PAŃSTWOWA UCZELNIA ZAWODOWA
im. prof. Stanisława Tarnowskiego w Tarnobrzegu

ZASTOSOWANIE WYBRANYCH METOD I NARZĘDZI ILOŚCIOWYCH W NAUKACH EKONOMICZNYCH, FINANSACH I INFORMATYCE

Praca zbiorowa pod redakcją naukową **Marii Borowskiej**

Tarnobrzeg 2021

Państwowa Uczelnia Zawodowa
im. prof. Stanisława Tarnowskiego w Tarnobrzegu

Zastosowanie wybranych metod i narzędzi ilościowych w naukach ekonomicznych, finansach i informatyce

Praca zbiorowa

pod redakcją naukową Marii Borowskiej

Autorzy: Maria Borowska, Igor Britchenko, Łukasz Jabłoński, Bogusław Kaczmarczyk, Aleksander Kasprzyk, Przemysław Leończyk, Paweł Maciaszczyk, Joanna Olszowy, Marcelina Słaba-Wiącek, Bożena Zygmunt

Tarnobrzeg 2021

Recenzent
prof. zw. dr hab. Tadeusz Galanc

Korekta
Paweł Wielopolski

Wydawnictwo Państwowej Uczelni Zawodowej
im. prof. Stanisława Tarnowskiego w Tarnobrzegu
ul. Sienkiewicza 50, 39-400 Tarnobrzeg
e-mail: wydawnictwo@puz.tarnobrzeg.pl
www.puz.tarnobrzeg.pl

PUZ
im. prof. Stanisława Tarnowskiego
w Tarnobrzegu

Skład, druk i oprawa
EXDRUK Spółka Cywilna
Wojciech Żuchowski, Adam Filipiak
ul. Rysia 6, 87-800 Włocławek
tel. 501-335-617, 507-832-458
biuroexdruk@gmail.com

ISBN 978-83-950650-7-1

PAŃSTWOWA UCZELNIA ZAWODOWA
im. prof. Stanisława Tarnowskiego
w Tarnobrzegu

ZASTOSOWANIE WYBRANYCH METOD I NARZĘDZI ILOŚCIOWYCH W NAUKACH EKONOMICZNYCH, FINANSACH I INFORMATYCE.

Praca zbiorowa pod redakcją naukową *Marii Borowskiej*

Autorzy: *Maria Borowska, Igor Britchenko, Łukasz Jabłoński, Bogusław Kaczmarczyk, Aleksander Kasprzyk, Przemysław Leończyk, Paweł Maciaszczyk, Joanna Olszowy, Marcelina Słaba-Wiącek, Bożena Zygmunt* (autorzy alfabetycznie)

Tarnobrzeg 2021

ZASTOSOWANIE WYBRANYCH METOD I NARZĘDZI ILOŚCIOWYCH W NAUKACH EKONOMICZNYCH, FINANSACH I INFORMATYCE.

Praca zbiorowa pod redakcją naukową *Marii Borowskiej*

Autorzy: *Maria Borowska, Igor Britchenko, Łukasz Jabłoński, Bogusław Kaczmarczyk, Aleksander Kasprzyk, Przemysław Leończyk, Paweł Maciaszczyk, Joanna Olszowy, Marcelina Słaba-Wiącek, Bożena Zygmunt* (autorzy alfabetycznie)

Motto:
Miejsce metod ilościowych (matematycznych i statystycznych) w całokształcie nauki określane było różnie. Od podstawy wszelkiej filozofii u pitagorejczyków, po rolę sprawnego narzędzia u Arystotelesa, od sposobu obcowania u Platona i Kanta, po koronę nauk przyrodniczych w Oświeceniu, od możliwości kontaktu z Bogiem u Keplera, po fundament materialistycznego determinizmu u Laplace'a.
z czasopisma „Matematyka, Społeczeństwo, Rodzina"

Zespół autorów wyraża
bezgraniczną wdzięczność
Sz. P. Rektorowi prof. ucz. dr. hab.
Pawłowi Maciaszczykowi
za istotną opiekę i merytoryczną
pomoc oraz za patronat nad całym
naszym przedsięwzięciem.

Spis treści

Wstęp **6**

Rozdział pierwszy
Maria Borowska, Igo Britchenko:
Aparat matematyczny i statystyczny **8**

Rozdział drugi
Łukasz Jabłoński, Bożena Zygmunt:
Matematyka w banku **97**

Rozdział trzeci
Łukasz Jabłoński, Bożena Zygmunt:
Zastosowanie teorii procentu w ocenie efektywności procesów inwestycyjnych **119**

Rozdział czwarty
Łukasz Jabłoński, Bogusław Kaczmarczyk:
Wybrane funkcje finansowe arkusza MS Excel – zastosowania obliczeń oraz rachunku różniczkowego dla funkcji wielu zmiennych w ocenie ryzyka **143**

Rozdział piąty
Przemysław Leończyk, Marcelina Słaba-Wiącek:
Analiza danych z wykorzystaniem narzędzi SAS **177**

Rozdział szósty
Przemysław Leończyk, Joanna Olszowy:
Modelowanie zachowań gospodarczych konsumenta za pomocą mikroekonomicznych funkcji popytu **191**

Rozdział siódmy
Marcelina Słaba-Wiącek:
Optymalne funkcjonowanie przedsiębiorstwa w okresie niepewności rynkowej – pandemii COVID – 19 na przykładzie PGNiG **214**

Rozdział ósmy
Bogusław Kaczmarczyk:
Niedookreślone układy równań liniowych **224**

Rozdział dziewiąty
Bogusław Kaczmarczyk:
Niedookreślone układy równań liniowych – na przykładzie wyceny wartości rynkowej nieruchomości **240**
Rozdział dziesiąty

Aleksander Kasprzyk, Paweł Maciaszczyk:
Wybrane narzędzia wspierające prognozowanie sezonowości popytu i sprzedaży usług finansowych w procesie podejmowania e-decyzji rynkowych **.. 253**

WSTĘP

Szanowni Państwo,

mam zaszczyt i przyjemność zaprosić Państwa do lektury monografii pt. „Zastosowanie wybranych metod i narzędzi ilościowych w naukach ekonomicznych, finansach i informatyce". Jest ona dziełem zbiorowym dziesięciu autorów – pracowników dydaktyczno-naukowych Państwowej Uczelni Zawodowej im. prof. Stanisława Tarnowskiego w Tarnobrzegu i powstała dzięki merytorycznemu i opiekuńczemu wsparciu Pana Rektora prof. ucz. dra hab. Pawła Maciaszczyka.

Jestem przekonana, że każdy – pośród rozdziałów zarówno z matematyki i statystyki, czy finansów, jak i informatyki – znajdzie coś ciekawego i przydatnego.

Całość rozpoczyna teoretyczny rozdział matematyczno-statystyczny. Jego istota i charakter jest odmienny, od pozostałych dziewięciu rozdziałów praktyczno-specjalistycznych. Prezentuje on aparat matematyczno-statystyczny niezbędny do zrozumienia treści kolejnych kierunkowych już rozdziałów monografii. Treści merytoryczne tego rozdziału nie są zaprezentowane w formie systematycznego wykładu, czy prezentacji, ale przedstawiają jedynie sygnalnie i syntetycznie pojęcia, definicje, twierdzenia oraz zasady i metody, które stanowią fundament ich zastosowań w naukach ekonomicznych, finansach oraz informatyce.

Rozdziały: od drugiego do dziesiątego są kierunkowymi rozdziałami specjalistycznymi i prezentują różne kierunki praktycznych zastosowań metod matematycznych i statystycznych, czyli ilościowych.

Rozdziały: drugi i trzeci dotyczą zarządzania finansami. Przy czym pierwszy z nich dotyczy naliczania odsetek w banku od dyspozytorów kredytów i obligacji. Kolejny zaś traktuje o metodach oceny ekonomicznej efektywności projektów inwestycyjnych i produkcyjnych oraz zawiera analizę wrażliwości wybranych wskaźników finansowych na zmiany czynników je tworzących.

Rozdział czwarty prezentuje podstawowe informacje i zasady korzystania z arkusza kalkulacyjnego na przykładzie programu MS Excel wraz z omówieniem wybranych funkcji finansowych.

W rozdziale piątym omówione są wybrane narzędzia wspomagające przetwarzanie danych informacji, jakimi są systemy SAS wykorzystywane przede wszystkim w interakcjach gospodarczych oraz w procesie dydaktycznym na uczelniach wyższych.

Modele zachowań konsumenta, idea aproksymacji oraz wybrane mikroekonomiczne funkcje popytu zostały – wraz z przykładami – omówione w rozdziale szóstym.

W rozdziale siódmym czytelnik znajdzie opis działań podejmowanych przez firmę w celu optymalizacji jej finansowego i gospodarczego funkcjonowania w okresie niepewności rynkowej na przykładzie pandemii COVID 19 i konkretnego przdsiębiorstwa.

Dwa kolejne rozdziały: ósmy i dziewiąty są ze sobą ściśle zintegrowane. Oba one dotyczą niedookreślonych układów równań liniowych. Pierwszy z nich – o charakterze teoretycznym – poświęcony jest rozważaniom dotyczącym wykorzystywaniu rachunku macierzowego do rozwiązywania niedookreślonych układów równań liniowych. Kolejny zaś przedstawia praktyczne zastosowanie teoretycznych kwestii rozdziału poprzedniego do określenia wyceny wartości rynkowej nieruchomości.

Monografię kończy rozdział dziesiąty dotyczący wybranych narzędzi wspierających proces sprzedaży usług finansowych wraz z prezentacją prognoz służących zminimalizowaniu ryzyka i błędów w procesie planowania sprzedaży w organizacji.

W większości rozdziałów zawarte są rozwiązane przykładowo zadania z wyczerpującym komentarzem objaśniającym.

Niniejsza monografia składa się z dziesięciu rozdziałów, jednak – zdaniem autorów – tematyka zastosowania metod ilościowych nie została w niej wyczerpana. Toteż planowana jest kolejna część tej publikacji zawierająca kontynuację podjętego i aktualnie rozpoczętego tematu.

W imieniu całego zespołu autorów życzę Państwu owocnej lektury.

Z wyrazami szacunku
Maria Borowska

Maria Borowska, Igor Britchenko

Rozdział pierwszy

APARAT MATEMATYCZNY I STATYSTYCZNY

Motto:
Świat, w którym żyjemy jest światem względnej
stabilności i porządku. Jest w nim trudny
do zmatematyzowania element fantazji widoczny
w rozwoju naszych uczuć, czy w locie liści gnanych
jesiennym wiatrem.
(Józef Życiński – abp, profesor filozofii)

Spis treści Rozdziału pierwszego

Wprowadzenie 10
1.1. Informacje o języku matematycznym 11
1.2. Liczby, procenty, obliczenia finansowe 15
1.3. Przegląd wybranych funkcji elementarnych 24
1.4. Pochodna funkcji i jej zastosowania 39
1.5. Zagadnienia optymalizacji 49
1.6. Informacja o równaniach różniczkowych 53
1.7. Zastosowanie rachunku macierzowego do rozwiązywania równań liniowych 58
1.8. Wybrane elementy statystyki opisowej 65
1.9. Wybrane zagadnienia statystyki matematycznej 69
1.10. O metodach i technikach badawczych 83
Zakończenie 93
Streszczenie 94
Słowa kluczowe 94
Summary 95
Key words 95
Bibliografia 96

Wprowadzenie

Tytuł Rozdziału pierwszego wyraźnie wskazuje na jego zawartość treściową. Zaprezentowane w nim są matematyczne i statystyczne pojęcia, definicje, twierdzenia, zasady i metody konieczne i niezbędne do właściwego odbioru, zrozumienia i efektywnej lektury następnych rozdziałów, w których zastosowany jest ten ilościowy fundament do różnych dziedzin wiedzy – zgodnie z tytułem monografii.

Rozdział podzielony jest na tematyczne podrozdziały, a te z kolei na związane z nimi odpowiednie moduły.

Prezentowane sygnalnie treści ujęte są syntetycznie i schematycznie – najczęściej w formie zwartej tabelarycznej z wykorzystaniem porównań i rozumowania przez analogię.

Wybrane zagadnienia są ilustrowane licznymi przykładami rachunkowymi wraz z rozwiązaniami opatrzonymi wyczerpującym komentarzem wyjaśniającym.

1.1. Informacje o języku matematycznym

1.1.1. Zdania logiczne
1.1.2. Budowa twierdzeń matematycznych
1.1.3. Modelowanie – pojęcie modelu
1.1.4. Pojęcie kwantyfikacji

1.1. Informacje o języku matematycznym

1.1.1. Zdania logiczne

Zdanie (w logice) jest to wyrażenie w trybie orzekającym, które (w logice dwuwartościowej) jest: albo prawdziwe – ma wartość logiczną 1, albo fałszywe – ma wartość logiczną 0.

Zdania złożone:

negacja: $\underset{(\text{nie})}{\square}\, p$

koniunkcja: $p \underset{(\text{i})}{\wedge} q$

alternatywa: $p \underset{(\text{lub})}{\vee} q$

implikacja: $p \underset{(\text{to})}{\Rightarrow} q$

równoważność: $p \underset{\substack{(\equiv) \\ (\text{wtedy i tylko wtedy})}}{\Leftrightarrow} q$

Uwaga:

(1) układ np. zdań: $\begin{cases} p \\ q \end{cases}$ oznacza koniunkcję: $p \wedge q$

(2) $\begin{Bmatrix} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow p \end{Bmatrix} \equiv (p \Leftrightarrow q)$, czyli: $\left[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\right] \equiv (p \Leftrightarrow q)$

1.1.2. Budowa twierdzeń matematycznych

Na ogół twierdzenia w matematyce mają postać implikacji:

$$\underset{\substack{(\text{poprzednik implikacji}) \\ (\text{warunek wystarczający dla } q)}}{p} \Rightarrow \underset{\substack{(\text{następnik implikacji}) \\ (\text{warunek konieczny dla } p)}}{q}$$

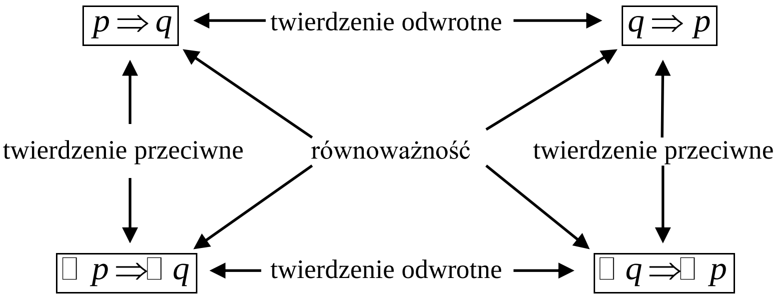
W twierdzeniach mających postać implikacji $(p \Rightarrow q)$:

- poprzednik implikacji, to założenie twierdzenia,
- następnik implikacji, to teza twierdzenia.

Czyli: $\underset{\text{założenie}}{p} \Rightarrow \underset{\text{teza}}{q}$

Niekiedy utożsamia się słowo: twierdzenie ze słowem: teza, a założenia są przeliczane.

Oto rodzaje twierdzeń na schemacie kwadratu logicznego:



Niektóre twierdzenia matematyczne mające postać równoważności:

$$p \underset{\text{(wtedy i tylko wtedy)}}{\Leftrightarrow} q$$

nazywają się one warunkami WKW, czyli warunkami koniecznymi i wystarczającymi.

1.1.3. Modelowanie[1]

Jest to budowanie modelu – pewnego uproszczonego obrazu fragmentu rzeczywistości. Modelowanie w matematyce, to użycie języka matematyki do opisania zachowania pewnego układu, np. biologicznego, mechanicznego, elektrycznego. Modelem matematycznym jest np. układ równań (różniczkowych), czy funkcja opisująca związek zmiennej zależnej od zmiennych niezależnych. Modelowanie matematyczne służy do matematyzacji różnych dziedzin nauki i życia codziennego.
Modelowanie ekonometryczne polega na budowaniu modelu ekonometrycznego (formalnego matematycznego zapisu) opisującego prawidłowości i powiązania między określonymi wielkościami ekonomicznymi. Model ekonometryczny pozwala też dokonać wyboru optymalnych rozwiązań.

Etapy budowania modelu ekonometrycznego:

I. Określenie celu budowy modelu.
II. Wybór zmiennej objaśnianej i potencjalnych zmiennych objaśniających.
III. Zbieranie danych statystycznych.
IV. Dobór zmiennych mających istotny wpływ na zmienną objaśnianą (eliminacja zmiennych o niskim współczynniku zmienności).
V. Wybór analitycznej postaci modelu.
VI. Estymacja parametrów modelu.
VII. Weryfikacja modelu.
VIII. Zastosowanie zbudowanego modelu do celów diagnostycznych i/lub prognostycznych.

[1] Ostoja-Ostaszewska A.: *Matematyka w ekonomii Modele i metody*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006, s. 144, 205, 253.

Inne pojęcia związane z modelowaniem:

Model zarządzania organizacją.
Model zarządzania zasobami ludzkimi.
Model liniowy, nieliniowy.
Model mieszany (w języku programowania SAS).
Model probabilistyczny.

