarrow V(\ulcorner\alpha\urcorner)$.

Un brano interpretabile in questo senso sarebbe, secondo Lukasiewicz[20], il seguente:

In realtà, [Riflessione:] se è vero dire che un oggetto è bianco, oppure che non è bianco, esso sarà necessariamente bianco, oppure non sarà bianco, e d'altra parte, [Completezza:] se un oggetto è bianco, oppure non è bianco, era vero affermare oppure negare la cosa (*De int.* 18a39-b2).

Ora, una formulazione ontologica del Principio del tipo: $\forall x \forall P \neg(P(x) \land \neg P(x))$, tolti i quantificatori, ha la forma dello schema sintattico (PNC1), ossia: $\neg(\alpha \land \neg\alpha)$. E mediante (T), da (PNC1) possiamo derivare la formulazione logico-semantica (PNC2b), ossia $\neg(V(\ulcorner\alpha\urcorner) \land V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner))$, e viceversa, per semplice sostituzione di equivalenti. L'equivalenza si estende a (PNC2a), visto che come sappiamo equivale a (PNC2b) accettando (Neg1).

A proposito della concezione tarskiana, si parla, seguendo l'etichetta proposta dallo stesso Tarski, di "teoria semantica della verità"[21]. Ma qual è l'idea della verità sottesa allo schema? Gli studiosi discutono da decenni sulla questione se Tarski intendesse attenersi alla cosiddetta concezione *corrispondentista*: quella in cui, detto molto grossolanamente, un enunciato è vero se e solo se corrisponde ai fatti, a come stanno le cose nel mondo. Nelle note di apertura del *Concetto di verità nei linguaggi formalizzati* Tarski afferma che l'idea secondo cui «un enunciato vero è un enunciato, il quale afferma che le cose stanno così e così, ed effettivamente le cose stanno così e così», esprime «la prospettiva classica sulla verità»[22]. Cita quindi un noto brano della *Metafisica* di Aristotele, su cui mi soffermerò fra poco. La famosa convenzione tarskiana per (buone) teorie della verità[23], e la stessa nozione di *soddisfacimento* di una formula atomica $P(t_1, \ldots, t_n)$ da parte di una sequenza di oggetti in un dominio, a detta di alcuni, scaturiscono da una concezione che pare ammettere una realtà non riducibile al pensiero e al linguaggio, rispetto alla quale gli enunciati interpretati vengano valutati.

Secondo altri interpreti, invece, non è affatto certo che il T-schema sia legato alla concezione corrispondentista piuttosto che ad altro[24]. Anzi, si sostiene che lo schema tarskiano ha proprio il vantaggio di fornirci un criterio-guida generale per specificare le condizioni di verità, senza far ricorso a troppe nozioni metafisicamente o teoreticamente impegnative. Ad esempio, memori della controversia Austin-Strawson potremmo non condividere l'ammissione dei fatti come *truthmakers* degli enunciati[25], ma è dubbio che una teoria della verità di tipo tarskiano debba impegnarsi con una metafisica dei fatti. Possiamo assumere (T) soltanto come uno schema decitazionale (seguendo quelle che oggi si chiamano teorie *deflazioniste* della verità)[26]; ma qualunque sia il bagaglio delle nostre convinzioni ontologiche, sembra si debba essere intuitivamente d'accordo sul fatto che "La neve è bianca" è un enunciato vero se e solo se la neve è bianca.

Ci sono semantiche che rifiutano il T-schema, ovvero almeno uno dei due condizionali, (Rifl) e (Comp), in cui è scomponibile. Il caso più celebre è quello delle semantiche a supervalutazioni[27]. Nella teoria supervalutazionale si accetta il Principio del Terzo Escluso o *tertium non datur*:

(TND) $\alpha \lor \neg\alpha$;

tuttavia, si rifiuta il Principio di Bivalenza in base a cui tutti gli enunciati sono veri o falsi, che per i nostri scopi – stante (Neg 1) – possiamo esprimere formalmente così:

(PB) $V(\ulcorner\alpha\urcorner) \vee V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner)$.

Per evitare che da (TND) segua (PB) per sostituzione, il supervalutazionismo deve quindi rinunciare a metà del T-schema, ossia a (Comp). Argomenterò in seguito in difesa del T-schema come condizione minimale affinché un predicato sia caratterizzato come un predicato *di verità*. Nel frattempo, è indubbio non solo che Aristotele accettasse il T-schema, ma anche che lo interpretasse in senso abbastanza decisamente realista-corrispondentista. È vero che vi sono oscillazioni in proposito nella sua opera (ad esempio, c'è il noto problema dei futuri contingenti nel cap. 9 del *De interpretatione*, in cui secondo alcuni interpreti Aristotele mostrerebbe certe tendenze antirealistiche). Tuttavia, egli affermava senz'altro che:

Falso è dire che l'essere non è o che il non-essere è; vero, invece, è dire che l'essere è e che il non essere non è (*Met.* 1001 b 26-7).

Sarà nel vero chi ritiene essere separate le cose che effettivamente sono separate ed essere unite le cose che effettivamente sono unite; sarà, invece, nel falso, colui che ritiene che le cose stiano in modo contrario a come effettivamente stanno (*Met.* 1051 b 3-6).

In queste formulazioni quasi tutti gli interpreti[28] hanno visto il caposaldo storico di una concezione realistica:

Infatti, non perché noi ti pensiamo bianco tu sei veramente bianco, ma per il fatto che tu sei bianco, noi, che affermiamo questo, siamo nel vero (*Met.* 1051b7-9).

1.3
Possiamo credere in una contraddizione?

Se la relazione fra le formulazioni di tipo 1, 2 e 3 del principio – fra (PNC) sintattico, logico-semantico e ontologico – è ragionevolmente chiara, molto più complicato è il problema del rapporto fra queste versioni e quelle psicologico-pragmatiche di tipo 4. In questo paragrafo e nei suoi sottoparagrafi esaminerò la questione, anche se solo per sommi capi: come si vedrà, vi sono un paio di buone ragioni per non dedicarle troppo spazio in questo libro.

La domanda di partenza più generale è: si può *accettare*, o *credere nell'*assurdo, nell'impossibile (la contraddizione essendo il caso per eccellenza di assurdità)? Una lunga consuetudine filosofica lo nega. Uno dei motti humeani ereditati dalla tradizione empiristica, quello in base a cui tutto ciò che è pensabile è possibile, implica che l'assurdo, l'impossibile, non solo non possano essere creduti, ma neppure *pensati*. Ad esempio, in *Positivismus und Realismus* Moritz

Schlick sosteneva che, mentre «ciò che è impossibile solo praticamente rimane tuttavia *concepibile*», invece «ciò che è logicamente impossibile, essendo contraddittorio, non può neppure esser pensato»[29]. La tesi dell'impossibilità di credere l'impossibile si ritrova oggi in molti autori, da Dennett[30] a Ruth Barcan-Marcus[31].

Vi è però una tradizione parallela, per la quale invece le contraddizioni sono pensabili, e magari anche credibili. Già Hegel, ad esempio, si lamentava di come «uno dei pregiudizi fondamentali» della logica astratta fosse che «la contraddizione non sia una determinazione altrettanto essenziale ed immanente quanto l'identità», perché «il contraddittorio [...] non si può rappresentare né pensare»[32]. Recentemente Roy Sorensen ha addirittura proposto, in *Vagueness and Contradiction*, un "argomento trascendentale" a favore della possibilità di credere nell'impossibile[33].

1.3.1. L'argomento aristotelico

Per capire l'origine del problema occorre considerare per esteso il seguente passo del libro Γ della *Metafisica*. Anche su questo punto, infatti, è stato Aristotele a porre i termini della controversia. L'inizio lo conosciamo già:

> [PNC 4a:] È impossibile a chicchessia di credere che una stessa cosa sia e non sia, come, secondo alcuni, avrebbe fatto Eraclito. In effetti, non è necessario che uno ammetta veramente tutto ciò che dice. E se [P1:] non è possibile che i contrari sussistano insieme in un identico soggetto (e si aggiungano a questa premessa le precisazioni solite), e se [P2:] un'opinione che è in contraddizione con un'altra è il contrario di questa, è evidente che [PNC 4a:] è impossibile, ad un tempo, che la stessa persona ammetta veramente che una stessa cosa esista, e anche, che non esista: infatti, chi si ingannasse su questo punto, avrebbe ad un tempo opinioni contraddittorie (*Met.* 1005 b 23-32).

Lukasiewicz ha osservato che in questo brano Aristotele tenta di *dedurre* il Principio "psicologico" di Non-Contraddizione da quello ontologico. Egli cerca di derivare il principio per cui «è impossibile a chicchessia di credere che una stessa cosa sia e non sia», o «è impossibile, ad un tempo, che la stessa persona ammetta veramente che una stessa cosa esista, e anche, che non esista» – che sono versioni di (PNC 4a). Le due premesse della derivazione sono segnate come (P1) e (P2). Ora, (P1) non è altro che un modo di formulare, in termini di *contrari*, il (PNC) ontologico. Ecco un passo in cui Aristotele ricava la formulazione con i contrari (P1) da una versione di (PNC 2b), ossia da una versione logico-semantica:

> Poiché [PNC 2b:] è impossibile che i contraddittori, riferiti a una medesima cosa, siano veri insieme, è evidente che [P1:] neppure i contrari possono sussistere insieme nel medesimo oggetto. Infatti, uno dei due contrari oltre che contrario è anche privazione. Ora, la privazione è negazione di un determinato genere di proprietà della sostanza. Se, dunque, è impossibile, ad un tempo, affermare e negare con verità, è impossibile, anche, che i contrari sussistano insieme (*Met.* 1011 b 16-21).

Nella teoria aristotelica, due *contrari* sono due proprietà (ma a volte anche due concetti, due nozioni ecc.) incompatibili massimamente opposte all'interno di un genere comune (ad esempio *bianco* e *nero* sono i massimamente opposti entro il genere *colore*). Uno dei due contrari è inteso come *privazione* dell'altro, il che vuol dire che un oggetto che possegga una delle due proprietà incompatibili necessariamente è privo de, ossia *non* possiede, l'altra. Perciò, se un oggetto fosse bianco e nero, ossia se gli inerissero i contrari, poiché essere nero è essere privati del bianco, cioè *non* essere bianco, quell'oggetto sarebbe e non sarebbe bianco: il che violerebbe per l'appunto il (PNC) ontologico.

Il problema è la premessa (P2). Qui Aristotele tratta le "opinioni", o credenze, come proprietà o stati della mente, e cerca di sostenere che due credenze vertenti intorno a due enunciati contraddittori *sono* due proprietà o due stati della mente fra loro contrari, ossia incompatibili. Adoperando il nostro operatore di accettazione-credenza, possiamo cioè dire che $\vdash_x \alpha$ e $\vdash_x \neg\alpha$ esprimono proprietà contrarie o incompatibili (della mente) del soggetto x. Allora, se uno stesso soggetto x credesse o accettasse (che) α, e credesse o accettasse (che) $\neg\alpha$, avremmo una situazione in cui a un'unica cosa (l'individuo credente x) inerirebbero due proprietà incompatibili: il che è proibito dallo stesso (PNC) ontologico. Dunque, ciò che Aristotele cerca di dimostrare è che è *impossibile credere* in una contraddizione, sulla base di un argomento che ha lo stesso (PNC) come premessa (P1).

1.3.2. ...E le critiche di Lukasiewicz

Lukasiewicz ha mosso obiezioni sia contro la premessa (P2) dell'argomentazione della *Metafisica*, sia direttamente contro il (PNC) psicologico come tale. Quanto a (P2), ha sostenuto che è illegittimo attribuire alle credenze, o opinioni, il medesimo tipo di relazione logica che sussiste fra gli enunciati su cui le credenze vertono; e ha visto in questo un caso di mentalismo, o di confusione fra questioni logico-ontologiche e questioni psicologiche. Come conseguenza di questa confusione, Aristotele avrebbe erroneamente attribuito alle credenze proprietà come la verità e la falsità, che, in senso proprio, spettano soltanto agli enunciati su cui le credenze vertono – o, al massimo, ai pensieri che questi enunciati esprimono, dove "pensiero" è però inteso in senso oggettivo, freghiano, e non mentalistico.

Quanto al (PNC) psicologico in sé, Lukasiewicz ha sostenuto che l'incompatibilità fra credenze, proprio perché è un fatto psicologico, non può essere attestata *a priori*: sicché le formulazioni di tipo 4 del (PNC) sarebbero leggi empiriche, soggette a conferme induttive e al massimo dotate di un certo grado di probabilità[34]. La stessa idea si ritrova, ad esempio, nelle *Ricerche logiche* di Husserl:

> Nel medesimo individuo, o meglio ancora, nella medesima coscienza, non possono permanere per un tratto di tempo, per quanto possa essere breve, atti di credenza contraddittori. Ma questa è realmente una *legge*? Possiamo realmente esprimerla come fornita di una generalità illimitata? Dove sono le induzioni psicologiche che giustificano la sua assunzione? Non possono forse esistere o non sono mai esistiti uomini che talora hanno

ritenuto vere nello stesso tempo due cose opposte, ad esempio, perché ingannati da false argomentazioni?[35]

Alcune di queste osservazioni non mi paiono irresistibili. Anzitutto, si potrebbe sostenere (come ha fatto Emanuele Severino) che è inopportuno chiamare "Principio di Non-Contraddizione" le formulazioni psicologico-pragmatiche di tipo 4, proprio perché non sono logicamente equivalenti a quelle logico-semantiche e ontologiche, bensì dedotte (ammesso che la deduzione funzioni), e quindi dipendenti, da queste[36]. Inoltre, lo slittamento aristotelico nell'attribuzione delle proprietà di verità e falsità potrebbe essere legittimato dall'uso ordinario, nel quale noi parliamo comunemente di credenze e persuasioni *vere* e *false*, quantomeno in senso derivato. L'individuo *x* ha una credenza vera se e solo se $\vdash_x \alpha$, e α è un enunciato vero, ossia: una credenza vera è una credenza in un enunciato vero.

Il vero nodo della questione, tuttavia, è un altro. Come abbiamo visto sopra, in letteratura si chiama "contraddizione" una configurazione come:

(C4a) $\vdash_x \alpha \wedge \vdash_x \neg\alpha$,

e (nonostante le riserve severiniane) si usa chiamare "Principio (psicologico) di Non-Contraddizione" una negazione di (C4a). Tuttavia, (C4a) non è ancora una contraddizione *scoperta*, nel senso di qualcosa della forma di (C1): $\alpha \wedge \neg\alpha$. Come rileva Lukasiewicz, «non ci sarebbe mai una contraddizione palese se qualcuno fosse convinto che qualcosa c'è e nello stesso tempo fosse convinto che la stessa cosa non c'è» – il che è appunto la situazione (C4a). Invece, «tale contraddizione l'avremmo solo quando nella stessa mente esistesse una convinzione e nello stesso tempo la stessa convinzione non esistesse»[37], e cioè:

(C4c) $\vdash_x \alpha \wedge \neg\vdash_x \alpha$.

Sostenere che da (C4a) segue (C4c) equivale a sottoscrivere l'implicazione:

(Cred) $\vdash_x \neg\alpha \rightarrow \neg\vdash_x \alpha$.

"Credere nell'antitesi è non credere nella tesi", potremmo dire. Se accettiamo lo *shift* della negazione fuori dal campo dell'operatore di accettazione-credenza, (Cred) trasforma ogni contraddizione "coperta" di tipo (C4a) in una contraddizione esplicita, della forma di (C1).

1.3.3. La teoria della credenza nel *Tractatus*

Perché dovremmo accettare (Cred)? Una risposta a questa domanda, a mio avviso, può venire solo da una teoria *complessiva* della credenza. In effetti, è perché Lukasiewicz ha una concezione largamente empiristica della credenza in generale, che rifiuta l'attribuzione alle credenze dello stesso tipo di proprietà e relazioni che sussistono per gli enunciati su cui vertono: «Le convinzioni, in quanto fenomeni psichici, non significano che qualcosa c'è o non c'è: esse sono delle sensazioni che non si possono definire, ma che bisogna sperimentare. [...] La convinzione, ovvero la prima componente della relazione intenzionale, non essendo in quanto fenomeno una riproduzione di nessun fatto, non è, in una precisa accezione, né vera né falsa»[38].

Viceversa, una differente teoria della credenza potrebbe fornire argomenti a favore di (Cred). Un buon esempio è dato dalla "teoria dell'apparire" di Severino, la quale include esplicitamente una versione di (Cred)[39]. Per avere un caso più noto di concezione della credenza opposta a quella di Lukasiewicz, possiamo considerare il trattamento dei contesti di credenza nel *Tractatus logico-philosophicus*. Per Wittgenstein, infatti, le credenze vanno analizzate esattamente come situazioni psicologiche che, al contrario di quanto pensava Lukasiewicz, *sono* "riproduzioni di fatti".

Nella sezione 5.541, Wittgenstein comincia a parlare di «certe forme proposizionali della psicologia come "A crede che p", o "A pensa p"». E critica sia la «superficiale psicologia odierna», che il trattamento fornito da Russell e da Moore per gli atteggiamenti proposizionali: trattamento in base al quale, nella ricostruzione tractariana, in questi contesti abbiamo a che fare con una relazione fra un oggetto (l'individuo credente) e (il fatto, o magari lo stato di cose[40], descritto da) un enunciato. Invece, si dice in 5.542, in questi contesti «si tratta non d'una coordinazione d'un fatto e d'un oggetto, ma della coordinazione di fatti per coordinazione dei loro oggetti»[41]. Ciò vuol dire che il sussistere di una credenza nella mente di *x* è il sussistere di uno stato di cose: una configurazione di elementi psichici che *raffigura* un altro stato di cose. Ad esempio, "Gianni crede che Roma sia a nord di Napoli" va analizzato dicendo: vi è una connessione di elementi psichici (la credenza, o la persuasione nella mente di Gianni), e tale connessione raffigura lo stato di cose per cui Roma è a nord di Napoli[42]. Dunque in base a questa concezione le credenze, come fatti psichici, hanno esattamente funzione raffigurativa, secondo i meccanismi codificati dalla più generale teoria tractariana dell'immagine.

Ora, una delle conseguenze di ciò è precisamente che, per Wittgenstein, «è impossibile giudicare un nonsenso» (5.5422). Infatti «l'immagine contiene la possibilità della situazione che essa rappresenta» (2.203). Il pensiero, in quanto immagine logica, «contiene la possibilità della situazione che esso pensa». «Ciò che è pensabile è anche possibile» (3.02) – il che è la versione tractariana del motto di Hume – e «noi non possiamo pensare nulla d'illogico, poiché altrimenti dovremmo pensare illogicamente» (3.03)[43]. Naturalmente, è quantomeno dubbio che Wittgenstein qui stia parlando del pensiero in senso psicologico (com'è invece sostenuto, peraltro, nella cosiddetta lettura psicologistica del *Tractatus*). Ma il punto è che ciò che vale per il pensiero in quanto immagine logica di stati di cose, vale anche per le credenze come stati psichici, appunto perché anche queste *sono* immagini. Dunque, la possibilità della situazione creduta vincola la possibilità della credenza stessa: come per Aristotele, così per Wittgenstein se una situazione è impossibile, è impossibile crederci perché una tale credenza è una situazione psichica a sua volta impossibile.

1.3.4. Passaggio

D'altra parte ci sono, come ho preannunciato, un paio di ragioni per lasciar cadere questo genere di questioni in (buona parte di) questo libro. La prima è, per l'appunto, che un buon trattamento della cosa riguarda, se non la psicologia empirica, le scienze cognitive o la filosofia della mente. Il tema eccede dunque il tipo di problemi di cui mi occuperò, che riguardano essenzialmente la logica, la semantica e l'ontologia.

La seconda e più importante ragione è la seguente. Anche se accettassimo la premessa (P2) dell'argomento aristotelico della *Metafisica*, resterebbe ancora da discutere la bontà della premessa (P1). Questa come si è visto è una variante del (PNC) *ontologico*: «È impossibile che i contrari [ossia, proprietà incompatibili] ineriscano allo stesso». Anche se accettassimo (Cred), e dunque che da (C4a) segua una contraddizione esplicita come (C4c), avremmo un argomento *sound* solo nel presupposto che valga il (PNC) nelle sue versioni di tipo 1-3, ossia nelle sue versioni logico-semantico-ontologiche. Se le cose stanno così, allora (C4c) è sempre falsa, ovvero, la situazione descritta da (C4c) non può mai realizzarsi.

Ciò vuol dire che, in certo modo, il problema della validità del (PNC) logico-semantico e ontologico è *più fondamentale* del problema della validità del (PNC) psicologico-pragmatico, del problema se sia possibile credere in una contraddizione. Lo è in questo preciso senso: se una contraddizione può essere vera, o se possono sussistere oggetti o stati di cose contraddittori, allora non soltanto crederci dovrebbe essere possibile, ma in certi casi dovrebbe anche essere *richiesto*. La verità infatti è di certo il *telos*, il fine della credenza (dell'accettazione e, a livello di pragmatica *stricto sensu* e performativi, dell'asserzione). Viceversa, solo sul presupposto che una contraddizione non può essere mai vera, o che la contraddizione non può mai realizzarsi nel mondo, si può (eventualmente) difendere la tesi per cui non è neppure possibile credere in una contraddizione. In termini vero-condizionali: solo sul presupposto che una contraddizione non sia vera sotto alcuna condizione si può dire che comprendere una contraddizione, ossia conoscerne le condizioni di verità, implica che non la si possa credere vera. Ora, le difficoltà per il (PNC) che discuterò fra poco sono proprio di questo genere "più fondamentale": sono difficoltà le quali sembrano attestare che vi possono essere, o vi sono, contraddizioni *vere*[44].

1.4
Le sfide al Principio

Ebbene, il (PNC) logico-semantico e quello ontologico hanno subito numerose sfide fin dall'antichità. Eraclito fu considerato, grazie soprattutto ai riferimenti aristotelici, il capostipite di una lunga schiera di filosofi i quali videro nel divenire e nel movimento la violazione fenomenologicamente constatabile del Principio: da Hegel (per il quale «qualcosa si muove, non in quanto in questo Ora è qui, e in un altro Ora è là, ma solo in quanto in un unico e medesimo Ora è qui e non è qui»)[45] fino alla *metaphysics of change* di Graham Priest[46]. Ma già prima della sistemazione aristotelica, la sofistica di Protagora e Gorgia aveva inteso opporsi alla prima formulazione parmenidea del Principio e alla sua paradossale difesa zenoniana. Il cosiddetto nichilismo gorgiano era un capovolgimento diretto delle tesi eleatiche: nulla esiste, ossia, l'essere non è; e non vi è alcuna verità, ossia tutti gli enunciati sono falsi. E nel cosiddetto relativismo protagoreo, espresso nel principio per cui «di tutte le cose è misura l'uomo, di quelle che esistono che esistono, di quelle che non esistono che non esistono»[47], Aristotele vedeva un'esplicita negazione del (PNC), visto che «molti uomini hanno convinzioni opposte [...] e da questo scaturisce, come necessaria conseguenza, che la stessa cosa sia e anche non sia»[48].

Nel medioevo, il problema della contraddizione era stato essenzialmente connesso alla questione di come rapportarla all'onnipotenza divina. Nel *De divina omnipotentia*, san Pier Damiani aveva bacchettato san Girolamo per aver sostenuto che Dio non può fare che ciò che è accaduto non sia accaduto. Poiché infatti Dio vive un eterno presente, non vi è dal punto di vista divino passato né futuro. Dire perciò che Dio non ha potere sul passato equivale a dire che non può far sì che non accada ciò che accade o ciò che accadrà; e così, egli viene ridotto all'impotenza. Più tardi, Cusano aveva posto al centro del suo libro più famoso, la *Dotta ignoranza*, l'idea che Dio stesso fosse *coincidentia oppositorum*, visto che come ente perfetto deve includere in sé armoniosamente tutta la pluralità delle diverse e opposte realtà particolari. Ma le sfide più cogenti al (PNC) nel pensiero contemporaneo vengono dai *paradossi logici*.

1.4.1. I paradossi logici

Seguendo l'uso comune, adopererò "paradosso" in modo ambiguo, intendendo:
a) un *argomento* che, muovendo da premesse intuitivamente vere, e attraverso deduzioni intuitivamente accettabili, conclude in un enunciato assurdo o palesemente controintuitivo;
b) l'*enunciato* assurdo o palesemente controintuitivo in cui l'argomento conclude[49]. In particolare, gli enunciati paradossali che ci interessano non sono semplicemente implausibili, o contrari al senso comune ("paradossali" nel senso di: opposti alla δόξα o a ciò che è ἔνδοξον, alle opinioni diffuse e/o autorevoli); costituiscono invece violazioni del (PNC) in una o nell'altra delle formulazioni individuate sopra. Un "paradosso" nel senso stretto così inteso viene spesso chiamato anche una *antinomia*[50].

Anche se la loro discussione include spesso tecnicismi quasi esoterici, l'importanza filosofica dei paradossi logici è difficilmente sovrastimabile. Ciò è dovuto al fatto che essi coinvolgono categorie assolutamente basilari del pensiero e del linguaggio: nozioni come quelle di dimostrazione, appartenenza, negazione, predicazione, totalità e, naturalmente, verità. Il nostro linguaggio ordinario (inteso come comprendente il lessico scientifico, matematico, filosofico ecc.) contiene infatti espressioni di applicazione estremamente vasta e generale – talmente generale che non possiamo neppure cominciare a discuterne senza già *adoperarle*: espressioni come "appartiene a", "non", e, appunto, "è vero". Principi intuitivi governano l'applicazione di queste espressioni. Ne abbiamo già incontrato qualcuno; il T-schema:

(T) $V(\ulcorner\alpha\urcorner) \leftrightarrow \alpha$,

e la nostra caratterizzazione della falsità come verità della negazione:

(Neg1) $F(\ulcorner\alpha\urcorner) \leftrightarrow V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner)$;

poi, c'è quello che di solito si chiama Principio di *Comprensione*, o di *Astrazione*, che per il momento potremmo formulare così:

(PC) $x \in \{y \mid P(y)\} \leftrightarrow P(x)$,

e la cui lettura è: "x appartiene all'insieme dei P se e solo se x è un P" (ad esempio: Jeffery Deaver appartiene all'insieme degli scrittori se e solo se Jeffery Deaver è uno scrittore). Questi principi appaiono ovvi, al punto che vengono ritenuti da alcuni *costitutivi*, o (parzialmente) definitori, del significato dei termini in questione. Eppure, nei prossimi due capitoli vedremo come essi producano flagranti violazioni del *principium firmissimum* quando consideriamo particolari proprietà P, o particolari enunciati α.

Prima di addentrarci nello strano reame dei paradossi logici, e delle strategie proposte dai logici, dai matematici e dai filosofi per venirne a capo, chiediamoci: cosa vuol dire esattamente "risolvere" un paradosso? Se un paradosso è un argomento del tipo caratterizzato sopra al punto *a*, si possono indicare, in ordine crescente di "esigenza epistemologica", tre condizioni attestate in letteratura che una teoria la quale intenda proporsi come la soluzione di un paradosso logico dovrebbe rispettare.

1. La teoria dovrebbe indicare, com'è chiaro, qual è precisamente la premessa falsa, o l'inferenza scorretta, del ragionamento (questa condizione viene chiamata "soluzione *formale*" dalla Haack, e "criterio di specificità" da Kirkham)[51].
2. Inoltre, dovrebbe spiegare indipendentemente *perché* lo è. Come ha detto John Woods, un difensore del (PNC) «Deve identificare la componente difettiva [nella prova dei paradossi] senza *question begging*; e cioè, deve cercare di trovare teoremi che possano essere screditati del tutto indipendentemente dal loro contributo al paradosso. Deve sostituire quei teoremi con controparti che resistano al paradosso»[52].

Chiunque è capace di scegliere una premessa o una regola d'inferenza a caso e rigettarla, ma la mera intenzione di evitare la conclusione paradossale non è sufficiente a motivare la scelta di una premessa o regola, anziché di un'altra. Un simile rimedio suonerebbe come la prescrizione del medico di Groucho Marx:

Groucho: Dottore, mi fa male la spalla quando alzo il braccio così.
Dottore: Non lo alzi così.

In altre parole, la scelta dovrebbe essere indipendentemente motivata e non *ad hoc* (questa condizione viene chiamata dalla Haack "soluzione *filosofica*")[53].

3. Infine, la teoria potrebbe spiegare perché la premessa o regola imputata (e amputata) ci è apparsa del tutto plausibile, tanto che *solo* la derivazione da essa di una conclusione antinomica ci ha indotto a sospettarne. Questo requisito (che è stato avanzato ad esempio in Priest, 1979), in effetti, da un lato è molto esigente, e dall'altro sembra avere a che fare con la psicologia, o con una difficile analisi delle intuizioni depositate nel senso comune[54]. Tuttavia, vedremo che le soluzioni standard dei paradossi spesso non arrivano neppure al punto n. 2.

1.4.2. Ai limiti del pensiero: Kant e Hegel

Anche quando ci arrivano, tuttavia, hanno qualche altro problema. Cominciamo con uno schema che ritroveremo nei capitoli seguenti, e che è stato esposto informalmente da Priest in apertura del suo *Beyond the Limits of Thought*. Priest ha congetturato che le particolari proprietà P, o i particolari enunciati α, che generano i paradossi a partire dai principi intuitivi di cui si diceva sopra, costituiscano o descrivano alcuni casi limite di ciò che può essere concepito, astratto, espresso, o dell'iterazione di certe operazioni ricorsive del pensiero:

> Limiti di questo tipo forniscono vincoli oltre i quali certi processi concettuali (descrivere, conoscere, iterare ecc.) non possono andare; una sorta di *non plus ultra* concettuale. [...] La contraddizione, in ciascun caso, è semplicemente dovuta al fatto che i processi concettuali in questione *oltrepassano* effettivamente questi vincoli. Perciò, i limiti del pensiero sono vincoli che non possono essere oltrepassati, ma che tuttavia lo sono. In ciascun caso, vi è una totalità (di tutte le cose esprimibili, descrivibili ecc.) e un'operazione appropriata la quale genera un oggetto che è sia all'interno che all'esterno della totalità. Chiamerò queste situazioni, rispettivamente, *chiusura* e *trascendenza*. In generale, gli argomenti sia per la chiusura che per la trascendenza usano una qualche forma di autoreferenzialità, un metodo al contempo rispettabile e potente. [...] Spesso involgono l'applicazione di una teoria a se medesima. Alcuni sono più tecnici; un paradigma di questi è la diagonalizzazione, una tecnica familiare dai paradossi logici[55].

Tornerò in seguito su dettagli tecnici come la diagonalizzazione. Nel frattempo, è il caso di dire che la scoperta di questo schema[56] non è dovuta a qualche logico matematico, bensì a due filosofi della tradizione classica: Kant e Hegel. Molti autori, fra cui anche Zermelo e Fraenkel[57], hanno notato la sorprendente somiglianza fra le antinomie kantiane e i paradossi logici, ad esempio quelli dell'infinito cantoriano[58]. Ma poi, l'intera discussione contemporanea sui paradossi può essere vista come una riformulazione e precisazione formale della diatriba Kant-Hegel.

Kant pensava che le categorie del pensiero avessero un ambito di applicazione naturale: quello dell'intuizione, che è soltanto sensibile. D'altra parte, ciò che egli chiamava "uso dialettico" dei concetti puri era, per l'autore della *Critica della ragion pura*, una «illusione naturale ed inevitabile»[59]. È l'illusione che si produce allorché adoperiamo le forme pure al di là dell'orizzonte finito dell'esperienza possibile. Allora incappiamo in antinomie, paralogismi ecc. Ad esempio, nell'ambito della cosmologia inferenze perfettamente legittime intorno al mondo come un tutto (una totalità che non possiamo mai sperimentare come tale) possono portarci a concludere sia la tesi che il mondo ha un inizio nel tempo ed è limitato nello spazio, sia l'antitesi per cui esso non ha confini né spaziali né temporali[60]. Per Kant, ciò mostra che l'applicazione delle categorie fondamentali del pensiero al di là dei loro limiti propri è illegittima.

Ora, secondo Hegel questa posizione ha un pregio e un difetto: Kant ha fatto bene a mostrare, con le antinomie della prima *Critica*, che la dialettica è «un'opera necessaria della ragione»; ad aver rilevato «l'oggettività della apparenza e la necessità della contraddizione appartenente alla natura delle determinazioni del pensiero»[61]. Tuttavia ha imputato ciò, come un errore, alla ragione che fa un uso costitutivo-trascendentale delle categorie: «il resultato è semplicemente la nota affermazione che la ragione è incapace di conoscer l'infinito»[62]. Invece, occorre abbandonare questa «tenerezza verso le cose del mondo» e l'idea che «l'essenza del mondo non deve essere essa ad avere in sé la macchia della contraddizione; questa macchia deturpa *solo* la ragion pensante, l'*essenza dello spirito*» (anzi, l'antinomia non si trova solo nei quattro oggetti della cosmologia kantiana, bensì «in *tutti* gli oggetti di tutti i generi, in *tutte* le rappresentazioni, i concetti e le idee»)[63]. E gli argomenti kantiani non sono una *reductio ad absurdum* dell'uso scorretto della ragione: sono deduzioni *corrette*, che mostrano che il mondo è contraddittorio[64].

Di fronte ai paradossi logici, la strategia contemporanea standard è, naturalmente, quella kantiana: rilevato l'insorgere della contraddizione, si erge una barriera di fronte a(lla nostra capacità di approcciare) simili totalità, o casi limite, mediante opportune manovre più o meno formali. I casi al limite del pensiero sono *assurdi*, e il rifiuto dell'assurdo è il criterio minimale della razionalità. Questa è, ad esempio, la tesi centrale di *The Incomplete Universe* di Patrick Grim[65]. Un intento di questo libro, invece, è vedere come e fino a che punto si possa perseguire la via hegeliana: «Si suole in primo luogo fare un gran caso dei termini del pensiero, della ragione ecc., affermando che il termine non si possa sorpassare. In una tale affermazione si è inconsapevoli di questo, che appunto in quanto qualcosa è determinato come termine, è già sorpassato»[66].

Contro le strategie di tipo kantiano che tentano di salvare il (PNC) attraverso limitazioni come quelle ora accennate, si potrebbe avanzare una richiesta profondamente filosofica di *universalità*. L'aspirazione all'intero è propria della filosofia fin dalle più antiche origini greche – fin da quando si comincia a interrogarsi sul principio di *tutte* le cose, assumendo dunque che sia senz'altro possibile, anzi doveroso, parlare del mondo come di un tutto. Ciò vuol dire ad esempio, che in filosofia miriamo a capire come funziona *il* linguaggio in generale; a una definizione della verità – non a una caratterizzazione di che cosa sia il vero per un certo linguaggio in una certa struttura formale. Inoltre, riteniamo di poter disporre di concetti estremamente generali come, per l'appunto, *totalità*, o anche *concetto*, o *insieme*: dunque usiamo nozioni come *insieme* in modo non ristretto, assumendo che ci sia un insieme universale, che è l'estensione di "è un insieme".

Naturalmente, ciò di per sé non fornisce motivazioni forti contro le strategie limitative: si potrebbe rispondere, in perfetto stile kantiano, che proprio una simile aspirazione all'universalità costituisce quell'illusione dialettica "naturale e inevitabile", ma che una volta smascherata va messa da parte, perché conduce a contraddizioni. I capitoli seguenti, tuttavia, mostreranno che le strategie limitative vanno incontro a numerosi problemi. Vedremo come, nelle teorie che cercano di venire a capo dei paradossi logici salvando il (PNC), le *stesse nozioni* introdotte per risolvere i paradossi sono adoperabili per formularne di nuovi. Questi possono essere affrontati solo rifiutando che tali nozioni siano esprimibili all'interno della teoria stessa, o addirittura sensate. Sicché, o la teoria medesima si trova sottoposta a una devastante contraddizione "di ritorno"; oppure, non riesce a fare quel che si prometteva di fare (ad esempio: intendeva fornire una teoria del significato per il linguaggio naturale, mentre riesce a trattare solo linguaggi artificiali, espressivamente molto più deboli dell'italiano ordinario). Si tratta di un fenomeno così ricorrente («un ritorno costante, come quello di una moneta falsa»)[67] che Manuel Bremer ha ritenuto di poterne estrapolare una massima generale: «Un quadro linguistico abbastanza ricco da evitare alcune antinomie, ne genera versioni sue proprie»[68].

1.5
Prospetto: paradossi semantici e insiemistici

I paradossi logici vengono normalmente divisi in *insiemistici* e *semantici*. I primi involgono tipicamente nozioni come quelle di appartenenza, cardinalità ecc. I secondi, nozioni come quelle di verità, denotazione, definibilità ecc. La distinzione, già anticipata da Peano, è dovuta a Frank Ramsey, che la formulò con riferimento alla lista dei paradossi logici esaminata nei *Principia mathematica* di Russell e Whitehead:

> Il gruppo A [*scil.* le antinomie n. 2, 3 e 4 nell'elenco dei *Principia*: fra esse, il paradosso di Russell e quello di Burali-Forti, che conosceremo nel CAP. 3] consiste di contraddizioni che, se non si prendessero provvedimenti contro di esse, si presenterebbero negli stessi sistemi logici o matematici. Esse involgono solo termini logici o matematici come classe e numero e mostrano che ci deve essere qualcosa di sbagliato nella nostra logica e matematica. Ma le contraddizioni di tipo B [*scil.* le antinomie n. 1, 5, 6 e 7 dei *Principia*: fra queste, il paradosso del mentitore, che conosceremo nel CAP. 2] non sono puramente logiche e non possono venir enunciate in soli termini logici; poiché tutte contengono qualche riferimento al pensiero, al linguaggio o al simbolismo, che non sono termini formali ma empirici[69].

L'idea che i paradossi semantici contengano di necessità "riferimenti empirici" è qualcosa su cui oggi, dopo le procedure formali di Gödel e Tarski per ottenere l'autoriferimento (su cui mi soffermerò fra poco), nessuno concorderebbe. Quelle stesse procedure formali, poi, rendono difficile tracciare una linea così precisa fra i due tipi di paradosso. Ciò è dovuto al fatto che la semantica formale di matrice tarskiana fa essenzialmente uso di nozioni insiemistiche e matematiche. Tuttavia, la distinzione in sé è un luogo comune della letteratura. Inoltre, si può ragionevolmente dire che vi è una soluzione uniformemente accettata ai paradossi insiemistici – o almeno, qualcosa come uno schema di soluzione unitario: quello che fa capo alla cosiddetta gerarchia cumulativa transfinita, di cui si parlerà – mentre ciò non accade per quelli semantici. Infine, i paradossi semantici hanno una storia bimillenaria, e sono stati formulati prima dell'elaborazione di una semantica formale. Questa è stata di conseguenza edificata, per l'appunto da Tarski, con un occhio a tali paradossi e a come evitarli. Invece, i paradossi insiemistici sono sorti in seguito alla sistemazione ottocentesca dei fondamenti della matematica (alla cosiddetta aritmetizzazione dell'analisi, ossia alla riduzione delle sfere superiori della matematica all'aritmetica; allo sviluppo della teoria cantoriana dell'infinito ecc.). Sono esplosi all'interno di teorie già formalizzate o semiformalizzate, come la prima sistemazione dei fondamenti dell'aritmetica proposta da Frege. Essi hanno quindi spinto alla produzione di numerose teorie assiomatiche, che sono tutte cospicue complicazioni della teoria "ingenua" iniziale – qualcosa di simile agli epicicli con cui si cercava di raccordare la teoria geocentrica con le osservazioni astronomiche recalcitranti. Per tutte queste ragioni, fornirò un'esposizione separata dei due tipi di paradosso, e di alcune delle soluzioni più affermate, nei due capitoli che seguono.

Note

1. Arst. *Met.* 1005b17-8.

2. Curiosamente, il (PNC) viene chiamato "Principio di *Contraddizione*", oltre che "di Non-Contraddizione".

3. Lukasiewicz, 1910, p. 15.

4. Cfr. Grim, 2004.

5. Le lettere minuscole greche α, β, ... (eventualmente indicizzate: α_1, ..., α_n), nei contesti informali stanno in generale per enunciati qualsiasi. In quelli formali, come ad esempio nelle presentazioni *proof-theoretic* di sistemi logici e nella loro discussione, fungono da metavariabili per formule del sistema (come si vedrà in seguito, darò quasi sempre gli assiomi di sistemi e teorie formali schematicamente).

6. La distinzione fra lettura collettiva e distributiva è trasversale alle diverse versioni della nozione di contraddizione considerate di seguito; tutte sono formulabili collettivamente o in termini di coppie.

7. Poiché formulazioni come (Neg1) e (Neg2) sono tipicamente clausole semantiche, dovrebbero a rigore essere espresse con simboli metalinguistici (sia che il metalinguaggio sia informale, sia che sia a sua volta formalizzato) di sorta diversa rispetto a quelli del linguaggio oggetto. Ad esempio:

(Neg2) $V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner) \Leftrightarrow$ Non $V(\ulcorner\alpha\urcorner)$, dove ⇔ è un meta-bicondizionale, e "Non" una meta-negazione. Allora lo stesso predicato di verità per gli enunciati del linguaggio oggetto, secondo una prescrizione dovuta a Tarski, apparterrebbe al metalinguaggio, che conterrebbe nomi per le espressioni del linguaggio oggetto di cui si dà la semantica. Naturalmente, questa è per l'appunto la procedura che abbiamo appreso da Tarski, il quale rifiutava che la semantica per un linguaggio potesse darsi entro quello stesso linguaggio – rifiutava la cosiddetta *chiusura semantica*, una nozione che caratterizzerò un po' meglio nel prossimo capitolo. Vedremo tuttavia che, secondo la maggior parte dei critici del (PNC), la distinzione linguaggio oggetto / metalinguaggio è illusoria: il nostro linguaggio ordinario per questi autori *è* semanticamente chiuso, e una teoria formale che intenda modellarlo deve esprimere le condizioni di verità per gli enunciati nel medesimo linguaggio di cui dà la semantica. Vedremo in che modo da questa impostazione discendano contraddizioni di tipo (C2); ma secondo molti fautori della contraddizione questo è per l'appunto ciò che deve succedere.

8. Nella notazione del libro, lettere latine maiuscole corsive, P, Q, ... (eventualmente indicizzate: $P_1, ..., P_n$) fungono a volte da *costanti* predicative (dunque anche da lettere enunciative, intese come costanti predicative 0-arie), e a volte – come qui – da *variabili* predicative quantificabili quando occorre un linguaggio *higher order*. Questa ambiguità si chiarisce sempre contestualmente.

9. Cfr. ad esempio Bobenrieth, 1998, pp. 28-9.

10. Cfr. ad esempio Priest, 1987, p. 200.

11. Ho riprodotto la caratterizzazione fornita in Priest, 1993, p. 36. Non sempre gli autori sono così precisi nell'uso di queste nozioni – soprattutto, si tende a non distinguere fra stati *mentali* e corrispondenti performativi; sicché spesso occorrerà un po' di elasticità.

12. Cfr. Priest, 1989, p. 618; Priest, Routley, 1989b, p. 380.

13. $\vdash_x$ (con la lettera minuscola corsiva in pedice) non va dunque confuso col normale segno sintattico di asserzione, che adopererò in seguito. Quest'ultimo comparirà sempre o senza lettere in pedice che lo seguano, oppure con lettere maiuscole tonde quando ci sarà bisogno di specificare di quale sistema o teoria formale, ad esempio, una formula è un teorema. Così, il simbolo $\vdash_{\mathrm{PA}}$ dice che la formula che segue è un teorema dell'aritmetica di Peano, che è siglata PA.

14. Un'assunzione come (Acc), peraltro, appare ad alcuni poco intuitiva; il suo correlato strettamente linguistico fa capo a un argomento molto dibattuto, dovuto a Frege e raffinato da Peter Geach (cfr. Geach, 1965), in base a cui il diniego equivarrebbe all'asserzione della negazione. Ma tutto ciò è poco rilevante ai nostri scopi.

15. *De int.* 17a34-6.

16. 1006b1-2. Naturalmente, non lo dice solo Aristotele. Ad esempio, secondo van Benthem «quando sorge una contraddizione, questo si potrebbe interpretare come un sintomo di povertà: un aspetto rilevante è stato trascurato. L'aggiunta di "parametri" adeguati normalmente ripristinerà la consistenza, e cioè, la libertà da contraddizioni. [...] Quando sono viste in questo modo, le contraddizioni hanno un ruolo nel raffinamento delle nostre teorie, non perché vengono accettate, ma precisamente perché vengono rigettate!» (van Benthem, 1979, pp. 336-7).

17. Gli antichisti si dividono fra chi sostiene che la prima formulazione ontologica del principio sia dovuta al poema parmenideo (fr. 6: «È necessario dire e pensare che l'essere sia; infatti l'essere è/il nulla non è»); e chi rileva come in Parmenide non vi sia ancora una chiara distinzione fra logica, ontologia e psicologia. Ad esempio, per Giovanni Reale anche se «in questo principio parmenideo gli interpreti hanno da tempo indicato la prima grandiosa formulazione del principio di non contraddizione, cioè di quel principio che afferma l'impossibilità che i contraddittori coesistano ad un tempo», tuttavia «Parmenide applicherà il principio quasi esclusivamente nella sua valenza ontologica, e solo Aristotele svilupperà sistematicamente le valenze logiche e gnoseologiche di esso» (Reale, 1991, p. 122).

18. Arst. *Met.* 1005a22-9.

19. A rigore, *se* Tarski ha ragione sull'indefinibilità del predicato di verità per un linguaggio all'interno di quello stesso linguaggio, il T-schema è costitutivamente metalinguistico. Ma vale qui quanto si è detto in precedenza intorno alla scissione fra linguaggio oggetto e metalinguaggio. (T) corrisponde a quella che Lukasiewicz (il quale scriveva prima di Tarski) chiamava "definizione di giudizio vero": «è vero il giudizio affermativo che attribuisce a un oggetto quel-

l'attributo che esso possiede; è vero il giudizio negativo che nega a un oggetto un attributo che esso non possiede» (Lukasiewicz, 1910, p. 25).

20. Cfr. Lukasiewicz, 1910, p. 24.

21. Cfr. ad esempio Kirkham, 1992, cap. 5.

22. Tarski, 1956, p. 155.

23. Propriamente, per Tarski una buona definizione della verità per un certo linguaggio è fornita attraverso una serie di clausole, dalle quali si può dedurre per via puramente logica ogni istanza del T-schema, cioè, per ogni enunciato α del linguaggio in questione, il corrispondente bicondizionale. È un punto su cui tornerò nel prossimo capitolo.

24. Cfr. Marconi, 1984. Susan Haack ha dissociato abbastanza nettamente la concezione semantica della verità espressa dal T-schema tarskiano dal corrispondentismo (Haack, 1978, pp. 112 ss.), venendo peraltro criticata in parte in Kirkham, 1992, p. 170.

25. Su questo tema, cfr. Pitcher, 1964.

26. Cfr. Kirkham, 1992, cap. 10.

27. La prima semantica a supervalutazioni è dovuta a van Fraassen, che l'ha adoperata per trattare i fenomeni presupposizionali e anche i paradossi semantici (cfr. van Fraassen, 1966). In seguito, l'approccio supervalutazionale è stato esteso al trattamento della vaghezza (il testo canonico è Fine, 1975).

28. Cfr. Kirkham, 1992, p. 119.

29. Schlick, 1932, p. 273.

30. Cfr. Dennett, 1987, cap. 4.

31. Cfr. Barcan-Marcus, 1983. La tesi della Barcan è basata sull'osservazione che un'attribuzione di credenza viene sempre rivista quando si scopre che nessuna situazione potrebbe render vera la credenza: come la conoscenza esige la verità, così la credenza esige la possibilità logica. Foley (1986) ha proposto un argomento che muove dall'idea fondamentale della semantica vero-condizionale, per cui la comprensione va identificata con la conoscenza delle condizioni di verità: «comprendere una proposizione è sapere che cosa accade se essa è vera», dice il *Tractatus logico-philosophicus* di Wittgenstein. Ora, continua Foley, uno può credere soltanto ciò che comprende. Siccome una contraddizione non ha condizioni sotto le quali può essere vera, uno non può comprendere una contraddizione *e* credere che sia vera.

32. Hegel, 1831, pp. 490-1.

33. La versione informale dell'argomento è la seguente: «io sostengo che è possibile [...] credere l'impossibile, ad esempio, che c'è un massimo numero primo. L'*impossibilista* risponde che mi sbaglio. Mossa falsa! Cercando di correggermi, l'impossibilista concede che credo in una proposizione falsa. La proposizione in questione (ossia, che si può credere nell'impossibile), se falsa, è necessariamente falsa. Perciò, l'impossibilista concederebbe che un'impossibilità può essere creduta. [...] La credenza in "certe impossibilità sono credibili" garantisce la propria stessa verità» (Sorensen, 2001, pp. 124-5).

34. Cfr. Lukasiewicz, 1910, pp. 31-9.

35. Husserl, 1900, p. 99.

36. Cfr. Severino, 2004. Ciò che Aristotele intende fare, secondo Severino, non è tanto illustrare un principio "psicologico", quanto sostenere che il (vero) (PNC) ha una *proprietà* (διορι–σμός) intensionale essenziale: quella di essere un principio, come dice il libro K della *Metafisica*, «rispetto al quale non è possibile che ci si inganni, ma rispetto al quale, al contrario, è necessario che si sia sempre nel vero» (1061 b 34-5).

37. Lukasiewicz, 1910, p. 31.

38. Ivi, p. 34.

39. Fra coloro che accettano (Cred) c'è anche Peter Strawson, per il quale credenze che vertono su enunciati contraddittori semplicemente si elidono a vicenda (cfr. Strawson, 1952, p. 21). Alcuni hanno sostenuto che il rifiuto di (Cred) potrebbe costituire un inconveniente strettamente logico, in vista della costruzione di una logica epistemica. Ad esempio, Manuel Bremer ha affermato che «abbandonare [Cred] per ragioni di adeguatezza psicologica non lascia molto spazio a una logica degna di questo nome!» (Bremer, 2005, p. 181).

40. Il *Sachverhalt* del *Tractatus* è uno stato di cose, nel senso di una situazione possibile, e l'enunciato è «la descrizione d'uno stato di cose» (4.023). Il fatto è «ciò che accade» (2), ossia è una situazione non solo possibile, bensì attuale: è il sussistere di uno stato di cose. L'enunciato raffigura lo stato di cose (la proposizione «mostra come le cose stanno, *se* essa è vera»), e «*dice che* le cose stanno così» (4.022). Tuttavia, secondo un'altra versione forse più nota, *Sachverhalt* indicherebbe la singola situazione atomica, in opposizione a *Tatsache*, alla situazione strutturata. Questa è l'accezione intesa nell'interpretazione di Russell: «Un fatto, il quale non abbia parti che siano dei fatti, è chiamato da Wittgenstein un *Sachverhalt*, un fatto atomico» (Wittgenstein, 1921, p. 8).

41. Ivi, pp. 84-5.

42. L'analisi e l'esempio vengono da Frascolla, 2000, pp. 209-11.

43. Wittgenstein, 1921, p. 32.

44. Ciò non vuol dire che le questioni di pragmatica e di credenza saranno del tutto accantonate d'ora in poi. Anzi, come vedremo in seguito, varianti pragmatiche del (PNC) riemergeranno, avendo tra l'altro una certa funzione strategica all'interno delle stesse teorie che ammettono senz'altro contraddizioni vere.

45. Hegel, 1831, p. 491.

46. Cfr. Priest, 1987, capp. 11 e 12.

47. Plat. *Theaet*. 152 a 2-4.

48. Arst. *Met*. 1009 a 10-12.

49. «Un paradosso [è] una conclusione apparentemente inaccettabile derivata mediante un ragionamento apparentemente accettabile da premesse apparentemente accettabili» (Sainsbury, 1995, p. 1). Cfr. Priest, 1979, p. 220; Priest, 1987, p. 11.

50. Certi paradossi – nel senso (b) – *non* sono dunque propriamente antinomie, bensì enunciati fortemente controintuitivi, che però non costituiscono violazioni del (PNC). Un tipico esempio logico è costituito dai cosiddetti paradossi dell'implicazione materiale, di cui dovrò parlare a lungo in seguito. Cfr. la terminologia di Susan Haack: «Paradossi: (I) (Noti anche come "antinomie".) Contraddizioni derivabili in semantica* e teoria degli insiemi; [...] (II) I "paradossi" dell'implicazione materiale e stretta* sono teoremi della logica classica, bivalente e modale [...]. Uso le virgolette perché questi "paradossi" non involgono una contraddizione» (Haack, 1978, p. 249).

51. Cfr. Haack, 1978, pp. 138-9; Kirkham, 1992, p. 273.

52. Woods, 2003, p. 172.

53. «Ciò che si intende è che si dovrebbe mostrare che la premessa o il principio rigettato è di un tipo verso il quale vi sono obiezioni indipendenti – indipendenti dal fatto che conduce a un paradosso, si intende. È importante, ancorché difficile, evitare presunte "soluzioni" che *etichettano* semplicemente l'enunciato problematico in un modo che sembra esplicativo, ma in realtà non lo è» (Haack, 1978, p. 139).

54. Ad esempio, Quine (1966, pp. 4-9) ha congetturato che nel caso di molti paradossi non ci sia assolutamente *niente* che non va dal punto di vista delle nostre intuizioni; non abbiamo altra scelta che postulare una revisione controintuitiva degli standard tradizionali. Ciò secondo Kirkham sembra troppo, perché porterebbe a rigettare anche la condizione n. 2. Il risultato sarebbe dunque che «Quine non lascia spazio per alcuna discriminazione fra [diverse] revisioni proposte» (Kirkham, 1992, p. 275).

55. Priest, 1995, pp. 3-4.

56. Che si ritrova anche in Russell, e del quale, nella terza sezione del libro, vedremo che è possibile fornire una più precisa descrizione formale all'interno di una teoria contraddittoria degli insiemi.

57. Cfr. Hallett, 1984, sez. 6.2.

58. Secondo G. Martin «il conflitto fra conclusione e progressione, fra formare una totalità e adoperare questa totalità come un nuovo elemento, è il vero fondamento delle antinomie [*scil.* insiemistiche]. È questo conflitto a fornire la connessione con le antinomie kantiane. Kant vide chiaramente che le antinomie si basano su questa opposizione tra trarre una conclusione e oltrepassarla» (Martin, 1955, p. 55).

59. Kant, 1781, p. 237.
60. Cfr. ivi, pp. 290-1.
61. Hegel, 1831, pp. 38-9.
62. Ivi, p. 39.
63. Hegel, 1830, p. 59.
64. O almeno, questa è l'interpretazione standard della posizione di Hegel. In Berto (2005) ho argomentato che attribuire a Hegel questo genere di violazione del (PNC) potrebbe rappresentare un cattivo modo di essere fedeli alla sua dialettica.
65. «Questo [libro] è la spiegazione di un gruppo di risultati logici correlati. Presi assieme, questi sembrano avere qualcosa di filosoficamente importante da insegnarci: qualcosa sulla conoscenza e la verità, e qualcosa sull'impossibilità logica di una *totalità* della conoscenza e della verità» (Grim, 1991, p. 1).
66. Hegel, 1831, pp. 133-4.
67. Priest, 1987, p. 20.
68. Bremer, 2005, p. 27.
69. Ramsey, 1931, pp. 36-7.

2
Vere menzogne

2.1
Mentitori

I paradossi semantici possono sorgere da diverse nozioni semantiche, come quelle di denotazione, definibilità ecc. Considererò tuttavia solo quelli che adoperano le nozioni di verità e falsità, e che sono radunati sotto l'etichetta del *mentitore*. Questi sono infatti i più discussi in letteratura, quelli per i quali è stato proposto il maggior numero di soluzioni. Sono anche i più classici, essendo sul mercato da duemila anni.

2.1.1. Mentitori informali

Una delle versioni più antiche di paradosso semantico compare addirittura nella *Lettera a Tito* di san Paolo. Qui Paolo se la prende con un "profeta cretese", poi identificato con il filosofo Epimenide, il quale avrebbe un giorno detto:

1. Tutti i cretesi mentono sempre.

In realtà, (1) non è propriamente un paradosso, nel senso stretto di enunciato che, sulla base delle nostre intuizioni ordinarie, violerebbe il (PNC). È semplicemente un enunciato che, sulla base di quelle intuizioni, non può essere *vero*. Se infatti fosse vero che tutti i cretesi mentono sempre (ossia: che tutti gli enunciati pronunciati da un qualsiasi cretese sono falsi), allora (1), essendo pronunciato dal cretese Epimenide, dovrebbe essere falso, contro l'ipotesi iniziale. Tuttavia, (1) può benissimo essere falso senza contraddizione, nel caso – piuttosto probabile – che qualche cretese abbia talvolta detto qualcosa di vero.

Abbiamo un vero e proprio paradosso del mentitore (anch'esso attribuito a un filosofo greco: Eubulide) se, invece, consideriamo il seguente enunciato:

2. (2) è falso.

Come si vede, (2) si riferisce *a se stesso*, perché è il n. 2 nella lista degli enunciati in evidenza in questo capitolo, e dice qualcosa proprio dell'enunciato n. 2[1]. Si vedrà che un qualche autoriferimento è in gioco in tutti i paradossi, tanto che spesso il fenomeno dell'autoreferenzialità (o quello ad esso connesso delle cosiddette *definizioni impredicative*, su cui tornerò in seguito) è stato ritenuto il responsabile diretto dell'insorgere delle antinomie. Tuttavia, molti enunciati autoreferenziali sono del tutto innocui, ossia possiamo stabilirne senz'altro il valore di verità in modo non problematico. Ad esempio, è facile osservare che, fra i seguenti enunciati, (3) e (4) sono veri, e (5) falso:

3. (3) è un enunciato grammaticalmente ben formato;

4. (4) è un enunciato contenuto nel libro *Teorie dell'assurdo*;

5. (5) è un enunciato stampato con inchiostro giallo.

Invece, (2) non è affatto innocuo. Ragioniamo ora per casi. Supponiamo che sia vero: allora, per ciò che dice, è falso. Viceversa, supponiamo che sia falso: questo è proprio ciò che dice, dunque è vero. Se accettiamo il Principio di Bivalenza ossia, come sappiamo, il principio secondo cui ogni enunciato o è vero o è falso, ciascuna di queste due alternative produce una situazione paradossale: (2) è vero *e* falso, contro (PNC 2a).

Ci sono molti modi in cui un enunciato può riferirsi a se stesso, dunque molte versioni del mentitore (2). Ad esempio:

2a. Questo enunciato è falso;

2b. Io sono un enunciato falso;

2c. L'enunciato che stai leggendo è falso.

A produrre il paradosso può non essere un autoriferimento diretto, ma un (corto)circuito di più enunciati. Ad esempio:

2d. (2e) è vero;

2e. (2d) è falso.

Se quel che dice (2d) è vero, allora (2e) è vero. Ma (2e) dice che (2d) è falso, dunque (2d) è vero e falso. Se invece quel che dice (2d) è falso, allora (2e) *non* è vero, bensì falso. Ma (2e) dice che (2d) è falso, dunque (2d) è daccapo vero e falso. Lo stesso tipo di ragionamento vale per (2e): se quel che dice (2e) è vero, allora (2d) è falso. Ma (2d) dice che (2e) è vero, quindi... ecc.

Altre versioni del mentitore vengono chiamate *mentitori rafforzati*[2], o anche *mentitori della vendetta* (*revenge Liars*):

6. (6) non è vero.

7. (7) è falso o né vero né falso.

Comprenderemo in seguito perché queste versioni meritino tali nomi – mentre potremmo chiamare (2) anche "mentitore standard". Possiamo però intravederne già una peculiarità: ad esempio, (6) è un enunciato che, in base a un ragionamento analogo a quello condotto per il mentitore standard, risulta essere vero *e non* vero. Ciò vuol dire che (6) dà luogo direttamente a una contraddizione di tipo (C2c), contro (PNC 2c), anche se rifiutiamo il principio (Neg 2) che equipara falsità e non-verità – e quindi equipara le contraddizioni "interne" del tipo di (C2a) e (C2b) alle contraddizioni "esterne" come (C2c).

Un altro genere di mentitore di cui dovremo occuparci in seguito è il cosiddetto paradosso di Curry, detto anche di Curry-Geach-Löb[3]:

8. Se (8) è vero, allora β,

dove β è un enunciato qualunque. Intuitivamente, (8) dice qualcosa come: "dalla mia verità segue qualsiasi cosa". La sua caratteristica peculiare è che non fa uso né della nozione di falsità – come il mentitore standard (2) –, né di quella di negazione – come il mentitore rafforzato (6). Secondo alcuni, (8) mostra quindi che nessuna di queste due nozioni ha un ruolo veramente essenziale nella costituzione dei paradossi semantici. E come vedremo più avanti, il suo trattamento esige accorgimenti particolari anche da parte di chi ammette contraddizioni vere.

2.1.2. Chiusura semantica e T-schema

Tarski ascriveva la presenza dei paradossi in un linguaggio a certe caratteristiche logico-semantiche, chiamate complessivamente "condizioni di chiusura semantica". Un linguaggio semanticamente chiuso è, intuitivamente, un linguaggio capace di parlare della propria semantica, dei significati delle espressioni del linguaggio stesso. Ciò vuol dire che può non solo menzionare le proprie espressioni, ma anche attribuire loro certe proprietà semantiche[4]. Per i nostri scopi, formulerò qui le condizioni di chiusura come segue.

1. Vi è nel linguaggio un nome per ogni espressione del linguaggio stesso.

2. È possibile definire all'interno del linguaggio la nozione di verità per il linguaggio stesso.

3. Tutti gli enunciati del linguaggio sono o veri o falsi[5].

Che l'italiano soddisfi la condizione n. 1 è fuori questione. L'italiano scritto dispone di un nome per ogni sua espressione – basta metterla qui dentro: " ". Ma anche a prescindere dall'espediente grafico delle virgolette, il nostro linguaggio ordinario consente sempre l'uso contestualmente autonimo delle sue espressioni

– l'uso, cioè, in cui un'espressione denota se stessa, anziché la sua denotazione abituale (*suppositio materialis*, dicevano gli occamisti). Se vogliamo attaccare l'idea che il nostro linguaggio ordinario sia semanticamente chiuso, sembra che si debba mettere in discussione la condizione n. 2 o la n. 3 (o magari entrambe, ma forse questo sarebbe un po' troppo drastico). La condizione n. 3 è il Principio di Bivalenza. Quanto alla n. 2, dobbiamo anzitutto chiederci che cosa potremmo considerare in generale una buona definizione di verità. Tarski proponeva a tal fine la famosa "Convenzione *V*", cui si è già fatto cenno: abbiamo una definizione *materialmente adeguata* della verità per un linguaggio se, per ogni enunciato α del linguaggio, è possibile dedurre dalla definizione la corrispondente istanza del T-schema, $V(\ulcorner\alpha\urcorner) \leftrightarrow \alpha$.

È in questo senso che il T-schema può essere considerato come una caratterizzazione minimale (quantomeno estensionale) del predicato di verità, anche se secondo alcuni non ne caratterizza il senso. Come ha detto Timothy Williamson, anche se «non si sostiene che una teoria tarskiana ci dice tutta la verità sulla verità», tuttavia «ci dice una parte essenziale della verità». Si è già visto nel capitolo precedente che possiamo rifiutare di interpretare la teoria in senso robusto, corrispondentista o realista (o almeno, alcuni lo fanno); ma «senza uno schema decitazionale è dubbio che si abbia un predicato di verità in alcun senso»[6]. Certe nostre operazioni linguistiche presuppongono in modo manifesto il T-schema, e senza di esso sarebbero inspiegabili. A volte vogliamo sottoscrivere i discorsi di qualcun altro, ma non sempre possiamo limitarci a ripetere ciò che l'altro ha detto per ragioni materiali: perché era un discorso troppo lungo, o perché non sappiamo cos'abbia detto esattamente, o addirittura perché non l'ha detto ancora. Il T-schema ci garantisce un operatore, per così dire, inverso alla citazione:

> Il predicato "vero" ha la sua utilità proprio in quelle situazioni in cui, benché interessati alla realtà, siamo costretti da certe complicazioni tecniche a menzionare gli enunciati. Qui, il predicato "vero" ci serve, per così dire, a indicare la realtà attraverso l'enunciato; ci serve come un promemoria del fatto che la realtà è l'unica cosa che importi, nonostante la menzione degli enunciati. [...] Il predicato "vero" è un promemoria del fatto che – nonostante siamo passati a parlare di enunciati per ragioni tecniche – il nostro sguardo è rivolto al mondo. Questa capacità di cancellazione del predicato "vero" è esplicita nell'esempio di Tarski: "La neve è bianca" è vero se e solo se la neve è bianca[7].

Il T-schema è poi al cuore della più tradizionale concezione del significato. La semantica vero-condizionale è basata sul motto della già citata sezione 4.024 del *Tractatus*: «Comprendere una proposizione è sapere che cosa accade se essa è vera». Com'è noto, i davidsoniani prendono il motto molto sul serio, ma anche se rifiutiamo che il T-schema (o la sua generalizzazione in termini di mondi possibili) sia sufficiente a dare il significato, c'è largo consenso sul fatto che sia necessario. Il T-schema dovrebbe quindi valere per qualsiasi enunciato, essendo (una parte del)la specificazione del suo significato[8].

2.1.3. Mentitori formali

Come abbiamo sentito, Ramsey riteneva che i paradossi semantici contenessero un'inevitabile componente "empirica". In effetti l'autoriferimento è ottenuto, negli enunciati paradossali esibiti finora, con l'espediente della numerazione o attraverso espressioni indicali come "io", "questo enunciato" ecc. E che la denotazione di questo genere di espressioni, nei casi presentati sopra, sia lo stesso enunciato in cui esse figurano, risulta da informazioni fattuali e contestuali. Tuttavia, pochi anni dopo il lavoro di Ramsey, Kurt Gödel mostrò che in una teoria pienamente formalizzata e sufficientemente potente si può parlare di alcune proprietà e relazioni sintattiche e, quel che più ci interessa ora, semantiche, del linguaggio della teoria stessa, e produrre enunciati autoreferenziali tanto poco empirici quanto "2 + 2 = 4".

Anzitutto, una simile teoria può "parlare" della propria sintassi in modo incontraddittorio, avendo le risorse per nominare termini/espressioni del suo stesso linguaggio, e rappresentare certe proprietà sintattiche: ad esempio, la proprietà di essere dimostrabile nella teoria può essere espressa all'interno della teoria stessa[9]. Per ottenere ciò occorre la cosiddetta *gödelizzazione*. L'idea è semplice: quando studiamo un qualunque linguaggio formalizzato L, e una teoria T su di esso impiantata, abbiamo a che fare con un insieme numerabile di oggetti[10]. Allora, possiamo rappresentare questi oggetti associandoli a numeri naturali con un'opportuna codifica. La gödelizzazione è sostanzialmente basata su una funzione (iniettiva) g che manda ogni simbolo, formula e sequenza di formule di L in un numero naturale. Essa è poi costruita in modo che (*a*) data un'espressione di L, poniamo, α, si può stabilire qual è il numero $g(\alpha)$ che le corrisponde (e che è detto il suo numero di Gödel, o gödeliano); e viceversa (*b*) dato un numero naturale, si può stabilire se è il numero di Gödel di qualche espressione di L e, se sì, di quale.

Se ora la teoria T impiantata su questo linguaggio esprime l'aritmetica elementare, è possibile che enunciati di T "parlino" di (proprietà di, e relazioni fra) enunciati della teoria stessa, nel seguente senso. I numeri naturali svolgono nella teoria una doppia funzione: di oggetti di cui gli enunciati di T "ufficialmente" parlano, e di codici univocamente associati a espressioni del linguaggio della teoria stessa. Allora, affermazioni sintattiche *su* espressioni di T sono rispecchiate *in* T come asserzioni su (operazioni e relazioni aritmetiche fra) numeri. Detto in modo un po' suggestivo, con le parole di *Gödel, Escher, Bach* di Hofstadter: «[La teoria T], considerata come un linguaggio, è capace di "introspezione", cioè di autoanalisi»[11].

In particolare, possiamo produrre in questo quadro enunciati autoreferenziali: enunciati che "parlano di se stessi" nel senso che si riferiscono al proprio numero di Gödel, al numero cui sono essi stessi associati. La procedura per ottenere l'autoriferimento si basa sulla cosiddetta *diagonalizzazione*. Una diagonalizzazione è un'operazione che associa a una formula $\alpha[x]$ di L, contenente libera la sola variabile x, l'enunciato β che si ottiene sostituendo la variabile libera con il nome dell'enunciato stesso. β viene allora detto un *punto fisso* di $\alpha[x]$. Una teoria T soddisfa il *requisito diagonale* se, per ogni $\alpha[x]$ di L, è un teorema di T la Legge di Diagonalizzazione, o del Punto Fisso:

(PF) $\beta \leftrightarrow \alpha[x/\ulcorner\beta\urcorner]$[12].

Ora, poniamo che V e F siano, al solito, i predicati di verità e falsità per il nostro linguaggio L, e nello stesso tempo siano esprimibili nel medesimo linguaggio. In base a (PF), sarà facile avere un enunciato λ (il mentitore standard)[13] tale che:

(PF_λ) $\lambda \leftrightarrow F(\ulcorner\lambda\urcorner)$.

λ è un punto fisso del predicato di falsità. E, intuitivamente, λ afferma proprio: "Io sono un enunciato falso", ovvero: "Questo enunciato è falso". Accettando (Neg1), possiamo equivalentemente avere:

(PF_λ) $\lambda \leftrightarrow V(\ulcorner\neg\lambda\urcorner)$.

Possiamo avere un mentitore rafforzato λ_1:

($\text{PF}_{\lambda 1}$) $\lambda_1 \leftrightarrow \neg V(\ulcorner\lambda_1\urcorner)$.

λ_1 dice intuitivamente: "Questo enunciato non è vero". Il paradosso di Curry, poi, sarà un punto fisso della formula schematica $V(x) \to \beta$ (con β enunciato qualunque), ossia un enunciato λ_2 tale che:

($\text{PF}_{\lambda 2}$) $\lambda_2 \leftrightarrow (V(\ulcorner\lambda_2\urcorner) \to \beta)$[14].

Vediamo ora, a titolo d'esempio, una dimostrazione formale di come dal mentitore standard segua una contraddizione. Dovremo far attenzione soprattutto ai principi utilizzati:

1.		$\lambda \leftrightarrow F(\ulcorner\lambda\urcorner)$	(PF_λ)
2.		$V(\ulcorner\lambda\urcorner) \leftrightarrow \lambda$	(T) (con $\alpha = \lambda$)
3.		$V(\ulcorner\lambda\urcorner) \leftrightarrow F(\ulcorner\lambda\urcorner)$	1, 2, Sost
4.		$(V(\ulcorner\lambda\urcorner) \to F(\ulcorner\lambda\urcorner)) \wedge (F(\ulcorner\lambda\urcorner) \to V(\ulcorner\lambda\urcorner))$	3, Df$\leftrightarrow$
5.		$V(\ulcorner\lambda\urcorner) \vee F(\ulcorner\lambda\urcorner)$	(PB) (con $\alpha = \lambda$)
6.	6	$V(\ulcorner\lambda\urcorner)$	Ass
7.		$V(\ulcorner\lambda\urcorner) \to F(\ulcorner\lambda\urcorner)$	4, E$\wedge$
8.	6	$F(\ulcorner\lambda\urcorner)$	6, 7, E $\to$
9.	6	$V(\ulcorner\lambda\urcorner) \wedge F(\ulcorner\lambda\urcorner)$	6, 8, I$\wedge$
10.	10	$F(\ulcorner\lambda\urcorner)$	Ass
11.		$F(\ulcorner\lambda\urcorner) \to V(\ulcorner\lambda\urcorner)$	4, E$\wedge$
12.	10	$V(\ulcorner\lambda\urcorner)$	10, 11, E $\to$

13.	10	$V(\ulcorner\lambda\urcorner) \wedge F(\ulcorner\lambda\urcorner)$	10, 12, I$\wedge$
14.		$V(\ulcorner\lambda\urcorner) \wedge F(\ulcorner\lambda\urcorner)$	5, 6, 9, 10, 13, E$\vee$

Dunque, il mentitore standard λ è un enunciato vero e falso, contro (PNC 2a)[15]. Naturalmente, in conformità a (Neg 1) si può dire equivalentemente che è un enunciato vero la cui negazione è altresì vera, $V(\ulcorner\lambda\urcorner) \wedge V(\ulcorner\neg\lambda\urcorner)$, contro (PNC 2b).

2.2
Due linee d'attacco

Visto che la condizione n. 1 per la chiusura semantica è fuori discussione per il linguaggio ordinario, si è detto che potremmo provare con l'attaccare la condizione n. 2 o la n. 3. In effetti, nella dimostrazione formale appena presentata entrambe svolgono un ruolo decisivo. Notiamo infatti, per prima cosa, che già al passo n. 3 della prova abbiamo derivato la tesi paradossale (anche se non si tratta di una contraddizione esplicita), per cui il mentitore è vero se e solo se è falso. Questa è ottenuta da (PF_λ) per semplice sostituzione di equivalenti, proprio mediante un'istanza del T-schema, introdotta al passo n. 2. Notiamo poi che la prova, oltre a usare regole logiche basilari come Eliminazione della Congiunzione e *modus ponens*, è essenzialmente un passo di Eliminazione della Disgiunzione, e che la disgiunzione assunta (al passo n. 5) è un'istanza del Principio di Bivalenza.

Se il T-schema in sé è irrinunciabile perché «ci dice una parte essenziale della verità», dovremo dunque fare a meno dell'idea che una definizione della nozione di verità per L conforme alla convenzione tarskiana (ossia, da cui sono deducibili tutte le istanze del T-schema) sia *esprimibile in* L; o in alternativa, dovremo rinunciare alla bivalenza, ossia all'idea che tutti gli enunciati di L siano veri o falsi. E queste sono, in effetti, le due vie principali battute da coloro che hanno tentato di risolvere il problema dei paradossi semantici salvando il (PNC). Le discuterò nei paragrafi che seguono.

2.3
Parametrizzazione, I

I paradossi semantici portarono Tarski a concludere che la nozione di verità per un linguaggio non deve essere definibile entro quel linguaggio stesso:

> Non è affatto necessario che la lingua di cui parliamo coincida con la lingua in cui parliamo. Si è costruita la semantica di una lingua in quella lingua stessa, e, in generale, ci si è comportati come se nel mondo vi fosse una sola lingua. L'analisi delle antinomie menzionate mostra invece che i concetti semantici non hanno semplicemente alcun posto nella lingua cui si riferiscono, e che la lingua che contiene la propria semantica, e nella quale valgono le comuni leggi logiche, deve inevitabilmente essere inconsistente[16].

Tarski attaccò dunque proprio la condizione n. 2 per la chiusura semantica. In realtà, egli *non* propose la propria sistemazione per il linguaggio ordinario – al contrario, pensava che questo *fosse* semanticamente chiuso, e disperava di poterne fornire quindi una semantica scientifica. Ma molti hanno ritenuto, *faute de mieux*, che la soluzione tarskiana possa funzionare anche per il linguaggio ordinario. Esporrò dunque ora questa soluzione. Svolgerò poi qualche considerazione sull'applicabilità della proposta all'italiano di tutti i giorni. Infine, sottolineerò alcune (note) difficoltà intrinseche della teoria stessa.

L'idea di base è che il predicato di verità non possa essere *univoco*: quella che appare come un'unica espressione linguistica nella grammatica superficiale svolgerebbe cioè una funzione ambigua per diversi linguaggi semanticamente aperti al livello della grammatica profonda. In luogo di un unico linguaggio, avremmo allora una gerarchia strutturata all'incirca come segue. Per ciascun ordinale *n* avremo un linguaggio L_n, e *n* sarà detto l'*ordine* di L_n. Possiamo cominciare con L_1, inteso come il linguaggio per il quale cerchiamo una definizione della verità. Questa definizione non sarà formulabile in L_1, bensì in un linguaggio L_2, in cui possiamo parlare dei concetti semantici che riguardano L_1, e che è il suo metalinguaggio, e fornire una definizione di verità per L_1. A sua volta, anche L_2 non può esprimere i propri concetti semantici; una definizione di verità per L_2 andrà formulata in un linguaggio L_3, che è il metalinguaggio di L_2, e così via.

Tutte le istanze del T-schema, allora, sono essenzialmente metalinguistiche. Per ripetere l'esempio tarskiano:

"La neve è bianca" è vero se e solo se la neve è bianca,

è un'espressione metalinguistica, in cui:

"La neve è bianca"

è tutto intero il nome, nel metalinguaggio, dell'enunciato del linguaggio oggetto corrispondente. Invece l'espressione:

la neve è bianca,

che figura a destra del "se e solo se", sarebbe la traduzione metalinguistica di quell'enunciato[17]. Com'è chiaro, questo è un caso della strategia di *parametrizzazione* di cui ho parlato nel CAP. 1. La soluzione tarskiana è una distinzione di rispetti, ossia parametrizza i predicati semantici (in particolare, il predicato di verità) lungo la gerarchia dei linguaggi. Troveremo gerarchie e distinzioni di rispetti anche in alcuni tentativi di soluzione dei paradossi insiemistici. Nel frattempo, chiediamoci: può una concezione come quella tarskiana fornirci una buona rappresentazione del funzionamento del nostro linguaggio ordinario?

2.3.1. Il fallimento di una gerarchia

Naturalmente no. Una differenza decisiva fra una gerarchia cosiffatta di linguaggi e l'italiano è che non sembra esserci *alcun* metalinguaggio per la lingua italiana – il che diventa ovvio, se accettiamo l'idea che il linguaggio ordinario sia, per così dire, "trascendentale": tutto ciò che è esprimibile linguisticamente è esprimibile nel nostro linguaggio naturale. Inoltre, non vi è alcuna evidenza che il predicato dell'italiano "è vero" svolga una qualche funzione ambigua lungo una gerarchia di linguaggi, metalinguaggi, metametalinguaggi ecc. – funzione che sarebbe occultata dalla "grammatica di superficie". Sicché la proposta gerarchica ha l'aria di una strategia *revisionista*, ossia una proposta di gerarchizzazione, dunque di regimentazione, del linguaggio ordinario. Se è vero che l'idea passò per la testa a Tarski, non si può dire che egli la trovasse soddisfacente:

> Se qualcuno poi, nonostante tutte le difficoltà, desiderasse perseguire la costruzione di una semantica del linguaggio colloquiale con l'aiuto di metodi esatti, sarà condotto anzitutto a intraprendere l'ingrato compito di una riforma di questo linguaggio. Troverà necessario definire la sua struttura, superare l'ambiguità dei termini che vi compaiono, e infine suddividerlo in una serie di linguaggi di ampiezza sempre maggiore, ciascuno dei quali stia rispetto al successivo nella stessa relazione in cui un linguaggio formale sta col suo metalinguaggio. Ci si potrebbe domandare, tuttavia, se il linguaggio della vita di tutti i giorni, dopo esser stato così "razionalizzato", conserverebbe ancora la sua naturalezza, e se non assumerebbe piuttosto le caratteristiche dei linguaggi formalizzati[18].

Si capisce il motivo della riluttanza di Tarski. In primo luogo il livello o l'ordine di un'ascrizione di verità o falsità in italiano dipenderebbe da imprevedibili fattori contingenti e ampiamente contestuali. Ciò renderebbe estremamente difficile pensare che si possa, in linea di principio, esplicitare l'ordine di ogni ascrizione di verità. Ad esempio, l'ordine di:

9. Tutto quello che il papa ha detto nell'*Angelus* di ieri è vero,

dipende da che cosa ha detto il papa ieri, e particolarmente dal fatto che ieri il papa si sia pronunciato sulla verità di qualche altro enunciato. Allora bisogna andare a controllare cosa dicono questi enunciati, e se fra le altre cose il papa ha detto, ad esempio, "Fratelli, sappiate che tutto quello che Dan Brown ha scritto ne *Il codice da Vinci* è falso!", occorre andare a controllare uno per uno tutti gli enunciati contenuti nel romanzo, e così via[19].

Inoltre una gerarchia di tipo tarskiano, oltre a escludere i paradossi, escluderebbe molti enunciati perfettamente sensati e non problematici dell'italiano. Qualunque linguaggio che soddisfi le costrizioni della gerarchia sarebbe non (più) l'italiano, ma qualcosa di molto più debole dal punto di vista espressivo. Consideriamo ad esempio:

10. Tutti gli enunciati stampati in *Teorie dell'assurdo* sono veri.

Questo sembra un enunciato del tutto sensato. Basterebbe scoprire un enunciato falso stampato in questo libro (cosa non improbabile: io sono un tipo distratto e statisticamente commetto più di qualche errore in ogni libro), per stabilirne il valore di verità: (10) sarebbe falso. Viceversa, se tutti gli enunciati contenuti in questo libro sono veri, naturalmente anche (10) lo è. Ma (10) non può essere un enunciato di una gerarchia tarskiana, perché attribuisce la verità a se stesso. Poniamo poi che fra gli enunciati pronunciati ieri da Silvio Berlusconi uno solo fosse un'ascrizione di verità, e cioè:

11. Tutto quello che Romano Prodi dirà domani è falso,

e poniamo che fra gli enunciati pronunciati oggi da Romano Prodi uno solo sia un'ascrizione di verità, cioè:

12. Tutto quello che Silvio Berlusconi ha detto ieri è falso.

È chiaro, ha osservato Saul Kripke, che (11) e (12) dovrebbero essere ciascuno "meta-" dell'altro, ciascuno parlando tuttavia sensatamente dell'altro – tanto è vero che possiamo assegnare loro un valore di verità definito senza problemi: se infatti Silvio Berlusconi ieri ha detto una sola cosa vera – diversa da (11) –, allora (12) è falso. E se Romano Prodi oggi ha detto una sola cosa vera – diversa da (12) –, allora (11) è falso[20]. Secondo Kirkham ciò «distrugge la possibilità che la distinzione linguaggio-oggetto/metalinguaggio sia una soluzione del paradosso»[21].

2.3.2. Mentitore II, la vendetta

A parte la sua inadeguatezza rispetto al linguaggio ordinario, la soluzione gerarchica ha altri notevoli guai intrinseci. Anzitutto, è soggetta a un *revenge Liar*, a un mentitore rafforzato, ancorché diverso da quelli formulati sopra (su cui, invece, tornerò fra poco). Consideriamo l'enunciato[22]:

13. (13) è falso al proprio ordine.