1.1.4. Pojęcie kwantyfikacji

KWANTYFIKATORY[2]

rodzaje

ogólny, uniwersalny, duży

„dla każdego x …”
„każdy x …”
$\forall_x \ldots ;\ \bigwedge_x \ldots$

szczegółowy, egzystencjalny, mały

„istnieje x …”
„pewien x …”
$\exists_x \ldots ;\ \bigvee_x \ldots$

Uwaga:

Symbol $\exists_x ! \ldots$ - oznacza: „istnieje dokładnie jeden x …”.

Poprzedzając formę zdaniową kwantyfikatorem otrzymujemy nową formę zdaniową lub zdanie, np. twierdzenia matematyczne. Czynność ta nazywa się kwantyfikacją.

KWANTYFIKACJA

różne rozumienie w różnych dziedzinach wiedzy

matematyka

poprzedzanie zdania logicznego kwantyfikatorem, czyli formułowanie definicji i twierdzeń matematycznych.

zarządzanie wiedzą

ilościowe przedstawianie zjawisk ujmowanych jakościowo (np. gospodarczych, ekonomicznych), czyli mierzenie, zliczanie.

POJĘCIA POKREWNE KWANTYFIKACJI

klasyfikacja, to systematyczny podział wg określonej zasady (segregowanie).

kwalifikacja, to zaliczenia osób, przedmiotów lub zjawisk do określonej kategorii – po wcześniejszej jakościowej ocenie (wartościowanie).

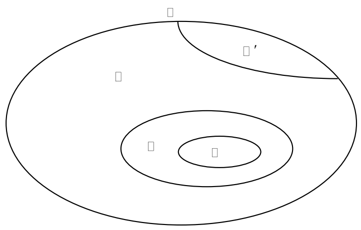
[2] Empacher A.B., Sęp Z., Żakowska A., Żakowski W.: *Mały słownik matematyczny*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1997, s. 139.

1.2. Liczby, procenty, obliczenia finansowe

1.2.1. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory
1.2.2. Pojęcie procentu
1.2.3. Typy zadań na procenty
1.2.4. Ciąg arytmetyczny i geometryczny
1.2.5. Przyszła wartość pieniądza
1.2.6. Kapitalizacja odsetek
1.2.7. Operacja oprocentowania
1.2.8. Procent prosty
1.2.9. Procent składany
1.2.10. Porównanie procentu prostego i składanego
1.2.11. Rachunek dyskontowy
1.2.12. Przykłady rachunkowe dotyczące obliczeń bankowych

1.2. Liczby, procenty, obliczenia finansowe

1.2.1. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory[3]



$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych (interpretacja geometryczna: oś liczbowa)

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}; \qquad \mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$$

$$\mathbb{R}_+ = (0, +\infty) \qquad \mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$$

$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych (rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone i okresowe)

$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych ($\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$)

$$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -2, -1\} \qquad \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}_+$$

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych ($\{0, 1, 2, \ldots\}$)

$\mathbb{N}_+$ - zbiór liczb porządkowych ($\{1, 2, 3, \ldots\}$)

$\mathbb{Q}'$ - zbiór licz niewymiernych (rozwinięcie dziesiętne nieskończone i nieokresowe)

Spostrzeżenia:

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}_+ \cup \{0\},$$
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$
$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$$
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$
$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$$

Rozwinięcie dziesiętne

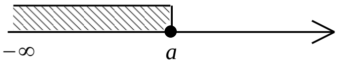
skończone lub nieskończone i okresowe — $\mathbb{Q}$

nieskończone i nieokresowe — $\mathbb{Q}'$

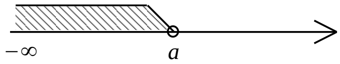
$$\underbrace{\mathbb{Q} \qquad \mathbb{Q}'}_{\mathbb{R}}$$

[3] Borowska M.: *MATEMATYKA Materiały pomocnicze dla studentów do nauki matematyki*, Wydawnictwo Diecezjalne i Drukarnia w Sandomierzu, Stalowa Wola 2015, s. 20-21.

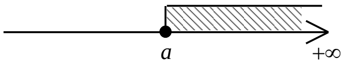
Inne podzbiory zbioru liczb rzeczywistych to przedziały liczbowe:



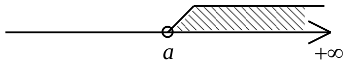
$\left(-\infty, a\right\rangle$



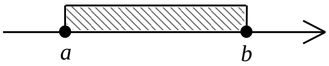
$\left(-\infty, a\right)$



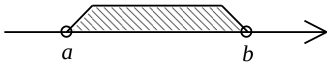
$\left\langle a, +\infty\right)$



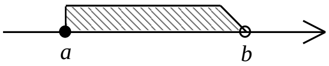
$\left(a, +\infty\right)$



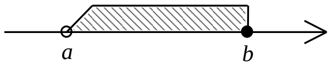
$\left\langle a; b\right\rangle$



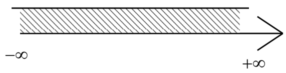
$\left(a; b\right)$



$\left\langle a; b\right)$



$\left(a; b\right\rangle$



$\mathbb{R} = \left(-\infty; +\infty\right)$

1.2.2. Pojęcie procentu

$$1\%\ \text{całości} = \frac{1}{100}\ \text{część całości}$$

$$1\%\ a = \frac{1}{100}\ a; \quad p\%\ a = \frac{p}{100}\ a$$

1.2.3. Typy zadań na procenty

Oblicz $p\%$ liczby A.

Rozwiązanie:

$p\% A = \frac{p}{100} \cdot A$

Np. Oblicz 43% liczby 2021.
Rozwiązanie:

$43\% 2021 = \frac{43}{100} \cdot 2021 =$

$= \frac{86903}{100} = 869,03$

Odpowiedź: 43% liczby 2021 wynosi 869,03.

Uwaga:
Jeżeli $p\% < 100\%$, to $p\%$ danej liczby jest mniejsze od tej liczby.

Jakim procentem liczby A jest liczba B?

Rozwiązanie:

$p\% A = B$

$p = \frac{100B}{A}$

Np. Jakim procentem liczby 2021 jest liczba 1952.
Rozwiązanie:

$p\% 2021 = 1952$

$\frac{p}{100} \cdot 2021 = 1952$

$p = \frac{1952 \cdot 100}{2021}$

$p = \frac{195200}{2021}$

$p = 96,59$

Odpowiedź: Liczba 1952 stanowi $96,59\%$ liczby 2021.

Uwaga:
Jeżeli $A > B$, to $p\% < 100\%$.

Znajdź liczbę A, której $p\%$ jest równy B.

Rozwiązanie:

A - szukana liczba

$p\% A = B$

$\frac{p}{100} A = B$

$A = \frac{100B}{p}$

Np. Znajdź liczbę, której 65% jest równe 2021.
Rozwiązanie:

$\frac{65}{100} A = 2021$

$A = \frac{2021 \cdot 100}{65}$

$A = \frac{202100}{65}$

$A = 3109,23$

Odpowiedź: Jest to liczba 3109,23.

Uwaga:
Jeżeli $p\% < 100\%$, to szukana liczba A jest większa B.

1.2.4. Ciąg arytmetyczny i geometryczny[4]

Ciąg arytmetyczny	Zagadnienia	Ciąg geometryczny
$\begin{cases} a_1 = A \\ a_{n+1} = a_n + r \end{cases}$ r - różnica (stała)	definicja rekurencyjna	$\begin{cases} a_1 = G \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$ q - iloraz (stały)
$a_n = a_1 + (n-1)r$	wzór ogólny	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	suma n-początkowych wyrazów	$S_n = \begin{cases} na_1;\ q = 1 \\ a_1 \frac{1-q^n}{1-q};\ q \neq 1 \end{cases}$
Oprocentowanie proste	zastosowanie w matematyce finansowej	Oprocentowanie złożone

1.2.5. Przyszła wartość pieniądza (*Future Value – FV*)[5]

Wartość pieniądza jest funkcją czasu. Konsekwencją zmiennej wartości pieniądza w czasie jest to, że przy podejmowaniu różnych działań finansowych, zachodzi konieczność porównywania kwot pieniężnych pochodzących z równych okresów.

Oznaczenia i pojęcia:

K_0 - kwota początkowa, kapitał,

b - baza całość $\leftrightarrow 100\%$,

c - część całości,

p - stopa procentowa (odsetkowa) – liczba, o którą wzrasta kapitał, procent części c w bazie b:

$$\frac{p}{100} = \frac{c}{b}$$

K_n - kapitał końcowy – to kapitał początkowy powiększony o odsetki,

D - dochód, jako różnica między kwotą końcową, a początkową,

d - odsetki, to wielkość doliczana do kapitału:

$$d = \frac{p}{100} \cdot K_0$$

1.2.6. Kapitalizacja odsetek

– to doliczanie dochodu (odsetek) do kapitału.

1.2.7. Operacja oprocentowania

– służy poszukiwaniu przyszłej wartości pieniądza i polega na ustaleniu kwoty, do jakiej – po określonym czasie – wzrośnie kapitał początkowy.

---

[4] Tamże, s. 185.

[5] Tamże, s. 186.

1.2.8. Procent prosty[6]

– to sposób oprocentowania kapitału K_0 polegający ma tym, że odsetki (procent) są naliczane od stałej kwoty kapitału początkowego K_0 proporcjonalnie do długości czasu oprocentowania. Wtedy kapitał końcowy obliczany jest wg wzoru:

$$K_n = K_0 + \tfrac{p}{100} K_0 \cdot n = K_0 \left(1 + \tfrac{p}{100} \cdot n\right),$$

gdzie:

K_0 - kapitał początkowy,

p - oprocentowanie za jeden okres naliczania odsetek,

n - liczba okresów naliczania odsetek,

K_n - kapitał z odsetkami po n okresach (latach).

Uwaga:

Kwoty: K_0, K_1, K_2, …, K_n tworzą ciąg arytmetyczny skończony o różnicy: $r = \tfrac{p}{100} K_0$.

Odsetki za okres

1-go roku	n miesięcy	t dni
$\dfrac{p \cdot K_0}{100}$	$\dfrac{p \cdot K_0}{100} \cdot \dfrac{n}{12}$	$\dfrac{p \cdot K_0}{100} \cdot \dfrac{t}{360}$

p - oprocentowanie (stopa procentowa)

1.2.9. Procent składany[7]

– to sposób oprocentowania kapitału K_0 polegający na tym, że dochód w postaci odsetek (procent) jest doliczany do kapitału (stanu konta) i procentuje wraz z nim w następnym okresie (roku). Wtedy kapitał końcowy obliczany jest wg wzoru:

$$K_n = K_0 \left(1 + \tfrac{p}{100}\right)^n,$$

gdzie:

K_0 - kapitał początkowy,

p - oprocentowanie za jeden okres naliczania odsetek (ustalona stopa procentowa),

n - liczba okresów naliczania odsetek,

K_n - kapitał z odsetkami po n okresach.

Uwaga:

Kwoty: K_0, K_1, K_2, …, K_n tworzą ciąg geometryczny skończony o ilorazie: $q = \left(1 + \tfrac{p}{100}\right)$ zwanym czynnikiem procentowym. Zatem:

$$K_{i+1} = K_i + \tfrac{p}{100} K_i = K_i \underbrace{\left(1 + \tfrac{p}{100}\right)}_{q},$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

[6] Podgórska M., Klimkowska J.: *Matematyka finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006, s. 13-14.

[7] Tamże, s. 67-83.

Jeżeli kapitał K_0 umieszczony jest na koncie na n okresów przy zmiennej stopie procentowej p_i, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to kapitał końcowy K_n po upływie n okresów obliczany jest wg następującego wzoru:

$$K_n = K_0 \left(1 + \tfrac{p_1}{100}\right)\left(1 + \tfrac{p_2}{100}\right)\left(1 + \tfrac{p_3}{100}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \tfrac{p_n}{100}\right),$$

gdzie:

$q_1 = 1 + \frac{p_1}{100}$; $q_2 = 1 + \frac{p_2}{100}$; $q_3 = 1 + \frac{p_3}{100}$; …; $q_n = 1 + \frac{p_n}{100}$ są zmiennymi czynnikami procentowymi.

Ponadto, gdy stopa procentowa p dotyczy okresu rocznego, a odsetki są doliczane k-krotnie w ciągu roku (np. co kwartał: $k = 4$), to do obliczenia kapitału uzyskanego w ciągu n lat, stosujemy wzór:

$$K_n = K_0 \left(1 + \tfrac{1}{k} \cdot \tfrac{p}{100}\right)^{k \cdot n},$$

gdzie:

$\frac{1}{k}$ - podstawowy okres oprocentowania

$\frac{p}{k}$ - stopa procentowa dla okresu podstawowego

Oto związek podokresów stosowanych w praktyce z parametrem k:
dla półrocza – $k = 2$,
dla kwartału – $k = 4$,
dla miesiąca – $k = 12$,
dla tygodnia – $k = 52$,
dla dnia – $k = 365$ (lub 360),
dla 7 tygodni – $k = \frac{52}{7}$,
dla 19 dni – $k = \frac{360}{19}$ (dla roku bankowego) lub $k = \frac{365}{19}$ (dla roku kalendarzowego).

1.2.10. Porównanie procentu prostego i składanego

Procent prosty (dochód w postaci odsetek nie jest doliczany do wkładu i nie procentuje wraz z nim w następnym okresie oszczędzania)	Zmiany kapitału początkowego K_0	Procent składany (odsetki po roku lub po innym okresie oszczędzania – przy stałej stopie procentowej – są dopisywane do kapitału i procentują wraz z nim w następnym okresie)
$K_1 = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$	Kapitał po 1 okresie	$K_1 = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$
$K_2 = K_0\left(1 + 2 \cdot \frac{p}{100}\right)$	Kapitał po 2-ch okresdach	$K_2 = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$
$K_n = K_0\left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right)$	Kapitał po n okresach	$K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Kapitalizacja odsetek, to proces dopisywania (doliczania) odsetek do kapitału.

1.2.11. Rachunek dyskontowy[8]

Dyskontowanie – obliczanie kapitału początkowego K_0 na podstawie znanego kapitału końcowego K_n. Jest to działanie odwrotne do oprocentowania. Różnicę między kapitałem końcowym, a początkowym nazywamy **dyskontem (*D*)**.

$$D = K_n - K_0$$

Dyskontowanie proste:
Wzór na obecną wartość K_0 pieniądza po n latach przy oprocentowaniu prostym:

Kapitał początkowy: $$K_0 = \frac{K_n}{1 + n \cdot \frac{p}{100}}$$

Dyskonto $$D = \frac{K_n \cdot n \cdot \frac{p}{100}}{1 + n \cdot \frac{p}{100}}$$

Dyskonto składane:
Wzór na obecną wartość K_0 pieniądza, który po n latach przy rocznym oprocentowaniu w wysokości $p\%$ rocznie z roczną kapitalizacją ma wartość K_n:

$$K_0 = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

1.2.12. Przykłady rachunkowe dotyczące obliczeń bankowych

P1.)
Pewien pożyczkodawca ustalił następujące warunki kredytowe: przez 2 lata należy spłacać co miesiąc 1% pożyczonej kwoty, przy czym w ostatnim miesiącu oprócz odsetek trzeba oddać całą pożyczoną kwotę. Oblicz, jaką sumę trzeba będzie wpłacić pożyczkodawcy w ciągu 2 lat, jeśli na tych warunkach zaciągniemy kredyt wysokości 10 tysięcy złotych.

Rozwiązanie:
$K_0 = 10000\text{zł}$, $p\% = 1\%$, $n = 24$, K_{24} - suma do spłacenia po 24 miesiącach

$$\underbrace{K_{24} = 10000 + 0{,}01 \cdot 10000 \cdot 24 = 10000 + 2400 = 12400}_{\text{(procent prosty)}}$$

Odpowiedź: Suma wpłat sięga 12400zł.

P2.)
Na konto o oprocentowaniu 1% w skali roku wpłacono 10000zł. Oblicz stan konta po upływie 2 lat, jeśli właściciel konta nie będzie dokonywał żadnych wpłat, ani wypłat.

[8] Sobczyk M.: *Matematyka finansowa*, Agencja Wydawniczo-Poligraficzna PLACET, Warszawa 2007, s. 42-49.

Rozwiązanie:

$K_0 = 10000\text{zł},\ n = 2$

$\underbrace{K_2 = 10000 \cdot (1,01)^2 = 10201\text{zł}}_{\text{(procent składany)}}$

Odpowiedź: Po 2-ch latach na koncie będzie 10201zł.

P3.)

Oblicz zysk po roku oszczędzania 1000zł w trzech różnych bankach, w których okres kapitalizacji i stopa procentowa jest następująca:

I bank – 1 rok i $p\% = 8\%$

II bank – pół roku i $p\% = 4\%$

III bank – jeden kwartał i $p\% = 2\%$

Rozwiązanie:

Stan konta po roku oszczędzania wynosi:

w I banku: $1000 \cdot 1,08 = 1080\text{zł}$

w II banku: $1000 \cdot 1,04^2 = 1081,60\text{zł}$

w III baku: $1000 \cdot 1,02^4 = 1082,43\text{zł}$

Odpowiedź: Zysk wynosi:

w I banku: 80zł

w II banku: 81zł 60gr

w III banku: 82zł 43gr

P4.)

Oblicz zysk, jaki przyniesie kwota 1000zł umieszczona przez 20 dni na rachunku *a vista* (płatność na każde żądane) oprocentowanym 0,5% w skali roku.

Rozwiązanie:

20 dni, to $\frac{20}{360} = \frac{1}{18}$ roku bankowego (rok bankowy ma 360 dni).

Zysk wynosi: $0,5\% \cdot 1000 \cdot \frac{1}{18} \approx 0,28\text{zł} = 28\text{gr}$

Odpowiedź: Zysk jest równy 28gr.

P5.)

Jaką kwotą będziemy dysponować po roku, wpłacając na roczną lokatę 4000zł, jeśli początkowe oprocentowanie lokaty wynosi 2% w skali roku, a po 9-ciu miesiącach wzrasta do 2,5% w skali roku.

Rozwiązanie:

Odsetki po początkowych 9-ciu miesiącach:

$\frac{9}{12} \cdot 0,02 \cdot 4000 = 60\text{zł}$

Odsetki po kolejnych 3-ch miesiącach:

$\frac{3}{12} \cdot 0,025 \cdot 4000 = 25\text{zł}$

Zatem po roku będziemy dysponować:

$4000 + 60 + 25 = 4085\text{zł}$

Odpowiedź: Po roku będziemy dysponować kwotą 4085zł.

P6.)

Jaką kwotę odsetek otrzyma po dwóch latach łącznie właściciel konta wpłacający na 6-cio miesięczną lokatę 10000zł, jeśli oprocentowanie lokaty jest równe 4%, a podatek wynosi 19%, w sytuacji:

a) wypłacania odsetek co pół roku,

b) nie wpłacania, ani nie wypłacania pieniędzy z tego konta przed upływem dwóch lat.

Rozwiązanie:

$K_0 = 10000\text{zł}$, $p\% = \frac{4\%}{2} = 2\%$ (brutto) (oprocentowanie po pół roku), $n = 4$ (lokata półroczna, 2 lata naliczania)

81% odsetek zostaje po odprowadzeniu 19% kwoty odsetek do skarbu państwa

a) $0,81 \cdot 0,02 \cdot 10000 \cdot 4 = 648\text{zł}$

b) $10000 \cdot (1 + 0,81 \cdot 0,02)^4 - 10000 = 663,92\text{zł}$

Odpowiedź:

a) Suma wypłaconych co pół roku odsetek wynosi 648zł.

b) Po dwóch latach suma odsetek wynosi 663zł 92gr.

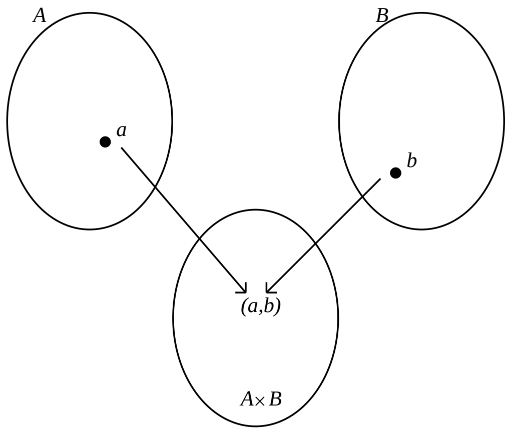
1.3. Przegląd wybranych funkcji elementarnych

1.3.1. Iloczyn (produkt) kartezjański
1.3.2. Pojęcie relacji i jej własności
1.3.3. Pojęcie funkcji
1.3.4. Funkcja skalarna jednej i wielu zmiennych (rzeczywistych)
1.3.5. Pojęcie funkcji odwrotnej do danej
1.3.6. Funkcja liniowa (wielomian I stopnia)
1.3.7. Funkcja potęgowa
1.3.8. Wielomiany
1.3.9. Funkcja wykładnicza
1.3.10. Logarytm i jego własności
1.3.11. Funkcja logarytmiczna, jako odwrotna do funkcji wykładniczej
1.3.12. Notacja wykładnicza
1.3.13. Zastosowanie funkcji logarytmicznej – skala logarytmiczna
1.3.14. Homomorfizm, jako odpowiednik funkcji w algebrze
1.3.15. Ciąg, jako funkcja i macierz, jako funkcja
1.3.16. Funkcja Törnquista

1.3. Przegląd wybranych funkcji elementarnych

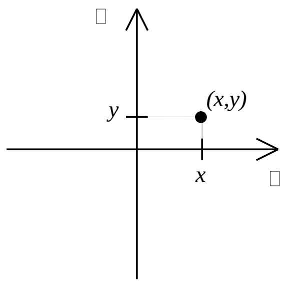
1.3.1. Iloczyn (produkt) kartezjański: $A\times B$

- jest to zbiór wszystkich uporządkowanych par elementów, taki, że pierwszy element pary należy do pierwszego zbioru, a drugi do drugiego zbioru:

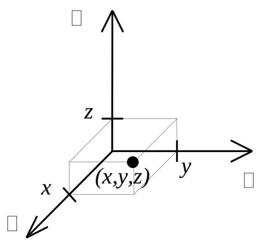


$$A\times B=\left\{(a,b):a\in A \text{ i } b\in B\right\}$$

W szczególności: $A\times A=A^2$ (kwadrat kartezjański)
np.
1) płaszczyzna kartezjańska, to $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$



2) przestrzeń (trójwymiarowa), to $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$

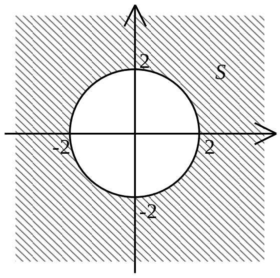


1.3.2. Pojęcie relacji i jej własności

Każdy podzbiór S iloczynu kartezjańskiego: $A\times B$ nazywamy relacją (binarną) określoną na zbiorze A i przyjmującą wartości w zbiorze B. Mówimy, że elementy: $a\in A$ i $b\in B$ spełniają relację S jeżeli $(a,b)\in S$:

$$a\ S\ b \Leftrightarrow (a,b)\in S\subset A\times B$$

np. $A=\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{R}$, definiujemy relację S :
$x\ S\ y \Leftrightarrow x^2+y^2>4$
Zatem $S\subset\mathbb{R}^2$ jest zewnętrzem koła o środku $O(0,0)$ i promieniu $r=2$



Własności relacji $S\subset A\times B$

1) Zwrotność (refleksywność): $\underset{a\in S}{\forall} a\ S\ a$

2) Przeciwzwrotność (irrefreksywność): $\underset{a\in S}{\forall} \neg\, a\ S\ a$

3) Symetria: $\underset{a,b\in S}{\forall}\left(a\ S\ b \Rightarrow b\ S\ a\right)$

4) Asymetria (mocna asymetria): $\underset{a,b\in S}{\forall}\left(a\ S\ b \Rightarrow \neg\, b\ S\ a\right)$

5) Antysymetria: $\underset{a,b\in S}{\forall}\left(a\ S\ b \wedge b\ S\ a \Rightarrow a=b\right)$

6) Spójność: $\underset{a,b\in S}{\forall}\left(a\neq b \Rightarrow a\ S\ b \vee b\ S\ a\right)$

7) Przechodność (tranzytywność): $\underset{a,b\in S}{\forall}\left(a\ S\ b \wedge b\ S\ c \Rightarrow a\ S\ c\right)$

Relacja S określona na zbiorze X , która jest: zwrotna, symetryczna i przechodnia nazywa się **równoważnością**, **relacją równoważnościową** (ekwiwalencją).

Zbiór tych wszystkich elementów y, które pozostają z dowolnie ustalonym elementem x w relacji równoważnościowej S nazywamy klasą abstrakcji elementu x w relacji równoważności:

$$[x]_S=\{y\in X : xSy\}$$

Relacja równoważności dzieli zbiór X na dwie rozłączne klasy:

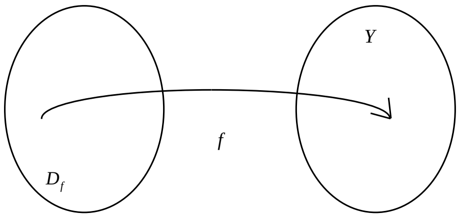
- jedna, to zbiór tych elementów, które są z danym elementem w relacji,
- druga, to zbiór tych elementów, które z danym elementem nie są w relacji S .

1.3.3. Pojęcie funkcji[9]

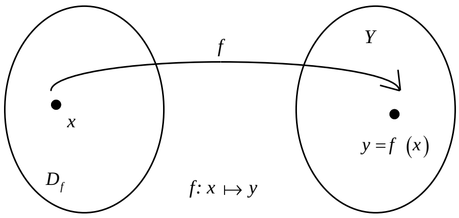
Funkcja f, to określona relacja zachodząca między elementami zbioru D_f, a elementami zbioru Y, spełniająca ściśle określony następujący warunek.

---

[9] Borowska M.: *MATEMATYKA Materiały pomocnicze dla studentów do nauki matematyki*, Wydawnictwo Diecezjalne i Drukarnia w Sandomierzu, Stalowa Wola 2015, s. 55.



Relacja taka, która każdemu elementowi zbioru D_f przyporządkowuje dokładnie jeden element zbioru Y nazywa się funkcją.



D_f - dziedzina funkcji
x - argument funkcji
x - zmienna niezależna

Y - przeciwdziedzina funkcji
y - wartość funkcji w punkcie (dla argumentu) x
y - zmienna zależna od x

Zbiór $ZW_f = \{ y \in Y : y = f(x);\ x \in D \}$ - to zbiór wartości funkcji f ($\subseteq$ przeciwdziedzina Y funkcji f). Zawsze jest: $ZW_f \subseteq Y$.

Wykres funkcji, to zbiór: $\{ (x, y) : y = f(x);\ x \in D_f \}$.

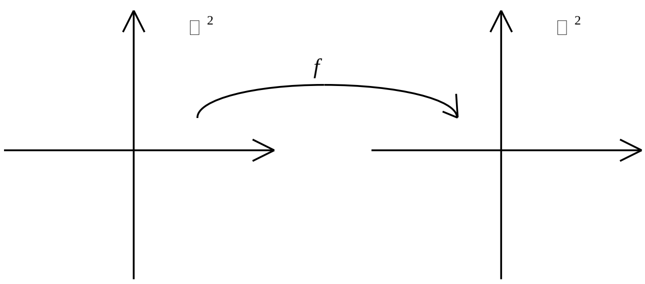
W zależności od struktury zbioru D_f możemy mówić o funkcji jednej lub wielu zmiennych.

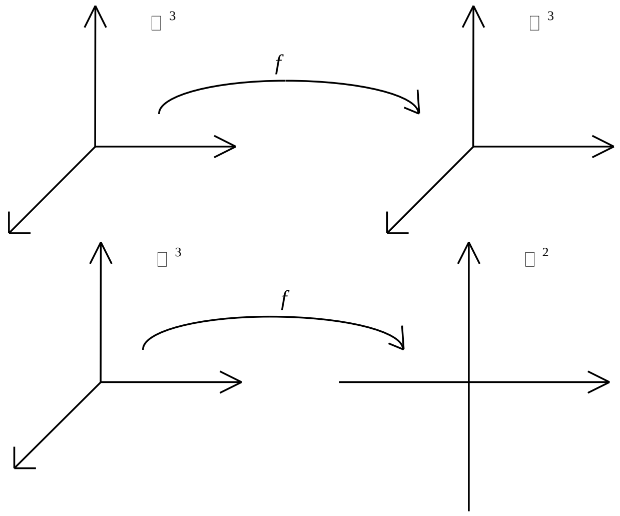
O funkcji $f : D_f \to \mathbb{R}$ mówimy, że jest to **funkcja skalarna** (jednej lub wielu zmiennych rzeczywistych).

O funkcji $f : D_f \to \mathbb{R}^m$ mówimy, że jest to **funkcja wektorowa**:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ y_m = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

czyli przekształcenie przestrzeni $\mathbb{R}^n$ w przestrzeń $\mathbb{R}^m$ (np. przekształcenia geometryczne).
Np.



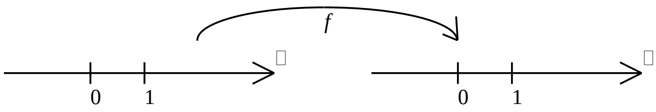


1.3.4. Funkcja skalarna jednej i wielu zmiennych (rzeczywistych)

Funkcja jednej zmiennej (rzeczywistej)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f : x \mapsto y = f(x)$$

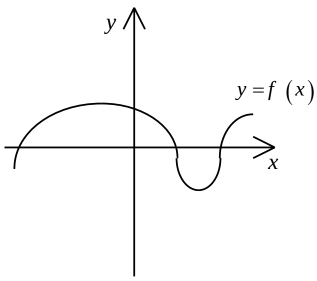


$x \in D_f \subseteq \mathbb{R}$ $\qquad$ $y \in Y \subseteq \mathbb{R}$

$$y = f(x)$$

np. popyt na dobro, jako funkcja jego ceny

Wykres funkcji: $y = f(x)$ jest zawarty w przestrzeni dwuwymiarowej:

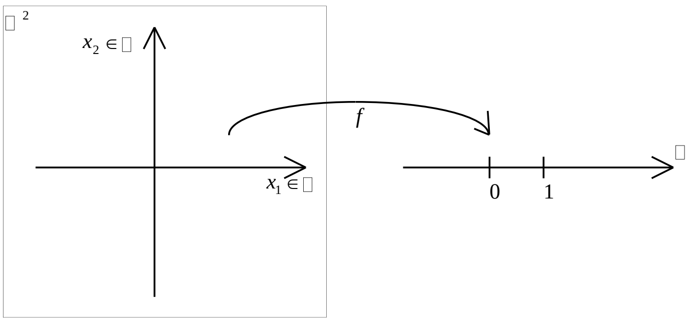


$$\{(x, y) : y = f(x);\ x \in D_f\} \subset \mathbb{R}^2$$

Funkcja skalarna dwóch zmiennych (rzeczywistych)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f : (x_1, x_2) \mapsto y = f(x_1, x_2)$$

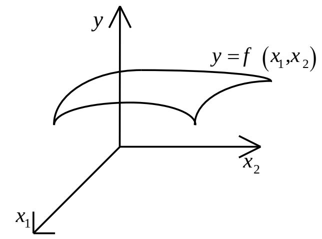


$$\left(x_1, x_2\right) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad\qquad y \in Y \subseteq \mathbb{R}$$

$$y = f\left(x_1, x_2\right)$$

np. wielkość produkcji, jako funkcja kapitału i zatrudnienia.

Wykres funkcji: $y = f\left(x_1, x_2\right)$ jest zawarty w przestrzeni trójwymiarowej:

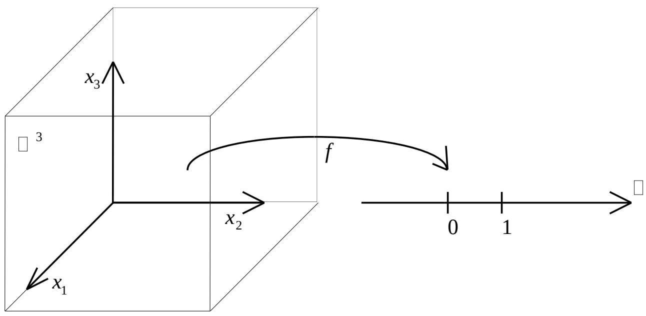


$$\left\{\left(x_1, x_2, y\right) : y = f\left(x_1, x_2\right);\ \left(x_1, x_2\right) \in D_f\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Funkcja skalarna trzech zmiennych (rzeczywistych)

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$f : \left(x_1, x_2, x_3\right) \mapsto y = f\left(x_1, x_2, x_3\right)$$



$$\left(x_1, x_2, x_3\right) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad\qquad y \in Y \subseteq \mathbb{R}$$

$$y = f\left(x_1, x_2, x_3\right)$$

np. koszty przedsiębiorstwa, jako funkcja ceny pracy, ceny kapitału i ceny dostaw energii

Uogólniając:

Funkcja wielu zmiennych, to funkcja:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

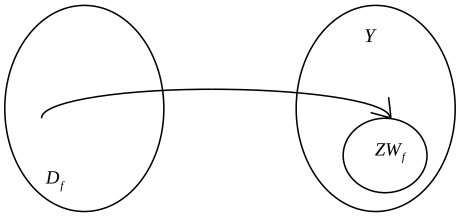
$f : \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \mapsto y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, gdzie $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n$

Wykres funkcji: $y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ jest zawarty w przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1}$

$\left\{\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, y\right) : y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right);\ \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in D_f\right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

1.3.5. Pojęcie funkcji odwrotnej do danej[10]

Niech $f : D_f \to Y$ będzie funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej.



$$f : x \xrightarrow[\text{jeden}]{\text{dokładnie}} y$$

Aby relacja odwrotna: $y \mapsto x$ była funkcją (nie tylko relacją), dana funkcja f musi być różnowartościowa (różnym argumentom muszą odpowiadać różne wartości funkcji). Wtedy relacja odwrotna: $y \mapsto x$ jest też funkcją, czyli każdemu elementowi y odpowiada dokładnie jeden element x.

Oznaczenie funkcji odwrotnej do f: f^{-1}.