Formalmente, si tratterebbe di un enunciato λ_3 tale che:

$$(\mathrm{PF}_{\lambda_3}) \quad \lambda_3 \leftrightarrow F_{ord(\lambda_3)}(\ulcorner\lambda_3\urcorner).$$

Se questo enunciato rientrasse in una gerarchia tarskiana, avrebbe un certo ordine, poniamo, *i*. Allora da (PF_{λ_3}) il T-schema per l'ordine *i* ci darebbe:

$$V_i(\ulcorner\lambda_3\urcorner) \leftrightarrow F_{ord(\lambda_3)}(\ulcorner\lambda_3\urcorner);$$

poiché $ord(\lambda_3) = i$, ne deriveremmo:

$$V_i(\ulcorner\lambda_3\urcorner) \leftrightarrow F_i(\ulcorner\lambda_3\urcorner),$$

da cui, stante la bivalenza (che qui non è in discussione) seguirebbe una contraddizione esplicita, mediante una prova formale strutturalmente identica a quella fornita sopra. Naturalmente, si può negare che (13), o λ_3, *siano* esprimibili in una gerarchia compiuta. Anzitutto questo mostra daccapo che non abbiamo a che fare con (una teoria per) il linguaggio ordinario, visto che nel nostro linguaggio naturale possiamo riferirci a, o quantificare sensatamente su, ordini diversi. Ma soprattutto, la stessa teoria gerarchica *esige* una tale quantificazione *per essere esprimibile*. Anche solo per spiegare la gerarchia, dobbiamo dire cose come:

14. Per ogni ordine n, c'è un diverso predicato di verità V_n.

(14) esprime esattamente una tesi centrale della teoria gerarchica, e lo fa quantificando sugli ordini. Ma questo è appunto ciò che non si può dire secondo la teoria stessa[23].

Troviamo qui un caso della situazione prospettata alla fine del primo capitolo: una teoria che mira a risolvere i paradossi logici salvando il (PNC) deve fronteggiare paradossi rafforzati, formulati proprio utilizzando i concetti caratteristici di quella teoria (nel caso, quello di ordine). Questi nuovi paradossi sono risolvibili solo escludendo l'esprimibilità di certe nozioni. Ma l'esclusione, nel caso della teoria gerarchica, è fatale alla teoria stessa. Questo tipo di difficoltà sembra riguardare non solo la gerarchia tarskiana, ma qualsiasi tentativo di soluzione dei paradossi che giochi sulla distinzione dei rispetti, o parametrizzazione (e infatti la ritroveremo trattando di certi approcci parametrici ai paradossi insiemistici). Una volta che si siano distinti parametri, possiamo sempre quantificare su di essi e riformulare un paradosso. Escludere che la quantificazione sui parametri sia esprimibile, o abbia senso, rende inesprimibile, o insensata, la teoria stessa.

2.4
Gaps, soluzione categoriale ed enunciati che non atterrano

Se l'attacco alla clausola n. 2 per la chiusura semantica si rivela infruttuoso, potremmo provare con la clausola n. 3. Numerosi approcci ai paradossi semantici, anche molto diversi fra loro, sono accomunati dalla rinuncia al Principio di Bivalenza: si ammettono *gaps* nei valori di verità, ossia si ammettono enunciati né veri né falsi, e si includono fra essi i mentitori[24]. L'idea intuitiva è che, dal fatto che abbiamo un enunciato pur sempre "paradossale", nel senso che se fosse vero sarebbe falso e viceversa, non segue la contraddizione di tipo (C2a) per cui esso è vero *e* falso. Possiamo evitare la contraddizione rifiutando che verità e falsità siano le due uniche alternative percorribili, e concludere che il mentitore non è né l'una cosa né l'altra[25].

La chiave di una semantica non bivalente sta, tipicamente, nel modificare la clausola per la negazione. Come sappiamo, la negazione standard è conforme a (Neg2), ossia la sua clausola caratteristica (espressa ora nella notazione che distingue il metalinguaggio) suona:

(Neg2) $V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner) \Leftrightarrow$ Non $V(\ulcorner\alpha\urcorner)$.

(Neg2) dice che la verità della negazione di α – ossia, in base a (Neg1), la falsità di α – equivale alla non-verità di α. Questa equivalenza è lasciata cadere in un approccio non bivalente, in cui vero e falso sono resi parzialmente indipendenti. In particolare – contro la metà da destra a sinistra di (Neg2) – la non-verità di α *non* ne implica più la falsità. Si apre quindi la possibilità che α non sia vero, ma neppure falso. Si adopera quindi la cosiddetta *negazione di scelta*, la cui semantica è data dalle seguenti due clausole:

(S¬1) $V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner) \Leftrightarrow F(\ulcorner\alpha\urcorner)$

(S¬2) $F(\ulcorner\neg\alpha\urcorner) \Leftrightarrow V(\ulcorner\alpha\urcorner)$.

La negazione di α è vera se e solo se α è falsa, e viceversa.

Il primo problema degli approcci non bivalenti ai paradossi semantici è fornire ragioni indipendenti per considerare i mentitori come *gaps*. Naturalmente, la tesi dell'esistenza di enunciati né veri né falsi in generale *è* indipendentemente attestata: i filosofi del linguaggio sono stati indotti a rinunciare alla bivalenza per trattare enunciati contenenti termini non denotanti, o predicati vaghi, o con presupposizioni non vere ecc. (ho già accennato in proposito all'approccio supervalutazionale di van Fraassen, Fine e altri). Ma perché dovremmo ammettere nel club anche i mentitori? Come dicevo alla fine del capitolo precedente, non è difficile scartare una premessa a caso per bloccare la deduzione dei paradossi, ma da una *buona* soluzione ci si attende qualcosa di più. Ora, le motivazioni fornite dai *gappers* non appaiono molto convincenti.

Secondo la *category solution* sviluppata in numerosi saggi da R. L. Martin, i mentitori sono *errori categoriali*, e come tali privi di valore di verità. L'idea di partenza (risalente quantomeno a Gilbert Ryle)[26], è che il linguaggio naturale, oltre a clausole di buona formazione sintattica, debba rispettare regole, diciamo così, di "correttezza semantica". In particolare, ogni predicato ha un ambito di applicazione proprio, un dominio di oggetti a cui *può* applicarsi (veramente o falsamente). Un enunciato $P(m)$ può essere privo di valore di verità pur essendo sintatticamente ben formato, se m non rientra nell'ambito di P – se m non è, per così dire, il giusto *tipo* di cosa di cui si possa dire, veramente o falsamente, che è P[27]. Consideriamo il famoso esempio di Chomsky:

15. Idee verdi incolori dormono furiosamente.

A differenza di:

16. Verde è e per ma dormono,

in (15) non c'è nessuna sgrammaticatura. Tuttavia, noi abbiamo la sensazione che in (15) ci sia qualcosa di sbagliato per ragioni semantiche. Abbiamo postulati di significato fortemente radicati nella nostra competenza lessicale, in base a cui se qualcosa è un'idea, ossia un'entità immateriale, allora non ha nessun colore, e neppure può dormire; e se qualcosa è verde, allora non è incolore ecc.

Ma perché i mentitori sarebbero errori categoriali, cioè qualcosa di simile a (15), visto che non ne hanno affatto l'aspetto? Nel mentitore standard, "Questo enunciato è falso", la denotazione del soggetto, ossia il mentitore standard, sembra essere proprio il *giusto* tipo di cosa cui si applicano i predicati di verità e falsità: un enunciato[28]. Perché considerarlo come un errore categoriale? Martin ha fornito una procedura di decisione per la correttezza categoriale; ma a parte il fatto che questa si applica direttamente solo a enunciati atomici, e quindi non funziona per mentitori che non sono atomici, come ad esempio i mentitori rafforzati; oltre a ciò, la procedura include una clausola *speciale* per escludere i mentitori, i quali altrimenti passerebbero il test – e questo suona molto *ad hoc*[29].

La teoria della verità di Kripke (1975) non se la cava affatto meglio. Al centro dell'approccio kripkiano sta la nozione di *fondatezza* (*groundedness*), che si potrebbe illustrare in modo molto informale come segue. Prendiamo un enunciato ε, il quale dice che (alcuni de)gli enunciati di un certo insieme A hanno una proprietà semantica – ad esempio: sono veri. Il valore di verità di ε può essere stabilito solo se sono determinati i valori degli enunciati in A. Poniamo ora che uno di essi, ε_1, dica che (alcuni de)gli enunciati di un certo altro insieme B hanno quella proprietà semantica. Allora il valore di verità di ε_1, a sua volta, può essere stabilito solo se sono determinati i valori degli enunciati in B; poniamo quindi che un enunciato in B, ε_2, ... e così via. Se la catena termina prima o poi in enunciati che non parlano di proprietà semantiche, allora ε è *fondato*, nel senso che abbiamo un buon motivo per assegnargli un valore di verità anziché un altro. Altrimenti ε è infondato, *ungrounded*: "non tocca terra", ma rimane a svolazzare nell'aria rarefatta degli enunciati che parlano della semantica di (altri) enunciati[30]. Ciò succede in particolare per il mentitore. "Questo enunciato è falso" non atterra: non c'è nessun fatto "non semantico" da cui far dipendere la sua valutazione come vero, o come falso, mentre l'idea sottostante alla nozione di *groundedness* è che «la verità di un enunciato deve essere fondata in qualcosa che sta fuori dell'enunciato stesso»[31].

Notiamo che, in base a questa caratterizzazione intuitiva, la proprietà di essere *ungrounded* non è rigidamente determinata mediante condizioni sintattiche o semantiche, ma «normalmente dipende dai fatti empirici»[32]. Inoltre, non coincide con quella di essere autoreferenziale. Ad esempio:

17. Questo enunciato è composto di sette parole,

è chiaramente autoreferenziale, ma è fondato (e possiamo facilmente stabilire che è vero). Inoltre, gli enunciati infondati non coincidono nemmeno con quelli paradossali. Il famoso caso kripkiano è:

18. (18) è vero.

Ora, (18) sembra essere un parente stretto del mentitore standard, visto che, oltre a essere autoreferenziale, si attribuisce la proprietà semantica per eccellenza. Tuttavia, (18) non dà luogo ad alcun paradosso, visto che se è vero è vero, e se è falso è falso: il fatto che non abbiamo nessuna ragione per scegliere l'una o l'altra opzione ci dà un'idea plausibile del perché (18) suoni infondato[33]. Ma qui emerge anche il carattere *ad hoc* della decisione di trattare allo stesso modo il mentitore. Riprendiamo ancora il nostro iniziale mentitore standard:

2. (2) è falso.

Nonostante le affinità, (2) e (18) sono devianti in modo piuttosto diverso. Nel caso di (18), le nostre intuizioni non appaiono sufficienti a determinare il valore di verità, il che è per l'appunto ciò che ne fa un candidato intuitivo al ruolo di un *gap* semantico: il suo valore di verità è *sotto*determinato, e questo è ciò per cui (18) può suonare né vero né falso. Ma quelle stesse intuizioni, nel caso di (2), appaiono *più* che sufficienti, nel senso che danno luogo a un *glut* di valori di verità: (2) è intuitivamente *sovra*determinato, vero *e* falso[34]. Sembra invece che l'unica motivazione per non considerarlo come tale, e iscriverlo fra i *gaps*, sia precisamente quella (*ad hoc*) di salvaguardare il (PNC). In questo senso, la teoria non arriva a soddisfare il requisito n. 2 per "buone" soluzioni dei paradossi, elencato alla fine dello scorso capitolo. Come ha detto Kirkham: «La soluzione di Kripke non è né più né meno *ad hoc* di quell[a] di Tarski [...]. Egli non ha ragioni indipendenti, oltre a quella di risolvere il paradosso, per porre le restrizioni che pone su ciò che può e non può avere un valore di verità»[35].

2.4.1. Altri mentitori della vendetta

Ma le difficoltà più serie per tutti gli approcci non bivalenti ai paradossi provengono (come ha evidenziato, fra l'altro, lo stesso Kripke) dai *revenge Liars*. Entrano qui in gioco, cioè, i mentitori rafforzati che abbiamo incontrato all'inizio di questo capitolo:

6. (6) non è vero,

7. (7) è falso o né vero né falso.

Dove sorge dunque il problema? L'idea centrale di queste proposte, si è detto, è che ci siano *gaps*, enunciati né veri né falsi (e che i mentitori siano tra questi). Ma può il *gapper* esprimere *questa* idea all'interno del linguaggio per cui sta fornendo la propria teoria? Sembra di no. Anzitutto, se un enunciato α non è vero e non è falso, *a fortiori*, non è vero, sicché "α non è vero" dev'essere vero (se qualcosa implica un enunciato, implica la verità di quell'enunciato)[36]. Sembra dunque fuori discussione che il *gapper* accetti questo principio:

19. Se α non è vero, allora "α non è vero" è vero.

Ora consideriamo il mentitore rafforzato (6) e ragioniamo per casi. (6) è vero, o falso, o né vero né falso. Se è vero, allora per ciò che dice non è vero. Se non è vero, ossia è o falso o né vero né falso, allora è vero, visto che dice proprio di non essere vero. In ciascun caso, abbiamo una contraddizione. Si può a questo punto obiettare che l'inferenza dalla non verità e non falsità di (6) alla sua verità è illegittima. Sennonché il *gapper* è impegnato in (19), e un'istanza di (19) è:

20. Se (6) non è vero, allora "(6) non è vero" è vero.

Quindi, poiché "(6) non è vero" è proprio (6), se (6) non è vero, allora (6) *è vero*. Lo stesso genere di cosa accade con (7).

I *gappers* possono aggirare la difficoltà escludendo che la nozione di enunciato né vero né falso, o di *gap*, sia esprimibile nel linguaggio per cui stanno fornendo la propria teoria[37]. Quindi, il linguaggio per cui la soluzione dei paradossi viene proposta non è il linguaggio in cui la teoria è formulata; e, ammette Kripke, «non possiamo evitare il bisogno di un metalinguaggio»[38]. Naturalmente, noi *possiamo* esprimere tutta la situazione in italiano (io l'ho appena fatto, e i *gappers* lo fanno nelle loro teorie). Quindi, il linguaggio per cui la soluzione dei paradossi viene proposta non è l'italiano. Come ha rilevato Usberti:

> Il limite essenziale della teoria della verità di Kripke, da lui stesso messo in evidenza e, secondo me, intrinseco ad ogni approccio fondato sull'uso di una semantica non bivalente, è costituito da certi precisi *limiti* a ciò che si può esprimere *mediante* il predicato [di verità], *riguardo* alla gerarchia di Kripke stessa. In particolare, come abbiamo visto accadere anche nell'approccio di Martin, è la *non verità e non falsità* degli enunciati né veri né falsi di L' che non può essere espressa in L' mediante enunciati veri. Questo limite non dipende affatto dalle scelte particolari che Kripke fa nel costruire la sua teoria, ma dalla scelta generale di una semantica non bivalente; in effetti, le difficoltà "espressive" della teoria di Kripke sono le stesse di quella di Martin, sebbene i due approcci si differenzino in molti punti [...]. Quindi la necessità di un metalinguaggio, e quindi di un predicato metalinguistico di verità, non è interamente eliminata neppure in questo approccio[39].

2.5
L'essenza del mentitore

Sembra che diverse strategie di soluzione dei paradossi semantici, dunque, vadano incontro a un unico problema. Che, com'è chiaro, è proprio quello adombrato alla fine del CAP. 1: la soluzione proposta adopera concetti, come quelli di *ordine* o di *gap* (enunciato né vero né falso), mediante i quali si può generare una nuova versione del paradosso. L'unica via per salvare la coerenza della teoria è negare che quei concetti siano esprimibili nel linguaggio per il quale la soluzione viene fornita. Ma ciò equivale ad ammettere che quel linguaggio non è l'italiano ordinario, in cui invece tali nozioni sono perfettamente esprimibili. Secondo Priest, ciò suggerisce che il problema dei paradossi semantici non solo non è stato risolto finora, ma non è neppure risolvibile in linea di principio da *qualsiasi* approccio che voglia salvare il (PNC)[40].

A detta di Priest, i mentitori rafforzati mostrano che vi è un'unica struttura essenziale del paradosso semantico, al di sotto delle sue varie formulazioni. La totalità degli enunciati è divisa in due sottoinsiemi: l'insieme degli enunciati veri e il suo *complemento* standard – chiamiamolo il Resto. L'essenza del mentitore è una costruzione autoreferenziale che forza un enunciato, il quale si trovi nell'insieme degli enunciati veri, a essere anche nel Resto, e viceversa. Il mentitore standard, "Questo enunciato è falso", non è altro che un caso particolare di questa costruzione: e produce una contraddizione nel caso in cui il Resto coincide con l'insieme degli enunciati falsi. Questa è appunto la situazione bivalente, in cui vero e falso sono esaustivi. Possiamo credere di aver risolto il problema ammettendo enunciati né veri né falsi, e quindi rifiutando che l'insieme degli enunciati falsi esaurisca tutto il Resto. Ma i mentitori rafforzati, come (6) e (7), ci mostrano che è sempre possibile adoperare le nozioni che dovevano risolvere il paradosso per ridescrivere il Resto. In un quadro in cui gli enunciati sono suddivisi in veri, falsi, e né veri né falsi, "Questo enunciato è falso o né vero né falso" abbraccia con la propria disgiunzione esattamente la totalità del Resto, ossia il complemento dell'insieme degli enunciati veri, di cui quelli falsi costituiscono solo una parte propria. Aumentare i valori di verità non serve a nulla: se c'è una quarta cosa che un enunciato può essere, oltre a vero, falso e né vero né falso, possiamo sempre avere un altro mentitore rafforzato:

21. (21) è falso o né vero né falso o la quarta cosa[41],

e così via. Perciò, conclude Priest, «i paradossi estesi in realtà non sono nuovi paradossi, ma semplicemente manifestazioni di uno stesso e unico problema, adattabile a diversi contesti»[42]. Come si è detto, ciò costringe ad ammettere che la teoria è formulata in un linguaggio diverso da quello per il quale la teoria è stata edificata. Si ricade così nella distinzione fra linguaggio oggetto e metalinguaggio, la cui inadeguatezza è già stata sottolineata trattando dell'approccio gerarchico. Come Kripke ha affermato in conclusione di *Outline of a Theory of Truth*, «il fantasma della gerarchia di Tarski è ancora con noi»[43].

Note

1. Anche (1) si riferisce a se stesso, ma lo fa in modo diverso da (2). È questa differenza a renderlo non paradossale in senso stretto, anche se non può essere vero. (1) sostiene che tutti i membri di un insieme di enunciati (quelli che sono pronunciati da cretesi) sono falsi. Inoltre, appartiene a questo stesso insieme, per il fatto di essere pronunciato da un cretese. Dunque, (1) può essere semplicemente falso, appunto nell'ipotesi empirica che qualche enunciato, pronunciato da un cretese e diverso da (1), sia vero. E proprio in ciò sta la sua stranezza: come ha detto Stephen Kleene, «è logicamente insoddisfacente che dobbiamo sfuggire al paradosso solo in virtù dell'accidentale fatto storico che è esistito qualche cretese che talvolta diceva la verità» (Kleene, 1952, p. 39).

2. La terminologia è dovuta, per quanto ne so, a van Fraassen, 1968.

3. Il nome è dovuto a van Benthem, 1978.

4. La caratterizzazione di Kirkham è: «Un linguaggio semanticamente chiuso è un linguaggio con predicati semantici, come "vero", "falso", e "soddisfa", che possono essere applicati a enunciati del medesimo linguaggio» (Kirkham, 1992, p. 278).

5. Cfr. Priest, 1987, p. 13; Woods, 2003, pp. 170-1 (entrambi usano in effetti la nozione di *soddisfacimento*, non la nozione di *verità*; ma è noto che questa è definibile mediante quella).

6. Williamson, 1992, p. 268, in nota.

7. Quine, 1970, pp. 21-3.

8. Cfr. ad esempio Davidson, 1984, pp. 121 ss.

9. Parlo qui di teoria "sufficientemente potente" e di "esprimibilità" in maniera molto informale. Di solito i logici chiamano *sufficientemente potente* una teoria su un linguaggio formalizzato in grado di rappresentare certe funzioni isolate nell'originale articolo di Gödel sull'incompletezza dell'aritmetica (Gödel, 1931). Un esempio di teoria cosiffatta è l'aritmetica di Robinson, siglata Q, un altro l'aritmetica di Peano, PA. Su questi temi tornerò in modo un po' più preciso nel CAP. 4, in cui si parlerà del Primo Teorema di Incompletezza di Gödel. Per ora, allo scopo di evitare il *rigor mortis*, mi atterrò a un'esposizione semplificata – quanto basta per farsi un'idea di come si possano ottenere paradossi semantici "acontestuali" in una teoria formalizzata.

10. Gödel dice: «Le formule di un sistema formale [...] esteriormente, sono sequenze finite di simboli primitivi (variabili, costanti logiche e parentesi o segni di separazione) e si può facilmente precisare in modo del tutto rigoroso *quali* sequenze di simboli primitivi siano formule sensate e quali non lo siano. Analogamente le dimostrazioni, formalmente, non sono altro che sequenze finite di formule (con certe proprietà che si possono specificare)» (ivi, p. 23).

11. Hofstadter, 1979, p. 474.

12. La prima formulazione esplicita, a quanto pare, è al par. 35 di Carnap, 1937. Un'altra procedura per ottenere l'autoriferimento è quella proposta da Quine (1966, pp. 81 ss.), che fa uso di una funzione concatenante un'espressione del linguaggio col suo nome.

13. Conformemente all'uso corrente in letteratura, in certi contesti adopererò le lettere minuscole greche anche per enunciati celebri: ad esempio λ, λ_1, λ_2,... sono diversi mentitori formalizzati; più avanti incontreremo γ, il famoso enunciato indecidibile di Gödel ecc.

14. Le specifiche tecniche (e alcune complicazioni) nella formalizzazione dei paradossi sono discusse in Usberti (1980, pp. 47-52).

15. In questo tipo di presentazioni, la prima colonna numera semplicemente i passi della prova in modo progressivo. La seconda colonna indica le righe da cui la formula della riga in questione dipende (così, ad esempio, la formula al passo n. 6 dipende da se stessa, e la formula al passo n. 12 dipende dalla n. 10). Questa "colonna delle assunzioni" può essere vuota in alcune righe, quando la formula che vi compare è un principio logico o specifico, un assioma o un teorema della teoria in questione (ad esempio qui ai passi n. 2 e n. 5 ci sono un'istanza del T-schema e una del Principio di Bivalenza, che riguardano il mentitore standard λ). L'ultima colonna riporta la sigla del principio introdotto o quella della regola utilizzata per ottenere la formula, e le premesse cui è applicata. (Sost) è la sostitutività di formule equivalenti. (Df$\leftrightarrow$) applica la normale definizione del bicondizionale, ossia $\alpha \leftrightarrow \beta =_{df} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$. (Ass) è la regola di Assunzione, che consente di introdurre una qualsiasi formula in qualsiasi passo di una prova, in dipendenza da se stessa. (E$\wedge$) è la regola di Eliminazione della Congiunzione, ossia:

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta} \quad (\text{E}\wedge)$$

(E$\rightarrow$) è l'Eliminazione del Condizionale o *modus ponens*, ossia:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha}{\beta} \qquad (\text{E}\rightarrow)$$

(I$\wedge$) è l'Introduzione della Congiunzione o Aggiunzione, ossia:

$$\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta} \qquad (\text{I}\wedge)$$

(E∨) è l'Eliminazione della Disgiunzione, ossia:

$$\begin{array}{c} \quad\;\, [\alpha]\ [\beta] \\ \quad\;\, \vdots \quad \vdots \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{\alpha \vee \beta,\ \gamma,\ \gamma}{\gamma}\ (E\vee)$$

Qui le assunzioni dei disgiunti α e β figurano fra quadre, a indicare che vengono scaricate.

16. Tarski, 1936, p. 426.

17. «Chiamarla una traduzione può sembrare buffo – dice Kirkham – visto che sembra essere proprio lo stesso enunciato, ma è tecnicamente una traduzione» (Kirkham, 1992, p. 279).

18. Tarski, 1956, p. 267.

19. Cfr. Kripke, 1975, p. 59.

20. Cfr. ivi, pp. 59-60; naturalmente l'esempio originario non coinvolgeva i politici indigeni ma, come d'uso per Kripke, Richard Nixon.

21. Kirkham, 1992, p. 281.

22. L'argomento che segue è ripreso da Priest, 1987, pp. 25-6.

23. Né si può rispondere, aggiunge Priest, che le asserzioni in questione andrebbero intese a loro volta schematicamente, o come *ambigue*, se è vero che «ciò che un'asserzione tipicamente ambigua significa, ciò che si suppone noi comprendiamo mediante essa, è proprio ciò che è espresso da un singolo enunciato che quantifica universalmente sopra [gli ordini]» (ivi, p. 25).

24. Seguono questa linea, fra gli altri, Bar-Hillel (1957), Martin (1967), van Fraassen (1968), Kripke (1975), Parsons (1984), Sainsbury (1995).

25. Cfr. Priest, 1987, p. 16; Sainsbury, 1995, p. 112. Alcune delle teorie a *gaps* sono radunate sotto l'etichetta di "approcci non gerarchici", perché tentano di evitare il ricorso a una gerarchia tarskiana (cfr. Usberti, 1980, cap. VII). Come vedremo, il tentativo non ha particolare successo.

26. Cfr. Ryle, 1950.

27. Cfr. Martin, 1967, pp. 288 ss.

28. Come ha detto Kirkham, «se c'è qualcosa di obiettabile intorno all'enunciato [del mentitore], non è affatto ovvio di che si tratti, visto che l'enunciato è grammaticalmente corretto, non è vago né ambiguo, e non commette alcun errore categoriale: gli enunciati sono fra le cose che possono portare valori di verità» (Kirkham, 1992, pp. 271-2).

29. Su questo carattere *ad hoc* della soluzione di Martin si è ampiamente soffermato Usberti, 1980, pp. 142 ss.

30. Cfr. ivi, pp. 166-7. Alla nota 8 del saggio, Kripke dice di aver adottato la terminologia di Herzberger, 1970. Tuttavia, gli enunciati non fondati herzbergeriani non coincidono con quelli kripkiani.

31. Sainsbury, 1995, p. 114.

32. Kripke, 1975, p. 57.

33. Cfr. *ibid*.

34. Queste osservazioni sono sviluppate in Priest, 1987, pp. 17-8.

35. Kirkham, 1992, p. 291.

36. Cfr. Sainsbury, 1995, p. 116.

37. Seguono questa linea, ad esempio, van Fraassen e lo stesso Kripke.

38. Kripke, 1975, p. 81.

39. Usberti, 1980, pp. 178-9.

40. Cfr. Priest, 1987, pp. 29-31.

41. Cfr. Kirkham, 1992, p. 294.

42. Priest, 1987, p. 29.

43. Kripke, 1975, p. 80.

3
I limiti dell'astrazione

3.1
Esistenza e Oggettività, ovvero il Principio di Astrazione

I filosofi analitici del linguaggio si sono concentrati soprattutto sui paradossi semantici, ma quelli insiemistici non sono meno interessanti, soprattutto da un punto di vista ontologico. Quella che si chiama di solito teoria ingenua degli insiemi (*naïve set theory*), come presentata ad esempio nella formalizzazione di Frege, si basa su due principi che catturano la nostra concezione intuitiva di insieme. Il *Principio di Estensionalità* dà le condizioni sufficienti per l'identità fra insiemi:

(PE) $\forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z) \rightarrow y = z$,

informalmente: "Se y e z hanno esattamente gli stessi elementi, sono lo stesso insieme". Un insieme, dunque, è interamente determinato dai suoi elementi. Quel che più ci interessa è il *Principio di Comprensione*, o di *Astrazione*, che abbiamo già intravisto nel primo capitolo, e che qui possiamo riformulare così:

(PC) $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \alpha[x])$

(y non dev'essere libera in α)[1]. Questo principio cattura la nozione di insieme contenuta nella famosissima definizione cantoriana: «Con "insieme" intendiamo ogni riunione in un tutto M di oggetti (che vengono detti "elementi" di M) della nostra intuizione o del nostro pensiero»[2].

L'idea centrale è che *ogni* "riunione in un tutto" sia un insieme: il che vuol dire che *qualsiasi* condizione $\alpha[x]$[3] dovrebbe definirne uno. Un insieme non è altro che l'estensione di una condizione arbitraria. Per qualunque molteplicità di oggetti con una qualche condizione caratterizzante, come ha detto Ettore Casari, (PC) sembra garantire quanto segue:

1. *esiste* l'insieme y di tutti e soli quegli oggetti (chiamerò dunque questa condizione Esistenza). E inoltre:
2. y è un *oggetto* a sua volta. "Oggetto" vuol dire più o meno: qualcosa a cui possiamo *riferirci* come a un'*unità*, che è soggetto di *predicazioni*, che gode di proprietà[4] (chiamerò dunque questa condizione Oggettività).

L'unica obiezione mossa finora contro (PC), per quanto ne so, è che produce contraddizioni. E infatti, le contraddizioni insiemistiche sorgono tipicamente dalla considerazione di particolari condizioni $\alpha[x]$ che, per metterla al modo proposto da Priest cui si accennava alla fine del CAP. 1, costituiscono casi limite della capacità di astrazione del pensiero. Come conseguenza di ciò, le strategie più note che cercano di salvare dalla contraddizione la teoria degli insiemi negano per tali casi limite o la Condizione di Esistenza, o quella di Oggettività. Vedremo che nessuna delle due strategie ha particolare successo. Cominciamo intanto col produrre mediante (PC) qualche (famosa) contraddizione.

3.1.1. Paradossi famosi

Il più semplice e noto fra i paradossi insiemistici è senz'altro quello prodotto dal celebre insieme di Russell:

$$R = \{x \mid x \notin x\}.$$

R è l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi come membri o elementi. Siccome $\alpha[x]$ in (PC) sta per qualsiasi condizione, possiamo prendere la condizione $x \notin x$ e avremo:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \notin x).$$

Dunque, (1) *sussiste* un insieme – anzi, in virtù di (PE), *l'*insieme, corrispondente a tale condizione, ossia y è proprio R:

$$\forall x (x \in R \leftrightarrow x \notin x);$$

ma anche, (2) R è un *oggetto*, ossia qualcosa di cui ci possiamo chiedere, per ogni proprietà o condizione, se ne gode o meno. Ciò vale anche per la proprietà di non essere membro o elemento di se stesso. Siccome ciò che vale per ogni x vale per R, avremo:

$$R \in R \leftrightarrow R \notin R,$$

da cui, assumendo il Principio del Terzo Escluso, discende immediatamente una contraddizione esplicita:

$$R \in R \wedge R \notin R$$[5].

Il paradosso di Russell è la semplificazione di un paradosso noto a Cantor già dal 1899, pur venendo pubblicato solo nel 1932. Questo sorge dalla considerazione di quello che si chiama l'*insieme universo*, e che spesso si indica (a partire da Peano) con V. Lo si caratterizza tipicamente indicando una condizione d'appartenenza che qualsiasi cosa dovrebbe soddisfare, come l'autoidentità:

$$V = \{x \mid x = x\}$$[6].

Ma V può essere considerato l'insieme di tutti gli *insiemi*, se adottiamo una teoria degli insiemi *pura*, ossia il cui dominio non contiene *Urelemente*, oggetti che non siano insiemi. In questo caso, si assume di solito come "oggetto" di base l'insieme vuoto, $\varnothing$, e, per dirla in modo un po' grossolano, si ottengono gli insiemi desiderati attraverso l'iterazione di certe operazioni che generano insiemi a partire da insiemi[7]. Ora un po' di terminologia. Si dice che due insiemi x e y hanno la stessa cardinalità ($x \cong y$), ovvero sono equipotenti, se si possono porre in corrispondenza biunivoca: ossia, se esiste una funzione (detta biiettiva, o una biiezione) che appaia uno-a-uno ciascun elemento di x a ciascun elemento di y. Invece, x è maggiore o uguale a y ($x \geq y$) se c'è un sottoinsieme di x che ha la stessa cardinalità di y, e x è maggiore di y ($x > y$) se $x \geq y$ ma non $x \cong y$.

Il vero e proprio cuore della teoria cantoriana del transfinito è il *Teorema di Cantor*, ossia il teorema secondo cui l'insieme potenza di un qualsiasi insieme x, $P(x)$ (l'insieme di tutti i sottoinsiemi di x), è di cardinalità superiore rispetto a x: $P(x) > x$. Naturalmente, $P(x) \geq x$. La parte difficile è dimostrare che non $P(x) \cong x$. La dimostrazione di Cantor è per assurdo: assume che esista una corrispondenza biunivoca ϕ fra x e $P(x)$. Consideriamo l'insieme z di tutti gli elementi di x che non sono membri dell'insieme assegnatogli da ϕ, ossia $z = \{y \in x | y \notin \phi(y)\}$. Naturalmente z, essendo un sottoinsieme di x, è un elemento di $P(x)$. Dunque c'è un elemento w di x, tale che $z = \phi(w)$. Ora,

$$\begin{aligned} w \in \phi(w) \quad & \leftrightarrow w \in z \\ & \leftrightarrow w \in \{y \in x | y \notin \phi(y)\} \\ & \leftrightarrow w \notin \phi(w). \end{aligned}$$

Siccome per il Terzo Escluso o w appartiene a $\phi(w)$ o no, abbiamo:

$$w \in \phi(w) \wedge w \notin \phi(w).$$

La contraddizione così dedotta ci fa concludere che non vi è una tale corrispondenza biunivoca ϕ[8].

Questa costruzione si chiama *diagonalizzazione*. Cantor l'adoperò per mostrare che l'insieme dei numeri naturali non è il "più grande" insieme infinito, ma viene superato dall'insieme dei reali. E questo è solo l'inizio. Dato un insieme infinito, il teorema di Cantor permette di edificarne sempre uno più grande: basta iterare il passaggio all'insieme potenza. Ora, consideriamo l'insieme totale, l'insieme di tutti gli insiemi (puri), V, e il suo insieme potenza, P(V), ossia l'insieme di tutti i sottoinsiemi di V. Ogni elemento di P(V) è un insieme, sicché P(V) è un sottoinsieme di V. Ma naturalmente, anche V è un sottoinsieme di P(V). Ne segue che $P(V) \cong V$. Ma questo è escluso dal teorema di Cantor per qualsiasi insieme. Questa contraddizione viene chiamata *paradosso di Cantor*[9]. Teorema e paradosso di Cantor hanno avuto fondamentali ricadute non solo in matematica o teoria degli insiemi, ma più in generale in filosofia (ad esempio, sono alla base delle note argomentazioni di Patrick Grim, cui mi riferivo nel primo capitolo, a favore dell'incompletezza dell'universo, ossia dell'inesistenza di totalità dei fatti, o delle proposizioni, o delle verità ecc.)[10].

3.2
Circolo vizioso e tipi logici

Abbiamo detto che la distinzione fra paradossi semantici e insiemistici, dovuta a Ramsey, è successiva alla stesura dei *Principia mathematica*. Nei *Principia*, Russell ritenne che *tutti* i paradossi logici avessero la loro radice in una qualche forma di autoreferenzialità:

> In tutte queste contraddizioni [...] vi è una caratteristica comune, descrivibile come autoriferimento o riflessività. Il detto di Epimenide deve includere se stesso nel proprio ambito. Se *tutte* le classi, purché non siano membri di se stesse, sono membri di (R), ciò deve applicarsi anche a (R). [...] Nel caso del paradosso di Burali-Forti, la serie il cui numero ordinale provoca la difficoltà è la serie di tutti i numeri ordinali. In ognuna delle contraddizioni si dice qualcosa su *tutti* i casi di una qualche specie, e da quanto viene detto sembra generarsi un nuovo caso il quale è e al contempo non è della stessa specie dei casi che venivano presi in considerazione come *tutti* in ciò che veniva detto[11].

Questo passo è di un'importanza capitale, perché qui Russell trova realmente la struttura comune a un'intera serie di paradossi[12]. Nella terza sezione del libro vedremo come questa struttura generale possa essere rappresentata formalmente nell'ambito di una teoria paraconsistente degli insiemi. Nel frattempo, esaminiamo il tentativo russelliano di soluzione, il quale fu meno felice della diagnosi.

Russell imputò i paradossi a un certo tipo di definizioni, le *definizioni impredicative*. Tutti sanno che una buona definizione non deve essere circolare, ossia il *definiendum* non deve ricorrere nel *definiens*. Una definizione impredicativa contiene in sé, invece, una sorta di circolarità più sottile: è infatti la definizione di un oggetto, la quale include un riferimento a una totalità cui l'oggetto da definire appartiene. Russell ritenne che questo genere di circolarità fosse senz'altro *vizioso*, e formulò il Principio del Circolo Vizioso, la cui versione a noi più utile è quella negativa:

(PCV) Se – ammettendo che una certa collezione abbia un totale – essa contenesse membri definibili soltanto nei termini di quel totale, allora detta collezione non avrebbe un totale[13].

La posizione russelliana consiste nel negare la prima condizione vista al PAR. 3.1, ossia l'Esistenza: non possono *esistere* insiemi corrispondenti alle "totalità illegittime". Lo strumento per ottenere questa limitazione è la *teoria dei tipi logici*[14].

Per farci un'idea approssimativa di come funzioni la teoria dei tipi dobbiamo anzitutto tener conto del fatto che verte non direttamente su insiemi, ma su *funzioni proposizionali*. Russell, infatti, riteneva che le asserzioni riguardanti insiemi fossero riducibili ad asserzioni riguardanti funzioni proposizionali. Anche se i paradossi riguardano enunciati, numeri ordinali e cardinali ecc., il «caso [...] più fondamentale» del Principio del Circolo Vizioso poteva quindi essere formulato con riferimento a quelle: «Una funzione non è una funzione ben definita a meno che tutti i suoi valori non siano già ben definiti. Ne consegue che nessuna funzione può avere fra i propri valori qualcosa che presupponga la funzione stessa»[15].

In effetti, Russell aveva un dono particolare per far confusione tra uso e menzione[16]. La confusione affetta la nozione russelliana di funzione proposizionale, e nei *Principia* è così pervasiva che a detta di alcuni non si capisce se ciò che viene propriamente trattato nella teoria dei tipi sono le espressioni linguistiche o gli oggetti denotati da tali espressioni. In ogni caso, la teoria costruisce una complicata gerarchia di funzioni proposizionali, strutturata in una doppia distinzione in *tipi* e *ordini*, ma qui non è importante entrare nei dettagli[17]. Per semplificare, potremmo considerare soltanto funzioni a un argomento e ridurre il loro ordinamento a una semplice gerarchia. Se gli individui che non sono funzioni proposizionali, e che costituiscono la base della gerarchia, sono di ordine 0, le funzioni proposizionali che hanno solo individui come argomenti sono di ordine 1; le funzioni che hanno come argomenti funzioni di ordine 1 sono di ordine 2, e così via. L'ordine di una funzione proposizionale deve sempre essere di un'unità superiore a quello del suo argomento. Le funzioni sono così divise in ordini disgiunti fra loro, su cui variano variabili per ciascun ordine – il che si può esprimere con un'indicizzazione: le variabili per l'ordine n sono x_n, y_n ecc. Come ha detto Alfred Ayer, il (PCV) è incorporato nella gerarchia sulla base dell'idea sottostante che «il significato di [una] funzione proposizionale [...] non è specificato finché non si specifica il campo degli oggetti che sono candidati per soddisfarla». Di conseguenza «questi candidati non possono sensatamente includere nulla che sia definito nei termini della funzione stessa»[18].

Questa costruzione serve dunque a escludere le "totalità illegittime". Traducendo da funzioni proposizionali a insiemi, infatti, esige che ogni insieme contenga solo oggetti di *un* certo ordine; dunque, concede l'esistenza solo a insiemi composti, per così dire, di oggetti *omogenei*. Non vi è più alcun insieme di tutti gli insiemi, o di tutti gli ordinali, o di tutte le funzioni proposizionali ecc. Il Principio di Comprensione ora va riformulato così:

$$(\mathrm{PC_T}) \qquad \exists y_{n+1} \forall x_n (x_n \in y_{n+1} \leftrightarrow \alpha[x_n]),$$

e il paradosso di Russell, per esempio, si risolve escludendo che un insieme possa essere membro di se stesso, o non esserlo. La relazione di appartenenza può intercorrere, o non intercorrere, solo fra qualcosa che è di ordine n, e qualcosa che è di ordine $n + 1$. La stessa frase "l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi come membri", che descriveva R, diventa insensata, perché «l'asserto "α non è un membro di α" è sempre privo di significato»[19].

3.2.1. Parametrizzazione, II (i tipi logici sono illogici)

Se a questo punto qualcuno avesse l'impressione di un *déjà vu*, non sbaglierebbe. La strategia sottostante a quest'approccio ai paradossi, infatti, è una parametrizzazione molto pervasiva. Come la soluzione tarskiana al problema del mentitore rende sistematicamente ambiguo il predicato di verità, così la teoria dei tipi rende sistematicamente ambigue *tutte* le parole che possono dare origine a "totalità illegittime"[20]. Una delle espressioni che diventano ambigue, ovviamente, è il predicato "è un insieme", che ora viene segmentato in: "è un insieme di ordine 1", "è un insieme di ordine 2" ecc.: «Non è difficile vedere che le parole "vero" e "falso" hanno molti significati differenti, a seconda della sorta di proposizioni cui vengono applicate. [...] Un'ambiguità sistematica [è] presente nei significati delle parole "non" e "o", per la quale esse si adattano a proposizioni di qualsiasi ordine»[21]. «In tutt[i i paradossi], il manifestarsi della contraddizione è dovuto alla presenza di una qualche parola sistematicamente ambigua rispetto al tipo, come *verità*, *falsità*, *funzione*, *proprietà*, *classe*, *relazione*, *numero cardinale*, *numero ordinale*, *nome*, *definizione*. Ogni parola del genere, quando se ne trascuri l'ambiguità di tipo, genererà apparentemente una totalità contenente membri definiti nei termini di questa stessa totalità, e darà così origine a fallacie del circolo vizioso»[22].

D'altra parte, dicono Russell e Whitehead, «non è opportuno» evitare queste parole, perché «comprendono in pratica tutte le idee di cui si occupano la matematica e la logica matematica». Nonostante si asserisca che qui abbiamo anche «un'analogia sistematica»[23], però, la teoria dei tipi ne conclude che sono semplicemente parole equivoche («sistematicamente *ambigue* rispetto al tipo»).

Possiamo dunque attenderci che la gerarchia degli ordini vada incontro a guai strutturalmente analoghi a quella dei metalinguaggi. E infatti è proprio così. Anzitutto, le conseguenze "innaturali e poco convenienti" della teoria dei tipi sono state stigmatizzate molti anni or sono già da Quine. La teoria esige una moltiplicazione infinita di tutte le nozioni fondamentali: ad esempio, l'insieme vuoto, $\emptyset$, e l'insieme universo, V, sono sostituiti da una loro copia innocua per ogni livello della gerarchia. La stessa molteplicità affetta l'algebra booleana e, come risultato di questa diffusione nei livelli, si ha che nella teoria dei tipi il "complemento" di ogni proprietà (inteso in generale, come complemento dell'estensione di una funzione proposizionale) non ha nulla a che fare con ciò che intuitivamente intendiamo sotto questa nozione: il "complemento" di x non è affatto ciò che dovrebbe essere, ossia la totalità di ciò che non appartiene a x. Al suo posto, abbiamo quella minima parte del complemento intuitivo che corrisponde all'insieme di oggetti non appartenenti ad x all'interno del solo livello concesso[24].

Inoltre, escludendo tutte le definizioni impredicative, la teoria esclude alcuni teoremi che ne fanno uso, i quali non solo non sono problematici, ma appaiono essenziali all'edificazione della matematica classica – ad esempio, il teorema per cui ogni insieme di numeri reali ha un minimo confine superiore. Per non perdere queste acquisizioni, Russell aggiunse alla teoria dei tipi un principio, l'Assioma di Riducibilità, in base al quale data una funzione *f* con argomenti di ordine *n* c'è una funzione (detta *predicativa*) estensionalmente equivalente di ordine $n + 1$: «L'assioma di riducibilità sta nell'assunzione che, data una funzione qualsiasi ϕx, vi è una funzione *predicativa* formalmente equivalente, ossia vi è una funzione predicativa che è vera quando ϕx è vera e falsa quando ϕx è falsa»[25].

Il compito dell'assioma è appunto quello di recuperare certe nozioni impredicative di cui non vogliamo fare a meno. Lo stesso Russell non ne fu mai completamente soddisfatto; anzitutto, perché la sua introduzione è chiaramente *ad hoc*; poi perché il suo status di principio puramente *logico* e autoevidente appare fortemente dubbio – laddove l'originario progetto logicista di Frege e Russell prevedeva che attraverso la teoria degli insiemi la matematica fosse riducibile alla logica[26].

Dal punto di vista filosofico, inoltre, si potrebbe dire che la costruzione dei tipi e degli ordini tradisce lo spirito stesso del platonismo sottostante alla concezione cantoriana di insieme. L'idea doveva essere che gli insiemi fossero entità indipendenti dalle nostre costruzioni mentali e, in questo senso, oggettivamente esistenti. Una struttura insiemistica non dovrebbe essere *costruita* dai nostri processi definitori. Invece, ciò che rende inaccettabile una definizione impredicativa è precisamente un'impostazione di tipo costruttivista. In questo caso una definizione impredicativa, contenendo il riferimento a qualcosa che a sua volta rinvia al *definiendum*, e quindi presupponendo l'esistenza di ciò che invece dovrebbe costituire, è un vero "circolo vizioso". Ma se invece l'oggetto in questione preesiste alla definizione, il compito di questa è descrittivo e non costitutivo. Il che è ciò che il platonista Gödel fece osservare in *Russell's Mathematical Logic*, così riabilitando le definizioni impredicative:

> Anche se "tutti" equivalesse a una congiunzione infinita, il principio del circolo vizioso si applicherebbe, nella sua prima forma, solo se le entità in questione venissero costruite da noi. In questo caso, ovviamente, dovrebbe esistere una definizione (cioè la descrizione di una costruzione) che non si riferisce a una totalità alla quale l'oggetto definito appartiene, poiché la costruzione di una cosa certamente non può fondarsi sulla totalità delle cose a cui la cosa da costruire appartiene. Se invece si tratta di oggetti che esistono indipendentemente dalle nostre costruzioni, in fondo non c'è nulla di assurdo nell'esistenza di totalità che contengono membri che possono essere descritti (cioè univocamente caratterizzati) solo con riferimento a tale totalità[27].

Ora, siccome l'Assioma di Riducibilità serve a recuperare certe nozioni impredicative, ha l'aria di un tardivo tentativo di riconciliazione con un amante tradito: il realismo insiemistico. Ma c'è di peggio. L'assioma, infatti, dovrebbe valere per *tutte* le funzioni. Quando Russell parla di "una funzione qualsiasi ϕx", sta dunque violando egli stesso la teoria degli ordini, che ci consentirebbe di parlare solo di tutte le funzioni di un certo ordine. Anche qui ritroviamo una situazione già incontrata: come la gerarchia semantica di tipo tarskiano si può esporre solo adoperando nozioni di cui la teoria stessa esclude l'esprimibilità, perché se fossero esprimibili avremmo un paradosso; così la teoria degli ordini si può esporre solo quantificando su tutte le funzioni, e quindi facendo ciò che la teoria stessa esclude in quanto porterebbe ai paradossi. Non si può comprendere la teoria senza comprendere che ogni funzione proposizionale appartiene a un certo ordine, ma "ogni funzione proposizionale" è escluso come insensato dalla teoria (ciò è stato notato molto tempo fa già da Fitch)[28]. Le stesse formulazioni del Principio del Circolo Vizioso, osserva Priest, sono una sua violazione: «Formulazioni decenti del PCV [...] devono dire che *per ogni funzione f*, ogni funzione proposizionale che "involge" *f* non può essere un argomento per *f*. Queste affermazioni sono impossibili per ammissione dello stesso Russell. [...] Secondo la sua stessa teoria, la teoria di Russell è inesprimibile [...]; ma egli la esprime»[29].

3.3
Aristotele, ZF e la Limitazione di Grandezza

La teoria assiomatica degli insiemi più classica è forse quella proposta da Zermelo e poi sviluppata da Fraenkel, nota come ZF e formulata in un linguaggio del primo ordine con variabili che variano su insiemi puri (assumiamo qui senz'altro la versione senza *Urelemente* della teoria). ZF è basata sul principio detto della *Limitazione di Grandezza*[30], e nega daccapo la Condizione di Esistenza. Questa, come abbiamo visto, era anche la strategia di Russell. Mentre però nella teoria russelliana la restrizione riguarda i membri degli insiemi, che devono essere omogenei nel senso visto sopra, per Zermelo la restrizione riguarda gli insiemi stessi: si nega l'esistenza degli insiemi come V, l'insieme di tutti gli insiemi, o Ω, l'insieme di tutti gli ordinali, in quanto "troppo grandi". Anzitutto, osserviamo che l'idea informale della limitazione di grandezza è antica quasi quanto l'origine del pensiero filosofico. Infatti, già Aristotele aveva rilevato contro i suoi predecessori (Parmenide anzitutto, ma poi anche Platone) che certe nozioni estremamente comprensive non possono, pena la violazione del (PNC), dar luogo a generi o insiemi. In un famoso passo della *Metafisica*, egli mostra che l'essere non è un genere – e quindi, che "essere" è un πολλαχῶς λεγόμενον, si dice in molti modi: «Ma non è possibile che né l'Uno né l'Essere siano un genere. (È necessario, infatti, che le differenze di ciascun genere siano, e che ciascuna differenza sia una. D'altra parte, è impossibile che le specie di un genere si predichino delle proprie differenze, o che il genere senza le sue specie si predichi delle sue differenze. Ne segue che, se l'Essere e l'Uno sono generi, nessuna "differenza" potrà essere né essere una)»[31].

In certo modo, negare che l'essere sia un genere equivale a negare che esista qualcosa come V, se (lasciando cadere per un momento la limitazione agli insiemi "puri") intendiamo V non solo come l'insieme di tutti gli insiemi, ma come l'insieme di tutte le cose. Secondo gli scolastici, l'argomento doveva valere per tutte le totalità che venivano chiamate *trascendentali*, perché trascendevano, ossia superavano, la divisione aristotelica delle categorie: e tali erano appunto (le estensioni di) concetti come *ens*, *unum*, *verum* ecc. Perciò, d'ora in poi mi prenderò talora la licenza poetica di chiamare suggestivamente "trascendentali" le "totalità illegittime".

3.3.1. Il Principio di Separazione...

Nelle intenzioni di Zermelo[32], (PC) doveva dunque essere sostituito da un gruppo di principi i quali escludessero insiemi corrispondenti a espressioni quali "tutti gli insiemi", "tutti gli ordinali" ecc. Questi principi, a partire dall'insieme vuoto (l'unico elemento di base nella versione "pura" della teoria), dovrebbero consentire insiemi di cardinalità abbastanza grande da ricostruire la (parte sana della) teoria cantoriana del transfinito, ma mai così grandi da arrivare ai pericolosi trascendentali. La prima versione del sistema fornita da Zermelo tuttavia risultò troppo debole per lo scopo, perché non permetteva di avere certi insiemi essenziali alla teoria del transfinito. Di qui gli importanti sviluppi fraenkeliani, fra i quali l'aggiunta di un principio, l'Assioma di Rimpiazzamento, che garantisse il potenziamento desiderato. Ma di questo non mi occuperò (né mi occuperò dell'estensione di ZF mediante il cosiddetto Assioma di Scelta, di solito siglata come ZFC). La questione filosofica posta da ZF riguarda l'erede principale di (PC) in questo sistema, ossia il *Principio di Isolamento*, o di *Separazione* (*Axiom der Aussonderung*, diceva Zermelo):

(IS) $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \alpha[z])$

(al solito, y non è libera in α)[33]. Come notano Fraenkel, Bar-Hillel e Levy, il Principio di Separazione «ha la scomoda proprietà di essere *impredicativo*», ma naturalmente «un'attitudine platonista giudicherebbe questa situazione in modo molto differente da una costruttivista»[34]. I paradossi non sono qui esclusi, infatti, eliminando *tout court* l'impredicatività, bensì con un diverso stratagemma. Ciò che (IS) fa è isolare in x un suo sottoinsieme: $\alpha[z]$ produce l'insieme y solo in quanto gli z vengono pescati da un insieme x presupposto, ovvero, come dice Zermelo, «gli insiemi [...] devono sempre essere *separati* come sottoinsiemi di insiemi già dati»[35], e si impedisce in linea di principio che la totalità degli oggetti della teoria sia un insieme. Siccome questa totalità sarebbe appunto V, ossia la totalità degli insiemi, l'insieme totale non esiste[36]. Detto altrimenti: lo "sfondo" della totalità degli oggetti della teoria non può essere un insieme (non può essere *oggetto* della teoria). È per questo che ZF costituisce un caso paradigmatico di negazione della Condizione di Esistenza.

Naturalmente, il primo problema di una tale concezione è daccapo quale ragione indipendente abbiamo per supporre che gli insiemi come V, Ω ecc., non esistano. Al solito, negare una o l'altra premessa di un paradosso è facile, ma la mossa, se si accettano i requisiti posti alla fine del CAP. 1, non è *ad hoc* solo se si spiega indipendentemente perché proprio questa premessa va negata. In particolare, se esistesse l'insieme di tutti gli insiemi (puri), allora da (IS) seguirebbero tutti gli insiemi che producono contraddizioni. Perché dunque V non esiste? Sentiamo cosa ne dice Zermelo:

TEOREMA. Ogni insieme M possiede almeno un sottoinsieme M_o che non è un elemento di M.

Dimostrazione. [...] Se M_o è il sottoinsieme di M che, in accordo con l'assioma [di Isolamento], contiene tutti quegli elementi di M per i quali non vale che $x \in x$, allora M_o non può essere un elemento di M. Infatti, o $M_o \in M_o$ o no. Nel primo caso, M_o conterrebbe un elemento $x = M_o$ per il quale $x \in x$, e ciò contraddirebbe la definizione di M_o. Perciò, M_o sicuramente non è un elemento di M_o, e di conseguenza, se fosse un elemento di M, dovrebbe anche essere un elemento di M_o, il che è appena stato escluso.

Segue dal teorema che non tutti gli oggetti *x* del dominio *D* possono essere elementi di uno e un medesimo insieme; ossia, che *il dominio D non è esso stesso un insieme*, e questo ci libera dell'antinomia di Russell per quanto ci riguarda[37].

3.3.2. ...E il Principio del Dominio

Ora, il guaio di fondo di ZF è che *presuppone* una nozione non ristretta di insieme che è incoerente data la stessa teoria ZF. Questa difficoltà è stata notata da molti autori[38], e sorge da un principio molto semplice e intuitivo, che possiamo chiamare il Principio del Dominio:

(PD) Ogni variabile presuppone il suo dominio di variazione[39].

Il principio è già cantoriano, e se ne può dare una versione più suggestiva dicendo:

(PD) Per ogni infinito potenziale c'è un corrispondente infinito in atto[40],

perché esprime l'idea che, data una qualsiasi serie (la serie degli ordinali, o una qualunque altra voi vogliate), la cui variazione può superare ogni confine preassegnato, un'affermazione su di essa ha senso se il suo dominio di variabilità è *determinato*. Sentiamo l'argomentazione cantoriana per (PD):

> Non c'è dubbio che non possiamo fare a meno di quantità *variabili* nel senso dell'infinito potenziale; e di qui si può dimostrare la necessità dell'infinito attuale. Perché ci sia una quantità variabile in uno studio matematico il dominio della sua variabilità dev'essere, strettamente parlando, conosciuto in precedenza per via di definizione. Ma questo dominio non può essere esso stesso variabile, altrimenti ogni fondamento stabile per lo studio collasserebbe. Perciò questo dominio è una serie definita, e attualmente infinita, di valori. Dunque, ogni infinito potenziale, se è rigorosamente applicabile in matematica, presuppone un infinito attuale[41].

Coloro che notano la già menzionata assonanza fra paradossi dell'infinito e antinomie di Kant non possono non osservare che qui è in gioco proprio l'idea kantiana: data una serie indefinitamente estendibile di condizioni, il pensiero dell'incondizionato come totalità della serie è concettualmente *inevitabile*[42]. Il problema è stato così descritto da A. W. Moore in *The Infinite*: «Quando neghiamo l'esistenza di un Insieme di tutti gli Insiemi [...] abbiamo la reale sensazione di mettere anzitutto a fuoco (vedere e riconoscere) che cos'è ciò la cui esistenza stiamo per negare, per poi pensare: "è questo, la totalità di ciò di cui stiamo parlando quando siamo impegnati nella teoria degli insiemi, il nostro vero e proprio oggetto concepito come un tutto; è *questo* che non esiste". Ma ciò è assurdo, proprio come è assurdo cogliere l'(autentico) infinito come ciò che non è coglibile»[43].

Naturalmente, da un punto di vista kantiano trattare questo pensiero come un ideale regolativo dovrebbe essere sufficiente a evitare i paradossi: il principio che «la serie delle condizioni (nella sintesi dei fenomeni, o anche del pensiero delle cose in generale) si spinga fino all'incondizionato» è soltanto una «semplice prescrizione logica di avvicinarsi, ascendendo a condizioni sempre più alte, alla compiutezza di esse»[44]. Inoltre, gli eredi dichiarati di Kant, ad esempio gli intuizionisti[45] o più in generale coloro che adottano un'impostazione costruttivista, potrebbero rigettare (PD) *tout court*. Detto molto grossolanamente: un costruttivista fautore di una matematica predicativa rifiuta (tipicamente) le cardinalità superiori, accettando l'infinito in atto solo a livello numerabile; un intuizionista rifiuta ogni infinito in atto, accettando solo la reiterazione indefinita di procedure di costruzione[46]. Ma a parte il fatto che si potrebbe discutere se le posizioni costruttiviste *riescano* a sfuggire a (PD)[47]; il punto è che una simile via d'uscita non sarebbe consentita comunque a una teoria *degli insiemi* che sia platonista e realista in spirito (quello spirito che la teoria di Russell tradiva, salvo riconciliarvisi tardivamente con l'Assioma di Riducibilità). *A fortiori*, non è consentita alla classica teoria degli insiemi ZF. Ora, (PD) esige che un enunciato contenente una variabile x abbia un senso determinato solo se il dominio di quantificazione è una totalità determinata. Siccome in ZF le variabili variano su *tutti* gli insiemi, la teoria presuppone *questo* dominio di variazione, che non è altro che V. Allora, come osserva ancora Priest: «La consistenza [della teoria ZF] viene ottenuta al prezzo di escluderne un insieme che essa è forzata a presupporre [...]: la teoria è incompleta, perché la nostra comprensione di essa presuppone l'esistenza di insiemi che essa può provare inesistenti!»[48].

3.4
Von Neumann, insiemi e classi

Visto che la negazione della Condizione di Esistenza non sembra portare buoni risultati, potremmo provare a negare quella di Oggettività. Si tratta della via intrapresa dalle teorie degli insiemi basate sulla distinzione fra *insieme* e *classe*. Le principali fra queste teorie sono dovute a von Neumann, Bernays, Gödel, ma l'idea originaria è già in una famosa lettera di Cantor a Dedekind. Imbattutosi nelle prime antinomie, Cantor propose di distinguere le molteplicità in due tipi, quelle *consistenti* e quelle *inconsistenti*:

Infatti, una molteplicità può essere fatta in modo che l'ipotesi di un "essere assieme" di *tutti* i suoi elementi porti ad una contraddizione, cosicché è impossibile concepire la molteplicità come una unità, come "una cosa compiuta". Tali molteplicità le chiamo *assolutamente infinite* o *inconsistenti*. È facile convincersi che, per esempio, "l'aggregato di tutto il pensabile" è una tale molteplicità: più avanti si presenteranno anche altri esempi. Se invece la totalità degli elementi di una molteplicità può venir pensata senza contraddizione come "conessente", in modo da poter essere raggruppata in "*una* cosa", allora la chiamo una *molteplicità consistente* o un *insieme*[49].

Cantor ha la chiara intuizione per cui si deve negare lo status di "cose compiute" precisamente solo alle pericolose totalità "trascendentali", agli infiniti assoluti (come l'aggregato di tutto il pensabile, o di tutti gli insiemi ecc.). Questa intuizione cantoriana è stata sviluppata e precisata indipendentemente da von Neumann. Il sistema originale di von Neumann[50] era formulato in termini di funzioni; ma visto che gli insiemi sono interdefinibili con le loro funzioni caratteristiche, possiamo riesporne il cuore in termini di insiemi. La totalità delle cose è classificata dalla teoria in cose di tipo I, cose di tipo II e cose di tipo I-II. Le cose di tipo I sono quelle che possono figurare a sinistra in una relazione di appartenenza $x \in y$, ossia che possono essere membro o elemento di qualcos'altro[51]. Le cose di tipo II sono quelle che possono figurarvi a destra, ossia sono quelle di cui qualcosa può essere elemento. I raggruppamenti di tipo I e di tipo II si sovrappongono parzialmente, ossia ci sono cose (quelle di tipo I-II) che, oltre ad avere elementi, possono essere elementi. Le cose di tipo II sono oggi chiamate *classi*, e il punto della costruzione è che *non tutte* le classi sono di tipo I-II, ossia, alcune classi non possono essere membro di qualcos'altro. Queste ultime sono state in seguito chiamate da Gödel *classi proprie*, mentre le cose di tipo I-II sono oggi chiamate *insiemi*, e coincidono con gli insiemi ammessi in ZF. Tutti gli insiemi, insomma, sono classi, ma non tutte le classi sono insiemi.

Quali classi non sono insiemi, o sono classi proprie? Ovvero: stante che una classe propria non può essere per definizione membro di qualcosa, c'è un criterio per demarcare una classe propria, o una cosa di tipo II che non è anche di tipo I-II? La risposta è fornita nel famoso assioma IV.2 di von Neumann, che possiamo qui riesporre dicendo:

(IV.2) Sono cose di tipo II che non sono di tipo I-II, cioè, sono classi proprie, *tutte e sole le classi equipotenti alla classe totale* V[52].

Anzitutto (la formalizzazione di) (IV.2) ha grande potenza deduttiva: all'interno della sistemazione di von Neumann rende superflui in un colpo solo assiomi tipici di ZF (o ZFC) come quelli di Isolamento, di Scelta e di Rimpiazzamento, nonché il Principio del Buon Ordinamento (ossia il principio per cui ogni insieme può venir bene ordinato): tutti possono venir dedotti a partire da esso. In secondo luogo, l'idea sottostante a (IV.2) è che condizione necessaria e sufficiente per essere una classe propria è essere equipotente alla classe totale V. Secondo quest'impostazione, dunque, le totalità illegittime come V, Ω ecc. *esistono* senz'altro. L'errore sta, per così dire, nel "sostanzializzarle": nel trattarle come *oggetti* ("cose compiute", diceva Cantor) che possono essere membri di altre classi, elementi di altre molteplicità[53] (ad esempio, l'insieme R di Russell non sembra produrre contraddizioni *in generale*: l'insieme degli elefanti non è un elefante, quindi è un elemento di R; l'insieme delle cose che non sono elefanti non è un elefante, quindi non è un elemento di R; i guai cominciano solo quando ci chiediamo se R stesso è un elemento di R). Ciò secondo von Neumann è un progresso sostanziale rispetto all'impostazione zermeliana:

> Se paragoniamo [la nostra teoria] con gli assiomi e le definizioni di Fraenkel, notiamo che la maggior parte dei nostri assiomi sono analoghi ai suoi. Vi sono, tuttavia, alcune differenze fondamentali. Che qui si parli di "funzioni" anziché di "insiemi" è senza dubbio una differenza superficiale; invece, è essenziale che questa teoria degli insiemi tratti anche insiemi (o "funzioni") che sono "troppo grandi", ossia, quelle cose di tipo II che non sono di tipo I-II. Anziché essere completamente proibite, esse sono dichiarate incapaci di essere [membri] (non sono cose di tipo I!). Questo è sufficiente a evitare le antinomie[54].

3.4.1. …Ma la classe non è acqua

La concezione di von Neumann è stata sviluppata da Paul Bernays[55] in una serie di articoli che costituiscono «la più approfondita analisi della problematica insiemistica sviluppata negli ultimi decenni»[56]. Il maggior contributo di Bernays consiste probabilmente nell'aver chiaramente distinto l'aspetto propriamente matematico dell'insiemistica da quello che potremmo chiamare logico-teoretico. Mentre infatti in von Neumann gli insiemi sono una sottospecie delle classi (quelle che non sono classi proprie), in Bernays classi e insiemi sono raggruppamenti completamente separati fra loro: se qualcosa è una classe, non è un insieme e viceversa. L'idea filosofica di fondo è che le classi sono in effetti astrazioni logiche. Solo gli insiemi sono gli oggetti veri e propri della matematica, che possono godere di proprietà e stare in relazioni studiate dalla disciplina. Il rapporto fra le due nozioni è dato da una relazione di *oggettualizzazione*, o *rappresentazione*; ogni insieme *rappresenta* una classe, ma vi sono classi non rappresentabili da insiemi. Queste corrispondono alle classi proprie neumanniane: non sono rappresentabili le classi equipotenti al(l'estensione del) concetto di insieme, come V. Dunque, anche qui V esiste, ed è una classe, ma non è rappresentabile da nessun insieme: la totalità degli oggetti matematici (degli insiemi) non è un *oggetto* matematico.

Formalmente, i sistemi alla Bernays esprimono la differenza fra classi e insiemi adoperando due sorta di variabili, e duplicando anche la relazione di appartenenza. Il Principio di Astrazione può essere formulato senza restrizioni per le classi, quindi ogni condizione dà luogo a una classe, ovvero per ogni funzione enunciativa esiste un'estensione. E la regola per evitare i paradossi è sempre quella di von Neumann: un insieme può appartenere ad altri insiemi e appartenere a classi, mentre una classe non può mai appartenere a nulla. Nell'ultima versione del sistema di Bernays si proibisce anche la quantificazione di variabili per classi[57].

Ebbene, ciò che l'assioma neumanniano (IV.2) fa è incorporare nel sistema il principio informale della Limitazione di Grandezza. La Limitazione di Grandezza in ZF è una regola che guida dal di fuori la formulazione di assiomi quali (IS), il Principio di Isolamento (una regola che è come un Super-Io kantiano: "Evita l'Incondizionato!"). (IV.2) codifica la regola, dicendo che qualcosa è un insieme vero e proprio, un oggetto e non una mera astrazione, se non c'è nessuna funzione che lo mappa sull'aggregato totale V. In questo senso, l'approccio basato sulla distinzione classe/insieme non è affatto alternativo a quello Zermelo-Fraenkel quanto von Neumann sperava. Al contrario, «la teoria degli insiemi con insiemi e classi e quella [*scil.* ZF-ZFC] con i soli insiemi non sono due teorie separate: sono, essenzialmente, diverse formulazioni della stessa teoria sottostante»[58]. E ciò non soltanto perché l'approccio von Neumann-Bernays non dice né dimostra nulla più di quello di ZF per quanto riguarda gli insiemi, cosicché «se si considerano le classi un mero espediente tecnico, ZF e VNB [ossia la teoria von Neumann-Bernays] vanno considerate essenzialmente come la stessa teoria»[59]. Ma soprattutto perché, ha osservato Priest, l'introduzione delle classi (o delle classi proprie) viola, come accadeva in ZF, il Principio del Dominio:

> Le variabili della teoria di von Neumann variano sul dominio di tutte le collezioni (I-oggetti e II-oggetti). La totalità di tutte le collezioni non è, dunque, V (la collezione di tutti gli insiemi), ma V', la collezione di tutti gli insiemi e classi. Ed è l'esistenza di questa e di simili collezioni che non può essere consistentemente ammessa nella teoria di von Neumann. Perciò, la teoria viola il Principio del Dominio tanto quanto quella di Zermelo. (A volte, la teoria di von Neumann è presentata come una teoria a due sorta con diversi tipi di variabili che variano sopra gli oggetti di tipo I e di tipo II. Questo non fa alcuna differenza essenziale rispetto al punto in questione: il Principio del Dominio è violato dalle variabili che variano sopra gli oggetti di tipo II)[60].

Il problema filosofico, nel caso della negazione della Condizione di Oggettività, è inoltre che esponendo la teoria ora trattiamo a tutti gli effetti le classi, o le classi proprie, *come oggetti*. Sopra ne abbiamo parlato come di "cose" (*objects*, dice von Neumann)[61]. Riferendoci a esse, le consideriamo come un'unità, e come qualcosa che ha certe proprietà – ad esempio, quella di essere "troppo grandi", il che viene precisato formalmente dicendo che *sono* mappabili sulla classe totale. Quella di essere equipotenti a V ha tutta l'aria di essere una proprietà che le accomuna, sicché sarebbe naturale parlare della *classe* delle classi equipotenti a V. Più in generale, non si capisce perché non si possano considerare le classi come membri di *alcuna* altra collezione (ad esempio, sembra naturale considerarle membri dei loro singoletti. Che anche questo venga escluso, fa suonare la mossa di separare nettamente insiemi e classi come a*d hoc*)[62]. Ma se ora supponiamo che le classi *possano* essere elementi di aggregati – diciamo, delle iperclassi – che stanno con le classi (o le classi proprie) nella stessa relazione che queste hanno con gli insiemi[63], abbiamo solo spostato di livello il problema[64].

3.5
La gerarchia cumulativa transfinita

Considerando le tre richieste epistemologiche avanzate alla fine del primo capitolo, le teorie degli insiemi considerate faticano dunque ad arrivare al livello n. 2, ossia a motivare indipendentemente il rigetto di una delle premesse dei paradossi. Come ha detto Casari:

È ben vero che, secondo ogni apparenza, le antinomie hanno potuto venir superate conservando al tempo stesso quasi intatto il patrimonio matematico classico, tuttavia un *tale superamento è stato ottenuto attraverso dei rimaneggiamenti del principio di comprensione che nella quasi totalità dei casi sono assai arbitrari e ben difficilmente possono trovare una giustificazione veramente persuasiva oltre a quella* – la cui importanza nessuno certo contesta – *di riuscire a fare quel che devono fare*[65].

Ma tali teorie fanno veramente quel che *devono* dal punto di vista della fondazione della matematica? Possiamo avere uno sguardo d'insieme sul problema guardando alla gerarchia insiemistica cui sono riconducibili, la cosiddetta gerarchia cumulativa transfinita. Questa si ottiene facendo l'insieme potenza di un insieme dato, l'insieme potenza *dell*'insieme potenza ecc., e unificando via via. Più precisamente, la gerarchia si può definire per ricorsione sugli ordinali: abbiamo una sequenza transfinita di insiemi cominciando con un insieme di individui o, nella versione "pura", con l'insieme vuoto, formando l'insieme potenza di ogni insieme dato K_n a ogni ordinale successore $n + 1$ (e unificando, se alla base non c'è solo l'insieme vuoto), e l'unione degli insiemi ottenuti a ogni ordinale limite l:

$$K_0 = \emptyset \text{ o } \{x \mid x \textit{ è un individuo}\}$$

$$K_{n+1} = K_n \cup P(K_n)$$

$$K_l = \bigcup_{n<l} K_n$$ [66]

La gerarchia si chiama "cumulativa" perché un insieme presente in un livello è presente in tutti i livelli successivi. L'idea che esistano esattamente gli insiemi della gerarchia cumulativa è oggigiorno vista da molti come *la* soluzione dei paradossi insiemistici. Buona parte delle teorie degli insiemi correnti ha un modello naturale in un segmento iniziale della gerarchia[67].

3.5.1. ...E i suoi guai

È facile osservare che anche questa gerarchia non rende l'idea cantoriana di insieme come estensione di una condizione arbitraria. A parte il problema della possibilità di insiemi non fondati, il punto è sempre che la sequenza transfinita di insiemi non può essere, essa stessa, un *insieme* della gerarchia, che sarebbe daccapo l'insieme di tutti gli insiemi (puri, fondati ecc.), pena la contraddizione[68]. Ora, l'inadeguatezza della gerarchia cumulativa emerge secondo Priest già nella logica elementare, la cui semantica standard com'è noto è basata su metodi insiemistici. L'argomento priestiano è il seguente[69]. Consideriamo la caratterizzazione della nozione di conseguenza logica che possiamo trovare in un qualsiasi manuale. Tipicamente, la clausola dice qualcosa del tipo (con G insieme di formule e α formula qualsiasi):

(Cons) $\Gamma \models \alpha$ se e solo se in ogni interpretazione in cui, per ogni $\beta \in \Gamma$, β è vero, α è vero.

Ebbene, un'*interpretazione* è una struttura di tipo insiemistico – nel caso più semplice, una coppia <D, *i*>, dove D è un qualsiasi insieme (non vuoto), e *i* una funzione che assegna denotazioni in D (membri di D, sottoinsiemi di D, insiemi di *n*-ple ordinate di elementi di D, operazioni definite su D ecc.) alle espressioni del linguaggio.

Non è qui molto importante considerare che, ad esempio, possa occorrere una funzione differente per le variabili (ossia che si debbano considerare differenti assegnazioni di valori alle variabili, entro la stessa interpretazione ovvero entro una realizzazione nello stesso modello)[70]. Né importa molto che si possa imporre sempre più complessità ontologica sui modelli, magari avendo a che fare con interpretazioni intensionali (in cui si assegnano direttamente intensioni alle espressioni subenunciative, come funzioni da mondi possibili a estensioni o come insiemi di mondi possibili) piuttosto che meramente estensionali. Dacché i successi della semantica *model-theoretic* hanno conquistato la logica (inclusa quella modale), la procedura consiste sempre nella specificazione di un modello che determina il dominio o i domini rilevanti, di una funzione di interpretazione per le costanti descrittive del linguaggio, di assegnazioni per le variabili. Segue la caratterizzazione ricorsiva delle condizioni di verità. Segue l'esplicitazione delle nozioni di legge e conseguenza logica.

Parlando di "ogni interpretazione" (Cons) sembra quantificare dunque sull'universo degli insiemi. Come daremo allora la semantica di *questa* espressione? Detto altrimenti: consideriamo il linguaggio in cui è data la definizione (Cons), e che è di norma un linguaggio informale o semiformalizzato che adopera nozioni insiemistiche. Naturalmente, questo linguaggio è perfettamente significante. Ma se esistono solo gli insiemi che figurano nella gerarchia cumulativa, osserva Priest, "ogni interpretazione" si riferisce a una totalità che per tale gerarchia *non* esiste – e, si badi, è essenziale che le interpretazioni siano proprio *tutte*, altrimenti (Cons) non definirebbe la conseguenza *logica*, bensì una qualche conseguenza semantica ristretta a domini particolari. Così, il Principio del Dominio è nuovamente violato[71]:

> La specificazione della semantica di un linguaggio del primo ordine viene normalmente intesa come se la si fornisse in un metalinguaggio insiemistico. Quindi il linguaggio la cui specificazione pone problemi è quello della stessa teoria degli insiemi. L'interpretazione di un linguaggio insiemistico è una coppia <D, I>, dove D è il dominio di tutti gli insiemi. Assumendo che la gerarchia cumulativa esprima la corretta nozione di insieme, la semantica della teoria degli insiemi diventa impossibile da specificare in modo coerente[72].

Come *extrema ratio*, si potrebbe dire che i paradossi insiemistici non sono, quantomeno, un problema *matematico*, e riguardano piuttosto gli arzigogoli mentali dei filosofi. Credo che questa fosse anche l'idea di Gödel, almeno a un certo punto della sua carriera. In *What is Cantor's Continuum Problem?*, egli dice: «Potrebbe sembrare a prima vista che i paradossi della teoria degli insiemi condannino al fallimento tale impresa, ma un esame più accurato dimostra che essi non danno luogo a difficoltà». O meglio, «sono sì un problema molto serio, ma non per la matematica, bensì per la logica e per l'epistemologia». Infatti, continua Gödel, nessun matematico si è mai imbattuto in paradossi come quello dell'insieme degli insiemi che non appartengono a se stessi. Tutti gli insiemi di cui ci si occupa in matematica sono insiemi di numeri interi, o di numeri razionali, o reali, o di loro funzioni ecc. Perciò, non si giunge mai a significati ottenuti «dividendo la totalità delle cose esistenti in due categorie»[73].

Ma oggi la situazione è cambiata. Diversi autori, infatti, hanno riconosciuto che la gerarchia cumulativa costituisce un fondamento del tutto inadeguato per la moderna teoria matematica delle categorie[74]. Di solito si esprime ciò come una inadeguatezza della teoria *degli insiemi*, ma ciò è dovuto alla tendenziale identificazione della teoria degli insiemi *tout court* con una qualche teoria assiomatica che vale in un segmento della gerarchia cumulativa – tipicamente, ZF o ZFC[75]. E non si può sperare che con un approccio alla von Neumann-Bernays la situazione migliori. Le grandi categorie, come la categoria di tutti i gruppi, o di tutti gli insiemi, o di tutte le categorie, potrebbero essere viste come classi o classi proprie. Il fatto però è che in teoria delle categorie non solo si vuol poter *parlare* delle grandi categorie, ma anche, si vuole poter *operare* su di esse. Date due grandi categorie A e B, dev'esserci ad esempio la categoria A^B di tutti i funtori da B ad A, ma questo è impossibile entro la gerarchia cumulativa (naturalmente, si potrebbe ricorrere a iperclassi, ma come sappiamo questo sposterebbe solo il problema)[76]. Alla luce di questa situazione, sembra che *qualsiasi* tentativo di limitare l'intuizione cantoriana su che cosa sia un insieme, codificata nel Principio di Astrazione, sia destinato al fallimento sia in logica che in matematica. Come dice J. Bell: «Il fallimento della teoria degli insiemi nel giustificare l'applicazione illimitata delle operazioni categoriali è una conseguenza del suo successo nell'evitare le collezioni ultra-comprensive considerate originariamente responsabili dei paradossi [...]. In effetti, il fallimento della teoria degli insiemi nell'abbracciare la nozione di *categoria* (o struttura) arbitraria è in realtà solo un altro modo di esprimere il suo fallimento nel catturare completamente la nozione di proprietà arbitraria»[77].

Note

1. In effetti, la formalizzazione di Frege era *higher order* e non uno schema, ma è una differenza che qui possiamo trascurare.

2. Cantor, 1895, p. 85.

3. In insiemistica si usa l'espressione "condizione" in questo senso ristretto: una formula aperta con una variabile libera x viene appunto detta una *condizione su x*.

4. Cfr. Casari, 1972, pp. 21-3.

5. L'argomento, dunque, fa uso del Terzo Escluso. A differenza dei filosofi del linguaggio, logici e teorici degli insiemi non hanno investigato molto estesamente la possibilità di aggirare i paradossi rinunciando a questo principio e/o alla bivalenza. Qualche tentativo, tuttavia, c'è stato. Ad esempio, Bochvar aveva utilizzato una logica trivalente (con i valori: Vero, Falso e Indeterminato) per costruire sistemi che aggirano paradossi come quelli di Russell o di Grelling, in quanto gli enunciati paradossali vi assumono il valore Indeterminato (cfr. Bochvar, 1939; e anche Haack, 1978, pp. 207-8, per una breve presentazione del sistema). Ma come Church notò ben presto, la resistenza ai paradossi era dovuta all'uso di una *negatio deminuta*: si definiva, cioè, una negazione interna o debole (poniamo: ~) che non ha una semantica bivalente; quindi, mediante questa e un operatore enunciativo di asserzione (poniamo: A) che forza la bivalenza, una negazione esterna ($\neg$), che è la negazione debole dell'asserzione ($\neg\alpha =_{df} {\sim}A\alpha$). Ora, se R viene caratterizzato adoperando la negazione debole:

$$R = \{x \mid {\sim}(x \in x)\},$$

l'equivalenza

$$R \in R \leftrightarrow {\sim}(R \in R)$$

non produce una contraddizione esplicita, appunto perché $R \in R$ può assumere il valore Indeterminato. Ma se invece abbiamo:

$$R_1 = \{x \mid \neg(x \in x)\},$$

il paradosso ritorna (cfr. Church, 1939, pp. 98-9). Naturalmente, riformulare la cosa con una negazione esterna equivale a produrre una sorta di *revenge paradox*. Perciò, la situazione non è poi troppo differente da quella dei tentativi di trattare i paradossi semantici rinunciando alla bivalenza, che abbiamo incontrato al capitolo precedente. Infine, molti paradossi insiemistici, come quello di Burali-Forti o quello di Mirmanoff, possono avere prove dirette (cfr. Priest, 1987, pp. 36-7).

6. Cfr. ad esempio Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, 1973, p. 124.

7. Cfr. ad esempio Casalegno, Mariani, 2004, pp. 34-5. Questa è un po' una stranezza (almeno per i filosofi, se non per i matematici) dovuta soprattutto a Fraenkel. Nello spirito dell'originaria definizione cantoriana di insieme, Zermelo riteneva di poter assumere cose qualsiasi come entità di base della teoria. Invece, $\varnothing$ è, in certo modo, sia un "oggetto improprio" (nel senso che è un insieme), sia un "insieme improprio" (nel senso che non ha neanche un elemento). Così, l'idea di una teoria pura degli insiemi, in cui processi codificati dagli assiomi della teoria garantiscono l'esistenza degli insiemi desiderati con operazioni che hanno come base unica l'insieme vuoto «equivale in sostanza a questo: l'intera descrizione razionale dell'universo può venir effettuata senza alcun materiale di partenza. Basta accettare di poter disporre dell'idea che non si dispone di alcun materiale di partenza [tale "idea" sarebbe appunto l'insieme vuoto]. A partire da questa idea sotto la quale non cade niente, e mediante processi puramente astratti, si può edificare la teoria dell'universale per quel tanto che basta a fondare logicamente ogni disciplina particolare» (Casari, 1972, p. 54).

8. Cfr. ad esempio Casalegno, Mariani, 2004, sez. 4.4.

9. Cfr. ivi, p. 119. Detto ancora più rapidamente: per il teorema di Cantor, P(V) ha cardinalità maggiore di V. Ciò è assurdo, visto che V è il più inclusivo di tutti gli insiemi per definizione (così Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, 1973, p. 7). Si noti che il paradosso di Cantor non è altro che il paradosso di Russell se si sceglie come corrispondenza ϕ l'identità (perciò si parla a volte di un unico paradosso di Cantor-Russell).

10. Cfr. Grim, 1991. Un altro paradosso a cui si può accennare di passaggio, se non altro perché fu il primo a venir scoperto, è quello di Burali-Forti. Il paradosso riguarda i numeri ordina-

li. L'idea cantoriana originale prevedeva che gli ordinali fossero «contrassegni con cui contare gli insiemi *bene ordinati*» (Casari, 1997, p. 449). Un insieme bene ordinato è un insieme ordinato in modo tale che ogni suo sottoinsieme non vuoto ha un primo elemento (seguendo la successiva idea di von Neumann, un ordinale può corrispondere all'insieme degli ordinali che lo precedono: dunque, se 0 è $\varnothing$, 1 è $\{0\}$; 2 è $\{0, 1\}$; 3 è $\{0, 1, 2\}$ ecc.). Consideriamo allora l'insieme Ω di *tutti* gli ordinali. Questo insieme in base alla costruzione è bene ordinato, dunque ha un ordinale. Ma questo ordinale dovrebbe essere maggiore di ogni membro di Ω, quindi maggiore di ogni ordinale (così Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, 1973, p. 8).