Jeżeli:

$$f : D_f \to ZW_f$$

$$f : x \xrightarrow[\text{jeden}]{\text{dokładnie}} y \in ZW_f \text{ i } f \text{ - różnowartościowa}$$

to

$$f^{-1} : ZW_f \to D_f$$

$$f^{-1} : y \xrightarrow[\text{jeden}]{\text{dokładnie}} x \in D_f$$

Wtedy:

$$\left(y = f(x); x \in D_f\right) \Leftrightarrow \left(x = f^{-1}(y); y \in ZW_f\right)$$

Wykresy: funkcji danej f i odwrotnej do danej f^{-1} są symetryczne względem prostej: $y = x$ (dwusiecznej kąta I i III ćwiartki).

np. funkcja f: popyt y na określone dobro, jako funkcja f jego ceny x,

funkcja odwrotna f^{-1}: cena x określonego dobra, jako funkcja f^{-1} popytu na to dobro.

1.3.6. Funkcja liniowa (wielomian I stopnia)

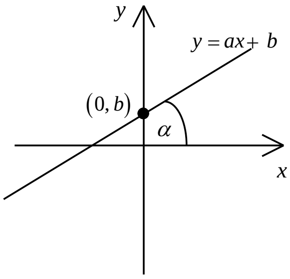
$$y = ax + b;\ D_f = \mathbb{R},\ a,\ b \text{ - współczynniki } (a, b \in \mathbb{R})$$

a - współczynnik kierunkowy (kątowy),

b - wyraz wolny.

Wykresem funkcji liniowej jest prosta:

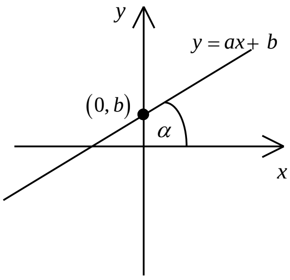
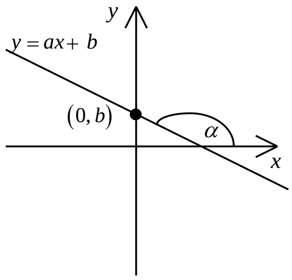
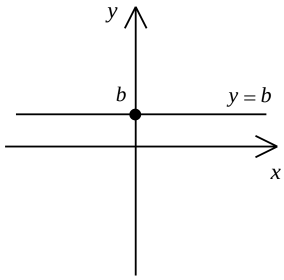
[10] Tamże, s. 59.



$(0, b)$ - punkt przecięcia wykresu z osią OY,

$a = \text{tg}\,\alpha$, α - kąt nachylenia prostej (wykresu z dodatnim kierunkiem osi OX)

Własności

$a > 0$ funkcja rosnąca	$a < 0$ funkcja malejąca	$a = 0$ funkcja stała
		
α - ostry, to $\text{tg}\,\alpha > 0$	α - rozwarty, to $\text{tg}\,\alpha < 0$	$\alpha = 0^\circ$, to $\text{tg}\,\alpha = 0$

1.3.7. Funkcja potęgowa (argument funkcji jest w potędze)[11]

Potęga liczby x **(podstawa potęgi):** x^n; n - wykładnik potęgi $n \in \square$

Dla $n \in \square_+$: $\quad x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ czynników}}$ i $x^0 = 1$; $x \neq 0$

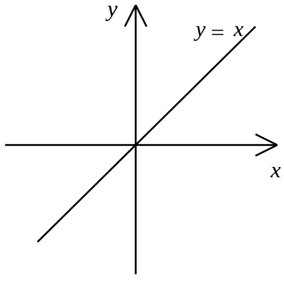
Dla $n = -k$; $k \in \square$: $\quad x^{-k} = \dfrac{1}{x^k}$; $x \neq 0$

Dla $n = \frac{1}{k}$; $k \in \square_+$; $k > 1$: $\quad x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x}$; $x \geq 0$

Dla $n = \frac{m}{k}$; $m \in \square$; $k \in \square_+$; $k > 1$: $\quad x^{\frac{m}{k}} = \sqrt[k]{x^m}$; $x > 0$

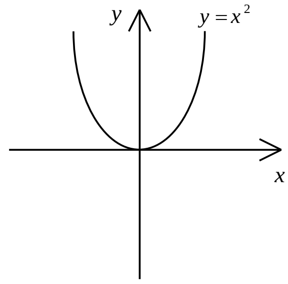
Wybrane funkcje potęgowe

$n = 1$: $\quad y = x$ - funkcja liniowa

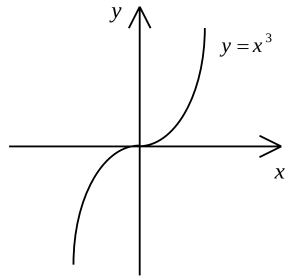


[11] Tamże, s. 164.

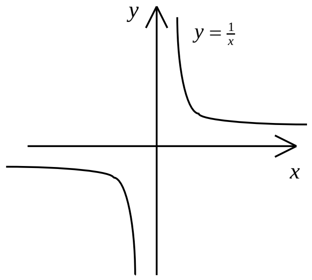
$n = 2$: $y = x^2$ - funkcja kwadratowa



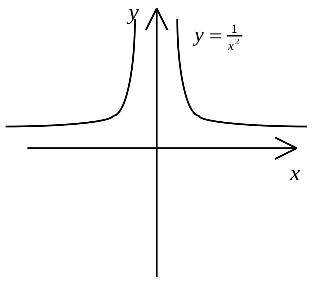
$n = 3$: $y = x^3$



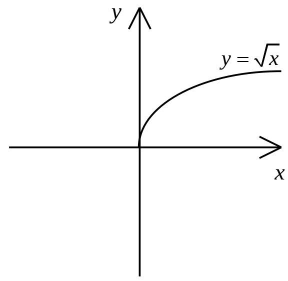
$n = -1$: $y = \frac{1}{x}$; $x \neq 0$ - funkcja homograficzna



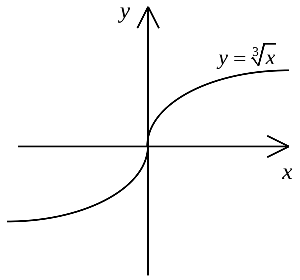
$n = -2$: $y = \frac{1}{x^2}$; $x \neq 0$



$n = \frac{1}{2}$: $y = \sqrt{x}$; $x \geq 0$ - funkcja odwrotna do funkcji $y = x^2$ dla $x \geq 0$



$n = \frac{1}{3}$: $y = \sqrt[3]{x}$ - funkcja odwrotna do funkcji $y = x^3$



1.3.8. Wielomiany[12]

Wielomian stopnia n:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

gdzie:

$x \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, n - stopień wielomianu

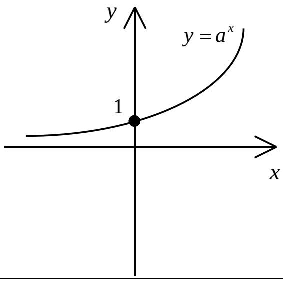
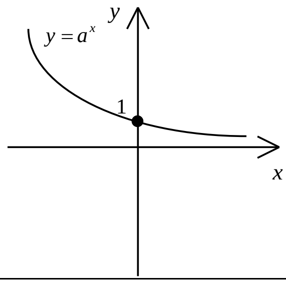
Np.

1) wielomian pierwszego stopnia $W(x) = ax + b \ \ (a \neq 0)$ - funkcja liniowa

2) wielomian drugiego stopnia $W(x) = ax^2 + bx + c \ \ (a \neq 0)$ - funkcja kwadratowa

1.3.9. Funkcja wykładnicza (argument funkcji jest w wykładniku)[13]

$$y = a^x; \ D_f = \mathbb{R}, \ a > 0 \ \text{i} \ a \neq 1$$

dla $a > 1$ funkcja rosnąca	dla $0 < a < 1$ funkcja malejąca
	
$D = \mathbb{R}$, $ZW_f = \mathbb{R}_+$	

1.3.10. Logarytm i jego własności

$$\left(\log_{\underbrace{a}_{\substack{\text{podstawa logarytmu}\\ a>0 \ \text{i} \ a\neq 1}}} \overbrace{b}^{\substack{\text{liczba logarytmowana}\\ b>0}} = \underbrace{c}_{\substack{\text{logarytm}\\ c\in\mathbb{R}}}\right) \Leftrightarrow \left(\underbrace{a}_{\text{podstawa potęgi}}^{\overbrace{c}^{\text{wykładnik potęgi}}} = \underbrace{b}_{\text{potęga}}\right)$$

Uwaga:

1) $\log_{10} b = \log b$ (logarytm dziesiętny)

2) $\log_e b = \ln b$ (logarytm naturalny) $e = 2{,}718281828\ldots$

analogicznie:

3) $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

Własności:

$\log_a 1 = 0;$

$\log_a a = 1;$

$\log_a a^k = k \ \ (k \in \mathbb{R});$

$\log_{a^n} a^k = \frac{k}{n} \ \ (k \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \ a^{\log_a b} = b;$

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a};$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

[12] Tamże, s. 121.
[13] Tamże, s. 169.

Własności działań (przy stosownych założeniach)	
na logarytmach	na potęgach
$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$ $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$ $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$	$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ $a^b : a^c = \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$ $\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$

Związek potęgowania z pierwiastkowaniem i z logarytmowaniem (przy stosownych założeniach)

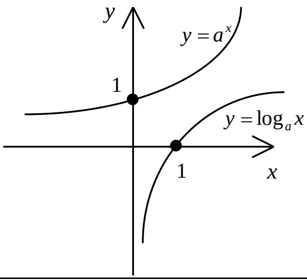
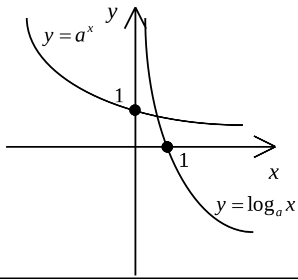
$$a^b = c \;\Leftrightarrow\; a = \sqrt[b]{c}$$
(potęgowanie) (pierwiastkowanie)

$$a^b = c \;\Leftrightarrow\; b = \log_a c$$
(potęgowanie) (logarytmowanie)

1.3.11. Funkcja logarytmiczna, jako funkcja odwrotna do funkcji wykładniczej[14]

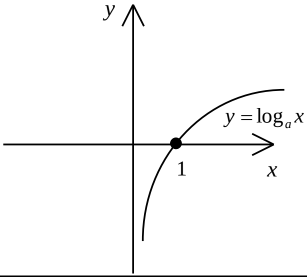
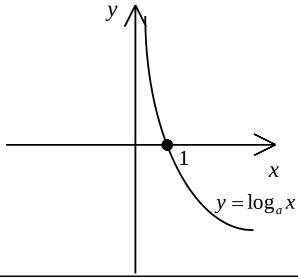
$$\left(y = f(x)\right) \Leftrightarrow \left(x = f^{-1}(x)\right)$$

$$\left(y = a^x\right) \Leftrightarrow \left(x = \log_a y\right);\ a > 0 \text{ i } a \neq 1$$

<table>
<tr><td>dla $a > 1$
obie funkcje są rosnące</td><td>dla $0 < a < 1$
obie funkcje są malejące</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Funkcja logarytmiczna (argument funkcji jest liczbą logarytmowaną)

$$y = \log_a x;\ D_f = \mathbb{R}_+,\ a > 0 \text{ i } a \neq 1$$

<table>
<tr><td>dla $a > 1$
funkcja rosnąca</td><td>dla $0 < a < 1$
funkcja malejąca</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">$D = \mathbb{R}_+,\ ZW_f = \mathbb{R}$</td></tr>
</table>

[14] Tamże, s. 173-174.

Spostrzeżenie:

$D_{y=a^x} = \mathbb{R} = ZW_{y=\log_a x}$

$ZW_{y=a^x} = \mathbb{R}_+ = D_{y=\log_a x}$

1.3.12. Notacja wykładnicza

Notacja wykładnicza ma zastosowanie do zapisu bardzo dużych, albo małych liczb L. Niech $a \in \langle 1;10)$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy zapisujemy:

duże liczby	małe liczby
$a \cdot 10^n$	$a \cdot 10^{-n}$

np.

$L = 350000000 = 3{,}5 \cdot 10^8$	$L = 0{,}00000007 = 7 \cdot 10^{-8}$

1.3.13. Zastosowanie funkcji logarytmicznej – skala logarytmiczna

Jeżeli zmiana obserwowanego zjawiska jest wykładnicza: $y = a^x$ i otrzymywane wielkości są bardzo małe, albo wielkie, to zmieniamy skalę na skalę logarytmiczną.

Np. wyrażenie: $y = 10^x$

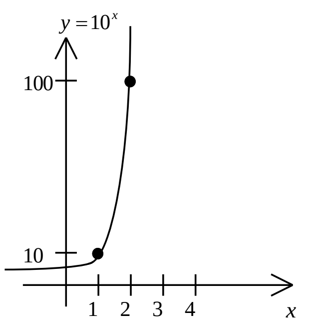
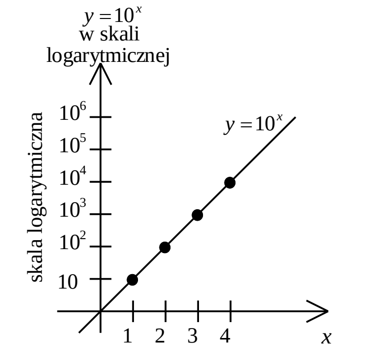
logarytmujemy obustronnie:

$\log y = \log 10^x$

zmiana skali: $\log y \leftrightarrow y$

$y = \log 10^x = x \log 10 = x$

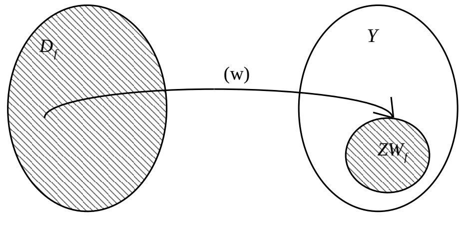
czyli $y = x$

	$y = 10^x$	x	zmiana skali $y = \log 10^x = x$	
	10^1 10^2 10^3 10^4	1 2 3 4	1 2 3 4	

1.3.14. Homomorfizm, jako odpowiednik funkcji w algebrze

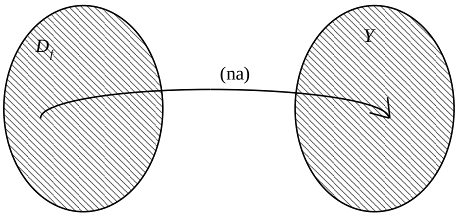
Uwagi dotyczące funkcji: $f : D_f \to Y$

1)



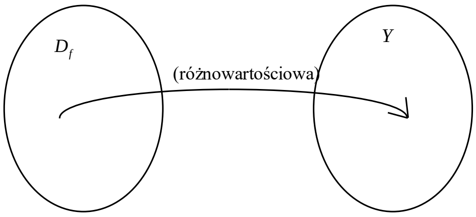
$ZW_f \subset Y$

2)



$ZW_f = Y$ **surjekcja**

3)



$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
$$x_1, x_2 \in D_f \text{ (dowolne)}$$

injekcja

4)

$$\left.\begin{array}{l}\text{surjekcja}\\ \text{injekcja}\end{array}\right\} = \textbf{bijekcja}$$

Niech A, B - niepuste zbiory $(A \neq \varnothing \neq B)$.

Struktura algebraiczna, to para: $(A;$ działania$)$, np. $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Homomorfizm struktur algebraicznych

$$f : (A, *_1, *_2, \ldots, *_n) \to (B, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_n)$$
$$f(a_1 *_i a_2) = f(a_1) \circ_i f(a_2);\ i = 1, 2, \ldots, n$$
$$a_1, a_2 \in A \text{ (dowolne)}$$

Odpowiedniość pojęć

homomorfizm	funkcja
$f : (A, *_1, *_2, \ldots, *_n) \to (B, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_n)$	$f : A \to B$
epimorfizm	surjekcja
monomorfizm	injekcja
izomorfizm	bijekcja

Uwaga:

W topologii funkcja f, która jest:

(1) bijekcją,

(2) funkcją ciągłą,

(3) funkcja odwrotna f^{-1} jest ciągła,

nazywa się homeomorfizmem.

Inne uogólnienia funkcji: funkcja wektorowa

$f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - przekształcenie na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^m$

czyli

$$\left.\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}\right\} \text{ tj. } m \text{ funkcji o } n \text{ zmiennych rzeczywistych}$$

1.3.15. Ciąg, jako funkcja i macierz, jako funkcja

Ciąg, jako funkcja jednej zmiennej naturalnej dodatniej[15]

$$\text{ciąg } (a_n)_{n \in \mathbb{N}_+} : \underset{\left(\begin{array}{c}\text{dziedziną ciągu}\\ \text{jest zbiór lub podzbiór}\\ \text{zbioru liczb naturalnych}\\ \text{dodatnich}\end{array}\right)}{D_{cg} \subseteq \mathbb{N}_+} \to \underset{\left(\begin{array}{c}\text{dowolny zbiór,}\\ \text{którego elementy}\\ \text{numerujemy}\\ \text{np. sale dydaktyczne,}\\ \text{krzesła w kinie}\end{array}\right)}{P}$$

$$\text{ciąg liczbowy } (a_n)_{n \in \mathbb{N}_+} : \underset{(\text{jw.})}{D_{cg} \subseteq \mathbb{N}_+} \to \underset{(\text{zbiór liczbowy})}{\mathbb{R}}$$

Np.

1) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_+} : \underset{\left(\begin{array}{c}\text{argumentem}\\ \text{jest numer}\\ \text{wyrazu}\\ n \in \mathbb{N}_+\end{array}\right)}{n} \mapsto \underset{\left(\begin{array}{c}\text{wartość funkcji}\\ \text{to wyraz ciągu}\end{array}\right)}{a_n} = 2n - 1$

2) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_+} : n \mapsto a_n = a_1 + (n-1)r$

$r = const$ (ciąg arytmetyczny)

3) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_+} : n \mapsto a_n = a_1 q^{n-1}$

$q = const$ (ciąg geometryczny)

Macierz, jako funkcja dwóch zmiennych naturalnych dodatnich[16]

macierz o n wierszach i k kolumnach:

$$(a_{ij})_{\substack{i \in \{1,2,\dots,n\} \\ j \in \{1,2,\dots,k\}}} : D_{mc} \subset \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R}$$

$$(a_{ij})_{\substack{i \in \{1,2,\dots,n\} \\ j \in \{1,2,\dots,k\}}} : (i, j) \mapsto a_{ij}$$

czyli

$$A_{n \times k} = (a_{ij})_{\substack{i \in \{1,2,\dots,n\} \\ j \in \{1,2,\dots,k\}}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

Np. gospodarka wykorzystująca $n = 4$ nakładów do wyprodukowania $k = 5$ wyników produkcji:

[15] Tamże, s. 183.
[16] Tamże, s. 283.

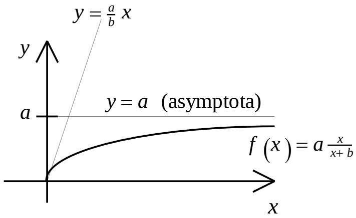
$$A_{4\times 5} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

Kolumny oznaczają zapotrzebowanie poszczególnych nakładów (czynników) produkcji do wytworzenia kolejnych (wyników) produkcji.

1.3.16. Funkcja Törnquista

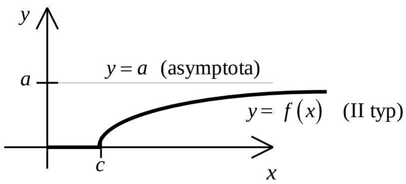
I typ funkcji popytu (dla dóbr podstawowych, np. chleb):

$$f(x) = a\,\tfrac{x}{x+b};\ a,b \in \mathbb{R}_+,\ D_f = \mathbb{R}_+$$



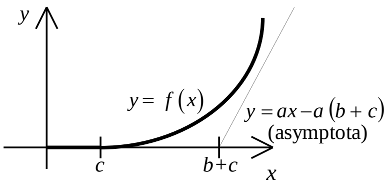
II typ funkcji popytu (dla dóbr wyższego rzędu, np. szynka):

$$f(x) = \begin{cases} a\,\tfrac{x-c}{x+b};\ a,b,c \in \mathbb{R}_+,\ \text{dla } x > c \\ 0;\ \text{dla } x \in \langle 0; c \rangle \end{cases}$$



III typ funkcji popytu (dla dóbr luksusowych, np. samochód):

$$f(x) = \begin{cases} ax\,\tfrac{x-c}{x+b};\ a,b,c \in \mathbb{R}_+,\ \text{dla } x > c \\ 0;\ \text{dla } x \in \langle 0; c \rangle \end{cases}$$



1.4. Pochodna funkcji i jej zastosowania

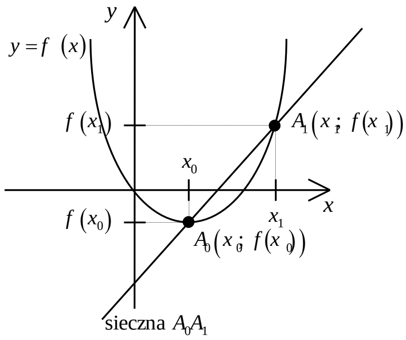
1.4.1. Iloraz różnicowy
1.4.2. Pochodna funkcji w punkcie
1.4.3. Pochodna jako funkcja
1.4.4. Wzory na pochodne
1.4.5. Pochodna, a monotoniczność i ekstremum funkcji
1.4.6. Pochodne wyższych rzędów
1.4.7. Pochodna drugiego rzędu, a wypukłość funkcji – tempo zmian wartości funkcji
1.4.8. Elastyczność funkcji
1.4.9. Niektóre zastosowania pochodnej
1.4.10. Pochodne cząstkowe
1.4.11. Elastyczności cząstkowe funkcji dwóch (wielu) zmiennych
1.4.12. Przykłady rachunkowe

1.4. Pochodna funkcji i jej zastosowania[17]

1.4.1. Iloraz różnicowy

Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej. Iloraz różnicowy jest to iloraz przyrostu wartości funkcji i przyrostu argumentu:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{\text{przyrost wartości funkcji}}{\text{przyrost argumentu}}$$

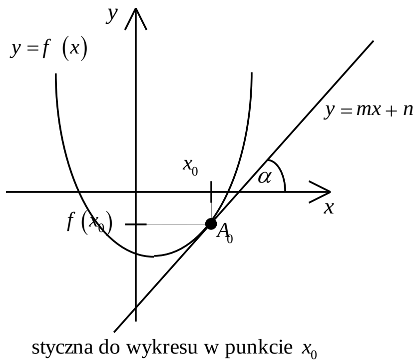


Np. Koszt średni wytworzenia każdej jednostki x pewnego dobra p: $K_{śr}=\frac{\Delta K}{\Delta x}$.

1.4.2. Pochodna funkcji w punkcie x_0

$$f'(x_0)\underset{\text{o ile istnieje}}{\overset{\text{właściwa}}{=}}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Funkcja mająca pochodną nazywa się funkcją różniczkowalną.



$$\underbrace{f'(x_0)}_{\left(\substack{\text{poczodna funkcji}\\ \text{w punkcie } x_0}\right)}=\operatorname{tg}\alpha=\underbrace{m}_{\left(\substack{\text{współczynnik kierunkowy}\\ \text{stycznej do wykresu funkcji}\\ f(x)\text{ w punkcie } A_0(x_0;f(x_0))}\right)}$$

Np. Koszt krańcowy $K'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta K(x)}{\Delta x}$

[17] Tamże, s. 218-234.

1.4.3. Pochodna jako funkcja

Pochodna, to funkcja, która argumentowi x funkcji f przyporządkowuje jej pochodną f' w tym punkcie.

$$f' : x \mapsto f'(x);\ x \in D_{f'} \subset D_f$$

1.4.4. **Wzory na pochodne** (przy stosownych założeniach)

$$\begin{array}{ll} f(x) = const. & f'(x) = 0 \\ f(x) = x^n & f'(x) = nx^{n-1} \\ f(x) = a^x & f'(x) = a^x \cdot \ln a \\ f(x) = \log_a x & f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} \end{array}$$

$$\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x);\ c = const.$$

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

$$f'(x) = \left(z\left(w(x)\right)\right)' = z'\left(w(x)\right) \cdot w'(x)$$

1.4.5. Pochodna, a monotoniczność i ekstremum funkcji

Założenie: f różniczkowalna w przedziale $(a;b)$

Pochodna, a monotoniczność funkcji

$$\underset{x \in (a;b)}{\forall} f'(x) = 0 \Rightarrow f \text{ jest stała w } (a;b)$$

$$\underset{x \in (a;b)}{\forall} f'(x) > 0 \Rightarrow f \ \square \ \text{ w } (a;b)$$

$$\underset{x \in (a;b)}{\forall} f'(x) < 0 \Rightarrow f \ \square \ \text{ w } (a;b)$$

Pochodna funkcji, a ekstremum funkcji

Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej:

$$\begin{pmatrix} f \text{ - różniczkowalna w punkcie } x_0 \in D_f \\ \text{i ma w } x_0 \text{ esktremum} \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\left(f'(x_0) = 0\right)}_{\left(\substack{\text{warunek konieczny} \\ \text{istnienia ekstremum}}\right)}$$

Uwaga:

$$\left(f'(x_0) \neq 0\right) \Rightarrow \left(f \text{ nie ma w } x_0 \text{ esktremum}\right)$$

Warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej

Założenia: x_0 - punkt stacjonarny $\left(f'(x_0)=0 \right)$

$$\underbrace{\underset{x\in(a;x_0)}{\forall} f'(x)>0 \ (f \nearrow) \ \wedge \underset{x\in(x_0;b)}{\forall} f'(x)<0 \ (f \searrow)}$$
$$\Downarrow$$

$f:$ $\nearrow$ w x_0 jest max równe $f(x_0)$ $\searrow$ $: f$

$f':$ $+$ $-$ $: f'$

x_0 x

$$\underbrace{\underset{x\in(a;x_0)}{\forall} f'(x)<0 \ (f \searrow) \ \wedge \underset{x\in(x_0;b)}{\forall} f'(x)>0 \ (f \nearrow)}$$
$$\Downarrow$$

$f:$ $\searrow$ w x_0 jest min równe $f(x_0)$ $\nearrow$ $: f$

$f':$ $-$ $+$ $: f'$

x_0 x

1.4.6. Pochodne wyższych rzędów (przy stosownych założeniach)

Funkcja:	$y=f(x)$
Pochodna (pierwszego rzędu):	$y'=f'(x)$
Pochodna (druga) drugiego rzędu:	$y''=(y')'=(f'(x))'=f''(x)$
Pochodna (trzecia) trzeciego rzędu:	$y'''=(y'')'=(f''(x))'=f'''(x)$
itd.	
Pochodna n-tego rzędu:	$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'=f^{n}(x)$

1.4.7. Pochodna drugiego rzędu, a wypukłość funkcji – tempo zmian wartości funkcji

Jest to problem, czy funkcja rośnie (maleje) coraz szybciej, czy coraz wolniej. Zależy to od znaku pierwszej i drugiej pochodnej tej funkcji.

Znak f' / Znak f''	$f'>0$ $(f \nearrow)$	$f'<0$ $(f \searrow)$
$f''>0$ f wypukła	f rośnie coraz szybciej	f maleje coraz wolniej
$f''<0$ f wklęsła	f rośnie coraz wolniej	f maleje coraz szybciej

1.4.8. **Elastyczność funkcji** (przy stosowanych założeniach)

Jest to przybliżona miara procentowego przyrostu wartości funkcji dla przyrostu argumentu tej funkcji o 1%. Wyraża się ona wzorem:

$$Ef(x) = f'(x) \cdot \tfrac{x}{f(x)}$$

$$f \nearrow \quad \Rightarrow Ef(x) > 0$$

$$f \searrow \quad \Rightarrow Ef(x) < 0$$

Różne przypadki elastyczności:

-1   0   1 $Ef(x)$

$Ef(x) = 0$

Funkcja $f(x)$ doskonale nieelastyczna: 1%-owa zmiana argumentu x nie ma wpływu na zmianę wartości funkcji $f(x)$.

$|Ef(x)| \in (0;1)$

Funkcja $f(x)$ nieelastyczna: 1%-owa zmiana argumentu x wywołuje niewielką (mniej niż 1%-ową) zmianę wartości funkcji $f(x)$.

$|Ef(x)| = 1$

Funkcja $f(x)$ jednostkowo (neutralnie, wzorcowo, proporcjonalnie) elastyczna: 1%-owa zmiana argumentu x wywołuje również 1%-ową zmianę wartości funkcji $f(x)$.

$|Ef(x)| \to \infty$

Funkcja $f(x)$ doskonale elastyczna: 1%-owa zmiana argumentu x wywołuje bardzo dużą (więcej niż 1%-ową) zmianę wartości funkcji $f(x)$.

1.4.7. Niektóre zastosowania pochodnej

Różniczka funkcji f w punkcie x_0 - jest to iloczyn pochodnej w tym punkcie i przyrostu argumentu Δx:

$$\mathrm{d}\, f\left(x_0, \Delta x\right) = f'\left(x_0\right) \cdot \Delta x$$

Różniczka funkcji i przyrost wartości funkcji wywołany małym przyrostem argumentu Δx są prawie równe:

$$f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) \approx f'\left(x_0\right) \cdot \Delta x$$

Własność tę można wykorzystać do szacowania przyrostu wartości funkcji przy małych zmianach Δx argumentu oraz do obliczania przybliżonej wartości funkcji po zmianie argumentu z x_0 na $x_0 + \Delta x$.

Dla małych przyrostów argumentu Δx można obliczyć przybliżoną wartość funkcji dla argumentu $x_0 + \Delta x$ wg wzoru:

$$f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + \mathrm{d}\, f\left(x_0, \Delta x\right)$$

Dla funkcji rzeczywistej n-krotnie różniczkowalnej uogólnieniem powyższego wzoru jest **wzór Taylora**:

$$f\left(x_0 + \Delta x\right) = f\left(x_0\right) + \tfrac{\Delta x}{1!} f'\left(x_0\right) + \tfrac{(\Delta x)^2}{2!} f''\left(x_0\right) + \ldots + \tfrac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}\left(x_0\right) + o\left(x_0 + \Delta x, x_0\right) + \ldots$$

Jego szczególnym przypadkiem dla $x_0 = 0$ i $\Delta x = x$ jest **wzór Maclaurina**:

$$f\left(x\right) = f\left(0\right) + \tfrac{x}{1!} f'\left(0\right) + \tfrac{x^2}{2!} f''\left(0\right) + \ldots + \tfrac{x^n}{n!} f^{(n)}\left(0\right) + \ldots$$

Np. Funkcję $f\left(x\right) = e^x$ można rozwinąć w następujący szereg potęgowy:

$$e^x = 1 + \tfrac{1}{1!} x + \tfrac{1}{2!} x^2 + \ldots + \tfrac{1}{n!} x^n + \ldots$$

Czyli: $e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \ldots$

Podobnie:

$$\sin x = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$\cos x = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + \ldots$$

1.4.10. **Pochodne cząstkowe** (dotyczą funkcji wielu zmiennych)[18]

Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

Niech: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

czyli: $f: \left(x, y\right) \mapsto z = f\left(x, y\right)$ - funkcja dwóch zmiennych

[18] Tamże, s. 246.

Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji dwóch zmiennych	
względem zmiennej x $(y = const.)$	względem zmiennej y $(x = const.)$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f'_x(x,y) \underset{\text{o ile istnieje}}{\overset{\text{właściwa}}{=}} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$	$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f'_y(x,y) \underset{\text{o ile istnieje}}{\overset{\text{właściwa}}{=}} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$
Pochodna funkcji $f(x,y)$: $f'(x,y) = \left[f'_x(x,y); f'_y(x,y) \right]$ - gradient	

Uogólniając:

1) dla funkcji skalarnej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wielu zmiennych: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mamy n pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f'_{x_1}, \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = f'_{x_2}; \ \frac{\partial f}{\partial x_3} = f'_{x_3}; \ \ldots; \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

2) dla funkcji wektorowej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wielu, n zmiennych: $y_j = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $j \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ mamy **macierz Jakobiego**, której elementami są pochodne cząstkowe $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)$ $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ poszczególnych funkcji $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ po kolejnych $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zmiennych:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

- jeżeli $m = n$, to wyznacznik macierzy Jakobiego nazywa się jakobianem.

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji dwóch zmiennych: $z = f(x,y)$ (dwukrotnie różniczkowalnej) to **macierz Hessego**:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Wyznacznik tej macierzy, to hesjan: $\det H(x_0, y_0)$.

Uogólniając: dla funkcji skalarnej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wielu zmiennych: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ macierz Hessego ma postać:

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Ekstremum lokalne funkcji dwóch zmiennych

Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji mającej obie pochodne cząstkowe w punkcie $(x_0, y_0) \in D_f$:

$$\begin{pmatrix} f \text{ ma ekstremum} \\ \text{lokalne w punkcie} \\ (x_0, y_0) \in D_f \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\left(\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \right)}_{\substack{\text{rowiązując ten układ równań} \\ \text{otrzymuje się punkty stacjonarne}}}$$

Warunek wystarczający na istnienie ekstremum lokalnego (funkcji mającej w otoczeniu punktu stacjonarnego $(x_0, y_0) \in D_f$ ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu):

$$\begin{pmatrix} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \\ \wedge \\ \underbrace{\det H(x_0, y_0)}_{\substack{\text{hesjan w punkcie} \\ \text{stacjonarnym}}} > 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{funkcja } f(x, y) \\ \text{ma w punkcie} \\ (x_0, y_0) \\ \text{ekstremum} \\ \text{lokalne} \end{pmatrix}$$

A ponadto:

jeżeli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, to tym ekstremum jest maksimum (lokalne),

a jeżeli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, to tym ekstremum jest minimum (lokalne).

Uwaga:

1) W przypadku, gdy $\det H(x_0, y_0) < 0$, to w punkcie stacjonarnym (x_0, y_0) funkcja nie ma ekstremum.

2) W przypadku, gdy $\det H(x_0, y_0) = 0$ w punkcie stacjonarnym (x_0, y_0), wówczas należy zbadać istnienie ekstremum w tym punkcie na podstawie definicji ekstremum lokalnego funkcji $z = f(x, y)$.

1.4.11. Elastyczności cząstkowe funkcji dwóch (wielu) zmiennych

Elastyczności cząstkowe funkcji skalarnej dwóch zmiennych: $z = f(x, y)$	
$E_x f(x, y) = f'_x(x, y) \cdot \frac{x}{f(x,y)}$ Wskazuje, jak zmienia się wartość funkcji $z = f(x, y)$ jeśli nastąpi 1%-owy przyrost tylko pierwszej zmiennej x.	$E_y f(x, y) = f'_y(x, y) \cdot \frac{y}{f(x,y)}$ Wskazuje, jak zmieni się wartość funkcji $z = f(x, y)$, jeśli nastąpi 1%-owy przyrost tylko drugiej zmiennej y.

Uogólnienie:

1) Dla funkcji skalarnej trzech zmiennych: $t = f(x, y, z)$ mamy elastyczności cząstkowe:

$$E_x f(x, y, z) = f'_x(x, y, z) \cdot \frac{x}{f(x,y,z)}$$

$$E_y f(x,y,z) = f'_y(x,y,z)\cdot \tfrac{y}{f(x,y,z)}$$
$$E_z f(x,y,z) = f'_z(x,y,z)\cdot \tfrac{z}{f(x,y,z)}$$

2) Dla funkcji skalarnej n-zmiennych: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mamy elastyczności cząstkowe:

$$E_{x_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\cdot \tfrac{x_1}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$
$$E_{x_2} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\cdot \tfrac{x_2}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$
$$\ldots$$
$$E_{x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\cdot \tfrac{x_n}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

1.4.12. Przykłady rachunkowe

Uwaga:

Jeśli $f(x,y)$ oznacza zależność pewnej wielkości na zmiany czynników x i y, to wartość pochodnej cząstkowej $f'_x(x_0, y_0)$ jest wartością krańcową tej wielkości (np. popytem krańcowym, podażą krańcową, produktywnością krańcową, dochodem krańcowym, czy kosztem krańcowym) ze względu na zmianę pierwszej zmiennej x.

Podobnie $f'_y(x_0, y_0)$ - jest wartością krańcową tej wielkości ze względu na zmianę drugiej zmiennej y.

Wielkości te informują o ile zmieni się dana wielkość, gdy zmienna x lub y zmieni się o jednostkę z ustalonego poziomu: (x_0, y_0).

P1.)

Wyznaczyć macierz Hessego funkcji $f(x,y) = y^3 + x^2y - 2xy^2 + y^2 - 2xy + 3x - 1$.

Rozwiązanie:

Wpierw obliczamy pochodne pierwszego rzędu:

$$f'_x(x,y)_{(y=const.)} = 2xy - 2y^2 - 2y + 3$$
$$f'_y(x,y)_{(x=const.)} = 3y^2 + x^2 - 4xy + 2y - 2x$$

Oto pochodne drugiego rzędu:

$f''_{xx} = 2y$; $\qquad f''_{xy} = 2x - 4y - 2$

$f''_{yx} = 2x - 4y - 2$; $\qquad f''_{yy} = 6y - 4x + 2$

Odpowiedź: Macierz Heassego ma postać:

$$\begin{bmatrix} 2y & 2x-4y-2 \\ 2x-4y-2 & 6y-4x+2 \end{bmatrix}$$

P2.)

Wyznaczyć elastyczność dochodową funkcji popytu opisanej wzorem:

a) $f(x) = ax^\alpha$; $(a, \alpha \in \mathbb{R}_+)$

b) $g\left(x\right)=ae^{\frac{\alpha}{x}}$; $\left(a>0\right)$
w zależności od dochodu x.

Rozwiązanie:
a) Korzystamy ze wzoru na elastyczność funkcji: $E_x f\left(x\right)=f'\left(x\right)\cdot\frac{x}{f(x)}$.

Zatem $E_x f\left(x\right)=a\alpha x^{\alpha-1}\cdot\frac{x}{ax^{\alpha}}=\alpha$

Odpowiedź: a) $E_x f\left(x\right)=\alpha$.

b) Analogicznie: $E_x g\left(x\right)=g'\left(x\right)\cdot\frac{x}{g(x)}$.

Zatem $E_x g\left(x\right)=a\alpha e^{\frac{\alpha}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{x}{ae^{\frac{\alpha}{x}}}=-\frac{\alpha}{x}$.

Odpowiedź: b) $E_x g\left(x\right)=-\frac{\alpha}{x}$.

P3.)
Zależność popytu na dobro A od jego ceny x oraz od ceny y dobra B wyraża się wzorem:
$f\left(x,y\right)=\frac{5x^2+xy^2+5y}{x^2+y}$.

Dla układu cen tych dóbr: $\left(x_0,y_0\right)=\left(2,3\right)$ obliczyć realizację popytu na dobro A ze względu na 1%-wy wzrost ceny dobra B.

Rozwiązanie:
Należy obliczyć elastyczność cząstkową funkcji $f\left(x,y\right)$ ze względu na cenę y:

$E_y f\left(x_0,y_0\right)=f'_y\left(x_0,y_0\right)\cdot\frac{y_0}{f(x_0,y_0)}$

dla danych z zadania.
Czyli

$E_y f\left(2,3\right)=f'_y\left(2,3\right)\cdot\frac{3}{f(2,3)}$

Zatem

$f\left(2,3\right)=\frac{53}{7}$; $f'_y\left(2,3\right)=\frac{66}{49}$

i po podstawieniu do wzoru mamy:

$E_y f\left(2,3\right)=\frac{66}{49}\cdot\frac{3}{\frac{53}{7}}=\frac{198}{371}=0,53369\approx 53,37\%$

Odpowiedź: Jeżeli cena dobra B wzrośnie z poziomu $y_0=3$ o 1%, przy stałej cenie $x_0=2$ dobra A, to popyt na dobro A zwiększy się o ok. 53,37%.

1.5. Zagadnienia optymalizacji

1.5.1. Pojęcie optymalizacji

1.5.2. Przykłady rachunkowe

1.5. Zagadnienia optymalizacyjne[19]

1.5.1. Pojęcie optymalizacji

Optymalizacja, to problem rozwiązania zagadnienia optymalizacyjnego polegającego na znalezieniu takiego argumentu $x^* \in D_f$, dla którego wartość funkcji skalarnej:

$f : D_f \to \mathbb{R}$ zwanej **funkcją celu**, spełnia warunek:

$$\underset{x \in D_f \setminus \{x^*\}}{\forall} f(x) > \underbrace{f(x^*)}_{\substack{f \text{ osiąga w punkcie } x^* \\ \text{minimum (lokalne)}}}$$

albo:

$$\underset{x \in D_f \setminus \{x^*\}}{\forall} f(x) < \underbrace{f(x^*)}_{\substack{f \text{ osiąga w punkcie } x^* \\ \text{maksimum (lokalne)}}}$$

Czyli rozwiązując zadanie optymalizacyjne poszukuje się taki punkt optymalny x^*, w którym wartość $f(x^*)$ jest optymalna (najlepsza).

1.5.2. Przykłady rachunkowe

P1.)
Właściciel sklepu kupuje w hurtowni gry komputerowe w cenie 80zł za sztukę, a sprzedaje po 130zł. Miesięcznie sprzedaje 40 gier. Sprzedawca zbadał rynek i oszacował, że każda obniżka ceny gry w jego sklepie o 1zł zwiększy liczbę sprzedanych gier o jedną sztukę. Jaką powinien ustalić nową cenę właściciel sklepu, aby jego miesięczny zysk był największy? Oblicz ten zysk.

Rozwiązanie:
Niech $x \in \mathbb{R}_+$ oznacza wysokość obniżki ceny gry w zł, przy czym: $x < 130 - 80[\text{zł}]$, czyli $x < 50[\text{zł}]$.

Po obniżce cena gry w sklepie będzie równa: $130 - x$, a liczba sprzedanych w miesiącu gier będzie równa: $40 + x$. Wtedy w hurtowni sprzedawca zapłaci: $(40 + x) \cdot 80[\text{zł}]$ w miesiącu, a ze sprzedaży tych gier w sklepie uzyska: $(40 + x) \cdot (130 - x)[\text{zł}]$ na miesiąc. Zatem zysk sprzedawcy, czyli funkcja celu $f(x)$ ma postać:

$f(x) = (40 + x)(130 - x) - (40 + x)80 = -x^2 + 10x + 2000$; $x \in \mathbb{R}_+ \wedge x < 50$

Jest to funkcja kwadratowa, która osiąga dla $x = \frac{-b}{2a}$ wartość maksymalną.

Zatem: $x = 5$ (spełnia założenia).

---

[19] Tamże, s. 239.

Czyli cena po obniżce będzie równa: $130-5=125[\text{zł}]$ i da sprzedawcy miesięczny zysk równy: $f(5)=2025[\text{zł}]$.

Jest to zysk większy od zysku przed obniżką o $2025-[40\cdot130-40\cdot80]=25[\text{zł}]$ miesięcznie.

Odpowiedź: Nowa cena po obniżce to 125zł za sztukę. Wtedy miesięczny zysk sprzedawcy będzie równy 2025zł

P2.)

Producent ozdobnych okuć do drzwi może w ciągu tygodnia wyprodukować ich do 300 sztuk. Tygodniowy koszt wyprodukowania x sztuk opisany jest funkcją: $K(x)=0,002x^3+5x+2916$. Cenę sprzedaży jednego okucia w zależności od liczby sprzedawanych sztuk opisuje funkcja: $C(x)=150-0,1x$.

a) Przy jakim poziomie tygodniowej produkcji średni koszt wyprodukowania okucia jest najniższy?

b) Przy jakim poziomie sprzedaży producent osiągnie maksymalny tygodniowy dochód. Oblicz ten zysk.

Rozwiązanie:

a) Średni koszt wyprodukowania jednego okucia, czyli funkcja celu $k(x)$, wyraża się wzorem:

$k(x)=\frac{K(x)}{x}=0,002x^2+5+\frac{2916}{x}$; $D_{k(x)}=(0;300\rangle\cap\mathbb{N}$

Funkcja $k(x)$ jest ciągła i do wyznaczenia minimum stosujemy rachunek różniczkowy:

$k'(x)=0,004x-\frac{2916}{x^2}$; $D_{k'(x)}=(0;300)\cap\mathbb{N}_+$

$k'(x)=0\Leftrightarrow 0,004x-\frac{2916}{x^2}=0$

Czyli $x=90\in D_{k'(x)}$

$k(x)$:		$\searrow$		$\nearrow$		
$k'(x)$:		$-$		$+$		
	0		90 min		300	x

Odpowiedź: a) Średni koszt wyprodukowania okucia jest najniższy wtedy, gdy zakład będzie produkował 90 ich sztuk tygodniowo.

b) Dochód, jako funkcja celu $f(x)$, jest różnicą między wartością sprzedaży x sztuk okuć po cenie $c(x)$, a kosztami ich produkcji $K(x)$ ma postać:

$f(x)=x\cdot c(x)-K(x)=-0,002x^3-0,1x^2+145x-2016$; $D_{f(x)}=(0;300\rangle\cap\mathbb{N}_+$

Należy wyznaczyć maksimum tej funkcji.

Jest to funkcja ciągła.

Stosujemy rachunek różniczkowy.

$f'(x) = -0{,}006x^2 - 0{,}2x + 145$; $D_{f'(x)} = (0;300) \cap \mathbb{R}_+$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}006x^2 - 0{,}2x + 145 = 0$

$\Delta = 3{,}52$

$x_1 = 139{,}68 \approx 140$; $x_2 = -173{,}01 \notin D_{f'(x)}$

$$
\begin{array}{l|c|c|l}
f(x): & \nearrow & \searrow & \\
f'(x): & + & - & \\
\hline
0 & 140 & 300 & x \\
 & \max & &
\end{array}
$$

Dla $x = 140$ funkcja $f(x)$ osiąga maksimum.

Maksimum funkcji $f(x)$ wynosi $f(140) = 9936$.

Odpowiedź: b) Maksymalny tygodniowy dochód, równy 9936zł, będzie osiągnięty przy poziomie sprzedaży równym 140 sztuk w ciągu tygodnia.

P3.)

Wydajność pracy pewnego robotnika w ciągu ośmiogodzinnego dnia pracy w zależności od liczby t godzin jego pracy wyraża się wzorem:

$w(t) = 50 + 9t - t^2 - \frac{1}{9}t^3$.

O której godzinie wydajność robotnika jest największa, jeśli rozpoczyna on pracę o godz. 6^{00}?

Rozwiązanie:

Należy wyznaczyć maksimum funkcji celu: $w(t) = 50 + 9t - t^2 - \frac{1}{9}t^3$ dla $t \in \langle 0;8 \rangle$. Funkcja $w(t)$ jest ciągła. Stosujemy rachunek różniczkowy:

$w'(t) = 9 - 2t - \frac{1}{3}t^2$; $t \in (0;8)$

$w'(t) = 0 \Leftrightarrow 9 - 2t - \frac{1}{3}t^2 = 0$

$\Delta = 16$

$t_1 = 3$; $t_2 = -9 \notin (0;8)$

$$
\begin{array}{l|c|c|l}
w(x): & \nearrow & \searrow & \\
w'(x): & + & - & \\
\hline
0 & 3 & 8 & x \\
 & \max & &
\end{array}
$$

Dla $t = 3$ funkcja celu $w(t)$ osiąga maksimum. Zatem po 3-ch godzinach pracy wydajność tego pracownika jest największa.

Odpowiedź: Wydajność tego robotnika będzie największa o godz. 9-tej.

1.6. Informacja o równaniach różniczkowych

1.6.1 Związek całkowania z różniczkowaniem (obliczaniem pochodnej)
1.6.2. Wprowadzenie do równań różniczkowych
1.6.3. Przykłady równań różniczkowych

1.6. Informacja o równaniach różniczkowych[20]

1.6.1. Związek całkowania z różniczkowaniem (obliczaniem pochodnej)

$$\Bigg(\underbrace{\int f(x)\,dx = F(x) + c;\ c \in \mathbb{R}}_{\text{całkowanie}}\Bigg) \Leftrightarrow \Bigg(\underbrace{f(x) = F'(x)}_{\text{różniczkowanie}}\Bigg)$$

Całkowanie (obliczanie całki nieoznaczonej, funkcji pierwotnej) jest operacją odwrotną do różniczkowania (obliczania pochodnej) – tak, jak dodawanie z odejmowaniem, mnożenie z dzieleniem, czy potęgowanie z pierwiastkowaniem i logarytmowaniem – są operacjami matematycznymi (działaniami) wzajemnie odwrotnymi (przy wszystkich stosownych założeniach).

Związek całki oznaczonej na przedziale $\langle a;b \rangle$ z całką nieoznaczoną

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\underbrace{F(x)}_{\substack{\text{funkcja}\\ \text{pierwotna}}}\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Wzory na całkowanie:

($c \in \mathbb{R}$, przy stosownych założeniach)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c;\ n \neq -1$$

$$\int \tfrac{1}{x}\,dx = \int \tfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int a\,dx = ax + c;\ a \in \mathbb{R} \text{ , w szczególności: } \int dx = x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c;\ a > 0$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin c + c$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

[20] Tamże, s. 260-262.

1.6.2. Wprowadzenie do równań różniczkowych

Uwaga I:
Przykład równania:
1) z jedną niewiadomą x:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

wtedy liczba x spełniająca równanie jest rozwiązaniem tego równania.
2) z dwiema niewiadomymi:

$$ax + by = c$$

wtedy para liczb: (x_r, y_r) spełniająca równanie jest rozwiązaniem tego równania.

Uwaga II:
Jeżeli w równaniu niewiadomą jest pewna funkcja: $y = f(x)$, to takie równanie jest **równaniem funkcyjnym**, np. równanie:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & y - 5x = 0 \\ 2) & \sin y = y^2 - 4 \end{array}\right\} \text{ gdzie } y = f(x) \text{ jest poszukiwaną funkcją}$$

Postać równania funkcyjnego:

$F(x, y) = 0$, gdzie $y = f(x)$ jest poszukiwaną funkcją.

Zatem: $F(x, f(x)) = 0$ jest równanie funkcyjnym.

Uwaga III:
Jeżeli w równaniu występuje pochodna poszukiwanej funkcji: $y' = f'(x)$, to takie równanie jest **funkcyjnym równaniem różniczkowym** zwanym **równaniem różniczkowym**, np.:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & y' = 2x \\ 2) & y' = 3y + 4 \\ 3) & y' \cdot (x^2 + 1) = 2xy + 5 + y'' \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{gdzie niewiadomą jest funkcja} \\ y = f(x) \text{ spełniająca dane równanie} \end{array}$$

Postać równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0,$$

gdzie niewiadomą jest funkcja $y = f(x)$ spełniająca to równanie.

Powyższe równanie różniczkowe nazywa się **zwyczajnym**, bo niewiadoma funkcja $y = f(x)$ jest funkcją jednej zmiennej.

Najwyższy rząd pochodnej funkcji $y = f(x)$ - niewiadomej równania różniczkowego – nazywa się rzędem równania różniczkowego, np.:

$F(x, y, y') = 0$ - równanie różniczkowe zwyczajne I rzędu

$$F\left(x, y, y', y''\right)=0$$ - równanie różniczkowe zwyczajne II rzędu

Jeżeli niewiadoma funkcja w równaniu różniczkowym jest funkcją wielu zmiennych, a równanie różniczkowe zawiera pochodne cząstkowe, to takie równanie nazywa się **równaniem różniczkowym cząstkowym**.

Każda funkcja f, która podstawiona do równania w miejsce funkcji niewiadomej y spełnia to równanie, nazywa się **całką szczególną** (rozwiązaniem szczególnym równania różniczkowego), np. dla równania różniczkowego zwyczajnego I rzędu $F\left(x, y, y'\right)=0$ całką szczególną jest: $y=f\left(x\right)$, czyli: $F\left(x, f\left(x\right), f'\left(x\right)\right)=0$.