11. Russell, Whitehead, 1910-13, pp. 125-6.

12. Lo schema russelliano è delineato già in Russell, 1903.

13. Russell, Whitehead, 1910-13, p. 84.

14. Prima di apparire nei *Principia*, la teoria fu abbozzata nei *Principles of Mathematics* (Russell, 1903), e poi proposta in Russell, 1908.

15. Russell, Whitehead, 1910-13, p. 87.

16. Ciò gli meritò il titolo di "logico confusionario" affibbiatogli da Quine, che invece alla distinzione teneva molto (cfr. Quine, 1970, p. 103).

17. L'esposizione che segue è presa da Priest, 1995, pp. 149-51. Successivamente ai *Principia*, Ramsey e poi L. Chwistek proposero una semplificazione della teoria russelliana, includente soltanto tipi e detta perciò teoria *semplice* dei tipi. La teoria includente anche gli ordini invece cominciò a essere chiamata teoria *ramificata*; questo, tuttavia, non ci interessa.

18. Ayer, 1984, p. 30.

19. Russell, Whitehead, 1910-13, p. 127. È il caso di ricordare che il principio per cui nessun insieme appartiene a se stesso è già aristotelico (Aristotele lo formula nei *Topici*, 144a28 ss.). Nelle teorie assiomatiche degli insiemi, di cui parlerò fra poco, viene incorporato attraverso un assioma detto di *fondazione*. L'assioma impedisce non solo l'autoappartenenza immediata, $x \in x$, ma anche autoappartenenze "circolari" come $x_1 \in x_2 \wedge x_2 \in x_1$. Gli insiemi conformi all'assioma di fondazione si dicono (bene) fondati (cfr. Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, 1973, pp. 86 ss.).

20. Naturalmente, l'ordine temporale è inverso a quello della mia esposizione: fu il lavoro di Tarski a seguire cronologicamente la gerarchia russelliana.

21. Russell, Whitehead, 1910-1913, pp. 91-3.

22. Ivi, p. 130.

23. *Ibid.*

24. «La teoria dei tipi porta a delle conseguenze innaturali e poco convenienti. Infatti, dal momento che la teoria permette che una classe abbia elementi solo di tipo uniforme, la classe universale V dà adito a una serie infinita di classi quasi-universali, una per ciascun tipo. La negazione $-x$ cessa di comprendere tutti i non-elementi di x, e viene a comprendere soltanto quei non-elementi di x che sono di tipo immediatamente inferiore a x. Perfino la classe nulla [...] dà adito a una serie infinita di classi nulle. [...] Tutte queste scissioni e queste proliferazioni non solo sono intuitivamente inaccettabili, ma richiedono continuamente delle manovre tecniche più o meno elaborate per ristabilire le connessioni recise» (Quine, 1937, pp. 85-6). Quine parla qui di *classi* per intendere quelli che io chiamo insiemi. Userò fra poco la parola "classe" con un diverso significato, per illustrare la strategia insiemistica di von Neumann-Bernays.

25. Russell, Whitehead, 1910-1913, p. 115.

26. «Che l'assioma di riducibilità sia autoevidente è tesi difficilmente sostenibile. In realtà però l'autoevidenza non è mai qualcosa di più che una parte delle ragioni per cui si accetta un assioma, e non è mai indispensabile. Le ragioni per cui si accetta un assioma, al pari di quelle per cui si accetta qualsiasi altra proposizione, sono sempre largamente induttive...» (ivi, p. 120). Nel *Tractatus*, Wittgenstein dice che «proposizioni come l'*axiom of reducibility* di Russell non sono proposizioni logiche [...]. Può pensarsi un mondo, nel quale l'*axiom of reducibility* non valga. Ma è chiaro che la logica nulla ha a che fare con la questione, se il nostro mondo sia o non sia realmente così» (Wittgenstein, 1921, p. 96). Cfr. anche Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, 1973, pp. 173-4.

27. Gödel, 1944, pp. 93-4.

28. Cfr. Fitch, 1946.
29. Priest, 1995, pp. 152-4. Naturalmente, si potrebbe tentare di sottrarsi all'aporia sfruttando la stessa idea di "ambiguità sistematica" nel significato delle nozioni chiave e trattare le affermazioni della teoria come schemi d'enunciato che danno luogo a un'infinità di istanze sostituzionali (una per ogni ordine). Il punto avanzato da Priest, e già notato al capitolo precedente, è che ciò che si intende come significato di una formula schematica sistematicamente ambigua sembra essere esattamente ciò che si ottiene premettendole una quantificazione universale sugli indici.
30. La prima formulazione esplicita del principio è dovuta a Russell, 1906. Di solito si parla di "limitazione di grandezza" in riferimento alle teorie degli insiemi alla von Neumann-Bernays, di cui si parlerà fra poco; ma l'idea, che come vedremo in questi approcci è catturata da un assioma *interno* alla teoria, domina "da fuori" anche l'approccio di ZF (cfr. Casari, 1972, pp. 38-9; Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, 1973, pp. 32, 135). Un libro molto bello sul tema è Hallett, 1984.
31. *Met*. 998 b 22-7.
32. Cfr. Zermelo, 1908.
33. Cfr. ad esempio Casalegno, Mariani, 2004, p. 250.
34. Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, 1973, p. 38.
35. Zermelo, 1908, p. 202.
36. Cfr. Casalegno, Mariani, 2004, pp. 28-9.
37. Zermelo, 1908, p. 203.
38. Ad esempio Parsons (1974), Lear (1977), Mayberry (1977) e Moore (1990).
39. Questa è la formulazione di Priest, 1995, p. 175; cfr. anche p. 139: «affinché un enunciato contenente una variabile abbia un significato determinato, il campo di variazione dei quantificatori che governano la variabile (che può essere implicito se la variabile è libera) dev'essere una totalità determinata, un insieme definito».
40. Cfr. Hallett, 1984, p. 7, principio (*a*).
41. Ivi, p. 25.
42. «Se è dato il condizionato, è anche data (cioè contenuta nell'oggetto e nella sua connessione) tutta la serie delle condizioni l'una all'altra subordinate; serie, quindi, che è essa stessa incondizionata. [...] Dunque, il concetto trascendentale della ragione non è altro che il concetto della totalità delle condizioni per un dato condizionato» (Kant, 1781, pp. 243 e 251).
43. Moore, 1990, pp. 170-1.
44. Kant, 1781, p. 243. Dunque «le idee trascendentali non sono mai d'uso costitutivo, sicché per mezzo di esse possano esser dati concetti di certi oggetti [...]. Ma, viceversa, hanno un uso regolativo eccellente e impreteribilmente necessario» (ivi, p. 408).
45. È noto che Brouwer chiamava la propria concezione *neo*intuizionismo, ispirandosi dichiaratamente nella nozione di *intuizione* all'idealismo trascendentale kantiano, e alla fondazione kantiana dell'aritmetica sull'intuizione pura del tempo quale «condizione [...] immediata dei fenomeni interni» (Kant, 1781, p. 63).
46. Cfr. Casari, 1972, pp. 138-9.
47. Priest (1995, par. 11.2) e Hallett (1984, pp. 26 ss.) ritengono senz'altro di no. Per Priest (1995, p. 176) «il Principio del Dominio si applica ai quantificatori intuizionisti tanto quanto a quelli classici. La quantificazione intuizionistica, dunque, presuppone un insieme (o specie) di tutti gli insiemi (e l'argomento di Zermelo per cui non vi è un insieme universale è valido anche intuizionisticamente)».
48. Ivi, pp. 175-7. Considerazioni analoghe sono svolte in Bremer, 2005, p. 141.
49. Cantor, 1899, pp. 443-4.
50. Von Neumann, 1925.
51. Fra le cose di tipo I nell'approccio neumanniano figuravano anche *Urelemente*, ma la teoria può essere facilmente "purificata".
52. Cfr. von Neumann, 1925, p. 400.
53. «Von Neumann ritiene che l'idea principale della sua teoria degli insiemi sia quella per cui le antinomie non sorgono dalla mera esistenza di insiemi molto comprensivi, ma dal loro ca-

rattere di elementi, ossia, dalla loro capacità di essere membri di altri insiemi» (Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, 1973, pp. 135-6).

54. Von Neumann, 1925, p. 401.

55. Cfr. in particolare Bernays, Fraenkel, 1958.

56. Casari, 1972, p. 71.

57. «L'ammissione della quantificazione delle variabili [per classi] equivarrebbe infatti alla ammissione di una chiusura del sistema delle classi; una tale chiusura viene infatti presupposta [...] per il mondo degli insiemi, proprio attraverso l'ammissione della quantificazione delle variabili [per insiemi]. [...] Tutte le variabili per classi sono usate solo in forma libera: in altre parole, le variabili per classi non possono mai venir vincolate né dai quantificatori né dal descrittore né dall'astrattore» (ivi, pp. 77 e 82).

58. Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, 1973, p. 119.

59. Ivi, p. 131.

60. Priest, 1995, pp. 181-2.

61. «Parleremo sempre di "I-oggetti", "II-oggetti" e "I-II oggetti" anziché di "argomenti", "funzioni" e "funzioni-argomenti", rispettivamente» (von Neumann, 1925, p. 399).

62. «La distinzione classe-insieme permette a von Neumann di eliminare quella limitazione che abbiamo segnalato nel caso di Zermelo. Con le precisazioni di Bernays una tale distinzione acquista anche una plausibilità e una forza di convinzione notevoli, ma quanto poco convincente – anche per i loro stessi proponitori, come s'è visto – è il confine tirato tra classi e insiemi!» (Casari, 1972, p. 108).

63. Come esposto in Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, 1973, p. 142.

64. «Non sembra vi sia alcuna ragione per cui le classi non possono essere membri di (alcune) altre classi. L'impedimento generale a essere elemento sembra un'esagerazione. Ma se lasciamo che le classi siano elementi di (alcune) classi arriviamo a una seconda gerarchia (una gerarchia di classi), e ora i nostri vecchi problemi ritornano: non può esserci una classe universale» (Bremer, 2005, pp. 141-2).

65. Casari, 1972, p. 107.

66. Cfr. ad esempio: Hallett, 1984, pp. 188-9; Woods, 2003, p. 158; Potter, 2004, pp. 186 ss.

67. Dico "buona parte" perché ci sono eccezioni: una è il sistema NF di Quine, di cui parlerò trattando di certe teorie paraconsistenti degli insiemi che vi si ispirano.

68. Precisamente, ne seguirebbe il paradosso di Mirmanoff, sul quale però non mi soffermerò.

69. Cfr. Priest, 1987, pp. 45 ss.

70. La terminologia logica è oscillante: talora si differenziano i significati di "struttura" e "modello", e si dice che una certa struttura *è modello di* una teoria se e solo se la rende vera. A volte si intende per "struttura" la parte propriamente ontologica, e si chiama "modello" la struttura più la funzione di interpretazione. Al solito, occorrerà essere un po' elastici.

71. Bremer ha formulato l'aporia della violazione di (PD) in relazione a ZFC: definendo la conseguenza logica «si parla di *qualsiasi* interpretazione. E il dominio di un'interpretazione è arbitrario. Può essere un insieme di grado arbitrariamente elevato. Perciò la presunta definizione parla di *tutti* gli insiemi di grado arbitrario (ossia, della gerarchia come un tutto), ma in ZFC non possiamo avere mai *tutti* gli insiemi! Sembra quindi che la nostra comprensione della conseguenza [logica] non possa essere rappresentata da ZFC» (Bremer, 2005, p. 141).

72. Priest, 1987, p. 46.

73. Cfr. Gödel, 1947, pp. 119-20.

74. Cfr. Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, 1973, par. 7.4; Feferman, 1977; Bell, 1981.

75. «L'impostazione zermeliana ha tutta una gamma di conseguenze estremamente innaturali. Tanto per fare un esempio molto semplice, essa non ci permette di parlare della classe di tutti i gruppi o di tutti i corpi o, più in generale, di tutte le strutture algebriche. Eppure non crediamo che esista al mondo un solo matematico che consideri "indesiderabili" insiemi siffatti» (Casari, 1972, p. 108).

76. «Le categorie sono classi, che possono anche essere classi proprie, e la teoria delle categorie tratta funzioni definite su classi di categorie e altri tipi di oggetti indisponibili [nelle teo-

rie degli insiemi]. [...] Il processo di aggiungere classi più grandi e iper-classi deve fermarsi prima o poi; e dobbiamo decidere dove. [...] Una scelta è tanto arbitraria quanto qualsiasi altra. L'arbitrarietà è dovuta in certa misura alle antinomie e quindi inevitabile» (Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, 1973, pp. 143-5). «Le restrizioni sulla formazione e manipolazione di [grandi categorie] imposta dal quadro dell'insiemistica ufficiale sono viste da vari teorici delle categorie come una riduzione fastidiosa e forse inutile del loro lavoro di matematici. [...] Le operazioni su grandi categorie che appaiono così naturali ai teorici delle categorie non sono giustificate dalle attuali fondazioni insiemistiche e mostrano di richiedere per il loro trattamento un'estensione o una riformulazione del quadro insiemistico» (Bell, 1981, pp. 352 e 356).

77. Ivi, p. 356.

4
La contraddizione e Gödel

4.1
L'aritmetica di Peano

In un'influente serie di saggi[1], Priest ha proposto (con l'appoggio esterno di Richard Routley)[2] una coraggiosa interpretazione del Primo Teorema di Incompletezza di Gödel, che dovrebbe fornire un ulteriore argomento contro il (PNC). Priest ha sostenuto che si tratta di un «argomento non costruttivo», ossia che non produce una determinata contraddizione vera, ma «mostra che ce ne dev'essere qualcuna»[3]. Per capire come funzioni, occorre anzitutto che ci familiarizziamo con il Primo Teorema di Incompletezza. Questo darà l'occasione, in primo luogo, di precisare un po' le idee introdotte nel CAP. 2 per spiegare le formulazioni non contestuali dei paradossi semantici. In secondo luogo, ciò che apprenderemo fra poco andrà tenuto a mente, perché ci tornerà utile quando nella terza sezione del libro incontreremo le stranezze dell'aritmetica paraconsistente. In quel contesto dirò qualcosa anche sul Secondo Teorema di Gödel.

Cominciamo introducendo quello che è forse il caso esemplare di teoria a cui i teoremi di Gödel possono applicarsi: l'aritmetica di Peano (PA). La teoria originaria andrebbe formulata al secondo ordine con i cinque famosi assiomi, i cosiddetti *assiomi di Peano* (o di Dedekind-Peano). La più comune formulazione al primo ordine di PA si ottiene aggiungendo al normale calcolo elementare dei predicati con identità questi principi:

(PA1) $\forall x(Succ(x) \neq 0)$
(PA2) $\forall xy(Succ(x) = Succ(y) \rightarrow x = y)$
(PA3) $\forall x(x + 0 = x)$
(PA4) $\forall xy(x + Succ(y) = Succ(x + y))$
(PA5) $\forall x(x \times 0 = 0)$
(PA6) $\forall xy(x \times Succ(y) = (x \times y) + x)$
(PA7) $\alpha[x/0] \rightarrow (\forall x(\alpha[x] \rightarrow \alpha[x/Succ(x)]) \rightarrow \forall x\alpha[x])$[4].

La teoria vale nel cosiddetto *modello standard* per l'aritmetica (sia N), ossia nel modello costituito dai numeri naturali e dalle operazioni su di essi che ci hanno insegnato alle scuole elementari. Le variabili, dunque, variano sui numeri naturali, e "0" è il nome proprio del numero zero[5]. Inoltre, la lettura intesa del funtore a un posto $Succ(x)$ è "il successore (immediato) di x". Quindi, $Succ(0)$ è il numero 1, ossia il successore (immediato) dello zero nella serie dei naturali; $Succ(Succ(0))$ è il numero 2, ossia il successore di 1, ossia il successore del successore dello zero ecc. + e ×, naturalmente, sono addizione e moltiplicazione. Dunque, (PA1) dice che lo zero non è il successore di nessun numero (ossia, è il "primo" della serie). (PA2) dice che se x e y hanno lo stesso successore, sono lo stesso numero. (PA3)-(PA6) sono equazioni che regolano addizione e moltiplicazione. (PA7) è la formulazione schematica del cosiddetto *Principio di Induzione* (*Matematica*), e dice che se una condizione $\alpha[x]$ vale per lo zero e per il successore di un numero per cui vale, vale per tutti i numeri[6].

4.2
Gödel, primo tempo

Una gödelizzazione ci consente, secondo quanto si è visto al CAP. 2, di associare univocamente un numero naturale a ogni simbolo, formula e sequenza di formule di PA, cosicché possiamo sempre passare da un'espressione linguistica di PA al numero cui è associata (il suo numero di Gödel, o gödeliano), e viceversa. Si diceva allora che una teoria sufficientemente potente può parlare di alcune sue proprietà e relazioni sintattiche e in particolare che la proprietà di essere dimostrabile nella teoria può essere espressa all'interno della teoria stessa. In generale, una relazione k-aria (la cui estensione consiste nell'insieme di k-ple ordinate) R si dice *esprimibile* in PA se e solo se c'è una formula $\alpha[x_1, ..., x_k]$ tale che per ogni k-pla ordinata di numeri $<n_1, ..., n_k>$ valgono:

a) Se $<n_1, ..., n_k> \in$ R, allora $\vdash_{PA} \alpha[x_1/n_1, ..., x_k/n_k]$;
b) Se $<n_1, ..., n_k> \notin$ R, allora $\vdash_{PA} \neg\alpha[x_1/n_1, ..., x_k/n_k]$[7].

Abbiamo detto che PA è il prototipo di teoria sufficientemente potente. Come i logici sanno, di solito si chiama "sufficientemente potente" una teoria in grado di rappresentare le funzioni ricorsive (primitive) isolate nell'originale articolo di Gödel[8]. Le funzioni-relazioni ricorsive hanno appunto il ruolo di codificare numericamente la sintassi della teoria. Affermazioni metalinguistiche su PA sono riflesse entro lo stesso linguaggio "ufficialmente" aritmetico di PA (dunque questa situazione si chiama di solito, per ovvie ragioni, *aritmetizzazione della metateoria*). Ora, il predicato aritmetico n. 45 nell'articolo di Gödel è:

$Dim(x, y)$,

la cui lettura via codifica numerica è: "x è (il gödeliano di) una dimostrazione dell'enunciato (di gödeliano) y"[9]. *Dim* vale fra quelle coppie di numeri i quali sono, rispettivamente, il numero di Gödel di una sequenza di formule di PA, e quello di una formula di PA, tali che la prima è una dimostrazione della seconda. Il predicato n. 46 è definito mediante il n. 45, così:

$Teor(y) =_{df} \exists x Dim(x, y)$;

quindi, è un predicato che vale per quei numeri naturali che sono i numeri di Gödel di formule di PA per cui esiste una dimostrazione in PA. Propriamente, quella di essere una formula dimostrabile, o un teorema, non è una nozione esprimibile bensì solo, come dicono i logici, *semi*esprimibile, ma questo non ci interessa. La condizione essenziale per dimostrare il Primo Teorema di Gödel riguarda la derivabilità in PA:

(D) $\vdash_{PA} \alpha \Rightarrow \vdash_{PA} Teor(\ulcorner\alpha\urcorner)$.

(D) dice che se α è un teorema di PA, allora la formula che esprime ciò *in* PA è a sua volta un teorema di PA[10]. Ora, prima che la si adoperasse per costruire mentitori formali, Gödel aveva utilizzato la diagonalizzazione per costruire un enunciato (sia γ) che dice di se stesso non di essere falso, bensì di essere indimostrabile, ossia di non essere un teorema:

(PF_γ) $\gamma \leftrightarrow \neg Teor(\ulcorner\gamma\urcorner)$.

γ è appunto un'asserzione numerica che, interpretata attraverso la codifica, afferma: "Io non sono un teorema". Stante la definizione vista appena sopra, γ equivale anche a $\neg\exists x Dim(x, \ulcorner\gamma\urcorner)$, ovvero afferma: "Io sono un enunciato indimostrabile".

Dobbiamo poi assumere che PA sia consistente e ω-*consistente*. La nozione di consistenza è già apparsa all'orizzonte qua e là, e dovrò farvi appello spessissimo nel prosieguo del libro: in generale un qualunque sistema formale S dotato di negazione viene detto (sintatticamente) *consistente*, o anche incontraddittorio (o, talvolta, *coerente*), se e solo se per nessuna formula α del linguaggio L su cui è impiantato si dà il caso che $\vdash_S \alpha$ e $\vdash_S \neg\alpha$, ossia se S non dimostra sia una formula che la sua negazione. La nozione di ω-consistenza, invece, è più caratteristica. Un sistema si dice ω-consistente se e solo se per nessuna formula $\alpha[x]$ di L si può dimostrare sia $\alpha[x/n]$[11] per ogni naturale n, sia $\exists x \neg\alpha[x]$. Ora, Gödel ha dimostrato che

(1) Se PA è consistente, allora $\nvdash_{PA} \gamma$;
(2) Se PA è ω-consistente, allora $\nvdash_{PA} \neg\gamma$.

Quanto a (1): se γ fosse dimostrabile in PA, per (D) sarebbe dimostrabile anche $Teor(\ulcorner\gamma\urcorner)$, da cui, stante ($PF_\gamma$), seguirebbe la dimostrabilità di $\neg\gamma$. Avremmo allora $\vdash_{PA}\gamma$ e $\vdash_{PA}\neg\gamma$, contro l'assunzione che PA sia consistente. Quanto a (2): stante che la nozione di dimostrazione è ricorsiva primitiva, abbiamo che per ogni n $\vdash_{PA} Dim(n, \ulcorner\gamma\urcorner)$ o $\vdash_{PA} \neg Dim(n, \ulcorner\gamma\urcorner)$. Il primo caso è escluso se, come dice (1), γ *non* è dimostrabile. Quindi vale il secondo. Da ciò segue, stante l'assunzione che PA è ω-consistente, che $\exists x Dim(x, \ulcorner\gamma\urcorner)$ è indimostrabile. Ma $\exists x Dim(x, \ulcorner\gamma\urcorner)$ non è altro che $\neg\gamma$. La congiunzione di (1) e (2) costituisce il Primo Teorema di Incompletezza di Gödel. Questo ci dice che l'aritmetica di Peano PA include un enunciato γ per essa costitutivamente indecidibile, ossia non dimostrabile e non refutabile (cioè, tale che la sua negazione non è dimostrabile). Veniamo ora all'interpretazione priestiana.

4.3 La teoria matematica ingenua

La prova del Primo Teorema di Incompletezza di solito si accompagna a un racconto che suona più o meno così: siccome γ "dice" tramite aritmetizzazione di essere indimostrabile, e abbiamo dimostrato che lo è, γ è quel che dice di essere, dunque è un enunciato *vero*. Si afferma quindi che i risultati di incompletezza introducono un divario fondamentale fra dimostrabilità e verità (e proprio per questo costituirebbero, sulla base di un'interpretazione incoraggiata dallo stesso Gödel, una pietra angolare del realismo matematico)[12]. Mentre poi il predicato di verità per un linguaggio L, se fosse esprimibile nello stesso linguaggio L, darebbe luogo al paradosso del mentitore (e perciò, come abbiamo visto nel CAP. 2, secondo Tarski *non* deve esservi esprimibile), il predicato di dimostrabilità è esprimibile nel linguaggio di PA senza rischio di contraddizione. Il mentitore "Io sono falso" dà luogo a un'antinomia: come sappiamo, se ciò che dice è vero, è falso, e viceversa, dunque (stante la bivalenza) è vero e falso. Invece, con l'enunciato gödeliano γ che dice "Io sono indimostrabile" evitiamo la contraddizione. O almeno, questa è la normale lettura della situazione[13].

Ma come si prova che γ è vero? Si dice di solito, «scuotendo le mani»[14], che lo si prova sulla base di un ragionamento intuitivamente corretto, *esterno* al sistema formale PA. Ora, l'argomento contro il (PNC) si ottiene, secondo Priest, applicando lo stesso Primo Teorema alla teoria che cattura la nostra nozione intuitiva, o ingenua, di prova. Per "nozione ingenua di prova" Priest intende quella sottesa all'attività matematica ordinaria: «una prova, com'è intesa dai matematici (non dai logici) è un argomento mediante il quale stabiliamo che certe asserzioni matematiche sono vere»[15]. Quando vogliamo stabilire se un enunciato matematico è vero, cerchiamo di dedurlo da altri enunciati matematici già noti come veri. Siccome il processo non può regredire *in infinitum*, dobbiamo arrivare a enunciati matematici che sono noti come veri senza essere stati dimostrati a partire da altro – magari perché sono autoevidenti, ma questo non ha particolare importanza (né ne ha stabilire *quali* siano questi enunciati primitivi. Potrebbero essere, ad esempio, principi come quelli di Peano, ossia affermazioni secondo cui ogni numero ha un successore ecc.).

Naturalmente, la teoria ingenua-intuitiva connessa alla nozione ingenua-intuitiva di prova è del tutto informale. Tuttavia, «i matematici accettano che la matematica informale potrebbe essere formalizzata se ci fosse una buona ragione per farlo, e questa persuasione sembra del tutto legittima»[16]. Si potrebbe regimentare il frammento di italiano che costituisce il linguaggio della teoria ingenua, e trasformarlo in un linguaggio formale. Allora, le verità primitive sarebbero scritte nel linguaggio formale e assunte, poniamo, come assiomi, e le prove sistemate come dimostrazioni formali. Così tradotta, per Priest la teoria ingenua sarebbe di sicuro sufficientemente potente nel senso caratterizzato sopra, ossia in grado di rappresentare le funzioni ricorsive (primitive). Ma la nozione di dimostrabilità della teoria ingenua è davvero ricorsiva? Ci sono buone ragioni per crederlo. Anzitutto, se vale la Tesi di Church (ossia la tesi per cui le funzioni effettivamente computabili coincidono con quelle ricorsive) la ricorsività della nozione di dimostrabilità della teoria ingenua è implicata dalla sua effettività. A proposito dell'effettività della nozione, sentiamo allora cosa dice lo stesso Church:

> Consideriamo la situazione che si produce se la nozione di prova non è effettiva. Allora, quando si presenta a qualcuno una sequenza di formule come una prova, non ci sono mezzi sicuri con cui questi può determinare se lo è davvero o meno. Egli potrebbe quindi legittimamente domandare, in ogni caso fornito, una prova che la sequenza di formule presentata è una prova; e finché la prova supplementare non fosse fornita, potrebbe non essere convinto che il teorema proposto sia stato dimostrato. Questa prova supplementare potrebbe ben essere vista, a quanto pare, come una parte della prova complessiva del teorema[17].

È vero che gli standard in base a cui si accetta un argomento deduttivo in matematica come una prova potrebbero cambiare nel tempo, quindi la nozione ingenua di prova potrebbe essa stessa cambiare. Proprio Kurt Gödel ha suggerito che la nozione ingenua di prova potrebbe non essere ricorsiva perché noi aggiungiamo nel tempo nuove regole, o assiomi, avendo accertato un po' alla volta che implicano molte cose ritenute vere, e nessuna ritenuta falsa[18]. Il modo con cui effettuiamo tali aggiunte, dunque, non sarebbe a sua volta governato da regole. A ciò Priest dà due risposte. La prima propone, per eliminare questa variabilità diacronica, di intendere per nozione ingenua di prova quella conforme agli standard in corso *attualmente*[19]. La seconda, più radicale, è sostenuta anche da Routley: la congettura di Gödel sarebbe refutata dal fatto che la nozione ingenua di prova è qualcosa che viene insegnato e appreso *socialmente*. Siccome l'insieme di coppie che costituisce l'estensione della relazione di dimostrabilità della teoria ingenua è potenzialmente infinito, non si può insegnare la nozione fornendo una lista. Perciò, afferma Routley, solo se è ricorsiva possiamo capire come «una generazione di matematici impara cosa conta come vero dalla generazione precedente, e cioè, essi imparano certe verità matematiche di base, e come provarne altre deducendo»[20]. In caso contrario, l'apprendimento della matematica, e la concordia dei matematici su cosa valga come una buona dimostrazione, diventerebbero un mistero insondabile.

4.3.1. L'argomento

Sia quindi T la formalizzazione della nostra teoria dimostrativa ingenua. Essendo questa teoria, al pari di PA, sufficientemente potente, *se* T è consistente cade sotto il Primo Teorema di Gödel: «se T è consistente, c'è un enunciato φ non dimostrabile in T, ma che possiamo stabilire come vero con una prova [intuitiva] e quindi che *è* dimostrabile in T»[21]. Naturalmente, tutto quello che è intuitivamente dimostrabile è dimostrabile nella teoria intuitiva! Dunque «assumendo la sua consistenza, sembra che essa sia insieme completa e incompleta»[22]. A questo punto, a detta di Priest, non abbiamo via d'uscita. O accettiamo *questa* contraddizione, ossia $\vdash_T \varphi$ e $\nvdash_T \varphi$, il che va comunque contro il (PNC); oppure, dobbiamo ammettere che la nostra teoria intuitiva, con la sua nozione ingenua di dimostrazione, *non* è consistente, ossia consente di dedurre contraddizioni. Ma le nostre procedure dimostrative ingenue sono esattamente, e per definizione, le argomentazioni deduttive con cui stabiliamo che certi enunciati matematici sono veri. Quindi, certe contraddizioni sono vere.

In particolare, per Priest l'enunciato gödeliano φ della (formalizzazione della) teoria ingenua è dimostrabile all'interno di T stessa, insieme alla sua negazione. Quindi T è inconsistente, nel senso che $\vdash_T \varphi$ e $\vdash_T \neg\varphi$. Questa conclusione a detta di Priest è profondamente illuminante sulla vera natura della nostra teoria dimostrativa matematica ingenua:

In questo contesto, l'enunciato gödeliano diventa in effetti un enunciato riconoscibilmente paradossale. In termini informali, il paradosso è il seguente: consideriamo l'enunciato "Questo enunciato non è dimostrabilmente vero". Supponiamo che sia falso. Allora è dimostrabilmente vero, quindi è vero. Per *reductio*, è vero. Inoltre, lo abbiamo appena provato. Quindi è dimostrabilmente vero. E visto che è vero, non è dimostrabilmente vero. Contraddizione. Questo paradosso non è l'unico atteso nella teoria. Siccome infatti la teoria può provare la propria correttezza, dev'essere in grado di dare la propria semantica. In particolare, [ogni istanza del] T-schema per il linguaggio della teoria è dimostrabile nella teoria[23].

Abbiamo detto prima che, in base alla vulgata sul Primo Teorema, la verità di γ è stabilita sulla base di un ragionamento intuitivo esterno a PA. Ma più correttamente, si dovrebbe dire che «γ è dimostrabile in una teoria adeguata a trattare la semantica attraverso la nozione di verità (non definibile, come sappiamo dal Teorema di Tarski, in PA)»[24]. In altre parole, la prova è essenzialmente condotta con una *deviazione* nella (meta)teoria semantica. Ma in T, che formalizza la nostra teoria dimostrativa ingenua, la metateoria semantica è ricondotta nella teoria: ciò vuol dire che il linguaggio di T è semanticamente chiuso, proprio nel senso deplorato da Tarski, e T è inconsistente. E questo per Priest è ciò che ci si dovrebbe attendere da una teoria che catturi la nostra nozione ingenua di dimostrazione matematica: i matematici, naturalmente, conducono le loro prove adoperando il nostro linguaggio ordinario che, sulla base delle considerazioni del CAP. 2, dovremmo considerare semanticamente chiuso.

Notiamo che l'argomento di Priest è sostanzialmente conforme a quell'aspetto della posizione di Gödel, per cui consistenza e completezza sono *incompatibili*. Naturalmente, la differenza sta appunto nel fatto che per Priest solo rinunciando alla prima, anziché alla seconda, possiamo rendere conto della nostra concezione intuitiva dell'attività matematica ordinaria. La vera teoria che cattura la razionalità matematica è inconsistente, esprime la propria semantica, e non può sottostare a una logica classica, conforme al (PNC): «La consistenza forza una certa incompletezza, espressiva o dimostrativa, in una teoria. [...] Alla luce di ciò, potremmo dire che le nostre procedure dimostrative ingenue non sono solo contingentemente inconsistenti, ma *essenzialmente* tali. Ciò può essere visto come una rivendicazione della tesi Kant/Hegel per cui la Ragione è intrinsecamente, per sua natura, inconsistente»[25].

Come si vede, l'argomento è a dir poco ardito ed è stato variamente contestato. Charles Chihara e Neil Tennant hanno trovato molto più ragionevole concludere che non può esistere una completa formalizzazione delle nostre procedure dimostrative ingenue (il che poi è conforme all'interpretazione standard della situazione)[26]. Ma questo forse potrebbe suonare come un *begging the question* alla luce del discorso complessivo di Priest, almeno nel senso che Priest contesta indipendentemente (ossia con vari altri argomenti a favore dell'ammissione di contraddizioni, come quelli che abbiamo appreso nei capitoli precedenti) proprio che l'assunzione di consistenza vada privilegiata in generale su quella di non formalizzabilità.

Stewart Shapiro ha proposto una precisazione della nozione, effettivamente un po' oscura, di "dimostrabilità nella teoria ingenua", che T dovrebbe catturare, costruendo un'aritmetica di Peano PA* semanticamente chiusa, contenente il proprio predicato di verità. Ha quindi criticato l'argomento di Priest mostrando che, applicato a PA*, ha conseguenze piuttosto imbarazzanti. Infatti, dalla costituzione di PA* «segue che anche l'ordinaria PA e perfino l'aritmetica di Robinson sono esse stesse teorie inconsistenti»[27], il che è una situazione molto difficile da mandar giù. Mi sembra però che questa critica abbia al massimo l'aspetto di un *inconveniens*, la cui gravità dipende dal punto a cui un negatore del (PNC) è disposto ad arrivare, abbracciando certe conseguenze delle proprie posizioni. Come vedremo nei capitoli seguenti, alcuni fautori della paraconsistenza sono disposti a fare molta strada per questa via.

Note

1. Priest, 1979, 1984a, 1987, cap. 3.

2. Cfr. Routley, 1979a, 1979b. In effetti, questi lavori di Routley indagano soprattutto su cosa accade quanto all'applicazione dei Teoremi di Gödel in una teoria per l'aritmetica elementare basata su una logica che ammette contraddizioni. Tornerò su questo tema nella terza sezione del libro, trattando della "metalogica" e dell'aritmetica paraconsistenti. In seguito, Priest e Routley hanno ripreso l'interpretazione priestiana dei risultati di incompletezza in vari scritti congiunti (ad esempio Priest, Routley, 1989b, 1989d).

3. Priest, 1987, p. 48.

4. Cfr. Moriconi, 2001, p. 185; Potter, 2004, pp. 98-100.

5. Una delle conseguenze più strane del Primo Teorema di Gödel è che PA (formulata al primo ordine) non è, come dicono i teorici dei modelli, *categorica*. Più o meno, ciò vuol dire che si sono scoperti certi modelli, detti *non standard*, che soddisfano la teoria pur essendo strutturalmente diversi dal modello standard N. In particolare, non si può costringere le variabili di PA a variare esclusivamente sui numeri naturali. Anche di questo mi occuperò nella terza sezione del libro. Nel frattempo, atteniamoci all'interpretazione intesa della teoria ossia, per l'appunto, a quello che la maestra ci ha insegnato alla scuola elementare.

6. Al secondo ordine, lo si formulerebbe dicendo che ogni proprietà di cui godono lo zero e il successore di un numero che gode di quella proprietà, è una proprietà di tutti i numeri. Lo

si chiama "di induzione" perché fonda le dimostrazioni per induzione matematica (cfr. ad esempio Casalegno, Mariani, 2004, pp. 76-8).

7. Cfr. Moriconi, 2001, p. 186. Propriamente, per evitare ambiguità di notazione si dovrebbe distinguere fra un numero n e il *numerale* corrispondente, ossia il simbolo di PA che lo denota – dunque, qui si tratterebbe della sostituzione di variabili di α con numerali. Ma è una distinzione su cui possiamo sorvolare (al solito, evitiamo il *rigor mortis*).

8. La qualifica di "primitive" è dovuta a Kleene, 1976, p. 69.

9. Cfr. Gödel, 1931, p. 37.

10. Per una prova di (D), cfr. Moriconi, 2001, p. 215.

11. Come sopra, qui e in seguito c'è ambiguità di notazione fra numero e numerale.

12. Il credo realista di Gödel emerse, com'è noto, solo molti anni dopo l'articolo del '31 (cfr. Gödel, 1947), ma egli dichiarò che il proprio platonismo matematico era stato la chiave per la scoperta dei risultati di incompletezza; su ciò cfr. ad esempio Feferman, 1983.

13. Cfr. ad esempio Moriconi, 2001, p. 223. Nelle parole di Stephen Kleene: «L'espressione di Gödel "Io non sono dimostrabile" non è contraddittoria. Sfuggiamo alla contraddizione perché (quali che fossero le speranze di Hilbert) non c'è alcun motivo a priori perché ogni enunciato vero debba essere dimostrabile. L'enunciato [...] che afferma "Io non sono dimostrabile" è semplicemente non dimostrabile e vero» (Kleene, 1976, p. 65).

14. Priest, 1979, p. 222.

15. Priest, 1987, p. 50. «L'argomento concerne le nostre procedure dimostrative ingenue. Esse sono quei metodi informali di dimostrazione che sono usati dai matematici professionisti [...] per accertare la verità di qualcosa» (Priest, 1984a, p. 165).

16. Priest, 1987, p. 51.

17. Church, 1956, p. 53.

18. Cfr. Gödel, 1944, pp. 123-4.

19. Cfr. Priest, 1987, p. 54.

20. Routley, 1979a, p. 327; cfr. anche Priest, 1979, p. 237.

21. Priest, 1987, p. 56.

22. Priest, 1984a, p. 165.

23. Priest, 1987, p. 59. Cfr. anche Priest, 1984a, p. 172.

24. Moriconi, 2001, p. 227.

25. Priest, 1987, p. 59.

26. «Priest non considera il semplice fatto che è questa assunzione esistenziale a essere mostrata erronea dal ragionamento gödeliano. [...] Ciò che il Teorema di Gödel mostra è che non possiamo mai delimitare una volta per tutte, in maniera tanto rigorosa quanto richiesto, le risorse della "dimostrabilità ingenua". Queste sono aperte e indefinitamente estendibili. Comprendere che le cose stanno così, e rigettare l'asserzione che la nozione di dimostrabilità intuitiva possa essere formalizzata, è una reazione più razionale al Teorema di Gödel che credere di aver scoperto una contraddizione vera» (Tennant, 2004, p. 383). Cfr. anche Chihara, 1984, p. 121.

27. Shapiro, 2002, p. 817.

Parte seconda
Logiche della contraddizione

> Sì, annuncio fin da oggi che ci saranno ricerche matematiche sui calcoli che conterranno una contraddizione, e un giorno arriveremo a vantarci di esserci emancipati anche dalla non-contraddittorietà.
>
> L. Wittgenstein (1930)

5
Sulla detonazione[1]

5.1
La concezione scotiana dell'assurdo

Nei capitoli precedenti ho presentato alcuni casi a favore della contraddizione. In questo capitolo esporrò, prendendole dalla letteratura rilevante, certe costrizioni metodologiche sulla cui base giudicare ogni logica e ogni teoria le quali ammettano contraddizioni. Cominciamo con un po' di terminologia, precisamente con definizioni sintattiche delle nozioni di *(in)consistenza* e *trivialità*.

5.1.1. Inconsistenza e trivialità

Abbiamo già incontrato la consistenza e l'inconsistenza al capitolo precedente. Un sistema formale S dotato di negazione viene detto (sintatticamente) consistente o incontraddittorio se per nessuna formula α del linguaggio L su cui è impiantato si dà il caso che $\vdash_s \alpha$ e $\vdash_s \neg\alpha$: se non consente mai di dimostrare e refutare una formula, ossia di dimostrare sia una formula che la sua negazione, dunque una contraddizione – di tipo ($C1_{dist}$). Se invece ciò accade, il sistema è detto inconsistente o contraddittorio. Naturalmente, se si può provare sia α che $\neg\alpha$ e il sistema è dotato di un qualche assioma o di una regola d'inferenza che esprima l'Aggiunzione – cioè l'idea intuitiva che se valgono le formule $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ vale la loro congiunzione $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ – avremo che $\vdash_s \alpha \wedge \neg\alpha$, ossia avremo dedotto come teorema una contraddizione collettiva – di tipo (C1). Un sistema formale S su un L, invece, viene detto *triviale* se e solo se consente di dimostrare *tutte* le formule del linguaggio L su cui è impiantato; dunque un sistema non è triviale se esiste almeno una formula α di L tale che non $\vdash_s \alpha$.

La terminologia, in effetti, non è del tutto uniforme: come già accennato al capitolo precedente, talvolta si chiama *incoerenza*, o anche *inconsistenza rispetto alla negazione*, ciò che ho definito come inconsistenza o contraddittorietà, ossia la deducibilità di una formula e della sua negazione; e *inconsistenza*, o anche *inconsistenza assoluta*, ciò che qui ho definito come trivialità, ossia la deducibilità di qualsiasi cosa. Infine, le nozioni vengono normalmente applicate a *teorie* in senso ampio, intendendo queste come insiemi di enunciati chiusi sotto conseguenza logica; e anche a sistemi di credenze (dei quali, com'è noto, è assai dubbio che siano chiusi sotto conseguenza logica). Si dice allora che una teoria è inconsistente se *contiene* sia α che $\neg\alpha$... ecc.

5.1.2. *Ex falso quodlibet*, paraconsistenza

Definite in questo modo, inconsistenza e trivialità sono così strettamente legate che spesso le si considera equivalenti. Chiaramente, ogni logica e ogni teoria triviale dotate di negazione sono inconsistenti. Il problema è l'implicazione inversa. Questa fa perno su una famosa legge logica valida classicamente e intuizionisticamente, detta *Legge di Scoto*, o *dello pseudo-Scoto* – d'ora in poi: (PS). La legge porta questo nome perché è stata studiata nelle *In universam logicam quaestiones* attribuite un tempo a Duns Scoto, certamente dovute a un logico di scuola. Vi si manifesta la cosiddetta "concezione scotiana dell'assurdo". I medioevali la esprimevano dicendo: *ex falso* (e paradigmaticamente: *ex contradictione*) *sequitur quodlibet*, dall'assurdo segue qualsiasi cosa, e la contraddizione è il caso per eccellenza di assurdo.

In effetti, al pari di "contraddizione" e "Principio di Non-Contraddizione", anche la Legge di Scoto si declina in molti modi: può essere formulata sintatticamente, o semanticamente; può essere considerata in forma di assioma, o di regola di derivazione ecc. Una formulazione comune è la seguente:

(PS1) $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$.

Spesso si considera la forma importata, in cui l'inferibilità di qualsiasi cosa da una contraddizione – di tipo (C1) – è immediata:

(PS_i1) $\alpha \wedge \neg\alpha \to \beta$.

Naturalmente, β potrà essere un'altra contraddizione. Abbiamo dunque:

(EQ) $\alpha \wedge \neg\alpha \leftrightarrow \beta \wedge \neg\beta$,

principio che sancisce l'equivalenza di tutte le contraddizioni. Dunque, in particolare da una contraddizione ne seguono infinite altre.

La pregnanza di una qualunque legge implicativo-negativa come (PS1) dipende, naturalmente, dalle ipotesi che si fanno intorno a $\neg$ e $\to$. Con riferimento al condizionale materiale standard, varie versioni di (PS) vengono spesso chiamate *paradosso dell'implicazione materiale*, per ragioni su cui mi soffermerò nel capitolo dedicato alle logiche della rilevanza. È il caso di ricordare che (PS) affetta però anche l'implicazione stretta di C. I. Lewis (sia $\prec$) come uno dei cosiddetti paradossi dell'implicazione stretta. Il motivo è intuitivamente chiaro: $\alpha \prec \beta$ – intesa come equivalente a: $\Box(\alpha \to \beta)$ – vale se è impossibile che α e non β. Dunque, per la verità di un'implicazione stretta non basta la falsità del suo antecedente, come accade per il condizionale materiale standard. Basta però l'*impossibilità* del suo antecedente, ossia un enunciato impossibile implica strettamente qualsiasi cosa ("Se non esistono infiniti numeri primi, allora Venezia è su Marte"); e naturalmente una contraddizione è il prototipo dell'impossibilità. Dunque, $\alpha \wedge \neg\alpha \prec \beta$[2].

Ma una concezione dell'assurdo si lega, anzitutto, a una certa concezione della *negazione*. Ad esempio, spesso nelle logiche subclassiche si definisce, nello stile di Johansson, la negazione come implicazione di un assurdo:

(Df¬) $\neg\alpha =_{df} \alpha \rightarrow \bot$,

il che lascia da stabilire cosa significhi esattamente la costante (*falsum*) per l'assurdo. Nel caso, abbiamo una negazione scotiana per l'assurdo scotiano: si nega una formula che implica un assurdo scotiano, e questo consiste appunto nell'implicare tutto:

$\bot \rightarrow \beta$.

Perciò, (PS) viene a volte assunto nei sistemi formali quale principio primitivo, direttamente normativo del comportamento della negazione. Oltre che come assioma, lo possiamo ritrovare come regola di derivazione (a volte la si chiama – con un nome peraltro un po' fuorviante – *eliminazione della negazione*):

$$\frac{\alpha, \neg\alpha}{\beta} \qquad (\text{E}\neg)$$

Non c'è nulla di male nel ricavare una contraddizione da certe assunzioni nel calcolo logico: anzi, la derivazione di contraddizioni è essenziale alle dimostrazioni mediante *reductio*. Tuttavia, se un sistema formale consente di dedurre anche una sola contraddizione come teorema, e include qualcosa come (PS) o (PS_i) o (E¬), le conseguenze sono disastrose: il sistema consente di dimostrare tutto, e dunque, anche il contrario di tutto, sicché è deduttivamente inutile. Una singola *contradiction* produce un'*explosion*, dice Priest[3]: dunque, possiamo chiamare *esplosiva* una logica per cui vale (PS) in qualche sua variante.

La descrizione fornita finora è stata prevalentemente in termini *proof-theoretic*, ma si può caratterizzare una logica come esplosiva anche semanticamente, attraverso la sua relazione di conseguenza logica. Una conseguenza logica esplosiva sarà allora una in cui, per ogni α e β:

$\{\alpha, \neg\alpha\} \models \beta$[4].

Mediante il T-schema, (PS_i1) diventa:

(PS_i2) $V(\ulcorner\alpha\urcorner) \wedge V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner) \rightarrow V(\ulcorner\beta\urcorner)$, dalla verità di un enunciato e della sua negazione segue la verità di qualsiasi cosa. L'antecedente di (PS$_i$2) è una contraddizione logico-semantica (C2b); dunque è equivalentemente formulabile – stante (Neg1), ossia il principio che equipara falsità e verità della negazione – come:

(PS$_i$2) $V(\ulcorner\alpha\urcorner) \wedge F(\ulcorner\alpha\urcorner) \rightarrow V(\ulcorner\beta\urcorner)$,

se un enunciato qualsiasi è vero e falso, tutto è vero; e così via.

Una logica esplosiva trivializza ogni teoria inconsistente su di essa impiantata. Il problema di qualsiasi logica che ammetta contraddizioni, o che funga da logica sottostante a una teoria inconsistente, è dunque quello di riuscire in modo soddisfacente a evitare l'esplosione. Diciamo che una logica che soddisfa questo requisito è conforme alla *Condizione Debole di Anti-trivialità* (e vedremo fra poco in che senso la condizione è "debole"). Questo è ciò a cui mirano le *logiche paraconsistenti*. Possiamo così dare la più generale definizione di paraconsistenza logica dicendo: *una logica è paraconsistente se e solo se non è esplosiva*[5].

5.1.3. "Compreso da ogni uomo che pensa"

Abbiamo detto che la concezione scotiana dell'assurdo può essere incorporata in un assioma, o in una regola (primitiva) di derivazione. Ma (PS) è anche derivabile in varie versioni, e il punto è che i principi da cui segue sembrano ad alcuni del tutto intuitivi. Karl Popper ha adoperato una dimostrazione di (una versione di) (PS) in un famoso articolo intitolato *Che cos'è la dialettica?*, argomentando contro la dialettica di Hegel e Marx che ogni teoria la quale sostenga la realtà della contraddizione è condannata alla trivialità. Nel presentare la prova, Popper ha detto che siamo qui di fronte a un fatto che «merita d'essere conosciuto e compreso da ogni uomo che pensa»[6].

Una prova in deduzione naturale è la seguente, che riprende sostanzialmente quella popperiana:

1.	1	$\neg\alpha$	Ass
2.	2	α	Ass
3.	2	$\alpha \vee \beta$	2, I$\vee$
4.	1, 2	β	1, 3, SD
5.	1	$\alpha \rightarrow \beta$	2, 4, I $\rightarrow$
6.		$\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	1, 5, I $\rightarrow$

(I$\vee$) è la regola di Introduzione della Disgiunzione, ossia:

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta} \quad (\mathrm{I}\vee)$$

(SD) è la regola del Sillogismo Disgiuntivo, detto anche *modus tollendo ponens*:

$$\frac{\alpha \vee \beta, \neg\alpha}{\beta} \quad (\mathrm{SD})$$

Gli ultimi due passi sono applicazioni della regola di Introduzione del Condizionale (o Prova Condizionale, come la si chiama anche in deduzione naturale), ossia:

$$\begin{array}{c} [\alpha] \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta \\ \hline \alpha \to \beta \end{array} \quad (\mathrm{I}{\to})$$

($[\alpha]$ indica, al solito, che l'assunzione è scaricata). Spesso ci si riferisce a (un'inessenziale variante di) questa prova anche come alla "prova di Lewis", che è stata prodotta da C. I. Lewis in riferimento alla propria implicazione stretta[7].

Cosa si potrebbe mettere in discussione nella derivazione? Non abbiamo utilizzato nulla che fosse più che intuizionistico – nulla che valga solo ammettendo la Doppia Negazione Forte, $\neg\neg\alpha \to \alpha$, o il Terzo Escluso, $\alpha \vee \neg\alpha$. La regola di Introduzione del Condizionale corrisponde, nel calcolo della deduzione naturale, a metà del (meta)Teorema di Deduzione, o di Herbrand-Tarski, che possiamo qui formulare così:

(THT) $\quad \alpha_{1, \ldots,} \alpha_n \vdash \beta \Leftrightarrow \alpha_{1, \ldots,} \alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \to \beta$[8].

Ma anche se adottassimo una logica per cui non vale il Teorema di Deduzione, arriveremmo comunque fino al passo n. 4, avendo così (PS) come sequenza derivabile, o come regola derivata ecc. Ci rimangono dunque poche scelte. Per bloccare la prova, possiamo rigettare l'Introduzione della Disgiunzione o il Sillogismo Disgiuntivo. La prima opzione sembra impraticabile. (I$\vee$) codifica il significato vero-funzionale della disgiunzione: se un enunciato è vero, di certo lo resterà se viene incorporato in una disgiunzione, e tanto basta per rendere vera la disgiunzione stessa[9].

D'altra parte, (SD) è una regola sovraminimale. Si può allora pensare di rifiutare (PS) e (SD) in blocco. Si ottiene così, com'è noto, la logica minimale di Johansson[10]: teniamo fermo che $\neg\alpha$ sta per $\alpha \to \bot$, ma non facciamo più ipotesi scotiane su $\bot$. E questa logica ha i suoi rispettabili modelli: abbiamo prove di completezza del calcolo minimale rispetto alla relativa semantica, in strutture che, oltre a refutare il Terzo Escluso, forniscono controesempi anche a (SD) e (PS)[11]. Come sono fatti simili modelli? Possiamo pensarli come strutture a mondi "possibili" che includono mondi detti *non standard* o *non normali*. Un mondo non normale minimale ha la caratteristica di soddisfare tutte le formule negate: per ogni α soddisfa sia $\neg\alpha$ che $\neg\neg\alpha$, quindi tutte le cosiddette contraddizioni *forti*, ossia della forma $\neg\alpha \wedge \neg\neg\alpha$. Tuttavia, in simili mondi accade che per qualche α sia soddisfatta $\neg\alpha$ ma non α stessa. Inoltre, pur essendo più debole della logica intuizionistica, la logica minimale è interpretabile in essa. Ma poiché possiamo derivare da una contraddizione la negazione di qualsiasi formula, ossia dato che minimalmente vale:

(PSI$_M$) $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta)$[12],

come dicono Routley e Priest, anche se è «tecnicamente paraconsistente», la logica minimale «non lo è in modo *interessante*»[13]. Anche se non tutto segue da una contraddizione, ne segue comunque un'intera collezione di formule individuate solo sintatticamente (le negazioni). Di conseguenza alcuni autori, fra cui Diego Marconi, preferiscono rifiutare alla logica minimale anche la qualifica di paraconsistente, pur essendo essa, in un senso preciso, una logica "non scotiana": «Presumibilmente, l'idea è che un sistema paraconsistente non dovrebbe giustificare qualsiasi derivazione che faccia appello – in un modo o nell'altro – alla supposta "inaccettabilità" della contraddizione: non dovrebbe essere possibile derivare una formula da una contraddizione *solo perché* è una contraddizione»[14].

5.2
Condizionale e Sillogismo Disgiuntivo

Occorre dunque seguire una via diversa. In buona parte degli approcci paraconsistenti si tenta di bloccare la prova Lewis-Popper attaccando proprio il Sillogismo Disgiuntivo. Di questo parlerò soprattutto trattando delle logiche della rilevanza: l'approccio rilevantista è infatti quello in cui il punto è stato discusso più approfonditamente e il rifiuto di (SD) più strenuamente difeso. Ma possiamo avere già un'anticipazione, che ci permetterà di considerare come il rigetto di (SD) abbia importanti conseguenze per la semantica del condizionale in una logica paraconsistente.

Un buon motivo per rifiutare (SD) è proprio l'ammissione di contraddizioni. Supponiamo infatti che α e $\neg\alpha$ siano entrambe vere. Ciò mediante (I$\vee$) rende vera anche $\alpha \vee \beta$, anche se β è falsa. Allora, (SD) non è una buona regola d'inferenza semplicemente perché *non preserva la verità*: da premesse entrambe vere, $\alpha \vee \beta$ e $\neg\alpha$, consente di derivare una conclusione falsa, β. Questo tipo di situazione *self-contained* sarà discusso in seguito; nel frattempo, vediamo cosa ne segue per il condizionale. Nella logica classica, com'è noto, si può definire il condizionale materiale così:

(Df$\rightarrow$) $\alpha \rightarrow \beta =_{df} \neg\alpha \vee \beta$[15].

Un condizionale materiale $\alpha \rightarrow \beta$ esclude soltanto che si dia il caso del proprio antecedente e non del proprio conseguente; il che equivale a dire, per l'appunto, che o non si dà il caso che α, oppure si dà il caso che β. Ebbene, date Doppia Negazione e sostitutività (SD) equivale a:

$$\frac{\neg\alpha \vee \beta,\ \alpha}{\beta}$$

che in base a (Df→) non è altro che il normale *modus ponens* (o Regola di Separazione, o Eliminazione del Condizionale):

$$\frac{\alpha \to \beta, \alpha}{\beta} \qquad (E\to)$$

Ora, è vero che si è talvolta cercato di trattare certi paradossi con indebolimenti estremi della logica che rigettavano anche il *modus ponens*[16]. E, come vedremo, a volte le logiche paraconsistenti sono costrette ad adottare interpretazioni decisamente non standard dei connettivi. Ma (E→) sembra esprimere *la* caratteristica inferenziale essenziale del condizionale. Sembra che un connettivo non conforme a questa regola non sia affatto un *condizionale* in alcun senso intuitivamente accettabile. Come conseguenza di ciò, una logica paraconsistente con il *modus ponens* non sembra poter accettare (Df→), e deve esplicitare la semantica del condizionale in modo indipendente da quella della disgiunzione. Chiamiamo questa costrizione metodologica la *Condizione del modus ponens*.

5.3
"Cambio di logica, cambio di argomento"

Questo accenno alla semantica irrinunciabile del condizionale ci porta direttamente a un tema che ritorna molto spesso nel dibattito sulle logiche paraconsistenti, e che ha a che fare col famoso motto di Quine: *change of logic, change of subject*. È noto che le logiche non classiche sono sospettate di modificare sottobanco il significato dei simboli logici. Questo è stato sostenuto soprattutto per le logiche paraconsistenti, visto che mettono (tipicamente) in discussione qualcosa di così fondamentale come il (PNC). Se qualcuno dice: "Per qualche α, è vero che α e non-α", ci si chiede cosa intenda per "vero", ma anche, per "e" e "non". Nelle parole dello stesso Quine:

> La mia opinione su questa disputa è che nessuna delle due parti sa di che cosa sta parlando. Pensano di parlare della negazione "~", "non", ma la notazione non sarebbe più riconoscibile come negazione ove essi cominciassero a considerare vere delle congiunzioni della forma "*p* . ~*p*" e smettessero di ritenere che tali enunciati implichino tutti gli altri. Proprio in questo, evidentemente, sta l'imbarazzo del logico deviante: quando cerca di negare la dottrina si limita in realtà a cambiare argomento[17].

I filosofi sono spesso in disaccordo sul contenuto di fondamentali nozioni logiche e metafisiche (come quelle di identità, esistenza, predicazione, necessità ecc.) o sulla validità di certi principi d'inferenza basilari – come la Contrapposizione, la *reductio ad absurdum* o (DS). Ed è noto che questo genere di discussione incontra tipicamente una vera e propria *impasse*, o tende a diventare un mero scontro di intuizioni. Ciò potrebbe essere dovuto, fra le altre cose, al fatto che non possiamo esaminare nozioni come quelle di predicazione, negazione ecc., senza insieme adoperarle. È molto difficile decidere se la teoria non standard di una nozione fondamentale implichi un reale disaccordo con una caratterizzazione classica di *quella* nozione, oppure sia semplicemente la descrizione di qualcosa di diverso, che adopera lo stesso nome o lo stesso simbolo. Tipici problemi di questo genere sono: la negazione intuizionistica significa semplicemente qualcos'altro da quella classica, pur essendo tipograficamente identica? Teorie non vero-funzionali di disgiunzione e congiunzione come il supervalutazionismo e le logiche non aggiuntive (di cui parlerò nel prossimo capitolo) descrivono davvero *congiunzione* e *disgiunzione*? Filosofi della logica come Michael Resnik considerano almeno alcuni di questi problemi semplicemente irrisolvibili[18].

5.3.1. Tre tipi di contrasto fra intuizioni

Quando si tratta del significato del lessico logico, si potrebbero distinguere tre campi di battaglia principali (peraltro, variamente sovrapposti) per gli scontri fra intuizioni.

1. In primo luogo, c'è un classico dilemma della normale semantica logica. Prendiamo l'apparato standard della semantica tarskiana per linguaggi formali. Sappiamo che le clausole ricorsive esprimenti le condizioni di verità per gli enunciati possono qui essere prese, se Tarski ha ragione, come una caratterizzazione della nozione di verità per il linguaggio oggetto (la caratterizzazione è materialmente adeguata se dalle clausole si deducono tutte le istanze del T-schema, ci ha detto Tarski). Ma la ricorsione viene anche presa come esplicitazione dei significati delle espressioni *logiche*. Solo che non possiamo avere insieme botte piena e moglie ubriaca. Presupponendo una comprensione *indipendente* del vocabolario logico, possiamo avere una caratterizzazione della verità. Inversamente, presupponendo una certa comprensione antecedente del concetto di verità, otteniamo una caratterizzazione del vocabolario logico. Questa dipendenza incrociata[19] è una delle sorgenti principali di equivoco e contrasto di intuizioni, allorché si discutono le logiche devianti: hanno cominciato alterando il significato di connettivi e/o quantificatori, o hanno preso le mosse da un mutato concetto di verità (eventualmente, sorretto da diverse intuizioni ontologiche)?

In effetti, alcuni autori trovano problematica l'idea che possiamo procedere dalle condizioni di verità ai significati delle costanti logiche. Ad esempio, Michael Tye ha osservato che le clausole semantiche omofoniche presuppongono sempre che noi comprendiamo il significato del connettivo adoperato nel metalinguaggio per comprendere le condizioni di verità degli enunciati[20]. A questo si potrebbe rispondere, tuttavia, che le clausole ricorsive non sono necessariamente omofoniche. Ad esempio, la negazione di scelta che abbiamo incontrato al CAP. 2 è stata definita mediante due clausole:

(S¬1) $V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner) \Leftrightarrow F(\ulcorner\alpha\urcorner)$

(S¬2) $F(\ulcorner\neg\alpha\urcorner) \Leftrightarrow V(\ulcorner\alpha\urcorner)$, e, come si vede, la negazione qui non appare nel metalinguaggio. Al contrario, si potrebbe supporre che, per capire come la negazione è caratterizzata da (S¬1) e (S¬2) per il linguaggio oggetto, dobbiamo sapere qualcosa su quello che i predicati di verità e falsità significano nel metalinguaggio[21].

2. Una seconda fonte di disaccordo viene dal fatto che vi sono due modi distinti e altrettanto diffusi di caratterizzare il vocabolario logico: quello in termini di valori di verità (con clausole tarskiane, tavole di verità ecc.); e quello inferenzialista in stile Gentzen, in termini di regole di introduzione/eliminazione (ad esempio, come quando si è detto che un connettivo è un condizionale solo se per esso vale la regola di Eliminazione del Condizionale o *modus ponens*). Può dunque succedere che un autore consideri il fallimento di una regola d'inferenza per un certo connettivo come un segno decisivo che c'è qualcosa che non va nella sua presentazione logica. Un altro autore, invece, potrebbe sostenere che il fatto che una presentazione tabulare fornisce i valori di verità "intuitivamente attesi" è sufficiente a mostrare che abbiamo colto nel segno[22].

3. Una terza fonte di discussione viene dal problema se i connettivi (e/o quali fra essi) debbano essere vero-funzionali. Paradigmatico è l'esempio delle semantiche a supervalutazioni. In questo tipo di semantiche, due enunciati α e β possono risultare né veri né falsi, perché modi diversi di precisare i predicati vaghi, o diverse assegnazioni di denotazioni ai termini non denotanti che vi compaiono, conducono a diversi valori di verità. In questo caso, può accadere che anche $\alpha \vee \neg\beta$ sia priva di valore di verità, mentre $\alpha \vee \neg\alpha$ risulterà invece sempre vera. E alcuni hanno sostenuto che questo fallimento della vero-funzionalità è un segno del fatto che la semantica a supervalutazioni perde di vista il significato dei connettivi, e particolarmente della disgiunzione.

È chiaro che i tre generi di scontro fra intuizioni sono variamente connessi[23]. Ad esempio, le caratteristiche della semantica a supervalutazioni sono state viste come devianti anche quanto alla nozione di verità. Poiché l'approccio supervalutazionale convalida la legge del Terzo Escluso, ma non il Principio di Bivalenza, come abbiamo intravisto al CAP. 1, deve rigettare metà del T-schema, che è stato considerato una condizione minimale affinché un predicato possa essere considerato come un predicato di verità.

5.3.2. La Condizione di Danno Minimo

Come avremo ampiamente occasione di accertare, tutti e tre questi contrasti di intuizioni tornano nelle discussioni su quasi tutte le logiche paraconsistenti note. Per mettere un po' di ordine nel dibattito, Manuel Bremer ha recentemente proposto, come criterio per valutare logiche paraconsistenti, una costrizione metodologica che possiamo etichettare sotto il titolo di *Condizione di Danno Minimo* (*minimal damage condition*):

Gli altri connettivi usuali [ossia, diversi dal condizionale] (come negazione, congiunzione o disgiunzione) non dovrebbero essere ridefiniti in modo almeno tanto implausibile quanto i paradossi dell'implicazione materiale. [...] Regole di deduzione che associamo comunemente con [i connettivi] non devono essere abbandonate a cuor leggero (ad esempio, la transitività del [condizionale]). Chiamiamo questa la "Condizione di Danno Minimo". Può essere soddisfatta in grado diverso [...][24].

Com'è chiaro, questo requisito è vago (tanto quanto le nostre intuizioni su cosa può essere "più" o "meno" implausibile, o cosa si può prendere "a cuor leggero" in logica). È possibile fare riferimento alle altre condizioni, nel senso che la deviazione rispetto al trattamento standard (inferenziale e/o vero-condizionale) dei connettivi dovrebbe essere minima *compatibilmente* con il loro rispetto. Un po' come nelle leggi della robotica di Asimov: la norma successiva vale per il robot a condizione che non confligga con le precedenti. Come si vedrà, alcune logiche paraconsistenti danno comunque la netta sensazione di violare la Condizione di Danno Minimo in modo massiccio. In ogni caso, è chiaro che *qualcosa* in una logica paraconsistente deve funzionare in modo non standard – altrimenti non avremmo altro che la logica classica e la sua esplosività. Come ha detto Priest, «qualsiasi progresso dipende dal fatto che ci si allontana dalla tradizione in un modo o nell'altro»[25].

5.4
Il paradosso di Curry

Una logica paraconsistente interessante dovrebbe consentire di sviluppare in modo non esplosivo *teorie* inconsistenti. In particolare, vogliamo che un'eventuale teoria degli insiemi, e un'eventuale teoria del significato per il linguaggio ordinario, che ammettono contraddizioni, non siano trivializzate dalla logica sottostante. Ciò richiede da parte della logica in questione l'osservanza di un requisito più forte rispetto alla Condizione Debole di Anti-trivialità. Per capire perché, occorre riprendere il paradosso di Curry, di cui ho parlato nel CAP. 2. Come si ricorderà, quest'enunciato paradossale dice:

1. Se (1) è vero, allora β.

Formalmente, si tratta di un enunciato λ_2 tale che

(PF$_{\lambda 2}$) $\quad \lambda_2 \leftrightarrow (V(\ulcorner\lambda_2\urcorner) \rightarrow \beta)$.

Ebbene, se (PF$_{\lambda 2}$) appartenesse a una teoria semanticamente chiusa, con il seguente argomento:

1.	$\lambda_2 \leftrightarrow (V(\ulcorner\lambda_2\urcorner) \rightarrow \beta)$	(PF$_{\lambda 2}$)
2.	$V(\ulcorner\lambda_2\urcorner) \leftrightarrow \lambda_2$	(T) (con $\alpha = \lambda_2$)
3.	$V(\ulcorner\lambda_2\urcorner) \leftrightarrow (V(\ulcorner\lambda_2\urcorner) \rightarrow \beta)$	1, 2, Sost
4.	$V(\ulcorner\lambda_2\urcorner) \rightarrow (V(\ulcorner\lambda_2\urcorner) \rightarrow \beta)$	3, Df$\leftrightarrow$
5.	$V(\ulcorner\lambda_2\urcorner) \rightarrow \beta$	4, Contr

6.	$(V(\ulcorner\lambda_2\urcorner) \to \beta) \to V(\ulcorner\lambda_2\urcorner)$	3, Df$\leftrightarrow$
7.	$V(\ulcorner\lambda_2\urcorner)$	5, 6, E $\to$
8.	β	5, 7, E $\to$

la nostra teoria sarebbe trivializzata (ed è facile costruirne una variante che adopera nozioni insiemistiche, anziché semantiche). Ora, occorre notare che le assunzioni logiche della prova sono estremamente esigue. Come si diceva, la peculiarità del paradosso di Curry è che non vi compaiono il predicato di falsità né la negazione. E la prova trivializzante adopera, oltre al T-schema (che naturalmente vorremmo conservare nella nostra teoria semanticamente chiusa), alla normale definizione del bicondizionale e alla sostitutività, solo due regole per il condizionale: (E$\to$) o *modus ponens*, e, al passo n. 5, la seguente regola, detta di solito di *Contrazione*, o anche di *Assorbimento*:

$$\frac{\alpha \to (\alpha \to \beta)}{\alpha \to \beta}\ \text{(Contr)}$$

Dunque, una logica su cui basare una teoria degli insiemi e una semantica inconsistenti non può contenere sia il *modus ponens* che la Contrazione – come regola, o nel corrispondente principio: $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$. Ma il *modus ponens*, come si è detto, è una condizione inferenziale minimale per il condizionale. Dunque, occorrerà rinunciare a (Contr). Di una logica che rispetti questo genere di restrizione diremo che è conforme alla *Condizione Forte di Anti-trivialità*. Facciamo quindi attenzione a cosa tutto ciò significa: di per sé, una logica può benissimo essere non esplosiva anche se non soddisfa tale condizione. Ma in questo caso, è difettiva dal punto di vista delle *applicazioni*, ossia di cosa ci si può fare (in particolare, di quali teorie vi si possono impiantare). Vedremo in seguito che ci sono effettivamente logiche le quali soddisfano la Condizione Debole, ma non quella Forte di Anti-trivialità.

5.5 La *classical recapture*

Riassumendo, abbiamo le seguenti esigenze metodologiche alla luce delle quali valutare una logica paraconsistente.

1. Condizione Debole di Anti-trivialità: l'inconsistenza o ammissione di contraddizioni non deve trivializzare il sistema in base a una qualche versione di (PS), ossia: la logica non dev'essere esplosiva.
2. Condizione del *modus ponens*: la logica deve disporre di un condizionale distaccabile (cioè, per cui vale il *modus ponens*) diverso dal condizionale materiale standard.
3. Condizione di Danno Minimo: i connettivi (con le regole che li governano) dovrebbero deviare il meno possibile dal loro trattamento standard, compatibilmente con il rispetto delle altre condizioni.

4. Condizione Forte di Anti-trivialità: una semantica e una teoria degli insiemi inconsistenti non devono essere trivializzate da una qualche versione del paradosso di Curry sulla base della logica sottostante.

A queste quattro condizioni si può aggiungere un requisito molto generale e, in senso lato, epistemologico (di cui la Condizione di Danno Minimo è in certo modo la controparte strettamente logica). Tale requisito è stato etichettato dai paraconsistentisti come *classical recapture*[26]. Il problema è quello, molto investigato in tutta l'epistemologia contemporanea, della preservazione di ciò che si chiama *problem solving ability*. Possiamo porre la questione adoperando nozioni tipiche della teoria di Lakatos[27].

La scoperta dei paradossi insiemistici e la difficoltà di gestirli adoperando una logica standard; l'incompletezza dell'aritmetica sancita da Gödel; i paradossi dell'implicazione materiale; tutti questi a detta dei paraconsistentisti sono sintomi del fatto che il programma logico classico – intendendo questo in senso generale, come il programma inaugurato dalla logica di Frege e Russell – è in fase "degenerativa". Tipicamente, un programma di ricerca degenerativo è, per così dire, sulla difensiva: anziché produrre novità interessanti, ci si dedica a sviluppi molto specialistici e quasi esoterici di quel che già c'è; le anomalie emerse all'interno del programma rimangono insolute ecc.[28] La paraconsistenza, per la radicalità delle sue posizioni e la vastità delle (promesse) applicazioni, si presenta nel suo insieme come un programma di ricerca progressivo alternativo a quello classico, che può dare inizio a una fase – per dirla con Kuhn – di «scienza rivoluzionaria». Nelle parole di Priest:

> Abbiamo visto che in base agli standard di Kuhn e Lakatos, la teoria logica è in uno stato di crisi, ossia, in un tempo in cui le condizioni sono oggettivamente mature per una rivoluzione. Ma se durante una crisi emerge una nuova teoria che *a*) risolve alcune delle anomalie del vecchio paradigma, *b*) preserva una parte sostanziale della capacità di risolvere problemi del vecchio paradigma, e *c*) pone nuovi problemi aperti con promessa di soluzione (ossia, promesse che costituiscano la base di un nuovo e fruttuoso programma di ricerca) una rivoluzione può aver luogo. Ma una tale teoria sta già emergendo: la logica paraconsistente[29].

La paraconsistenza promette di ottenere tutto ciò rinunciando alla validità generale e incondizionata del (PNC). Il punto è la richiesta *b*: preservare almeno una parte sostanziale degli aspetti per cui il programma da rimpiazzare *funzionava*. A un approccio paraconsistente tocca spiegare come un sistema logico proposto sia in grado di conservare certe virtù del sistema classico – ad esempio: occorrerebbe illustrare in che modo recuperare teoremi fondamentali della matematica classica, i quali adoperano regole d'inferenza invalide in ambito paraconsistente, come il Sillogismo Disgiuntivo. Come vedremo, questo genere di spiegazione viene declinato in modi abbastanza diversi – e non sempre molto felici – nei vari approcci paraconsistenti; ma più o meno tutti gli autori hanno sentito l'obbligo di dire qualcosa sulla *classical recapture*.

5.6
Paraconsistenza e dialeteismo

Chiudo il capitolo introducendo un'ultima distinzione cui farò spesso riferimento in seguito. Nella letteratura è oramai usuale ammettere (almeno) due diversi gradi di paraconsistenza, distinguendo fra paraconsistenza *debole* e *forte*[30]. La variante debole viene talvolta presentata come una paraconsistenza *proof-theoretic*[31], essendo basata sull'osservazione che vi sono teorie inconsistenti, ma interessanti e non triviali, senza bisogno di ammettere la *realtà* della contraddizione né la possibilità di contraddizioni vere. Abbiamo già incontrato tali teorie: la teoria ingenua degli insiemi e la "semantica intuitiva", ad esempio, sono inconsistenti. Dal Principio di Astrazione della teoria ingenua degli insiemi segue che $R \in R \wedge R \notin R$; eppure, la teoria non sembra affatto essere triviale, nel senso che appare *rigettare* molte affermazioni intorno agli insiemi: ad esempio che $\{\emptyset\} \in \emptyset$, ossia che il singoletto dell'insieme vuoto appartenga a questo. Anche la nostra semantica intuitiva, pur consentendo la derivazione dei vari paradossi semantici, rigetta che la congiunzione di α e β sia vera se e solo se α è vero oppure β è vero. Altre teorie famose non considerate in questo libro si sono dimostrate molto utili, pur essendo nate inconsistenti (ad esempio, il calcolo infinitesimale di Leibniz, tanto caro a Hegel proprio per questo motivo), o forse essendolo ancora (ad esempio la teoria atomica di Bohr). A chiunque abbia letto Feyerabend verranno in mente vari altri esempi. Dunque, c'è il forte sospetto che la logica sottostante a tali teorie non debba essere esplosiva. Inoltre, una motivazione essenziale a favore della paraconsistenza debole è che chiunque concorderebbe sul fatto che il nostro *sistema di credenze* è inconsistente. Tutti sperimentiamo di avere, o aver avuto, credenze fra loro contraddittorie. E noi traiamo inferenze dalle informazioni e credenze eventualmente inconsistenti che possediamo, ma non ci sentiamo legittimati a dedurne qualsiasi cosa.

Ora, se le cose stanno così dovremmo concluderne che la logica classica, o qualsiasi altra logica esplosiva, sono *strutturalmente inadatte* a rappresentare molte pratiche inferenziali ordinarie. Anzi, assumere che lo siano potrebbe essere piuttosto pericoloso: se il database della CIA contiene informazioni inconsistenti sulla vostra patente (ad esempio, risulta che avete e non avete l'obbligo di portare gli occhiali alla guida), un elaboratore di Langley basato su una logica esplosiva potrebbe dedurne che siete un terrorista...[32] Nella concezione paraconsistente debole, tuttavia, i modelli per tali teorie o sistemi di credenze inconsistenti sono di solito presi come utili oggetti matematici anche senza rappresentare possibilità *reali*, e lo sviluppo di una logica non esplosiva è indipendente dall'idea che vi siano contraddizioni vere (stante un'idea di verità sufficientemente seria) od oggetti o stati di cose contraddittori.

La posizione paraconsistente *forte*, invece, è caratterizzata dall'ammissione di contraddizioni vere in senso proprio, in violazione di qualche forma di (PNC 2), del Principio di Non-Contraddizione logico-semantico. Questa posizione viene anche chiamata *dialeteismo*. Il termine è dovuto a Routley e a Priest; nell'intento di esprimere l'idea di contraddizione vera, essi hanno coniato l'espressione *dialetheia*, "doppia verità": come «una creatura dal volto di Giano, che guarda sia al vero che al falso»[33]. Com'è chiaro, il dialeteismo è di gran lunga la posizione più interessante dal punto di vista filosofico. Le sue motivazioni, d'altra parte, sono state investigate nei capitoli precedenti: esse si basano sull'idea che non solo certe teorie intuitive sono inconsistenti di fatto (e non triviali); ma anche, certe contraddizioni sono *dimostrabili*, e *inevitabili*, nel senso che sono implicate da fatti manifesti riguardanti il nostro linguaggio ordinario (ad esempio la sua chiusura semantica), o i nostri processi di pensiero (ad esempio l'ascesa ai limiti e il Principio del Dominio). E i tentativi di evitarle incappano in contraddizioni di ritorno, come i *revenge Liars*, oltre che nelle altre difficoltà esplorate.

Naturalmente, data una forma anche lieve di realismo, l'ammissione di contraddizioni vere, ossia di violazioni di (PNC 2), comporta l'ammissione di *oggetti* e/o *stati di cose* contraddittori (quelli che rendono vere tali contraddizioni), in violazione di (PNC 3), del (PNC) ontologico. Al CAP. 1 ho seguito Lukasiewicz e Aristotele nel sostenere l'equivalenza di (PNC) logico-semantico e ontologico. Ma abbiamo anche visto in che senso il T-schema, che è lo strumento fondamentale per dichiarare i due tipi di formulazione equivalenti, è una condizione minimale sul predicato di verità che potrebbe venir sganciata dalla concezione corrispondentista-realista. Stando così le cose, si potrebbe sostenere un dialeteismo antirealistico in cui ci sono contraddizioni vere, senza bisogno di ammettere oggetti o stati di cose contraddittori. Questa posizione intermedia finora è stata esplorata sorprendentemente poco in letteratura[34], probabilmente perché i padri fondatori del dialeteismo, in particolare Priest e Routley, hanno sempre avuto propensioni realistiche[35]. Per un dialeteista si apre la possibilità di avere anche contraddizioni *osservabili*. Ad esempio, Priest (1999a) esplora l'idea che se ne annidino in certi paradossi della percezione, magari quelli indotti dalle figure di Escher. Peraltro, su questo punto i dialeteisti sembrano essersi divisi: alcuni fra loro ritengono che sia più opportuno limitare la possibilità di contraddizioni vere ad ambiti semantici e insiemistici, avendo quindi al massimo oggetti *astratti* contraddittori, come gli insiemi[36].

Meglio la paraconsistenza debole o il dialeteismo? Secondo Manuel Bremer: «Se il dialeteismo sostiene che certe contraddizioni sono dimostrabili e la paraconsistenza debole nega la (definitiva) verità delle contraddizioni ciò può solo significare che la paraconsistenza debole deve rigettare i sistemi e le logiche che consentono tali prove. Ciò potrebbe voler dire che la paraconsistenza debole ha gli inconvenienti di *entrambi* i mondi: non ha né la forza de[lla logica classica], né l'universalità semantica (o altri vantaggi del dialeteismo)»[37].

Secondo John Woods, invece: «Anche se le logiche paraconsistenti deboli possono aggiustare un valore di verità dialeteico, non ne hanno bisogno. Se il dialeteismo è vero, queste sono logiche candidate per esso; ma non c'è bisogno che il dialeteismo sia vero perché queste logiche abbiano una motivazione adeguata. Perciò, [...] penso si debba dire che le logiche paraconsistenti deboli sono in generale modelli migliori delle strategie di gestione delle dissonanze cognitive delle loro cugine dialeteiche»[38].

Molte logiche non esplosive possono funzionare sia in un contesto debolmente, sia in uno fortemente paraconsistente; inoltre, vedremo che in alcuni casi (ad esempio, nelle logiche della rilevanza) l'ammissione di contraddizioni è stata un effetto collaterale all'interno di programmi di ricerca volti a risolvere altri problemi. L'essenziale, per il momento, è comprendere che *paraconsistenza* e *dialeteismo* non sono la stessa cosa, e che il secondo esige la prima (ossia, esige logiche non esplosive), mentre l'inverso potrebbe non essere inevitabile[39].

Note

1. Lo scherzo su *On Denoting* di Russell viene dal titolo di Schotch, Jennings, 1989.

2. Cfr. Haack, 1978, pp. 197-8; Priest, 2001, pp. 64 ss. «Com'è noto, il difetto più appariscente delle logiche dell'implicazione stretta è che esse contengono i c.d. "paradossi dell'implicazione stretta" [...]. Lewis ne traeva spunto per argomentare che i paradossi provavano che "⥽" non poteva essere letto in termini di deducibilità entro un sistema formalizzato ma di deducibilità "naturale" o intuitiva. A tale scopo Lewis riteneva che la legge di Duns Scoto per l'implicazione stretta fosse giustificata da considerazioni intuitive sulla deducibilità» (Pizzi, 1987, pp. 66-7).

3. Cfr. Priest, 1998, p. 411.

4. Cfr. ad esempio Priest, Routley, 1989c, p. 151; Priest, 2001, p. 67; Beall, 2004, p. 3.

5. Il termine "paraconsistente" è dovuto al filosofo F. Mirò Quesada (cfr. Priest, Routley, Norman, 1989, p. XX).

6. Popper, 1969, p. 540.

7. Trattando dell'"implicitazione" (intesa qui nel senso di implicazione stretta), Hughes e Cresswell si risolvono nell'accettazione del fatto che «i "paradossi" [e il primo dei paradossi da loro considerato è appunto "(p . ~p) implicita q"] sono dei principi ragionevoli di deducibilità; e non è quindi la loro presenza in un sistema o la loro assenza dallo stesso che deporrebbe contro la sua pretesa di essere una logica corretta della implicitazione. [...] Ora i principi che seguono sembrano intuitivamente validi:

a) Qualunque congiunzione implicita ciascuno dei suoi congiunti.

b) Qualunque proposizione p implicita (p ∨ q), prescindendo da ciò che può essere q.

c) Le premesse (p ∨ q) e ~p insieme implicitano la conclusione q (principio del Sillogismo Disgiuntivo).

d) Ogniqualvolta p implicita q e q implicita r, p implicita r (principio della transitività della implicitazione).

C. I. Lewis ha provato che usando questi principi possiamo sempre derivare una qualunque proposizione arbitraria q da qualunque proposizione della forma (p . ~p) [...]. Questa derivazione prova che il prezzo che bisogna pagare per negare che (p . ~p) implicita q è l'abbandono di almeno uno degli *a-d*. Francamente questo prezzo sembra a noi esorbitante, poiché tutti gli *a-d* sembrano intuitivamente ragionevoli e il principio per cui (p . ~p) implicita q è nel peggiore dei casi inoffensivo: in pratica non potrebbe mai portarci fuori strada guidandoci da una premessa vera a una conclusione falsa, in quanto nessuna proposizione della forma (p . ~p) potrà mai essere vera» (Hughes, Cresswell, 1968, pp. 379-80).