Zbiór wszystkich funkcji spełniających równanie różniczkowe nazywa się **całką ogólną** (rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego).

Np. po obustronnym całkowaniu równania różniczkowego:

$y'=2x+3$

otrzymujemy jego rozwiązanie ogólne: $y=f\left(x\right)=x^2+3x+c$; $c\in\mathbb{R}$, czyli całkę ogólną.

Znając ponadto warunek początkowy, np. $f\left(0\right)=5$ otrzymujemy rozwiązanie szczególne:

$y=f\left(x\right)=x^2+3x+5$

czyli całkę szczególną.

1.6.3. Przykłady równań różniczkowych

P1.)

Rozwiąż równanie: $xy'=y$.

Rozwiązanie:

$y=f\left(x\right)$ - poszukiwana funkcja

$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ - inny zapis pochodnej

Równanie ma postać:

$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y$

Po rozdzieleniu zmiennych otrzymujemy:

$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$

Po obliczeniu całek i przekształceniu mamy:

$\ln|y|=\ln|x|+c$

$|y|=e^{\ln|x|+c}$

Odpowiedź: Całka ogólna: $y=e^{\ln|x|+c}$.

P2.)

Rozwiąż równanie: $xyy'=1-x^2$.

Rozwiązanie:

Czyli $xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1-x^2$

Po rozdzieleniu zmiennych:

$\int y\,\mathrm{d}y=\int\frac{1-x^2}{x}\,\mathrm{d}x$

$\int y\,\mathrm{d}y=\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x-\int x\,\mathrm{d}x$

Po obliczeniu całek:

$\frac{y^2}{2}=\ln|x|-\frac{x^2}{2}+c$

Odpowiedź: Każda funkcja $y=f(x)$ spełniająca równanie:

$\frac{y^2}{2}=\ln|x|-\frac{x^2}{2}+c$

jest całką ogólną tego równania.

P3.)

Rozwiąż równanie: $\left(xy^2+x\right)\mathrm{d}x+\left(y-x^2y\right)\mathrm{d}y=0$.

Rozwiązanie:

$x\left(y^2+1\right)\mathrm{d}x=y\left(x^2-1\right)\mathrm{d}y$

$\int\frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y$

Oddzielnie liczymy metodą podstawiania każdą całkę:

$$L=\int\frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{l}x^2-1=t\\ 2x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\\ x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+c_1=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+c_1$$

$$P=\int\frac{y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y=\left\{\begin{array}{l}y^2+1=v\\ 2y\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}v\\ y\,\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}v}{2}\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}v}{v}=\frac{1}{2}\ln|v|+c_2=\frac{1}{2}\ln\left|y^2+1\right|+c_2$$

Zatem

$\ln\left|y^2+1\right|=\ln\left|x^2-1\right|+c$

czyli

$y^2+1=e^{\ln\left|x^2-1\right|+c}$

Odpowiedź: Każda funkcja $y=f(x)$ spełniająca równanie:

$y^2=e^{\ln\left|x^2-1\right|+c}-1$

jest całką ogólną tego równania.

1.7. Zastosowanie rachunku macierzowego do rozwiązywania równań liniowych

1.7.1. Macierzowa postać układu n równań o k niewiadomych
1.7.2. Istnienie i liczba rozwiązań układu równań liniowych
1.7.3. Przykłady rachunkowe

1.7. Zastosowanie rachunku macierzowego do rozwiązywania układów równań liniowych[21]

1.7.1. Macierzowa postać układu n równań o k niewiadomych

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix}_{(n\times k)}}_{\substack{\text{macierz główna } (A) \\ \text{układu równań liniowych}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_k \end{bmatrix}_{(k\times 1)}}_{\substack{\text{kolumna} \\ \text{niewiadomych } (\overline{x})}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}_{(n\times 1)}}_{\substack{\text{kolumna wyrazów} \\ \text{wolnych } (\overline{b})}}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $j \in \{1,2,\dots,k\}$

Rozwiązaniem układu jest wektor $x_0 = \begin{Bmatrix} \mathring{x}_1 \\ \mathring{x}_2 \\ \dots \\ \mathring{x}_k \end{Bmatrix}$ spełniający układ równań.

Jeżeli $\underset{i\in\{1,2,\dots,n\}}{\forall} b_i = 0$, to układ nazywa się układem jednorodnym.

Jeżeli $\underset{i\in\{1,2,\dots,n\}}{\exists} b_i \neq 0$, to układ jest niejednorodny.

Układ jednorodny ma zawsze rozwiązanie. Jednym z jego rozwiązań jest rozwiązanie zerowe:

$$\mathring{x}_1 = \mathring{x}_2 = \dots = \mathring{x}_k = 0.$$

Jednorodny układ nieoznaczony, oprócz rozwiązania zerowego, ma jeszcze nieskończenie wiele rozwiązań niezerowych.

[21] Tamże, s. 295.

1.7.2. Istnienie i liczba rozwiązań układu równań liniowych

Układ równań liniowych

$$A_{(n\times k)}\overline{x}_{(k\times 1)}=\overline{b}_{(n\times 1)}$$

$r=rzA=rzA^u\le n$
(tzw. Kroneckera-Capellego)
układ nie ma rozwiązań

ALBO

$rzA\ne rzA^u$
układ nie ma rozwiązań

(układ niesprzeczny)

(układ sprzeczny)

$r=n=k$

ALBO

$n\ne k$
$r\le n$

(liczba równań = liczba niewiadomych)

(liczba równań ≠ liczba niewiadomych)

$\det A_{(n\times n)}\ne 0$

$\det A_{(n\times n)}=0$

$r=k$

$r<k$

układ Cramera (układ oznaczony) – ma jedno rozwiązanie postaci:

$$\overset{\circ}{x}_i=\frac{\det A_{i(n\times n)}}{\det A_{(n\times n)}}$$

$$i\in\{1,2,\dots,n\}$$

rozwiązując układ oznaczony (Cramera) k równań z k niewiadomymi otrzymujemy jego rozwiązanie, a gdy $k<n$, to rozwiązanie to spełnia też $(n-k)$ pozostałych równań

w macierzy A tego układu znajdujemy nieznany minor najniższego stopnia $(=r)$ i odrzucamy równania, których współczynniki nie uczestniczyły w tym minorze oraz przenosimy na prawą stronę równań składniki ze współczynnikami nie występującymi w tym minorze uznając niewiadome po prawej stronie, jako parametry; powstały w ten sposób nowy układ r równań o r niewiadomych (układ Cramera) ma rozwiązanie wyrażone poprzez $(k-r)$ pozostałych niewiadomych (parametrów) – zatem układ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla różnych podstawień różnych liczb za parametry (układ nieoznaczony)

$$\begin{cases}\det A_{(n\times n)}=0\\ \underset{i\in\{1,2,\dots,n\}}{\exists}\det A_{i(n\times n)}=0\end{cases}$$

ALBO

$$\begin{cases}\det A_{(n\times n)}=0\\ \underset{i\in\{1,2,\dots,n\}}{\forall}\det A_{i(n\times n)}\ne 0\end{cases}$$

układ ma nieskończenie wiele rozwiązań
(układ nieoznaczony)

układ nie ma rozwiązań
(układ sprzeczny)

gdzie:

$$A^u=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1k}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2k}&b_2\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nk}&b_n\end{bmatrix}_{(n\times(n+1))}$$

$A_{i(m\times n)}$ - jest macierzą powstałą z macierzy A (głównej układu) przez zastąpienie w niej i-tej kolumny, kolumną wyrazów wolnych: $\overline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$

Uwaga:

Czasem wektor niewiadomych $\overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_k \end{bmatrix}$, przy małej liczbie składowych oznaczamy np. $\overline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

1.7.3. Przykłady rachunkowe

P1.)

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & -6 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}_{(4\times 3)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{(3\times 1)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ -11 \\ -7 \end{bmatrix}_{(4\times 1)}$$

Rozwiązanie:

$n=4$, $k=3$

$rzA_{(4\times 3)} = 3$, bo najwyższy stopień minora niezerowego jest równy:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 83 \neq 0$$

a minor 4-go rzędu nie istnieje

$rzA^u_{(4\times 4)} = 3$, bo najwyższy stopień niezerowego minora jest równy 3, a minor 4-go rzędu jest zerowy (tj. $\det A^u_{(4\times 4)} = 0$)

Zatem $r = rzA_{(4\times 3)} = 3 = rzA^u_{(4\times 4)}$ gwarantuje niesprzeczność tego układów równań (tw. Kroneckera-Capellego), czyli układ ma rozwiązanie.

Rozwiązujemy więc układ 3 równań o 3 niewiadomych (bez czwartego równania) – jest to układ Cramera:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & -6 \end{bmatrix}_{(3\times3)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{(3\times1)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ -11 \end{bmatrix}_{(3\times1)}$$

Stosujemy wzory Cramera:

$$\left.\begin{aligned} \overset{\circ}{x} &= \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ -11 & 5 & -6 \end{vmatrix}}{\det A'_{(3\times3)}} = \frac{83}{83} = 1, \\ \overset{\circ}{y} &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & -11 & -6 \end{vmatrix}}{\det A'_{(3\times3)}} = \frac{166}{83} = 2, \\ \overset{\circ}{z} &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 10 \\ 5 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & -11 \end{vmatrix}}{\det A'_{(3\times3)}} = \frac{332}{83} = 4 \end{aligned}\right\}$$

i sprawdzamy, czy otrzymane rozwiązania układu 3 równań o 3 niewiadomych spełnia 4-te (opuszczone) równanie

gdzie $A'_{(3\times3)} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ - elementy tej macierzy uczestniczą w niezerowym minorze 3-go stopnia

Otrzymane rozwiązanie spełnia też równanie czwarte.

Odpowiedź: Rozwiązaniem tego układu jest wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

P2.)

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(4\times4)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}_{(4\times1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}_{(4\times1)}$$

Rozwiązanie:

$n = k = 4$

$rzA_{(4\times4)} = 2$, bo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, a wszystkie minory 3-go stopnia są zerowe

$rzA^u_{(4\times5)} = 3$, bo $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, a wszystkie minory 4-go stopnia są zerowe

Zatem

$$rzA_{(4\times4)} = 2 \neq rzA^u_{(4\times5)} = 3 \text{ (nie jest spełnione tw. Kroneckera-Capellego)}$$

Więc układ nie ma rozwiązania, jest sprzeczny.

Odpowiedź: Brak rozwiązań.

P3.)

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 7 & 2 \\ -3 & -1 & -4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}_{(3\times4)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}_{(4\times1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ -7 \end{bmatrix}_{(3\times1)}$$

Rozwiązanie:

$n=3,\ k=4$

$\left.\begin{array}{l} rzA_{(3\times4)}=2, \\ rzA^{u}_{(3\times4)}=2, \end{array}\right\}$ bo najwyższy stopień niezerowego minora $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$, a wszystkie minory 3-go stopnia zerują się

Zatem w myśl tw. Kroneckera-Capellego układ jest niesprzeczny (ma rozwiązanie).

Skoro minor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ i $r=2$, to rozwiązujemy układ:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(2\times2)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{(2\times2)} = \begin{bmatrix} 3-z-t \\ 11-7z-2t \end{bmatrix}_{(2\times2)}$$

i otrzymujemy:

$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x} \\ \overset{\circ}{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-z-\frac{1}{10}t \\ 1-z-\frac{4}{5}t \end{bmatrix}$, gdzie niewiadome t i z uznajemy za parametry odpowiednio: $p \in \mathbb{R}$ i $q \in \mathbb{R}$.

Odpowiedź: Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań:

$$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x} \\ \overset{\circ}{y} \\ \overset{\circ}{z} \\ \overset{\circ}{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-p+\frac{1}{10}q \\ 1-p-\frac{4}{5}q \\ z=p \\ t=q \end{bmatrix}, \text{ gdzie } p,q \in \mathbb{R}.$$

P4.)

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 10 & 16 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \\ 6 & -4 & 8 & 20 \end{bmatrix}_{(4\times4)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}_{(4\times1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(4\times1)}}_{\substack{\bar{b}=\bar{0} \\ \text{układ jednorodny}}}$$

Rozwiązanie:

$n=k=4$

$rzA_{(4\times 4)} = 2$, bo minor 2-go stopnia: $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 19 \neq 0$ jest niezerowy, a wszystkie minory 3-go stopnia są zerowe

$r = 2 < k = 4$, więc rozwiązujemy układ 2-ch równań o 2-ch niewiadomych x i y:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{(2\times 2)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{(2\times 1)} = \begin{bmatrix} 3z + t \\ -10z - 16t \end{bmatrix}_{(2\times 1)},$$

którego macierz główna jest nieosobliwa: $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$.

Przyjmując za niewiadome z i t parametry odpowiednio $p \in \mathbb{R}$ i $q \in \mathbb{R}$ otrzymujemy następujące rozwiązanie jednostronnego układu 4 równań o 4 niewiadomych:

$$\begin{bmatrix} \mathring{x} \\ \mathring{y} \\ \mathring{z} \\ \mathring{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2p - 4q \\ -p - q \\ p \\ q \end{bmatrix}$$

dla $p, q \in \mathbb{R}$, w szczególności dla $p = q = 0$ otrzymujemy rozwiązanie zerowe $\mathring{x} = \mathring{y} = \mathring{z} = \mathring{t} = 0$.

Odpowiedź: Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań (układ nieoznaczony).

1.8. Wybrane elementy statystyki opisowej

1.8.1. Opisowe charakterystyki struktury zjawisk
1.8.2. Metody analizy dynamiki (zmian w czasie) zjawisk
1.8.3. Metody analizy współzależności zjawisk (analiza korelacji i regresji)

1.8. Wybrane elementy statystyki opisowej

1.8.1. Opisowe charakterystyki struktury zjawisk[22]

(1) Miary średnie i miary rozproszenia

Miary	Średnie	Rozproszenia
Klasyczne	średnia arytmetyczna $\bar{x}$ harmoniczna $\bar{x}_H$ geometryczna $\bar{x}_G$	odchylenie $V = S^2$ (wariancja) przeciętne d standardowe $\sqrt{V} = S$ współczynniki zmienności v_d v_s typowy obszar zmienności: $x_{typ(\bar{x},S)}$
Pozycyjne	dominanta D mediana Me kwartyle: Q_1, $Q_2 = Me$, Q_3 kwantyle	rozstęp: R odchylenie ćwiartkowe: Q współczynniki zmienności v_Q $v_{Q_1Q_3}$ typowy obszar zmienności: $x_{typ(Me,Q)}$

(2) Miary asymetrii

Asymetria	Kierunki asymetrii	Siła asymetrii
$(D, Me, \bar{x})$	asymetria lewostronna $D > Me > \bar{x}$ symetria $D = Me = \bar{x}$ asymetria prawostronna $D < Me < \bar{x}$	
	Wskaźnik asymetrii: $W_s = \bar{x} - D$ Współczynnik asymetrii: A_S, A_Q Trzeci moment centralny: m_3 Moment standardowy 3-go rzędu: $A_{3S} = \frac{m_3}{S^3}$	

[22] Borowska M.: *STATYSTYKA Materiały pomocnicze dla studentów do nauki statystyki*, Wydawnictwo Diecezjalne i Drukarnia w Sandomierzu, Stalowa Wola 2016, s. 17, 21, 25, 27.

(3) Miary koncentracji
- wielobok koncentracji Lorenza,
- współczynnik koncentracji Pearsona,
- moment centralny 4-go rzędu: m_4,
- standardowy moment centralny 4-go rzędu: $a_4 = \frac{m_4}{S^4}$,
- eksces: $e = a_4 - 3$

1.8.2. Metody analizy dynamiki (zmian w czasie) zjawisk[23]

Szereg czasowy:

t_i	t_1	t_2	$\ldots$	t_n
y_{t_i}	y_{t_1}	y_{t_2}	$\ldots$	y_{t_n}

Rodzaje przyrostów

- absolutne (bezwzględne) - są to różnice
  - o podstawie stałej: $y_{t_i} - y_{t_1}$
  - o podstawie zmiennej (łańcuchowe): $y_{t_i} - y_{t_{i-1}}$
- względne
  - o podstawie stałej: $\dfrac{y_{t_i} - y_{t_1}}{y_{t_1}}$
  - o podstawie zmiennej (łańcuchowe): $\dfrac{y_{t_i} - y_{t_{i-1}}}{y_{t_{i-1}}}$

dla $i \in \{2,3,\ldots,n\}$

Rodzaje indeksów

- indywidualne podstawowe (o podstawie stałej): $\dfrac{y_{t_i}}{y_{t_1}}$
- indywidualne łańcuchowe (o podstawie zmiennej): $\dfrac{y_{t_i}}{y_{t_{i-1}}}$

dla $i \in \{2,3,\ldots,n\}$

Inne miary:
- przeciętny poziom zjawiska,
- średnie tempo zmian w czasie.

Metody badania dynamiki zjawisk:
- metoda indeksowa: określenie tempa i intensywności zmian zjawisk w czasie,
- metody trendu i wahań okresowych:
  (a) metoda średnich ruchomych (metoda mechaniczna), np. trzyokresowych

[23] Tamże, s. 33-35.