8. Cfr. Casari, 1997, p. 165.

9. Una logica che invalida (I∨) è il sistema trivalente di Bochvar, cui ho già accennato nel CAP. 3. Questo sistema funziona con le cosiddette tavole trivalenti deboli di Kleene, e il valore Indeterminato ha la caratteristica di essere "infettante": qualsiasi formula con una sottoformula indeterminata diventa indeterminata (cfr. Haack, 1978, p. 207). Dunque può essere che α sia vera, ma $\alpha \vee \beta$ indeterminata, se β è indeterminata. Siccome l'Indeterminato non è un valore designato, (I∨) non è valida (non preserva i valori designati). D'altra parte la logica di Bochvar è comunque esplosiva, non conforme alla Condizione Debole di Anti-trivialità (cfr. Bremer, 2005, p. 35).

10. Cfr. Johansson, 1936.

11. Cfr. ad esempio Galvan (1997, pp. 61 ss.), dov'è esibito un modello tale che $\{\alpha \wedge \neg\alpha\} \not\models \beta$ e $\{\alpha \vee \beta\} \not\models \neg\alpha \rightarrow \beta$. Cfr. poi le pp. 91 ss., per una dimostrazione di completezza della logica minimale.

12. (PSI_{M}) viene a volte chiamata *Legge Minimale di Scoto* (cfr. Casari, 1997, p. 99).

13. Priest, Routley, 1989c, p. 156.

14. Marconi, 1981, p. 409. Peraltro, in un divertente capitolo di *Del principio di contraddizione* Łukasiewicz descrive una comunità di individui che seguono una logica di tipo minimale e ritengono vero ogni enunciato negativo: «Quindi è vero per loro sempre e ovunque che il sole non brilla, che l'uomo non muore, che due più due non fa quattro ecc. anche quando il sole brilla, la gente muore e i concetti: due, quattro, moltiplicazione e uguaglianza significano per loro quello che significano per noi» (Łukasiewicz, 1910, p. 95). E cerca arditamente di mostrare che in questa comunità si potrebbe ragionare induttivamente e deduttivamente, e perfino edificare una scienza non aristotelica.

15. Ciò però non vale in logiche non classiche, in cui i connettivi non sono interdefinibili.

16. Ad esempio Fitch (1953) suggerisce di rinunciare al *modus* per aggirare il paradosso di Curry.

17. Quine, 1970, pp. 126-7.

18. «Io assumo una prospettiva vaga intorno all'idea per cui una revisione della nostra logica implica che si usino le cosiddette parole logiche con nuovi significati. Supponiamo che fino ad ora le mie dimostrazioni matematiche adoperassero principi non costruttivi; adesso, però, io annuncio che mi limiterò a prove accettabili da un punto di vista costruttivo. Ho rivisto la mia logica, continuando a dare a "non" e "o" lo stesso significato, oppure ho deciso di usare quelle parole con significato diverso? Qui non percepisco alcuna materia di discussione» (Resnik, 2004, p. 180).

19. Sulla quale cfr. Copeland, 1986 (di cui si riparlerà).

20. La conseguenza di questa tesi è svolta con riferimento alla disgiunzione: «È un errore supporre che le condizioni di verità per enunciati disgiuntivi analizzino il significato del termine "o". Piuttosto, è perché "o" significa quello che significa, che abbiamo le condizioni di verità. [...] Se qualcuno mancasse del concetto di disgiunzione, ad esempio, non lo comprenderebbe se gli si mostrassero le condizioni di verità per enunciati disgiuntivi. Piuttosto, lo scopo di una enunciazione formale delle condizioni di verità è quello di spiegare rigorosamente come i predicati di verità vanno applicati» (Tye, 1990, p. 547 e nota 24).

21. Questo punto avrà una certa importanza in seguito. Si vedrà come ci siano logiche che ammettono contraddizioni, in cui la negazione ha clausole semantiche esteriormente identiche a quelle della negazione di scelta di una logica (*non* contraddittoria) dalla semantica non bivalente. La differenza sta, per l'appunto, nell'interpretazione delle nozioni di verità e falsità.

22. Si dice talvolta che la caratterizzazione in termini di tavole di verità è tipicamente classica, mentre quella attraverso regole d'inferenza cattura il significato costruttivo dei connettivi. Ma naturalmente, vi sono logiche non classiche descritte mediante tavole di verità (ad esempio, logiche polivalenti) e, viceversa, presentazioni del tutto legittime del calcolo logico classico in deduzione naturale, come il classico Lemmon, 1965.

23. Per un approfondimento su questo genere di problemi, cfr. i capp. 11 e 12 di Haack, 1978.

24. Bremer, 2005, p. 39.

25. Priest, 1979, p. 220.

26. Cfr. ad esempio Routley, 1979b, pp. 892 ss.; Priest, 1987, cap. 8.

27. Cfr. Lakatos, 1970.

28. Cfr. ad esempio Priest, 1978, pp. 135 ss.

29. Ivi, pp. 140-1.

30. Cfr. ad esempio Priest, Routley, 1989c; Beall, 2004; Bremer, 2005, *Introduzione*.

31. Ad esempio in Priest, Routley, 1989c, pp. 151 ss.

32. Come ha detto Diderik Batens, un fautore della paraconsistenza debole, «quando cominciamo a considerare insiemi inconsistenti di credenze o teorie inconsistenti, [la logica clas-

sica] risulta totalmente sbagliata anche come logica estensionale. [...] In realtà, anche se il mondo è consistente e anche se le teorie inconsistenti devono essere trasformate in teorie consistenti [...] questo non ci aiuta nel frattempo. Finché non riusciamo ad aggiustare una teoria inconsistente in una consistente, o a sostituirla con una consistente, rigettare la teoria inconsistente ci lascia privi di qualunque teoria nel campo» (Batens, 1980, p. 197). Una posizione analoga è sostenuta in Bobenrieth, 1998.

33. Cfr. l'*Introduzione* a Priest, Routley, Norman, 1989, p. XX. L'ispirazione viene da un famoso brano delle *Osservazioni sui fondamenti della matematica*, in cui Wittgenstein parla della contraddizione come di un «qualcosa di super-proposizionale, qualcosa che troneggia sopra le proposizioni, e guarda da due parti, come una testa di Giano» (Wittgenstein, 1956, p. 172).

34. Tuttavia, si possono vedere Kroon (2004) e Mares (2004), che presentano primi tentativi in questa direzione.

35. E ciò, nonostante Priest (2000) cerchi di mostrare che il dialeteismo non è impegnato con una concezione della verità piuttosto che con un'altra.

36. Questo tema è discusso soprattutto nei lavori di J.C. Beall: cfr. Beall, 2000, 2001a; Beall, Colyvan, 2001.

37. Bremer, 2005, p. 16.

38. Woods, 2003, p. 112.

39. Per un approfondimento su questo punto, cfr. Brown, 1999.

6
Approcci non aggiuntivi

6.1
La logica discussiva

Con l'etichetta di "approcci non aggiuntivi" mi riferisco a un gruppo di logiche e teorie paraconsistenti, accomunate dalla persuasione che una limitazione soddisfacente della detonazione da contraddizioni possa essere ottenuta rifiutando l'*Aggiunzione*. L'idea fondamentale dell'Aggiunzione, come sappiamo, è che se valgono gli enunciati $\alpha_1, ..., \alpha_n$ presi separatamente, allora vale anche la loro congiunzione $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n$. In queste teorie entra in gioco la distinzione fra contraddizioni prese in senso *distributivo* e *collettivo*, di cui si è detto al CAP. 1. In effetti, anche "aggiunzione" si dice in molti modi, cosicché il suo rifiuto assume forme diverse negli approcci in questione.

Cominciamo da un vecchio scritto di Stanislaw Jaskowski, intitolato *Calcolo delle proposizioni per sistemi deduttivi contraddittori*, che è stato pionieristico non solo nell'ambito delle logiche non aggiuntive, ma della paraconsistenza in generale. Molti autori della tradizione paraconsistente si sono ispirati dichiaratamente al saggio, o almeno alle sue enunciazioni di principio: «Formulo allora il problema di una logica dei sistemi contraddittori nel modo seguente: cerco un sistema di calcolo delle proposizioni, il quale 1. applicato a sistemi contraddittori non comporti sempre la loro sovracompletezza, 2. sia abbastanza ricco da rendere possibile l'inferenza pratica, 3. possieda una motivazione intuitiva»[1].

L'opportunità di ammettere contraddizioni è motivata dall'insoddisfazione per le soluzioni gerarchiche ai paradossi insiemistici e semantici (vengono nominati Russell e Chwistek). Jaskowski ha di mira esplicitamente il «principio della differenziazione dei linguaggi», che impone di «distinguere il linguaggio di una data teoria dal linguaggio nel quale possiamo parlare delle proprietà del primo linguaggio». Un tale principio è «in contraddizione con la tendenza naturale ad una formulazione sintetica di tutte le verità a noi conosciute in un solo linguaggio»[2].

Il bersaglio è la "legge di sovracompletezza", come Jaskowski chiama (PS)[3] – anche se vedremo come la logica proposta sfugga solo a una delle versioni dello Scoto. Il sistema presentato, detto *sistema discussivo*, è siglato come D_2 ma è noto in letteratura anche come J. La motivazione intuitiva per D_2, ossia il punto n. 3 del programma di Jaskowski, è qui la riconduzione del sorgere di contraddizioni al *dialogo*. Supponiamo di provare a rappresentare in un sistema formale una disputa fra interlocutori che esprimono tesi discordanti o incompatibili. Esempi della situazione potrebbero essere testimonianze contrastanti presentate in un processo; ma anche, un database in cui vengono inseriti dati a volte incompatibili provenienti da fonti diverse. Tali tesi saranno introdotte come assiomi del sistema, sicché questo includerà principi che si contraddicono. Tuttavia il sistema dovrebbe consentire di trarre conseguenze da diverse ipotesi in contrasto fra loro in modo non banale.

Ora, D_2 è una logica enunciativa modale "mascherata". Anzitutto, una tesi può essere accolta nel sistema solo se è classicamente *possibile*. La regola del gioco dialogico, cioè, è che se il contendente o il testimone *x* sostiene (che) α, α è ammessa in D_2 se e solo se (classicamente) $\Diamond\alpha$. Si richiede che gli interlocutori avanzino tesi almeno possibili dal punto di vista di quello che Jaskowski chiama un «arbitro imparziale»[4]; e una singola fonte di informazione, o testimonianza, è assunta come in se stessa consistente. Il taglio modale implicito al sistema emerge nelle definizioni dei *connettivi discussivi* di D_2. Anzitutto, Jaskowski definisce così l'*implicazione discussiva* (sia $\supset$, mentre $\rightarrow$ è il condizionale materiale standard):

(ID) $\alpha \supset \beta =_{df} \Diamond\alpha \rightarrow \beta$.

Altri connettivi discussivi del sistema sono l'equivalenza discussiva (sia $\equiv$) e la congiunzione discussiva (sia $\bullet$):

(ED) $\alpha \equiv \beta =_{df} (\Diamond\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\Diamond\beta \rightarrow \Diamond\alpha)$

(CD) $\alpha \bullet \beta =_{df} (\alpha \wedge \Diamond\beta)$[5].

Il fatto che i connettivi discussivi siano definiti mediante gli operatori standard e il modalizzatore indica quindi un'ovvia parentela di D_2 con la logica enunciativa modale. In effetti, vi è una precisa relazione col classico S_5, in cui il sistema discussivo è agevolmente interpretabile. Si può cioè mostrare per induzione sulla complessità di α che

(TR) $\vdash_{D_2}\alpha \Leftrightarrow \vdash_{S_5}\Diamond\alpha$,

ossia, una formula è un teorema di D_2 se e solo se la sua possibilizzazione è un teorema di S_5[6]. Da ciò il sistema ricava la propria completezza e decidibilità. Sono stati costruiti modelli algebrici per D_2 direttamente derivati da quelli di S_5[7]. Inoltre, Jaskowski ritiene che D_2 soddisfi il punto n. 2 del proprio programma: possiede ventisei assiomi e, a differenza di altri antichi tentativi di costruzione di sistemi contraddittori (vengono nominati ad esempio Kolmogorov, alcuni sistemi polivalenti), avrebbe una certa potenza inferenziale[8]. E il punto n. 1? In S_5 non vale la regola:

$$\frac{\Diamond\alpha,\ \Diamond\neg\alpha}{\beta}$$

Per fornire un controesempio intuitivo, dice Jaskowski, «è sufficiente ammettere per [α] una proposizione che è possibile, ma non necessaria, e per [β] una proposizione impossibile»[9]. Dunque, anche se si includono in D_2 due tesi "contraddittorie" non ne segue qualsiasi cosa. Corrispondentemente, per la definizione (ID) di implicazione discussiva

$$(\mathrm{PS}_d) \qquad \neg\alpha \supset (\alpha \supset \beta)$$

(la "legge implicativa di sovracompletezza") *non* è una tesi di D_2. Ciò a detta di Jaskowski «rende possibile la coesistenza di tesi discussive contraddittorie senza sovracompletezza del sistema discussivo»[10]. Discuterò fra poco fino a che punto la proposta funzioni. Prima però dovremo occuparci di un'altra teoria non aggiuntiva.

6.2
La logica dell'inconsistenza di Rescher e Brandom

Probabilmente il più ampio e organico saggio nell'ambito delle teorie non aggiuntive è *The Logic of Inconsistency*, di Nicholas Rescher e Robert Brandom[11]. Il sottotitolo del libro, «Uno studio sulla semantica e l'ontologia dei mondi possibili non standard», ci dà un'idea del taglio fondamentale del loro approccio, non *proof-theoretic* ma volto interamente a questioni di ontologia e semantica. Gli autori non individuano una vera logica non esplosiva, nel senso di un insieme di assiomi, teoremi e/o regole di derivazione paraconsistenti. Chiariscono invece di voler mettere in questione il (PNC) direttamente nelle versioni logico-semantiche e ontologiche[12]. È proprio questo a rendere il libro estremamente interessante. Una delle principali direzioni di indagine nell'ambito della paraconsistenza in generale, infatti, è quella dello studio dei cosiddetti *mondi impossibili*.

6.2.1. Mondi impossibili in generale

Non abbiamo difficoltà a ipotizzare mondi in cui certe leggi biologiche e fisiche fondamentali non valgono: ad esempio, un mondo in cui John Kennedy muore sia il 22 novembre 1962 che il 18 agosto 1967, o uno in cui John Kennedy il 22 novembre 1962 si trova sia a Dallas che a Portland. Si potrebbero qualificare questi mondi come fisicamente o biologicamente impossibili. I mondi *logicamente* impossibili sarebbero, invece, mondi in cui certe leggi *logiche* vengono meno – e questi meritano il titolo di impossibili *simpliciter*, visto che le leggi logiche dovrebbero essere le leggi più generali.

Si dice a volte che considerare mondi in cui le leggi logiche vengono meno è fuori luogo per definizione, appunto perché le leggi logiche valgono in tutti i mondi, anche quando questi sono fisicamente o biologicamente impossibili. La domanda allora è: leggi di *quale* logica? Abbiamo già accennato a certi mondi minimali in cui non valgono né il Terzo Escluso né l'*ex falso quodlibet*. La prima di queste due leggi viene meno anche nei modelli per la logica intuizionistica (su cui avrò occasione di tornare, seppure rapidamente, in seguito). Ora, sembra che noi ci riferiamo a mondi simili quando valutiamo condizionali del tipo: “Se la logica minimale fosse corretta, allora la Legge di Scoto fallirebbe” (il che è vero); o: “Se la logica minimale fosse corretta, allora la Riflessività dell’Identità fallirebbe” (il che è falso). Chiunque comprende una logica non standard, ad esempio l’intuizionismo, la minimale o la *quantum logic*, sa come starebbero le cose se una di queste logiche fosse corretta[13]. Così, i mondi impossibili sono oggi proposti da alcuni autori come una naturale estensione delle teorie dei mondi possibili[14] e hanno applicazioni nello studio della nozione di contenuto proposizionale, degli stati di credenza ecc.[15]

I mondi impossibili che ci interessano ora, peraltro, sono quelli in cui è *la* legge logica fondamentale, ossia il (PNC), che vale intuizionisticamente e minimalmente, a venir meno. Perfino chi vuole attenersi alla validità generale e incondizionata del (PNC) potrebbe dover dire che, come ci sono vari modi in cui il mondo potrebbe essere, così ci sono vari modi in cui il mondo *non* potrebbe essere. Secondo autori come Greg Restall[16], se non ci fossero modi in cui il mondo non potrebbe essere, ne seguirebbe che *tutto* è possibile[17]. Ora, prendiamo un mondo w_1 in cui si trisecano gli angoli con riga e compasso, ma non ci sono i famosi cerchi quadrati meinonghiani; e prendiamo un mondo w_2 con i cerchi quadrati, ma in cui gli angoli si comportano assennatamente. Per alcuni, w_1 e w_2 sembrano essere due *diversi* modi in cui il mondo non potrebbe essere. E ciò suggerisce che il regno dell’assurdo non è come la notte di Hegel, in cui tutte le vacche sono nere. Per alcuni la legittimazione di questi mondi può dunque venire dal fatto che perfino in essi è riconoscibile un certo grado di *struttura* logica. Il lavoro di Rescher e Brandom è stato – come ora vedremo – pionieristico in questa direzione d’indagine.

6.2.2. Mondi non aggiuntivi

Riprendendo la notazione originale del saggio, possiamo esprimere la sussistenza e non sussistenza di stati di cose in un mondo così:

$$|P|_w = +$$
$$|P|_w = -$$

(“Lo stato di cose descritto dall’enunciato *P* sussiste/non sussiste nel mondo *w*”). Ora, i mondi possibili standard sono descritti, come si suole dire, da insiemi *consistenti* e *massimali* di enunciati, cioè sono vincolati dal (PNC) e dal Terzo Escluso: esattamente uno fra P e $\neg P$ vale in w. I mondi non standard di Rescher e Brandom sono ottenuti con due operazioni ontologiche ricorsive su mondi standard, che gli autori chiamano *schematizzazione* e *sovrapposizione*. Le simbolizzerò rispettivamente con $\cap$ e $\cup$. Un mondo *schematico* $w_1 \cap w_2$ è un mondo, ottenuto per schematizzazione, in cui sussistono tutti e soli gli stati di cose sussistenti sia in w_1 che in w_2:

$|P|_{w1 \cap w2} = + \Leftrightarrow |P|_{w1} = +$ e $|P|_{w2} = +$.

Un mondo *inconsistente* $w_1 \cup w_2$ è invece un mondo, ottenuto per sovrapposizione, in cui sussistono tutti e soli gli stati di cose sussistenti almeno in uno dei due mondi di partenza:

$|P|_{w1 \cup w2} = + \Leftrightarrow |P|_{w1} = +$ o $|P|_{w2} = +$.

Naturalmente, un mondo ottenuto per schematizzazione potrà essere, in generale, ontologicamente "sottodeterminato": ci possiamo attendere che in simili mondi alcuni oggetti siano *vaghi*. La vaghezza, dunque, non è *de dicto*, dovuta all'imprecisione del linguaggio, o epistemica, ma *de re*[18]. Quel che più ci interessa sono i mondi inconsistenti ottenuti per sovrapposizione, i quali saranno invece, dualmente, "sovradeterminati"[19]. Un mondo inconsistente è certamente un mondo impossibile[20]. Inoltre – e qui emerge l'aspetto *non aggiuntivo* dell'approccio, l'assegnazione di + e – non è composizionale:

È cruciale osservare, tuttavia, che mentre possiamo avere che $|P|_w = |{\sim}P|_w = +$ in qualche mondo inconsistente *w*, non potremo mai avere che $|P \,\&\, {\sim}P|_w = +$. La nostra posizione è che due stati di cose reciprocamente inconsistenti possono ben realizzarsi in un mondo non standard, ma un singolo stato di cose *auto-inconsistente* non si può mai realizzare. Le contraddizioni possono realizzarsi distributivamente ma non collettivamente: un'*autocontraddizione* dev'essere esclusa. Avremo sempre che $|P \,\&\, {\sim}P|_w = -$[21].

Dunque, è proprio l'ontologia in gioco a essere "non aggiuntiva". Rescher e Brandom in effetti mantengono l'Aggiunzione come regola d'inferenza:

$$\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta} \qquad (\mathrm{I}\wedge)$$

mentre per i mondi inconsistenti salta (metà del)la normale, corrispondente clausola semantica vero-funzionale per la congiunzione. Non vale cioè la metà da destra a sinistra di

$$(\mathrm{S}\wedge) \qquad V_w(\ulcorner \alpha \wedge \beta \urcorner) \Leftrightarrow V_w(\ulcorner \alpha \urcorner) \text{ e } V_w(\ulcorner \beta \urcorner)$$ [22]

("$\alpha \wedge \beta$ è vero nel mondo *w* se e solo se α è vero in quel mondo e β è vero in quel mondo"). Dunque «abbiamo a che fare con una *semantica* non ortodossa, non con una *logica* non ortodossa»[23]. Il risultato è che la teoria tollera solo quella che gli autori chiamano *inconsistenza debole*, ossia contraddizioni *distributive*:

$V_w(\ulcorner \alpha \urcorner)$, $V_w(\ulcorner \neg\alpha \urcorner)$,

ma da queste non seguono mai *inconsistenze forti* come:

$V_w(\ulcorner\alpha \wedge \neg\alpha\urcorner)$[24].

Si capisce in che senso (e entro che limiti) l'approccio sia paraconsistente: «La nostra strategia corrente [...] è di accettare *P* & ~*P* ⊢ *Q*, ma di bloccare la mossa da due tesi reciprocamente contraddittorie *P* e ~*P* alla loro congiunzione autocontraddittoria *P* & ~*P*. Ma questo blocco non è certo ottenuto entro la *logica* in sé (perché noi manteniamo [I∧]), ma piuttosto nella sistemazione *semantica* di ogni asserzione relativa ai mondi o al sistema (come in [S∧])»[25].

Rescher e Brandom devono quindi ridefinire la relazione di conseguenza logica. In particolare, tutto segue da una contraddizione *collettiva*, ossia $\{\alpha \wedge \neg\alpha\} \models \beta$, e la conseguenza logica per insiemi con una sola premessa è del tutto identica a quella classica. La paraconsistenza è ottenuta solo per il comportamento non standard della congiunzione, ossia appunto $\{\alpha, \beta\} \not\models \alpha \wedge \beta$[26].

Il saggio propone quindi numerose applicazioni della teoria delineata, anche con approfondite discussioni filosofiche. Anzitutto, si sostiene che vi si può edificare un'ontologia di oggetti meinonghiani, sia vaghi che contraddittori; vengono poi proposte una strategia generale per la soluzione dei paradossi semantici e insiemistici; una logica modale; e anche una teoria dell'identità e dell'individuazione per oggetti inconsistenti[27].

6.3
Problemi degli approcci non aggiuntivi

La critica più comunemente rivolta a tutti gli approcci non aggiuntivi riguarda lo status decisamente non standard della congiunzione in queste teorie. Priest e Routley, ad esempio, hanno osservato che, se è vero che in ogni logica o teoria paraconsistente qualcosa deve funzionare in modo non classico, tuttavia «si potrebbe dubitare che la congiunzione *sia davvero* una congiunzione nella logica discussiva»[28]. Infatti, si potrebbe sostenere che la congiunzione *è* esattamente il connettivo il cui significato è catturato dalla clausola omofonica (S∧) vista qui sopra. L'equivalenza in cui (S∧) consiste, si dice, non può essere negoziata, perché la congiunzione non è altro che una funzione booleana interamente definita dalla sua tavola di verità. Inoltre, anche se nessuno vieta che si chiami "congiunzione" un operatore dalle condizioni di verità devianti (dopotutto siamo in un paese libero), la congiunzione discussiva di Jaskowski, •, definita in (CD), non ha alcuna chiara motivazione intuitiva. Sembra che troviamo qui una violazione della Condizione di Danno Minimo di cui si diceva al capitolo precedente[29].

Una seconda critica è quella per cui nelle teorie non aggiuntive le contraddizioni sono "ammesse" in un senso fortemente improprio. Consideriamo il sistema di Jaskowski, che è connesso a un approccio modale del tutto classico come quello di S_5. In che senso le "tesi discussive contraddittorie" sono davvero *contraddizioni* accolte in D_2? Quella che Jaskowski chiama "legge congiuntiva di sovracompletezza", ossia il corrispettivo discussivo di (PS$_i$), la versione importata di (PS):

(PS_{id}) $\alpha \wedge \neg\alpha \supset \beta$,

è una tesi di D_2. A differenza delle corrispondenti tesi classiche, (PS_d) e (PS_{id}) non sono interdeducibili. Intuitivamente: se ammettiamo due tesi contraddittorie (α e $\neg\alpha$), ma sostenute da *diversi* interlocutori nel contesto di un "dialogo dialettico", dal punto di vista del sistema di Jaskowski, ossia dell'"arbitro imparziale" di cui si diceva sopra, avremo soltanto che $\Diamond\alpha$ e $\Diamond\neg\alpha$. Stante la definizione (ID) di implicazione discussiva, segue il rifiuto di (PS_d). Invece, «la discussione diviene "sovracompleta" allorché una delle posizioni assunte è in se stessa contraddittoria»[30], ossia allorché l'"arbitro imparziale" di D_2 ammetta nel dialogo che $\Diamond(\alpha \wedge \neg\alpha)$. Ciò equivarrebbe semplicemente ad accogliere l'affermazione di una contraddizione (collettiva) da parte di *uno* dei partecipanti al dialogo, ossia a consentirgli di contraddirsi. Ma questo è appunto ciò che era escluso dalla regola del gioco dialogico.

L'approccio non aggiuntivo è stato quindi giudicato inadeguato proprio perché tutto segue da una contraddizione intesa in senso *collettivo*: la Condizione Debole di Anti-trivialità è rispettata solo in senso fortemente limitato. E si è sostenuto che nelle "contraddizioni dialogiche" di Jaskowski la contraddizione è in realtà aggirata con una strategia di parametrizzazione, con una distinzione dei rispetti (qui: i diversi parlanti). Ancora secondo Priest e Routley: «Il principale problema con l'approccio discussivo è che non prende sul serio [la tesi dialeteista secondo cui] vi sono contraddizioni vere. Le contraddizioni possono essere "vere" ma questo non vuol dire altro che "vere in mondi diversi". Inoltre ciascun mondo possibile è tanto consistente quanto qualsiasi classicista potrebbe desiderare: l'approccio ha un taglio eccessivamente modale per trattare l'inconsistenza in modo soddisfacente»[31].

Rescher e Brandom, ad esempio, suggeriscono che le istanze del Principio di Astrazione che danno luogo ai paracossi insiemistici vengano suddivise in due metà; per il paradosso di Russell avremo $\forall x(x \in R \rightarrow x \notin x)$ e $\forall x(x \notin x \rightarrow x \in R)$, ciascuno incluso in una teoria separata[32]. Ma naturalmente: «Questa strategia in effetti ha solo l'apparenza della paraconsistenza. In realtà è solo una posizione classica revisionista. Infatti, suddividere una teoria inconsistente in diverse sottoteorie consistenti è un gioco che i teorici classicisti degli insiemi hanno giocato per ottanta anni. Il classicista è del tutto soddisfatto di ambo i suddetti frammenti della teoria degli insiemi»[33].

6.4
Vero-funzionalità, subvalutazioni e argomento da lettere maiuscole

Nonostante tutte queste inadeguatezze, l'approccio discussivo di Jaskowski viene coltivato ancora oggi, soprattutto nei lavori di Max Urchs[34]. D'altra parte, i mondi non standard di Rescher e Brandom sembrano prendere l'idea di violazioni ontologiche del (PNC) più sul serio dell'approccio dialogico di Jaskowski. Gli autori hanno dunque cercato di giustificare l'anomalia semantica del connettivo della congiunzione come rispecchiante una *reale* anomalia dei mondi in questione: «C'è qualcosa di intrinsecamente non-vero-funzionale in questi mondi: non c'è alcun modo generale per fornire le condizioni di verità-in-*w* di un enunciato molecolare nei termini delle condizioni di verità-in-*w* dei suoi componenti. [...] Ci sono due modi di vedere la cosa – o come un impedimento decisivo alla ammissibilità di tali mondi, o come un riconoscimento dei difficili fatti della vita al di fuori della sfera della semplicità standard»[35].

Questa motivazione per il rifiuto dell'Aggiunzione è stata recentemente rivitalizzata e sviluppata da Achille Varzi[36], nel contesto di una più ampia polemica contro l'esclusività della concezione vero-funzionale dei connettivi. Una logica e la sua corrispettiva semantica, osserva Varzi, si sostengono sempre su una ontologia: se una legge o una conseguenza logica devono valere in *tutte* le circostanze, «una spiegazione sistematica di cosa conti come una circostanza genuina (nel senso rilevante) fa parte di ciò che occorre per definire una logica, ossia, una teoria della validità logica»[37]. Che dunque la congiunzione non possa essere altro che vero-funzionale è un presupposto, dovuto al fatto che la semantica standard incorpora sottobanco nella clausola (S$\wedge$) una *assunzione* sui mondi possibili, ossia un vincolo sulle interpretazioni ammissibili:

Quando specifichiamo cosa conta come un'interpretazione ammissibile del linguaggio (oggetto), dobbiamo escludere interpretazioni in cui "e" e "o" esprimono qualcosa di diverso dalle funzioni booleane. [...] Questo fatto tende a essere offuscato dal fatto che tipicamente, nella pratica standard, la semantica degli operatori logici viene esposta come una parte di una definizione ricorsiva di verità: [...] il significato degli operatori logici non è specificato dalle strutture adoperate per interpretare il linguaggio, ma fissato in modo *indiretto* mediante una definizione ricorsiva del valore di verità degli enunciati in cui compaiono. È imposto *ab initio* sull'intero macchinario semantico[38].

Dunque, lo status assegnato classicamente a congiunzione e disgiunzione *presuppone* le nostre stipulazioni su che cos'è una circostanza ammissibile. E se abbiamo una diversa e più ampia nozione di circostanza ammissibile (quale potrebbe essere quella di mondo non standard nell'approccio di Rescher e Brandom), cambieremo la logica dei connettivi ma *non* si potrà dire che abbiamo operato il trucco stigmatizzato da Quine come *change of subject*: «possiamo concordare sul significato di "e" e "o" mentre discordiamo sulle loro proprietà logiche»; e ciò perché, continua Varzi, «ci siamo liberati da un modo standard e restrittivo di intendere la nozione di circostanza possibile, e la corrispondente nozione di verità»[39]. La tesi vero-funzionale sul significato di congiunzione e disgiunzione allora appare come quello che Tappenden ha chiamato un «argomento da lettere maiuscole»[40]: si dice che "o α oppure β" è vero; allora O α OPPURE β (pestare i piedi! Picchiare sul tavolo!) deve essere vero[41].

Ebbene, una simile, più ampia nozione di circostanza sembrerebbe legittima. Costituiscono circostanze ammissibili, ad esempio, le situazioni dialogiche, i già menzionati casi di testimonianze contrastanti a un processo, o di database prodotti dalla somma di più fonti d'informazione; o ancora, narrazioni fittizie (ad esempio, in una delle storie di Arthur Conan Doyle Watson zoppica a causa di una vecchia ferita di guerra; in un'altra storia, la ferita è alla spalla, e Watson non zoppica. Ma da questo non segue, naturalmente, che Watson zoppichi e non zoppichi in alcuna singola storia di Conan Doyle). Le situazioni "impossibili" di questo genere *possono* essere analizzate, e hanno un certo grado di strutturazione logica[42].

Inoltre, c'è una serie di ovvie dualità fra Non-Contraddizione e Terzo Escluso; fra (PNC) nel senso logico-semantico, come: $\neg(V(\ulcorner\alpha\urcorner) \wedge V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner))$; e Principio di Bivalenza: $V(\ulcorner\alpha\urcorner) \vee V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner)$; fra l'idea di oggetti ontologicamente "sovradeterminati" o inconsistenti, e quella di oggetti "sottodeterminati", incompleti e vaghi; e così via[43]. Ciò suggerisce, secondo Varzi, che sia possibile costruire una semantica duale rispetto a quella a supervalutazioni, cui ho già varie volte accennato, e che si è mostrata così efficace nel trattamento di fenomeni come quello della vaghezza: una «semantica subvalutazionale che rende una contraddizione "*A* e non-*A*" falsa anche quando sia "*A*" che "non-*A*" sono veri»[44].

6.5
Ma in che mondo vivi?, 1

Non mi addentrerò qui nei dettagli della semantica subvalutazionale. Invece, vorrei accennare a un problema con cui torneremo più volte a confrontarci, trattando delle semantiche per logiche paraconsistenti. Il problema è ontologico – o, più precisamente, riguarda il confine da tracciare fra ontologia da un lato, ed epistemologia e semantica dall'altro. Qual è infatti lo status metafisico dei mondi non standard di Rescher e Brandom, o delle circostanze di Varzi?

Rescher e Brandom si rendono conto che i loro mondi non standard sono descritti in modo largamente parassitario rispetto ai mondi standard: per capire cos'è un mondo non standard, schematico o inconsistente, occorre (*a*) sapere che cos'è un mondo standard (consistente e completo), e (*b*) capire cosa sono le operazioni ontologiche di schematizzazione e sovrapposizione, $\cap$ e $\cup$. Il trattamento della logica modale proposto al cap. 14 del loro libro presenta un adattamento ai mondi non standard della comune relazione binaria di accessibilità fra mondi della semantica kripkiana, nel quale (*a*) da un mondo non standard si accede solo a mondi non standard dello stesso tipo (quindi, in particolare da mondi inconsistenti si accede solo a mondi inconsistenti), e (*b*) i mondi accessibili sono "fatti" (mediante $\cap$ e $\cup$) di mondi (standard) accessibili dai mondi standard di partenza: ad esempio, da un mondo inconsistente $w_1 \cup w_2$ si accede solo a mondi inconsistenti fatti di mondi accessibili da w_1 e da w_2[45]. Questa relazione di accessibilità è dunque del tutto dipendente da quella fra mondi standard.

Ora, tutti sanno che già lo statuto ontologico dei mondi possibili *ordinari* è molto controverso: si varia da una concezione realistica come quella di David Lewis, che li considera come entità reali astratte, indipendenti da linguaggio e pensiero[46]; a una che potremmo etichettare come concettualista, la quale ne fa il prodotto della nostra capacità di concepire il mondo diverso da come è – di qui il famoso motto kripkiano: «i “mondi possibili” sono *stipulati*, non *scoperti* con potenti telescopi»[47]; a una linguistico-nominalistica, che riduce il discorso sui mondi possibili a discorso su insiemi consistenti massimali di enunciati[48]. *A fortiori*, sarà problematico lo status ontologico di mondi concettualmente derivati da quelli ordinari, come i nostri mondi non standard. Rescher e Brandom propongono allora quella che chiamano Tesi di Parità: «Non ci interessa sostenere che i mondi possibili dovrebbero essere considerati come una parte dell’arredamento dell’universo, solo che non vi è materia di discriminazione fra mondi possibili standard e non-standard sotto questo aspetto. [...] Non vogliamo sostenere che dovremmo trattare *qualsiasi* mondo possibile come reale, ma solo che le considerazioni che si possono avanzare per trattare così i mondi possibili standard si applicano egualmente ai mondi possibili non-standard»[49].

La Tesi di Parità è stata in seguito ripresa da diversi autori della tradizione paraconsistente, incluso Priest[50]. Nonostante questa dichiarazione d’intenti, tuttavia, a me pare che il saggio di Rescher e Brandom non riesca a guadagnare argomenti convincenti per la Tesi di Parità; e ciò soprattutto perché i mondi non standard danno l’impressione di essere piuttosto *rappresentazioni* di mondi. Credo di poter chiarire un po’ cosa intendo sfruttando, ancora, la dualità fra subvalutazioni non aggiuntive e supervalutazioni.

Si diceva che la semantica a supervalutazioni si è dimostrata utile nel trattamento della vaghezza. Per la grande maggioranza degli autori che hanno abbracciato la teoria supervalutazionale, tuttavia, la vaghezza in questione è *de dicto*, non *de re*: è *il linguaggio* a essere vago, dando luogo dunque a paradossi come quello detto del Sorite[51], e non il mondo stesso. Per l’approccio supervalutazionale, la vaghezza sorge dalla nostra indecisione semantica intorno ai confini di predicati come “alto”, “vecchio”, “calvo” ecc. Scambiare questa per una vaghezza *de re* significherebbe commettere quella che Russell chiamava la «fallacia verbalista – la fallacia che consiste nello scambiare le proprietà delle parole [e, più in generale, delle *rappresentazioni* di cose] per proprietà delle cose»[52]; e così porta a confondere l’*ordo cognoscendi* con l’*ordo essendi*. Ebbene, gli esempi di mondi, o circostanze, non standard proposti nell’approccio non aggiuntivo danno l’impressione di essere sempre *teorie*, stati *cognitivi*, o *descrizioni*. I contesti discussivi di Jaskowski sono situazioni dialogiche in cui i partecipanti esprimono *pareri* opposti, ossia descrizioni incompatibili; un database in cui confluiscono fonti diverse è un agglomerato di *informazioni* intorno a stati di cose; un corpus di credenze è un insieme di persuasioni *sul* mondo; e così via.

Naturalmente, questa osservazione non è affatto un’obiezione contro l’approccio non aggiuntivo in quanto tale; anzi, una semantica subvalutazionale può dimostrarsi utile nel trattamento dell’inconsistenza linguistica quanto quella supervalutazionale lo è stata nel trattamento della corrispondente vaghezza. Ma uno spettatore esigente potrebbe ugualmente chiedere il rimborso del biglietto, perché Rescher e Brandom ci avevano inizialmente promesso la fondazione di una teoria in grado di esibire e trattare inconsistenze *ontologiche*, violazioni del (PNC) inteso in senso metafisico, non mere inconsistenze epistemico-linguistiche. Essi riconoscono che «nei contesti di trattamento delle informazioni vi è una sostanziale differenza fra la congiunzione P & Q e la giustapposizione P, Q», e che «il fallimento [del] principio dell'aggiunzione nei contesti *epistemici* (e specialmente in quelli *induttivi*) è ampiamente riconosciuto». Ma sostengono che «il principio deve essere abbandonato anche per i contesti *aletici*, una volta che la nostra semantica a mondi possibili contempli la prospettiva di mondi inconsistenti»[53]. Tuttavia l'interpretazione intuitiva dei mondi non standard non sembra raggiungere mai il livello aletico, e sembra rimanere all'interno di contesti epistemici o, in senso lato, rappresentazionali. Così, i modelli della teoria (ciò che la teoria dovrebbe catturare, esprimere o rappresentare) sembrano essere a loro volta teorie, rappresentazioni. Come gli stessi Rescher e Brandom osservano, «il difensore della posizione consistente standard può obiettare che i modelli non standard sono rappresentazioni di rappresentazioni (e cioè credenze)», ovvero «modelli non-standard e teorie debolmente inconsistenti sono solo due modi differenti di rappresentare credenze»[54]. E ciò contrasta con la pretesa iniziale di esibire «dura inconsistenza *esistenziale*», non solo «debole inconsistenza *epistemologica*».

Ora, è sempre possibile risolvere il problema adottando un atteggiamento di tipo in senso lato *idealistico*, e facendo cadere la distinzione fra "contesti epistemici" e "contesti aletici", o, se si vuole, fra ente intenzionale ed ente reale. In una posizione metafisica di tipo idealista, o costruttivista, per dirla con Varzi, «il lavoro necessario per redigere il catalogo [dell'arredamento ontologico del mondo] coincide in definitiva con una analisi del nostro schema concettuale»[55]. E naturalmente, uno schema concettuale può ben essere inconsistente. Questa sembra essere anche la tesi finale di *The Logic of Inconsistency*, le cui ultime sezioni propongono un recupero del cosiddetto realismo metodologico di Peirce. Il realismo metodologico consiste nella tesi per cui consistenza e massimalità sono l'*ideale regolativo* verso cui tende la nostra conoscenza («una caratteristica in generale lodevole dell'indagine [conoscitiva] è che nel lungo periodo converge verso un mondo consistente»)[56]. E si combina a un idealismo ontologico «consistente nell'affermazione secondo cui i segni che in questo senso costituiscono le nostre credenze in un certo tempo sono ciò che esiste realmente»[57]. Mentre per il realista metafisico il mondo reale è consistente e completo, e situazioni inconsistenti e/o incomplete sono credenze, rappresentazioni parziali che sussistono nella mente degli uomini; viceversa, per l'idealista metafisico i mondi realmente abitati dagli uomini *sono* strutturati dalle credenze, eventualmente inconsistenti e incomplete, di questi.

Vedremo in seguito che anche altri modelli forniti per diverse logiche e teorie paraconsistenti, quando sono corredati di un'interpretazione intuitiva plausibile, danno l'impressione di essere strutture di natura epistemica, o sistemi di credenze ecc. (ciò emergerà particolarmente quando considererò il problema della semantica per le logiche della rilevanza). Naturalmente, l'idealismo metafisico in sé è una posizione filosoficamente del tutto rispettabile (e anzi cara al sottoscritto, in quanto estimatore di Hegel). Ma la pretesa degli autori afferenti alla paraconsistenza forte, o dialeteismo, di aver esibito contraddizioni *reali*, e teorie in grado di trattarle evitando l'esplosione, rimane così in certo modo sospesa – a meno di abbracciare, per l'appunto, una prospettiva idealistica cui molti di questi stessi autori non sembrano essere troppo inclini.

6.6
La strategia a frammentazione di David Lewis

Una conferma indiretta della situazione appena descritta viene da quella che ancora oggi è, a mio parere, la più convincente teoria basata su un approccio non aggiuntivo: quella proposta da Lewis nel saggio intitolato *Logic for Equivocators*[58]. Qui il fallimento dell'Aggiunzione è proposto come un espediente per trattare inconsistenze nel nostro corpus di credenze, senza pretendere che ciò comporti alcuna violazione del (PNC) ontologico o logico-semantico – anche se la difesa del (PNC) da parte di Lewis potrebbe suonarci piuttosto dogmatica:

> La ragione per cui dovremmo rigettare [la paraconsistenza forte o dialeteismo] è semplice. Nessuna verità ha, o potrebbe avere, una negazione vera. Niente è, e niente potrebbe essere, letteralmente sia vero che falso. Sappiamo questo per certo, e a priori, e senza alcuna eccezione per situazioni specialmente peculiari. [...] Ciò potrebbe suonare dogmatico. E lo è: sto affermando proprio la tesi che Routley e Priest hanno chiamato in questione e – contrariamente alle regole del dibattito – rifiuto di difenderla. Concedo inoltre che è indifendibile di fronte alla loro sfida. Hanno chiamato in questione così tanto, che non ho alcun punto d'appoggio su un terreno non controverso[59].

Lewis propone di spiegare il fatto che nel nostro corpus di credenze vi sono inconsistenze non esplosive con una strategia di *frammentazione* che si richiama esplicitamente a Jaskowski, Rescher e Brandom. Il punto di partenza sta nel sostituire la nozione standard di verità con quella di verità-secondo-il-corpus: «Qualsiasi cosa che sia esplicitamente affermata secondo il corpus è vera-secondo-il-corpus»[60]. Una sottoparte di un corpus di credenze o informazioni può contenere α, mentre un'altra contiene $\neg\alpha$. Da questo però non segue che il corpus nella sua interezza contenga la loro congiunzione $\alpha \wedge \neg\alpha$. Ad esempio, io potrei aver creduto (1) che Nassau Street andasse all'incirca da est a ovest; (2) che la ferrovia vicina andasse all'incirca da nord a sud; e (3) che le due fossero più o meno parallele. Così ciascun enunciato della tripla inconsistente sarebbe stato vero-secondo-il-corpus, e questo sarebbe stato inconsistente. Ma da questa contraddizione distributiva non segue la corrispondente contraddizione collettiva:

> Ora, che dire della congiunzione manifestamente inconsistente dei tre enunciati? Io sostengo che non era vera secondo le mie credenze. Il mio sistema di credenze era spezzato in frammenti (sovrapposti). Frammenti diversi entravano in azione in situazioni differenti, mentre l'intero sistema di credenze non si manifestava mai tutto insieme. [...] Sono incline a ritenere che quando siamo forzati a tollerare inconsistenze nelle nostre credenze, teorie, storie ecc., noi mettiamo in quarantena le inconsistenze interamente attraverso la frammentazione [...]. In altre parole, la verità secondo qualsiasi frammento singolo è chiusa sotto implicazione classica non ristretta[61].

Certi lavori sul funzionamento della memoria umana offrono più di qualche conferma al modello di Lewis[62]. Il punto che ci interessa, tuttavia, sta nella nozione di "verità-secondo-il-corpus" proposta da Lewis: è abbastanza chiaro, infatti, che la nozione non ha (intenzionalmente) nulla a che fare con una concezione realistica della verità, per cui α è vero se e solo se corrisponde alla realtà. Dire che α è vero-secondo-il-corpus C, è dire che $\alpha \in$ C, ossia che *appartiene* a un insieme di enunciati (rappresentazioni, descrizioni ecc.) in cui il (un frammento del) corpus consiste; oppure che la credenza (che) α appartiene all'insieme strutturato di credenze C in cui il (un frammento del) corpus consiste. Vedremo in seguito che le semantiche per certe logiche paraconsistenti sono state spesso accusate di introdurre uno slittamento illecito (magari perché non consaputo, a differenza di quanto accade nella prospettiva di Lewis), da *vero* a *creduto vero*, o *incluso in una teoria*, col risultato di confondere, come già si diceva, questioni epistemiche e semantiche con questioni di metafisica.

Note

1. Jaskowski, 1948, p. 286; la "sovracompletezza" corrisponde alla nostra trivialità.
2. Ivi, p. 284.
3. Cfr. ivi, p. 292.
4. «Per rendere evidente il carattere delle tesi di un sistema discussivo sarebbe necessario far precedere ciascuna di esse dalla riserva: "secondo il punto di vista di uno dei partecipanti alla discussione" oppure "in un certo ammissibile significato delle espressioni usate". Quindi l'annessione di una tesi ad un sistema discussivo ha un significato intuitivo diverso dall'asserzione in un sistema comune. L'*asserzione discussiva* contiene in sé implicitamente una riserva del tipo sopra specificato, che, tra le funzioni logiche qui introdotte, trova un corrispettivo nella possibilità Pos» (ivi, pp. 291-2).
5. Cfr. ivi, pp. 292-3, nonché la postilla di p. 304 sulla congiunzione discussiva. Cfr. anche l'assiomatizzazione proposta in da Costa, Dubikajtis (1968) e Kotas, da Costa (1979).
6. Cfr. Marconi, 1979, p. 281; da Costa, Marconi, 1989, p. 12.
7. Cfr. Kotas, 1971, 1975.
8. Cfr. Jaskowski, 1948, pp. 296-7.
9. Ivi, p. 298.
10. *Ibid*.
11. Rescher, Brandom, 1980. Il lavoro era stato in parte anticipato in Rescher, 1979.
12. «Il nostro interesse riguarda la dura inconsistenza *esistenziale*, e non la debole inconsistenza *epistemologica*» (ivi, p. 2).
13. Cfr. Priest, 1992, p. 292; Priest, 2001, p. 171.
14. Cfr. ad esempio Pasniczek, 1998.
15. Cfr. il numero monografico di "Notre Dame Journal of Formal Logic", 38, 1997, interamente dedicato ai mondi impossibili.
16. Cfr. Restall, 1999, pp. 55-6.
17. Il che peraltro è ritenuto giusto da altri autori di area paraconsistente, ad esempio Mortensen, 1989.
18. «Nel caso di un mondo schematico, la situazione non è solo tale che *noi* non sappiamo se P o il suo contraddittorio $\sim P$, ma che *il mondo stesso è indeterminato* sotto questo aspetto, per costruzione. [...] Abbiamo una situazione di sottodeterminazione ontologica – rispetto a certi stati di cose che possiamo considerare, il mondo è semplicemente "incompleto"» (Rescher, Brandom, 1980, p. 5).

19. «La costruzione del mondo [inconsistente] comprende una sintesi o fusione di stati di cose incompatibili. Ciò può essere pensato come se si prendesse un certo numero di mondi individualmente e separatamente auto-consistenti e li si riunificasse [...]. Il fatto cruciale della posizione che stiamo qui assumendo è che gli status (+ o –) ottenuti da *P* e da ~*P* in un mondo devono essere indipendenti l'uno dall'altro. La concezione fondamentale dell'analisi è che *lo status ontologico di P e quello di ~P dovrebbero essere considerati rigorosamente indipendenti*» (ivi, p. 6).

20. In effetti, gli autori preferiscono continuare a chiamare questi mondi "possibili" e modificare la nozione di possibilità: possibile è tutto ciò che è razionalmente descrivibile, e i mondi inconsistenti lo sono senz'altro (cfr. ivi, pp. 4 e 32). Peraltro, Rescher e Brandom non sono stati seguiti in questo dalla letteratura successiva in cui, come si è detto, si parla proprio di "mondi impossibili".

21. Ivi, p. 7.

22. Adopererò il sottoscritto dopo il predicato di verità, quando avremo a che fare con una semantica a mondi (im)possibili: $V_w(\ulcorner\alpha\urcorner)$ dice che α è vero nel mondo *w*.

23. Ivi, p. 18. «*Il presente approccio* – come si è visto – *non ha alcun bisogno di modificare i principi della logica classica*. Nonostante esso fornisca una ontologia e una semantica non standard, tuttavia al livello cruciale del macchinario logico non richiede alcun tipo di innovazione o rinnovamento» (ivi, p. 58).

24. Cfr. ivi, p. 24.

25. Ivi, p. 18.

26. Cfr. ivi, pp. 16-7. «Questo fallimento del principio semantico dell'aggiunzione [...] ha la pervasiva conseguenza che qualsiasi regola d'inferenza che coinvolga la combinazione di premesse distinte (ossia, qualsiasi regola che impieghi una serie di premesse distributivamente) deve essere trattata alla luce di queste considerazioni. [...] Tutti i principi d'inferenza a più premesse vanno costruiti in modo collettivo, anziché distributivo» (ivi, pp. 19-20).

27. Rispettivamente, ai capp. 9, 10, 14 e 16.

28. Priest, Routley, 1989c, p. 158.

29. «Anzitutto, è del tutto oscuro perché un operatore modale come [$\Diamond$] dovrebbe mettere il naso nel significato della congiunzione estensionale ordinaria. [...] In secondo luogo, questo approccio alla congiunzione distrugge totalmente le normali relazioni fra congiunzione, disgiunzione e negazione. [...] Vale la pena di ripetere che qualcuna delle relazioni logiche classiche dovrà cadere nella paraconsistenza. Tuttavia, la distruzione completa delle relazioni che normalmente si assume valgano fra congiunzione, negazione e disgiunzione depone chiaramente contro la congiunzione discussiva» (Priest, Routley, 1989c, pp. 159-60). Considerazioni analoghe sono svolte in Bremer, 2005, pp. 42-3.

30. Jaskowski, 1948, p. 296.

31. Priest, Routley, 1989c, p. 162.

32. Cfr. Rescher, Brandom, 1980, pp. 36 ss.

33. Priest, Routley, 1989c, p. 161. Cfr. anche Bremer, 2005, pp. 38-9.

34. Cfr. Urchs, 1995, 2002.

35. Rescher, Brandom, 1980, p. 20.

36. Cfr. Varzi, 1997, 2004.

37. Varzi, 2004, p. 97.

38. Ivi, p. 104.

39. Ivi, p. 108.

40. Cfr. Tappenden, 1993.

41. Cfr. Varzi, 2004, p. 104. Vedremo in seguito che un'analoga difesa viene condotta in altri tipi di logica paraconsistente, per giustificarvi il comportamento deviante del connettivo della negazione.

42. «Se un mondo impossibile è un mondo in cui ci sono discrepanze del tipo illustrato dall'esempio di Watson – un mondo in cui certi fatti hanno e non hanno luogo – possiamo tenere tali mondi sotto controllo logico esattamente come possiamo tenere sotto controllo le storie di Holmes» (Varzi, 1997, pp. 622-3).

43. Per un'indagine su alcune di queste dualità, si può vedere Restall, 2004.

44. Varzi, 1997, p. 621; cfr. anche Varzi, 2000. Una teoria subvalutazionale paraconsistente viene sviluppata anche da altri autori, fra cui Dominic Hyde, per il trattamento della vaghezza. Con la rilevante eccezione della tesi epistemica di Williamson, tutte le principali strategie di approccio alla vaghezza concordano quantomeno nell'ammettere che il suo trattamento richieda una qualche sottodeterminazione del riferimento e/o abbandono della bivalenza. Hyde propaganda una teoria duale centrata su sovradeterminazione e *glut* di valori di verità. In essa tutte le tautologie classiche sono conservate, come nell'approccio supervalutazionale (cfr. Hyde, 1997, pp. 646-51; e anche Beall, 2004, pp. 10 ss.).

45. Cfr. Rescher, Brandom, 1980, p. 70.

46. Cfr. Lewis, 1973, cap. 4.

47. Kripke, 1972, p. 46.

48. Cfr. ad esempio Hintikka, 1969.

49. Rescher, Brandom, 1980, pp. 64-5.

50. Nel suo studio sui mondi non normali, Priest afferma: «Come uno debba intendere [i mondi non standard] metafisicamente è, naturalmente, una questione controversa, e non voglio che nulla di quel che dirò qui pregiudichi questo problema. Per il resto di questo articolo, il lettore ha la libertà di leggervi la propria storia preferita sulla natura dei mondi possibili» (Priest, 1992, p. 292). Una posizione schiettamente realistica sui mondi non standard è sostenuta, invece, da T. Yagisawa (1988), che l'ha chiamata «realismo modale esteso».

51. Il Sorite è un tipico paradosso della vaghezza, il cui nome viene dal greco σωρός, "mucchio" – sicché lo si chiama anche "paradosso del mucchio". Prendiamo un mucchio di sabbia *m*, composto, diciamo, da centomila granelli; è plausibile ritenere vero che:

(PI) Se *x* è un mucchio di sabbia, il risultato *y* della rimozione di un granello da *x* è ancora un mucchio di sabbia.

Questa è la cosiddetta *premessa induttiva* del paradosso. Se applichiamo (PI) 99.999 volte a partire da *m*, otteniamo che un singolo granello di sabbia è un mucchio di sabbia, il che è assurdo. Il paradosso, naturalmente, può essere costruito con qualsiasi termine vago oltre a "mucchio", come "calvo", "ricco", "vecchio", "grande", "basso" ecc. Per un'introduzione ai problemi della vaghezza, si possono vedere Keefe e Smith (1996) e Keefe (2000).

52. Russell, 1923, p. 62.

53. Rescher, Brandom, 1980, p. 18.

54. Ivi, pp. 128-9.

55. Varzi, 2001, p. 89.

56. Rescher, Brandom, 1980, p. 111.

57. Ivi, p. 125.

58. Lewis, 1982.

59. Ivi, p. 101.

60. Ivi, p. 102.

61. Ivi, pp. 103-5.

62. Alcuni studi hanno mostrato che il nostro inventario mentale di ciò che sappiamo, ricordiamo e crediamo è un magazzino di gran lunga troppo ampio perché possiamo svolgervi una ricerca esaustiva tutte le volte che intendiamo recuperare certe informazioni. La memoria umana funziona settorialmente (cfr. ad esempio Katzley, 1975): le credenze sono raggruppate in porzioni separate, e la difficoltà di comparare molti settori diversi fa sì che le inconsistenze intersettoriali siano largamente "latenti". Inoltre, le credenze immagazzinate nella cosiddetta memoria dormiente non sembrano avere un ruolo inferenziale finché non vengono recuperate (cfr. Howe, 1970; Lindsay, Norman, 1977).

7
Sistemi *positive-plus*

7.1
Logiche dell'inconsistenza formale

Seguendo Priest e Routley (1989c), ho radunato sotto l'etichetta di sistemi *positive-plus* un arcipelago di sistemi formali dovuti alla scuola brasiliana di logica paraconsistente iniziata da Newton C. A. da Costa, e sviluppata da vari collaboratori[1]. I sistemi in questione costituiscono un sottoinsieme delle cosiddette *logiche dell'inconsistenza formale* (*logics of formal inconsistency*). Le logiche dell'inconsistenza formale esprimono la nozione di consistenza e quella di inconsistenza all'interno del linguaggio logico formalizzato, distinguendole (fino a un certo punto, come vedremo) da quelle di contraddittorietà e incontraddittorietà[2]. I sistemi *positive-plus* portano questo nome perché sono quelle logiche dell'inconsistenza formale il cui frammento positivo conserva sostanzialmente intatta la logica positiva standard (classica, o intuizionistica). La paraconsistenza vi è invece ottenuta alterando cospicuamente il trattamento della negazione – e proprio da qui vengono, come cercherò di mostrare, i maggiori problemi di questa strategia.

I più noti sistemi *positive-plus* sono le gerarchie di C-calcoli di da Costa; hanno avuto numerose applicazioni, fra le quali considererò nella prossima parte del libro quelle che fanno capo a teorie paraconsistenti degli insiemi. L'intento, dice da Costa, è quello di edificare un approccio logico sul quale basare teorie in cui, pur essendo ospitate contraddizioni formali, ci siano «teoremi "buoni", le cui negazioni non sono dimostrabili»: tale cioè che possiamo «derivare in esso un adeguato numero di paradossi, al fine di analizzarli e studiarli», senza derivare qualsiasi cosa[3]. In questo capitolo tuttavia mi soffermerò solo sulla parte puramente logico-semantica dell'approccio.

7.1.1. Pillole di sintassi *positive-plus*

Cominciamo con un po' di presentazione *proof-theoretic*. Una base assiomatica da cui partire per edificare i sistemi *positive-plus* è la seguente (talvolta siglata come C_{min} e intesa come "logica paraconsistente minimale")[4]:

(A1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
(A2) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
(A3) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta)$

(A4) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$
(A5) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$
(A6) $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
(A7) $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
(A8) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma))$
(A9) $\alpha \vee (\alpha \rightarrow \beta)$
(A10) $\alpha \vee \neg\alpha$
(A11) $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$

Come unica regola abbiamo poi il *modus ponens*. Come si vede, il frammento positivo è molto tradizionale. La base, tuttavia, è antintuizionistica, contenendo (A10) e (A11) ossia Terzo Escluso e Doppia Negazione Forte. Inoltre, contiene l'assioma corrispondente all'Aggiunzione, (A3); e (A1), che è un paradosso dell'implicazione materiale e viene rifiutato, come vedremo in seguito, nelle logiche rilevanti in quanto "fallacia della rilevanza". L'aggiunta della sola Legge di Scoto nella forma di (PS1), ossia $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$, sarebbe sufficiente di per sé a farci ritornare al calcolo enunciativo classico[5].

7.1.2. Saliamo lungo i sistemi

Aggiungendo a partire dalla base assiomi, regole d'inferenza, e talora definizioni, si possono caratterizzare le nozioni di consistenza e inconsistenza, di contraddittorietà e incontraddittorietà. È invalso l'uso degli operatori ° e •: le interpretazioni di $°\alpha$ e $\bullet\alpha$ sono, rispettivamente, "α è consistente" e "α è inconsistente". Queste nozioni possono essere assunte come primitive, caratterizzate sintatticamente e semanticamente, e anche essere o non essere interdefinibili. In particolare, non in tutti i sistemi consistenza e inconsistenza di un enunciato ($°\alpha$, $\bullet\alpha$) sono identificate con contraddittorietà e incontraddittorietà ($\alpha \wedge \neg\alpha$, $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$). Procediamo però con ordine. Otteniamo il sistema bC (*basic logic of (in)consistency*)[6] aggiungendo alla base la regola:

$$\frac{°\alpha, \alpha, \neg\alpha}{\beta} \quad \text{(bC)}$$

Questa regola ci dice che se α è assunto come consistente, e tuttavia valgono sia α che la sua negazione, allora ne segue qualsiasi cosa, ossia il sistema viene trivializzato. Detto più succintamente: una *contraddizione consistente* (!) causa detonazione. Questa caratteristica delle logiche dell'inconsistenza formale viene espressa dicendo che si tratta di logiche *gentilmente esplosive*[7] (il che a me suona un po' beffardo, ma tant'è). Da Costa riteneva che una logica paraconsistente dovesse recuperare la portata inferenziale della logica classica negli ambiti in cui non abbiamo a che fare con violazioni del (PNC). Di conseguenza, egli pensava che nei contesti ritenuti consistenti l'esplosione dovesse *valere*. Questa è la motivazione intuitiva di (bC) e di regole analoghe che si trovano nei sistemi *positive-plus*.

Mi soffermerò fra poco sulla debolezza della negazione dacostiana. Nel frattempo, notiamo che adoperando questa e l'operatore di consistenza si può definire una negazione forte:

(Df~) $\sim\alpha =_{df} \neg\alpha \wedge {}^\circ\alpha$.

La negazione forte incorpora in sé l'idea che α sia consistente, dunque la compresenza di α e $\sim\alpha$ è daccapo esplosiva[8]. In bC *non* vale la Contrapposizione:

$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$.

Se valesse, da (A1) otterremmo $\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\beta)$ e saremmo già al di fuori di una paraconsistenza interessante. Valgono tuttavia certe forme dette di Contrapposizione *ristretta*, basate su assunzioni di consistenza[9], ad esempio la regola:

$$\frac{{}^\circ\beta,\ \alpha \to \beta}{\neg\beta \to \neg\alpha} \quad (\text{Cont}^\circ)$$

Passiamo da bC ai sistemi bbC e bbbC aggiungendo regole che esprimono dualità di ° e •:

$$\frac{\neg\bullet\alpha}{{}^\circ\alpha} \quad (\text{bbC1})$$

$$\frac{\neg{}^\circ\alpha}{\bullet\alpha} \quad (\text{bbC2})$$

$$\frac{\bullet\alpha}{\neg{}^\circ\alpha} \quad (\text{bbbC1})$$

$$\frac{{}^\circ\alpha}{\neg\bullet\alpha} \quad (\text{bbbC2})$$

Accediamo al sistema Ci («dove contraddizione e inconsistenza si incontrano»)[10] se aggiungiamo una regola che caratterizza •:

$$\frac{\bullet\alpha}{\alpha \wedge \neg\alpha} \quad (\text{Ci})$$

e a Cil se ne aggiungiamo anche una che caratterizza °:

$$\frac{\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)}{{}^\circ\alpha} \quad (\text{Cil})$$

Da qui in poi cominciano le più note gerarchie dacostiane: si tratta di gerarchie n-arie ($1 \leq n \leq \omega$) di calcoli enunciativi C_n, di calcoli predicativi C^*_n e di calcoli quasi-predicativi $C^=_n$ – ma qui mi soffermerò solo sui calcoli enunciativi (C_0, C^*_0 e $C^=_0$ sono, rispettivamente, il calcolo enunciativo classico, quello dei predicati classico e quello dei predicati con identità classico). C_1 si ottiene da Cil aggiungendo tre regole che fissano il modo in cui la consistenza si propaga dai componenti ai composti[11]:

$$\frac{{}^\circ\alpha \wedge {}^\circ\beta}{{}^\circ(\alpha \wedge \beta)} \quad ({}^\circ\wedge)$$

$$\frac{{}^\circ\alpha \vee {}^\circ\beta}{{}^\circ(\alpha \vee \beta)} \quad ({}^\circ\vee)$$

$$\frac{{}^\circ\alpha \rightarrow {}^\circ\beta}{{}^\circ(\alpha \rightarrow \beta)} \quad ({}^\circ\rightarrow)$$

Ciò vuol dire che formule composte interamente da enunciati consistenti sono a loro volta consistenti. I diversi modi in cui consistenza e inconsistenza si propagano dai componenti ai composti e viceversa danno luogo alla varietà gerarchica, in cui tutti i sistemi superiori estendono C_1. Se C_0 è il calcolo classico, le contraddizioni deducibili in ciascuno dei livelli $n > 0$ sono dette "singolarità di livello". Dato un livello n tutte le singolarità dei livelli n-1 non trivializzano la teoria per quel livello n[12]. Il che vorrebbe dire, fra l'altro, che ogni calcolo «è strettamente più forte di quelli che lo seguono»[13] (C_{n+1} è più debole di C_n, e C_ω è il più debole della gerarchia). Come ha osservato Diego Marconi, «le gerarchie di da Costa sono dunque, per così dire, sensibili al grado di contraddittorietà dell'universo del discorso»[14]. Per calcoli di questo tipo, la scuola brasiliana ha prodotto vari risultati sintattici (ad esempio la loro riproduzione, anziché in forma assiomatica, in deduzione naturale alla Gentzen) e metalogici (semantiche algebriche rispetto a cui si dimostrano la completezza e la decidibilità)[15].

7.2
La negazione dacostiana e i suoi guai

Come si diceva, le critiche rivolte a questi sistemi si sono concentrate soprattutto sul comportamento della negazione. Cominciamo con un approccio semantico. La semantica della negazione per i sistemi dacostiani è (tipicamente) data dalle seguenti clausole:

(S¬1) $F(\ulcorner\alpha\urcorner) \Rightarrow V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner)$
(S¬2) $V(\ulcorner\neg\neg\alpha\urcorner) \Rightarrow V(\ulcorner\alpha\urcorner)$.

(S¬1) serve a garantire che almeno uno fra α e $\neg\alpha$ sia vero, così validando (insieme alla clausola standard per la disgiunzione) l'assioma (A10), ossia il Terzo Escluso. (S¬2) serve invece per (A11), e la sua giustificazione intuitiva dovrebbe essere che se non si dà il caso che $\neg\alpha$, siccome una fra α e $\neg\alpha$ deve valere, allora vale α. Questa semantica evita l'esplosione sia in versione collettiva che distributiva, ossia:

$\{\alpha, \neg\alpha\} \not\models \beta$
$\{\alpha \land \neg\alpha\} \not\models \beta$.

L'idea è naturalmente che α e $\neg\alpha$ possono essere *entrambe vere*, e β falsa.

Le clausole per la semantica della negazione dacostiana non sono ricorsive: se α è falsa, ciò è sufficiente mediante (S¬1) a stabilire che $\neg\alpha$ è vera. Ma se α è vera, $\neg\alpha$ potrebbe essere vera come falsa. Già questo fatto è sufficiente a farci sospettare che le logiche *positive-plus* violino la Condizione di Danno Minimo: contrastano con una nostra intuizione molto forte, in base a cui un connettivo può chiamarsi *negazione* solo se rovescia (vero-funzionalmente) i valori di verità: applicato a un enunciato vero ne produce uno falso, e viceversa. Secondo Priest e Routley, dunque, quella dacostiana «non è la nostra familiare negazione estensionale, bensì un funtore radicalmente intensionale di qualche sorta»[16].

Passando dalle caratteristiche semantiche a quelle sintattico-inferenziali, è importante osservare che nei sistemi *positive-plus* (PNC1), ossia il (PNC) in versione sintattica: $\neg(\alpha \land \neg\alpha)$, *non può essere un teorema*. Nel sistema di base la negazione è così debole che semplicemente non vi è alcun teorema negativo[17]. Se poi (PNC1) fosse un teorema, a partire da Cil e in tutti i sistemi C_n di da Costa, per la regola (Cil) (e a meno di ammettere implausibili restrizioni alle normali operazioni di sostituzione e/o esemplificazione su formule) *tutte* le formule sarebbero poste come consistenti, col risultato che, per via della regola (bC), tutti questi sistemi diverrebbero semplicemente (e non solo gentilmente) esplosivi.

Naturalmente, vi sono ragioni intuitive per non volere (PNC1) come teorema; anzi, da Costa ha ritenuto che il fallimento di $\neg(\alpha \land \neg\alpha)$ sia una condizione di adeguatezza per qualsiasi sistema paraconsistente[18]. Visto che si tratta di logiche che ammettono contraddizioni, inconsistenze localizzate, c'è da attendersi che certe istanze di (PNC1) siano *false*[19]. Le cose, tuttavia, non sono così scontate. Avremo infatti occasione di incontrare logiche paraconsistenti in cui (PNC1) *è* un teorema; e come hanno osservato ancora Priest e Routley: «La legge di non-contraddizione [*scil*. nel senso di (PNC1)] è stata tradizionalmente vista come una proprietà centrale, se non una caratteristica definitoria, della negazione. […] Che un trattamento della negazione violi la legge di non-contraddizione fornisce quindi *prima facie* evidenza che quel trattamento è sbagliato. Questo è un secondo indizio che *la negazione di da Costa non è una negazione*»[20].

Per comprendere il punto, occorre ricordare le definizioni tradizionali di contrarietà e subcontrarietà che abbiamo incontrato nel cap. 1 del libro: α e β sono due contrari se $\alpha \land \beta$ è una falsità logica, due subcontrari se $\alpha \lor \beta$ è una verità logica (e contraddittori, se sono contrari e subcontrari). Ora, si dice a volte che, in conseguenza del fallimento del Terzo Escluso nell'intuizionismo, la negazione intuizionistica di α individuerebbe in realtà un contrario di α, non il suo contraddittorio. Una osservazione "duale" si può quindi avanzare per la negazione dacostiana: il fatto che nei sistemi *positive-plus* valga $\alpha \vee \neg\alpha$, ma non $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$, indica che α e $\neg\alpha$ «sono sub-contrari, non contraddittori. Di conseguenza la negazione di da Costa non è una negazione, dato che la negazione è un operatore che forma contraddittori, non sub-contrari»[21].

Ciò spiega anche l'*indeterminatezza* dell'operatore. Trattando della questione nella sua antologia sulla formalizzazione della dialettica, Diego Marconi ha sostenuto che la negazione dacostiana esprimerebbe un "insieme-negazione", in cui ciascun elemento si oppone in qualche modo ad α: ciò si adatterebbe, dice Marconi, a «una certa indeterminatezza della negazione in una teoria dialettica», perché «è come se la negazione dialettica non "scegliesse" fra i vari elementi» che, in più modi, «si oppongono» a un elemento dato: «un concetto più generico, meno univocamente determinato del concetto della controparte ontologica della negazione classica»[22]. Ma è abbastanza difficile che tutto ciò sia considerabile come un *pregio* – anzi, a detta di Priest e Routley mostra che la Condizione di Danno Minimo è senz'altro violata[23].

Inoltre, la negazione dacostiana non ha nessuna delle proprietà inferenziali tradizionalmente accordate al connettivo. Nei sistemi *positive-plus* come abbiamo visto non vale la Contrapposizione (se non nella forma ristretta, con assunzioni di consistenza). Ma non valgono neppure *reductio ad absurdum* e leggi di De Morgan. Anche se si adotta un approccio inferenziale ai connettivi, $\neg$ non ha dunque molte parentele con la negazione[24].

Infine, consideriamo il seguente risultato di traducibilità nel calcolo classico (sia CC). Si dimostra, per induzione sulla complessità di α, che

(TR) $\quad \vdash_{CC} \alpha \Leftrightarrow \vdash_{Ci} {}^*\alpha,$

ossia una formula è un teorema di CC (una logica consistente ed esplosiva) se e solo se la sua *-trasformata è un teorema di Ci (una logica paraconsistente, gentilmente esplosiva). La caratterizzazione ricorsiva della *-trasformazione è la seguente:

1. Se α è atomica, $^*\alpha = \alpha$;
2. Se # è un connettivo binario, $^*(\alpha \# \beta) = {}^*\alpha \# {}^*\beta$;
3. $^*\neg\, \alpha = {\sim}{}^*\alpha$.

La *-trasformazione consiste dunque solo nel sostituire sistematicamente la negazione dacostiana alla negazione forte. E, come ammette da Costa, dato che questa «ha tutte le proprietà della negazione classica», il sistema viene trivializzato da «ciascuna formula del tipo $\alpha \wedge {\sim}\alpha$»[25]. Di conseguenza, rilevano Priest e Routley:

La mancanza di un autentico operatore per la negazione nei sistemi C è una mera omissione? La risposta è un rapido e semplice "No". Perché se introducessimo un operatore, –, con le ovvie condizioni per la negazione

$v(-A) = 1$ se e solo se $v(A) = 0$

è facile vedere che la non-paraconsistenza verrebbe ripristinata. Perché allora $\{A \wedge -A\} \models_C B$. Perciò i sistemi C ottengono la loro paraconsistenza solo facendo a meno della negazione[26].

Anche il carattere gentilmente esplosivo di questi sistemi è stato sottoposto a critica. Autori della scuola brasiliana come Carnielli e Marcos hanno affermato che il rifiuto di *qualsiasi* forma di detonazione è eccessivo:

> Secondo la nostra prospettiva attuale, proporre una logica in cui nessuna singola contraddizione può avere conseguenze dannose sulle teorie sottostanti è del tutto estremistico, e ci potrebbe allontanare troppo da qualsiasi forma classica di ragionamento. [...] Si potrebbe congetturare che la consistenza è esattamente ciò che potrebbe mancare a una contraddizione per diventare esplosiva – se non era esplosiva fin dall'inizio. Detto in modo rozzo, intendiamo assumere che una "contraddizione consistente" è probabilmente esplosiva, laddove una contraddizione "regolare" non lo è[27].

Ossia, è precisamente quando *non* si dà il caso che $°\alpha$, che la coppia α e $\neg\alpha$ non trivializza il calcolo. Ma, ha replicato Manuel Bremer, se valgono sia α che $\neg\alpha$, e la nozione di consistenza deve avere qualcosa di ciò che noi vi intendiamo normalmente, allora dovremmo dire che $°\alpha$ è intuitivamente *falso*, dunque non si capisce come potremmo nello stesso tempo avere α, $\neg\alpha$ *e* la consistenza di α[28].

Credo che tutte queste difficoltà nel complesso depongano, se non contro l'approccio brasiliano alla paraconsistenza come tale, almeno contro le sue motivazioni filosofiche (e questa è la ragione per cui è stato trattato in maniera un po' sbrigativa nel presente capitolo). Occorre tuttavia dire che le logiche dell'inconsistenza formale sono oggi in costante sviluppo e vengono adottate da molti ricercatori, fungendo anche da base, con opportuni aggiustamenti, per teorie paraconsistenti degli insiemi (darò solo qualche cenno in proposito nella successiva parte del libro). Fra gli aspetti più interessanti dell'approccio vi è senz'altro l'idea di esprimere consistenza e inconsistenza nel linguaggio oggetto, adoperando appositi operatori enunciativi primitivi o definiti. Come vedremo nel prossimo capitolo, quest'idea può essere esportata in logiche paraconsistenti molto diverse da quelle della scuola brasiliana.

7.3
...Altrimenti ci adattiamo

In quest'ultimo paragrafo accennerò molto rapidamente alle cosiddette *logiche adattive*, sviluppate soprattutto da Diderik Batens e dai suoi collaboratori[29]. Nell'approccio adattivo si studiano i processi dinamici con cui si producono e correggono deduzioni in presenza di contraddizioni. Nell'attività razionale, la quale è un processo temporale, certe inferenze vengono tratte sulla base di informazioni disponibili in un certo tempo. Se queste informazioni successivamente risultano inconsistenti, allora alcune delle inferenze tratte sulla base di quelle informazioni devono essere ritrattate, e precisamente quelle che presupponevano la consistenza. Questo orientamento logico differirebbe da quelli detti non monotonici, perché non riguarda i mutamenti "esterni" che risultano dall'aggiunta di premesse a un insieme dato; si occupa piuttosto di dinamiche "interne": «Ragionando sulla base di un insieme di premesse conclusivamente dato, la comprensione delle relazioni logiche fra l'insieme delle premesse e le conseguenze si accresce»[30].

Più che una logica, o un gruppo di logiche, l'approccio adattivo è dunque una *strategia*. Le diverse tattiche adattive consistono nei diversi modi con cui in presenza di inconsistenze si ritrattano inferenze. Ad esempio, possiamo adoperare la famigerata regola del Sillogismo Disgiuntivo per dimostrare cose altrimenti non ottenibili, oppure per abbreviare dimostrazioni che altrimenti sarebbero lunghe e complicate. Ma simili regole sono correttamente applicabili solo a premesse consistenti, e siccome non sappiamo prima quali premesse si riveleranno inconsistenti, potremmo dover ritrattare le inferenze basate su di esse. In generale, una struttura adattiva è caratterizzata da una logica detta di *limite superiore* e da una di *limite inferiore*. La logica di limite superiore dev'essere molto potente, e tipicamente coincide con la classica: in essa si adoperano principi e regole senza restrizioni per derivare il maggior numero di conseguenze. Ma naturalmente, la logica classica è esplosiva, dunque inservibile se certe assunzioni si rivelano inconsistenti. Qui si innesta la prospettiva paraconsistente, perché la logica di limite inferiore è appunto un sistema paraconsistente in cui certi assiomi e/o certe regole standard non valgono. A volte si adotta come limite inferiore la logica del paradosso di Priest, LP, di cui parlerò nel prossimo capitolo. Ma il sistema favorito da Batens, detto CLuN, è di tipo *positive-plus*: i suoi assiomi sono gli stessi di C_{min}, tranne (A11). CLuN non ha dunque neanche la Doppia Negazione Forte; la sua negazione è estremamente debole e, come quella dacostiana, non vero-funzionale[31].

Si noti la differenza con l'approccio delle logiche dell'inconsistenza formale: in queste, dobbiamo sapere *prima* cosa è consistente e cosa inconsistente, dopodiché procediamo alla formalizzazione con gli operatori appositi. Invece, nell'approccio adattivo noi esprimiamo formalmente la *supposizione* che una formula sia consistente, e possiamo rivedere l'ipotesi[32]. Tutto ciò si presta dunque particolarmente a una presentazione in deduzione naturale, che enfatizza il ruolo della logica come "motore inferenziale": possiamo fare riferimento a diverse fasi di una prova, a ciò che è stato dedotto fino a un certo punto ecc. Ci basterà aggiungere a una presentazione delle prove simile a quella seguita nel nostro libro una colonna, in cui si evidenziano le "assunzioni di consistenza": ossia, in cui compaiono gli indici per tutte le formule la cui consistenza è presupposta in un certo passo della derivazione.

Più che non il dettaglio dello sviluppo tecnico, però, è importante (come sempre) la motivazione filosofica. Questa è legata alla generale tendenza di Batens a privilegiare la paraconsistenza debole, combinata a un certo pessimismo intorno alla possibilità di attuare in ambito paraconsistente la *classical recapture*. In un importante articolo intitolato *Contro la paraconsistenza globale*, Batens ha argomentato che una logica paraconsistente non può essere "universale": non può cioè ricomprendere in sé la logica classica come suo caso particolare, o approssimazione valida per contesti consistenti (una posizione sostenuta invece, come vedremo, da Priest, Routley e altri). Alcuni degli argomenti di Batens riguardano la debolezza delle negazioni paraconsistenti e la necessità che la metateoria di una teoria paraconsistente non sia a sua volta paraconsistente. Nei contesti consistenti una logica paraconsistente è sempre troppo *debole*, sia espressivamente che deduttivamente: la paraconsistenza globale «non permette una descrizione adeguata dei domini consistenti, ad esempio la metateoria della maggior parte delle logiche, incluse le logiche paraconsistenti»[33]. Così stando le cose, un approccio adattivo può presentarsi come una saggia posizione intermedia, che beneficia sia (quando si può) della forza espressiva e deduttiva della logica standard, sia (quando le cose vanno male, ossia in presenza di inconsistenze) della capacità paraconsistente di disinnescare le esplosioni: «Il punto di vista [adattivo] non è toccato dagli inconvenienti della paraconsistenza globale, è attraente per ragioni indipendenti, e non richiede che un qualsiasi dominio sia salvaguardato in linea di principio dall'inconsistenza. Se quest'alternativa è fattibile, a mio parere, allora possiamo [...] adoperare i più forti mezzi classici per descrivere i domini che crediamo consistenti; se poi la credenza si rivela errata, potremo modificare le nostre idee»[34].

Note

1. Per una prospettiva d'insieme, cfr. Carnielli, Coniglio, D'Ottaviano, 2002.

2. Cfr. Carnielli, Marcos, 2002, p. 1.

3. Cfr. da Costa, 1974, p. 308. Alla pagina precedente: «Ci sono, tuttavia, certi casi in cui potremmo pensare di studiare una teoria contraddittoria direttamente. Per esempio, una teoria degli insiemi che contenga la classe di Russell (la classe di tutte le classi che non sono membri di se stesse) come un insieme esistente, o una teoria il cui scopo sia la sistematizzazione della teoria degli oggetti di Meinong. È evidente che lo studio dei sistemi contraddittori sarebbe altrettanto interessante che, per esempio, lo studio delle geometrie non euclidee: ci faremmo un'idea più precisa della natura di certi paradossi, potremmo vedere più chiaramente le connessioni fra i vari principi logici necessari a ottenere determinati risultati ecc.».

4. Cfr. Carnielli, Marcos, 2002, p. 10.

5. Cfr. Bremer, 2005, p. 110.

6. Cfr. Carnielli, Marcos, 2002, p. 45.

7. Cfr. ivi, pp. 28 ss.

8. Cfr. da Costa, 1974, p. 311.

9. Cfr. Carnielli, Marcos, 2002, p. 39.

10. Ivi, p. 44.

11. Cfr. da Costa, 1974, p. 309; da Costa, Marconi, 1989, pp. 9-10, per una presentazione in forma interamente assiomatica.

12. Cfr. da Costa, 1974, pp. 308-11.

13. Ivi, p. 312.

14. Marconi, 1979, p. 53.

15. Cfr. ad esempio Raggio, 1968; da Costa, Alves, 1976; e, per una sintesi, da Costa, Marconi, 1989, pp. 8-12.

16. Priest, Routley, 1989c, p. 164. Considerazioni analoghe erano già state avanzate in Mortensen, 1980.

17. Cfr. Bremer, 2005, p. 110.

18. Cfr. da Costa, 1974, p. 309.

19. Di qui anche la risposta di da Costa e Marconi alla critica per cui la negazione dei sistemi *positive-plus* non è vero-funzionale: «Le condizioni di verità di ~A [qui la tilde è la negazione dacostiana] sono determinate dalle condizioni di verità di A *e* dalle condizioni di verità di ~(A ∧ ~A) [...]. Ed è alquanto plausibile, da un punto di vista paraconsistente, che il valore di verità di una formula negativa dipenda dal problema se il mondo sia consistente o meno "al punto A", perché la semantica paraconsistente, contrariamente a quella classica, non *assume* che il mondo sia consistente in ogni punto: deve dunque "controllare" in ogni singolo caso, per così dire» (da Costa, Marconi, 1989, p. 18). Un argomento analogo a favore della non vero-funzionalità della negazione per un approccio paraconsistente si ritrova già in Batens, 1980, pp. 228-9.

20. Priest, Routley, 1989c, pp. 164-5.

21. Ivi, p. 165.

22. Marconi, 1979, pp. 53-4.

23. «[Il fatto che la negazione di da Costa forma subcontrari] spiega perché ~ [la tilde è sempre la negazione dacostiana] non è verofunzionale. Infatti, il valore di verità di un subcontrario di A non è determinato dal valore di verità di A. Perciò ~ non è un operatore estensionale [...]. Dunque ~A è un sub-contrario di A, ma quale? Perché, anche se il contraddittorio di un enunciato è unico, questo può avere diversi subcontrari. Quale è ~A? [...] Non ci sono ulteriori costrizioni su ~ che determinino quale operatore di sub-contrarietà esso sia. Quindi la risposta a questa domanda dev'essere radicalmente indeterminata» (Priest, Routley, 1989c, pp. 165-6).

24. Secondo Routley «i sistemi con negazione indebolita mancano di tutte le forme di contrapposizione, anche se alcune sono sicuramente corrette, e in verità vi sono poche ragioni per considerare le cosiddette negazioni di questi sistemi come vere e proprie negazioni, anziché, poniamo, connettivi modali positivi, ad esempio strani connettivi aletici o necessitativi» (Routley, 1979a, p. 305). Le considerazioni svolte valgono anche per il sistema siglato PI, proposto da Diderik Batens (1980) come una logica paraconsistente estensionale "di base". PI infatti è anch'esso un sistema *positive-plus*; la semantica della sua negazione è la stessa di quella di da Costa, e non vi valgono Contrapposizione e *reductio*.

25. Da Costa, 1974, p. 311.

26. Priest, Routley, 1989c, p. 166.

27. Carnielli, Marcos, 2002, pp. 26-7.

28. Cfr. Bremer, 2005, p. 117.

29. Per una prospettiva complessiva si può vedere il *survey* di Batens (in Batens, Mortensen, Priest, van Bendegem, 2000, pp. 49-74).

30. Bremer, 2005, p. 93.

31. Cfr. ivi, pp. 101-2.

32. Cfr. ivi, p. 222.

33. Batens, 1990, p. 210.

34. Ivi, pp. 227-8. «Senza l'approccio adattivo dovremmo ragionare adoperando qualche [logica paraconsistente] in tutti i contesti [...]. Dato che molta logica standard qui manca – incluse contrapposizione, transitività (dell'identità) ecc. –, questa è una dura restrizione. Allora non possiamo catturare molte (innocue) conseguenze in questo campo. La filosofia, come l'area del discorso universale intorno a semantica ed epistemologia, dovrebbe usare una tale logica ristretta. È discutibile quante delle sue tesi e argomentazioni potrebbero realmente (ossia, senza ricorso alla logica standard) essere espresse. L'approccio adattivo, d'altra parte, rende chiaro che il ragionamento a partire dalle contraddizioni presenti è più l'eccezione che la regola» (Bremer, 2005, p. 95).

8
La logica del paradosso

8.1
Prospetto

Ho già fatto riferimento a Priest (1979), uno dei primi scritti di Priest sul dialeteismo. Egli vi ha proposto un sistema di logica paraconsistente detto *logic of paradox*, e siglato LP, che sarà a tema in questo capitolo. Il sistema è stato ripreso e sviluppato negli anni dallo stesso Priest e da altri autori, soprattutto per via dell'intuitività della sua semantica; perciò lo esporrò non *proof-theoretically*, ma con un approccio semantico e in termini di conseguenze logiche. Inoltre, mi soffermerò anche sull'estensione predicativa di LP (etichettata come LPQ). Già altre teorie paraconsistenti incontrate in precedenza non si fermano al livello enunciativo, ma presentano calcoli e/o semantiche per linguaggi predicativi (ad esempio la logica dell'inconsistenza di Rescher e Brandom, le gerarchie di da Costa). Non me ne sono però occupato perché buona parte delle questioni teoretiche concernenti la paraconsistenza sorgono a livello enunciativo e di trattamento dei connettivi: dopotutto, il problema è evitare cose come lo Scoto o il Sillogismo Disgiuntivo, dunque leggi o regole enunciative, conservando quanto più possibile del quadro classico rimanente. Tuttavia, nello sviluppo di teorie inconsistenti con una logica paraconsistente sottostante capita di avere a che fare con *oggetti* contraddittori, che hanno e non hanno certe proprietà: ad esempio, insiemi contraddittori come R o V, oppure oggetti meinonghiani come il famoso cerchio quadrato. E naturalmente, si vuole avere un linguaggio in grado di parlarne adeguatamente. Un tale linguaggio non potrà certo avere una semantica standard, visto che in questa il cadere sotto l'estensione di un predicato e sotto il suo complemento sono reciprocamente esclusivi.

LP e LPQ sono state considerate da vari autori una buona base per il trattamento degli operatori estensionali (diversi dal condizionale) in una logica paraconsistente. La discussione di LP(Q) fornirà l'occasione per parlare di alcune idee generali di Priest, il quale, come si è capito, è l'autore che ha maggiormente esplorato le ricadute filosofiche della paraconsistenza forte. In particolare, mi soffermerò sul modo in cui Priest ha proposto di risolvere il problema della *classical recapture*.

8.2
Vero, falso, vero e falso

LP è una logica trivalente, i cui valori sono $P(\{1, 0\}) - \varnothing$: si ottengono cioè facendo l'*insieme potenza* dei valori di verità classici, e togliendo l'insieme vuoto. Il motivo per cui Priest ritiene di dover escludere l'insieme vuoto ha a che fare con certi argomenti filosofici contro l'esistenza di *gaps*, dunque di enunciati privi di valore di verità. Come abbiamo visto nella prima sezione del libro, Priest ritiene che quella dei *gappers* non sia una buona strategia per il trattamento dei paradossi semantici. La valutazione degli enunciati è dunque una funzione v^1 da questi a uno dei tre valori rimanenti: *a*) vero, {1}; *b*) falso, {0}; *c*) vero *e* falso, {1, 0}. Quest'ultimo valore, naturalmente, è quello peculiare dell'approccio paraconsistente di LP: si esprime il distacco dalla prospettiva classica assumendo che vi siano enunciati sia veri che falsi, contro (PNC2a). Questo valore viene dunque etichettato come "paradossale"[2]. Nella letteratura paraconsistente, si usa anche dire che gli enunciati veri non paradossali sono *solo veri*, e quelli falsi non paradossali *solo falsi*.

Uno degli aspetti più apprezzati della semantica di LP è il trattamento della negazione, che appare piuttosto naturale. Si adopera la negazione di scelta, regolata dalle due clausole che (riproducendo qui la notazione favorita da Priest) suonano:

(S¬1) $1 \in v(\neg\alpha) \Leftrightarrow 0 \in v(\alpha)$

(S¬2) $0 \in v(\neg\alpha) \Leftrightarrow 1 \in v(\alpha)$.

Priest avvisa che «possiamo leggere "$1 \in v(\alpha)$" come "α è vero sotto v" e "$0 \in v(\alpha)$" come "α è falso sotto v"»[3]. La negazione è dunque conforme a (Neg1), e sembra avere tutte le carte in regola per soddisfare la Condizione di Danno Minimo[4]. Naturalmente, la semantica si discosta in effetti dal trattamento *classico* perché non ha clausole omofoniche e non è conforme a (Neg2). Ciò che è senz'altro rispettato, tuttavia, è questa intuizione fondamentale: la negazione è l'operatore che rovescia vero e falso. Priest ha quindi sostenuto che «queste condizioni sono proprio quelle familiari della semantica classica»[5]. La "sola" differenza è che qui si contempla il caso che una formula possa essere sia vera che falsa, perciò a detta di Manuel Bremer «la negazione in LP è un'estensione della negazione standard»[6]. La presentazione tabulare della situazione fornita di norma è la seguente:

α	$\neg\alpha$
1	0
0	1
1, 0	1, 0

La negazione di un enunciato paradossale (vero e falso), dunque, è a sua volta un enunciato paradossale[7]. Le condizioni per congiunzione e disgiunzione sono ancora più familiari:

(S∧1) $1 \in v(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow 1 \in v(\alpha)$ e $1 \in v(\beta)$

(S∧2) $0 \in v(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow 0 \in v(\alpha)$ o $0 \in v(\beta)$

(S∨1) $1 \in v(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow 1 \in v(\alpha)$ o $1 \in v(\beta)$

(S∨2) $0 \in v(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow 0 \in v(\alpha)$ e $0 \in v(\beta)$[8].

Il primo membro di ciascuna coppia corrisponde alla normale clausola omofonica classica. Invece, il secondo di ogni coppia è classicamente ridondante, ma naturalmente «le cose non stanno più così quando abbiamo colto l'intuizione paraconsistente per cui le cose possono essere sia vere che false»[9]. Tabularmente:

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$
1	1	1	1
1	0	0	1
1	1,0	1,0	1
0	1	0	1
0	0	0	0
0	1,0	0	1,0
1,0	1	1,0	1
1,0	0	0	1,0
1,0	1,0	1,0	1,0

Il condizionale in LP ha la definizione standard, ossia:

(Df→) $\alpha \rightarrow \beta =_{df} \neg\alpha \vee \beta$.

Le matrici di LP riprendono quelle di altre logiche trivalenti (ad esempio corrispondono alle tavole della logica K_3 di Kleene)[10], ma chiaramente è la loro *interpretazione* a cambiare. La prima differenza è che il terzo valore nelle tavole per le tradizionali logiche trivalenti è "indeterminato" (di solito siglato 1/2), mentre qui è {1, 0} o "paradossale". La seconda differenza è che in LP i valori designati sono {1} *e* {1, 0}, quindi in particolare il valore "paradossale" è *designato*. L'idea intuitiva sottostante a questa mossa dovrebbe essere che una formula ha un valore designato quando è *almeno* vera, ossia quando un 1 compare fra i suoi valori in ogni riga di una tavola. Ciò vuol dire che mentre, ad esempio, nella logica trivalente di Lukasiewicz $\alpha \vee \neg\alpha$ non è una tautologia, in LP lo è, assumendo sempre valori designati. Ciò che più ci interessa è che anche il (PNC) sintattico, ossia (PNC 1), è una legge logica:

α	$\neg$	$(\alpha$	$\wedge$	$\neg\alpha)$
1	1	1	0	0
0	1	0	0	1
1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Come si vede sotto il connettivo principale (la negazione iniziale), $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ non è mai (solo) falsa, ma o (solo) vera, oppure vera e falsa. Che $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ sia una tautologia di LP è conforme all'intuizione di cui ho parlato al capitolo precedente, alla quale Priest, Routley e altri dialeteisti attribuiscono gran peso: la validità di (PNC1) è essenziale per poter dire che la negazione è caratterizzata in un sistema formale come un'*autentica* negazione. Si capisce anche in che senso il (PNC), tuttavia, fallisca in LP: alcune contraddizioni di tipo (C1), ossia della forma $\alpha \wedge \neg\alpha$, possono essere *vere*, anche se non sono mai *solo* vere, bensì al massimo vere e false.

Le definizioni di conseguenza logica e validità logica hanno anch'esse un aspetto piuttosto tradizionale (con Γ insieme di formule):

$$\Gamma \models \alpha \Leftrightarrow \text{per ogni } v\ (1 \in v(\beta) \text{ per ogni } \beta \in \Gamma \Rightarrow 1 \in v(\alpha))$$

$$\models \alpha \Leftrightarrow \text{per ogni } v,\ 1 \in v(\alpha).$$

Tutte le tautologie classiche-bivalenti sono tautologie di LP. Dunque, Priest può affermare che LP è un'*estensione* della logica classica bivalente[11]. Una logica paraconsistente dovrebbe essere conservativa rispetto alla logica classica in tutti gli ambiti in cui la logica classica è corretta. Questa è semplicemente limitata, perché non è in grado di trattare efficacemente i contesti inconsistenti, essendo esplosiva. Inoltre, le tavole di verità per LP forniscono naturalmente una procedura di decisione a livello enunciativo, sicché LP è completa e decidibile.

D'altra parte, la relazione di conseguenza logica è drasticamente mutata rispetto a quella classica. Infatti, in LP abbiamo:

$$\{\alpha, \neg\alpha\} \not\models \beta$$
$$\{\alpha \wedge \neg\alpha\} \not\models \beta$$
$$\{\alpha \vee \beta, \neg\alpha\} \not\models \beta,$$

quindi falliscono sia lo Scoto in forma collettiva e distributiva, sia il Sillogismo Disgiuntivo che, come sappiamo, è il maggior sospettato nella prova Lewis-Popper di (PS). Facciamo attenzione al motivo per cui ciò succede: queste conseguenze falliscono infatti *precisamente* in contesti paradossali: se α e, dunque, anche $\neg\alpha$, sono paradossali (vere e false), e β è (solo) falsa, questa situazione fornisce i controesempi desiderati a (PS) e (SD). È un punto cui si è già accennato, e di cui riparlerò nel capitolo seguente, perché è stato discusso soprattutto nella prospettiva rilevantista.

Una stranezza di LP, dovuta al fatto di assumere sia $\{1\}$ che $\{1, 0\}$ come valori designati, è che abbiamo un caso di soddisfacibilità universale. Se si assegna a ogni enunciato atomico il valore $\{1, 0\}$, *ogni* enunciato ottiene il valore $\{1, 0\}$; di conseguenza, qualsiasi insieme di enunciati è soddisfacibile in LP[12].

8.2.1. Cosa manca a LP

Quasi tutti i problemi specifici di LP vengono dal fatto che il suo condizionale è quello materiale standard. Per prima cosa, dato che tutte le tautologie classiche sono conservate in LP, vi ritroviamo anche leggi indesiderate, come la Contrazione, ossia $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$. Ciò rende LP inadatta a fungere da logica sottostante a semantiche o teorie paraconsistenti degli insiemi, che ne verrebbero trivializzate dal paradosso di Curry. Inoltre, per lo stesso fatto anche alcune forme della Legge di Scoto figurano in LP: ad esempio, vale (PS_i1), ossia $\alpha \wedge \neg\alpha \to \beta$. Conseguentemente, LP non soddisfa né la Condizione Forte né la Condizione Debole di Anti-trivialità.

Viceversa, una quantità di conseguenze logiche desiderabili a prescindere dal problema dell'esplosione fallisce, ad esempio:

$\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \not\models \alpha \to \gamma$
$\{\alpha \to \beta, \alpha\} \not\models \beta$
$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \not\models \neg\alpha$[13].

A causa della sfasatura fra tautologie e conseguenze logiche, LP risulta a un tempo troppo prodiga sulle tautologie, conservando cose come l'orribile (PS_i1); e troppo restrittiva sulle conseguenze, invalidando (le controparti semantiche per) la transitività del condizionale e il *modus tollens*, e violando la Condizione del *modus ponens*. Ma, come nota lo stesso Priest, queste conseguenze logiche «sono in realtà varianti del Sillogismo Disgiuntivo», le quali risultano dal fatto che «si esprime "$\to$" in termini di "$\neg$" e "$\vee$"». Dunque «ciò suggerisce che potrebbe essere la nostra identificazione di "$\alpha \to \beta$" con "$\neg\alpha \vee \beta$" a causare il problema»[14].

D'altra parte, in virtù di quanto abbiamo visto nei capitoli precedenti, sembra che LP se la cavi molto meglio delle logiche dell'inconsistenza formale e degli approcci non aggiuntivi per quanto riguarda la naturalezza nel trattamento di congiunzione e negazione. È stato quindi proposto di assumere LP come una sistemazione di base per i connettivi diversi dal condizionale di una logica paraconsistente. Il suo condizionale può poi essere sostituito con uno che ha la seguente tavola:

α	β	$\alpha \to \beta$
1	1	1
1	0	0
1	1,0	0
0	1	1
0	0	1
0	1,0	1
1,0	1	1
1,0	0	0
1,0	1,0	1,0

Il sistema risultante è chiamato RM_3, e rispetta la Condizione del *modus ponens*: in base alla tavola, se $\alpha \to \beta$ e α hanno un valore designato, ce l'ha anche β. Ma a differenza di LP, RM_3 *non* conserva tutte le tautologie classiche[15].

Alternativamente, LP potrebbe essere completata con un trattamento del condizionale quale quello fornito da una logica della rilevanza. Occorrerà tenere a mente questa possibilità quando studieremo la nozione di *entailment* nel capitolo seguente. Prima di ciò, tuttavia, dirò qualcosa su due estensioni di LP: la logica predicativa LPQ, e l'estensione espressiva ottenuta introducendo nel linguaggio certi operatori semantici.

8.2.2. LPQ e i *multi-criterial terms*

Estendiamo il linguaggio di LP in quello di LPQ al modo standard, ossia introducendo costanti predicative *n*-arie, costanti e variabili individuali, quantificatori ed eventualmente espressioni funtoriali, nonché le consuete regole di formazione. Un modello M per LPQ è una coppia <D, *v*>, dove D è un insieme di individui, *v* è una funzione di interpretazione che assegna denotazioni alle espressioni descrittive. Inoltre consideriamo diverse assegnazioni *g* di valori alle variabili per una stessa interpretazione. In un modello M e relativamente a un'assegnazione *g*, le denotazioni di costanti individuali e variabili sono individui del dominio D. Fin qui tutto funziona come al solito. L'aspetto interessante è invece la semantica dei predicati, che deve rendere il modo con cui sorgono contraddizioni in una teoria elementare paraconsistente. Nella prospettiva classica si assegna ai predicati soltanto un'estensione, sottintendendo che il cadere sotto l'estensione di un predicato è necessario e sufficiente per *non* cadere sotto il suo complemento (booleano). Quando, come accade nelle semantiche non bivalenti, si abbandona l'idea che l'estensione di un predicato e il suo complemento siano esaustive, occorre invece assegnare ai predicati anche un'*antiestensione* o estensione negativa. Ciò accade, naturalmente, anche quando si abbandona l'idea che verità e falsità debbano essere *esclusive*. Dunque, dato un predicato *n*-ario P^n, avremo:

(S_{Pred}) $\quad v(P^n) = \langle P^+, P^- \rangle$, con $P^+ \subseteq D^n$, $P^- \subseteq D^n$ e $P^+ \cup P^- = D^n$.

Ciò vuol dire che in LPQ si assegnano come denotazioni ai predicati coppie ordinate: l'estensione positiva, P^+, e negativa, P^-, di P^n sono sottoinsiemi dell'*n*-esimo prodotto cartesiano di D – sono dunque insiemi di *n*-ple ordinate; e la loro unione coincide con D^n: «[P^+ e P^-] sono gli insiemi di cose che soddisfano [P^n] e la sua negazione. Come per i valori di verità, sono esaustivi ma non, in generale, esclusivi»[16]. La motivazione intuitiva addotta dai paraconsistentisti è che nel linguaggio ordinario troviamo comunemente predicati con diversi, ed eventualmente contrastanti, criteri di applicazione:

> Potrebbero esservi criteri l'applicazione dei quali può risultare nella sussunzione di un oggetto entro l'estensione del predicato in questione. Potrebbero esservi anche altri criteri l'applicazione dei quali può risultare nella sussunzione di un oggetto entro l'anti-estensione del predicato in questione. In quanto questi criteri possono non essere esattamente complementari può accadere che qualche oggetto sia sussunto nell'estensione *così come* nel-

l'antiestensione del predicato. Un tale oggetto, allora, ha la proprietà/caratteristica corrispondente al predicato, e manca di quella proprietà (o ha una proprietà complementare)[17].

I criteri di applicazione dei predicati sono tipicamente fissati da postulati di significato, e questi possono entrare in conflitto fra loro. Ad esempio, sostenere il primato di una razza su un'altra è sufficiente per qualificare un partito come destrorso, mentre limitare la libera impresa, favorire le politiche sociali e la proprietà pubblica è sufficiente a escludere che un partito sia destrorso; allora, un partito nazionalsocialista in base a questi criteri è e non è di destra. Eppure, noi non riteniamo che da questo segua, causa detonazione, che un partito nazionalsocialista abbia, o non abbia, qualsiasi proprietà (ad esempio, che non sia un partito politico ma un'associazione di filatelici)[18]. Alcuni paraconsistentisti hanno quindi addotto l'esistenza di predicati *multi-criterial* come un vero e proprio argomento a favore del dialeteismo e contro il (PNC). Ad esempio, secondo J. C. Beall le estensioni dei nostri predicati ordinari «sono vincolate non solo dal loro ruolo nelle nostre teorie in generale, ma anche dalle nostre "intuizioni" intorno ad essi», e se le nostre intuizioni sono inconsistenti, un buon trattamento formale della cosa dovrebbe rispettare questa inconsistenza, non distruggerla con una regimentazione (ad esempio, con la parametrizzazione, ossia con l'aristotelica distinzione di rispetti)[19].

Le clausole per gli enunciati quantificati nella semantica di LPQ sono:

(S∀1) $1 \in v(\forall x\alpha, g) \Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$, $1 \in v(\alpha, g[x/d])$

(S∀2) $0 \in v(\forall x\alpha, g) \Leftrightarrow$ per qualche $d \in D$, $0 \in v(\alpha, g[x/d])$

(S∃1) $1 \in v(\exists x\alpha, g) \Leftrightarrow$ per qualche $d \in D$, $1 \in v(\alpha, g[x/d])$

(S∃2) $0 \in v(\exists x\alpha, g) \Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$, $0 \in v(\alpha, g[x/d])$

dove $v(\alpha, g)$ è la valutazione di una formula α relativa all'assegnazione g di valori alle variabili, e $g[x/d]$ è l'assegnazione identica a g, tranne per il fatto che assegna alla variabile x l'individuo d[20]. Per gli appassionati di calcolo, aggiungerò che LP e LPQ sono stati sviluppati anche nella forma degli alberi semantici, per i quali disponiamo in particolare di prove di completezza per LPQ[21].

8.3
La *classical recapture* nell'approccio di Priest

Se consideriamo la radicalità della posizione dialeteista, che ci chiede di rinunciare al *principium firmissimum*, le modifiche di LP rispetto alla logica classica sono, come abbiamo visto, neppure troppo eclatanti. Tuttavia, c'è indubbiamente qualcosa che viene a mancare: certe conseguenze logiche, con le corrispettive regole d'inferenza, non valgono in LP (e, come vedremo nel prossimo capitolo, in linea di massima neanche in logiche paraconsistenti come quelle della rilevanza). La perdita più grave è senza dubbio quella del Sillogismo Disgiuntivo. Noi adoperiamo normalmente (SD), e abbiamo la sensazione che non ci sia nulla di strano: se so che Juliette Binoche ha recitato in *Chocolat* o in *Un giorno per caso*, e so che non ha recitato in *Un giorno per caso*, ne inferisco che ha recitato in *Chocolat*. Se dunque a ogni strategia consistentista tocca spiegare indipendentemente quale premessa dei paradossi logici rigettare, e perché ci appare vera; reciprocamente, tocca al dialeteismo spiegare indipendentemente perché inferenze come (SD) ci appaiono del tutto valide. Soprattutto, occorre spiegare in dettaglio come recuperare tutti quegli argomenti classicamente validi, ad esempio della matematica ordinaria, in cui si fa comunemente uso di inferenze come (SD). Priest propone di chiamare "quasi-valida" un'inferenza se e solo se è valida classicamente, ma invalida dialeteicamente[22]; e la sua soluzione del problema della *classical recapture* posto in questi termini è, semplicemente: possiamo usare un'inferenza quasi-valida, *posto che* siamo in situazioni consistenti. Vediamo i dettagli della proposta.

8.3.1. Il Principio R

È in questo contesto che ritornano in gioco gli operatori epistemico-pragmatici introdotti nel primo capitolo del libro per esprimere accettazione e rifiuto: $\vdash_x$, $\dashv_x$. Il principio che spiegherebbe l'apparenza di validità del Sillogismo Disgiuntivo è infatti proprio un principio pragmatico, che in Priest (1987) viene chiamato *Principio R*:

(R) Se una disgiunzione è razionalmente accettabile e uno dei disgiunti è razionalmente rigettabile, allora l'altro è razionalmente accettabile[23].

Altrove, il Principio R viene anche chiamato Principio di Accettazione per la Disgiunzione (*Acceptance Principle for Disjunction*), e la sua espressione formale è:

(PAD) $\vdash_x(\alpha \vee \beta) \wedge \dashv_x\alpha \Rightarrow \vdash_x\beta$[24].

(PAD), o il Principio R, *non* è (SD), il Sillogismo Disgiuntivo. L'idea non è che se $\alpha \vee \beta$ è vero, e α non è vero, β è vero: «la giustificazione non è formale ma pragmatica: $\alpha \vee \beta$ è razionalmente accettabile, α è razionalmente rigettabile; quindi β è razionalmente accettabile»[25].

A questo punto sorge un'ovvia obiezione. Visto che prendiamo sul serio le contraddizioni, non potrebbe essere che qualcuno *insieme* accetti e rigetti un'affermazione? Se qualcuno accetta $\alpha \vee \beta$ e rigetta α, non potrebbe insieme anche *accettare* α? In questo caso, sarebbe ancora razionalmente tenuto ad accettare β? Bisogna ascoltare la risposta data da Priest: «Chi rigetta *A* non può simultaneamente accettarlo più di quanto una persona possa simultaneamente prendere e perdere un autobus, o vincere e perdere una partita a scacchi. Se si chiede a qualcuno se *A* o no, può naturalmente dire "sì e no". Ma questo non mostra che insieme accetta e rigetta *A*. Significa che accetta sia *A* che la sua negazione. Inoltre, una persona può oscillare fra l'accettazione e il rifiuto di un'asserzione. Ma non può fare le due cose insieme»[26].

Sembra quindi che ci sia una versione del (PNC) accettata senza condizioni anche da Priest. Si tratta di quella che Laura Goodship ha chiamato la Tesi di Incompatibilità[27], che non è altro che una versione di (PNC4), del (PNC) psicologico-pragmatico:

(PNC4b) $\neg(\vdash_x \alpha \wedge \dashv_x \alpha)$.

L'idea di Priest infatti è che «accettazione e rifiuto non sono esaustivi, ma sono esclusivi». Si può non accettare né rigettare α, perché si è indecisi o non si hanno sufficienti informazioni in proposito. D'altra parte, «accettazione e rifiuto appaiono effettivamente incompatibili»; sembra difficile sostenere che si possa insieme credere qualcosa e rifiutare di crederci, proprio perché in questo caso si tratta di *pragmatica*: «tipicamente, gli schemi comportamentali che accompagnano il fare X e il rifiutare di fare X non possono essere esibiti simultaneamente»[28].

8.3.2. La contraddizione non è di *default*

Questa sistemazione dovrebbe spiegare perché il Sillogismo Disgiuntivo ci appare incondizionatamente valido: anzitutto, ciò che *è* incondizionatamente valido è la sua controparte pragmatica (PAD). In secondo luogo, il Sillogismo Disgiuntivo è valido se stiamo ragionando in contesti consistenti. E i contesti consistenti per Priest sono di *default*. Ho accennato in precedenza al dibattito fra i dialeteisti sulla possibilità di ammettere contraddizioni nel mondo empirico, dunque oggetti *concreti* (dove "concreto" vuol dire: individuato spazio-temporalmente) contraddittori. Molti ritengono la posizione implausibile, e confinano la possibilità di contraddizioni vere alla semantica, o al dominio degli oggetti astratti come gli insiemi. Ma anche chi, come Priest, prende sul serio l'idea di contraddizioni percepibili, sostiene che «le dialetheie [ossia, le contraddizioni vere] sembrano accadere in un numero piuttosto limitato di domini: certi contesti logico-matematici, certi contesti legali e dialettici [...] e forse pochi altri»[29]. È per questo che normalmente accettiamo argomenti quasi-validi, e il Sillogismo Disgiuntivo è regolarmente usato in matematica, così come nel ragionamento ordinario. Priest propone allora la seguente Massima Metodologica:

(M) Se non abbiamo motivi specifici per credere che le contraddizioni cruciali in un ragionamento quasi-valido sono dialetheie, possiamo accettare il ragionamento[30].

Siccome è facile che le eccezioni sfuggano, e stante l'indottrinamento ideologico propinato da Aristotele e dai difensori del (PNC) e incorporato nella logica classica, siamo giunti a essere persuasi che sia (SD), e non solo (PAD), a essere incondizionatamente valido.

Un logico classico e un dialeteista, quindi, ragionano esattamente allo stesso modo in ogni contesto (che appare) consistente. Seguendo la Massima Metodologica (M), il dialeteista si concede infatti l'uso di inferenze quasi-valide e, tipicamente, di (SD). Ma se poi nel contesto ritenuto consistente si rivela una contraddizione, il classicista è condotto al disastro dalla sua logica esplosiva. Il dialeteista invece può *scegliere*: se ritiene che la contraddizione sia inaccettabile indipendentemente, dovrà aggiustare le cose per eliminare l'inconsistenza. Se invece ritiene che la contraddizione sia vera, l'accetterà come un bruto fatto. Anche in questo senso, il dialeteismo si presenta come un'estensione della prospettiva classica: in situazioni consistenti la conseguenza classica può essere intesa in termini di quasi-validità, e il dialeteista è capace di trarre inferenze esattamente come il classicista. Ma il classicista in situazioni inconsistenti "esplode", il dialeteista no[31]. E, come abbiamo intravisto nel capitolo precedente, ci sono approcci, come quello adattivo, che insegnano anche in che modo gestire tecnicamente la situazione, passando da una logica standard a una più debole di tipo paraconsistente in caso di inconsistenza accertata, e ritrattando le inferenze (quasi-valide) corrispondenti.

8.4
La consistenza del linguaggio semantico

Abbiamo detto che un controesempio a:

$$\frac{\alpha \vee \beta, \neg\alpha}{\beta} \qquad (\text{SD})$$

viene fornito in LP assumendo che α sia paradossale, vero e falso insieme. Si potrebbe allora pensare che (SD) sia uno schema di ragionamento *entimematicamente* valido. Se cioè si tratta di un'inferenza quasi-valida, ossia valida solo in contesti consistenti, a essere pienamente valido sarebbe uno schema inferenziale che aggiunga a (SD) una premessa, la quale garantisca la consistenza o non paradossalità di α – magari attraverso un operatore del tipo di quelli adoperati nelle logiche dell'inconsistenza formale. Per vedere se ciò sia possibile, cominciamo allora introducendo la seconda estensione di LP che ho promesso sopra.

8.4.1. Operatori semantici in LP(Q)

L'estensione che considererò adopera ben sei operatori[32], per capire i quali basta ricordare che l'insieme di valori di verità in LP è {{1}, {0}, {1, 0}}. Si possono introdurre gli operatori con la seguente presentazione tabulare:

α	$V\alpha$	$F\alpha$	$\Delta\alpha$	$\nabla\alpha$	$°\alpha$	$\bullet\alpha$
1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0
1,0	1	1	0	0	0	1

L'interpretazione è la seguente: $V\alpha$ dice che α è vero, e $F\alpha$ dice che α è falso[33]; $\Delta\alpha$ dice che α è *solo vero*, ossia vero e non paradossale, e $\nabla\alpha$ dice che α è *solo falso*, ossia falso e non paradossale; $°\alpha$ dice che α non è paradossale, ossia è o solo vero o solo falso; $\bullet\alpha$ dice che α è paradossale, ossia vero e falso. Naturalmente una tale abbondanza può essere facilmente ridotta, visto che gli operatori sono interdefinibili in molti modi. Quel che è importante notare è che la semantica di tutti questi operatori è *bivalente*: quando si prepone uno qualunque di essi a un qualsiasi enunciato, il risultato non è mai un enunciato il cui valore è {1, 0}. L'intuizione sottostante a questa sistemazione degli operatori è che, quando parliamo dei valori di verità di enunciati, ciò che diciamo dev'essere solo vero o solo falso, ma mai paradossale.

8.4.2. Ancora su linguaggio e metalinguaggio

Questa, però, *non* era l'idea di Priest nell'articolo del '79 che contiene la prima presentazione di LP. Qui e in altri scritti, egli sembra infatti rifiutare per ragioni filosofiche l'idea che vi possano essere operatori enunciativi in grado di *forzare* l'incontraddittorietà, o la non-paradossalità. Quando diciamo "α si comporta in modo incontraddittorio", ciò che diciamo può a sua volta essere contraddittorio:

> Il problema è che non c'è una garanzia a priori che "A non è paradossale" non sia a sua volta paradossale. Perciò, "A non è paradossale $\wedge$ A $\wedge$ $\neg$A" potrebbe a sua volta essere vero. [...] Né è difficile mostrare che attribuzioni di paradossalità potrebbero a loro volta essere paradossali. [...] Per riassumere: non vi è alcun'affermazione che si possa fare, che forzi una formula a comportarsi in modo consistente. Possiamo dire "A si comporta in modo consistente" ma poiché la nostra "metateoria" è suscettibile di essere inconsistente, ciò non può forzare un comportamento consistente. Questa è solo una delle dure realtà della vita paraconsistente[34].

Per capire questa posizione priestiana, basta considerare che il ruolo degli operatori enunciativi introdotti è fornire al linguaggio (oggetto) formalizzato risorse per esprimere fatti semantici che, in una prospettiva tarskiana standard, sarebbero descritti da enunciati metalinguistici in cui predicati di verità o falsità si applicano a nomi metalinguistici di espressioni del linguaggio oggetto. Ora, un dialeteista duro e puro ha ragioni filosofiche indipendenti per rigettare l'idea che il frammento semantico della propria teoria sia garantito dall'inconsistenza. Una delle motivazioni essenziali della paraconsistenza forte, come sappiamo, è il rifiuto degli approcci tarskiani e gerarchici che cercano di risolvere i problemi causati dalle varie versioni del mentitore con una rigida separazione fra linguaggio e metalinguaggio. Come afferma ancora Priest, «la bellezza dell'approccio paraconsistente ai paradossi logici è che rende infine inutile la distinzione linguaggio/metalinguaggio in ogni sua forma e aspetto»[35]. Naturalmente, possiamo continuare a chiamare "metateoria" quella parte della teoria che contiene le nozioni semantiche, ma questa andrebbe vista come una sottoparte della teoria nel suo complesso[36].

Una delle conseguenze di ciò è che (SD) non può essere considerato uno schema entimematicamente valido. Non c'è nessuna premessa che gli si possa aggiungere, la quale garantisca la consistenza di α. Il punto filosofico è che per il dialeteista le contraddizioni non hanno uno status molto diverso da qualsiasi altro enunciato: possono essere vere, oltre che false, e possono essere accettate razionalmente, oltre che rifiutate: «il dialeteista considera l'ipotesi della [...] inconsistenza locale (ossia, della verità di $\alpha \wedge \neg\alpha$ per qualche α) non diversa, in linea di principio, da qualsiasi altra ipotesi»[37]. Perciò va vagliata caso per caso, tenendo conto di tutte le questioni epistemologicamente rilevanti, e in modo, naturalmente, fallibile:

> Mi si chiede spesso un criterio per stabilire quando le contraddizioni sono accettabili e quando no. Sarebbe carino se ci fosse una risposta sostantiva a questa domanda – o anche se si potesse fornire una risposta parziale, nella forma di qualche algoritmo che dimostrasse che un'area del discorso è libera da contraddizione. Ma dubito che sia possibile. Né c'è di che essere sorpresi. Pochi oggi ipotizzerebbero seriamente che si possa fornire un algoritmo – o un qualsiasi altro criterio informativo – per determinare quando sia razionale accettare qualcosa. Non c'è ragione per cui il fatto che qualcosa ha una certa forma sintattica – sia $p \wedge \neg p$ o qualsiasi altra – debba cambiare la situazione. Si può determinare l'accettabilità di una qualsiasi contraddizione data, come di qualsiasi altra cosa, solo sulla base dei suoi meriti individuali[38].

8.4.3. Problemi in agguato

Ora, questa sistemazione complessiva della *classical recapture* pone una grande quantità di problemi. Anzitutto, l'accettazione della variante pragmatica del (PNC), nella forma di (PNC4b), è stata accusata da diversi autori di essere *ad hoc* e poco giustificabile indipendentemente. Ma soprattutto, la mancanza di mezzi per arginare la possibilità dell'inconsistenza, ossia l'ammissione che non vi sia alcun modo per forzare la consistenza su alcuna parte della teoria, costituisce un notevole problema teorico, o forse *il* problema teorico fondamentale, a carico della prospettiva paraconsistente forte. Di questo parlerò nell'ultima parte del libro, dedicata ai problemi. In quel contesto, sarà notevole scoprire che una tale difficoltà basilare era stata già intravista da Aristotele, che l'aveva formulata sotto l'etichetta dell'ἔλεγχος: l'argomento elenctico per confutare il negatore della βεβαιοτάτη ἀρχή.

Note

1. Parlo di *funzione* di valutazione degli enunciati seguendo la teoria inizialmente proposta da Priest. In realtà, una critica avanzata (indipendentemente) da Timothy Smiley ed Anthony

Everett nel 1993 ha fatto capire ai paraconsistentisti che sarebbe meglio parlare di una *relazione* di valutazione fra enunciati e valori di verità. Questa modifica è stata introdotta allo scopo di evitare le cosiddette *ipercontraddizioni*, che costituiscono un vero *revenge Liar* a carico del dialeteismo. Ma di questo mi occuperò nell'ultima parte del libro. Nel frattempo, seguo l'originaria presentazione di Priest per evitare complicazioni.

2. Cfr. Priest, 1979, p. 226.

3. Priest, 1987, pp. 94-5.

4. «Le proprietà della negazione [di LP] sono chiare e semplici e non occorre aggiungere postulati extra-semantici come nell'approccio di da Costa [...]. Inoltre, non può esserci dubbio che la negazione in questo approccio *sia* una negazione. La semantica è ricorsiva ed estensionale. Dunque [questa negazione] non è un operatore intensionale» (Priest, Routley, 1989c, p. 169).

5. Priest, 1987, p. 95.

6. Bremer, 2005, p. 46.

7. Questo tipo di presentazione tabulare si trova in quasi tutti i testi (cfr. ad esempio ivi, pp. 47 ss.). La notazione in effetti è equivoca perché, ad esempio, se α è solo vero il suo valore non è 1, bensì il suo singoletto {1}. Per quanto ne so, però, nessun paraconsistentista ha dato peso all'ambiguità.

8. Cfr. Priest, 1987, p. 94.

9. Priest, Routley, 1989c, p. 168.

10. Cfr. Priest, 2001, p. 120.

11. Cfr. Priest, 1979, p. 228; Bremer, 2005, p. 48. «In un senso molto ovvio, la semantica sussume quella della logica classica. Perché la logica classica è solo il caso speciale in cui nessun[a] formula [...] prende il valore dialeteico {0, 1}. L'unica cosa sbagliata con la semantica classica per i connettivi estensionali [...] è che si "dimentica" questo caso particolare» (Priest, 1987, p. 96).

12. Ciò è notato in Bremer, 2005, p. 49.

13. Cfr. Priest, 1979, p. 228.

14. Ivi, p. 232. Anche secondo Manuel Bremer (2005, p. 51) «LP non ha alcun connettivo accettabile del condizionale».

15. Cfr. Priest, 2001, pp. 122-3.

16. Priest, 1987, p. 96.

17. Bremer, 2005, p. 56. Notiamo anche qui lo *shift* che, per dirla ancora con Russell, sa di fallacia verbalista: dal fatto che abbiamo *predicati* con criteri di applicazione inconsistenti si salta subito alla conclusione che vi sono *oggetti* inconsistenti sulle proprietà corrispondenti.

18. Cfr. Priest, 1987, pp. 85-7.

19. Cfr. Beall, 2004, p. 10. Cfr. anche Priest, Routley, 1989d, pp. 503-5.

20. Cfr. Priest, 1987, p. 97; e Bremer, 2005, pp. 55-6.

21. Cfr. ad esempio Bloesch, 1993. Cfr. Bremer (2005, pp. 52-9) per qualche esempio di prova condotta con i *tableaux* semantici.

22. Cfr. Priest, 1987, pp. 137-8.

23. Ivi, p. 141.

24. Cfr. Priest, 1989, p. 618.

25. Priest, 1987, p. 141.

26. Priest, 1989, p. 618.

27. Cfr. Goodship, 1996, p. 153.

28. Cfr. Priest, 1987, pp. 122-3.

29. Ivi, p. 144.

30. Ivi, p. 145. Cfr. anche Priest, 1979, p. 235.

31. Cfr. Priest, 1987, pp. 146-8. Cfr. anche Priest, 1978, pp. 142-3: «Posto che una teoria sia consistente, possiamo usare la logica classica. [...] La forza *ulteriore* [della paraconsistenza] sta precisamente nella capacità di funzionare come logica sottostante per teorie inconsistenti. Il Sillogismo Disgiuntivo non si può usare in queste circostanze e la teoria non collassa nella trivialità. Perciò vediamo che la logica paraconsistente ha la stessa relazione con la logica classica che, ad esempio, la meccanica di Newton ha con la relatività speciale. Come la meccanica di Newton

è scorretta in generale ma adoperabile per basse velocità (ossia, concorda con la relatività speciale per velocità basse), così la logica classica è scorretta in generale ma adoperabile per situazioni consistenti (ossia, concorda con la paraconsistenza per situazioni consistenti)».

32. Ho ripreso qui la versione fornita in Bremer, 2005, p. 50.

33. Si noti: i *predicati* di verità *V* e *F* che ho usato in tutto il libro si applicano a nomi di enunciati, sicché sarebbero costitutivamente metalinguistici (se Tarski avesse ragione – cosa che peraltro, come sappiamo, è controversa, soprattutto per un paraconsistentista). Quelli qui introdotti, V e F, sarebbero invece operatori enunciativi monadici, introdotti direttamente nel linguaggio oggetto.

34. Priest, 1989, pp. 623-4.

35. Priest, 1984a, p. 161. Cfr. anche Priest, 1979, pp. 220 ss.; Priest, 1987, capp. 1 e 9.

36. Alcuni dialeteisti si concedono la possibilità di reintrodurre una qualche distinzione fra teoria e metateoria quando ciò appaia utile. Ad esempio, secondo Routley «noi possiamo conservare senz'altro la distinzione fra linguaggio-oggetto e metalinguaggio, basilare per la metamatematica»; tuttavia «abbiamo la libertà di caratterizzare "vero in inglese", ad esempio, entro l'inglese» (Routley, 1979a, p. 323).

37. Priest, 1987, p. 144.

38. Priest, 1998, p. 423. Cfr. anche Priest, 1989, p. 616: «Tutto questo può andar molto bene, ma solleva l'ovvia domanda di come si stabilisce se una particolare contraddizione $A \wedge \neg A$ *sia* vera. La domanda è certamente degna di esser posta, ma la risposta è semplice e, quasi certamente, deludente. Lo stabiliamo riscontrando che A è vera, e riscontrando che $\neg A$ è vera. Ma come riscontriamo che A è vera? Sfortunatamente non c'è una risposta universale a questo (se ci fosse, la vita sarebbe molto più semplice!). Ogni dominio di indagine ha i suoi propri test (fallibili) di verità. Questo è tutto ciò che si può utilmente dire in generale».

9
La logica della rilevanza

9.1
Prospetto

Quando si dice che un certo asserto è "irrilevante" in un'argomentazione, si intende che non è di alcuna utilità per giungere alla conclusione. Al centro del programma di ricerca della *logica della rilevanza* stanno due idee a ciò connesse, una positiva e una negativa. L'idea positiva è che la nozione di rilevanza non ricada nell'ambito della mera pragmatica o della retorica, bensì rientri a tutti gli effetti in quello della *logica*: sia cioè suscettibile di un trattamento rigorosamente formale. L'idea negativa è che l'apparato logico classico pecchi di irrilevanza, ossia tenga per buoni ragionamenti in cui alcune premesse sono irrilevanti rispetto alle conclusioni. Negli Stati Uniti la logica della rilevanza è anche chiamata dai suoi fautori *relevant logic*, logica *rilevante*, a intendere che si tratta dell'Unica Vera Logica. Nella gerarchia proposta da Susan Haack per classificare i gradi di devianza di una logica rispetto al formalismo standard, quella rilevante occuperebbe il grado settimo, ossia l'ultimo e più radicale: il grado delle «sfide alla concezione standard dell'ambito e delle aspirazioni della logica, spesso associate a sfide ai metaconcetti classici»[1].

I sistemi di logica della rilevanza sono stati edificati a partire dagli anni Sessanta coi lavori pionieristici di A. R. Anderson e N. D. Belnap. Queste logiche sono anche, a mio avviso, il migliore e più sviluppato approccio paraconsistente in circolazione. La tradizione rilevantista è oramai ben consolidata, vanta numerosi risultati metateorici, e ha applicazioni assai vaste sia in matematica che in filosofia e nella *computer science*. Per queste ragioni, ne fornirò un'esposizione più dettagliata di quella offerta nei capitoli precedenti per altri approcci. Le semantiche per questi sistemi formali offrono molti spunti di interesse in relazione alla questione che ci sta maggiormente a cuore: quella di fornire un'interpretazione plausibile per una logica che ammetta contraddizioni. Nel trattare di queste semantiche, perciò, approfondirò alcune considerazioni già avanzate in precedenza (ad esempio nella trattazione degli approcci non aggiuntivi) intorno alla lettura intuitiva dello status ontologico dei modelli per una logica paraconsistente.

Il problema di partenza per Anderson e Belnap, beninteso, *non* era quello di costruire sistemi formali che violassero il (PNC) senza venirne trivializzati. Essi non erano infatti disposti ad ammettere contraddizioni vere, od oggetti o stati di cose contraddittori. La paraconsistenza dei loro sistemi, invece, è stata per così dire un effetto collaterale della ricerca di una soddisfacente formalizzazione della nozione di *implicazione rilevante*. Tuttavia, vedremo fra poco che il nesso fra il problema della rilevanza e l'ammissione di violazioni del (PNC) probabilmente è molto più stretto di quanto Anderson e Belnap sperassero.

9.2
Implicazione rilevante

9.2.1. I paradossi dell'implicazione materiale

Non è un caso che nella stessa logica classica la Legge di Scoto venga chiamata un *paradosso* dell'implicazione materiale. L'*ex falso quodlibet* è anche chiamato paradosso *negativo*, perché vi compare la negazione. Il suo reciproco è il paradosso *positivo* dell'implicazione materiale, detto spesso Ragionamento *a fortiori* o anche Legge di Attenuazione Condizionale:

(AC) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$.

Questo schema dice che se vale una qualunque formula α, allora α è implicata da qualunque formula β (*verum ex quodlibet*, dicevano i medioevali). (AC) è classicamente dimostrabile, ad esempio come segue:

1.	1	α	Ass
2.	2	β	Ass
3.	1, 2	$\alpha \wedge \beta$	1, 2, I$\wedge$
4.	1, 2	α	3, E$\wedge$
5.	1	$\beta \rightarrow \alpha$	2, 4, I $\rightarrow$
6.		$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$	1, 5, I $\rightarrow$

Per notare l'aspetto bizzarro di (AC) occorre fornire un contenuto: ad esempio, lo schema è istanziato dall'inferenza per cui "Se la terra è rotonda allora, se i maiali volano, allora la terra è rotonda". La paradossalità aumenta se consideriamo che, essendo β una formula qualunque, lo schema è esemplificato anche dall'inferenza per cui " Se la terra è rotonda allora, se i maiali *non* volano, allora la terra è rotonda". La stranezza di (AC) dipende dal fatto che noi non avvertiamo alcuna connessione fra la rotondità della terra e il fatto che i maiali volino (o non volino). Il connettivo del condizionale materiale non esprime alcun nesso causale, né d'altro genere, fra antecedente e conseguente: sta semplicemente per una funzione di verità, per la quale non si dà il caso che si dia l'antecedente e non il conseguente. Invece, per accettare un asserto della forma "se… allora…" richiediamo intuitivamente che antecedente e conseguente abbiano una qualche connessione di contenuto. La scocciatura però, come abbiamo già intravisto all'inizio di questa sezione, non è aggirabile utilizzando un'implicazione intensionale alla Lewis, per la quale valgono i paradossi dell'implicazione stretta, e non è neppure un mero problema di trattamento dei condizionali controfattuali[2]. L'idea di implicazione, sostengono i rilevantisti, è qualcosa di *essenzialmente relazionale*, e deve esprimere un nesso fra premesse e conclusioni, o fra antecedente e conseguente, irriducibile alle nozioni vero-funzionali e anche alle nozioni modali standard.

9.2.2. Implicazione e condizionale

I rilevantisti parlano in modo abbastanza indistinto di implicazione e di condizionale (e in questo capitolo li seguo sulla terminologia). Ma anche se "paradossi dell'implicazione materiale" è una locuzione storica, Quine ci ha insegnato a essere molto accorti sulla distinzione fra "se… allora…" e "…implica…": il primo è un connettivo (lega enunciati), il secondo è un verbo (lega nomi). Per Quine, tutta la logica intensionale è macchiata delle grandi colpe dell'essenzialismo e della confusione uso/menzione, fin da quando, volendo esprimere la necessità del nesso fra α e β, Lewis, anziché scaricarla nel metalinguaggio come dimostrabilità o deducibilità ($\vdash \alpha \rightarrow \beta$) l'ha ricacciata nel linguaggio oggetto, coniando l'implicazione stretta[3]. Mancando della distinzione, la logica della rilevanza è stata accusata di essere incappata nella stessa confusione di livelli.

Tuttavia, si è opportunamente fatto notare[4] che ciò che è in questione nel problema della rilevanza è una più generale relazione di implicazione logica: qualcosa che, pur senza trascurare le distinzioni gerarchiche, dovrebbe valere per la *totalità* dei livelli logici in cui si articola l'inferenza. Che il problema sia più generale, lo si vede dal fatto che, nella stessa prospettiva classica, il nesso rappresentato dal condizionale materiale è riflesso nel segno metalinguistico di asserzione: questo è il ruolo della regola (I$\rightarrow$) nel nostro calcolo della deduzione naturale, e del (meta)Teorema di Deduzione in assiomatica. Una riforma dell'uno sarà quindi connessa a una revisione dell'altro. Rovesciando l'accusa, Anderson e Belnap non solo hanno asserito la rispettabilità della posizione che "confonde" i livelli intendendo riferirsi all'inferenza in generale, ma hanno gettato sospetti sulle distinzioni di stampo quineano[5].

9.2.3. «Riciclare danaro sporco»

La diagnosi dei paradossi dell'implicazione materiale fornita dai rilevantisti è che anzitutto si tratti di inferenze errate perché non rilevanti, o fallacie della rilevanza, appunto perché vi manca una connessione di contenuto fra antecedente e conseguente, o fra premesse e conclusione. È noto che una delle massime conversazionali di Grice è proprio un precetto di rilevanza – si tratta della Massima della Relazione: "dì cose pertinenti"[6]. Tuttavia, ho già anticipato come l'approccio rilevantista sia caratterizzato dal rifiuto di relegare questo genere di fallacia nel regno della pragmatica, quasi non fosse un problema strettamente logico. Come ha detto Bremer, «sembra implausibile che si usi la logica per derivare certe conclusioni *e poi* si riveda questo insieme di conclusioni per ritrattare tutte le deduzioni irrilevanti»[7]. Secondo Michael Dunn «la teoria di Grice fa grande uso di una nozione di rilevanza essenzialmente non analizzata. Una delle regole conversazionali fondamentali di Grice è "Sii rilevante", ma egli non ci dice molto intorno a cosa questo dovrebbe significare»[8]. La logica della rilevanza potrebbe essere vista come un'analisi formale della nozione.

Vediamo allora di dire qualcosa sul concetto di rilevanza. Anche se sono stati sviluppati anzitutto con presentazioni assiomatiche (ne vedremo qualche esempio fra poco), i sistemi rilevanti si prestano a un'esposizione in termini di deduzione naturale, perché questo tipo di notazione tiene conto delle assunzioni da cui dipendono le formule[9]. La dipendenza può essere evidenziata attraverso un'indicizzazione delle formule utilizzate nei vari passi delle deduzioni: assegnato un numerale a un'assunzione, lo si può poi riportare attraverso le varie applicazioni di regole d'inferenza, così tenendo traccia delle ipotesi utilizzate[10]. Ora, consideriamo di nuovo le prime quattro righe della prova di (AC) vista sopra:

1.	1	α	Ass
2.	2	β	Ass
3.	1,2	$\alpha \wedge \beta$	1, 2, I$\wedge$
4.	1,2	α	3, E$\wedge$

Al passo n. 4, abbiamo di nuovo la α del passo n. 1. La differenza è che si è fatto in modo che fosse indicizzata "1, 2", come si vede nella colonna delle assunzioni. Questa, dicono i rilevantisti, è una deduzione *irrilevante*: β non è stato effettivamente usato per derivare α alla riga n. 4, e l'Introduzione e successiva Eliminazione della Congiunzione servono solo a dare l'illusione che α dipenda da β. Dunn ha detto che simili manovre irrilevanti nelle derivazioni classiche equivalgono a «riciclare danaro sporco passando per il Messico»[11].

9.2.4. La Proprietà della Condivisione di Variabile

L'originalità dei sistemi rilevanti dal punto di vista sintattico, dunque, si gioca sull'uso di accorgimenti che consentano di evitare i paradossi, come (AC) e (PS), in tutte le loro forme. Sono possibili sistemazioni diverse, su cui mi soffermerò fra poco. Ciò che conta è il senso complessivo conferito in questi sistemi alla connessione fra premesse e conclusione, o fra antecedente e conseguente. Questo sarebbe manifestato dal metateorema, esprimente la cosiddetta Condizione Debole di Rilevanza, o Proprietà della Condivisione di Variabile (*Variable Sharing Property*):

(VSP) Se $\alpha \rightarrow \beta$ è una tesi del sistema, allora α e β hanno almeno una variabile enunciativa in comune.

(VSP) esprime l'idea rilevantista che il nesso fra antecedente e conseguente debba fondarsi su una qualche "analiticità", o su una connessione di contenuto. Questo è precisamente ciò che non accade in base al senso meramente materiale-classico del condizionale[12]. Notiamo che, in base a (VSP), né i sistemi *positive-plus* della scuola brasiliana né LP sono logiche rilevanti. Le logiche della rilevanza sono dunque un sottoinsieme delle logiche paraconsistenti, nel senso che i requisiti perché una logica sia rilevante, come (VSP), sono più stretti di quelli per il soddisfacimento della Condizione Debole di Anti-trivialità.

Consideriamo ora (I→). Come si diceva questa regola corrisponde in deduzione naturale al (meta)Teorema di Deduzione di Herbrand-Tarski, del quale sappiamo già che dice:

(THT) $\alpha_{1, ...,} \alpha_n \vdash \beta \Leftrightarrow \alpha_{1, ...,} \alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \rightarrow \beta.$

Se teniamo presente:

(K) $\alpha, \beta \vdash \alpha$

che vale per mera definizione standard di $\vdash$, due applicazioni di (THT) a (K) ci conducono direttamente a (AC), al paradosso positivo:

$\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha).$

Il problema è sempre che in (K) β è irrilevante. Una deduzione della forma

$\alpha_1, ..., \alpha_n \vdash \beta$

è rilevante rispetto a un'assunzione a_i ($1 \leq i \leq n$) dicono i rilevantisti, solo se α_i è stato davvero usato per derivare β. "Davvero usato" qui può essere precisato, ad esempio, così: c'è una catena di applicazioni di (E→) o *modus ponens* che parte da α_i e arriva a β, con un indice posto nella riga in cui compare α_i e che si trasmette ogni volta che almeno una delle due premesse del *modus* ha quell'indice, fino a β[13]. Allora, (THT) va rivisto in modo da consentire lo scaricamento dell'assunzione α_i solo se la deduzione di β è rilevante rispetto ad α_i. Una deduzione sarà infine rilevante *simpliciter* se e solo se lo è rispetto a tutte le assunzioni usate. Lo stesso accorgimento si rifletterà nella formulazione di (I→) in deduzione naturale.

9.3
Rilevanza e contraddizione

Secondo Richard Routley l'ipotesi che non vi siano contraddizioni nel mondo è un po' come la fede religiosa: un logico classicista ha fede nell'incontraddittorietà del tutto; un rilevantista è uno che sospende il giudizio; un dialeteista è un ateo che rigetta l'ipotesi[14]. La carriera filosofica di Routley è stata segnata (come vedremo) dall'evoluzione verso l'ateismo, mentre in questa prospettiva la posizione rilevantista sarebbe "agnostica" rispetto alla questione del (PNC). Ciò vorrebbe dire che le logiche della rilevanza sono adatte soprattutto per sostenere la paraconsistenza *debole*, più che non il dialeteismo: sono sistemi che mostrano (ammesso che funzionino) come è possibile ragionare efficacemente in situazioni in cui abbiamo *informazioni* contraddittorie, o come fondare deduttivamente teorie inconsistenti non triviali, senza impegnarsi su contraddizioni vere, ossia intorno a violazioni del (PNC) logico-semantico, o sull'esistenza di contraddizioni reali, ossia intorno a violazioni del (PNC) ontologico. Tuttavia alcuni degli assunti più importanti del programma rilevantista, nonostante le intenzioni dei fondatori, sembrano davvero plausibili solo se si abbraccia una prospettiva paraconsistente *forte*. Vediamo perché.

Presentando la prova di (PS), ho ricordato che per Popper essa dovrebbe essere accettata da ogni essere pensante; la sfida posta da C. I. Lewis a chi avesse voluto mettere in discussione la sua dimostrazione della Legge di Scoto ("quale regola d'inferenza rigetti?") era similmente intesa come una mossa retorica. Ma come accade spesso in filosofia, quella che per qualcuno è la prova di una conclusione controintuitiva, per qualcun altro è la refutazione di una delle premesse[15]. Così, quando nel 1959 il *referee* di un articolo proposto da Anderson e Belnap al "Journal of Symbolic Logic" fece notare che nel loro calcolo saltava il Sillogismo Disgiuntivo, la loro mossa fu semplicemente di rispondere che, tutto sommato, così *doveva* essere[16]. Abbiamo espresso il Sillogismo come regola di derivazione:

$$\frac{\alpha \vee \beta, \neg\alpha}{\beta} \qquad \text{(SD)}$$

Se si accetta la Doppia Negazione Forte (che come vedremo è valida in tutti i principali sistemi rilevanti), (SD) equivale alla cosiddetta "regola γ" di Ackermann:

$$\frac{\neg\alpha \vee \beta, \alpha}{\beta} \qquad (\gamma)$$

Questa non è altro, come si è già visto in precedenza, che un modo di esprimere il *modus ponens* per il condizionale materiale classico, ossia conforme a (Df$\rightarrow$). L'ammissibilità della regola era appunto il primo nella lista dei problemi centrali per la logica della rilevanza sollevati da Anderson[17]. In generale, la soluzione dei rilevantisti è (salvo sofferte e tortuose precisazioni) rifiutare (γ) e (SD) in blocco[18]. Nei sistemi della rilevanza, infatti, è facile provare almeno:

$$\alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \alpha \wedge (\neg\alpha \vee \beta),$$

da cui, se valessero i principi in questione, (PS_iI), la versione importata dello Scoto, seguirebbe per transitività. Come afferma Pizzi, «chi trova implausibile l'assenza di questa regola fondamentale [*scil.* (SD)] ha certamente motivo per ritenere infondato nel suo complesso il programma di ricerca sulla logica rilevante»[19]. Tuttavia, abbiamo già incontrato sistemi in cui si forniscono controesempi a (SD) – ad esempio, la LP di Priest. Ora, riprendiamo gli argomenti contro la legittimità di (PS) e delle prove di Popper e Lewis cui si accennava all'inizio di questa parte del volume. Riproduciamo la derivazione di (PSI):

1.	1	$\neg\alpha$	Ass
2.	2	α	Ass
3.	2	$\alpha \vee \beta$	2, I$\vee$
4.	1, 2	β	1, 3, SD
5.	1	$\alpha \rightarrow \beta$	2, 4, I $\rightarrow$
6.		$\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	1, 5, I $\rightarrow$

Interpretiamo la dimostrazione secondo le nostre intuizioni semantiche standard e supponiamo che, se si assume una formula, è nell'ipotesi che sia vera, e, se se ne assume la negazione, è nell'ipotesi che sia falsa. Allora, per il passo n. 1 α è falsa. Per il passo n. 3, almeno una fra α e β deve essere vera. (SD) ci fa concludere β, al passo n. 4. Ma, sempre secondo le nostre intuizioni standard, al passo n. 2 α è *vera*. Ciò rispecchia semplicemente il fatto che abbiamo a che fare con una situazione inconsistente (assumiamo sia α che $\neg\alpha$ ossia, semanticamente, α è ipotizzata vera e falsa), e questo *non è* l'ambito in cui (SD) può operare in modo appropriato.

Le altre regole non sono qui in discussione: (I$\vee$) riflette semplicemente una proprietà vero-funzionale della disgiunzione – idem per (E$\wedge$), l'Eliminazione della Congiunzione, che ci serve se vogliamo provare la versione importata (PS_{i}I). Ma (SD) nella prova consente di inferire β al passo n. 4 solo perché noi abbiamo *cominciato* con l'assumervi sia $\neg\alpha$ che α, e da quest'ultima abbiamo inferito $\alpha \vee \beta$. In situazioni inconsistenti, in cui cioè $\neg\alpha$ e α sono entrambe vere, anche $\neg\alpha$ e $\alpha \vee \beta$ lo sono, qualsiasi cosa dica β, e in particolare anche se β è falsa. Quindi (SD) non è una buona regola d'inferenza perché non preserva la verità: può condurre da premesse vere a una conclusione falsa[20].

Nel CAP. 5 si era detto che abbiamo qui l'argomento principe contro (SD). È importante notare che *essenziale* all'argomento è proprio l'ammissione di *contraddizioni*. Anderson e Belnap hanno tentato di sostenere che le versioni in forma di legge di (SD) e (γ), ossia:

$$\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \rightarrow \beta$$

$$\alpha \wedge (\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow \beta$$

sono fallacie della rilevanza, e andrebbero rifiutate per *questo* motivo[21]. Ma un tale genere di rifiuto è molto poco convincente, com'è stato instancabilmente osservato da diversi fautori della paraconsistenza forte. Ad esempio, dice Priest:

> Anzitutto, antecedente e conseguente di quest[i] princip[i] *soddisfano* la condizione di rilevanza degli stessi Anderson e Belnap; e cioè, hanno una variabile in comune. Si ammette che questa non era mai stata intesa come una condizione sufficiente, ma solo come ne-

cessaria. Tuttavia, $A \wedge (\neg A \vee B)$ appare del tutto chiaramente rilevante rispetto a B. [...] Anderson e Belnap hanno pienamente ragione a sostenere che [SD] è formalmente invalido (anche se, naturalmente, certe sue istanze sostituzionali possono essere valide). Ma la spiegazione di ciò è fornita dalla paraconsistenza. [SD] non è una fallacia della rilevanza: semplicemente non preserva la verità. Se A e $\neg A$ sono vere, allora le sue premesse sono vere, qualsiasi cosa sia B. Certo, Anderson e Belnap non credono che ci siano contraddizioni vere perciò non possono seguire questa linea. Questo rende il loro rifiuto di [SD] filosoficamente instabile[22].

Qui abbiamo lo slittamento decisivo che conduce dal problema della rilevanza a quello della paraconsistenza. Per i fautori del dialeteismo, regole o principi come (SD) e (γ) falliscono esattamente in circostanze inconsistenti, il che vuol dire che rientrano fra quelle che Priest ha chiamato inferenze *quasi-valide*: accettabili per quelle regioni del mondo che non ospitano contraddizioni. E così, il problema della rilevanza e l'ammissione di violazioni del (PNC) sembrano essere due facce di un'unica questione.

9.4
Pillole di sintassi rilevante

Una presentazione assiomatica delle logiche della rilevanza può cominciare con il sistema di base B, del quale i sistemi più noti sono estensioni. Gli schemi d'assioma di B sono:

(A1) $\alpha \rightarrow \alpha$
(A2) $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
(A3) $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
(A4) $(\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
(A5) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$
(A6) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$
(A7) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma)$
(A8) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
(A9) $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$

Le regole sono:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha}{\beta} \quad (R1)$$

$$\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta} \quad (R2)$$

$$\frac{\alpha \rightarrow \neg\beta}{\beta \rightarrow \neg\alpha} \quad (R3)$$

$$\frac{\alpha \to \beta}{(\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta)} \quad (R4)$$

$$\frac{\alpha \to \beta}{(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)} \quad (R5)$$

Si tratta di *modus ponens*, Aggiunzione, una Contrapposizione, e forme di Concatenazione e Transitività[23]. Aggiungendo nuovi assiomi, alcuni dei quali rendono eliminabili le regole corrispondenti, otteniamo i più noti sistemi della rilevanza:

(A10) $(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$
(A11) $(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta))$
(A12) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
(A13) $(\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$
(A14) $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$.

Lasciando da parte certi sistemi intermedi, aggiungendo (A10), (A11) o (A12), (A13) e (A14), ed eliminando (R3), (R4) e (R5) otteniamo il sistema R, detto dell'*implicazione rilevante*, sviluppato originariamente da Belnap. Il sistema T, detto del biglietto inferenziale (*ticket entailment*), si ottiene da R togliendo (A11), e aggiungendovi una forma della *reductio*:

(A15) $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$[24].

Il sistema E dell'*implicitazione* (questa traduzione del controverso termine *entailment* mi pare sia oramai invalsa nelle discussioni italiane in materia)[25] si ottiene aggiungendo a T la seguente definizione della necessità:

$\Box\alpha =_{df} (\alpha \to \alpha) \to \alpha$,

e i due schemi d'assioma:

(A16) $(\alpha \to \beta) \to (((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to \gamma)$
(A17) $\Box\alpha \wedge \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$.

L'inelegante (A17) serve per la prova induttiva della regola di Necessitazione, e se ne può fare a meno aggiungendo la Necessitazione come primitiva[26]:

$$\frac{\vdash \alpha}{\vdash \Box\alpha} \quad (Nec)$$

E è dunque una logica, oltre che rilevante, modale; è il sistema favorito da Anderson e Belnap, ma (modifiche minori a parte) differisce da R fondamentalmente perché aggiunge la necessità all'implicazione rilevante formalizzata in R. Dunn ha quindi sostenuto che questa è una buona ragione per considerare R, e non E, come il paradigma della logica della rilevanza[27].

Un sistema collaterale a R è RM, che si ottiene aggiungendo a R lo schema d'assiomi detto di Mescolanza (*Mingle*):

(A18) $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$.

L'idea sottostante alla Mescolanza sarebbe quella di esprimere «l'implicitazione da una formula qualsiasi ad una tautologia in base al principio della variabile comune»[28]. Ma in RM si dimostrano teoremi che violano (VSP), come ad esempio $\neg(\alpha \to \alpha) \to (\beta \to \beta)$, sicché è una logica «semirilevante»[29].

Occorre tener presente che spesso nei lavori sulla rilevanza si adottano e studiano sottosistemi di questi sistemi, detti *first degree entailments* (FDE), implicitazioni di *primo grado*. Una formula è detta di *grado zero* se contiene solo i connettivi di negazione, congiunzione e disgiunzione. È invece detta di primo grado se ha la forma $\alpha \to \beta$ e sia α che β sono di grado zero. Sono dunque di primo grado le formule che non contengono implicazioni annidate. I sottosistemi di R, E ecc., che contengono solo formule di primo grado sono etichettati come R_{FDE}, E_{FDE} ecc. Vi è una motivazione intuitiva per studiare autonomamente tali sottosistemi, ed è che «chi è incline a interpretare la relazione di implicitazione come una relazione metalinguistica ha difficoltà ad ammettere la sensatezza dell'iterazione delle frecce»[30]. Questi sottosistemi, sulla cui sistemazione assiomatica non mi soffermerò qui, hanno anche proprietà peculiari quando si passa a questioni di decidibilità e di semantica. Naturalmente, il loro problema è che «non consentono di modellare implicitazioni annidate, laddove molte verità logiche intuitive per il condizionale (Permutazione, Transitività ecc.) non sono altro che tali»[31].

9.4.1. Le logiche dialettiche di Routley e Meyer, DL e DK

Ma T, R ed E sono tutti troppo forti per certi scopi legati alla paraconsistenza. Ciò è dovuto al fatto che Anderson e Belnap, come si è detto, non hanno mai preso troppo sul serio la questione della violazione del (PNC). In conseguenza di ciò, T, R ed E contengono (A14), che non è altro che la regola di Contrazione-Assorbimento. Dunque, non soddisfano la Condizione Forte di Anti-trivialità: non possiamo edificare teorie semantiche o insiemistiche inconsistenti su tali logiche, perché verrebbero trivializzate dal paradosso di Curry[32]. Bisogna perciò ricorrere a sistemi più deboli che, con una terminologia dovuta (per quanto ne so) a Ross Brady, sono stati chiamati logiche rilevanti di profondità[33].

Come esempi di logiche della rilevanza che soddisfano la Condizione Forte di Anti-trivialità, consideriamo le *logiche dialettiche* DL e DK sviluppate da Routley e da R. K. Meyer in alcuni importanti articoli[34]. Gli schemi d'assioma per DL (la "logica dialettica minimale")[35] sono:

(A1) $\alpha \to \alpha$
(A2) $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
(A3) $\alpha \wedge \beta \to \alpha$
(A4) $\alpha \wedge \beta \to \beta$
(A5) $(\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta \wedge \gamma)$
(A6) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \to (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ (con $\alpha \vee \beta =_{df} \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$)
(A7) $\neg\neg\alpha \to \alpha$
(A8) $(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$
(A9) $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$ (o equivalentemente: $(\alpha \to \beta) \to \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$)
(A10) $P \wedge \neg P$

Le regole sono:

$$\frac{\alpha \to \beta, \alpha}{\beta} \quad \text{(R1)}$$

$$\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta} \quad \text{(R2)}$$

$$\frac{\alpha \to \beta, \gamma \to \delta}{(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \delta)} \quad \text{(R3)}$$

Otteniamo DK modificando (A6) in $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \to (\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$, togliendo (A9) e aggiungendo il Terzo Escluso:

(A11) $\alpha \vee \neg\alpha$.

Vi sono poi estensioni predicative, DLQ e DKQ, che hanno i seguenti schemi aggiuntivi per la quantificazione:

(A12) $\forall x\alpha[x] \to \alpha[x/t]$
(A13) $\forall x(\alpha \to \beta[x]) \to (\alpha \to \forall x\beta[x])$
(A14) $\forall x(\alpha \vee \beta[x]) \to (\alpha \vee \forall x\beta[x])$
(A15) $\forall x(\beta[x] \to \alpha) \to (\exists x\beta[x] \to \alpha)$

x non è libera in α in (A13)-(A15), e la regola:

$$\frac{\alpha}{\forall x\alpha} \quad \text{(R4)}$$ [36]

Una stranezza di DL(Q)-DK(Q) sta nell'assumere come assioma (A10), che non è uno schema ma, in sostanza, l'assunzione di una contraddizione *determinata* di tipo (C1) – onde l'uso di una lettera enunciativa, la cui interpretazione si suppone fissata. L'intento di (A10) è garantire l'inconsistenza del mondo attuale, o la realtà di almeno una contraddizione[37]. Questa mossa è stata tuttavia criticata da alcuni paraconsistentisti[38].

I sistemi di logica rilevante dialettica si rifaranno vivi nella sezione dedicata alle applicazioni, perché Routley vi ha basato una teoria paraconsistente degli insiemi (oltre a un'ontologia meinonghiana). Più che non per la loro sistemazione assiomatica, però, le logiche dialettiche di Routley e Meyer sono importanti per la semantica sottostante e le considerazioni filosofiche che gli autori vi hanno abbinato – anzi, a detta di Routley il caso principale per questi sistemi «deriva dalle caratteristiche della semantica per logiche dialettiche rilevanti, in particolare dal modo in cui la semantica include mondi inconsistenti e incompleti»[39].

9.5
Semantiche rilevanti

La letteratura sulle semantiche per logiche della rilevanza è vastissima, e qui ne potrò fornire solo un quadro d'insieme. Proprio perché sono le più discusse e sviluppate, in queste teorie emergono più chiaramente alcune difficoltà che sembrano intrinseche a qualsiasi logica paraconsistente. Il "problema della semantica" che discuterò qui, infatti, non è meramente tecnico – ossia non è semplicemente il problema di reperire strutture rispetto a cui provare la completezza di un calcolo logico. È piuttosto una questione filosofica, ossia quella, per dirla con Pizzi, di «trovare dei modelli adeguati per un dato sistema che abbiano proprietà intuitivamente descrivibili in modo indipendente dalle risorse fornite dal linguaggio del sistema stesso»[40]. Trattando della semantica a mondi non standard di Rescher e Brandom ho già avuto occasione di parlare del dubbio sull'interpretazione intuitiva di questi mondi. Ma ora possiamo rendere il requisito in questione un po' più preciso mediante un'importante distinzione piuttosto diffusa in letteratura: quella fra semantica *pura* e *applicata*.

9.5.1. Semantica pura e applicata

Questa terminologia, per quanto ne so, è dovuta a Plantinga[41], ed è divenuta corrente per essere stata adottata in diversi testi manualistici di logica e di filosofia della logica, ad esempio quelli di Kirwan[42] e di Susan Haack. Dummett ha parlato – con il suo inimitabile stile – di *nozione meramente algebrica di conseguenza logica*, in opposizione a una *nozione semantica di conseguenza logica propriamente detta*: «Le nozioni semantiche sono strutturate in termini di concetti che sono assunti come direttamente correlati all'uso che degli enunciati si fa in un linguaggio [...]. È per questa ragione che la definizione semantica della valutazione di una formula [...] è intesa come tale da fornire i significati delle costanti logiche. Le corrispondenti nozioni algebriche definiscono una valutazione come un oggetto puramente matematico che non ha una connessione intrinseca con l'uso degli enunciati»[43].

La storia della semantica per la logica intuizionistica fornisce un buon esempio della differenza. Infatti, si può dire che le prime semantiche fornite per l'intuizionismo, le cosiddette interpretazioni topologiche di Tarski e altri[44], fossero semantiche *pure*. Come dice ancora Dummett, esse «furono sviluppate prima che si fornisse qualsiasi connessione fra esse e i significati intesi delle costanti logiche intuizionistiche»; cosicché, anche se il calcolo intuizionistico è completo rispetto a queste strutture, «nessuno penserebbe che questo fornisca in un qualsiasi senso i significati delle costanti logiche intuizionistiche»[45].

La situazione è cambiata con lo sviluppo delle semantiche intuizionistiche di Beth[46] e soprattutto di quella a mondi possibili di Kripke[47], perché qui disponiamo di un'interpretazione intuitiva indipendente. L'idea è che i modelli a mondi intuizionistici siano strutture di situazioni conoscitive, o raffigurazioni del complesso delle nostre conoscenze, e che l'ordinamento dei mondi sia strutturato in modo da rappresentare lo sviluppo temporale del processo cognitivo. Ciò si può ottenere, dal punto di vista formale, introducendo nel modello una relazione di accessibilità o alternatività fra mondi che abbia le proprietà formali di essere riflessiva e transitiva, e assumendo che il dominio sia variabile ma con proprietà di *monotonicità*, ossia tale che se il mondo w_1 è accessibile a partire dal mondo w, il dominio di w è incluso in quello di w_1. Infine, l'ordinamento dei mondi (delle situazioni conoscitive) sarà un ordine lineare discreto.

Rispetto a strutture di questo tipo, disponiamo di prove di completezza per il calcolo intuizionistico. Tali strutture costituiscono controesempi alle leggi logiche rigettate dall'intuizionismo: paradigmaticamente, la Doppia Negazione Forte e il Terzo Escluso[48]. Quel che più conta è che questo tipo di struttura rende l'idea dell'attività mentale del matematico propria del costruttivismo intuizionistico. A ogni tempo t, il nostro soggetto conoscente dispone di un corpo di *oggetti pensati*, rappresentati dal dominio in t. L'insieme degli enunciati veri in t, allora, è semplicemente la descrizione di uno stato cognitivo del soggetto. Che la relazione di accessibilità sia un preordine, e che la struttura sia a domini monotoni, significa che nulla di ciò che è stato acquisito nel processo di conoscenza viene "dimenticato", o perduto, il che psicologicamente significherebbe che il soggetto ha memoria perfetta (è dunque un individuo fortemente idealizzato)[49].

Siamo così passati da una semantica pura a una applicata. Secondo molti autori, finché non si effettua questo passaggio non si può dire che *alcun* significato sia stato assegnato ai simboli logici di un linguaggio[50]. A detta di B. J. Copeland qualsiasi semantica logica segue queste due fasi di sviluppo: la prima fase è la mera costruzione dell'apparato formale; la seconda è l'interpretazione del formalismo mediante nozioni fondate sull'*uso* linguistico. E ciò esige «una spiegazione della *natura degli oggetti* che costituiscono il rango della funzione [di interpretazione], di ogni indice che occorre nel dominio della funzione, di ogni operazione e relazione su questi indici, e così via»[51].

Mi sono soffermato sulla distinzione fra semantica pura e applicata perché è di capitale importanza per valutare il programma rilevantista. Negli anni Ottanta, Copeland riteneva (e non era il solo) che le semantiche per logiche della rilevanza *non* raggiungessero il livello di semantiche applicate; sicché il problema di fornirne una lettura intuitiva, e di interesse non meramente tecnico, rimaneva aperto. Ciò oggi non è più del tutto esatto; diversi autori hanno fornito infatti interpretazioni intuitive piuttosto convincenti per tali semantiche. Ma proprio *queste* letture, come vedremo fra poco, ci danno un'idea dei limiti entro cui un calcolo logico che ammetta contraddizioni può trovare un modello vero e proprio, o un *mondo*, reale o possibile, che lo soddisfi.

9.5.2. L'American Plan

Abbiamo sia semantiche algebriche che a mondi impossibili per logiche della rilevanza. Una semantica molto semplice è stata fornita per il frammento di primo grado del calcolo dell'implicitazione, E_{FDE}. Basta assumere come valori $P(\{1, 0\})$, ossia l'insieme potenza dell'insieme classico: $\{\{1\}, \{0\}, \{1, 0\}, \varnothing\}$. La strategia è la stessa di quella vista per la LP di Priest, con la differenza che qui si mantiene anche l'insieme vuoto – abbiamo dunque una semantica vero-funzionale quadrivalente che ammette anche *gaps*, oltre che *gluts*. Naturalmente, l'interpretazione intuitiva dei valori è che siano: (solo) vero, (solo) falso, vero e falso, né vero né falso. Le clausole sono uguali a quelle di LP:

(S¬1) $1 \in v(\neg\alpha) \Leftrightarrow 0 \in v(\alpha)$

(S¬2) $0 \in v(\neg\alpha) \Leftrightarrow 1 \in v(\alpha)$

(S∧1) $1 \in v(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow 1 \in v(\alpha)$ e $1 \in v(\beta)$

(S∧2) $0 \in v(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow 0 \in v(\alpha)$ o $0 \in v(\beta)$

(S∨1) $1 \in v(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow 1 \in v(\alpha)$ o $1 \in v(\beta)$

(S∨2) $0 \in v(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow 0 \in v(\alpha)$ e $0 \in v(\beta)$[52]

E_{FDE} è completo e decidibile rispetto a questa semantica. In particolare, la negazione manda enunciati veri e falsi in enunciati veri e falsi, ed enunciati né veri né falsi in enunciati né veri né falsi (*glut in-glut out*, *gap in-gap out*)[53]:

α	$\neg\alpha$
1	0
0	1
1,0	1,0
$\varnothing$	$\varnothing$

Questo genere di approccio è dovuto a Dunn (1976) e Belnap (1977), ed è etichettato come "American Plan" perché è stato sviluppato soprattutto dai rilevantisti americani. In questa prospettiva, come in LP, lo Scoto è refutato dando a β un valore non designato (nel caso, {0} o $\varnothing$), e ad α (e quindi, a $\neg\alpha$, e a $\alpha \wedge \neg\alpha$) il valore (designato) {1, 0}: le contraddizioni possono essere sia vere che false, anche se mai (solo) vere.

9.5.3. L'Australian Plan e i suoi mondi impossibili

Filosoficamente più significativa, e molto più discussa, è la prospettiva a mondi impossibili presentata da Routley e Meyer e sviluppata da diversi rilevantisti soprattutto dell'area australiana (perciò quest'approccio è stato etichettato come "Australian Plan"). La teoria fornisce una semantica molto flessibile che funziona non solo per i frammenti di primo grado, ma per diverse logiche della rilevanza dispiegate (ossia con implicazioni annidate)[54]. Viene presentata in versioni leggermente diversificate[55], ma quasi sempre si suggerisce che sia una estensione, sia pur molto particolare, della normale semantica a mondi possibili. Per i nostri scopi, adotterò la seguente caratterizzazione. Una *struttura a mondi impossibili di Routley e Meyer* è una quintupla <K, O, *o*, *, *R*>, così intesa: K è un insieme di mondi; O è un sottoinsieme di K, costituito dai mondi *normali*, ossia in cui tutti i teoremi della logica valgono; *o* è un elemento di O, che rappresenta il mondo reale; * è un'operazione monadica, detta di *sdoppiamento*, o *involuzione*, definita su K; *R* è una relazione di accessibilità a tre posti definita su K. La parte interessante e controversa è costituita proprio dalla lettura intuitiva di * e *R*, che sono adoperate per la semantica della negazione e del condizionale. Cominciamo con il condizionale.

Normalmente le semantiche per logiche modali usano una relazione binaria di accessibilità e, com'è noto, otteniamo modelli per diversi sistemi modali secondo le diverse proprietà formali accordate a questa relazione. Ora, una tipica clausola semantica per un'implicazione stretta è qualcosa come:

$$(\mathrm{S}\prec) \qquad V_w(\ulcorner \alpha \prec \beta \urcorner) \Leftrightarrow \forall w_1(R(w, w_1) \Rightarrow (V_{w1}(\ulcorner \alpha \urcorner) \Rightarrow V_{w1}(\ulcorner \beta \urcorner))),$$

ossia: $\alpha \prec \beta$ è vera in un mondo w, se e solo se in tutti i mondi w_1 accessibili da w in cui è vera α, è vera β. Una simile clausola però non può funzionare per un'implicazione rilevante: rende $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)$ una verità logica, mentre questa è una fallacia della rilevanza, non rispettando (VSP)[56]. Dunque, *in generale* una semantica a mondi (im)possibili per logiche rilevanti non può funzionare con una relazione binaria di accessibilità fra mondi (anche se è possibile reintrodurvi una relazione binaria limitata, come vedremo fra poco). Invece, si può introdurre la seguente clausola, che adopera la relazione ternaria del modello Routley-Meyer:

$$(\mathrm{S}\rightarrow) \qquad V_w(\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner) \Leftrightarrow \forall w_1 w_2\, (R(w, w_1, w_2) \text{ e } V_{w1}(\ulcorner \alpha \urcorner) \Rightarrow V_{w2}(\ulcorner \beta \urcorner))^{57}.$$

Questa clausola non convalida $\alpha \to (\beta \to \beta)$. Mediante la relazione ternaria si possono edificare strutture che fanno da modello per le diverse logiche della rilevanza, in modo analogo a quanto accade nella normale logica modale: a partire dal sistema di base B, otteniamo modelli per sistemi più forti come T, R e E aggiungendo condizioni formali su R[58]. Ma come *leggiamo* la clausola (S→), e specificamente cose del tipo di "$R(w, w_1, w_2)$"? Ecco un paio di suggerimenti: «Nell'interpretare *Rxyz* forse la lettura migliore consiste nel dire che la combinazione di elementi di informazione x e y (non necessariamente l'unione) è un elemento d'informazione in z [...]. In questa lettura, *Rxyz* può considerarsi come se dicesse che x e y sono compatibili secondo z, o qualcosa del genere»[59]; «Un'implicitazione $[\alpha \to \beta]$ è vera in un mondo se questo mondo vede una accessibilità fra *due altri mondi* tale che se $[\alpha]$ è vero nel primo di questi mondi $[\beta]$ è vero nell'altro»[60].

È possibile recuperare mediante R una relazione binaria di accessibilità (sia $\angle$) fra mondi:

$$(\mathrm{Df}\ \angle) \quad w \angle w_1 =_{df} \exists w_2 (w_2 \in \mathrm{O} \text{ e } R(w_2, w, w_1)),$$

ossia, due mondi sono accessibili binariamente se «un mondo *normale* "vede" l'accessibilità»[61] fra essi.

9.5.4. La stella di Routley

Prima di discutere la plausibilità di tutto ciò, consideriamo ora la famosa (e famigerata) *Routley star*, ossia l'operazione di involuzione o sdoppiamento che serve per la semantica della negazione. Qui tocchiamo davvero il punto decisivo per il problema che ci sta a cuore, ossia il problema della violazione del (PNC) che, come sappiamo, è connesso alla semantica della negazione più che a quella di ogni altro connettivo. Dato un mondo w, lo sdoppiamento consente la posizione di un mondo w^*. Ora, la clausola per la negazione (talvolta Routley e Meyer la chiamano provocatoriamente "negaziome")[62] è:

$$(\mathrm{S}\neg) \qquad V_w(\ulcorner \neg\alpha \urcorner) \Leftrightarrow \text{Non } V_{w^*}(\ulcorner \alpha \urcorner).$$

La condizione di esclusione per il connettivo della negazione classica, conforme a (Neg2), dice, come sappiamo, che $\neg\alpha$ è vera (in w) se e solo se α non è vera (in w, ossia in quello stesso mondo). Invece, la "negaziome" di Routley e Meyer è caratterizzata dicendo che $\neg\alpha$ è vera in w se e solo se α non è vera in w^*[63]. In questo senso, si tratta di un connettivo "intensionale": per valutare un enunciato negato in w occorre andare a vedere come stanno le cose in w^*.

Anzitutto, questa costruzione rende disponibile un chiaro controesempio alla Legge di Scoto: basta considerare il caso in cui α è vera in w, β non è vera in w e α non è vera in w^*: allora, α e $\neg\alpha$ sono entrambe vere in w mentre β non lo è – e l'esplosione è disinnescata. Si noti che lo è senza ammettere (a differenza di quanto avveniva in LP e nella semantica quadrivalente di Belnap e Dunn) un *glut* nei valori di verità, ossia enunciati insieme veri e falsi: la semantica in questione è intensionale, ma bivalente. Inoltre con un po' di condizioni aggiuntive possiamo validare i vari teoremi delle logiche della rilevanza, e soprattutto far sì che la negazione rilevante, o "negaziome", abbia certe proprietà inferenziali intuitive: proprietà tali da farla considerare una vera negazione, e non un trucco come quella dacostiana. Ad esempio, la seguente clausola su R e *:

$$R(w, w_1, w_2) \Rightarrow R(w, w_2^*, w_1^*),$$

serve a validare la Contrapposizione, mentre l'assunto che l'operazione di sdoppiamento sia di periodo due, ossia:

$$w^{**} = w,$$

serve a validare la Doppia Negazione Forte[64]. Nell'ambito rilevantista è invalso l'uso di chiamare la "negaziome" caratterizzata da questa semantica *negazione di De Morgan*; ciò è dovuto al fatto che per essa valgono anche le leggi di De Morgan. Dunque, questo connettivo ha praticamente *tutte* le proprietà inferenziali della negazione standard, tranne ovviamente quella di essere esplosiva: sembra quindi che soddisfi appieno la Condizione di Danno Minimo.

Ma che tipo di mondo è w^* rispetto a w? Ecco qualche aiuto reperibile in letteratura: «L'operazione * è un'operazione di sdoppiamento che manda una situazione nella sua inversa e quindi l'incompletezza in una situazione nell'inconsistenza, e l'inconsistenza in una situazione nell'incompletezza, ossia, il rovescio di una situazione $[w]$ dove valgono sia A che ~A è una situazione $[w^*]$ dove non valgono né A né ~A»[65]. «Un modo di pensare a $[w]$ e $[w^*]$ è vederli come "immagini specchiate" l'uno dell'altro, che si rovesciano "dentro" e "fuori". Dove uno è inconsistente (contenendo sia A che ¬A), l'altro è incompleto (mancando sia di A che di ¬A) e viceversa (quando $[w] = [w^*]$, $[w]$ è sia consistente che completo e abbiamo una situazione adeguata alla logica classica)»[66].

9.6 Ultralogica

Un uso di questa semantica cui si può qui accennare è quello fattone da John Heintz, che ha adoperato la logica dialettica di Routley e Meyer per costruire una teoria degli oggetti fittizi, come quelli delle narrazioni e dei romanzi[67]. L'idea, già al centro del monumentale recupero dell'ontologia meinonghiana attuato da Routley in *Exploring Meinong's Jungle and Beyond*[68], è che le condizioni di verità per enunciati romanzeschi siano stabilite *stipulativamente*, dal *fiat* dell'autore. È naturale che i casi di inconsistenza qui abbondino, sicché Heintz raccomanda l'uso di una semantica Routley-Meyer che può ammettere indefinite contraddizioni senza trivialità. Egli simpatizza anche, d'altra parte, con la tesi degli autori per cui la consistenza non è accertabile in linea di principio neppure per il mondo *reale*. Vediamo di che si tratta.

Secondo Routley e Meyer una logica paraconsistente per cui valga la loro semantica *include* propriamente in sé la logica classica come suo caso particolare. Ciò non è inteso nel senso formale tradizionale (secondo cui un sistema ne estende un altro, se include tutti i teoremi di questo e dimostra qualcosa in più), bensì in un senso analogo a quello in cui, ad esempio, si dice che la fisica relativistica include la fisica newtoniana come sua approssimazione, valida per velocità molto piccole rispetto a quella della luce (un'analogia cara anche a Priest, come abbiamo visto nel capitolo precedente). Sennonché qui non si tratta di velocità, ma di contraddizione: una logica basata sulla semantica a mondi impossibili può trattare il caso in cui vi sono «contraddizioni reali», ossia in cui «a ogni tempo dato può sussistere una contraddizione»[69]. Dunque si estende oltre la logica classica perché, tenendo conto di una eventuale contraddittorietà (parziale) del mondo, tratta delle realtà contraddittorie di cui questa non può dar conto.

Ciò che la semantica ordinaria fa è semplicemente *assumere* che, per ogni w, $w = w^*$, ossia che tutti i mondi siano consistenti e completi. La richiesta che un mondo sia inevitabilmente associato a un insieme consistente massimale di enunciati è fatta passare dalla logica standard nella semantica della negazione, richiedendo questa, per l'appunto, che esattamente uno fra α e $\neg\alpha$ sia vero in un mondo w. L'adozione di questo "principio di negazione classico", affermano Routley e Meyer, è incorporata nel (PNC), com'è formulato ad esempio nel *De interpretatione* aristotelico:

> Ma ciò implica (e di fatto è equivalente a) l'assunzione che $o[*] = o$ [ossia che il mondo reale sia consistente], e quindi presuppone ciò che è appunto in discussione. Perché il principio classico di negazione è precisamente ciò che la logica dialettica rifiuta. [...] [Assumere il "principio di negazione classico"] è tentare in modo del tutto illegittimo di attribuire al significato stesso della negazione quella che è una condizione di possibilità che si impone ai mondi, un'assunzione di completezza e noncontraddittorietà. La condizione è troppo forte, e nessuna negazione propria del linguaggio naturale può soddisfarla[70].

La "negaziome" o negazione di De Morgan si comporta esattamente come la negazione classica nei mondi consistenti. Dunque, hanno asserito i Routley, «poiché la sua condotta diverge da quella della negazione classica solo su una classe di situazioni non ammesse dalla logica modale [ordinaria], non è tanto la negazione introdotta dalla nostra nuova regola [S¬] a essere differente, quanto la classe di situazioni che la regola ci autorizza a considerare»[71]. Come si vede, la difesa contro l'accusa quineana del *change of subject* per la negazione è analoga a quella condotta nelle logiche non aggiuntive per la congiunzione (ad esempio da Varzi): non abbiamo sostituito sottobanco una nozione con un'altra! Piuttosto, abbiamo ampliato il modo standard (e restrittivo) di intendere la nozione di *situazione*, o di *mondo*. Sicché la tesi che difende la negazione classica quale l'Unica Vera Negazione ci suona come un altro "argomento della lettera maiuscola".

Per queste ragioni, Routley ha presentato la sua logica rilevante DKQ come un'«ultralogica»[72] perfettamente in grado di effettuare la *classical recapture*. In particolare, una logica dialettica-paraconsistente, assumendo la «contraddittorietà semplice» (ossia parziale, non assoluta) del mondo, sarebbe più razionale della posizione classica se si dovesse verificare che la questione dell'incontraddittorietà del mondo non può essere definitivamente decisa. Ebbene l'incontraddittorietà dell'intero è, secondo Routley e Meyer, proprio un problema, e un problema indecidibile[73].

Non è in questione ciò che gli autori chiamano «non-contraddittorietà assoluta» del mondo: ossia la tesi che vi sono oggetti e/o stati di cose *in*contraddittori. Questa infatti «può essere verificata empiricamente»: posso accertare che l'enunciato α (sia: "Routley è nella stanza di Belnap nell'università di Pittsburgh il 2 maggio 1974") è empiricamente falso, e allora saprò che il mondo è incontraddittorio rispetto ad α. Ma l'affermazione della «non-contraddittorietà [semplice] del mondo», l'affermazione che l'assurdo non esiste, è ben altra cosa. Essa «non è, a quanto pare, empiricamente decidibile», perché «le tesi universali possono essere falsificate in linea di principio da un solo controesempio». Se trovassimo una contraddizione profondamente nascosta in qualche teoria matematica essenziale, il classicista sarebbe rovinato. Dunque, sappiamo per certo che il mondo è incontraddittorio *localmente* – anzi, dicono gli autori, «per la maggior parte delle regioni in cui lavoriamo, così come è localmente euclideo». Guardando all'intero, però, si deve dire che «la credenza nella non-contraddittorietà [semplice] del mondo è un puro atto di fede»[74].

9.7
Problemi rilevanti

Cominciamo ora col sottolineare qualche *inconveniens* della logica della rilevanza. Anzitutto, si è spesso sostenuto che gli accorgimenti sintattici dei rilevantisti per evitare i paradossi dell'implicazione materiale sono fortemente *ad hoc*. Non esiste alcuna giustificazione indipendente per l'abbandono rilevantista di vari principi essenziali della logica standard, o per l'introduzione di restrizioni alle normali operazioni di sostituzione e/o esemplificazione su formule, se non che… Dalla loro ammissione seguono varie forme di "irrilevanza"[75].

Un altro problema piuttosto serio dei sistemi della rilevanza è che sono quasi tutti *indecidibili* già al livello enunciativo. Questa è una stranezza peculiare dell'approccio: fin dagli anni Sessanta sono stati forniti, infatti, risultati di decidibilità (peraltro molto complicati) per frammenti di logiche rilevanti (ad esempio i frammenti implicativi di R e di E, e quelli implicativi-congiuntivi e implicativi-negativi), e anche per i sistemi di primo grado R_{FDE} ed E_{FDE}[76]. Ma fra il 1982 e il 1985 Alasdair Urquhart ha provato che i sistemi completi T, R ed E sono tutti indecidibili[77]. Questo fatto non sminuirà forse l'interesse dei logici matematici verso questi sistemi, ma certamente li rende piuttosto inattendibili dal punto di vista filosofico.

9.7.1. Asserzioni forti e deboli

I problemi più rilevanti per la rilevanza si situano però, come anticipato, al livello dell'interpretazione intuitiva della semantica. Molti autori hanno sostenuto infatti che, in base alla distinzione introdotta sopra, le semantiche rilevanti rimangono semantiche *pure*, non applicate. Soprattutto le versioni algebriche sono state accusate di essere «sintassi sotto mentite spoglie», perché «gli operatori definiti nell'algebra sembrano ricevere un senso solo per il rapporto di specularità che hanno con i connettivi presenti nella sintassi del calcolo»[78]. Individuare una "semantica" per un calcolo, nel senso di un qualche tipo di modello rispetto a cui provare la completezza di un sistema, non è troppo difficile se ci si affida a strutture algebriche coniate *ad hoc* rispecchiando i simboli del calcolo[79]. Come ha detto van Benthem nella sua discussione della prospettiva rilevantista, «non c'è fine alla creatività sintattica»[80], ma il vero problema è se il calcolo proposto ha un'interessante interpretazione semantica.

Qualcosa del genere avviene anche nella semantica a mondi impossibili di Routley e Meyer, che è stata criticata ancora da van Benthem, da Timothy Smiley e da Copeland. L'aspetto allettante della teoria Routley-Meyer è dovuto al fatto che sembra uno sviluppo della semantica a mondi possibili di Kripke, e ciò probabilmente le ha consentito di giovarsi della rispettabilità di quest'ultima. Ma la relazione R a tre posti del modello non somiglia affatto alla relazione di accessibilità fra mondi codificata da Kripke, Hintikka ecc., e proprio per la ragione che questa (almeno, per la maggior parte dei logici) ha un senso intuitivo indipendente rispetto agli assiomi delle varie logiche modali, mentre quella no[81]. La stessa mancanza di caratterizzazione indipendente sembra affliggere anche l'operazione monadica di sdoppiamento *, che semantizza la "negaziome"[82]. Di conseguenza, non è per nulla chiaro quale sia il significato "inteso" assegnato ai simboli logici da questo genere di struttura.

In realtà, Routley e Meyer hanno tentato di fornire una spiegazione di * in termini di *asserzione*, distinguendo fra asserzione *forte* e *debole* di un enunciato. L'asserzione debole di α sarebbe l'omissione dell'asserzione della sua negazione, e ciò che è debolmente asserito in w^* è precisamente ciò che è (fortemente) asserito in w. E anche in questo senso la "negaziome" ricomprenderebbe in sé la negazione classica: «in circostanze normali, quando noi affermiamo esattamente ciò che non neghiamo, $[w]$ e $[w^*]$ coincidono, e in questo caso il trattamento della negazione si riduce a quello usuale»[83].

Copeland e altri hanno trovato la distinzione semplicemente incomprensibile. Anzitutto, la tesi in base a cui una logica dialettica-rilevante estende la logica classica perché contempla sia il caso classico (ossia $w = w^*$) per il quale la "negaziome" si comporta esattamente come la negazione standard, sia il caso di situazioni inconsistenti, sembra gratuita. Per comprendere il significato assegnato da una struttura semantica a un connettivo dovremmo guardare al suo comportamento in *tutti* i mondi del modello, non solamente in un loro sottoinsieme. Ma soprattutto, il problema a questo punto è che a sua volta la nozione di asserzione o affermazione debole sembra essere stata introdotta *ad hoc*, e non si capisce che connessione possa avere con la nostra normale idea di asserzione: «Esattamente in che senso di “afferma” si potrebbe dire che un bambino ha affermato [debolmente] il Principio di Indeterminazione di Heisenberg semplicemente perché ha omesso di asserire la negazione del Principio? Il discorso sull’affermazione forte e debole rimane mero gergo finché non si spiega come queste supposte attività si intersecano con la restante rete di transazioni comportamentali e psicologiche fra umani ed enunciati»[84].

In mancanza di ulteriori spiegazioni sulla natura di w^*, l’operazione di involuzione o sdoppiamento ha dunque l’apparenza di un trucco formale. Anche le condizioni su * introdotte sopra (come ad esempio che sia di periodo due ecc.), sono totalmente *ad hoc*, nel senso che la loro unica funzione è quella di soddisfare i lemmi che danno alla negazione le proprietà inferenziali desiderate: ma «se l’unica costrizione su * è che la teoria risultante dovrebbe convalidare il giusto insieme di enunciati, allora siamo in realtà di fronte a un modello meramente formale»[85].

La conclusione della prima disamina critica dell’approccio rilevantista alla paraconsistenza è stata quindi piuttosto negativa. Anche se è tecnicamente perseguibile, l’importanza filosofica della strategia è inficiata dalla mancanza di una spiegazione soddisfacente della semantica formale: «nella fase attuale – ha affermato van Benthem – il senso in cui le contraddizioni possono essere dichiarate “vere” rimane puramente formale»[86].

9.7.2. Flussi di informazione

Oggi la situazione per la logica della rilevanza è un po’ cambiata rispetto agli anni in cui scrivevano van Benthem e Copeland, nel senso che sono state fornite interpretazioni intuitive piuttosto convincenti delle strutture a mondi impossibili. Se però ci chiediamo di che genere di interpretazioni si tratti, ci ritroviamo in una situazione analoga a quella già investigata nel caso dei mondi non standard di Rescher e Brandom. Come si ricorderà, le strutture non aggiuntive hanno effettivamente un’interpretazione plausibile, ma solo in quanto sono viste come strutture di *teorie*, stati cognitivi, database, sistemi di credenze, e così via. Di conseguenza, l’ammissione che in questi mondi si realizzino violazioni del (PNC) in senso ontologico sarebbe una fallacia verbalista: la fallacia che consiste nell’attribuire al mondo le caratteristiche (specificamente, l’inconsistenza) delle nostre rappresentazioni del mondo. Questo, a meno di assumere una prospettiva idealistica in cui il nostro mondo *coincide* con le nostre teorie, o i nostri schemi concettuali ecc., facendo collassare la distinzione fra *ordo cognoscendi* e *ordo essendi*.

Ora, anche le interpretazioni plausibili delle semantiche per la logica della rilevanza sembrano avvalorare questo genere di osservazioni. La cosa è piuttosto evidente per l’American Plan, per la struttura quadrivalente sviluppata da Belnap e Dunn, la quale era stata intesa fin dall’inizio dagli autori come avente una lettura strettamente *epistemica*. A detta di Dunn quello che la semantica quadrivalente cerca di rappresentare è il fatto che «si possono avere assunzioni, informazioni, credenze ecc., inconsistenti e/o incomplete», e «tutto questo discorso su qualcosa che è sia vero che falso o nessuno dei due dev'essere inteso epistemologicamente e non ontologicamente»[87].

Ma una situazione simile ha luogo anche per l'Australian Plan. Negli ultimi anni, diversi autori dell'area paraconsistente hanno elaborato una lettura plausibile della semantica Routley-Meyer per negazione di De Morgan e implicazione rilevante, in termini di *flusso di informazione*, all'interno del quadro delle cosiddette semantiche situazionali[88]. Detto molto informalmente, l'idea è quella di spiegare come dovrebbero funzionare circuiti o canali in cui transitano informazioni e dati. Dice Bremer:

> L'informazione fluisce in *sistemi distributivi* (come un circuito che connette un interruttore con una lampadina). Questi sistemi possono essere considerati come *canali* lungo i quali ragioniamo. Le leggi e regole operative in un tale sistema sono *costrizioni* che definiscono un sistema che funziona in modo appropriato e consentono di ragionare in base a queste restrizioni [...]. Nel linguaggio della semantica situazionale possiamo dire che l'informazione in una *situazione* è derivata da un'altra situazione attraverso qualche canale. I blocchi di base dell'informazione sono gli *infoni*, che somigliano a proposizioni russelliane[89].

In particolare, è possibile avere una caratterizzazione intuitiva della *Routley star*, la cui interpretazione, come abbiamo visto, costituisce il punto più spinoso nella questione dell'ammissione di contraddizioni. Questa caratterizzazione è stata difesa in modo abbastanza convincente da Greg Restall, in particolare in Restall (1999) – un saggio dal sottotitolo significativo: *Come ho smesso di preoccuparmi e ho imparato ad amare la stella di Routley*.

Due elementi di informazione o infoni, sostiene Restall, possono essere fra loro compatibili o incompatibili, e indurre una certa compatibilità o incompatibilità parziale nei mondi che li contengono. Possiamo allora introdurre una relazione binaria di compatibilità C fra mondi, ossia fra insiemi di infoni, e definire mediante questa la negazione:

$$(\mathrm{S}\neg) \qquad V_w(\ulcorner\neg\alpha\urcorner) \Leftrightarrow \forall w_1(C(w, w_1) \Rightarrow \text{Non } V_{w1}(\ulcorner\alpha\urcorner)),$$

ossia, $\neg\alpha$ sarà vero in w se e solo se α non è vero in tutti i mondi compatibili. L'insieme di mondi compatibili con w rappresenta tutto ciò che non è escluso da ciò che è vero in w. In questo contesto, il famoso gemello rovesciato w^* di Routley non è altro che il mondo *massimale* compatibile con w, ossia il più informativo, o comprensivo, dei mondi w_1 per cui vale $C(w, w_1)$[90]. Perciò «la stella di Routley è una semplificazione della nostra clausola di compatibilità per la negazione»[91].

9.7.3. Ma in che mondo vivi?, II

Supponiamo che l'immagine del flusso di informazione sia sufficientemente trasparente[92]. Naturalmente, il problema di una lettura dei mondi in termini di "infoni" ora è: che cos'è mai un infone? Se i mondi sono insiemi di infoni, e un infone è un'informazione *su* qualcosa, i mondi sono insiemi di *informazioni*. In tal caso, certamente i mondi impossibili hanno tutto il diritto di non essere consistenti né massimali, essendo fuori discussione che le nostre teorie, informazioni e credenze sul mondo possano essere inconsistenti e incomplete. Ma, per l'appunto, si tratta di informazioni, teorie, credenze, *sul* mondo, ossia di *rappresentazioni*.

In effetti, spesso i lavori di Routley e Meyer sono oscillanti su questo punto. Nell'articolo dei Routley i mondi sono introdotti come *set-ups*, e caratterizzati del tutto sintatticamente come insiemi di *enunciati*[93]; mentre in quello di Routley e Meyer i *set-ups* diventano ciò che è *descritto da* un insieme di enunciati[94]. Questo genere di slittamento ha portato con sé l'imputazione di fallacia verbalista, avanzata ad esempio da John Woods: «Questa è retorica dialettica *par excellence*. Ci porta dall'inconsistenza doxastica a quella ontica, ossia, dal fatto che le credenze sono a volte inconsistenti alla possibilità che credenze inconsistenti siano a volte vere, e quindi alla possibilità che a volte oggetti o stati di cose siano inconsistenti»[95].

Ma nella versione di Restall è del tutto chiaro che i "mondi" sono database, che devono essere *confrontati* col mondo, e che se sono inconsistenti *non* possono corrispondervi[96]. Stranamente, era stato proprio il critico della rilevanza Copeland a fornire l'idea di una simile caratterizzazione intuitiva per i mondi impossibili. Abbiamo già visto in che senso, secondo Copeland, per cogliere il significato attribuito ai connettivi da una semantica occorre possedere una caratterizzazione indipendente della struttura ontologica che funge da modello del calcolo. Ma ciò non basta ancora: la parte essenziale dell'apparato semantico sta nel rappresentare una proprietà Φ, tale che comprendere le condizioni sotto cui un enunciato contenente uno dei connettivi possiede la proprietà Φ è sufficiente a capire cosa significa quel connettivo. Dunque, passiamo da una semantica pura a una applicata quando possiamo interpretare le clausole ricorsive «come un'espressione delle condizioni necessarie e sufficienti per il possesso, da parte di enunciati della forma rilevante, di una proprietà Φ antecedentemente intesa»[97]. Il caso per eccellenza di proprietà semantica Φ, naturalmente, è la proprietà di essere *vero*. Se sappiamo prima cosa vuol dire "vero", questo ci fa capire cosa significa il connettivo della congiunzione, mediante la clausola: "$\alpha \wedge \beta$ è vero se e solo se…", in cui si specifica la condizione necessaria e sufficiente per cui un enunciato che contiene quel connettivo possiede quella proprietà. Ma stante che i mondi di Routley e Meyer sono caratterizzati come «insiemi di enunciati […] che possono rappresentare le credenze di un dato individuo, o una collezione di ipotesi», e così via; allora, ha osservato Copeland, la proprietà di essere vero in un mondo w in realtà dice che «l'enunciato è un *membro dell'*insieme di enunciati [w], il quale insieme rappresenta le credenze di un dato individuo, o una certa teoria fisica o matematica». E naturalmente, appartenenza e non-appartenenza a un insieme di credenze o a una teoria sono nozioni diverse da verità e falsità, visto che il predicato «appartenente alla teoria…» non soddisfa in alcun modo il T-schema[98].

In questo senso, come ha rilevato David Lewis, la logica della rilevanza appare essere una "logica dell'equivoco". Anche se l'idea che un *corpus* di informazioni o uno stato cognitivo possa contenere inconsistenze senza che ciò banalizzi il sistema è condivisibile (abbiamo già visto in proposito il trattamento a frammentazione proposto dallo stesso Lewis), la strategia standard per affrontare il problema è semplicemente quella, parametrica, di distinguere i rispetti. Un enunciato che può essere sia vero che falso non viene interpretato *de re*, come se descrivesse una situazione contraddittoria *in rerum natura*, bensì *de dicto*, come un enunciato ambiguo, vero in alcuni disambiguamenti e falso in altri. Ciò richiede la risoluzione dell'ambiguità precedente alla formalizzazione. A chi serve allora una logica dell'equivoco?

Rispondo: ai pessimisti. Noi addestriamo gli studenti di logica a far attenzione agli equivoci. Non è concesso, ad esempio, accettare la premessa $A \vee B$ perché è vera in un disambiguamento di A, accettare la premessa $\neg A$ perché è vera in un altro disambiguamento di A, e poi trarre la conclusione B. Dopotutto, B potrebbe essere falsa in modo non ambiguo. Il rimedio raccomandato è assicurarsi che tutto venga pienamente disambiguato prima che uno applichi i metodi della logica. Il pessimista potrebbe ben lamentare che questo rimedio è un suggerimento di perfezione, inattingibile in pratica. [...] L'ambiguità è ovunque. Non disponiamo di alcun linguaggio non ambiguo da usare per disambiguare il linguaggio ambiguo. Perciò non disambiguiamo mai, o quasi mai, pienamente qualcosa. Non possiamo quindi sfuggire alle fallacie dell'equivocazione disambiguando tutto. Sfuggiamo loro, piuttosto, indebolendo la nostra logica cosicché tolleri le ambiguità; e possiamo farlo, a quanto pare, adottando alcune delle restrizioni dei rilevantisti[99].

9.7.4. Paraconsistenza e idealismo

Anche la lettura intuitiva più plausibile della semantica Routley-Meyer, dunque, sembra suggerire che valga per la logica della rilevanza ciò che vale per le logiche non aggiuntive: questi sistemi paraconsistenti sono del tutto legittimi (e anzi, molto utili) per trattare e gestire inconsistenze nel nostro bagaglio cognitivo. Se, come ha detto Woods, «l'inconsistenza non è una *rara avis*, non è la defezione dalla rettitudine logica in un'occasionale teoria astratta», ma al contrario «ci insegue regolarmente nella gestione delle nostre credenze, la manipolazione dei nostri ricordi, e l'organizzazione dei nostri desideri»[100], è senz'altro utile disporre di sistemi formali con cui modellare la situazione meglio della logica classica, e che potrebbero anche avere una certa fecondità euristica. Essi però legittimano al massimo una prospettiva paraconsistente debole, non una forte, o dialeteistica, in cui il (PNC) è violato nella sua accezione ontologica. Certamente in questi sistemi si ammettono contraddizioni "vere", ma la lettura intuitiva di "vero" qui è, per l'appunto: "contenuto in una teoria". La sostituibilità di "vero" e "appartenente a una teoria" porta con sé l'equivalenza fra *mondo* e *teoria*, ossia una prospettiva antirealistica, o alla Peirce, in cui il mondo è *fatto* di teorie.

È significativo che Meyer e Martin (1986), conducendo una difesa dell'Australian Plan divenuta classica, tendano verso questa direzione. In contrasto con l'interpretazione usuale, ossia epistemica, dell'American Plan di Belnap e Dunn, essi insistono sul carattere "ontico" della violazione del (PNC) ammessa nella prospettiva a mondi impossibili[101]. Ma nello stesso tempo, descrivono una situazione in cui il (PNC) viene violato come una in cui «una teoria data può insieme asserire e negare *A*», e in questo caso «la cosa ovvia da dire è solo che la teoria è confusa su *A*»[102]. Come nella prospettiva di Peirce, consistenza e completezza sono un ideale regolativo, ossia ciò a cui tendono da ultimo, nel lungo periodo, le nostre teorie. A questo punto, l'obiezione è inevitabile: i rilevantisti «scambiano i mondi *w* per le corrispondenti teorie sul Lungo Periodo», e «*A* è vero in *w* significa che *A* appartiene a[lla teoria] *T*; *A* è falso in *w* significa che *A* non appartiene a *T*»; al contrario, «non sono le nostre Teorie Favorite, ma è il Mondo, a conferire Verità e Falsità agli enunciati»[103]. Ora, la risposta di Meyer e Martin consiste proprio nell'abbracciare una prospettiva idealistica, in cui «Il Mondo a cui una certa Logica è correlata tende a somigliare molto alla Logica che vi è correlata», e i nostri mondi, o modelli, «sono solo copie immaginarie delle nostre teorie preferite»[104].

Come dicevo trattando degli approcci non aggiuntivi, da buon hegeliano trovo rispettabilissima questa posizione. Il problema è che quasi tutti i dialeteisti si professano realisti e, proprio per questo, sono suscettibili di incappare nell'accusa di fallacia verbalista. E in un certo senso, la stessa distinzione fra paraconsistenza debole e forte, universalmente accettata nella comunità dei paraconsistentisti, forse è realmente fondata solo sulla base di un approccio realistico. Si potrebbe infatti congetturare che solo così c'è una vera differenza fra chi propugna una logica che non trivializzi a partire da contraddizioni nelle nostre *teorie*, e chi, come i dialeteisti, sostiene la realtà della contraddizione nel mondo.

9.8
La logica dell'implicitazione di Brady, DJ^dQ

Concluderò questo capitolo con qualche cenno intorno al sistema di logica rilevante DJ^dQ proposto da Ross Brady[105], che ci tornerà utile in seguito, quando parleremo di teorie paraconsistenti degli insiemi. Ho tenuto questo sistema per ultimo perché, pur essendo chiaramente rilevante in spirito, la sua semantica differisce da quelle più note proposte per sistemi della rilevanza (in particolare, non adopera né la relazione ternaria di accessibilità, né la *Routley star*). Quanto alla sintassi, è data dai seguenti schemi:

(A1) $\alpha \to \alpha$
(A2) $\alpha \wedge \beta \to \alpha$
(A3) $\alpha \wedge \beta \to \beta$
(A4) $(\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta \wedge \gamma)$
(A5) $\alpha \to \alpha \vee \beta$
(A6) $\beta \to \alpha \vee \beta$
(A7) $(\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$

(A8) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
(A9) $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$
(A10) $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$
(A11) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
(A12) $\forall x\alpha[x] \rightarrow \alpha[x/t]$
(A13) $\alpha[x/t] \rightarrow \exists x\alpha[x]$
(A14) $\forall x(\alpha \vee \beta[x]) \rightarrow (\alpha \vee \forall x\beta[x])$
(A15) $\forall x(\alpha \rightarrow \beta[x]) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x\beta[x])$
(A16) $\forall x(\beta[x] \rightarrow \alpha) \rightarrow (\exists x\beta[x] \rightarrow \alpha)$
(A17) $\alpha \wedge \exists x\beta[x] \rightarrow \exists x(\beta[x] \wedge \alpha)$

x non è libera in α in (A14)-(A17). Le regole sono:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha}{\beta} \quad \text{(R1)}$$

$$\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta} \quad \text{(R2)}$$

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta}{(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta)} \quad \text{(R3)}$$

$$\frac{\alpha}{\forall x\alpha} \quad \text{(R4)}$$

Ci sono anche due "meta-regole":

(MR1) Se $\alpha \Rightarrow \beta$, allora $\alpha \vee \gamma \Rightarrow \beta \vee \gamma$
(MR2) Se $\alpha \Rightarrow \beta$, allora $\exists x\alpha \Rightarrow \exists x\beta$.

DJ^dQ è una logica dalla negazione molto debole (e Brady ritiene che vi siano buone ragioni perché sia così)[106]: non valgono il Terzo Escluso né la *reductio*.

9.8.1. La semantica dei contenuti

Quanto alla semantica, l'idea fondamentale proposta da Brady è quella di sostituire alla nozione rilevantista tradizionale di implicitazione come *relazione* di contenuto, la nozione di *inclusione* analitica di contenuto: un enunciato ne implicita un altro se il contenuto del secondo è incluso in quello del primo. Il *contenuto* di un insieme x di enunciati, $C(x)$, è caratterizzato da Brady come la sua chiusura analitica, ossia l'insieme di tutti gli enunciati che «possono essere stabiliti analiticamente da quell'insieme, utilizzando le proprietà di relazioni e termini degli enunciati in x»[107]. Il contenuto di un singolo enunciato α, $C(\alpha)$, è il contenuto del suo singoletto. Il *rango* di un enunciato α, $R(\alpha)$, è dualmente l'insieme di tutti gli enunciati da cui α segue analiticamente. Gli operatori logici sono interpretati (precisazioni minori a parte) come operazioni di tipo algebrico su contenuti – il contenuto di $\alpha \wedge \beta$, $C(\alpha \wedge \beta)$, ad esempio, è $C(\alpha) \cup C(b)$ ecc. L'implicitazione quindi è così caratterizzata:

$$(S\rightarrow) \quad V(\ulcorner\alpha \rightarrow \beta\urcorner) \Leftrightarrow C(\beta) \subseteq C(\alpha)$$ [108].

La negazione non può avere il trattamento algebrico intuitivo, ossia non può essere una complementazione booleana, perché così $C(\alpha \wedge \neg\alpha)$ sarebbe la totalità dei contenuti. Ciò in base a $(S\rightarrow)$ farebbe implicare tutto a una contraddizione. Il contenuto della negazione di un enunciato viene allora inteso come l'insieme degli enunciati che non appartengono al rango di α, ossia $C(\neg\alpha) =_{df} \{\beta | \beta \notin R(\alpha)\}$; intuitivamente, è l'insieme di «tutti i fatti la cui assenza rende [α] possibile»[109]. DJ^dQ è completa rispetto alla semantica dei contenuti[110].

Il problema di tutta la costruzione, ovviamente, è come si faccia ad assegnare un contenuto a un enunciato, ossia a indicare cosa "può essere stabilito analiticamente" a partire da esso. Di solito, si catturano nozioni simili (o ciò che di esse può sopravvivere all'attacco quineano al dogma dell'analiticità) mediante postulati di significato. Ma un postulato di significato a sua volta è un enunciato implicativo: contiene tipicamente un condizionale, ossia qualcosa il cui significato dovrebbe essere dato da $(S\rightarrow)$; e ciò produce una certa circolarità[111].

Note

1. Haack, 1978, p. 155; cfr. anche p. 201.
2. Sull'analisi intensionale dei controfattuali, naturalmente, è d'obbligo il riferimento a Stalnaker (1968, 1984, cap. 7) e a Lewis (1973).
3. Cfr. Quine, 1966, pp. 226 ss.
4. Cfr. Dunn, 1986, pp. 120-1.
5. Cfr. Anderson, Belnap, 1975, p. 473.
6. Cfr. Grice, 1975.
7. Bremer, 2005, p. 37.
8. Dunn, 1986, p. 124.
9. Anzi, Anderson e Belnap (1975) sostengono che il metodo della deduzione naturale fornisce una delle maggiori motivazioni a favore della logica della rilevanza.
10. Cfr. Dunn, 1986, pp. 139 ss.
11. Ivi, p. 141.
12. Cfr. ivi, pp. 145-6; Anderson, Belnap, 1975, sez. 5.1.2 e, per una prova di (VSP), sez. 22.1.3.
13. Cfr. Dunn, 1986, pp. 133-6; Pizzi, 1987, p. 15.
14. Cfr. Routley, 1979a, p. 301.
15. Anzi, John Woods ha etichettato questo come «il Più Difficile Problema della Filosofia» (cfr. Woods, 2003, p. 14).
16. Per la cronaca, l'articolo fu poi pubblicato: è Anderson, Belnap, 1959, e la mossa degli autori è a p. 302.
17. Cfr. Anderson, 1963.
18. Cfr. Routley, Routley, 1972; Dunn, 1986, pp. 151 ss.; Read, 1988, pp. 31 ss. Le precisazioni sono, fra l'altro, che (γ) o (SD) potrebbero essere accolte come regole di inferenza *limitate*, nel senso che si assegnerebbe loro un funzionamento analogo alla regola di Necessitazione in logi-

ca modale: ad esempio, da $\alpha \vee \beta$ e $\neg\alpha$ derivare come teorema β, solo se ambo le premesse sono già teoremi del calcolo.

19. Cfr. Pizzi, 1987, p. 30.

20. Cfr. Dunn, 1986, pp. 152-3; Priest, 1989, pp. 622-3.

21. Cfr. Anderson, Belnap, 1975, sez. 25.

22. Priest, 1989, p. 622.

23. Cfr. Priest, 2001, pp. 187-8.

24. Così in Bremer, 2005, pp. 73-4; cfr. anche Pizzi, 1987, p. 31, dove però a T viene lasciato (A11).

25. Cfr. Pizzi, 1987, p. 8.

26. Cfr. Dunn, 1986, p. 129.

27. Ivi, p. 119.

28. Pizzi, 1987, p. 32.

29. Cfr. ivi, pp. 32-3.

30. Ivi, p. 26. Cfr. anche Dunn, 1986, p. 146.

31. Bremer, 2005, p. 65.

32. In effetti, Slaney (1989) ha mostrato che R incappa in una versione del paradosso di Curry anche senza l'Assorbimento.

33. Cfr. Brady, 1984. Le si chiama anche logiche rilevanti *importive*, o semplicemente deboli (cfr. Routley, 1979a, p. 306).

34. Cfr. Routley, Meyer, 1976; Routley, 1979a, 1979b, *Appendice*.

35. Routley, Meyer, 1976, pp. 332-3.

36. Cfr. Bremer, 2005, p. 142. Presentazioni leggermente divergenti si trovano in scritti diversi di Routley; ad esempio in Routley (1979a) il quantificatore esistenziale è definito, in Routley (1979b) DK non ha (A10).

37. «[$P \wedge \neg P$] è dunque una contraddizione reale, e contraddizioni reali valgono nel mondo attuale. [...] È un corollario virtuale del fatto dialettico incorporato in DKQ, che la realtà sia inconsistente, che la libertà dalla contraddizione non fornisce una condizione necessaria accettabile per la razionalità o per la credenza razionale o per l'indagine razionale» (Routley, 1979a, p. 312).

38. Ad esempio, secondo Batens «che un insieme di formule sia correttamente considerato una logica presuppone, fra le altre cose, che sia chiuso sotto sostituzione di variabili proposizionali; questo, come dicono Anderson e Belnap (1975, 462), è "ciò che ne fa una logica". Ma se questo è corretto è difficile vedere come [A10] possa essere considerato un teorema logico» (Batens, 1980, p. 223).

39. Routley, 1979a, p. 305.

40. Pizzi, 1987, p. 39.

41. Cfr. Plantinga, 1974, pp. 126 ss.

42. Cfr. Kirwan, 1978.

43. Dummett, 1973a, p. 204.

44. Cfr. van Dalen, 1986, pp. 243 ss.

45. Dummett, 1973a, p. 204.

46. Cfr. van Dalen, 1986, pp. 246 ss.

47. Cfr. Kripke, 1963a.

48. Cfr. van Dalen, 1986, pp. 254-8.

49. Come spiega Sergio Galvan in *Non contraddizione e terzo escluso*: «La verità è relativizzata alle situazioni di conoscenza, che normalmente (cioè, se non si tratta di situazioni terminali – vale a dire corrispondenti a mondi dai quali non si può accedere a mondi diversi –) sono incomplete. Ciò nonostante, mano a mano che il processo conoscitivo avanza, avviene una sorta di accumulazione della verità. Tale processo di accumulazione è espresso dalla proprietà di monotonia» (Galvan, 1997, p. 46).

50. Secondo la Haack «l'identificazione di un sistema come un sistema di logica richiede che si faccia appello alla sua interpretazione (intesa?). Per identificare un sistema come un cal-

colo enunciativo non occorre solo conoscere assiomi/regole e la loro interpretazione formale attraverso matrici; occorre sapere che i valori devono rappresentare verità e falsità [...]. La semantica pura non è sufficiente da sola; per giustificare la pretesa di un sistema formale *di essere una logica modale* (o una logica enunciativa) sembra essenziale una qualche spiegazione intuitiva della semantica formale, che connette quella costruzione insiemistica con le idee di necessità e possibilità (verità e falsità)» (Haack, 1978, pp. 30 e 189).

51. Copeland, 1986, p. 479, corsivo mio.

52. Cfr. Dunn, 1986, p. 192.

53. Cfr. ad esempio Priest, 2001, p. 144.

54. Cfr. Routley, Routley (1972), che propone una semantica per il solo R_{FDE}, ma presenta *in nuce* già gli sviluppi successivi (Routley, Meyer, 1973, 1976; Routley, 1979a).

55. Ad esempio, una variante semplificata è stata proposta in Routley e Priest (1992) per modellare il sistema rilevante di base B, ma non me ne occuperò qui.

56. Cfr. Priest, 2001, p. 197; Bremer, 2005, p. 66.

57. Cfr. Routley, Meyer, 1976, p. 335; Dunn, 1986, p. 201.

58. Cfr. ad esempio Dunn, 1986, pp. 208-9; Bremer, 2005, pp. 73-4.

59. Dunn, 1986, p. 200.

60. Bremer, 2005, p. 67.

61. *Ibid.* Cfr. anche Routley, Meyer, 1976, pp. 333-4; Routley, 1979a, p. 310.

62. Cfr. Routley, Meyer, 1976, p. 340.

63. Ivi, p. 335; Routley, 1979a, p. 311. Talvolta invece la clausola viene presentata dicendo che $\neg\alpha$ è vera in w se e solo se α è *falsa* in w^* (ad esempio in Copeland, 1979, p. 402; Restall, 1995, p. 144), ma in questo caso il divario fra falsità e non-verità è poco importante.

64. Cfr. ad esempio Routley, 1979a, p. 310; Dunn, 1986, p. 207; Restall, 1995, pp. 144-5.

65. Routley, 1979a, p. 309; cfr. anche Routley, Meyer, 1976, pp. 324-5.

66. Dunn, 1986, p. 191.

67. Cfr. Heintz, 1979.

68. Routley, 1979b.

69. Routley, Meyer, 1976, p. 326.

70. Ivi, pp. 338-40.

71. Routley, Routley, 1972, p. 338.

72. «Una logica universale, nel senso inteso, è applicabile in ogni situazione, realizzata o meno, possibile o meno. Perciò una logica universale è come una chiave universale. Che apre, se bene usata, tutte le serrature. Fornisce un canone per ragionare in ogni situazione, incluse quelle illogiche, inconsistenti e paradossali» (Routley, 1979b, p. 893).

73. Cfr. Routley, Meyer, 1976, p. 346.

74. Ivi, pp. 347-9. Cfr. anche Routley, 1979a, pp. 301-2.

75. Su questi punti ha insistito particolarmente Diaz, 1981.

76. Cfr. Pizzi, 1987, pp. 54-63.

77. Cfr. Urquhart, 1985.

78. Pizzi, 1987, p. 45. Esaminando diversi modelli algebrici usati per fornire prove di completezza per le logiche rilevanti, anche Dunn ammette che «questo genere di risultato è in effetti piuttosto triviale [...] una volta che gli assiomi della logica sono stati ritagliati in modo da avere l'aspetto dei postulati algebrici, semplicemente scritti in una notazione diversa» (Dunn, 1986, p. 187).

79. Come ha osservato Evandro Agazzi, prove di adeguatezza di un sistema formale rispetto a semantiche di questo genere diventano quantomeno sospette dal punto di vista filosofico. Infatti «non arrivano in alcun modo a garantirci l'esistenza di un dominio di individui autonomi, "ontologicamente dati", a proposito dei quali gli enunciati di un sistema [...] riescono a essere veri». Se chiediamo di spiegare quale mondo è effettivamente descritto da un tale insieme di enunciati, "ma il mondo descritto dall'insieme degli enunciati!" non è affatto una risposta (cfr. Agazzi, 1978, pp. 473-5).

80. Cfr. van Benthem, 1979, p. 340.

81. Il che è ammesso anche dai rilevantisti: cfr. Anderson, Belnap, Dunn, 1982, pp. 163-4.

82. «Di per sé questa "regola della stella" è soltanto uno stratagemma per preservare un trattamento ricorsivo dei connettivi [...] e non fa nulla per spiegare la loro tilde finché non si fornisce una spiegazione di a^*» (Smiley, 1993, pp. 17-8). E anche questo era stato riconosciuto da alcuni rilevantisti: «non dirò qui molto su quale senso intuitivo (se ve n'è uno) possa essere assegnato all'uso da parte dei Routley del [*]-operatore nella loro clausola per la valutazione della negazione. [...] L'articolo dei Routley si limita sostanzialmente a farlo sbocciare dal nulla, il che mi ha condotto in Dunn [1976] a descrivere la sostituzione di [w] con [w^*] come un "atto di prestidigitazione"» (Dunn, 1986, pp. 190-1).

83. Routley, Meyer, 1973, p. 202.

84. Copeland, 1979, p. 409.

85. Ivi, p. 411.

86. Van Benthem, 1979, p. 333; cfr. anche p. 343: «si può attribuire un interesse tecnico o filosofico alla semantica proposta? Proprio a questa domanda non si può rispondere finché gli autori non ci avranno detto molto di più sulle intuizioni che stanno dietro i loro "mondi", la "relazione di ordinamento", e soprattutto la loro "operazione di rovesciamento"».

87. Dunn, 1986, p. 193. La stessa cosa è sostenuta in Belnap (1977), dove l'idea è quella di modellare il modo in cui «un computer dovrebbe pensare», così da non derivare conseguenze pericolose da inconsistenze nel suo database.

88. Cfr. Mares, 1996; Bremer, Cohnitz, 2004; Bremer, 2005, cap. 5.

89. Bremer, 2005, pp. 69-70.

90. Cfr. Restall, 1999, pp. 62-3; Bremer, 2005, pp. 72-3.

91. Restall, 1999, p. 63.

92. Il che è messo in dubbio in Priest, 2001, p. 198.

93. Cfr. Routley, Routley, 1972, pp. 335 ss.

94. Cfr. Routley, Meyer, 1973, pp. 200-1.

95. Woods, 2003, pp. 89-90.

96. «Possiamo assumere che il contenuto di un database sia corretto (che il mondo sia come il database dice) e chiederci cos'altro possiamo dire sul mondo a partire da quest'assunzione. Consideriamo la collezione di tutti i modi in cui il mondo può essere [ossia di tutti i mondi *possibili*, consistenti], scegliamo quelli che validano tutti i fatti nel database, e le conseguenze sono le asserzioni vere in tutti quei mondi. Se non ci sono mondi in quest'insieme, allora il database è inconsistente, e il mondo non sarà (e non potrà essere) come dice il database» (Restall, 1999, pp. 69-70).

97. Copeland, 1986, p. 480.

98. Cfr. ivi, pp. 486-7.

99. Lewis, 1982, pp. 107-8.

100. Woods, 2003, p 95.

101. Cfr. Meyer, Martin, 1986, p. 319.

102. Ivi, p. 311.

103. Ivi, p. 324.

104. E quindi «la Logica Classica è *auto-fondata*, non indipendentemente fondata perché è stata riferita al Mondo. Perché il Mondo cui è stata riferita è stato fatto a sua propria immagine. Perciò non c'è davvero bisogno di mondi (o modelli, o quant'altro) per raccontare storie semantiche» (ivi, pp. 324-6).

105. Cfr. Brady, 1996, 2000.

106. Cfr. ivi, pp. 164 ss. Ci tornerò nella prossima parte del volume, accennando alla teoria delle classi impiantata da Brady su DJ^dQ.

107. Ivi, p. 161.

108. Così in Bremer, 2005, p. 76.

109. *Ibid.* Cfr. Brady, 2000, pp. 118-9.

110. Cfr. Brady, 1996, pp. 169-70.

111. Com'è stato rilevato ad esempio in Bremer, 2005, p. 76.

Parte terza
Applicazioni

“Sei lento a imparare, Winston”, disse O’Brien, con dolcezza.
“Ma come posso fare a meno...”, borbottò Winston. “Come posso fare a meno di vedere quel che ho dinanzi agli occhi? Due e due fanno quattro”.
“Qualche volta, Winston. Qualche volta fanno cinque. Qualche volta fanno tre. Qualche volta fanno quattro e cinque e tre nello stesso tempo. Devi sforzarti di più. Non è facile recuperare il senno”.

G. Orwell (1948)

10
Semantica paraconsistente

10.1
Applicazioni varie ed eventuali

Quando qualcuno sfida il più intoccabile principio nella storia della filosofia occidentale, è naturale che debba destinare molte energie all'aspetto fondazionale del suo discorso, prima di dedicarsi alle applicazioni. Una conseguenza di ciò è che il lavoro sugli usi delle logiche e semantiche paraconsistenti in alcuni campi è solo agli inizi. D'altra parte, un programma di ricerca progressivo e innovativo spesso si evolve, nelle sue prime fasi, in modo tumultuoso e rapido, sicché molti dei risultati che esporrò in questa sezione del libro fra qualche anno potrebbero suonare già superati. Non c'è qui comunque lo spazio per soffermarsi su tutte le applicazioni proposte finora. Una, ad esempio, riguarda il recupero del calcolo infinitesimale nella sua versione originaria, precedente la sua coerentizzazione in termini di analisi non standard da parte di Robinson. Secondo Priest e Routley, gli infinitesimali originali «dovevano essere oggetti genuinamente inconsistenti», stante che il calcolo doveva assumere che «un infinitesimale fosse e non fosse uguale a zero». Gli autori ne hanno quindi proposto una formalizzazione in una teoria al secondo ordine in cui le funzioni sono specificabili mediante λ-astrazione[1]. Altre applicazioni riguardano la meccanica quantistica[2], la logica deontica, quella epistemica[3], la metafisica del divenire[4], i linguaggi di programmazione e, naturalmente, la gestione dei database. Uno dei campi più intensamente studiati è la combinazione di inconsistenza e vaghezza, suggerita fin dalle origini della paraconsistenza dalle ovvie dualità fra (PNC1) e terzo escluso, (PNC2) e bivalenza ecc., che abbiamo già incontrato. Di qui vengono le nascenti semantiche subvalutazionali, come quelle di Hyde e di Achille Varzi, cui ho fatto riferimento nel capitolo dedicato agli approcci non aggiuntivi; e le semantiche paraconsistenti rilevanti per entità fittizie, favole ecc., come quella di Heintz che abbiamo intravisto nel capitolo dedicato alla logica della rilevanza.

In questa parte mi limiterò a considerare tre applicazioni filosoficamente essenziali. Anzitutto, le due corrispondenti alle due giustificazioni principali per l'ammissione di contraddizioni discusse nella prima sezione: 1. una semantica formale che modelli il linguaggio ordinario; e 2. una teoria degli insiemi con la Comprensione non ristretta che rispecchi il nostro concetto cantoriano-intuitivo di insieme. Infine, 3. nell'ultimo capitolo di questa terza parte parlerò delle aritmetiche paraconsistenti.

10.2
Desiderata

La prima motivazione essenziale a favore della paraconsistenza, e contro il (PNC), come sappiamo, viene dall'esigenza di una semantica intuitiva e universale. Vogliamo dunque una teoria formalizzata del significato che modelli un linguaggio semanticamente chiuso – un linguaggio in cui si possa parlare di tutto, senza le limitazioni espressive imposte dalle soluzioni consistenti ai paradossi semantici di cui si è detto al CAP. 2. Una semantica del genere *conterrà* questi paradossi: la corretta descrizione dell'italiano include l'idea per cui l'italiano ospita contraddizioni vere, contro (PNC2).

I *desiderata* di una semantica intuitiva contraddittoria potrebbero dunque essere formulati – seguendo Woods (2003) – come segue: 1. la teoria deve preservare tutte le nostre intuizioni radicate sulla nozione di verità – anzitutto, naturalmente, il T-schema; 2. deve essere formulata nel (in un frammento del) medesimo linguaggio per cui caratterizza il predicato di verità; 3. poiché tutto ciò produce paradossi, la logica sottostante alla teoria dev'essere una logica paraconsistente che controlli la loro diffusione, non lasciando che la teoria venga banalizzata neanche dal paradosso di Curry (quindi, dev'essere conforme anche alla Condizione Forte di Anti-trivialità)[5].

Disponendo di una tale logica, sembra che basti designare un predicato a un posto come quello di verità (o uno a due posti come quello di soddisfacimento, definendo mediante questo quello di verità); dare condizioni ricorsive di verità/soddisfacimento, formulate nel medesimo linguaggio per cui si definisce la nozione di verità/soddisfacimento; e mostrare che di qui si può dedurre ogni istanza del T-schema al modo usuale. La versione più interessante di teoria cosiffatta finora proposta è contenuta nel cap. 9 di Priest (1987), e ora passerò a esporla. Come si vedrà, l'esecuzione del compito è un po' più complicata della sua enunciazione, e produce esiti inattesi.

10.3
La semantica di Priest

La teoria adopera sostanzialmente come logica di base LPQ, ma con alcune modifiche. Anzitutto, LPQ va integrata con un condizionale rilevante. Poi, Priest propone due varianti della teoria, la prima delle quali rispetta quello che egli chiama Principio di Esclusione. Il principio non è altro che la metà da sinistra a destra del nostro (Neg2), ossia:

(Esc) $V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner) \rightarrow \neg V(\ulcorner\alpha\urcorner)$,

che come si vedrà in questa variante è incorporato nella clausola semantica per la negazione. Sappiamo però che (Neg2) è controverso. Di qui la seconda versione della teoria, che fa a meno. In questo caso, però, perché la cosa funzioni occorre rinunciare alla Contrapposizione; così la modifica allo status della negazione fa sì che il condizionale rilevante divenga non contrapponibile[6].

10.3.1. Il linguaggio della teoria

Il linguaggio L della teoria ha il normale vocabolario logico con connettivi, quantificatori e identità. Assumiamo congiunzione, negazione, condizionale e quantificatore universale come primitivi. Disgiunzione, bicondizionale e quantificatore esistenziale sono definiti mediante i precedenti al modo usuale.

Le variabili sono ufficialmente indicizzate dai numeri naturali (il cui insieme è N), e le costanti individuali da un sottoinsieme K dei naturali – anche se spesso l'indicizzazione è omessa per praticità. Dunque l'insieme delle variabili è $\{v_n | n \in$ N$\}$, quello delle costanti è $\{c_k | k \in$ K$\}$. Fra le cose che costituiscono il dominio delle variabili di L vi sono numeri, sequenze di oggetti, ed espressioni linguistiche. Se ne capisce il perché: vogliamo poter quantificare sia su entità mondane che su entità linguistiche, e parlare di relazioni fra le prime e le seconde, come la relazione di soddisfacimento. Anche se adopera talvolta variabili di sorta distinta (ad esempio $s, s_1, ..., s_n$ come variabili per sequenze), Priest sostiene che si tratta di un mero espediente espositivo, perché ufficialmente il linguaggio e la logica sono a una sola sorta[7].

Il vocabolario descrittivo (com'era da attendersi) è ricco e contiene, oltre al lessico semantico, anche espressioni aritmetiche. Eccolo qui di seguito, insieme alle interpretazioni intuitive associate da Priest.

"*Sodd*" denota la relazione di soddisfacimento, che naturalmente può sussistere fra sequenze di oggetti e formule; dunque può essere intesa come un insieme di coppie ordinate. Per avere una nozione di soddisfacimento generalizzata a predicati unari, assumiamo che un singolo oggetto *o* coincida con la sua sequenza unaria $<o>$.

Abbiamo tre predicati a un posto: "*Nat*" denota l'insieme N dei numeri naturali; "*Form*" denota l'insieme delle formule ben formate di L; "*Term*" denota l'insieme dei termini singolari di L. Abbiamo poi espressioni per funzioni: "*Succ*" denota, al solito, l'operazione unaria di passaggio al successore (in questo contesto, se applicata a qualcosa che non è un numero naturale, l'operazione produce come risultato quella stessa cosa: $Succ(t)$, se $t \notin$ N, è proprio t); "*Cost*" denota una funzione unaria da indici delle costanti a costanti e, se applicata a cose che non sono in K, dà sempre una costante *dummy* prescelta; "*Var*" denota una funzione unaria da indici delle variabili a variabili[8]; "+" denota un'operazione binaria di *concatenazione*: date due sequenze qualsiasi x e y, l'operazione produce una sequenza $x + y$, che è appunto la loro concatenazione; "*App*" denota una funzione diadica tale che intuitivamente $App(x, y)$ è il valore della funzione x quando applicata all'argomento y; "*Sost*" denota una funzione triadica tale che $Sost(x, y, z)$ è la funzione coincidente con x, tranne per il fatto che il suo valore per l'argomento y è z – per brevità, avremo anche $x(y)$ per $App(x, y)$, e $x(y/z)$ per $Sost(x, y, z)$ –; "*Den*" denota una funzione diadica, tale che intuitivamente se x è un termine di L e s una sequenza di oggetti, $Den(s, x)$ è la denotazione di x una volta che tutte le sue variabili hanno avuto come valori oggetti della sequenza s.

Seguendo la presentazione di Priest, il nome di una espressione linguistica sarà qui indicato in generale sottolineandola, dunque ad esempio $\underline{\alpha}$ è il nome di α. Anzitutto ci serve una costante per il numero zero, che sarà $\underline{0}$. Poi, per ogni termine singolare di L specifichiamo il suo nome come segue:

$\underline{v}_n$ è $Var(\underline{n})$ per $n \in$ N

$\underline{c}_k$ è $Cost(\underline{k})$ per $k \in$ K.

Dato ciò, insieme ai nomi delle costanti predicative e funtoriali e dei simboli logici e ausiliari, possiamo costruire il nome di qualsiasi espressione di L usando la funzione di concatenazione: data una stringa di espressioni $e = e_1 ... e_n$, il suo nome è $\underline{e} = \underline{e}_1 + ... + \underline{e}_n$[9]. Così L riproduce quelle caratteristiche dell'italiano ordinario che volevamo modellare nella costruzione della nostra semantica: possiamo parlare in L di ogni espressione di L, e attribuire a queste predicati – in particolare, naturalmente, predicati semantici.

10.3.2. Assiomi e dettagli

Una volta introdotto L con la sua interpretazione informale, passiamo agli assiomi della teoria. Questi si dividono in quattro gruppi: quelli del gruppo I sono detti *matematici*, perché riguardano il macchinario aritmetico; quelli del gruppo II, *sintattici*; quelli dei gruppi III e IV, *semantici*. In particolare, quelli del gruppo III forniscono una caratterizzazione ricorsiva della denotazione; quelli del gruppo IV, una caratterizzazione ricorsiva della relazione di soddisfacimento.

Gruppo I

1. (a) $Succ(x) \neq \underline{0}$
   (b) $Succ(x) = Succ(y) \rightarrow x = y$
   (c) $Nat(\underline{0})$
   (d) $Nat(x) \rightarrow Nat(Succ(x))$

2. $a = App(s(x/a), x)$

3. $x \neq y \rightarrow App(s, y) = App((s(x/a), y)$

(1a-d) sono un frammento di aritmetica di Peano e dicono, al solito, che lo zero è un numero naturale e non è un successore ecc. Una differenza è che qui le variabili non variano solo su numeri; a questo proposito, si noti che (1b) è vero anche di cose che non sono numeri – e in questo caso è banale poiché se $x \notin$ N, $Succ(x) = x$. Priest sostiene che tutti gli assiomi del gruppo I «sono dimostrabili nel contesto più generale della teoria (dialeteista) degli insiemi/dei numeri»[10].

Gruppo II

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$

2. (a) $Term(Var(x))$
   (b) $Term(Cost(x))$
   (c) $Term(x_1) \wedge \ldots \wedge Term(x_n) \rightarrow Term(\underline{f} + \underline{(} + x_1 + \ldots + x_n + \underline{)})$
   per ogni funtore n-ario f.

3. (a) $Term(x_1) \wedge \ldots \wedge Term(x_n) \rightarrow Form(\underline{P} + \underline{(} + x_1 + \ldots + x_n + \underline{)})$
   per ogni predicato n-ario P.
   (b) $Form(x) \wedge Form(y) \rightarrow Form(\underline{(} + x + \underline{\wedge} + y + \underline{)}) \wedge Form(\underline{(} + x + \underline{\rightarrow} + y + \underline{)}) \wedge Form(\underline{\neg} + x)$
   (c) $Form(x) \rightarrow Form(\underline{\forall} + Var(y) + \underline{(} + x + \underline{)})$

(1) è l'associatività della concatenazione. Il sottogruppo (2) regola la formazione di termini singolari: variabili e costanti sono termini singolari, e (2c) dice che si ottiene un termine singolare concatenando un'espressione funtoriale n-aria a n termini (ho omesso per brevità di inserire nella concatenazione i nomi delle virgole). Il sottogruppo (3) regola la formazione di formule atomiche e composte: (3a) dice che si ottiene una formula (atomica) concatenando un predicato n-ario a n termini; (3b-c) dicono come ottenere condizionali, congiunzioni, negazioni e formule quantificate. Come si vede, tutto quest'apparato esprime in L le cose che di solito diciamo, in un metalinguaggio informale, presentando le regole di formazione di un linguaggio formale ordinario.

Gruppo III

1. $Nat(x) \rightarrow Den(s, Var(x)) = s(x)$
2. $Den(s, Cost(\underline{k})) = c_k$ per $k \in$ K
3. $Term(x_1) \wedge \ldots \wedge Term(x_n) \rightarrow Den(s, \underline{f} + \underline{(} + x_1 + \ldots + x_n + \underline{)}) = f(Den(s, x_1), \ldots, Den(s, x_n))$
   per ogni funtore n-ario f.

Questi assiomi caratterizzano la denotazione per i termini di L.

Gruppo IV

1. $Term(x_1) \wedge \ldots \wedge Term(x_n) \rightarrow (Sodd(s, \underline{P} + \underline{(} + x_1 + \ldots + x_n + \underline{)}) \leftrightarrow P(Den(s, x_1), \ldots, Den(s, x_n)))$
   per ogni predicato n-ario P.
2. $Form(x) \wedge Form(y) \rightarrow (Sodd(s, \underline{(} + x + \underline{\wedge} + y + \underline{)}) \leftrightarrow Sodd(s, x) \wedge Sodd(s, y))$
3. $Form(x) \wedge Form(y) \rightarrow (Sodd(s, \underline{(} + x + \underline{\rightarrow} + y + \underline{)}) \leftrightarrow (Sodd(s, x) \rightarrow Sodd(s, y)))$
4. $Form(x) \rightarrow (Sodd(s, \underline{\neg} + x) \leftrightarrow \neg Sodd(s, x))$
5. $Form(x) \wedge Nat(y) \rightarrow (Sodd(s, \underline{\forall} + Var(y) + \underline{(} + x + \underline{)}) \leftrightarrow \forall z Sodd(s(y/z), x))$

Questi assiomi caratterizzano ricorsivamente il soddisfacimento per formule, e sono naturalmente i più importanti. (1) dice che una sequenza *s* soddisfa una formula atomica se e solo se il predicato *n*-ario di quella formula si applica agli oggetti di *s* denotati dai termini $x_1, \ldots, x_n$. (2)-(5) generalizzano ai composti ottenuti connettendo e quantificando. Facciamo attenzione al n. 4: questo assioma esprime la semantica per una negazione conforme al Principio di Esclusione (Esc); dice infatti che una sequenza *s* soddisfa una formula $\neg\alpha$ se e solo se *s* non soddisfa α.

Possiamo ora definire il predicato di verità per L mediante la relazione di soddisfacimento, al modo tarskiano:

$$V(x) =_{\text{df}} \forall s(Sodd(s, x)).$$

Una formula vera è una formula soddisfatta da tutte le sequenze. Ora, la teoria dimostra ogni istanza del T-schema tarskiano per L:

(TH) Per ogni formula chiusa α di L, $\vdash V(\underline{\alpha}) \leftrightarrow \alpha$.

Dunque, la Convenzione V di Tarski è rispettata. (TH) viene provato da Priest con un paio di lemmi ausiliari su termini e formule, nell'appendice tecnica del capitolo di *In Contradiction*[11]. Più che non i dettagli della prova, l'importante è che questa viene condotta conformemente al Principio di Esclusione. Ma Priest sostiene che si può fare a meno di (Esc). Bastano le seguenti modifiche: occorre (a) adoperare un condizionale (rilevante) per cui *non* vale la Contrapposizione; (b) introdurre una nuova relazione binaria *Antisodd* di *anti*soddisfacimento, la quale «è per la falsità ciò che il soddisfacimento è per la verità»[12]; (c) sostituire l'assioma n. 4 del gruppo IV, ossia la clausola per la negazione, con il seguente:

(4bis) $Form(x) \rightarrow (Sodd(s, \underline{\neg} + x) \leftrightarrow Antisodd(s, x))$,

e infine (d) aggiungere un gruppo di assiomi che caratterizzino ricorsivamente le condizioni di antisoddisfacimento, in modo corrispondente a quello che fanno i (modificati) cinque assiomi del gruppo IV per il soddisfacimento. Gli aggiustamenti (a)-(d) ci danno la seconda versione della teoria, di cui si diceva sopra[13].

10.4
...Funziona?

Priest ha dichiarato che mediante questa teoria «il dialeteismo risolve un problema fondamentale della semantica»[14], se accettiamo l'idea della semantica standard per cui al cuore di una teoria del significato sta la nozione di verità/soddisfacimento, e prendiamo sul serio la tesi che il linguaggio ordinario sia semanticamente chiuso: «Naturalmente, i semanticisti non credono sul serio che la semantica dell'inglese sia esprimibile solo in un altro linguaggio. O almeno, non ho notato corsi di Indi, Urdu e Mandarino pieni di ranghi di semanticisti desiderosi di sapere se questi linguaggi contengono la chiave per l'ineffabile»[15].

Eppure, la teoria di Priest presenta più di qualche stranezza – ovvero, rovesciando la cosa, potremmo dire che si segnala per l'*assenza* di tipiche stranezze *attese* all'interno di una teoria paraconsistente. Ad esempio, per ambo le varianti della teoria – quella con (Esc) e la Contrapposizione, e quella senza – non si sa per certo se sono inconsistenti o meno. E questo sembra senz'altro bizzarro: non si era detto che una teoria contenente e in grado di definire il proprio predicato di verità/soddisfacimento sarebbe stata contraddittoria? Non sarà che, come si è chiesto John Woods, «l'agnosticismo de[lla teoria semantica di Priest] sulla sua propria inconsistenza è inconsistente con questo fatto»?[16] Per Priest, se le due varianti della teoria sono consistenti, lo sono per «ragioni puramente accidentali» legate alla caratterizzazione della nozione di soddisfacimento. Inoltre, per avere la desiderata inconsistenza basterebbe aggiungere un apposito mentitore formalizzato; ovvero arricchire l'aritmetica in modo da poter dimostrare il Lemma di Diagonalizzazione, e così «produrre la quantità necessaria di autoriferimento»[17], con metodi analoghi a quelli visti nei capp. 2 e 4 della nostra prima sezione[18].

Un altro problema è se le due varianti della teoria siano non triviali. Come vedremo al capitolo seguente, il corrispettivo delle dimostrazioni di consistenza per teorie paraconsistenti sono le prove di non-trivialità: vogliamo essere garantiti sul fatto che la teoria non consente di provare tutto. La logica LPQ modificata sottostante alle due varianti è conforme alla Condizione Forte di Anti-trivialità e non consente trivializzazioni note, come quella mediante il paradosso di Curry. Ma una vera prova di non-trivialità per la semantica priestiana è ancora attesa. Alla data del 2003, Woods ha concluso la propria disamina della situazione dicendo che «allo stato attuale, [questa semantica] non è stata in grado di venire a capo dell'intuizione dialeteista fondamentale per cui ci sono teorie dimostrabilmente inconsistenti che sono dimostrabilmente non triviali»[19].

Note

1. Cfr. Priest, Routley, 1989b, pp. 374-6.
2. Cfr. ivi, pp. 377-89.
3. Cfr. ad esempio Tanaka, 1998a.
4. Cfr. ad esempio Priest, 1982, 1987, capp. 11 e 12; Tanaka, 1998b.
5. Cfr. Woods, 2003, p. 173.
6. Cfr. Priest, 1987, p. 158.
7. *Ibid*.
8. Cfr. anche Bremer, 2005, p. 128.
9. Cfr. Priest, 1987, p. 159.
10. Ivi, p. 161.
11. Cfr. ivi, pp. 172 ss.
12. Ivi, p. 163.
13. Cfr. ivi, pp. 163 e 174 ss.
14. Ivi, p. 167.
15. Ivi, p. 169.

16. Woods, 2003, p. 181.
17. Cfr. Priest, 1987, p. 164.
18. Per dimostrazioni formali delle inconsistenze risultanti nella teoria priestiana da queste aggiunte, cfr. Bremer, 2005, pp. 134-6.
19. Woods, 2003, p. 181.

II
Insiemistica e metalogica paraconsistenti

II.1
Desiderata

Per i dialeteisti i paradossi insiemistici, al pari di quelli semantici, sono esattamente quel che sembrano a chi non indossa occhiali classicisti: dimostrazioni. E questa prospettiva si presenta come liberatrice della teoria ingenua degli insiemi, intesa come la caratterizzazione intuitiva e analitica della nozione di insieme in quanto tale. Il costo metafisico della liberazione è chiaro: certi oggetti contraddittori sono ammessi nel dominio della teoria, contro (PNC3). Ma qual è il guadagno? La ragion d'essere di un'insiemistica paraconsistente è quella di evitare le difficoltà teoriche in cui, come abbiamo visto nella prima sezione, incorrono le teorie consistenti degli insiemi: il carattere *ad hoc* delle limitazioni al Principio di Comprensione o di Astrazione; la mancanza di un insieme totale e la connessa violazione del Principio del Dominio, che minaccia l'intelligibilità stessa della nozione di insieme. A differenza della teoria del significato, però, la teoria degli insiemi oltre a una funzione intrinseca ne ha anche una strumentale rispetto alla matematica. Perciò, una buona teoria paraconsistente degli insiemi dovrebbe anche fornire una solida base all'attività dei matematici, rimediando all'inservibilità della gerarchia cumulativa transfinita per la fondazione insiemistica della teoria delle categorie, e in particolare delle operazioni su grandi categorie. Come ha detto Diego Marconi: «Una tale teoria incontrerebbe il favore di parecchi matematici, che potrebbero lavorare senza le restrizioni che devono comunque essere imposte agli assiomi della teoria degli insiemi, se si vuole evitare il collasso della teoria stessa. Per alcuni, infatti, non è tanto l'esistenza di insiemi antinomici ad essere preoccupante, quanto la banalità che essa comporta»[1].

Incontreremo fra poco un caso di teoria paraconsistente degli insiemi che fallisce nel complesso rispetto a questi *desiderata*, e poi un paio di prospettive che sembrano cavarsela un po' meglio. Della matematica paraconsistente edificabile in questo quadro, invece, parlerò nel prossimo capitolo. Ma anzitutto occorrerà dire qualcosa sulla situazione "metalogica" che viene a crearsi per queste teorie, proprio in conseguenza della loro inconsistenza.

II.2
Gödel, secondo tempo

I cosiddetti teoremi limitativi, come quelli di Gödel, Rosser e Church, sono sicuramente i più studiati e rinomati fra tutti i teoremi di metalogica (forse ciò è dovuto fra l'altro al fascino filosofico dell'idea di *proibizione* che portano con sé). Ma il predominio della logica classica è tale, che spesso queste acquisizioni vengono esposte omettendo una precondizione di applicabilità cui sottostanno, ossia la *consistenza* della teoria. L'assunto è invece incorporato nel Primo Teorema di Gödel, la cui applicazione suppone, come si ricorderà, la consistenza (oltre che la ω-consistenza) di PA. Gödel fu inizialmente cauto intorno all'estendibilità dei suoi risultati sull'incompletezza, ma in una nota aggiunta nel '63 al suo celebre saggio del 1931 non lasciò adito a dubbi:

> In seguito ad ulteriori risultati, in particolare al fatto che, grazie al lavoro di A. M. Turing, si può ora dare una definizione rigorosa e adeguata al di là di ogni dubbio, del concetto generale di sistema formale, è oggi possibile una versione del tutto generale dei Teoremi VI e XI. In altre parole si può dimostrare rigorosamente che [Teorema VI:] in ogni sistema formale coerente che contenga una certa quantità di teoria finitaria dei numeri, esistono proposizioni aritmetiche indecidibili, e inoltre, che [Teorema XI:] la coerenza di ognuno di questi sistemi non può essere dimostrata all'interno del sistema stesso[2].

Il "Teorema VI" è il Primo Teorema di Incompletezza, che ho introdotto al CAP. 4, e il quale parla appunto degli enunciati indecidibili come γ. Il "Teorema XI" è il Secondo Teorema di Incompletezza. Questo sarà l'unico altro teorema limitativo che esporrò[3] – in modo più sbrigativo e informale di quanto abbia fatto con il Primo: quanto basta per farci un'idea di cosa voglia dire che «in ogni sistema formale *coerente*... la coerenza... non può essere dimostrata all'interno del sistema stesso».

II.2.1. "La consistenza... Va assunta per fede"

Abbiamo visto come la prima metà del Primo Teorema affermi che, se PA è consistente, allora γ non vi è dimostrabile. Si può esprimere quest'idea *nella* teoria PA? Per farlo ci occorre una "dichiarazione di consistenza" (sia *Cons*) per PA. Possiamo qui renderla mediante il nostro predicato di dimostrabilità:

$$Cons =_{df} \neg\exists x Dim(x, \ulcorner\bot\urcorner),$$

dove il *falsum* sta per una qualsiasi inconsistenza. Possiamo quindi esprimere *in* PA il fatto che se PA è consistente, allora γ non è dimostrabile, così:

1. $\neg\exists x Dim(x, \ulcorner\bot\urcorner) \rightarrow \neg\exists x Dim(x, \ulcorner\gamma\urcorner)$.

Ma il conseguente di (1), $\neg\exists x Dim(x, \ulcorner\gamma\urcorner)$, non è altro che γ, ovvero $\neg Teor(\ulcorner\gamma\urcorner)$. Dunque (1) equivale a:

2. $Cons \rightarrow \gamma$

e si può mostrare che (2) – e quindi (1) – è dimostrabile in PA[4]. Ebbene, il Secondo Teorema di Gödel dice:

3. Se PA è consistente, allora $\nvdash_{\text{PA}}$ *Cons*.

Supponiamo infatti di poter dimostrare l'antecedente di (1) – o di (2) –, ossia che la formula esprimente la consistenza di PA sia un teorema *del* sistema stesso. Allora, mediante (E→) o *modus ponens* potremmo dimostrare anche γ. Avremmo cioè una semplice prova di questa forma:

1.	$Cons \rightarrow \gamma$	Teorema di PA
2.	$Cons$	Teorema di PA?
3.	γ	1, 2, E →

Ma questo è appunto ciò che è escluso dal *Primo* Teorema, il quale afferma che, stante la consistenza, γ *non* è dimostrabile in PA. (3) ci dice che se PA è consistente, allora non è in grado di dimostrare l'asserzione del linguaggio formale L su cui è impiantata, la quale esprime la consistenza di PA: PA non è in grado di dimostrare la *propria* consistenza!

Si capisce perché questa acquisizione di Gödel abbia avuto in filosofia una risonanza anche maggiore del Primo Teorema. Convinto che in matematica non dovessero esservi degli *ignorabimus*, Hilbert riteneva che si potesse fornire «una fondazione rigorosa e completamente soddisfacente per la nozione di numero, di fatto mediante un metodo che chiamerei *assiomatico*»[5], e che per questa via si potesse dimostrare la consistenza dell'aritmetica con metodi finitari. Ma il Secondo Teorema di Incompletezza ci mostra che nessun sistema formale consistente in grado di esprimere la mera aritmetica elementare gode, per così dire, di una tale "autosufficienza": la sua consistenza non può essere provata all'interno del sistema stesso. Sicché «esagerando forse solo un poco, la consistenza di sistemi come l'aritmetica di Peano (o anche quella di Robinson) va assunta per fede»[6].

II.2.2. Fuga dall'indecisione

Ora, una teoria degli insiemi e un'aritmetica paraconsistenti non soddisfano *proprio* il requisito di consistenza; il che suggerisce che potrebbero emanciparsi dai teoremi di Gödel, oltre che da altri teoremi limitativi che affliggono le cugine standard, ossia le corrispettive teorie tradizionali basate su una logica esplosiva. Naturalmente, nel caso del Secondo Teorema non può trattarsi di una questione di consistenza, visto che si tratta di teorie inconsistenti. Quello che si può sperare di provare è però la propria non-trivialità (spesso in questi contesti la si chiama "consistenza assoluta"). Fin dagli anni Settanta i paladini della paraconsistenza hanno cominciato a mostrare che le cose stanno proprio così, costruendo teorie inconsistenti ma non triviali, la cui non-trivialità sarebbe dimostrabile finitariamente con prove rappresentabili entro il sistema stesso. La medesima situazione consente loro anche di sfuggire alle limitazioni sancite dal Primo Teorema e dal risultato di indecidibilità di Church: esse sono cioè dimostrabilmente *complete* e *decidibili*[7].

Naturalmente, i paraconsistentisti si vantano della felice situazione[8], e ne traggono anche certe implicazioni filosofiche. Una prima conseguenza è la possibilità di ridar vita nientemeno che al programma di Hilbert[9], ritenuto definitivamente affossato dagli studiosi[10] proprio per via dei risultati gödeliani di incompletezza. Un'altra è la tesi che abbiamo già incontrato alla fine della prima sezione. Come si ricorderà, infatti, a detta di Priest e Routley solo ammettendo che la logica sottostante alla nostra concezione intuitiva-ingenua di dimostrazione matematica è paraconsistente potremo spiegare come *impariamo* l'aritmetica – ossia, con una procedura pienamente ricorsiva: «Sembra che otteniamo la nostra comprensione dell'aritmetica imparando un insieme di procedure basilari ed effettive per contare, sommare ecc.: in altre parole, attraverso una conoscenza codificata in un insieme decidibile di assiomi. Se questo è corretto, allora la verità aritmetica sembrerebbe essere proprio ciò che è determinato da queste procedure»[11].

Con un tale bagaglio di promesse, possiamo ora passare alla considerazione di alcune teorie paraconsistenti degli insiemi. Comincerò, peraltro, con quelle che funzionano meno bene.

11.3
Variazioni sul Quine

Nello stesso articolo in cui criticava gli aspetti "innaturali e poco convenienti" della teoria dei tipi di Russell, Quine proponeva un sistema per la teoria degli insiemi che venne siglato come NF. La caratteristica saliente del sistema consiste nel sostituire la gerarchia russelliana con la procedura detta *stratificazione*, la quale è una sorta di "tipo senza tipo". Una qualunque formula α è detta *stratificata* se ogni sua variabile si può indicizzare con un numerale, in modo che, in tutte le sottoformule di α della forma $x \in y$, se x ha il numero n, y ha il numero $n + 1$. Ora, in NF sono ammesse come ben formate anche formule che, in base a questa definizione, non sono stratificate (ad esempio, come $x \in x$), e cioè che la teoria dei tipi escluderebbe come insensate. Ciò significa che possiamo *dire* "$x \notin x$" e cose simili. Riformuliamo però il Principio di Comprensione sostenendo che:

($\mathrm{PC}_{\mathrm{NF}}$) Se $\alpha[x]$ è una formula stratificata, allora $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \alpha[x])$.

L'astrazione, insomma, si applica solo a formule stratificate: possiamo parlare della condizione russelliana *non esser membro di se stesso*, ma ci è proibito astrarne l'insieme che produceva i guai[12]. Ciò di per sé esclude la moltiplicazione "innaturale" di nozioni che volevamo evitare: ad esempio, *se* esiste un insieme, permette di concludere che esiste senz'altro il suo "vero" complemento, ossia l'insieme di tutto ciò che non appartiene a quell'insieme.

Una delle caratteristiche salienti di NF è che non ha un modello naturale nella gerarchia cumulativa transfinita. Ciò è stato visto da molti come un'anomalia, e oggigiorno NF è considerato più che altro una curiosità matematica. Hao Wang ha osservato che «nessuna integrazione del predicato di appartenenza (con la giusta relazione d'identità) compatibile con gli assiomi di NF potrebbe rendere bene ordinata sia la relazione di minore-di fra ordinali che quella fra cardinali finiti»[13]. Inoltre, la versione originaria del sistema ML – una naturale estensione di NF che incorpora anche classi – proposta da Quine in *Mathematical Logic*[14] è stata dimostrata inconsistente (vi si deriva il paradosso di Burali-Forti), il che per alcuni segnala che «c'è qualcosa di sbagliato anche in NF»[15]. Ma naturalmente, quello che è visto come un difetto dal punto di vista tradizionale può essere un merito dal punto di vista paraconsistente. In particolare, il pregio fondamentale di NF è che ha l'insieme totale, V: basta applicare la comprensione a $x = x$[16]. Se dunque il nostro principale problema è che le teorie standard degli insiemi mancano dell'insieme totale, NF sembra fare per noi.

La scuola paraconsistente brasiliana aveva quindi proposto di edificare teorie paraconsistenti degli insiemi combinando le gerarchie di C-sistemi di da Costa alle idee contenute in NF. La teoria costruita sfruttando il calcolo $C^{=}_{1}$ è chiamata NF_1 e, in corrispondenza alle gerarchie dacostiane, si possono edificare anche teorie $NF_2, \ldots, NF_\omega$. NF_1 è inconsistente (vi si deriva ad esempio il paradosso di Russell), ma non triviale. Tuttavia, la prova di non-trivialità non risulta rappresentabile all'interno del sistema stesso[17], il che è un inconveniente rispetto alle promesse paraconsistentiste di cui si è detto sopra. A detta di da Costa NF_1 è interpretabile in NF, ossia nel sistema quineano originario (e la non-trivialità del primo implica la consistenza del secondo). Ma quest'interpretazione non è altro che la *-trasformazione che abbiamo incontrato nel capitolo sui sistemi *positive-plus*, ossia la sostituzione di ogni occorrenza della (pseudo)negazione dacostiana con la negazione (esplosiva) forte. Sicché, una tale sistemazione va incontro alle stesse critiche rivolte allora contro questo stratagemma.

Anche la riformulazione del Principio di Astrazione in questo tipo di teorie è daccapo legata al trucco con la negazione. La formulazione quineana di (PC_{NF}) richiedeva che $\alpha[x]$ fosse una formula stratificata, esigeva dunque che le condizioni non stratificate non esprimessero alcun insieme. NF_1 ammette che la comprensione si applichi anche a formule non stratificate, *purché* $\alpha[x]$ non contenga occorrenze della negazione forte. Non solo: non deve contenere neppure occorrenze del condizionale, che in virtù del suo comportamento standard renderebbe triviale la teoria, per via di una versione del paradosso di Curry[18]. Ma una ragion d'essere di un'insiemistica paraconsistente, invece, è che vogliamo avere (PC) nella sua piena potenza, sicché il fatto che queste teorie non riescano ad abolire *ogni* restrizione sulla formazione di insiemi depone fortemente contro di esse[19].

11.4
La teoria paraconsistente degli insiemi di Routley, DST

Richard Routley ha edificato una teoria dialettica degli insiemi (*Dialectical Set Theory*, DST) basata su una delle sue logiche paraconsistenti rilevanti, precisamente su DKQ. Dal punto di vista espressivo, si tratta sostanzialmente di aggiungere al bagaglio linguistico elementare il simbolo di appartenenza come predicato primitivo, caratterizzato (finalmente) dal Principio di Comprensione nella sua piena potenza:

(PC) $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \alpha[x])$.

(PC) garantisce dunque il pieno rispetto sia della Condizione di Esistenza, che di quella di Oggettività, di cui ho parlato nella prima parte: non solo esiste un insieme per ogni condizione, ma ogni insieme è un oggetto con tutte le carte in regola per essere elemento di altri insiemi.

Ma c'è di più. Nella presentazione della teoria ingenua degli insiemi avevo enunciato come unica limitazione su (PC) che y non comparisse libera in $\alpha[x]$. Questa è stata tradizionalmente intesa (da Cantor a Zermelo) come una mera esigenza di *definitezza* della condizione $\alpha[x]$, la quale altrimenti avrebbe originato una circolarità paradossale anche a prescindere dalla questione delle definizioni impredicative. Invece, la teoria paraconsistente degli insiemi di Routley non ha (com'è nello spirito dell'impresa) prevenzioni di questo genere verso il paradosso[20], e non contempla neppure questa restrizione minimale a (PC). Ciò vuol dire che, oltre ad ammettere i tradizionali insiemi contraddittori come quello russelliano, contiene (prendendo $\alpha[x] = x \notin y$) anche lo stranissimo insieme auto-caratterizzato di tutte le cose che gli appartengono se e solo se non gli appartengono:

$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \notin y)$.

Poiché «DST mira a incorporare i paradossi e i ragionamenti in essi coinvolti», la teoria *deve* «essere in grado di stabilire che la classe russelliana appartiene e non appartiene a se stessa, ossia $(R \in R)$ & $\sim(R \in R)$»[21]. Una tale teoria include insiemi non bene fondati – anche reintroducendo la sopradetta restrizione sulla "definitezza" della condizione in (PC), si potrebbe comunque avere l'insieme $\{x | x \in x\}$. Tuttavia, questo è un problema (ammesso che lo sia) non legato alla questione del (PNC), e alcuni autori sostengono indipendentemente l'opportunità di ammettere insiemi non bene fondati[22].

Più direttamente legata alla paraconsistenza, invece, è la questione di come trattare l'identità in una teoria che ammette insiemi contraddittori. La formulazione usuale del Principio di Estensionalità, come sappiamo, è:

(PE) $\forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z) \rightarrow y = z$.

Questo, si suole dire, è ciò che distingue un insieme da "creature delle tenebre" intensionali invise a Quine, come le proprietà: un insieme è interamente determinato dai suoi elementi, sicché insiemi con gli stessi elementi sono lo stesso insieme. Il problema è che DKQ è una logica *rilevante*, sicché $\leftrightarrow$ e $\rightarrow$ vanno intesi come un (bi)condizionale che non ammette fallacie della rilevanza. Ora, se adottassimo il trattamento leibniziano standard dell'identità, e in particolare la Sostitutività:

(SI) $\forall xy(x = y \rightarrow (\alpha[x] \leftrightarrow \alpha[y]))$[23],

andremmo incontro a un problema di irrilevanza. Come nota Routley, per sostituzione vacua da (SI) otteniamo $x = y \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)$, che è un caso di $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)$. Questa è una fallacia della rilevanza (che, come sappiamo, nella semantica Routley-Meyer viene evitata adottando la relazione triadica di accessibilità fra mondi). Dunque, «occorre rigettare il trattamento leibniziano dell'identità»[24]. Routley propone perciò (con qualche riserva) di sostituire (SI) in DST con una regola ristretta:

$$\frac{x = y}{x \in z \rightarrow y \in z} \quad (\text{ER})$$

Questioni di rilevanza consigliano anche qualche cautela nella caratterizzazione di certi insiemi celebri. Ad esempio, è vero che definendo l'insieme vuoto $\varnothing$ come $\{x| \ x \neq x\}$ abbiamo che è vuoto davvero: anche nelle logiche paraconsistenti come DLQ e DKQ vale $\forall x(x = x)$[25]. Tuttavia, non ne segue che $\forall x(\varnothing \subseteq x)$, ossia che (come si ammette di solito) l'insieme vuoto è incluso in ogni insieme, perché ciò darebbe daccapo luogo a una forma di irrilevanza. Dunque «$\subseteq$ differisce in modo significativo dall'usuale nozione di inclusione»[26]. Peraltro, Routley suggerisce che si possa considerare una differente definizione dell'insieme vuoto, e che qualcosa del tipo $\varnothing = \{x|\forall y(x \in y)\}$ potrebbe funzionare.

II.4.1. Pregi e difetti di DST

DST ha tutti i vantaggi attesi in una teoria degli insiemi che, come quella ingenua, non ammette restrizioni a (PC). Anzitutto, abbiamo per ogni insieme il suo complemento assoluto e intuitivo, ossia:

$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin x)$,

laddove in ZF-ZFC e simili abbiamo solo complementi relativi, e in NF solo complementi degli insiemi che *ci sono* (ossia, quelli consentiti da condizioni stratificate). Ma c'è di più, perché DST dimostra molte cose "cantoriane" che nelle teorie consistenti dovevano essere reintrodotte come assiomi – ad esempio, l'esistenza di insiemi infiniti. Inoltre, il fatto che in (PC) ora la condizione definitoria dell'insieme può contenere libera la variabile per l'insieme stesso ha un ruolo decisivo nella prova di una versione dell'Assioma di Scelta[27]. Ciò è preso da Routley come il segno decisivo del carattere *realistico* di una buona teoria paraconsistente degli insiemi: esistono realmente oggetti contraddittori come gli insiemi inconsistenti, in violazione di (PNC3). Poi, si può distinguere fra due tipi di inconsistenza insiemistica. Ci sono insiemi contraddittori perché hanno e non hanno certe proprietà – il che vuol dire, insiemisticamente, insiemi x che soddisfano cose della forma $x \in y \wedge x \notin y$. Ma ci sono anche insiemi x, come Routley li etichetta, *d-inconsistenti*: tali che $y \in x \wedge y \notin x$, ossia a cui qualcosa (che a sua volta è dunque contraddittorio) appartiene e non appartiene. R, ad esempio, è sia inconsistente che d-inconsistente[28].

DST è forse il caso esemplare di teoria paraconsistente degli insiemi in grado di fornire, a detta dei dialeteisti, «tanta teoria degli insiemi quanta ne occorre al matematico professionista (con l'inclusione, si badi, del teorico delle categorie)»[29]. Sviluppando la teoria delle categorie a partire da una tale insiemistica con Principio di Comprensione non ristretto, possiamo introdurre categorie come quella di tutti i gruppi, o quella di tutte le categorie ecc., e possiamo investigarne le proprietà.

Se finora ho detto qualcosa su ciò che si può fare con DST, occorre però sapere anche cosa non ci si può fare, ossia che cosa *non* può esservi dimostrato. Questo, naturalmente, è quel problema generale delle teorie paraconsistenti, che come si è detto è il corrispettivo dell'esigenza di prove di consistenza per le teorie ordinarie. Disponiamo oggi di dimostrazioni di non-trivialità per DST (anche in una versione priva di implicazione rilevante) dovute a Routley e a Ross Brady, che hanno adoperato una semantica di tipo Routley-Meyer con la *Routley star*[30]. Il problema di questo genere di prova è che i confini di ciò che non può essere dimostrato nella teoria non triviale sono piuttosto ristretti. Priest (1987) ammetteva che «quanto si estendano le contraddizioni [nelle teorie paraconsistenti degli insiemi], o anche solo come formulare precisamente quest'idea, è un problema aperto»[31], e oggigiorno la situazione non è molto diversa[32].

II.5
La teoria paraconsistente delle classi di Brady

Ross Brady ha proposto un'insiemistica paraconsistente che adotta altresì (PC) e (ER) come caratterizzati per la teoria di Routley, ma in luogo di DKQ ha come logica sottostante il sistema DJ^dQ[33]. La necessità di evitare (SI), la Sostitutività "leibniziana", è dovuta anche qui a considerazioni di rilevanza – nel caso, alla semantica dei contenuti di DJ^dQ di cui si è parlato nella precedente parte del volume.

L'aspetto interessante della teoria di Brady sta nel fatto che è anche una teoria delle classi. Ciò può suonare strano, visto che la distinzione insieme/classe, come si ricorderà, era stata introdotta da von Neumann proprio come uno stratagemma per evitare i paradossi insiemistici (aggirando la condizione di Oggettività, anziché quella di Esistenza). Ma l'intento di Brady è riformulare la bipartizione in modo da (*a*) distinguere nettamente fra molteplicità consistenti e inconsistenti, e (*b*) prendere queste ultime più sul serio rispetto a quanto accade negli approcci consistenti alla von Neumann-Bernays. (PC) vale infatti per le *classi*, e la logica sottostante è appunto DJ^dQ. Invece, la Comprensione è limitata per gli *insiemi*, i quali sottostanno alla logica classica: «per gli insiemi abbiamo una logica e un'ontologia completamente standard»[34].

La parte originale della teoria, quindi, è quella che riguarda le classi (fra l'altro, ne è dimostrata la non-trivialità), ma proprio qui Brady introduce alcune restrizioni che appaiono contrarie allo spirito di una teoria paraconsistente. Nel caso della (ora) classe russelliana, ad esempio, si può provare $R \in R \leftrightarrow R \notin R$, ma da ciò non segue la corrispondente contraddizione esplicita $R \in R \wedge R \notin R$[35]. Ciò è dovuto alla debolezza di DJ^dQ, in particolare della sua negazione, per cui non valgono Terzo Escluso e *reductio*. Questo mi pare un inconveniente a carico del sistema di Brady. Anzitutto, si ricorderanno i già menzionati tentativi di aggirare certi paradossi insiemistici rinunciando a Terzo Escluso e/o bivalenza, ad esempio quelli dovuti a Bochvar, e i motivi per cui non soddisfano. Ma soprattutto, c'è un problema di omogeneità: se dobbiamo adottare una teoria paraconsistente degli insiemi, perché evitare la derivazione di certe contraddizioni famose indebolendo prima la logica sottostante? Un problema analogo consiste nel fatto che la validità del Teorema di Cantor è ristretta agli insiemi, evitando così il paradosso di Cantor[36].

11.6
Lo Schema di Inclusione

Uno degli aspetti filosoficamente più interessanti dell'approccio paraconsistente all'insiemistica, largamente investigato in Priest (1995), è la possibilità di fornire all'interno di una teoria paraconsistente degli insiemi (nel caso, avente come logica sottostante LPQ) la *forma generale* di un'intera famiglia di paradossi.

Abbiamo visto come secondo Priest i paradossi che costituiscono il caso fondamentale a favore del dialeteismo nascano da situazioni "ai limiti del pensiero": situazioni in cui abbiamo a che fare con «una totalità (di tutte le cose esprimibili, descrivibili ecc.) e un'operazione appropriata la quale genera un oggetto che è sia all'interno che all'esterno della totalità»[37]. Si ricorderà come un aspetto di questa situazione fosse stato colto già da Russell[38], il quale imputava i paradossi precisamente alla considerazione di totalità tali che l'ipotesi che esse siano *un tutto* produce un oggetto incluso e non incluso nella totalità. La differenza, naturalmente, è che Russell seguiva Kant nel ritenere che i paradossi del limite fossero una «illusione naturale e inevitabile» cui va incontro la ragione che cerca l'Incondizionato. Per Priest, invece, ha visto giusto Hegel: ciò in cui ci imbattiamo ai limiti, ossia approcciando l'Assoluto, sono contraddizioni vere.

Lo schema proposto da Priest, detto *di Inclusione*, generalizza la costruzione russelliana come segue:

1. Esiste $W = \{y|\phi[y]\}$ e $\psi[x/W]$
2. $x \subseteq W$ e $\psi[x] \Rightarrow$
   (2a) $\delta(x) \notin x$
   (2b) $\delta(x) \in W$

La condizione (1) corrisponde a quella che ho chiamato Esistenza, e che viene tipicamente negata, come abbiamo visto, nella teoria dei tipi e nelle teorie assiomatiche alla Zermelo-Fraenkel: esiste l'insieme W, che è una delle "totalità illegittime". Le condizioni (2a) e (2b) sono chiamate da Priest, rispettivamente, Trascendenza e Chiusura. Otteniamo allora una contraddizione considerando un sottoinsieme x di W, per cui c'è una funzione δ che è, come la chiama Priest, un *diagonalizzatore* (rispetto a ϕ): è cioè una operazione (di cui la diagonalizzazione cantoriana è un esempio paradigmatico) «sistematicamente definita in modo tale da garantire che il risultato della sua applicazione a un insieme non può essere identica a un qualsiasi membro di quell'insieme»[39]. Allora (2a) la diagonale di x non è in x (lo "trascende"), ma (2b) dev'essere in W. E applicando (2a) e (2b) a W stesso abbiamo che $\delta(W) \in W \wedge \delta(W) \notin W$.

La condizione $\psi[x]$ è l'aggiunta propriamente originale di Priest rispetto alla sistemazione russelliana, e serve per ricondurre allo schema anche i paradossi *semantici* (mentre per i paradossi insiemistici $\psi[x]$ è banale – tipicamente, l'autoidentità). Possiamo allora far rientrare molti paradossi diversi nello Schema di Inclusione. Ad esempio[40]:

	W	$\phi[y]$	$\psi[x]$	$\delta(x)$	Contraddizione
Cantor-Russell	L'insieme totale V	y è un insieme	$x = x$	$\rho_x = \{y \in x \mid y \notin y\}$	$\rho_V \in V \wedge \rho_V \notin V$
Burali-Forti	L'insieme degli ordinali Ω	y è un ordinale	$x = x$	$log(x)$[41]	$\Omega \in \Omega \wedge \Omega \notin \Omega$
Mirmanoff	La gerarchia cumulativa K	y è bene fondato	$x = x$	$U\{P(y) \mid y \in x\}$	$K \in K \wedge K \notin K$
König[42]	L'insieme degli ordinali definibili D	y è un ordinale definibile	x è definibile	$\mu yy \notin x$	$(\mu yy \notin D) \in D \wedge (\mu yy \notin D) \notin D$

Accanto a questa sistemazione, Priest propone anche il suo Principio della Soluzione Uniforme, il quale suona più o meno: "paradossi simili, soluzione simile". E siccome tutti i paradossi dell'inclusione hanno la stessa forma, «qualsiasi soluzione che può gestire soltanto alcuni membri della famiglia è condannata a mostrare di non aver colto l'essenza della questione»[43]. Ciò depone ulteriormente contro i vari rimedi tradizionali, mentre la vera "soluzione" già la conosciamo: «L'unico approccio uniforme soddisfacente a tutti questi paradossi è quello dialeteico, che prende le contraddizioni paradossali esattamente per quello che appaiono essere. I limiti del pensiero che costituiscono le inclusioni sono oggetti autenticamente contraddittori»[44].

E nell'Appendice alla terza sezione di *Beyond the Limits of Thought*, Priest fornisce un modello per una teoria paraconsistente degli insiemi basata su LPQ che contiene lo Schema di Inclusione. Ciò che è interessante, più che non la teoria in sé, è l'uso che Priest vi fa di un "Lemma di Collassamento" e di una strategia modellistica la cui funzione ontologico-semantica è quella di produrre modelli inconsistenti a partire da modelli consistenti. Di questo, però, si parlerà nel prossimo capitolo, perché è al centro di certe aritmetiche inconsistenti – ossia di alcune delle teorie a mio avviso più strane e sorprendenti in tutta la costellazione degli assurdi paraconsistenti.

Note

1. Marconi, 1979, p. 55.
2. Gödel, 1931, p. 50.
3. Per le prove del resto della famiglia, ossia dei teoremi di Church, Löb ecc., ci si può riferire a qualsiasi testo manualistico avanzato di logica (ad esempio Casari, 1997, pp. 196 ss.; Moriconi, 2001).
4. Cfr. Moriconi, 2001, pp. 221-2.
5. Hilbert, 1904, p. 131.
6. Dunn, 1986, p. 161. In realtà, prove di consistenza per sistemi esprimenti l'aritmetica sono state fornite, a partire dai lavori di Gentzen (l'inventore del metodo della deduzione naturale sfruttato in questo libro). Le prove finora esibite hanno però come caratteristica quella di utilizzare strumenti deduttivi più potenti rispetto a quelli dei sistemi formali di cui provano la consistenza, o comunque non sono conducibili all'interno dei sistemi stessi.
7. Cfr. Bremer, 2005, cap. 13.
8. «I Teoremi Limitativi della metamatematica classica sono visti di solito come quantomeno spiacevoli, se non tali da porre spinosi problemi filosofici. Con l'eccezione del Teorema di Löwenheim-Skolem [su cui mi soffermerò fra poco] [...] l'aritmetica paraconsistente è libera da tutti questi Teoremi, e quindi problemi. Il fatto che una teoria risolve problemi che affliggono le sue rivali è ampiamente riconosciuto come qualcosa che depone fortemente a suo favore» (Priest, 1994, p. 342).
9. Cfr. Priest, Routley, 1989d, pp. 527-8.
10. Con qualche eccezione, ad esempio Detlefsen, 1979.
11. Priest, 1994, p. 343.
12. «Mentre la teoria dei tipi evita le contraddizioni escludendo del tutto dalla lingua le formule non stratificate, noi potremo ottenere lo stesso risultato continuando ad accettare le formule non stratificate, ma limitando però la sola R3 [*scil.* il nostro Principio di Comprensione (PC)], esplicitamente, alle formule stratificate. Seguendo questo metodo abbandoniamo la gerarchia dei tipi e consideriamo priva di qualsiasi restrizione la gamma delle variabili. La nostra lingua logica sarà una lingua che abbraccia tutte le formule, nel senso originariamente definito [...]. Ma la nozione di formula stratificata, spiegata semplicemente in termini di sostituzione di numerali a variabili e spogliata di qualsiasi connotazione tipologica, sopravvive in questo: che sostituiamo la R3 con la regola più debole [ossia (PC_{NF})]» (Quine, 1937, p. 86).
13. Wang, 1986, p. 640.
14. Cfr. Quine, 1951.
15. Woods, 2003, p. 167.
16. Cfr. Quine, 1937, pp. 86-7; e le osservazioni di Casari, 1972, p. 101.
17. Cfr. da Costa, 1974, pp. 318-21.
18. Cfr. ivi, pp. 319 ss.; Marconi, 1979, pp. 55-6.
19. Come ha detto Marconi, «sembra infatti che uno degli obiettivi che si vogliono raggiungere, costruendo un sistema paraconsistente di teoria degli insiemi, sia di evitare ogni restrizione nella formulazione degli assiomi, perché le restrizioni, in un sistema di tipo classico, servono appunto ad impedire la formazione di insiemi antinomici, la cui "pericolosità" dovrebbe essere annullata in un sistema paraconsistente. In altri termini, restrizioni allo schema di comprensione fanno a pugni con lo "spirito" di un sistema paraconsistente» (Marconi, 1979, p. 306).

20. «Gli appelli all'uso ordinario non ristretto della comprensione nella formazione di insiemi sono persuasivi, perché riflettono il fatto che la formazione di insiemi non è limitata da alcuna restrizione di qualsiasi tipo. *Ogni* condizione – sia intensionale, paradossale, o quel che si vuole – determina un insieme attraverso il principio di comprensione» (Routley, 1979b, p. 915).

21. Ivi, pp. 914-5.

22. Ad esempio Aczel, 1988.

23. Mentre questa è una formulazione schematica, la versione *higher order* che quantifica variabili predicative ci darebbe il Principio di Indiscernibilità degli Identici:

(InId) $\forall xy(x = y \rightarrow \forall P(P(x) \leftrightarrow P(y)))$.

La formulazione al secondo ordine è stata difesa nel pregevole Cartwright, 1971. Integrando con l'implicazione inversa, ossia il Principio di Identità degli Indiscernibili:

(IdIn) $\forall xy(\forall P(P(x) \leftrightarrow P(y)) \rightarrow x = y)$

(che è molto più controverso) abbiamo la concezione originaria di Leibniz nella sua pienezza.

24. Routley, 1979b, p. 922.

25. E vale anche per (la corrispondente estensione di) LP di Priest. Anzi, in Priest (1979, p. 234) questa viene introdotta come una «verità autoevidente».

26. Routley, 1979b, p. 924.

27. Cfr. ivi, pp. 924 ss.

28. Cfr. ivi, p. 927.

29. Priest, 1987, p. 179.

30. Cfr. Brady, 1989; Brady, Routley, 1989.

31. Priest, 1987, p. 180.

32. Cfr. Mortensen, 1995, pp. 141-6; Woods, 2003, p. 170.

33. Cfr. Brady, 2000, pp. 129 ss.

34. Bremer, 2005, p. 144.

35. Cfr. Brady, 2000, p. 131.

36. Cfr. ivi, pp. 131-2.

37. Priest, 1995, p. 3.

38. Ad esempio in Russell, 1903, parr. 346-9.

39. Priest, 1995, p. 143.

40. Cfr. ivi, pp. 133, 144, 148, 160; Bremer, 2005, p. 146.

41. $log(x)$ è il più piccolo ordinale maggiore di tutti i membri di x.

42. Il paradosso di König è un paradosso della definibilità. Diciamo che qualcosa è *definibile* se c'è un'espressione nominale non indicale dell'italiano che lo denota. Sia allora D l'insieme dei numeri ordinali definibili. L'italiano ha un vocabolario finito, quindi possiede al massimo una quantità numerabile di espressioni nominali; ma l'insieme degli ordinali Ω, naturalmente, è più che numerabile, quindi certi ordinali non sono definibili. Ω è bene ordinato, dunque c'è il più piccolo ordinale indefinibile, ossia tale che non è in D. Ma io l'ho appena definito.

43. Priest, 1995, p. 183.

44. Ivi, p. 186.

12
Aritmetiche contraddittorie

12.1
Aritmetiche paraconsistenti di Meyer e Routley, R# e DKA

La prima aritmetica paraconsistente sistematicamente sviluppata è stata l'aritmetica rilevante R# di Robert Meyer, ottenuta aggiungendo alla logica rilevante R assiomi di Peano corrispondenti ai (PA1)-(PA7) che abbiamo incontrato al CAP. 4 per (la versione standard, al primo ordine, di) PA. La differenza di interpretazione sta nel fatto che il condizionale che vi compare è quello rilevante[1]. Meyer ha mostrato che R# può rappresentare tutte le funzioni ricorsive, e soprattutto ne ha fornito una prova (lunga mezza pagina) di non-trivialità. R# non è triviale nel senso che $0 = 1$ non vi è dimostrabile; e la prova è ottenuta con mezzi finitari formalizzabili all'interno di R#. Tuttavia, Routley ha rilevato che R# presenta alcune stranezze: c'è una discrepanza fra i principi dell'addizione e quelli della moltiplicazione e l'incorporazione pura e semplice degli assiomi di Peano dà luogo ad alcune implicazioni irrilevanti, contrarie allo spirito della stessa logica rilevante sottostante (ad esempio, ogni equazione numerica corretta implica qualsiasi teorema)[2].

Per rimediare a ciò, egli ha proposto un'aritmetica dialettica DKA, ottenuta aggiungendo alla logica dialettica DKQ i seguenti assiomi aritmetici "rilevanti" (con $\tau =_{df} 1 = 1$):

(A1) $\forall xy(x = y \wedge \tau \rightarrow Succ(x) = Succ(y))$
(A2) $\forall xy(Succ(x) = Succ(y) \wedge \tau \rightarrow x = y)$
(A3) $\forall xyz(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$
(A4) $\forall xy(x = y \rightarrow y = x)$
(A5) $\forall x(Succ(x) \neq 0)$
(A6) $\forall x(x + 0 = x)$
(A7) $\forall xy(x + Succ(y) = Succ(x + y))$
(A8) $\forall x(x \times 0 = 0)$
(A9) $\forall xy(x \times Succ(y) = (x \times y) + x)$.

Il Principio di Induzione Matematica è poi introdotto in forma di regola:

$$\frac{\alpha[x/0],\ \alpha[x] \rightarrow \alpha[x/Succ(x)]}{\forall x\alpha[x]} \qquad (\text{IMR})^{3}$$

12.2
n = n + 1

L'aspetto filosoficamente più interessante dell'aritmetica paraconsistente, tuttavia, emerge ancora una volta non da un approccio *proof-theoretic* impegnato a trovare la "giusta" assiomatizzazione, bensì da una discussione sulla semantica e l'ontologia sottostanti a questo tipo di teorie. Il problema fondamentale della filosofia della matematica probabilmente consiste nella domanda: che cosa sono i numeri? Ora, se rendiamo paraconsistente non solo la logica sottostante alla matematica ordinaria, ma anche la teoria degli insiemi che ne fornisce i fondamenti, la matematica diventa paraconsistente in un senso piuttosto rilevante: sono ammessi *oggetti* contraddittori, come gli insiemi paradossali di cui si è detto. E c'è da attendersi che vi siano anche *numeri* contraddittori. Questo è proprio ciò che è accaduto con le aritmetiche paraconsistenti; vediamo dunque di che si tratta.

12.2.1. Numeri naturali, soprannaturali e innaturali

Cominciamo anche questa storia, manco a dirlo, con Gödel. Si è osservato che, nella presentazione del Primo Teorema di Incompletezza dell'aritmetica contenuta nella prima sezione, indimostrabilità e irrefutabilità (indimostrabilità della negazione) dell'enunciato gödeliano γ sono, per così dire, asimmetriche: l'indimostrabilità di γ richiede la consistenza di PA, mentre l'irrefutabilità richiede la sua ω-consistenza. E la ω-consistenza è una condizione più forte della consistenza semplice: come dice Gödel, «ogni sistema ω-coerente naturalmente, è coerente. [...] Tuttavia, il reciproco non vale»[4]. Ora, uno degli esiti più sorprendenti del Primo Teorema di Gödel, legati a questa asimmetria, è la non categoricità di PA, ossia l'esistenza dei cosiddetti *modelli non standard* per l'aritmetica.

Il modello standard N, ossia quello a cui ho fatto riferimento nella prima parte come all'interpretazione intesa di PA, è quello costituito dai numeri naturali e dalle operazioni su di essi che la maestra ci ha insegnato alle scuole elementari. È rispetto a questo modello che si dice che γ è *vero*, assumendo naturalmente la verità *simpliciter* come verità nell'interpretazione intesa. Ma siccome γ è indecidibile in PA, ossia né dimostrabile né refutabile, non solo la teoria PA + γ, ma anche la teoria PA + $\neg\gamma$, è consistente. In particolare, PA + $\neg\gamma$ è ω-*inconsistente*, ma consistente: contiene enunciati falsi (per l'appunto: $\neg\gamma$), ma falsi solo *rispetto* al modello standard N[5]. Possiamo attenderci che, essendo consistente, PA + $\neg\gamma$ abbia un modello (sia K tale modello). In quanto PA + $\neg\gamma$ include PA, sappiamo che K soddisfa gli assiomi di Peano al primo ordine. Ma poiché PA + $\neg\gamma$ include anche $\neg\gamma$ che *non* è soddisfatta (è falsa) nel modello standard, K $\neq$ N. K è per l'appunto un *modello non standard* per l'aritmetica di Peano. Questo è l'esito delle note ricerche di Henkin[6]. Negli anni Cinquanta Henkin mostrò, per l'appunto, l'esistenza di modelli non standard che falsificavano l'enunciato gödeliano[7]. E, come ha detto Enrico Moriconi:

Il problema che questa discrepanza fa emergere è che quando si definisce il linguaggio formale di PA *si ha in mente un certa nozione di fissata* di numero, cioè un certo preciso *modello* (quello che cerchiamo di catturare con i numerali). Tutte le definizioni sintattiche (termine, formula ecc.) sono definizioni induttive che *presuppongono* quella base numerica. Ma la teoria – ce lo ha fatto sapere proprio [il Primo Teorema di Incompletezza] – ha diversi modelli non-standard e non è possibile vincolare "∀" in modo che vari solo sui numeri standard[8].

Naturalmente, questi strani numeri che abitano i modelli inattesi di PA si comportano in modo consistente – anzi, è proprio la consistenza a garantirli: appartengono a modelli di una teoria ω-inconsistente, ma consistente. In *Gödel, Escher, Bach,* Hofstadter ha poeticamente proposto di chiamare «i numeri di cui ¬[γ] ci porta l'annuncio *numeri soprannaturali*»: e «il modo migliore di raffigurarsi questi numeri soprannaturali è quello di considerarli interi più grandi di tutti i numeri naturali: interi *infinitamente grandi*»[9]. Ora, i modelli per aritmetiche paraconsistenti incorporano una deviazione, per così dire, "reciproca" rispetto alla storia che ho appena raccontato. Le loro proprietà sono state investigate da Priest in un saggio apparso su "Mind", a cui ho già fatto riferimento, e che adopera LPQ come logica di base: questi modelli hanno meno numeri di quelli ammessi nel modello standard, e in particolare hanno numeri contraddittori – potremmo chiamarli numeri *subnaturali*, o meglio ancora *innaturali*.

La prospettiva delle aritmetiche paraconsistenti è dunque dichiaratamente finitista: l'intuizione sottostante, a quanto pare, dovrebbe essere quella per cui nel mondo vi è un numero finito, ancorché molto grande e a noi ignoto, di oggetti. Non sappiamo quale sia, ma sappiamo che dev'essere «più grande del numero delle combinazioni di particelle fondamentali del cosmo, più di qualsiasi numero che possa essere materialmente specificato in una vita intera»[10] (il che dovrebbe spiegare perché le nostre intuizioni su di esso sono piuttosto vacillanti).

12.2.2. Il Lemma di Collassamento

Supponiamo che n sia questo numero innaturale massimo. Sia quindi N l'insieme degli enunciati aritmetici veri nel modello standard N, e N_n l'insieme degli enunciati veri nel modello paraconsistente con numero massimo n: «N_n è una teoria nella logica paraconsistente LP»[11]. Oltre a essere, naturalmente, inconsistente (contiene, fra le altre cose, sia il proprio enunciato gödeliano che la sua negazione), N_n ha, dice Priest, le seguenti piacevoli proprietà: anzitutto include propriamente in sé N; poi, ogni enunciato numerico della forma $x = y$ ($x \neq y$), con $x < n$ e $y < n$, è contenuto in N se e solo se lo è in N_n; infine, include il proprio predicato di verità[12]. Com'è fatto questo modello (non standard) per N_n? Lo si ottiene *filtrando* appropriatamente il modello standard N, in modo da ridurne la cardinalità.

Prima di venire sfruttato da Priest, il filtro è stato proposto da Meyer e Mortensen in un saggio apparso sul "Journal of Symbolic Logic"[13], che costituisce a tutt'oggi la presentazione più dettagliata di questa tecnica. Nella sua forma più generale, funziona all'incirca come segue: sia D il dominio di un modello M, e $\approx$ una relazione di equivalenza definita su D. Dati quindi gli oggetti $o_1, ..., o_n$ appartenenti a D, $|o_1|, ..., |o_n|$ sono le corrispondenti classi di equivalenza sotto $\approx$. Sia ora $M^{\approx}$ il nuovo modello (detto il "modello collassato"), il cui dominio è $D^{\approx} = \{|o| \mid o \in D\}$. Il ruolo di $M^{\approx}$ è quello di fornire sostituti per gli oggetti originali, e in particolare di identificare i membri di D in ciascuna classe di equivalenza, formando così un individuo composto, che eredita le proprietà dei componenti: i predicati veri degli individui originari si applicano ora al sostituto. Qui entra in gioco il Lemma di Collassamento cui accennavo alla fine del capitolo precedente:

(LC) Data una qualunque formula α che ha il valore di verità v in M, essa ha il valore di verità v anche in $M^{\approx}$.

La prova di (LC) fornita da Priest è per induzione sulla complessità delle formule[14]. L'idea è che allorché si fa collassare il modello M in $M^{\approx}$, nessun enunciato perde mai un valore di verità: può solo acquistarne. Naturalmente, quando il modello iniziale è quello di una teoria standard, con sottostante logica classica, i valori sono solo il vero e il falso. Ma nel modello collassato può accadere che una formula che era solo vera o solo falsa divenga vera *e* falsa, ossia paradossale – come si ricorderà, l'insieme dei valori in LP(Q) è $\{\{1\}, \{0\}, \{1, 0\}\}$. Si capisce che questo accada precisamente quando il collassamento dà luogo a un oggetto contraddittorio, ossia identifica in una classe di equivalenza oggetti, uno dei quali ha, e l'altro dei quali non ha, una stessa proprietà.

Nel caso di N_n, il trucco sta nello scegliere per N un filtro che (*a*) dato un numero $x < n$, mette soltanto x e nient'altro nella corrispettiva classe di equivalenza, cosicché $|x|$ eredita tutte e sole le proprietà di x; e (*b*) mette ogni numero $y \geq n$ in un'unica classe di equivalenza. Di conseguenza, tutte le equazioni vere (false) coinvolgenti ogni numero minore di n nel modello standard rimangono solo vere (solo false) del suo sostituto. Questo è il motivo per cui fino al nostro numero innaturale le cose vanno come nell'aritmetica standard. Ma tutto quello che si poteva dire veramente (falsamente) di ogni numero maggiore di n è ora vero (falso) del nostro numero innaturale[15]. Molti enunciati intorno a n sono quindi ora paradossali (veri *e* falsi), e «n è ovviamente [diventato] un oggetto inconsistente». In particolare, $n = n + 1$ è vero (oltre a essere falso), ossia n è il successore di se stesso[16].

Priest ha detto che il Lemma di Collassamento è «il definitivo Teorema Discendente di Löwenheim-Skolem»[17], e si capisce perché. La metà discendente del Teorema di Löwenheim-Skolem, infatti, dice che una qualsiasi teoria formulata in linguaggio del primo ordine, se ha un modello con un dominio infinito, allora ha un modello con un dominio infinito numerabile[18]. Il filtro e il Lemma di Collassamento ci consentono di "scendere" ancora, nel senso che riducono un modello della cardinalità dei naturali a uno di cardinalità inferiore. In generale, otteniamo un modello $M^{\approx}$, il cui dominio $D^{\approx}$ ha cardinalità k (inferiore a quella del modello originario), scegliendo una relazione di equivalenza che abbia proprio k classi di equivalenza[19].

12.2.3. Turing *vs* Wittgenstein

Perché dovremmo preferire N_n a N? Ovvero, perché il giusto modello per l'aritmetica sarebbe quello di N_n? Naturalmente, Priest rivendica i vantaggi metamatematici di N_n, ossia le già menzionate proprietà di completezza, decidibilità ecc. Ma come la mettiamo con l'applicazione concreta del calcolo contraddittorio? Una volta Alan Turing obiettò a Wittgenstein che, se l'aritmetica fosse inconsistente, quando gli ingegneri l'adoperassero per costruire ponti, questi crollerebbero. Il dialogo è così spassoso che vale la pena di ascoltarne un pezzo:

Turing: Non puoi applicare un calcolo con confidenza finché non sai che non contiene contraddizioni latenti.

Wittgenstein: A me sembra che tu stia commettendo un errore enorme. Infatti il tuo calcolo fornisce certi risultati e tu vuoi che il ponte non crolli. Direi che possono esserci solo due modi in cui le cose vanno male: o il ponte crolla o hai fatto un errore di calcolo, per esempio hai moltiplicato male. Ma tu sembri persuaso del fatto che ci sia anche un terzo modo: il calcolo è sbagliato.

Turing: No. Quello che non mi va è che il ponte crolli.

Wittgenstein: Ma come fai a sapere che crollerà? Non è questa una faccenda di fisica? Può accadere che si ricorra al lancio dei dadi per calcolare la costruzione del ponte e che questo non crolli mai.

Turing: Se si adotta il simbolismo di Frege e s'insegna a una persona la tecnica della moltiplicazione in quel simbolismo, allora, usando il paradosso di Russell, costui potrebbe ottenere una moltiplicazione sbagliata.

Wittgenstein: Ma questo significherebbe fare qualcosa che non potremmo chiamare moltiplicare. Diamo a costui una regola per moltiplicare e, quando arriva a un certo punto, può andare avanti in due modi, uno dei quali lo conduce del tutto fuori strada[20].

...E così via. Il fatto però è che il bivio in cui le aritmetiche paraconsistenti si separano da quella classica, e i numeri innaturali scendono in campo, è spostato abbastanza in là da non generare comunque i guai paventati da Turing. Un matematico classicista e un paraconsistentista sarebbero poco distinguibili: tutti e due conterebbero nello stesso modo: $0, 1, ...n, n + 1, ...$; e tutti e due sommerebbero e moltiplicherebbero sulla base delle stesse regole[21]. Certo, da n in poi il paraconsistentista direbbe anche, per ogni $x > n$, che x è identico a n (oltre a dire, insieme al classicista, che è diverso da n). Ma questa differenza è poco rilevante nella pratica quotidiana: n è così grande che non riguarda certo i calcoli fatti dai fisici, o dagli ingegneri (i cui ponti talora crollano, a prescindere da questioni di contraddittorietà).

12.2.4. Alla ricerca dei numeri impossibili

Priest e Uwe Petersen hanno fornito un argomento per *provare* l'esistenza di un simile oggetto contraddittorio, ossia di un numero innaturale $n = n + 1$. L'argomento, naturalmente, è un tipico paradosso dell'autoriferimento, e nella versione informale suona come segue. Consideriamo la descrizione definita:

(π) Il più piccolo numero tale che questa descrizione si riferisce ad esso (o a 0 se il riferimento fallisce) + 1.

Non è difficile fornire una versione acontestuale di π (senza "questa descrizione" ecc.), con una tecnica di gödelizzazione-diagonalizzazione analoga a quella considerata nella prima sezione[22]. La descrizione, dice Priest, si riferisce comunque a un numero visto che, se il suo riferimento fallisse, si riferirebbe a 1. Abbiamo dunque:

1. π = (il più piccolo numero x tale che "π" si riferisce a x) + 1.

Ora, siccome "π" si riferisce univocamente a π, π *è* effettivamente il più piccolo numero a cui "π" si riferisce. Quindi, in base a (1):

2. $\pi = \pi + 1$,

da cui per generalizzazione esistenziale:

3. $\exists x(x = x + 1)$,

e N_n contiene per l'appunto l'affermazione (3). Ovviamente, l'argomento non è gran che informativo sulla natura del nostro numero contraddittorio. Tuttavia, conclude Priest, «il fatto che non riusciamo a produrre un candidato per x» potrebbe convalidare indirettamente il suo status di numero «così grande da non avere significato psicologico [...] nel senso appropriato»[23].

Note

1. Cfr. Meyer, 1976; cfr. anche Bremer, 2005, p. 151.

2. Cfr. Routley, 1979b, p. 929.

3. Anche DKA è non-triviale, nel senso che non prova cose come 0 = 1 o 0 ≠ 0. Anche in questo caso la prova fornita da Routley è finitaria e rappresentabile in DKA, che dunque «sfugge al secondo teorema di Gödel» (cfr. ivi, pp. 930-4).

4. Gödel, 1931, p. 39. Come spiega Agazzi, «l'ω-coerenza [...] è una coerenza di tipo *puramente aritmetico*, tale che deve cioè potersi verificare passando in rassegna uno per uno tutti i numeri naturali, quando ad essi venga attribuita una certa proprietà (e questo appunto ci dice che si tratta di un tipo di coerenza che implica l'impiego della nozione di ricorsività). [...] La ω-coerenza è riservata a sistemi formali che contengono la formalizzazione dell'aritmetica; essa non ha quindi un uso logico generale» (Agazzi, 1961, p. 176). Peraltro, B. Rosser ha ridimostrato il Primo Teorema di Incompletezza usando solo la coerenza semplice e sfruttando il principio del buon ordinamento dei naturali (cfr. Rosser, 1936).

5. E, dice Agazzi, «ecco allora il punto dello scandalo: [γ] era una proposizione non derivabile, ma tuttavia aritmeticamente valida, ed ora si scopre che un sistema che contiene una espressione formale negante una formula valida è dotato di coerenza (sia pure solo di semplice coerenza)» (Agazzi, 1961, p. 192).

6. Cfr. Henkin, 1947, 1950.

7. Modelli non standard per l'aritmetica, per la verità, erano stati costruiti già da Skolem negli anni Trenta: cfr. Kleene, 1976, p. 66.

8. Moriconi, 2001, p. 229, corsivi miei.
9. Hofstadter, 1979, pp. 490-1.
10. Priest, 1994, p. 338.
11. Ivi, p. 337.
12. Cfr. ivi, pp. 337-8.
13. Cfr. Meyer, Mortensen, 1984.
14. Cfr. Priest, 1991, 1994, pp. 346-7; un risultato simile, peraltro, è già in Dunn, 1979.
15. Perciò, come ammette Priest, «la specificazione [del modello] di N_n qui fornita è parassitaria rispetto a una comprensione dell'interpretazione standard». Tuttavia, egli aggiunge che sarebbero possibili «specificazioni indipendenti (ancorché pedagogicamente più complesse)» (Priest, 1994, p. 338 in nota).
16. Ivi, p. 338.
17. Priest, 1995, p. 190.
18. Una delle conseguenze del Teorema Discendente è il cosiddetto paradosso di Skolem: essendo formulabile al primo ordine, la stessa teoria degli insiemi ha un modello della cardinalità dei naturali, mentre essa al proprio interno dimostra che vi sono insiemi di cardinalità maggiore di quella dei naturali.
19. Bremer ha quindi proposto di battezzare il seguente Teorema di Löwenheim-Skolem Paraconsistente: «qualsiasi teoria matematica presentata nella logica del primo ordine ha un modello paraconsistente *finito*» (Bremer, 2005, p. 155).
20. Cfr. Wittgenstein, 1976, p. 229.
21. Cfr. Priest, 1994, p. 340.
22. Cfr. i dettagli ivi, p. 348.
23. Ivi, p. 342.

Parte quarta
Problemi

Si può dimostrare l'impossibilità [di negare il Principio di Non-Contraddizione], per via di confutazione: a patto, però, che l'avversario dica qualcosa.

Aristotele (ca. 335-322 a.C.)

Sembra che il dialeteismo diminuisca ciò che possiamo dire.

R. M. Sainsbury (2004)

13
Ipercontraddizioni

13.1
"Questo enunciato è vero e falso, né vero né falso, vero e falso e né vero né falso..."

Alla fine del CAP. 2 abbiamo ipotizzato che qualsiasi soluzione consistente del paradosso del mentitore vada incontro al suo mentitore rafforzato. Se rinunciamo alla bivalenza, abbiamo cose come "Questo enunciato è falso o né vero né falso"; se suggeriamo una gerarchia di metalinguaggi, abbiamo "Questo enunciato è falso al proprio ordine"; vecchi paradossi sono resi trattabili solo per essere sostituiti da nuovi. Allora, suggerisce il dialeteista, meglio accettare queste contraddizioni e modificare la nostra logica in modo che non comportino detonazione. Tuttavia, nella letteratura più recente serpeggia l'idea che anche la paraconsistenza forte possa avere un suo *revenge Liar*: che cioè sia possibile costruire, adoperando certe nozioni tipiche del dialeteismo, un mentitore rafforzato intrattabile anche per chi accetta le contraddizioni – ad esempio, perché è tale da produrre l'equazione $1 = 0$ nei valori di verità ammessi, col risultato di trivializzare il sistema rendendo tutti gli enunciati egualmente sia veri che falsi. Un tale paradosso sarebbe una *ipercontraddizione*.

Curiosamente, il primo a parlare di ipercontraddizioni è stato proprio Graham Priest. Cominciamo questa storia con l'innocuo insieme dei valori di verità classici:

$$V_0 = \{1, 0\}.$$

La semantica di LP che ho presentato nella seconda sezione si ottiene facendo l'insieme potenza dei valori classici, e togliendo l'insieme vuoto (niente *gaps*). Dunque l'insieme dei valori di verità per LP è:

$$V_1 = P(V_0) - \varnothing = \{\{1\}, \{0\}, \{1, 0\}\}.$$

Sappiamo che la lettura intuitiva dei valori è: (solo) vero, (solo) falso, vero e falso (o paradossale); e, si badi, l'idea iniziale è che questi valori siano esaustivi ed *esclusivi*: un enunciato dovrebbe avere uno e uno solo dei tre. I valori designati sono $\{1\}$ e $\{1, 0\}$, e i connettivi sono interpretati come operazioni sull'insieme V_1.

In un saggio del 1984, intitolato proprio *Hyper-contradictions*, Priest si è chiesto se non fosse possibile, una volta posto V_1 ossia i tre valori iniziali della semantica di LP, considerare enunciati che «prendono valori impossibili come sia vero che falso ({1, 0}) e solo vero ({1})», e la risposta è stata affermativa. Inoltre, «se ammettiamo che un enunciato prenda due valori reciprocamente esclusivi, sembra che non ci sia ragione per non ammettere enunciati che ne prendono in numero arbitrario"[1]. Potremmo iterare l'operazione di passaggio all'insieme potenza, che ci ha fatto passare dai valori standard a quelli di LP. Potremmo avere:

$$V_2 = P(V_1) - \varnothing.$$

Una volta che siamo in corsa, naturalmente, possiamo produrre un'intera gerarchia, caratterizzata per ricorsione:

$$V_0 = \{1, 0\}$$
$$V_{n+1} = P(V_n) - \varnothing.$$

Quali saranno i valori designati? In conformità allo spirito di LP, dovrebbero essere quelli in cui figura *qualche* vero, ossia in cui c'è un 1 a qualche livello di profondità negli insiemi di valori. E naturalmente, anche i valori designati saranno infiniti. Ma Priest non è stato troppo disturbato dalla situazione, anzi ha ritenuto semplicemente di poter *accettare* l'intera struttura semantica.

Una volta ammesso il primo passaggio da V_0 a V_1, e quindi una volta ammessi enunciati paradossali, veri e falsi, solo la relazione di conseguenza logica muta (come si ricorderà, la conseguenza in LP non è classica, mentre tutte le tautologie classiche sono tautologie di LP). Ma gli ulteriori gradi della gerarchia non cambiano neanche la relazione di conseguenza logica definita per LP usando V_1. Così, Priest ha dichiarato che «le ipercontraddizioni non fanno differenza»[2]. Si capisce la motivazione filosofica sottostante: una volta ammesse contraddizioni – di tipo (C2), ossia enunciati veri e falsi –, enunciati che prendono un numero indefinito di valori reciprocamente esclusivi hanno tutta l'aria di essere solo contraddizioni in più da issare a bordo del vascello dialeteista. E così, negli scritti successivi Priest è ritornato ai tre valori di LP.

13.2
Il supermentitore

Ma Anthony Everett e Timothy Smiley hanno mostrato che le cose non sono così semplici. Come sappiamo, il tipico mentitore rafforzato dice:

1. (1) non è vero.

Sulla base della concezione priestiana, la funzione semantica di valutazione *v* assegna a (1) valore {1, 0}, ossia (1) è vero e falso, e tutto funziona. Consideriamo però il seguente mentitore rafforzato:

2. (2) è solo falso.

Ciò che (2) fa è attribuire a se stesso precisamente il valore di verità non designato {0}, ossia la semplice falsità. Formalmente, (2) è un enunciato λ_s tale che (nella notazione semantica adottata da Priest che ho presentato nel capitolo su LP):

(PF$_{\lambda s}$) $\lambda_s \leftrightarrow v(\lambda_s) = \{0\}$.

λ_s dà esiti disastrosi, *se* la semantica di LP è costruita con la *funzione* di valutazione *v*. Partiamo con V_1, ossia con i tre valori originari di LP, e supponiamo che λ_s sia o *solo vero*, o *vero e falso*: $v(\lambda_s) = \{1\}$, oppure $v(\lambda_s) = \{1, 0\}$. In ambo i casi,

3. $1 \in v(\lambda_s)$.

Il T-schema nella notazione di Priest suona:

(T) $1 \in v(\alpha) \leftrightarrow \alpha$[3].

Allora possiamo applicare il *modus ponens* a (3) e all'istanza del T-schema per λ_s, e avremo λ_s; ossia, per (PF$_{\lambda s}$),

4. $v(\lambda_s) = \{0\}$.

Presi insieme, (3) e (4) ci dicono che $1 \in \{0\}$, e dunque $1 = 0$ e $\{1\} = \{0\}$. Supponiamo allora che λ_s prenda l'ultimo valore a disposizione: λ_s è *solo falso*, ossia vale (4). Da (PF$_{\lambda s}$) e (4) deriviamo ancora λ_s. Da λ_s e dal(l'istanza per λ_s del) T-schema, per *modus ponens*, segue daccapo (3). Anche in questo caso abbiamo (3) e (4) insieme, da cui $1 \in \{0\}$, e dunque $1 = 0$ e $\{1\} = \{0\}$. In tutti i casi salta ogni differenza fra verità e falsità!

Ora, il problema si presenta *anche* se ammettiamo una gerarchia transfinita di valori come quella vista al paragrafo precedente. L'apparato priestiano esteso mira comunque a *distinguere* un enunciato che assume un valore designato (ossia che contiene 1 a qualche livello di profondità) da uno che non lo fa; e consente sempre di produrre un supermentitore del tipo di (2) o λ_s, ossia un enunciato che asserisce di se stesso di essere solo falso: questo «è *genuinamente* monovalente, [ma] non può essere valutato dalla semantica di Priest (1984b) come vero e falso insieme a meno che non identifichiamo questi due valori»[4]. L'argomento per il supermentitore adopera solo nozioni insiemistiche di base, *modus ponens*, sostitutività di equivalenti, e il T-schema. Il risultato di tutto ciò, osservava Smiley, è che «un dialeteista deve smetterla di parlare del "valore di verità di *A*", e smetterla di trattare le valutazioni come funzioni che hanno valori di verità come oggetti»: e ciò perché «il problema del dialeteista è che non può mai essere sicuro di avere genuine funzioni a un solo valore»[5]. Everett riteneva che ciò «distrugg[esse] l'apparato richiesto per distinguere valutazioni designate e non designate»[6].

13.3
Semantica relazionale e problema dell'esclusione

Ma non è stato così. Negli scritti successivi al 1993, Priest e gli altri autori che hanno adoperato LP (come Manuel Bremer, J. C. Beall ecc.) hanno effettivamente sostituito la funzione semantica con una *relazione* di valutazione, e mostrato che le cose vanno meglio esprimendo le condizioni di verità (in un'interpretazione) in termini relazionali. Ad esempio, in Priest (1998) abbiamo una relazione R fra enunciati e valori di verità, e la semantica per i connettivi estensionali diventa:

(S¬1) $R(\neg\alpha, 1) \Leftrightarrow R(\alpha, 0)$

(S¬2) $R(\neg\alpha, 0) \Leftrightarrow R(\alpha, 1)$

(S∧1) $R(\alpha \wedge \beta, 1) \Leftrightarrow R(\alpha, 1)$ e $R(\beta, 1)$

(S∧2) $R(\alpha \wedge \beta, 0) \Leftrightarrow R(\alpha, 0)$ o $R(\beta, 0)$

(S∨1) $R(\alpha \vee \beta, 1) \Leftrightarrow R(\alpha, 1)$ o $R(\beta, 1)$

(S∨2) $R(\alpha \vee \beta, 0) \Leftrightarrow R(\alpha, 1)$ e $R(\beta, 1)$[7].

Anche se questo aggirasse il problema posto da Smiley ed Everett, non è affatto sicuro che risolva tutti i problemi. Ad esempio, recentemente Joachim Bromand ha sviluppato una ipercontraddizione che colpirebbe anche una semantica relazionale per LP, impedendole daccapo di distinguere le nozioni di *solo vero* e *solo falso*[8]. L'ipercontraddizione di Bromand è giocata sulla matematica e sull'insiemistica sottostanti alla semantica relazionale. Si comincia adoperando il Principio di Comprensione: naturalmente, questo in una prospettiva paraconsistente non ha restrizioni, dunque consente per ogni enunciato di astrarre l'insieme dei suoi valori di verità, ossia l'insieme dei valori con cui è nella relazione R. Si introduce allora un supermentitore che si attribuisce, come insieme dei propri valori, il singoletto $\{0\}$. È quindi daccapo un mentitore del tipo di (2), ossia un enunciato che dice di essere *solo falso*, ma riprodotto nel nuovo quadro relazionale. Un ragionamento per casi porta di nuovo a concludere $1 = 0$[9].

La possibilità di produrre simili supermentitori, con le connesse ipercontraddizioni, nel complesso fa dubitare della soluzione dialeteista dei paradossi semantici. Il suo pregio non doveva essere il raggiungimento dell'universalità semantica, ossia la capacità di non *bandire* alcuna espressione significante dal linguaggio per cui si dà la semantica? Invece, «come nelle versioni precedenti, LP [con semantica relazionale] fallisce come soluzione dei paradossi semantici perché nozioni cruciali per la specificazione della teoria non possono essere adeguatamente rappresentate al suo interno»[10].

Il dibattito sul trattamento delle ipercontraddizioni è vivo e in rapida evoluzione. Ad esempio, Bremer ha cercato di rispondere a Bromand riparando sulle proprietà delle aritmetiche paraconsistenti (ossia adoperando il numero innaturale $n = n + 1$, in un'aritmetica in cui però evitiamo il disastroso esito trivializzante). Questa potrebbe sembrare a qualcuno una soluzione un po' *self-contained*, visto che un'aritmetica paraconsistente viene adoperata per salvare una logica, come LP, che a sua volta dovrebbe sottostarle. Fra le leggi logiche a cui bisogna rinunciare per far funzionare il marchingegno, poi, vi sono la Contrapposizione, e soprattutto (SI), la Sostitutività dell'Identità[11]. Il dialeteista può sostenere che la mossa non è del tutto *ad hoc*, perché, come abbiamo visto nella sezione precedente, vi sono ragioni per rifiutare il trattamento leibniziano dell'identità in un'insiemistica e in un'aritmetica paraconsistenti. Bremer fa anche appello al fatto che vi sono ragioni per rifiutare (SI) del tutto indipendenti dalla questione della paraconsistenza, ad esempio quelle avanzate dai teorici della cosiddetta "identità relativa" (un'idea già presente nel *Saggio sull'intelligenza umana* di Locke, e il cui principale sostenitore contemporaneo è Peter Geach)[12]. Per i fautori di questa posizione non ha senso dire in assoluto che x è identico a y. Ciò che ha senso è dire che x e y sono *lo stesso P*, dove "P" è un predicato che sta per una proprietà sortale; ma questo non implica la congruenza rispetto a tutti i predicati. Dunque, vale l'idea che x e y possano essere lo stesso P ma non lo stesso Q. Allora «quando realizziamo che c'è qualcosa che non va con la sostituzione di identici possiamo rigettare la critica per cui l'aggiramento della ipercontraddizione di Bromand è *ad hoc*»[13].

Greg Littmann e Keith Simmons (2004) hanno proposto ancora altri mentitori della vendetta a carico del dialeteismo. In particolare, hanno insistito sul fatto che, anche se adotta la propria aritmetica paraconsistente, il dialeteista ha comunque una certa idea della reciproca *esclusione* fra valori di verità. Detto altrimenti, poiché il dialeteista non è un trivialista, egli accetta una nozione di *falso che esclude il vero*, e accetta che *ci sono* enunciati (ad esempio "$0 = 1$") i quali istanziano questa nozione. Chiamiamo allora v il valore che il dialeteista stesso ascrive a questi enunciati, e possiamo costruire un "mentitore introspettivo":

5. (5) è v.

Se ora il dialeteista risponde che (5) è sia v che vero, «non possiamo capire che cosa intenda, se il valore di v è proprio quello di [$0 = 1$]». Ovvero, «se il dialeteista ascrive verità a un enunciato che è v, allora sembra che non abbia capito cosa vuol dire che un enunciato è v. Se si aggiunge "vero" a "v", non si ha più "v"»[14].

Littmann e Simmons sviluppano altri supermentitori, adoperando anche "valori grafici", ossia rappresentando graficamente l'annidamento di insiemi di valori di verità nei vari mentitori rafforzati. Ma a parte i dettagli, quel che è interessante nel loro approccio è che incomincia a emergervi un problema generale a carico del dialeteismo – un problema a mio parere più fondamentale di quello delle ipercontraddizioni, che ne costituisce solo un caso particolare. Possiamo etichettarlo come il problema dell'*esclusione*. Spiegare di che si tratta sarà il tema del prossimo capitolo.

Note

1. Priest, 1984b, p. 239 e nota.
2. Ivi, p. 241.
3. Si ricorderà che "$1 \in v(\alpha)$" dice che α è vero.
4. Everett, 1993, p. 40.
5. Smiley, 1993, pp. 31-2.
6. Everett, 1993, p. 41.
7. Cfr. Priest, 1998, pp. 412-3.
8. Cfr. Bromand, 2002.
9. Per una versione formalizzata dell'argomento, cfr. Bremer, 2005, pp. 193-4.
10. Bromand, 2002, p. 747.
11. Cfr. Bremer, 2005, pp. 195-8.
12. Cfr. Geach, 1962, 1968.
13. Bremer, 2005, p. 197. Un'interessante combinazione di paraconsistenza e trattamento non leibniziano dell'identità è proposta in Tanaka (1998b), per spiegare certi processi dinamici come la fissione e la fusione, che danno luogo a un problema molto discusso in ontologia analitica.
14. Ivi, p. 324.

14
Esclusione, o la rivincita del Principio

14.1
Prospetto

In questo capitolo considererò l'ultima difficoltà della prospettiva paraconsistente – a mio avviso, la più rilevante. L'ho etichettata come il problema dell'*esclusione*, ma potremmo chiamarlo anche problema dell'*autoapplicazione* della paraconsistenza[1]. Questo sarà anche il punto intorno al quale dirò la mia in modo più autonomo rispetto a tutti i capitoli precedenti. Peraltro, mostrerò come il problema che intendo sollevare sia stato variamente considerato nella letteratura sull'argomento. Anzi, lo si ritrova addirittura in Aristotele – precursore anche in questo.

Le argomentazioni a favore del (PNC) in Γ della *Metafisica* sono state variamente screditate da molti autori, da Lukasiewicz a Priest. Una delle critiche più comuni riguarda lo spostamento illecito che Aristotele effettuerebbe dall'inconsistenza alla trivialità: egli cerca di mostrare che *tutte* le contraddizioni sono necessariamente false, ma i suoi argomenti al massimo garantiscono che *alcune* contraddizioni sono necessariamente false, dunque funzionano contro il trivialismo, non contro il dialeteismo[2]. Anche la varietà delle formulazioni del Principio nella *Metafisica* è stata spesso assunta come testimonianza del fatto che Aristotele non aveva le idee chiare su ciò che intendeva difendere.

Eppure, molti critici non tengono conto di quella che, secondo Aristotele, dovrebbe essere una caratteristica necessaria del (PNC) a prescindere dal problema di quale delle sue formulazioni sia la più corretta od opportuna. Ciò che il (PNC) deve esprimere è la nozione profondamente metafisica di *incompatibilità*, o *esclusione*. A questa è connessa l'idea che ogni enunciato può avere un contenuto solo in quanto esclude qualcosa. Qualsiasi parlante che miri a produrre un enunciato significante deve implicitamente (*in actu exercito*, ancorché non *in actu signato*) concedere che con la sua asserzione esclude un qualche contenuto (che si dia un certo caso, o che un certo stato di cose sussista ecc.). Se non fosse in condizione di escludere *nulla*, il suo enunciato non significherebbe nulla, dunque non sarebbe neppure un *enunciato*. Di conseguenza, il dialeteista ha bisogno proprio del principio che intende congedare perché la sua teoria sia significativa e informativa.

In questo capitolo considererò l'argomentazione aristotelica, che porta il nome greco di ἔλεγχος, riassumendo il suo punto essenziale. Chi conosce la filosofia italiana sa che nessun autore ha esplorato l'argomento elenctico tanto approfonditamente quanto Emanuele Severino[3]. Mostrerò quindi che la letteratura internazionale, e in particolare *proprio* quella analitica, ha variamente riconosciuto il problema aristotelico-severiniano come un grosso guaio a carico del dialeteismo. Il dialeteista "coerente" ha cospicue difficoltà a *esprimere* i propri concetti fondamentali; a *escludere* le teorie rivali; e a veicolare attraverso la propria teoria contenuti determinati e informativi sui temi che intende trattare. Infine, fornirò una caratterizzazione della negazione in termini di una relazione primitiva di esclusione, e sosterrò che una formulazione del (PNC) che adopera questa negazione è imprescindibile anche dal punto di vista del dialeteista.

14.2
Le osservazioni informali di Aristotele sull'ἔλεγχος

Il punto di partenza sta nelle nostre normali nozioni di *petitio principii* – "non puoi comprare come premessa della tua prova proprio l'enunciato che intendi provare" – e *reductio ad absurdum*. In linea generale, un dialeteista si mette nella posizione di chi può, eventualmente, mantenere sia la propria intera teoria, o il proprio insieme di credenze, sia la nostra *reductio* che ne mostra l'inconsistenza, visto che, per ripetere Priest, «può seriamente considerare di accettare la contraddizione, e può alla fine decidere di accettarla»[4]. Timothy Smiley ha osservato che «il dialeteismo non è semplicemente una teoria *sulle* contraddizioni; richiede che chi lo teorizza ne asserisca alcune»[5] (vedremo fra poco come ciò avvenga). Se le cose stanno così, il dialeteista che mette in questione il (PNC) non può essere accusato di contraddirsi e, quindi, di dire qualcosa che è falso (o solo falso). In questo caso, come Aristotele ammette in modo esplicito, il difensore del (PNC) «cadrebbe palesemente in una petizione di principio»[6]. Questo non è il tipo di confutazione che possiamo sperare di ottenere.

Ma c'è un'altra confutazione ottenibile. Per farla funzionare, dice Aristotele, è necessario e sufficiente che il dialeteista dica *qualcosa*: «Qualcosa che abbia un significato e per lui e per gli altri; e questo è pur necessario, se egli intende dire qualcosa. [...] Se [...] l'avversario concede questo, allora sarà possibile una dimostrazione. Infatti, in tal caso, ci sarà già qualcosa di determinato»[7].

Il dialeteista può aspirare a dire qualcosa solo se implicitamente tien fermo, *in actu exercito*, che le sue parole non possono significare, o implicare, qualsiasi cosa. Ciò che in tal modo egli concede è una certa determinatezza del significato delle sue parole. Ora, è anzitutto importante notare che Aristotele non ha bisogno di supporre un linguaggio univoco, o dai significati *completamente* determinati. Egli ammette sempre che vaghezza, equivocità e ambiguità sono fenomeni pervasivi del linguaggio ordinario. Per produrre l'ἔλεγχος del dialeteista, tuttavia, basta molto meno, ossia una forma *minimale* di determinatezza: occorre che, attraverso gli enunciati prodotti nel suo tentativo di refutazione del (PNC), il dialeteista escluda *in actu exercito* che si dia un certo caso. Egli deve quindi escludere che le parole della sua refutazione – qualsiasi siano le precise parole usate – significhino, o implichino, qualcosa. Attraverso quest'esclusione implicita, continua Aristotele, è il negatore del (PNC), non il suo difensore, a commettere una particolare *petitio*: ha bisogno del principio che cerca di congedare perché le sue parole abbiano significato. Con l'ammissione implicita che le sue parole hanno un tal significato minimamente determinato – il che è la condizione del loro significare qualcosa, ossia del loro essere parole, anziché rumore – la posizione del dialeteista implica il (PNC). Nelle parole di Severino: «L'opposizione [di essere e non essere, sancita dal (PNC)] non può essere negata perché anche la [sua] negazione può vivere come negazione solo se, a suo modo, afferma l'opposizione. È questo il formidabile contributo dell'ἔλεγχος aristotelico. Se l'opposizione viene, in qualsiasi modo, negata e la negazione vuol essere negazione [...] allora la negazione si oppone al proprio negativo, cioè si tien ferma in quel significare per cui essa è negazione, e differenzia questo significare da ogni altro significare»[8]. Ciò è necessario, continua Severino, «se si vuole conferire alla negazione [del (PNC)] quel significato determinato di negazione che le compete e non si vuol essere indifferenti a che essa abbia un qualsiasi altro significato»[9]. Qualsiasi significato – sia un oggetto materiale, un particolare concreto, un insieme (posto che accettiamo insiemi nell'arredo del mondo), un *Sinn* freghiano, un concetto (posto che accettiamo universali ed entità intensionali), uno stato di cose, un fatto (posto che ci siano stati di cose e fatti) – è un *qualcosa*: un ente che, per dirla metaforicamente, rifiuta di essere confuso con un qualsiasi altro ente, o sostituito con un qualsiasi altro ente nel ruolo di significato di qualche espressione linguistica. E *che* il mondo sia ontologicamente minimamente determinato (che non tutto sia compatibile con tutto), oltre a essere qualcosa di radicato nelle nostre intuizioni sul mondo stesso, è ciò che il (PNC) asserisce.

È chiaro che le osservazioni aristoteliche sull'ἔλεγχος sono piuttosto informali. Ma esibiscono a mio parere almeno due virtù. La prima è che, proprio per via della loro generalità, non hanno bisogno di presupporre una *particolare* teoria del significato, o del contenuto delle espressioni linguistiche, come la "giusta" teoria del significato. Per esempio, come si è detto, non presuppongono la tesi che i significati siano rappresentazioni mentali, piuttosto che oggetti materiali, o *Sinne* ecc. *A fortiori*, queste osservazioni sono indipendenti dalla tesi che il significato di particolari tipi di espressioni linguistiche sintatticamente individuate, come gli enunciati, sia – come nel trattamento freghiano – un *Sinn* (il pensiero che gli enunciati esprimono), e una *Bedeutung* (il valore di verità per cui stanno); o – come nel trattamento wittgensteiniano – lo stato di cose che raffigurano ecc. Non implicano neanche la particolare caratterizzazione del contenuto di un enunciato come un insieme di mondi possibili, piuttosto che l'approccio inferenziale al contenuto come insieme delle conseguenze (gli enunciati che un enunciato implica, o l'impegno verso i quali segue dall'impegno verso l'enunciato in questione ecc.).

La seconda virtù è che le osservazioni elenctiche si possono utilizzare per difendere diverse formulazioni del (PNC). Visto che, come abbiamo imparato ormai molto bene, il (PNC) assume forme diverse, anche la sua negazione è multiforme – basta guardare alla varietà delle logiche paraconsistenti, esplorata nella seconda parte di questo libro. Stante questa proliferazione, possiamo caratterizzare l'ἔλεγχος di Aristotele ricordandoci di ciò che David Wiggins ha detto sulla propria teoria dell'individuazione mediante concetti sortali che rispondono alla domanda aristotelica sul *che cos'è*: «Una risposta alla domanda *che cos'è* fa sia più, sia meno che fornire un'evidenza a favore o contro un'identità. Fa di meno perché potrebbe non suggerire alcun test immediato. Fa di più perché fornisce ciò che *organizza* i test e le ricerche»[10]. Ugualmente, l'argomentazione elenctica di Aristotele fa sia più, sia meno che fornire una indisputabile refutazione del negatore del (PNC). Fa di meno, perché non suggerisce alcun argomento singolo e immediato contro qualsiasi forma di dialeteismo. Fa di più, perché *organizza* la giustificazione di versioni diverse del (PNC), regalandoci uno schema informale di difesa di fronte agli attacchi del dialeteista.

Nei paragrafi che seguono mostrerò che le cose stanno effettivamente così. Indicherò come molte delle critiche più serie del dialeteismo finora prodotte in ambito analitico (ad esempio, quelle di Terence Parsons, Patrick Grim, Neil Tennant, Stewart Shapiro, Littmann e Simmons, Batens e altri) si basino sulla *stessa* accusa mossa da Aristotele e Severino: l'accusa per cui il dialeteista "coerente" finisce per essere incapace di esprimere la propria posizione, ed escludere le teorie rivali. Diventa così, nelle celebri parole di Aristotele, «simile a una pianta»[11], perché «se le parole non hanno alcun significato, allora non ha luogo neppure la possibilità di discorso e di comunicazione reciproca e, in verità, non ha luogo neppure la possibilità di un discorso con se stessi»[12].

14.3
Esprimere l'esclusione

Cominciamo con un lungo passo di Terence Parsons:

> Supponiamo che diciate "β", e Priest risponda "$\neg\beta$". In circostanze ordinarie, pensereste che sia in disaccordo con voi. Ma poi vi ricordate che Priest è un dialeteista, e vi viene in mente che tutto sommato potrebbe ben essere d'accordo con voi – visto che potrebbe pensare che β e $\neg\beta$ siano *entrambi* veri. Come può indicare che è in sincero disaccordo con voi? La scelta naturale per lui sarebbe dire "β non è vero". Tuttavia, la verità di quest'asserzione è anche compatibile [*consistent*] con il fatto che β sia vero – per un dialeteista, s'intende. Perciò [...] Priest ha difficoltà ad asserire il suo disaccordo col punto di vista altrui. [...] Priest potrebbe indicare sincero disaccordo con voi se potesse asserire "$\neg\beta$" e anche dire che β *non è una dialetheia*. Tuttavia, il modo usuale per dirlo è affermare "β non è sia vero che falso", ossia "$\neg$(β è vero & β è falso)". Ma questo non ci porta da nessuna parte, perché se β è il mentitore, *è* una dialetheia, tuttavia quest'affermazione su di esso è vera. [...] Priest non ha mezzi entro il proprio simbolismo per esprimere adeguatamente "non è una dialetheia"[13].

14.3.1. Fallimento nel linguaggio oggetto

Consideriamo il primo punto sollevato da Parsons nel suo caso più eclatante: quello in cui β è proprio il (PNC) nella sua formulazione sintattica, ossia (PNC1). Dunque, $\beta = \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$. Allora la risposta di Priest, data la Doppia Negazione Forte (un principio, come sappiamo, generalmente accettato dai paraconsistentisti), equivale a dire: $\alpha \wedge \neg\alpha$. Dicendo ciò, Priest intende veicolare l'informazione che α è una dialetheia, un enunciato paradossale. Ma è forse in *disaccordo* con noi, ovvero ha *escluso* la nostra affermazione $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$? No. In questo caso particolare, non solo *potrebbe* essere d'accordo con noi, ma *lo è*: come abbiamo visto, infatti, in LP (PNC1) è una *verità logica*. Anzi, sappiamo che Priest e Routley hanno criticato le logiche paraconsistenti *positive-plus*, che rigettano (PNC1), sostenendo che esse perdono di vista il significato stesso della negazione.

Il risultato è che, se "α non è una dialetheia" è espresso da (PNC1), *ogni* enunciato non è una dialetheia, incluse tutte le dialetheie. A questo livello, il dialeteista non può esprimere determinatamente il suo disaccordo con la tesi che tutti gli enunciati non sono dialetheie. E questa ha tutta l'aria di un'argomentazione elenctica. Un dialeteista vorrebbe discordare da questa tesi, visto che esprime un'idea cui intende opporsi. Intende, ma non ce la fa: gli manca, per così dire, uno strumento per *esprimere l'esclusione* nel linguaggio oggetto.

Questo tipo di problema ha prodotto uno scisma all'interno della comunità paraconsistente. In *The Logic of Inconsistency*, Rescher e Brandom hanno suggerito che nessuna contraddizione di tipo (C2c), ossia della forma $V(\ulcorner\alpha\urcorner) \wedge \neg V(\ulcorner\alpha\urcorner)$, può essere vera; e quindi, che formulazioni del (PNC) logico-semantico del tipo di (PNC2c) non possono essere revocate in dubbio. L'idea sottostante è che l'inconsistenza dovrebbe essere mantenuta al livello del linguaggio oggetto, senza infettare il metalinguaggio:

> Non c'è dubbio che negli interessi della razionalità sia importante mantenere consistenti le *nostre* affermazioni su una certa materia. Ma questa non è una buona ragione per insistere sulla consistenza nell'ambito dell'*oggetto* delle nostre asserzioni. È un risultato chiave [della nostra teoria] che un mondo inconsistente possa essere discusso in termini perfettamente consistenti.
>
> Un'importante valvola di sicurezza a questo proposito è fornita dalla distinzione fra (1) discorso al livello di un linguaggio oggetto o, in questo contesto, descrizioni di livello zero del mondo, e (2) discorso al metalivello teoretico. [...] L'inconsistenza può essere tollerata negli oggetti del pensiero e dell'asserzione, mentre, da ultimo, la discussione su di esse può e dovrebbe essere consistente al metalivello dei nostri impegni cognitivi...[14]

14.3.2. Fallimento nel "metalinguaggio"

Ma alla fine del capitolo dedicato a LP abbiamo appreso come Priest rifiuti decisamente questa prospettiva: «Una volta che abbiamo smesso di richiedere che la teoria [*object theory*] sia consistente, non c'è ragione di richiedere che la metateoria sia consistente»[15]. Anzitutto, i dialeteisti naturalmente intendono mantenere senza restrizioni il T-schema:

(T) $\quad V(\ulcorner\alpha\urcorner) \leftrightarrow \alpha,$

visto che come sappiamo è essenziale per la derivazione dei vari paradossi del mentitore. In particolare, da una contraddizione di tipo (C1), $\alpha \wedge \neg\alpha$, otteniamo una contraddizione di tipo (C2b), $V(\ulcorner\alpha\urcorner) \wedge V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner)$, per sostituzione attraverso il T-schema; e se la prima è una dialetheia, sembra che lo sia anche la seconda. In alcune versioni del dialeteismo, come nella presentazione di LP di Priest (1979), se α è una dialetheia, anche $V(\ulcorner\alpha\urcorner)$ è una dialetheia. Il predicato di verità riproduce lo status di verità dell'enunciato cui è applicato:

α	$V(\ulcorner\alpha\urcorner)$
1	1
1,0	1,0
0	0

Priest ha in seguito oscillato su questo punto, a mio parere perché ha intuito il problema sottostante. Nel suo libro *In Contradiction*, egli concede che l'affermazione che un enunciato paradossale (vero e falso) è vero potrebbe essere solo vera, non a sua volta paradossale (vera e falsa). Ma anche qui egli esclude questa possibilità per varie versioni del mentitore[16].

Priest produce un "tentativo di rigetto" del Principio di Esclusione, che come sappiamo è la metà da sinistra a destra del nostro (Neg2), dunque:

(Esc) $V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner) \rightarrow \neg V(\ulcorner\alpha\urcorner)$.

E quindi, tenta di rigettare l'idea che ogni contraddizione "interna" di tipo (C2b), $V(\ulcorner\alpha\urcorner) \wedge V(\ulcorner\neg\alpha\urcorner)$, implichi una contraddizione "esterna" di tipo (C2c), $V(\ulcorner\alpha\urcorner) \wedge \neg V(\ulcorner\alpha\urcorner)$: una contraddizione che, per gli standard di Rescher e Brandom, sarebbe direttamente asserita nella "metateoria". Ma ammette che questo è precisamente ciò che succede se α è un mentitore rafforzato, ossia, ad esempio, un enunciato λ_1 tale che:

($\mathrm{PF}_{\lambda 1}$) $\lambda_1 \leftrightarrow \neg V(\ulcorner\lambda_1\urcorner)$[17].

E si capisce il perché. Da ($\mathrm{PF}_{\lambda 1}$) e dall'istanza del T-schema per λ_1 otteniamo, per sostituzione,

1. $V(\ulcorner\lambda_1\urcorner) \leftrightarrow \neg V(\ulcorner\lambda_1\urcorner)$,

E da (1), mediante il Terzo Escluso (che come sappiamo vale in LP e in buona parte delle altre logiche paraconsistenti), otteniamo proprio una contraddizione di tipo (C2c):

2. $V(\ulcorner\lambda_1\urcorner) \wedge \neg V(\ulcorner\lambda_1\urcorner)$.

L'argomento non usa né Contrapposizione né Principio di Esclusione. E (2) non è altro che una contraddizione asserita direttamente nella "metateoria". Dunque «non-verità e falsità sembrano comportarsi in modo molto simile»[18].

Naturalmente, *anche* (PNC 2c), ossia $\neg(V(\ulcorner\alpha\urcorner) \wedge \neg V(\ulcorner\alpha\urcorner))$, è un teorema che vale per ogni α in *In Contradiction*[19]. Ma questo riproduce il problema: di nuovo, il dialeteista sembra incapace di esprimere un'esclusione di contenuto. Supponiamo di definire ora "α non è una dialetheia" come "α non è sia vero che non vero", ossia appunto $\neg(V(\ulcorner\alpha\urcorner) \wedge \neg V(\ulcorner\alpha\urcorner))$. Come ha sottolineato Shapiro, in questo quadro «la locuzione "non sia vero che non vero" *non fa proprio nessuna differenza*». Ciò perché, per il dialeteista, «ogni enunciato non è sia vero che non vero, incluso qualsiasi enunciato che sia vero e non vero»[20]. E così, il dialeteista è daccapo privo di uno strumento per esprimere l'esclusione.

14.3.3. Inconsistenza "fino in cima"

Il punto filosoficamente decisivo è sempre il seguente. Il dialeteista "coerente", come sappiamo, dovrebbe rifiutare l'idea che la sua "metateoria" semantica sia consistente. Perché mai, si è detto, dovremmo abbracciare gli approcci gerarchici alla Tarski che per salvare il (PNC) separano linguaggio oggetto e metalinguaggio? Un dialeteismo debole, come quello di Rescher e Brandom, ha l'aria di un compromesso inutile. La "metateoria" dialeteista non è altro che una parte della teoria: il suo frammento semantico. Una volta che abbiamo accettato che l'inconsistenza si diffonda nel "metalinguaggio" (perché è un pezzo dell'unico linguaggio), non potremo che spingerla fino in cima, e lasciarla infettare ogni livello del discorso (visto che i "livelli" sono sottoparti di un'unica teoria).

Come abbiamo visto nella seconda parte del libro, anche questo è stato sottoscritto da Priest. A suo dire, il motivo per cui il Sillogismo Disgiuntivo non può essere entimematicamente valido è che non c'è *nessun* predicato "metalinguistico", e *nessun* operatore semantico, tale che la sua applicazione a un enunciato forzi un comportamento non paradossale. Quando diciamo "α si comporta in modo consistente", quello che diciamo può essere inconsistente: quindi non può *escludere* l'inconsistenza di α. Questa sarebbe «una delle dure realtà della vita paraconsistente»[21].

Ma ciò rende anche più dura la vita del dialeteista. Se l'espressione "α si comporta in modo consistente", ossia "α non è una dialetheia", può essere a sua volta inconsistente, come ha detto Parsons, il dialeteista non ha mezzi per escludere il caso che α sia una dialetheia[22]. È questa una delle ragioni per cui un capofila della paraconsistenza debole come Diderik Batens ha rifiutato la paraconsistenza globale propagandata da Routley sotto l'etichetta dell'ultralogica, e l'idea di Priest per cui nessun operatore enunciativo può forzare la consistenza. A detta di Batens, non è possibile spingere l'inconsistenza "fino in cima"; se le contraddizioni avessero luogo al livello più alto di una teoria, non avremmo più una *teoria*. E anche l'affermazione di Batens, secondo cui «per quanto estesamente si possa essere in disaccordo con alcune delle idee di Popper, non vedo come si potrebbe discordare dalla sua intuizione fondamentale per cui solo le teorie che "proibiscono" qualcosa sono informative»[23], mostra che questo genere di osservazione è, daccapo, strettamente correlato all'idea elenctica: un enunciato, o una teoria, hanno significato solo in quanto escludono qualcosa.

Priest e Routley hanno risposto a Batens, e la risposta merita di essere ascoltata per esteso:

> L'argomento fallisce, e lo fa al primo passo. Non c'è ragione di supporre che perché un enunciato abbia un contenuto determinato e non triviale debba escludere alcunché. Si consideri "2 + 2 = 4" e "Perth è in Australia". Se la paraconsistenza ha ragione, nessuna di queste asserzioni esclude per ragioni *logiche* la sua negazione, o qualsiasi altra cosa. Tuttavia ciascuna ha un differente contenuto, determinato e non triviale. Ciò accade perché ciascuna fornisce un'informazione che l'altra non include. Così la seconda implica che Perth è da qualche parte, che Perth è in Australia o in Indonesia ecc., mentre l'altra no[24].

Questa risposta, tuttavia, non ha semplicemente colto il punto della strategia elenctica. "Perth è in Australia" può essere un enunciato dotato di contenuto determinato solo in quanto esclude qualcosa *simpliciter*, ossia, implica l'esclusione che qualche stato di cose sussista, o che si dia un certo caso ecc. Se qualcuno dice "Perth è in Australia", non si può ritenere che stia parlando della posizione geografica di una città se ammette che la sua asserzione è compatibile con (o, in un trattamento inferenziale del contenuto: se non può escludere che la sua asserzione implichi) il sussistere di *qualsiasi* stato di cose; per esempio, che Perth sia in Canada, sul lato oscuro della luna, in ambo i posti e in nessuno dei due ecc. Analogamente, se la critica del (PNC) prodotta dal dialeteista non gli concedesse di escludere in alcun modo il contenuto espresso dal (PNC) (comunque questo contenuto venga esattamente inteso), come potremmo prenderla sul serio? Come ha osservato Patrick Grim: «Il dialeteismo è concepito nel rifiuto del [PNC] [...]. Ma come può il dialeteista esprimere la propria posizione in un modo che renda chiaro a che cosa si sta opponendo? Il rischio qui è che ciò che il dialeteista cerca di dire intorno al [PNC] divenga tanto ineffabile quanto le posizioni rivali, che egli condanna sulla base dell'inesprimibilità»[25].

Questo ci conduce al più generale problema di una teoria che non veicola alcun contenuto "determinato e non triviale". Ad esempio, J. C. Beall ha sostenuto che il dialeteismo è ovviamente comprensibile e in grado di fornire informazioni: dopotutto, il difensore del (PNC) critica il dialeteismo e argomenta contro di esso, quindi dovrebbe averlo compreso, oppure non sa di che parla. Dovrebbe anche essere in grado di spiegarlo alla sua *audience*, o non capirebbero che cosa sta criticando[26].

Il problema, però, è giusto un poco più complicato. Sia D l'insieme di enunciati in cui consiste il dialeteismo "coerente". Sia D_1 un sottoinsieme consistente di D. Certamente possiamo capire D_1. I problemi cominciano quando iniziamo a considerare le conseguenze logiche di D_1 (naturalmente, avendo l'accortezza di adoperare solo regole d'inferenza valide nel nostro sistema paraconsistente preferito). Allora, scopriamo che queste conseguenze semplicemente ritrattano quello che è stato detto in qualche altro sottoinsieme (consistente e comprensibile) di

D; e D nel complesso finisce per non essere informativo. I sottoinsiemi consistenti di D sono significanti; e noi *possiamo* certamente capire cosa *è* la teoria nel suo insieme (dopotutto, è esattamente l'insieme D). Quello che non capiamo è cosa D come un tutto *dice* a proposito del linguaggio, o del mondo.

Secondo Littmann e Simmons, non possiamo capire neanche il trattamento dialeteista del mentitore. Prendiamo ancora il mentitore rafforzato λ_I. Il racconto dialeteista, *anche* nella versione che rifiuta (Neg 2), come sappiamo ci dice che λ_I è e non è vero, ossia:

2. $V(\ulcorner\lambda_I\urcorner) \wedge \neg V(\ulcorner\lambda_I\urcorner)$.

Si suppone quindi che (2) sia una tesi caratteristica inclusa in D. Ma la sua negazione,

(Non2)$\neg(V\ulcorner\lambda_I\urcorner \wedge \neg V\ulcorner\lambda_I\urcorner)$,

è altresì inclusa in D, visto che vale per *qualsiasi* enunciato. Allora, {(2), (Non2)} è un sottoinsieme di D. Essendo un sottoinsieme inconsistente, sembra che al massimo (o al minimo?) possiamo comprendere ogni enunciato separatamente; ma cosa ci dice esattamente il sottoinsieme {(2), (Non2)} come un tutto, riguardo al mentitore? «Abbiamo di fronte due asserzioni che non sembrano supportarsi a vicenda. Ci viene presentata una valutazione di [λ_I] che non è più chiara di [λ_I]. [...] Il vero problema è se comprendiamo o no che cosa la teoria ci dice di [λ_I]. E la risposta, riteniamo, è negativa: non capiamo cosa venga detto di [λ_I] quando si dice che [λ_I] è e non è sia vero che [non vero], più di quanto comprendiamo cosa si dice di qualcuno quando si afferma che si fa e non si fa la barba»[27].

14.3.4. La scappatoia pragmatica

Questo genere di problemi, nella strategia di Priest, va risolto nel campo della pragmatica. Egli ha cercato infatti di fornire un adeguato trattamento della nozione, da noi già più volte incontrata, di *rifiuto* (e della sua controparte linguistica, il *diniego*), accessibile al dialeteista per esprimere l'esclusione. Abbiamo visto come egli proponga una variante pragmatica del Sillogismo Disgiuntivo, ossia il Principio R, ovvero il Principio di Accettazione per la Disgiunzione:

(PAD) $\vdash_x(\alpha \vee \beta) \wedge \dashv_x\alpha \Rightarrow \vdash_x\beta$,

e abbiamo anche visto come finisca per accettare la variante pragmatica del (PNC), nella forma:

(PNC4b) $\neg(\vdash_x\alpha \wedge \dashv_x\alpha)$.

Siccome accettazione e rifiuto per Priest sono esclusivi, anche se il dialeteista non può escludere α soltanto dicendo "$\neg\alpha$", può sempre *rigettare* α.

A questo punto sorge un problema ulteriore. Priest considera $\vdash_x\alpha$ e $\dashv_x\alpha$ (semplicemente) esclusivi, anche se rifiuta che α e $\neg\alpha$ siano (semplicemente) esclusivi. E questo è il prezzo da pagare *se il dialeteismo dev'essere esprimibile*: se dev'essere una teoria significante e comprensibile – se, cioè, il dialeteista deve riuscire a dire qualcosa di determinato, e a escludere qualche posizione – tipicamente, quella del difensore del (PNC). Ora, come osserva ancora Grim: «Conservare l'esclusione pragmatica fra asserzione e diniego sembra un punto d'appoggio necessario contro l'accusa di incapacità dialeteica sia di difendere che di contestare qualsiasi posizione. Ma la conservazione di questo punto d'appoggio è ugualmente bizzarra. Per cominciare, non è chiaro perché l'argomento dovrebbe fermarsi qui. Se il dialeteismo ci tiene tanto, perché fermarsi ad asserzione e diniego? Non è neppure chiaro che l'esclusione *possa* essere ristretta alla mera pragmatica dell'asserzione e del diniego»[28].

Nel prossimo paragrafo mostrerò che è bene non restringere l'esclusione alla pragmatica dell'asserzione e del diniego, o dell'accettazione e del rifiuto (di cui asserzione e diniego sarebbero l'espressione linguistica) trattandosi di una nozione profondamente metafisica. Come nota ancora Grim, «ogni contenuto che eredita le caratteristiche esclusive che Priest accorda al diniego avrà precisamente le caratteristiche esclusive che egli rifiuta alla negazione»[29]. Dunque, aggiungo io, si potrebbe dubitare che, dicendo (PNC4b), Priest sia *riuscito* a escludere che qualcuno che rigetta α possa simultaneamente accettarlo, ossia che $\vdash_x\alpha \wedge \dashv_x\alpha$. Perché (PNC4b) è una negazione, e la negazione nella prospettiva di Priest non è (semplicemente) esclusiva.

D'altra parte, Priest ha tutta l'aria di voler dire che (PNC4b) è (solo) vero, e $\vdash_x\alpha \wedge \dashv_x\alpha$ è (solo) falso. Questo è qualcosa che *noi* possiamo senz'altro fare, parlando "in modo consistente". Il punto è stato sottolineato ancora da Batens. Quando in *In Contradiction* Priest cerca di esprimere (PNC4b) dicendo: «L'accettabilità e rigettabilità di qualcosa, pur non essendo esaustive, sono certamente *in*compatibili»; o «È *im*possibile accettare e rifiutare insieme la stessa cosa»; o «Accettazione e rifiuto razionale congiunti *non* sono possibili»[30]; qui gli "in-" e "non" devono essere intesi come negazioni *classiche*, escludenti (non paraconsistenti), se la posizione di Priest deve avere senso[31].

Ma le cose vanno anche peggio, per due ragioni. La prima è stata sottolineata da Shapiro: se l'unico modo in cui il dialeteista "coerente" può esprimere il disaccordo o l'esclusione è il rifiuto pragmatico, non può esprimere l'*ipotesi* che qualcuno si sbagli. Non può esprimere, ad esempio, l'ipotesi che α non sia una dialetheia, o «formulare un condizionale della forma "se α non è una dialetheia, allora ϕ"»[32].

La seconda ragione, che è la più importante, sta nella domanda: esattamente, *che cosa* accettiamo se accettiamo un diniego dialeteista? Si suppone che un diniego fornisca qualche informazione; dopotutto, come ha detto Sainsbury, «l'espressione di un diniego su una pagina non è altro che un enunciato»; ma «il mostrarsi di "A" sulla pagina del teorico dialeteista, o di "A è solo vero", non dice al lettore informato se A non sarà [più tardi] dichiarato essere una dialetheia»[33]. La domanda "che cosa" mira a sottolineare il fatto che anche un performativo è... informativo, solo se trasmette un contenuto determinato; e cioè, se esclude qualcosa una volta per tutte.

14.4
La nozione di incompatibilità materiale

Ora, la nozione di esclusione è precisamente ciò che il (PNC) dovrebbe catturare nella teoria aristotelica. Cominciamo col rilevare che anche per il dialeteista, naturalmente, *alcuni stati di cose sono incompatibili* (mettendo provvisoriamente la cosa in termini di stati di cose). Ciò vuol dire che non possono sussistere insieme: ad esempio, una situazione in cui lo stesso agente razionale x accetta e rifiuta lo stesso enunciato α; oppure, per ripetere gli esempi priestiani, una in cui si vince e perde simultaneamente una gara di scacchi, o si prende e perde l'autobus. Dunque sembra che il dialeteista abbia, come ognuno di noi, una profonda intuizione di cosa sia l'*esclusione*.

Chiamerò la nozione che cerco di caratterizzare anche *incompatibilità materiale*, e la etichetterò col simbolo del *falsum*: $\perp$. Possiamo esprimerla in termini di concetti, mondi, proprietà o stati di cose, secondo le nostre preferenze metafisiche. Ad esempio, potrebbe essere descritta come la relazione che vale fra una coppia di proprietà P_1 e P_2, se e solo se il godere di P_1 da parte di un oggetto a impedisce che a simultaneamente goda di P_2, e viceversa (supponiamo naturalmente che $\perp$ sia simmetrica, dunque se $P_1 \perp P_2$ allora $P_2 \perp P_1$). Ma potremmo anche dire che sussiste fra due *concetti* C_1 e C_2, se e solo se il solo istanziare C_1 da parte di a gli preclude la possibilità di istanziare anche C_2, e viceversa. Oppure, potremmo dire che sussiste fra due stati di cose s_1 e s_2, se e solo se il sussistere di s_1 (nel mondo w, al tempo t) preclude la possibilità che anche s_2 sussista (nel mondo w, al tempo t), e viceversa.

Così, $\perp$ è una nozione profondamente metafisica: è radicata nella nostra esperienza del mondo, piuttosto che nella semantica o nella pragmatica. È anche una nozione modale: l'esclusione o incompatibilità materiale non sussiste, poniamo, fra due concetti meramente differenti, come *rosso* e *circolare*, che possono essere istanziati dallo stesso oggetto, anche se a volte non lo sono. Sussiste fra due concetti tali che un oggetto che ne istanzia uno ha perso ogni possibilità di istanziare simultaneamente l'altro. La qualifica di "materiale" è dovuta al fatto che la nostra capacità di cogliere la nozione non è fondata sul nostro possesso di concetti *logici*, nel senso di *formali*, ma sul contenuto materiale dei concetti coinvolti (o delle proprietà, o degli stati di cose ecc.). Neil Tennant chiama questi concetti *antonimi*, è osserva: «Qui gli antonimi A e B sono così semplici e primitivi che non può esserci questione sul loro "dialeteico" sussistere simultaneamente. Gli antonimi A e B sono tali non sulla base della loro forma logica, ma sulla base del loro contenuto non logico primitivo. La tensione fra essi – la loro reciproca esclusione – è una questione di profonda necessità metafisica»[34].

Gli esempi di Tennant sono: incompatibilità fenomenologiche fra colori, come *essere (uniformemente) rosso* ed *essere (uniformemente) verde*; concetti che esprimono la nostra capacità di collocare oggetti fisici nello spazio e nel tempo, come *x è qui ora* e *x è laggiù ora*, per un *x* sufficientemente piccolo. Esempi forniti da Grim sono del tipo *x è lungo meno di due metri* e *x è lungo più di tre metri* ecc.[35]

Ma il punto importante è il seguente. Dobbiamo tenere a mente che la caratterizzazione di $\perp$ non ci impegna ad alcuna scelta particolare sulla sua estensione, su *quali* siano le proprietà, o i concetti, o gli stati di cose, fra cui essa vale. Se questo suona deludente, basta considerare che una descrizione formalistica è tutto ciò che possiamo attenderci quando abbiamo a che fare con nozioni puramente metafisiche, che lasciano i nostri problemi epistemici esattamente dove stanno. Si è detto che la nostra capacità di cogliere l'incompatibilità materiale può essere basata sui contenuti dei concetti; ma come *sappiamo* qual è il contenuto di un concetto, o quali sono gli ambiti di applicazione di una proprietà? Date due proprietà P_1 e P_2, il problema se esse siano esclusive può coinvolgere aspetti largamente empirici, difficili analisi del nostro apparato concettuale, o del nostro uso del linguaggio comune. E naturalmente, di qui possono sorgere battaglie di intuizioni: *vecchio* e *giovane* sono esclusivi? *Blu* e *verde*? *Vero* e *falso*? *Cerchio* e *quadrato*? $0 = 1$ e $0 \neq 1$? Questo è esattamente il tipo di disquisizione che dovremmo evitare di fronte alla tesi che il (PNC) può essere fallace. Il punto è che la nozione di esclusione è *a priori*, nel senso kantiano che è una condizione di possibilità della nostra esperienza del mondo. Che si tratti di una intuizione metafisica basilare sulla struttura del mondo spiega perché, come si diceva nel primo capitolo del libro, Aristotele non abbia mai discusso la questione dell'ineludibilità del (PNC) nell'*Organon*, ossia nei propri scritti di logica. Lo ha fatto, invece, esclusivamente nella *Metafisica*, perché riteneva che si trattasse di una questione di ontologia, non risolvibile per una via *logica*, nel senso di *formale*.

14.4.1. ...E la negazione escludente

Se abbiamo una tale nozione primitiva, possiamo adoperarla come base intuitiva per caratterizzarvi una negazione. Come ha detto Huw Price: «L'apprendimento dell'incompatibilità [è] un'abilità più primitiva dell'uso della negazione. L'operatore della negazione può essere spiegato come un mezzo inizialmente destinato a *registrare* (pubblicamente o privatamente) un'incompatibilità sperimentata. [...] Ciò che importa è che *l'incompatibilità è una caratteristica del tutto basilare dell'esperienza del mondo da parte di un parlante* (o di un protoparlante), cosicché la negazione si può spiegare plausibilmente in termini di incompatibilità»[36].

Propongo dunque la seguente descrizione di una negazione via incompatibilità materiale. La descrizione adatta un'idea avanzata da Dunn, per cui «possiamo definire la negazione nei termini di una relazione primitiva di incompatibilità [...] in un quadro metafisico»[37]. Dunn si riferisce alla definizione di *orto negazione*, una nozione sviluppata originariamente nella *quantum logic* e studiata soprattutto da Birkoff, von Neumann e Goldblatt. Ciò che rende interessante la definizione è, per l'appunto, che vi si fa uso di una relazione di incompatibilità (detta anche "ortogonalità", o semplicemente "perp")[38]. Nella maggior parte delle presentazioni sussiste fra stati o fra mondi, ma possiamo riformularla in termini di proprietà (e piccoli aggiustamenti ci consentirebbero ugualmente di esprimerla in termini di concetti o stati di cose). Prendiamo una coppia ordinata <S, ⊥>, dove S è un insieme di proprietà e ⊥ è la nostra relazione di esclusione materiale definita su S. Allora abbiamo:

(Df NON) $\quad \text{NON-}P_1(x) =_{df} \exists P_2(P_2(x) \wedge P_1 \perp P_2)$.

Dire che qualcosa NON è P_1 è dire che ha qualche proprietà P_2, che è materialmente incompatibile rispetto a P_1. Questa indeterminatezza parziale nell'informazione fornita da un enunciato che contiene la negazione, naturalmente, riflette un semplice fatto del linguaggio ordinario. Quando dico "La mia Ferrari è rossa", questo non è l'enunciato meno informativo fra quelli incompatibili con "La mia Ferrari è blu" (assumendo *for the sake of the argument* che *rosso* e *blu* siano esclusivi). Il meno informativo fra gli enunciati incompatibili con "La mia Ferrari è blu" è "La mia Ferrari NON è blu", dato che (Df NON) dice semplicemente che la mia Ferrari ha qualche altra proprietà (incompatibile) rispetto alla proprietà di essere blu, senza specificare quale. "La mia Ferrari è rossa" dice quale altro colore incompatibile la mia auto ha (naturalmente, una proprietà non deve escluderne solo un'altra; perciò Grim parla della *classe di esclusione* di una proprietà data). Se l'insieme di proprietà incompatibili con quella di essere blu non fosse infinito, naturalmente, "La mia Ferrari NON è blu" non sarebbe altro che una disgiunzione: "...è rossa, o arancio, o gialla, o...".

Ora, una simile negazione ha le seguenti tre piacevoli proprietà.

1. Non è definita usando il controverso concetto *vero*, del quale il dialeteista ha dubitato che sia esclusivo, o materialmente incompatibile, rispetto al concetto *falso*. È definita usando il concetto stesso di *esclusione*, la cui originarietà ora è chiara: è un concetto implicato, ad esempio, dalla nostra esperienza del mondo come agenti, che fronteggiano scelte fra compiere una certa azione o un'altra (qualcosa che riteniamo facciano anche animali non dotati di linguaggi articolati). E fronteggiare una scelta è percepire un'incompatibilità. Ma potrebbe essere implicato anche dalla semplice e basilare capacità di riconoscere il confine (eventualmente sfumato e incerto) fra qualcosa e qualcos'altro, fra un oggetto e un altro. Si può dire, con Grim, che l'esclusione è un «termine così basilare» che «se non si comincia precisamente cogliendo questa nozione, sembra possibile che non sia specificabile più tardi [...]. Se non cominciamo intendendo l'esclusione, su quale ulteriori spiegazioni potremmo basarci per renderla?»[39].
2. Ha una forte motivazione preteoretica come strumento *espressivo*. Ciò di cui abbiamo bisogno come parlanti – anche, si è visto, come dialeteisti – per fornire informazioni determinate è precisamente uno strumento per esprimere l'esclusione. Non potrei migliorare la descrizione, fornita da Price, di come sarebbe una

conversazione fra me e voi se non avessimo un mezzo per escludere (via negazione, rigetto, falsità, o quel che si vuole) la possibilità che Fred sia simultaneamente in cucina e in giardino:

Io: "Fred è in cucina". (Si avvia verso la cucina.)
Voi: "Aspetta! Fred è in giardino".
Io: "Capisco. Però è in cucina, perciò andrò là". (Si avvia.)
Voi: "Manchi di comprensione. La cucina è libera-da-Fred".
Io: "Sul serio? Però c'è Fred lì, e questo è l'importante". (Esce per la cucina.)[40]

Se poteste dirmi un semplice: "Guarda, Fred NON è in cucina" (il che vuol dire: Fred è da qualche altra parte, e il fatto che sia lì esclude che si trovi in cucina), la vita sarebbe certamente più facile.

3. Infine, naturalmente i logici paraconsistenti e i dialeteisti *possiedono* senza dubbio la nozione di esclusione adoperata per definire questa negazione. I promotori della paraconsistenza ci chiedono di smetterla di usare "non", o "vero", come strumenti per esprimere l'esclusione: come ha rilevato Parsons, "non-α" da solo è insufficiente a escludere α, e "α è vero" da solo è insufficiente a escludere che α sia anche falso. Priest e Routley hanno ammesso che «noi [come dialeteisti] non possiamo usare l'esclusione di contenuto come un modo per definire il senso, o contenuto, della negazione. Ma ci sono molti altri modi per farlo, ad esempio con una spiegazione semantica»[41]. Ebbene, naturalmente *possono* fornire una spiegazione del genere – nella semantica di LP, ad esempio, o in quella della *Routley star*. Ma queste sono spiegazioni, per loro stessa ammissione, che non danno alla negazione la forza di supportare l'esclusione. Essi hanno dunque bisogno, ora, di qualche altro strumento linguistico, per esprimere i propri concetti di base, escludere le teorie rivali, e fornire attraverso le proprie teorie informazioni determinate – se non vogliono finire come voi e me nel dialogo su Fred.

Abbiamo visto che Priest adotta come strumento di esclusione il diniego, inteso come espressione linguistica del rifiuto o rigetto. Corrispondentemente, accetta il (PNC) in versione pragmatica. Ciò che ho suggerito è che la nozione di esclusione materiale è in sé ineludibile. Dopo aver caratterizzato una negazione prossima a quella qui proposta, Grim osserva:

Il precedente abbozzo usa diverse forme di negazione, incluso il "non" inglese, in modo prominente e ripetuto tentando di convogliare l'idea. Se queste forme di negazione possono essere intese in un modo particolare, sembra inevitabile che [anche "NON"] possa essere inteso in modo particolare. Data un'interpretazione dialeteista di tutte le varie forme di negazione dell'abbozzo, dunque, si potrebbe concludere anche con un'interpretazione dialeteista di ["NON"]. Il risultato sarebbe che tutte le affermazioni fatte sopra sono accettate ma senza il concetto di esclusione, che è ciò a cui esse mirano. [...] Tutto quel che posso dire è che simili forme di dialeteismo mi sembrano meno interessanti: non vedo come il prospetto di una impasse sia allora evitabile, e tali forme non mi sembrano promettere alcuna miglior comprensione di nozioni tanto centrali al nostro apparato concettuale quanto quella di contraddizione[42].

Ma possiamo anche essere un po' più stringenti. Il dialeteista, naturalmente, non crede che *qualsiasi* cosa sia compatibile con qualsiasi cosa, o che tutti gli stati di cose sussistano, o che qualsiasi cosa sia qualsiasi (altra?) cosa. Questa è invece, come sappiamo, la tipica caratterizzazione del trivialismo. In Priest (1999b), un articolo dedicato proprio alla posizione trivialista, si afferma: «Non si può scegliere fra questo e quello se si crede che questo e quello siano lo stesso, come fa il trivialista. Naturalmente, il trivialista crede anche che questo e quello siano diversi. Ma, al solito, che due cose siano diverse per il trivialista non preclude che siano identiche»[43].

A parte l'argomento trascendentale-fenomenologico usato poi da Priest per criticare il trivialista (propriamente: per mostrare che "il nostro avversario non esiste")[44], è chiaro che il dialeteista non intende essere un trivialista. Perciò, ci basta prendere le coppie di concetti, o proprietà, o stati di cose, che Priest stesso assume come materialmente esclusivi (*accettazione* e *rifiuto*, o *x prende l'autobus* e *x perde l'autobus* ecc.) come istanze della relazione intuitiva primitiva di esclusione o incompatibilità ⊥. Quindi, definiamo mediante essa un operatore enunciativo, NON, che funziona da strumento per esprimere linguisticamente l'esclusione. La procedura è inoppugnabile, se l'operatore ha la funzione espressiva che il rifiuto dovrebbe avere nel quadro dialeteista[45].

Ora, il passo finale: esprimiamo il (PNC) mediante questa negazione. Prendiamo la classica formulazione aristotelica citata all'inizio del nostro libro, e vi introduciamo l'operatore di esclusione. Allora, il (PNC) è una sorta di definizione dell'impossibile:

È impossibile che la stessa cosa, ad un tempo, appartenga e NON appartenga a una medesima cosa, secondo lo stesso rispetto.

Dunque, "P_1 NON appartiene a x" è un'abbreviazione per: "a x appartiene una proprietà P_2, materialmente incompatibile con P_1". Il che sembra fuori discussione dal punto di vista dialeteista, se egli ha compreso "NON" – e comprenderlo è comprendere l'esclusione, ciò che il dialeteista *comprende*. Il rifiuto di sottoscrivere la caratterizzazione del (PNC) mediante esclusione sembra rendere, elencticamente, il dialeteista incapace di rifiutare alcunché (o cerca di escludere l'esclusione?). Se la nostra esperienza dell'esclusione (a partire dalla capacità di riconoscere che un oggetto è separato da ciò che quell'oggetto non è) è così primitiva come sembra, ciò aiuterebbe a capire in che senso il (PNC) è per Aristotele «quel principio che di necessità deve possedere colui che voglia conoscere qualsivoglia cosa»[46].

Note

1. Così lo caratterizza Bremer, 2005, p. 185.
2. Cfr. ad esempio Lukasiewicz, 1910, pp. 77-9.
3. E alcuni suoi allievi, ad esempio Tarca, 1993.
4. Priest, 1989, p. 614.
5. Smiley, 1993, p. 31.

6. Arst. *Met.* 1006 a 17.
7. Ivi, 1006 a 21-25.
8. Severino, 1972, p. 42.
9. Ivi, p. 43.
10. Wiggins, 2001, p. 60.
11. Arst. *Met.* 1006 a 15.
12. Ivi, 1006 b 8-9.
13. Parsons, 1990, p. 345.
14. Rescher, Brandom, 1980, pp. 138 e 141.
15. Priest, 1979, p. 239.
16. Cfr. Priest, 1987, cap. 4.
17. Cfr. ivi, pp. 88-91. Cfr. anche Priest, 1993, p. 39: «I dialeteisti sostengono che verità e falsità [ossia, verità della negazione] si sovrappongono. Non hanno bisogno di ritenere che verità e non-verità si sovrappongano (ossia, che una contraddizione di un certo tipo è vera). Ma se la loro motivazione per il dialeteismo include i paradossi semantici, e in particolare il paradosso del mentitore, allora esattamente le stesse considerazioni li condurranno a questa posizione. L'enunciato λ: λ non è vero, sembra essere sia vero che non vero».
18. Ivi, p. 40.
19. Cfr. Priest, 1987, pp. 90-1.
20. Shapiro, 2004, p. 343, corsivo mio.
21. Priest, 1989, pp. 623-4.
22. Come hanno osservato anche Littmann e Simmons, «il dialeteista, anche quello più radicale, vorrà delimitare i mentitori (e in generale tutti gli enunciati veri-e-falsi, o dialetheie) dal resto di quello che diciamo. [...] Come ogni teorico della verità, il dialeteista non vuole che la patologia si diffonda. Ma nel caso del dialeteismo, la patologia si diffonde alla teoria stessa. Come possiamo accettare il dialeteismo, se la teoria stessa è patologica esattamente nello stesso modo del Mentitore, se le asserzioni del dialeteista sono a loro volta vere e false?» (Littmann, Simmons, 2004, p. 318).
23. Batens, 1980, p. 227. Cfr. anche Batens, 1990.
24. Priest, Routley, 1989b, p. 513. Cfr. anche Priest, 1987, p. 118.
25. Grim, 2004, p. 61. Lo stesso punto è avanzato in: van Benthem, 1979, p. 345; Agazzi, 1990, p. 205.
26. Cfr. Beall, 2001b.
27. Littmann, Simmons, 2004, p. 319.
28. Grim, 2004, p. 62.
29. *Ibid.*
30. Priest, 1987, pp. 128 e 142, corsivi miei.
31. «Parlando classicamente, io sono in grado di dire tutto quello che Priest è in grado di dire, ma non viceversa. [...] La ragione del problema sta nella negazione paraconsistente. [...] Se [la negazione usata da Priest] fosse paraconsistente, allora il significato di "incompatibile" sarebbe troppo debole per l'argomento di Priest. Il minimo che un senso sufficientemente forte di "incompatibilità" dovrebbe garantire è che gli incompatibili non possono in alcun modo essere veri insieme» (Batens, 1990, pp. 115 e 220).
32. Shapiro, 2004, p. 343.
33. Sainsbury, 2004, p. 90.
34. Tennant, 2004, p. 362.
35. Grim, 2004, p. 63.
36. Price, 1990, pp. 226-8, secondo corsivo mio.
37. Dunn, 1996, p. 9.
38. Cfr. Birkoff, von Neumann, 1936; Goldblatt, 1974.
39. Grim, 2004, p. 70.
40. Price, 1990, p. 224.
41. Priest, Routley, 1989b, p. 513.

42. Grim, 2004, pp. 69-71.
43. Priest, 1999b, p. 194 in nota.
44. Ivi, p. 195.
45. L'unico tentativo a me noto di mettere in questione la nozione di esclusione come tale è negli scritti di L. V. Tarca (1993, 2001), in cui si produce un "argomento trascendentale" per distinguere la nozione di differenza da quella di negazione (come esclusione di contenuto).
46. Arst. *Met*. 1005 b 15-16.

Bibliografia

ACZEL P. (1988), *Non Well-Founded Sets*, CSLI Lectures, 14, Stanford.

AGAZZI E. (1961), *Introduzione ai problemi dell'assiomatica*, Vita e Pensiero, Milano.

ID. (1978), *Non-contradiction et existence en mathématique*, in "Logique et Analyse", 21, pp. 459-81.

ID. (1990), *Can Knowledge Be Acquired through Contradiction?*, in "Studies in Soviet Thought", 39, pp. 205-8.

ANDERSON A. R. (1963), *Some Open Problems Concerning the System E of Entailment*, in "Acta Philosophica Fennica", 16, pp. 7-18.

ANDERSON A. R., BELNAP N. D. (1959), *A Simple Treatment of Truth Functions*, in "Journal of Symbolic Logic", 24, pp. 301-12.

IDD. (1975), *Entailment. The Logic of Relevance and Necessity*, I, Princeton University Press, Princeton.

ANDERSON A. R., BELNAP N. D., DUNN J. M. (1982), *Entailment. The Logic of Relevance and Necessity*, II, Princeton University Press, Princeton.

ANDERSON C. A. (1984), *General Intensional Logic*, in Gabbay, Guenthner (1983-89), II, pp. 355-86.

ARISTOTELE (1955), *Organon*, a cura di G. Colli, Einaudi, Torino.

ID. (1993), *Metafisica*, a cura di G. Reale, Rusconi, Milano.

ARRUDA A. I. (1967), *Sur certaines Hiérarchies de calculs propositionnels*, in "Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris", pp. 641-4.

ARRUDA A. I., BATENS D. (1982), *Russell's Set versus the Universal Set in Paraconsistent Set Theories*, in "Logique et Analyse", 25, pp. 121-36.

ASENJO F. G. (1965), *Dialectic Logic*, in "Logique et Analyse", pp. 321-6.

ASENJO F. G., TAMBURINO J. (1975), *Logic of Antinomies*, in "Notre Dame Journal of Formal Logic", 16, pp. 272-8.

AYER A. (1984), *Philosophy in the Twentieth Century*, Allen & Unwin, London.

BARCAN-MARCUS R. (1983), *Rationality and Believing the Impossible*, in "Journal of Philosophy", 80, pp. 321-38.

BAR-HILLEL Y. (1957), *New Light on the Liar*, in "Analysis", 18, pp. 1-6.

BARTLEY W. W. III (ed.) (1984), *The Retreat to Commitment*, Open Court, La Salle (Ill.).

BATENS D. (1980), *Paraconsistent Extensional Propositional Logic*, in "Logique et Analyse", 90, pp. 196-234.

ID. (1989), *Dynamic Dialectical Logics*, in Priest, Routley, Norman (1989), pp. 187-217.

ID. (1990), *Against Global Paraconsistency*, in "Studies in Soviet Thought", 39, pp. 209-29.

BATENS D., MORTENSEN C., PRIEST G., VAN BENDEGEM J.-P. (eds.) (2000), *Frontiers of Paraconsistent Logic*, Research Studies Press, Baldock.

BEALL J. C. (2000), *Is the Observable World Consistent?*, in "Australasian Journal of Philosophy", 78, pp. 113-8.
ID. (2001a), *Dialetheism and the Probability of Contradictions*, in "Australasian Journal of Philosophy", 79, pp. 114-8.
ID. (2001b), *Speaking of Paradox*, manoscritto inedito.
ID. (2004), *At the Intersection of Truth and Falsity*, in Priest, Beall, Armour-Garb (2004), pp. 1-19.
BEALL J. C., COLYVAN M. (2001), *Looking for Contradictions*, in "Australasian Journal of Philosophy", 79, pp. 564-9.
BELL J. (1981), *Category Theory and the Foundations of Mathematics*, in "British Journal for the Philosophy of Science", 32, pp. 349-58.
BELLOTTI L., MORICONI E., TESCONI L. (2001), *Computabilità. Lambda-definibilità, ricorsività, indecidibilità*, Carocci, Roma.
BELNAP N. D. (1962), *Tink, Tonk and Plink*, in "Analysis", 22, pp. 130-4.
ID. (1977), *A Useful Four-Valued Logic*, in Dunn, Epstein (1977), pp. 8-37.
BENTHEM J. VAN (1978), *Four Paradoxes*, in "Journal of Philosophical Logic", 7, pp. 49-72.
ID. (1979), *What is Dialectical Logic?*, in "Erkenntnis", 14, pp. 333-47.
BENTHEM J. VAN, DOETS K. (1983), *Higher Order Logic*, in Gabbay, Guenthner (1983-89), I, pp. 275-330.
BERNAYS P., FRAENKEL A. (1958), *Axiomatic Set Theory*, North-Holland, Amsterdam.
BERTI E. (1987), *Contraddizione e dialettica negli antichi e nei moderni*, L'Epos, Palermo.
BERTO F. (2005), *Che cos'è la dialettica hegeliana? Un'interpretazione analitica del metodo*, Il Poligrafo, Padova.
BIRKOFF G., NEUMANN J. VON (1936), *The Logic of Quantum Mechanics*, in "Annals of Mathematics", 37, pp. 823-43.
BLOESCH A. (1993), *A Tableau Style Proof System for Two Paraconsistent Logics*, in "Notre Dame Journal of Symbolic Logic", pp. 295-301.
BOBENRIETH A. (1998), *Five Philosophical Problems Related to Paraconsistent Logic*, in "Logique et Analyse", 161, pp. 21-30.
BOCHVAR D. A. (1939), *Ob odnom tréhznacnom isčislenii I égo priménénii k analiza paradoksov klassičéskogo rässirénnogo funkcional'nogo isčislénia*, in "Matématičeskij sbornik", 4, pp. 287-308.
BONOMI A. (a cura di) (1973), *La struttura logica del linguaggio*, Bompiani, Milano.
BRADY R. T. (1984), *Depth Relevance of Some Paraconsistent Logics*, in "Studia Logica", 43, pp. 63-74.
ID. (1989), *The Non-Triviality of Dialectical Set Theory*, in Priest, Routley, Norman (1989), pp. 437-71.
ID. (1996), *Relevant Implication and the Case for a Weaker Logic*, in "Journal of Philosophical Logic", 25, pp. 151-83.
ID. (2000), *Entailment, Negation and Paradox Resolution*, in Batens, Mortensen, Priest, van Bendegem (2000), pp. 113-36.
BRADY R. T., ROUTLEY R. (1989), *The Non-Triviality of Extensional Dialectical Set Theory*, in Priest, Routley, Norman (1989), pp. 415-36.
BREMER M. (1999), *Can Contradictions Be Asserted?*, in "Logic and Logical Philosophy", 7, pp. 167-77.

ID. (2005), *An Introduction to Paraconsistent Logics*, Peter Lang, Frankfurt a. M.
BREMER M., COHNITZ D. (2004), *Information and Information Flow. An Introduction*, Peter Lang, Frankfurt a. M.
BRODY B. (1967), *Logical Terms, Glossary of*, in P. Edwards (ed.), *The Encyclopedia of Philosophy*, Macmillan and Free Press, New York.
BROMAND J. (2002), *Why Paraconsistent Logic Can Only Tell Half the Truth*, in "Mind", III, pp. 741-9.
BROUWER J. L. E. (1975), *Collected Works*, ed. A. Heyting, I, North-Holland, Amsterdam.
BROWN B. (1999), *Yes, Virginia, there Really Are Paraconsistent Logics*, in "Journal of Philosophical Logic", pp. 489-500.
BULL R. A., SEGERBERG K. (1984), *Basic Modal Logic*, in Gabbay, Guenthner (1983-89), II, pp. 1-88.
BURALI-FORTI C. (1897), *Una questione sui numeri transfiniti*, in "Rendiconti del circolo matematico di Palermo", II, pp. 154-64.
CANTOR G. (1895), *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, in "Mathematische Annalen", 46, pp. 481-512 (trad. ingl. in *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Dover, New York 1955).
ID. (1899), *Cantor an Dedekind*, in Cantor (1932), pp. 443-7.
ID. (1932), *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, hrsg. von E. Zermelo, Springer, Berlin.
CARNAP R. (1937), *The Logical Syntax of Language*, Routledge & Kegan Paul, London (trad. it. *La sintassi logica del linguaggio*, Silva, Genova 1966).
ID. (1947), *Meaning and Necessity*, University of Chicago Press, Chicago-London (trad. it. *Significato e necessità*, La Nuova Italia, Firenze 1976).
CARNIELLI W., CONIGLIO M., D'OTTAVIANO I. (eds.) (2002), *Paraconsistency. The Logical Way to the Inconsistent*, Marcel Dekker, New York-Basel.
CARNIELLI W., MARCOS J. (2002), *A Taxonomy of C-Systems*, in Carnielli, Coniglio, D'Ottaviano (2002), pp. 1-94.
CARRARA M. (2001), *Impegno ontologico e criteri d'identità. Un'analisi*, CLEUP, Padova.
CARTWRIGHT R. (1971), *Identity and Substitutivity*, in Munitz (1971), pp. 119-34.
CASALEGNO P. (1997), *Filosofia del linguaggio. Un'introduzione*, Carocci, Roma.
CASALEGNO P., MARIANI M. (2004), *Teoria degli insiemi. Un'introduzione*, Carocci, Roma.
CASARI E. (1972), *Questioni di filosofia della matematica*, Feltrinelli, Milano.
ID. (a cura di) (1979), *Dalla logica alla metalogica. Scritti fondamentali di logica matematica*, Sansoni, Firenze.
ID. (1997), *Introduzione alla logica*, UTET, Torino.
CELLUCCI C. (a cura di) (1967), *La filosofia della matematica*, Laterza, Roma-Bari.
CHIEREGHIN F. (2004), *L'eco della caverna. Ricerche di filosofia della logica e della mente*, Il Poligrafo, Padova.
CHIHARA C. (1984), *Priest, the Liar, and Gödel*, in "Journal of Philosophical Logic", 13, pp. 117-24.
CHURCH A. (1939), *Review of* Bochvar (1939), in "Journal of symbolic Logic", 4, pp. 98-9.

ID. (1956), *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton University Press, Princeton.
COLE P., MORGAN J. L. (eds.) (1975), *Syntax and Semantics*, III: *Speech Acts*, Academic Press, New York.
COPELAND B. J. (1979), *On When a Semantics is Not a Semantics: Some Reasons for Disliking the Routley-Meyer Semantics for Relevance Logic*, in "Journal of Philosophical Logic", 8, pp. 399-413.
ID. (1980), *The Trouble Anderson and Belnap Have with Relevance*, in "Philosophical Studies", 37, pp. 325-34.
ID. (1986), *What is a Semantics for Classical Negation?*, in "Mind", 95, pp. 478-90.
COPI I. M., COHEN C. (1994), *Introduction to Logic*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ) (trad. it. *Introduzione alla logica*, il Mulino, Bologna 1999).
DA COSTA N. C. A. (1974), *On the Theory of Inconsistent Formal Systems*, in "Notre Dame Journal of Formal Logic", 15, pp. 497-510 (trad. it. *Sulla teoria dei sistemi formali contraddittori*, in Marconi, 1979, pp. 305-23).
ID. (1975), *Remarks on Jaskowki's Discussive Logic*, in "Reports on Mathematical Logic", pp. 7-16.
DA COSTA N. C. A., ALVES E. H. (1976), *Une sémantique pour le calcul C1*, in "Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris", pp. 729-31.
DA COSTA N. C. A., DUBIKAJTIS L. (1968), *Sur la logique discorsive de Jaskowski*, in "Bulletin of the Polish Academy of Sciences", 16, pp. 551-7.
DA COSTA N. C. A., MARCONI D. (1989), *An Overview of Paraconsistent Logic in the 80s*, in "The Journal of Non-Classical Logic", 6, pp. 5-23.
DALEN D. VAN (1986), *Intuitionistic Logic*, in Gabbay, Guenthner (1983-89), III, pp. 225-339.
DAVIDSON D. (1984), *Inquiries into Truth and Interpretation*, Oxford University Press, Oxford (trad. it. *Verità e interpretazione*, il Mulino, Bologna 1994).
DAVIS M. (ed.) (1965), *The Undecidable*, The Raven Press, New York.
DAWSON W. (1984), *The Reception of Gödel's Incompleteness Theorems*, in "Philosophy of Science Association", 2 (trad. it. *L'accoglienza dei teoremi di incompletezza di Gödel*, in Shanker, 1988, pp. 93-118).
DEMORGAN A. (1846), *On the Syllogism. I: On the Structure of the Syllogism*, in P. Heath (ed.), *On The Syllogism and Other Logical Writings*, Routledge & Kegan Paul, London 1966.
DENNETT D. (1987), *The Intentional Stance*, MIT Press, Cambridge (Mass.).
DETLEFSEN M. (1979), *On Interpreting Gödel's Second Theorem*, in "Journal of Philosophical Logic", 8, pp. 297-313 (trad. it. *Interpretazione del secondo teorema di Gödel*, in Shanker, 1988, pp. 163-88).
DIAZ M. R. (1981), *Topics in the Logic of Relevance*, Philosophia Verlag, München.
DI FRANCESCO M. (1990), *Introduzione a Russell*, Laterza, Roma-Bari.
DUMMETT M. (1973a), *The Justification of Deduction*, in "Proceedings of the British Academy", 59.
ID. (1973b), *Frege. Philosophy of Language*, Duckworth, London.
ID. (1977), *Elements of Intuitionism*, Clarendon Press, Oxford.
ID. (1978), *Truth and Other Enigmas*, Duckworth, London (trad. it. *Verità e altri enigmi*, Il Saggiatore, Milano 1986).
ID. (1991), *The Logical Basis of Metaphysics*, Duckworth, London.

DUNN J. M. (1976), *Intuitive Semantics for First-Degree Entailment and "Coupled Trees"*, in "Philosophical Studies", 29, pp. 149-68.
ID. (1979), *A Theorem in 3-Valued Model Theory with Connections to Number Theory, Type Theory and Relevant Logic*, in "Studia Logica", 38, pp. 149-69.
ID. (1986), *Relevance Logic and Entailment*, in Gabbay, Guenthner (1983-89), III, pp. 117-224.
ID. (1996), *Generalized Ortho Negation*, in Wansing (1996), pp. 3-26.
DUNN J. M., EPSTEIN G. (eds.) (1977), *Modern Uses of Multiple-Valued Logics*, Reidel, Dordrecht.
EVERETT A. (1993), *A Note on Priest's "Hypercontradictions"*, in "Logique et Analyse", 141-142, pp. 39-43.
FEFERMAN S. (1977), *Categorical Foundations and Foundations of Category Theory*, in Hintikka, Butts (1977), pp. 149-69.
ID. (1983), *Kurt Gödel: Conviction and Caution* (trad. it. *Kurt Gödel: fede e cautela*, in Shanker, 1988, pp. 119-41).
FIDEL M. (1977), *The Decidability of the Calculi C_n*, in "Reports on Mathematical Logic", 8, pp. 31-40.
FINE K. (1975), *Vagueness, Truth and Logic*, in "Synthese", 30, pp. 265-300.
FITCH F. B. (1946), *Self-Reference in Philosophy*, in "Mind", 55, pp. 64-73.
ID. (1953), *Self-Referential Relations*, in *Actes du dixième Congrès International de Philosophie*, 14, North-Holland, Amsterdam.
FOLEY R. (1986), *Is it Possible to Have Contradictory Beliefs?*, in "Midwest Studies in Philosophy", 10, pp. 327-55.
FRAASSEN B. VAN (1966), *Singular Terms, Truth-Value Gaps, and Free Logic*, in "Journal of Philosophy", 63, pp. 481-95.
ID. (1968), *Presuppositions, Implication and Self Reference*, in "Journal of Philosophy", 65, pp. 136-51.
FRAENKEL A., BAR-HILLEL Y., LEVY A. (1973), *Foundations of Set Theory*, North-Holland, Amsterdam.
FRASCOLLA P. (2000), *Il Tractatus logico-philosophicus di Wittgenstein. Introduzione alla lettura*, Carocci, Roma.
FREGE G. (1879), *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Nebert, Halle (trad. it. *Ideografia. Un linguaggio in formule del pensiero puro, a imitazione di quello matematico*, in Frege, 1965, pp. 103-206).
ID. (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Koebner, Breslau (trad. it. *I fondamenti dell'aritmetica. Una ricerca logico-matematica sul concetto di numero*, in Frege, 1965, pp. 211-349).
ID. (1891), *Funktion und Begriff*, conferenza tenuta il 9 gennaio 1891 alla Jenaische Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft, Pohle, Jena 1921 (trad. it. parz. *Funzione e concetto*, in Bonomi, 1973, pp. 411-23).
ID. (1903), *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, I-II, Pohle, Jena (trad. it. parz. in Frege, 1965, pp. 475-594).
ID. (1965), *Logica e aritmetica*, a cura di C. Mangione, Boringhieri, Torino.
ID. (1976), *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, hrsg. von G. Gabriel und H. Hermes, Meiner, Hamburg (trad. it. parz. *Alle origini della nuova logica*, Boringhieri, Torino 1983).

FRIXIONE M., PALLADINO D. (2004), *Funzioni, macchine, algoritmi. Introduzione alla teoria della computabilità*, Carocci, Roma.

GABBAY D., GUENTHNER F. (eds.) (1983-89), *Handbook of Philosophical Logic*, I-IV, Kluwer, Dordrecht.

GABBAY D., WANSING H. (eds.) (1999), *What is negation?*, Kluwer, Dordrecht.

GALVAN S. (1991), *Logiche intensionali. Sistemi proposizionali di logica modale, deontica, epistemica*, Franco Angeli, Milano.

ID. (1997), *Non contraddizione e terzo escluso. Le regole della negazione nella logica classica, intuizionistica e minimale*, Franco Angeli, Milano.

GARSON J. W. (1984), *Quantification in Modal Logic*, in Gabbay, Guenthner (1983-89), II, pp. 249-308.

GEACH P. T. (1962), *Reference and Generality. An Examination of Some Medieval and Modern Theories*, Cornell University Press, Ithaca (NY).

ID. (1965), *Assertion*, in “Philosophical Review”, 74, pp. 449-65.

ID. (1968), *Identity*, in “Review of Metaphysics”, 21, pp. 3-12.

GÖDEL K. (1930), *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, in “Monatshefte für Mathematik und Physik”, 37 (trad. it. *La completezza degli assiomi del calcolo logico funzionale*, in Casari, 1979, pp. 137-50).

ID. (1931), *Über formal unentscheidbare Sätze der* Principia mathematica *und verwandter Systeme I*, in “Monatshefte für Mathematik und Physik”, 38, pp. 173-98 (trad. it. *Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei* Principia mathematica *e di sistemi affini I*, in Shanker, 1988, pp. 21-62).

ID. (1944), *Russell’s Mathematical Logic*, in P. A. Schlipp (ed.), *The Philosophy of Bertrand Russell*, Northwestern University Press, Evanston (Ill.), pp. 125-53 (trad. it. *La logica matematica di Russell*, in Cellucci, 1967, pp. 81-112.).

ID. (1947), *What is Cantor’s Continuum Problem?*, in “American Mathematical Monthly”, 54, pp. 515-25 (trad. it. *Che cos’è il problema del continuo di Cantor?*, in Cellucci, 1967, pp. 113-36).

GOLDBLATT R. I. (1974), *Semantic Analysis of Orthologic*, in “Journal of Philosophical Logic”, 3, pp. 19-35.

GOLDSTEIN L. (2004), *The Barber, Russell’s Paradox, Catch-22, God and More. A Defence of a Wittgensteinian Conception of Contradiction*, in Priest, Beall, Armour-Garb (2004), pp. 295-313.

GOODSHIP L. (1996), *On Dialethism*, in “Australasian Journal of Philosophy”, 74, pp. 153-61.

GRANT J. (1975), *Inconsistent and Incomplete Logics*, in “Mathematics Magazine”, 48, pp. 154-9.

GRICE H. P. (1975), *Logic and Conversation*, in Cole, Morgan (1975), pp. 41-58.

GRIM P. (1991), *The Incomplete Universe: Totality, Knowledge and Truth*, MIT Press, Cambridge (Mass.).

ID. (2004), *What is a Contradiction?*, in Priest, Beall, Armour-Garb (2004), pp. 49-72.

HAACK S. (1978), *Philosophy of Logics*, Cambridge University Press, Cambridge.

HAHN L. E., SCHLIPP P. A. (eds.) (1986), *The Philosophy of W. V. Quine*, Open Court, La Salle (Ill.).

HALLETT M. (1984), *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Clarendon Press, Oxford.

HALMOS P. R. (1960), *Naïve Set Theory*, van Nostrand, Princeton.
HAVAS K. (1990), *Dialectic and Inconsistency in Knowledge Acquisition*, in "Studies in Soviet Thought", 39, pp. 189-98.
HEGEL G. W. F. (1830), *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften im Grundrisse*, hrsg. von F. Nicolin und O. Poeggeler, Philosophische Bibliothek, Band 33, siebente, durchgesehene Auflage, Meiner, Hamburg 1969 (trad. it. *Enciclopedia delle scienze filosofiche*, Laterza, Roma-Bari 1989).
ID. (1831), *Wissenschaft der Logik*, in *Gesammelte Werke*, voll. 11 (1978), 12 (1981), in Verbindung mit der Deutschen Forschungsgemeinschaft, hrsg. von der Rheinisch-Westfälischen Akademie der Wissenschaften, Meiner, Hamburg 1968 ss. (trad. it. *Scienza della logica*, Laterza, Roma-Bari 1994[4]).
HEIJENOORT J. VAN (ed.) (1967), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic*, Harvard University Press, Harvard.
HEINTZ J. (1979), *Reference and Inference in Fiction*, in "Poetics", 8, pp. 85-99.
HENKIN L. (1947), *The Completeness of Formal Systems*, Princeton, tesi di dottorato.
ID. (1949), *The Completeness of the First Order Functional Calculus*, in "Journal of Symbolic Logic", 14, pp. 159-66.
ID. (1950), *Completeness in the Theory of Types*, in "Journal of Symbolic Logic", 15, pp. 81-91.
HERZBERGER H. G. (1970), *Paradoxes of Grounding in Semantics*, in "Journal of Philosophy", 67, pp. 145-67.
HEYTING A. (1956), *Intuitionism*, North-Holland, Amsterdam.
HILBERT D. (1904), *Über die Grundlegung der Logik und der Arithmetik*, in *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongress in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, Teubner, Leipzig, pp. 174-85 (trad. ingl. *On the Foundations of Logic and Arithmetic*, in van Heijenoort, 1967, pp. 129-38).
ID. (1925), *Über das Unendliche*, in "Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung", 1, 36, pp. 201-15 (trad. ingl. *On the Infinite*, in van Heijenoort, 1967, pp. 367-92).
HINTIKKA J. (1969), *Models for Modalities*, Reidel, Dordrecht.
HINTIKKA J., BUTTS R. (eds.) (1977), *Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory*, Reidel, Dordrecht.
HODGES W. (1983), *Elementary Predicate Logic*, in Gabbay, Guenthner (1983-89), 1, pp. 1-132.
HOFSTADTER D. (1979), *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*, Basic Books, New York (trad. it. *Gödel, Escher, Bach: un'eterna ghirlanda brillante*, Adelphi, Milano 1984).
HOWE M. (1970), *Introduction to Human Memory*, Harper & Row, New York.
HUGHES G. E., CRESSWELL M. J. (1968), *An Introduction to Modal Logic*, Methuen, London (trad. it. *Introduzione alla logica modale*, Il Saggiatore, Milano 1973).
IDD. (1984), *A Companion to Modal Logic*, Methuen, London (trad. it. *Guida alla logica modale*, Clueb, Bologna 1990).
HUSSERL E. (1900), *Logische Untersuchungen*, 1, Max Niemeyer, Halle (trad. it. *Ricerche logiche*, 1, Il Saggiatore, Milano 1968).
HYDE D. (1997), *From Heaps and Gaps to Heaps of Gluts*, in "Mind", 106, pp. 640-60.
JASKOWSKI S. (1948), *Rachunek zdan dla systemow dedukcyjnych sprzecznychi*, in "Studia Societatis Scientiarum Torunensis", sectio A, 1, 5 e *O konjunkcji dyskusyjnej*

w rachunku zdan dla systmów dedukcyjnych sprzecznych, in "Studia Societatis Scientiarum Torunensis", sectio A, I, 8 (trad. it. *Calcolo delle proposizioni per sistemi deduttivi contraddittori*, in Marconi, 1979, pp. 281-303).

JOHANSSON I. (1936), *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*, in "Compositio math.", 4, pp. 119-36.

KAHANE H. (1995), *Logic and Contemporary Rhetoric*, Wadsworth Publishing Company, Wadsworth.

KALISH D., MONTAGUE R., MAR R. (1980), *Logic: Techniques of Formal Reasoning*, Harcourt Brace Jovanovich, New York.

KANT I. (1781), *Kritik der reinen Vernunft*, in *Gesammelte Schriften*, voll. 3 e 4, hrsg. von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, de Gruyter & Co., Berlin 1969 (trad. it. *Critica della ragion pura*, Laterza, Roma-Bari 1995^8).

KATZLEY A. (1975), *Human Memory: Structures and Processes*, W. H. Freeman, San Francisco.

KEEFE R. (2000), *Theories of Vagueness*, Cambridge University Press, Cambridge.

KEEFE R., SMITH P. (eds.) (1996), *Vagueness. A reader*, MIT Press, Cambridge (Mass.).

KIELKOPF C. F. (1975), *Adjunction and Paradoxical Derivations*, in "Analysis", 35, pp. 127-9.

KIRKHAM R. L. (1992), *Theories of Truth. A Critical Introduction*, MIT Press, Cambridge (Mass.).

KIRWAN (1978), *Logic and Argument*, Duckworth, London.

KLEENE S. (1952), *Introduction to Metamathematics*, North-Holland, Amsterdam.

ID. (1976), *The work of Kurt Gödel*, in "Journal of Symbolic Logic", 41 (trad. it. *L'opera di Kurt Gödel*, in Shanker, 1988, pp. 63-91).

KOTAS J. (1971), *On the Algebras of Classes of Formulae of Jaskowski's Discussive System*, in "Studia Logica", pp. 81-90.

ID. (1975), *Discussive Sentential Calculus of Jaskowski*, in "Studia Logica", pp. 149-68.

KOTAS J., DA COSTA N. C. A. (1979), *A New Formulation of Discussive Logic*, in "Studia Logica", 38, pp. 429-44.

KRIPKE S. (1959), *A Completeness Theorem in Modal Logic*, in "Journal of Symbolic Logic", 24, pp. 1-14.

ID. (1963a), *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic*, I, in J. Crossley, M. Dummett (eds.), *Formal Systems and Recursive Functions*, North-Holland, Amsterdam, pp. 92-129.

ID. (1963b), *Semantical Analysis of Modal Logic*, I: *Normal Modal Propositional Calculi*, in "Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik", 9, pp. 67-96.

ID. (1965), *Semantical Analysis of Modal Logic*, II: *Non-Normal Modal Propositional Calculi*, in J. W. Addison *et al.* (eds.), *The Theory of Models*, North-Holland, Amsterdam, pp. 206-20.

ID. (1971), *Identity and Necessity*, in Munitz (1971), pp. 135-64 (trad. it. *Identità e necessità*, in Bonomi, 1973, pp. 259-94).

ID. (1972), *Naming and Necessity*, Basil Blackwell, Oxford (trad. it. *Nome e necessità*, Bollati Boringhieri, Torino 1982).

ID. (1975), *Outline of a Theory of Truth*, in "Journal of Philosophy", 72, pp. 690-716 (ora in Martin, 1984, pp. 53-81).

KROON F. (2004), *Realism and Dialetheism*, in Priest, Beall, Armour-Garb (2004), pp. 245-63.
KYBURG H. E. (1997), *The Rule of Adjunction and Reasonable Inference*, in "Journal of Philosophy", 94, pp. 109-25.
LAKATOS I. (1970), *Falsification and the Methodology of Scientific Research Programs*, in Id., *Collected Papers*, I, eds. J. Worrall and G. Currie, Cambridge University Press, Cambridge 1978.
LEAR J. (1977), *Sets and Semantics*, in "Journal of Philosophy", 74, pp. 86-102.
LEBLANC H. (ed.) (1973), *Truth, Syntax and Semantics*, North-Holland, Amsterdam.
LEMMON E. J. (1965), *Beginning Logic*, Th. Nelson & Sons and van Nostrand Reinhold, London (trad. it. *Elementi di logica*, Laterza, Roma-Bari 1975).
LENZEN W. (1996), *Necessary Conditions for Negation Operators*, in Wansing (1996), pp. 37-58.
LEVIN G. D. (1982), *Dialectics and the Paradoxes of Set Theory*, in "Soviet Studies in Philosophy", 24, pp. 26-45.
LEWIS D. (1973), *Counterfactuals*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.).
ID. (1978), *Truth in Fiction*, in "American Philosophical Quarterly", 15, pp. 37-46 (ora in Id., 1983, pp. 261-75).
ID. (1982), *Logic for Equivocators*, in "Nous", 16, pp. 431-41 (ora in Id., 1998, pp. 97-110).
ID. (1983), *Philosophical Papers*, I, Oxford University Press, Oxford.
ID. (1998), *Papers in Philosophical Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.
LINDSAY P., NORMAN D. (1977), *Human Information Processing*, Academic Press, New York.
LITTMANN G., SIMMONS K. (2004), *A Critique of Dialetheism*, in Priest, Beall, Armour-Garb (2004), pp. 314-35.
LOLLI G. (1974), *Teoria assiomatica degli insiemi*, Bollati Boringhieri, Torino.
ID. (1994), *Incompletezza. Saggio su Kurt Gödel*, il Mulino, Bologna.
LUCAS J. R. (1961), *Minds, Machines, and Gödel*, in "Philosophy", 36, pp. 112-27.
ŁUKASIEWICZ J. (1910), *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa*, Studium Krytyczne, Cracow (trad. it. *Del principio di contraddizione in Aristotele*, Quodlibet, Macerata 2003).
MARCONI D. (a cura di) (1979), *La formalizzazione della dialettica. Hegel, Marx e la logica contemporanea*, Rosenberg & Sellier, Torino.
ID. (1980), *Contradiction and the Language of Hegel's Dialectic: a Study of the Science of Logic*, University Microfilms International, Pittsburgh, tesi di dottorato.
ID. (1981), *Types of Non-Scotian Logic*, in "Logique et Analyse", 96, pp. 407-14.
ID. (1984), *Che cos'è la teoria della verità di Tarski?*, in "Teoria", pp. 75-95.
ID. (1987), *L'eredità di Wittgenstein*, Laterza, Roma-Bari.
ID. (1995), *On the Structure of Lexical Competence*, in "Proceedings of the Aristotelian Society", 95 (trad. it. *La struttura della competenza lessicale*, in Paternoster, 1999, pp. 245-61).
ID. (1997), *Lexical Competence*, MIT Press, Cambridge (Mass.) (trad. it. *La competenza lessicale*, Laterza, Roma-Bari 1999).
ID. (1999), *La filosofia del linguaggio. Da Frege ai giorni nostri*, UTET, Torino.
ID. (2001), *Filosofia e scienza cognitiva*, Laterza, Roma-Bari.

MARES E. (1996), *Relevant Logic and the Theory of Information*, in "Synthese", 109, pp. 345-60.

ID. (2004), *Semantic Dialetheism*, in Priest, Beall, Armour-Garb (2004), pp. 264-75.

MARSONET M. (1976), *Introduzione alle logiche polivalenti*, Edizioni Abete, Roma.

MARTIN G. (1955), *Kant's Metaphysics and Theory of Science*, Manchester University Press, Manchester.

MARTIN R. M. (1967), *Towards a Solution to the Liar Paradox*, in "Philosophical Review", 76, pp. 279-311.

ID. (ed.) (1984), *Recent Essays on Truth and the Liar Paradox*, Oxford University Press, Oxford.

MAYBERRY J. (1977), *On the Consistency Problem for Set Theory: an Essay on the Cantorian Foundations of Classical Mathematics (I)*, in "British Journal for the Philosophy of Science", 28, pp. 1-34.

MENDELSON E. (1964), *Introduction to Mathematical Logic*, van Nostrand, Princeton (trad. it. *Introduzione alla logica matematica*, Bollati Boringhieri, Torino 1972).

MEYER R. K. (1976), *Relevant Arithmetic*, in "Bulletin of the Section of Logic of the Polish Academy of Science", pp. 133-7.

MEYER R. K., MARTIN E. P. (1986), *Logic on the Australian Plan*, in "Journal of Philosophical Logic", 15, pp. 305-32.

MEYER R. K., MORTENSEN C. (1984), *Inconsistent Models for Relevant Arithmetic*, in "Journal of Symbolic Logic", 49, pp. 917-29.

MONDADORI M., D'AGOSTINO M. (1997), *Logica*, Mondadori, Milano.

MOORE A. W. (1985), *Set Theory, Skolem's Paradox, and the* Tractatus, in "Analysis", 45, pp. 13-20.

ID. (1990), *The Infinite*, Routledge & Kegan Paul, London.

MORICONI E. (2001), *L'incompletezza dell'aritmetica*, in Bellotti, Moriconi, Tesconi (2001), pp. 175-256.

MORTENSEN C. (1980), *Every Quotient Algebra for C_1 is Trivial*, in "Notre Dame Journal of Formal Logic", 21, pp. 694-700.

ID. (1983), *The Validity of the Disjunctive Syllogism is not so Easily Proved*, in "Notre Dame Journal of Formal Logic", 24, pp. 35-40.

ID. (1989), *Anything is Possible*, in "Erkenntnis", 30, pp. 319-37.

ID. (1995), *Inconsistent Mathematics*, Kluwer, Dordrecht.

MUNITZ M. K. (ed.) (1971), *Identity and Individuation*, New York University Press, New York.

NAGEL E., NEWMAN J. R. (1958), *Gödel's Proof*, New York University Press, New York (trad. it. *La prova di Gödel*, Bollati Boringhieri, Torino 1974).

NEUMANN J. VON (1925), *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, in "Journal für die reine und angewandte Mathematik", 154, pp. 219-40 (trad. ingl. *An Axiomatization of Set Theory*, in van Heijenoort, 1967, pp. 393-413).

ORWELL G. (1949), *Nineteen Eighty-Four*, Secker and Warburg, London (trad. it. *1984*, Mondadori, Milano 1973).

PALLADINO D. (2002), *Corso di logica. Introduzione elementare al calcolo dei predicati*, Carocci, Roma.

PARSONS C. (1974), *Informal Axiomatization, Formalization, and the Concept of Truth*, in "Synthese", 27, pp. 27-47.

PARSONS T. (1984), *Assertion, Denial and the Liar Paradox*, in "Journal of Philosophical Logic", 13, pp. 137-52.
ID. (1990), *True Contradictions*, in "Canadian Journal of Philosophy", 20, pp. 335-54.
PASNICZEK J. (1998), *Beyond Consistent and Complete Possibile Worlds*, in "Logique et Analyse", 161, pp. 121-34.
PASQUINELLI A. (a cura di) (1969), *Il neoempirismo*, UTET, Torino.
PATERNOSTER A. (a cura di) (1999), *Mente e linguaggio*, Guerini e Associati, Milano.
PERISSINOTTO L. (1997), *Wittgenstein. Una guida*, Feltrinelli, Milano.
PITCHER G. (ed.) (1964), *Truth*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ).
PIZZI C. (1987), *Dalla logica della rilevanza alla logica condizionale*, Euroma, Roma.
PLANTINGA A. (1974), *The Nature of Necessity*, Oxford University Press, Oxford.
PLATONE, *Teeteto*, a cura di M. Valgimigli e A. M. Ioppolo, Laterza, Roma-Bari 1999.
POPPER K. R. (1969), *Conjectures and Refutations*, Routledge & Kegan Paul, London (trad. it. *Congetture e confutazioni*, il Mulino, Bologna 1972).
POST J. F. (1987), *A Gödelian Theorem for Theories of Rationality*, in G. Radnitzky, W. W. Bartley III (eds.), *Evolutionary Epistemology, Rationality, and the Sociology of Knowledge*, Open Court, La Salle (Ill.).
POTTER M. (2004), *Set Theory and its Philosophy*, Oxford University Press, Oxford.
PRAWITZ D. (1965), *Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study*, Almqvist & Wilksell, Uppsala.
PRICE H. (1990), *Why "Not"?*, in "Mind", 99, pp. 221-38.
PRIEST G. (1978), *Classical Logic aufgehoben*, conferenza tenuta al convegno dell'Australasian Association of Philosophy di Melbourne, ora in Priest, Routley, Norman (1989), pp. 131-48.
ID. (1979), *The Logic of Paradox*, in "Journal of Philosophical Logic", 8, pp. 219-41.
ID. (1982), *To Be and Not To Be: Dialectical Tense Logic*, in "Studia Logica", 41, pp. 249-68.
ID. (1984a), *Logic of Paradox Revisited*, in "Journal of Philosophical Logic", 13, pp. 153-79.
ID. (1984b), *Hyper-Contradictions*, in "Logique et Analyse", 107, pp. 237-43.
ID. (1987), *In Contradiction: a Study of the Transconsistent*, Martinus Nijhoff, Dordrecht.
ID. (1989), *Reductio ad Absurdum et Modus Tollendo Ponens*, conferenza tenuta al simposio su logiche paraconsistenti e rilevanti dell'Australian National University, ora in Priest, Routley, Norman (1989), pp. 613-26.
ID. (1991), *Minimally Inconsistent LP*, in "Studia Logica", 50, pp. 321-31.
ID. (1992), *What is a Non-Normal World?*, in "Logique et Analyse", 35, pp. 291-302.
ID. (1993), *Can Contradictions Be True?*, II, in "Proceedings of the Aristotelian Society", vol. suppl. 67, pp. 35-54.
ID. (1994), *Is Arithmetic Consistent?*, in "Mind", 103, pp. 337-49.
ID. (1995), *Beyond the Limits of Thought*, Cambridge University Press, Cambridge.
ID. (1998), *What is so Bad about Contradictions?*, in "Journal of Philosophy", 8, pp. 410-26.
ID. (1999a), *Perceiving Contradictions*, in "Australasian Journal of Philosophy", 77, pp. 439-46.
ID. (1999b), *Could Everything Be True?*, in "Australasian Journal of Philosophy", 78, pp. 189-95.

ID. (2000), *Truth and Contradiction*, in “Philosophical Quarterly”, 50, pp. 305-19.
ID. (2001), *An Introduction to Non-Classical Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.
PRIEST G., BEALL J. C., ARMOUR-GARB B. (eds.) (2004), *The Law of Non-Contradiction. New Philosophical Essays*, Clarendon Press, Oxford.
PRIEST G., ROUTLEY R. (1982), *Lessons from Pseudo-Scotus*, in “Philosophical Studies”, 42, pp. 189-99.
IDD. (1989a), *An Outline of the History of (Logical) Dialectic*, in Priest, Routley, Norman (1989), pp. 76-98.
IDD. (1989b), *Applications of Paraconsistent Logics*, in Priest, Routley, Norman (1989), pp. 367-93.
IDD. (1989c), *Systems of Paraconsistent Logics*, in Priest, Routley, Norman (1989), pp. 151-86.
IDD. (1989d), *The Philosophical Significance and Inevitability of Paraconsistency*, in Priest, Routley, Norman (1989), pp. 483-539.
PRIEST G., ROUTLEY R., NORMAN J. (eds.) (1989), *Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent*, Philosophia Verlag, München.
PRIOR A. N. (1962), *Formal Logic*, Oxford University Press, Oxford.
ID. (1967), *Negation*, in P. Edwards (ed.), *The Encyclopedia of Philosophy*, Macmillan and Free Press, New York.
QUINE W. V. O. (1937), *New Foundations for Mathematical Logic*, in “American Mathematical Monthly”, 44 (trad. it., con aggiunte, *Nuovi fondamenti per la logica matematica*, in Quine, 1953, pp. 75-94).
ID. (1951), *Mathematical Logic*, Cambridge University Press, Cambridge (Mass.).
ID. (1953), *From a Logical Point of View*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.) (trad. it. *Il problema del significato*, Ubaldini, Roma 1966).
ID. (1960), *Word and Object*, MIT Press, Cambridge (Mass.) (trad. it. *Parola e oggetto*, Il Saggiatore, Milano 1970).
ID. (1963), *Set Theory and its Logic*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.).
ID. (1966), *The Ways of Paradox and Other Essays*, Random House, New York (trad. it. *I modi del paradosso e altri saggi*, Il Saggiatore, Milano 1975).
ID. (1970), *Philosophy of Logic*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ) (trad. it. *Logica e grammatica*, Il Saggiatore, Milano 1981).
RAGGIO A. R. (1968), *Propositional Sequence-Calculi for Inconsistent Systems*, in “Notre Dame Journal of Formal Logic”, pp. 359-66.
RAMSEY F. P. (1931), *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, Routledge & Kegan Paul, London (trad. it. *I fondamenti della matematica e altri scritti di logica*, Feltrinelli, Milano 1964).
READ S. (1988), *Relevant Logic*, Basil Blackwell, Oxford.
REALE G. (1991), *Storia della filosofia antica*, I-V, Vita e Pensiero, Milano.
RESCHER N. (1973), *The Coherence Theory of Truth*, Oxford University Press, Oxford.
ID. (1979), *Non-standard Possible Worlds* (trad. it. *Mondi possibili non-standard*, in Marconi, 1979, pp. 354-416).
RESCHER N., BRANDOM R. (1980), *The Logic of Inconsistency: a Study in Non-Standard Possible Worlds Semantics and Ontology*, Basil Blackwell, Oxford.

RESNIK M. D. (1974), *On the Philosophical Significance of Consistency Proofs*, in "Journal of Symbolic Logic", 3, pp. 133-47 (trad. it. *Il significato filosofico delle dimostrazioni di coerenza*, in Shanker, 1988, pp. 143-61).
ID. (2004), *Revising Logic*, in Priest, Beall, Armour-Garb (2004), pp. 178-93.
RESTALL G. (1992), *A Note on Naive Set Theory in LP*, in "Notre Dame Journal of Formal Logic", 33, pp. 422-32.
ID. (1995), *Four-Valued Semantics for Relevant Logics (and Some of Their Rivals)*, in "Journal of Philosophical Logic", 24, pp. 139-60.
ID. (1999), *Negation in Relevant Logics (How I stopped Worrying and Learned to Love the Routley Star)*, in Gabbay, Wansing (1999), pp. 53-76.
ID. (2004), *Laws of Non-Contradiction, Laws of the Excluded Middle, and Logics*, in Priest, Beall, Armour-Garb (2004), pp. 73-84.
RICHE J. (1998), *Finitization Procedures and Finite Model Property*, in "Logique et Analyse", 161-163, pp. 155-66.
RIGAMONTI G. (a cura di) (1992), *La formazione della teoria degli insiemi. Saggi di Georg Cantor 1872-1883 con note di Ernst Zermelo*, Sansoni, Firenze.
ROSSER B. (1936), *Extension of Some Theorems of Gödel and Church*, in "Journal of Symbolic Logic", 1, pp. 87-91.
ID. (1942), *The Burali-Forti Paradox*, in "Journal of Symbolic Logic", 7, pp. 251-76.
ROUTLEY R. (1977), *Ultralogic as Universal?*, in "Relevance Logic Newsletter", 2, pp. 50-90, 138-75 (poi in Id., 1979b, *Appendice*).
ID. (1979a), *Dialectical Logic, Semantics and Metamathematics*, in "Erkenntnis", 14, pp. 301-31.
ID. (1979b), *Exploring Meinong's Jungle and Beyond. An Investigation of Noneism and the Theory of Items*, Dipartimental Monograph, Australian National University, Canberra.
ROUTLEY R. MEYER R. K. (1973), *The Semantics of Entailment I*, in Leblanc (1973), pp. 194-243.
IDD. (1976), *Dialectical Logic, Classical Logic and the Consistency of the World*, in "Studies in Soviet Thought", 16, pp. 1-25 (trad. it. *Logica dialettica, logica classica e noncontraddittorietà del mondo*, in Marconi, 1979, pp. 324-53).
ROUTLEY R., MEYER R. K., PLUMWOOD V., BRADY R. (eds.) (1982), *Relevant Logics and Their Rivals I*, Ridgeview, Atascadero (Ca.).
ROUTLEY R., PRIEST G. (1992), *Simplified Semantics for Basic Relevant Logics*, in "Journal of Philosophical Logic", 21, pp. 217-32.
ROUTLEY R., ROUTLEY V. (1972), *Semantics for First Degree Entailment*, in "Nous", 6, pp. 335-59.
IDD. (1985), *Negation and Contradiction*, in "Revista Colombiana de Matemáticas", 19, pp. 201-31.
RUSSELL B. (1903), *The Principles of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge (trad. it. *I principi della matematica*, Longanesi, Milano 1988).
ID. (1906), *On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types*, in "Proceedings of the London Mathematical Society", 4, pp. 29-53.
ID. (1908), *Mathematical Logic as Based on the Theory of Types*, in "American Journal of Mathematics", 30, pp. 222-62.
ID. (1919) *Introduction to Mathematical Philosophy*, Allen & Unwin, London (trad. it. *Introduzione alla filosofia matematica*, Newton Compton, Roma 1970).

ID. (1923), *Vagueness*, in "Australasian Journal of Philosophy and Psychology", I, pp. 84-92 (ora in Keefe, Smith, 1996, pp. 61-8).
ID. (1940), *An Inquiry into Meaning and Truth*, Allen & Unwin, London (trad. it. *Significato e verità*, Longanesi, Milano 1963).
ID. (1959), *My Philosophical Development*, Allen & Unwin, London (trad. it. *La mia vita in filosofia*, Longanesi, Milano 1961).
RUSSELL B., WHITEHEAD A. N. (1910-13), *Principia mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge (trad. it. parz. *Introduzione ai "Principia mathematica"*, La Nuova Italia, Firenze 1977).
RYLE G. (1950), *Heterologicality*, in "Analysis", II, pp. 61-9.
SAINSBURY R. M. (1991), *Logical Forms*, Blackwell, Oxford.
ID. (1995), *Paradoxes*, Cambridge University Press, Cambridge.
ID. (2004), *Option Negation and Dialetheias*, in Priest, Beall, Armour-Garb (2004), pp. 85-92.
SAKA P. (2001), *Exploding the Myth of Paraconsistent Logics*, manoscritto inedito.
SCHLICK M. (1930), *Die Wende der Philosophie*, in "Erkenntnis", I, pp. 4-11 (trad. it. *La svolta della filosofia*, in Pasquinelli, 1969, pp. 255-63).
ID. (1932), *Positivismus und Realismus*, in "Erkenntnis", 3, pp. 1-31 (trad. it. *Positivismo e realismo*, in Pasquinelli, 1969, pp. 264-98).
SCHOTCH P. K., JENNINGS R. E. (1989), *On Detonating*, in Priest, Routley, Norman (1989), pp. 306-27.
SCHURZ G. (1991), *Relevant Deduction*, in "Erkenntnis", 35, pp. 391-437.
SEVERINO E. (1958), *La struttura originaria*, La Scuola, Brescia (nuova ed. ampliata Adelphi, Milano 1981).
ID. (1972), *Essenza del nichilismo*, Paideia, Brescia (nuova ed. ampliata Adelphi, Milano 1995).
ID. (1995), *Tautótes*, Adelphi, Milano.
ID. (2004), *Fondamento della contraddizione*, Adelphi, Milano.
SHANKER S. G. (ed.) (1988), *Gödel's Theorem in Focus*, Croom Helm, London (trad. it. *Il teorema di Gödel. Una messa a fuoco*, Muzzio, Padova 1991).
SHAPIRO S. (2002), *Incompleteness and Inconsistency*, in "Mind", III, pp. 817-32.
ID. (2004), *Simple Truth, Contradiction, and Consistency*, in Priest, Beall, Armour-Garb (2004), pp. 336-54.
SKOLEM T. (1962), *Abstract Set Theory*, Notre Dame University Press, Notre Dame.
SLANEY J. K. (1984), *A Metacompleteness Theorem for Contraction-Free Relevant Logics*, in "Studia Logica", 43, pp. 159-68.
ID. (1989), *RWX is not Curry Paraconsistent*, in Priest, Routley, Norman (1989), pp. 472-81.
SLATER B. H. (1995), *Paraconsistent Logics?*, in "Journal of Philosophical Logic", 24, pp. 451-4.
SMILEY T. (1993), *Can Contradictions Be True? I*, in "Proceedings of the Aristotelian Society", 67, pp. 17-34.
SMULLYAN R. (1988), *Forever undecided. A puzzle guide to Gödel*, Oxford University Press, Oxford.
ID. (1992), *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford University Press, Oxford.
SORENSEN R. (2001), *Vagueness and Contradiction*, Oxford University Press, Oxford.

STALNAKER R. C. (1968), *A Theory of Conditionals*, in N. Rescher (ed.), *Studies in Logical Theory*, Basil Blackwell, Oxford, pp. 98-112.
ID. (1984), *Inquiry*, MIT Press, Cambridge (Mass.).
STRAWSON P. F. (1952), *Introduction to Logical Theory*, Wiley & Sons, New York.
ID. (1959), *Individuals. An Essay in Descriptive Metaphysics*, Methuen, London (trad. it. *Individui. Saggio di metafisica descrittiva*, Feltrinelli-Bocca, Milano 1978).
ID. (1997), *Entity & Identity and Other Essays*, Oxford University Press, Oxford.
SUNDHOLM G. (1983), *Systems of Deduction*, in Gabbay, Guenthner (1983-89), I, pp. 133-88.
SUPPES P. (1960), *Axiomatic Set Theory*, van Nostrand, Princeton.
SZABO M. E. (ed.) (1969), *The Collected Papers of G. Gentzen*, North-Holland, Amsterdam.
TANAKA K. (1998a), *What Does Paraconsistency Do? The Case of Belief Revision*, in T. Childers (ed.), *The Logica Yearbook 1997*, Prague.
ID. (1998b), *To be Something and Something Else: Dialetheic Tense Logic*, in “Logique et Analyse”, 161-163, pp. 189-202.
TAPPENDEN J. (1993), *The Liar and Sorites Paradox: Toward a Unified Treatment*, in “Journal of Philosophy”, 90, pp. 551-77.
TARCA L. V. (1993), *Élenchos. Ragione e paradosso nella filosofia contemporanea*, Marietti, Genova.
ID. (1995), *Logica philosophica*, Magazzino Editrice, Salerno.
ID. (2001), *Differenza e negazione. Per una filosofia positiva*, La città del sole, Napoli.
TARSKI A. (1936), *O ugruntowaniu naukowej semantyki*, in “Przeglad Filozoficzny”, 39, pp. 50-7 (trad. it. *La fondazione della semantica scientifica*, in Bonomi, 1973, pp. 425-32).
ID. (1956), *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*, Oxford University Press, Oxford.
TENNANT N. (1982), *Proof and Paradox*, in “Dialectica”, 36, pp. 265-85.
ID. (1984), *Perfect Validity, Entailment and Paraconsistency*, in “Studia Logica”, 43, pp. 181-200.
ID. (2004), *An Anti-Realist Critique of Dialetheism*, in Priest, Beall, Armour-Garb (2004), pp. 355-84.
TROELSTRA A. S., DALEN D. VAN (1988), *Constructivism in Mathematics: an Introduction*, North-Holland, Amsterdam.
TYE M. (1990), *Vague Objects*, in “Mind”, 99, pp. 535-57.
URBAS I. (1989), *Paraconsistency and the C-Systems of da Costa*, in “Notre Dame Journal of Formal Logic”, 30, pp. 583-97.
ID. (1990), *Paraconsistency*, in “Studies in Soviet Thought”, 39, pp. 343-54.
URCHS M. (1995), *Discursive Logic: Towards a Logic of Rational Discourse*, in “Studia logica”, 54, pp. 231-49.
ID. (2002), *On the Role of Adjunction in Para(in)consistent Logic*, in Carnielli, Coniglio, D’Ottaviano (2002), pp. 487-500.
URQUHART A. (1985), *The Undecidability of Entailment and Relevant Implication*, in “Journal of Symbolic Logic”, 50, pp. 1059-73.
ID. (1986), *Many-Valued Logic*, in Gabbay, Guenthner (1983-89), III, pp. 71-116.
USBERTI G. (1980), *Logica, verità e paradosso*, Feltrinelli, Milano.

VARZI A. C. (1997), *Inconsistency without Contradiction*, in "Notre Dame Journal of Formal Logic", 38, pp. 621-39.

ID. (2000), *Supervaluationism and Paraconsistency*, in Batens, Mortensen, Priest, van Bendegem (2000), pp. 279-97.

ID. (2001), *Parole, oggetti, eventi e altri argomenti di metafisica*, Carocci, Roma.

ID. (2004), *Conjunction and Contradiction*, in Priest, Beall, Armour-Garb (2004), pp. 93-110.

VISSER A. (1984), *Four-Valued Semantics and the Liar*, in "Journal of Philosophical Logic", 12, pp. 181-212.

WANG H. (1986), *Quine's Logical Ideas in Historical Perspective*, in Hahn, Schlipp (1986), pp. 623-43.

WANSING H. (ed.) (1996), *Negation. A Notion in Focus*, De Gruyter, Berlin-New York.

WEINGARTNER P. (1990), *Antinomies and Paradoxes and their Solutions*, in "Studies in Soviet Thought", 39, pp. 313-32.

WIGGINS D. (1980), *Sameness and Substance*, Basil Blackwell, Oxford.

ID. (2001), *Sameness and Substance Renewed*, Cambridge University Press, Cambridge.

WILLIAMSON T. (1992), *Vagueness and Ignorance*, in "Proceedings of the Aristotelian Society", 66, pp. 145-62 (ora in Keefe, Smith, 1996, pp. 265-80).

WITTGENSTEIN L. (1921), *Logisch-philosophische Abhandlung*, in "Annalen der Naturphilosophie", 14; ed. riveduta con trad. ingl. *Tractatus logico-philosophicus*, Routledge & Kegan Paul, London 1922 (trad. it. *Tractatus logico-philosophicus e Quaderni 1914-1916*, Einaudi, Torino 1998).

ID. (1953), *Philosophische Untersuchungen*, Basil Blackwell, Oxford (trad. it. *Ricerche filosofiche*, Einaudi, Torino 1967).

ID. (1956), *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, Basil Blackwell, Oxford (trad. it. *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*, Einaudi, Torino 1971).

ID. (1969), *Philosophische Grammatik*, Basil Blackwell, Oxford (trad. it. *Grammatica filosofica*, La Nuova Italia, Firenze 1990).

ID. (1976), *Lectures on the Foundations of Mathematics*, Cornell University Press, Ithaca (NY) (trad. it. *Lezioni sui fondamenti della matematica*, Bollati Boringhieri, Torino 2002).

WOODS J. (2003), *Paradox and Paraconsistency. Conflict Resolution in the Abstract Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge.

WRIGHT C. (1980), *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Duckworth, London.

YAGISAWA T. (1988), *Beyond Possible Worlds*, in "Philosophical Studies", 53, pp. 175-204.

ZELENY J. (1990), *On Dialectical Inconsistency*, in "Studies in Soviet Thought", 39, pp. 199-203.

ZERMELO E. (1908), *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, in "Mathematische Annalen", 65, pp. 261-81 (trad. ingl. *Investigations on the Foundations of Set Theory I*, in van Heijenoort, 1967, pp. 199-215).