(b) metoda analityczna aproksymacji funkcji trendu:

funkcja liniowa trendu I rodzaju

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \xi$$

gdzie:
y_t - poziom badanego zjawiska w czasie t,
t - czas,
α_0, α_1 - nieznane parametry strukturalne,
ξ - składnik losowy.

aproksymacyjna liniowa funkcja trendu II rodzaju

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + z_r$$

gdzie:
$\hat{y}_t$ - teoretyczne wartości trendu,
a_0, a_1 - estymatory parametrów α_0, α_1,
z_r - składnik resztowy.

1.8.3. Metody analizy współzależności zjawisk (analiza korelacji i regresji)[24]

Rodzaje zależności

zależność funkcyjna

$$Y = f\left(X\right)$$

(określonej wartości X odpowiada ściśle określona jedna wartość zmiennej Y)

zależność stochastyczna (probabilistyczna)

$$Y = f\left(X\right) + \xi$$

(wraz ze zmianą wartości jednej zmiennej zmienia się rozkład prawdopodobieństwa drugiej zmiennej)

Szczególnym przypadkiem zależności stochastycznej jest zależność korelacyjna (statystyczna), kiedy określonym wartościom jednej zmiennej odpowiadają ściśle określone średnie wartości drugiej zmiennej.

Sposoby badania zależności korelacyjnej:
(1) szereg korelacyjny,
(2) diagram korelacyjny,
(3) tablica korelacyjna,
(4) rozkład warunkowy (obu cech),
(5) parametry rozkładu warunkowego (obu zmiennych),
(6) rozkłady brzegowe (poszczególnych zmiennych),
(7) parametry rozkładów brzegowych (poszczególnych zmiennych),
(8) wykres regresji empirycznej,
(9) miary korelacji:
- kowariancja (dla szeregu korelacyjnego i dla tablicy korelacyjnej),
- współczynnik korelacji liniowej Pearsona.

[24] Tamże, s. 38-41.

1.9. Wybrane zagadnienia statystyki matematycznej

1.9.1. Zmienna losowa
1.9.2. Podstawowe parametry rozkładu zmiennej losowej
1.9.3. Wybrane rozkłady zmiennej losowej skokowej
1.9.4. Wybrane rozkłady zmiennej losowej ciągłej
1.9.5. Wnioskowanie statystyczne
1.9.6. Rozkłady statystyki z próby
1.9.7. Hipotezy i testy statystyczne
1.9.8. Weryfikacja wybranych hipotez statystycznych
1.9.9. Przykłady rachunkowe

1.9. Wybrane zagadnienia statystyki matematycznej

1.9.1. Zmienna losowa[25]

- jest to funkcja $X:\Omega \to \mathbb{R}$ określona na przestrzeni probabilistycznej Ω i przyjmująca wartości liczbowe z określonym prawdopodobieństwem

$$X:\omega_i \mapsto \underbrace{x_i = X(\omega_i)}_{\text{realizacja zmiennej losowej } X} \xrightarrow{\text{z prawdopodobieństwem}} p_i = P(X = x_i)$$

dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Typy zmiennej losowej

skokowa (dyskretna)

(zbiór wartości zmiennej losowej jest skończony lub policzalny)

ciągła

(zbiór wartości zmiennej losowej jest nieskończony i niepoliczalny)

1.9.2. Podstawowe parametry rozkładu zmiennej losowej[26]

(1) **Wartość oczekiwana (średnia) zmiennej losowej**:

$$m = EX = \begin{cases} \sum\limits_i x_i p_i; & \text{dla zmiennej skokowej} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x; & \text{dla zmiennej ciągłej} \end{cases}$$

(2) **Wariancja zmiennej losowej**:

$$VX = S^2 X = \begin{cases} \sum\limits_i (x_i - m)^2 p_i; & \text{dla zmiennej skokowej} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\,\mathrm{d}x; & \text{dla zmiennej ciągłej} \end{cases}$$

(3) **Odchylenie standardowe zmiennej losowej**:

$$SX = \sqrt{VX}$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

[25] Tamże, s. 55.
[26] Tamże, s. 57.

1.9.3. Wybrane rozkłady zmiennej losowej skokowej[27]

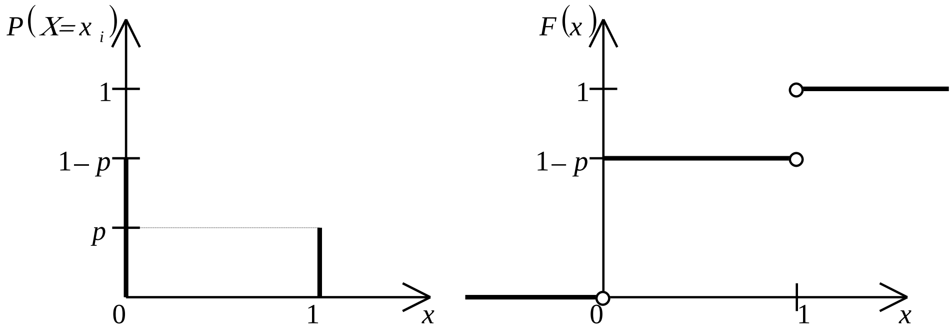
(1) **Rozkład dwupunktowy (zerojedynkowy)**:

a) funkcja prawdopodobieństwa:

x_i	1	0	
p_i	p	$q=1-p$	$\sum p_i = 1$

b) dystrybuanta: $F(x)=\begin{cases} 0;\ \text{dla } x<0 \\ 1-p;\ \text{dla } 0\le x<1 \\ p;\ \text{dla } x\ge 1 \end{cases}$

c) wykresy:



d) parametry rozkładu:

$$EX = p;\ S^2X = p(1-p) = pq$$

e) własności:
- ma zastosowanie w jednorazowej realizacji doświadczenia.

(2) **Rozkład dwumianowy (Bernoulliego)**:

a) funkcja prawdopodobieństwa:

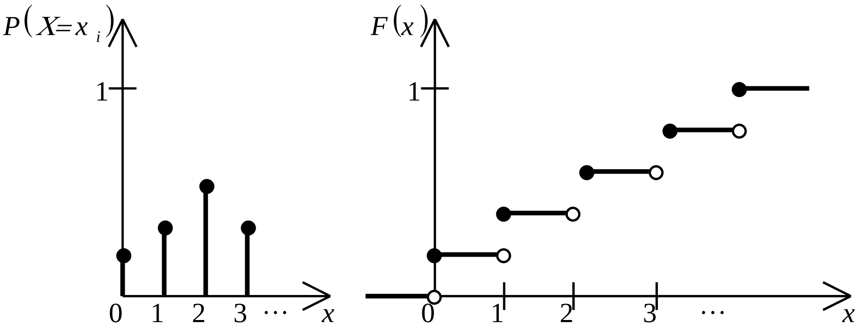
$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\cdot q^{n-k};\ k\in\mathbb{N}$$

b) dystrybuanta:

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{k\le x}\binom{n}{k}p^k q^{n-k};\ q=1-p$$

c) wykresy:

np.



[27] Tamże, s. 58-63.

d) parametry rozkładu:

$$EX = np;\ S^2X = npq;\ \ q = 1 - p$$

e) własności:
- $p = q$, to rozkład jest symetryczny,
- $p > q$, to rozkład jest lewostronnie asymetryczny,
- $p < q$, to rozkład jest prawostronnie asymetryczny,
- $p = q$ i $n \to \infty$, to granicznym rozkładem jest rozkład normalny,
- $p < 0{,}02$ i $n \to \infty$, to granicznym rozkładem jest rozkład Poissone'a.

(3) **Rozkład Poissona**:

a) funkcja prawdopodobieństwa:

$$P\left(X = k\right) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda};\ \lambda = np;\ k \in \mathbb{N};\ e \approx 2{,}7182...$$

b) dystrybuanta:

$$F\left(x\right) = P\left(X \le x\right) = \sum_{k \le x} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

c) parametry rozkładu:

$$EX = \lambda = np;\ S^2X = \lambda = np$$

d) własności:
- wartości prawdopodobieństw są stablicowane dla λ i k,
- jest rozkładem prawostronnie asymetrycznym,
- ma zastosowanie w kontroli jakości,
- jest granicznym rozkładem dla rozkładu dwumianowego, gdy $p < 0{,}02$ i $n \to \infty$.

(4) **Rozkład geometryczny**:

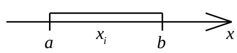
$$\text{realizacje } X:\ x_i = i;\ \ i = 1, 2, \ldots$$

$$\text{prawdopodobieństwa: } p_i = p\left(1 - p\right)^{i-1}$$

$$EX = \tfrac{1}{p};\ S^2X = \tfrac{1-p}{p^2}$$

1.9.4. Wybrane rozkłady zmiennej losowej ciągłej

(1) **Rozkład jednostajny (prostokątny, równomierny)**:

Każdej wartości $x_i \in \left\langle a, b \right\rangle$ 

odpowiada jednakowa gęstość prawdopodobieństw $f\left(x\right)$.

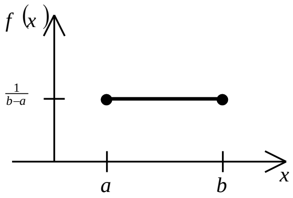
a) funkcja gęstości:

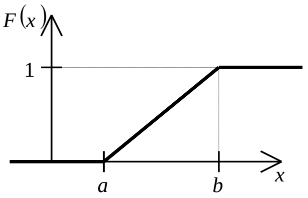
$$f(x)=\begin{cases}0; & \text{dla } x<a\\ \frac{1}{b-a}; & \text{dla } a\le x\le b\\ 0; & \text{dla } x>b\end{cases}$$

b) dystrybuanta:

$$F(x)=\begin{cases}0; & \text{dla } x<a\\ \frac{x-a}{b-a}; & \text{dla } a\le x\le b\\ 0; & \text{dla } x>b\end{cases}$$

c) wykresy:





d) parametry rozkładu:

$$EX=\frac{a+b}{2};\ S^2X=\frac{(b-a)^2}{12}$$

e) własności:
- zastosowanie do opisu zmian ze stała częstotliwością (prędkością).

(2) **Rozkład normalny (Gaussa-Laplace'a)**:

z parametrami $\mu,\sigma : N(\mu,\sigma)$

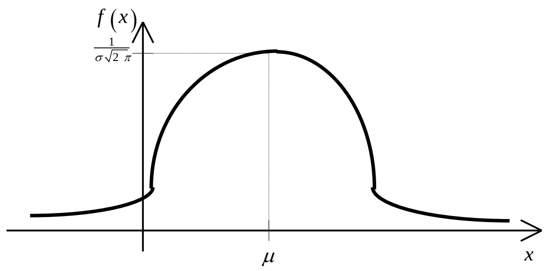
a) funkcja gęstości:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}};\ x\in(-\infty;+\infty);\ \sigma>0;\ \pi\approx 3{,}14;\ e\approx 2{,}7182$$

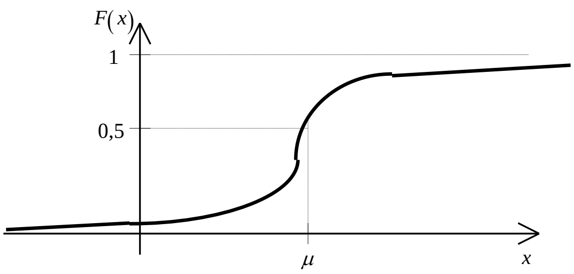
b) dystrybuanta:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt;\ x\in(-\infty;+\infty);\ \sigma>0$$

c) wykresy:



krzywa normalna
w kształcie dzwonu



d) parametry rozkładu:

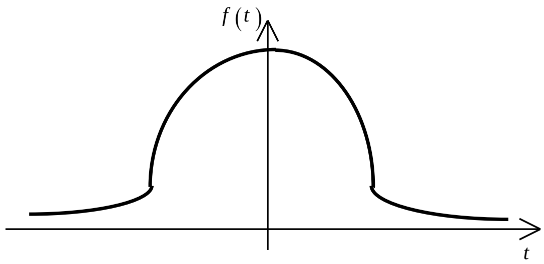
$$\mu=EX=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx;\ \sigma^2=S^2X=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

e) własności:
- rozkład symetryczny
- jest granicznym rozkładem rozkładu dwumianowego dla $p = q$ i $n \to \infty$
- ma szerokie zastosowanie do opisu zjawisk społecznych i przyrodniczych.

(3) **Rozkład t-Studenta (Gosseta)**:

Statystyka: $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$ ma rozkład t-Studenta z $k = n - 1$ liczbą stopni swobody.

$$E(t) = 0; \; S(t) = \sqrt{\tfrac{k}{k-2}} = \sqrt{\tfrac{k-1}{k-3}}; \; k > 3$$

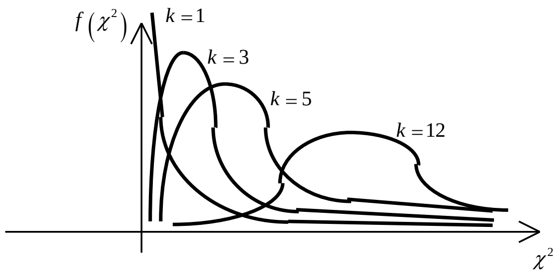


Wykres funkcji $f(t)$ - krzywa gęstości rozkłady t-Studenta ma kształt krzywej dzwonowej nieco spłaszczonej w porównaniu z wykresem funkcji gęstości rozkładu normalnego.
Rozkład t-Studenta ma zastosowanie do wnioskowania o średniej w populacji z rozkładem normalnym z nieznanym odchyleniem standardowym. Jest on stablicowany.

(4) **Rozkład χ^2 (chi-kwadrat)**:

Statystyka: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ ma rozkład χ^2 z $k = n - 1$ liczbą stopni swobody.

Funkcja gęstości rozkładu χ^2 zależy od liczby stopni swobody $k = n - 1$ i jej wykres ma różny kształt w zależności od k:



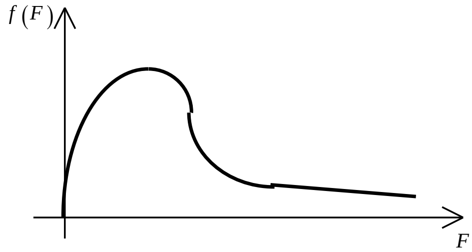
$$E(\chi^2) = k = n - 1; \; S(\chi^2) = \sqrt{2k} = \sqrt{2(n-1)}$$

Rozkład χ^2 ma zastosowanie do wnioskowania o wariancji σ^2 w populacji z rozkładem normalnym. Jest on stablicowany.

(5) **Rozkład F-Snedecora**:

Statystyka $F = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}$ ma rozkład F-Snedecora o $k_1 = n_1 - 1$ i $k_2 = n_2 - 1$ stopniach swobody, gdzie n_1 - liczebność pierwszej próby, n_2 - liczebność drugiej próby.

Wykres funkcji gęstości rozkładu F-Snedecora:

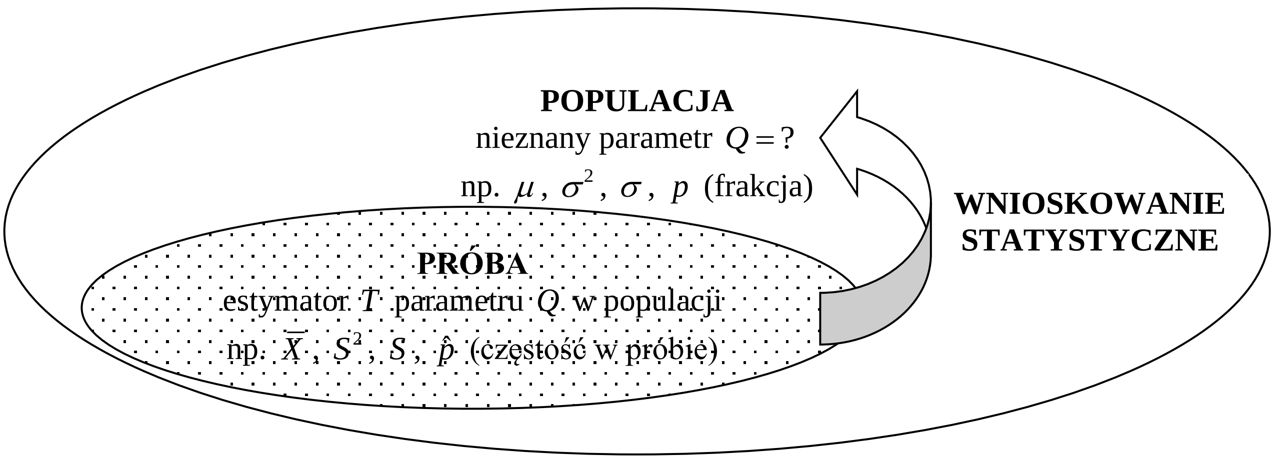


$$E(F) = \frac{k_2}{k_2 - 2}\ ;\ S^2(F) = \frac{2k_2^2(k_1 + k_2 - 2)}{k_1(k_2 - 2)^2(k_2 - 4)}$$

Rozkład F-Snedecora ma zastosowanie do wnioskowania przy porównaniu wariancji dwóch prób wylosowanych niezależnie z dwóch populacji normalnych o jednakowych wariancjach i dowolnych średnich. Rozkład ten jest stablicowany.

1.9.5. Wnioskowanie statystyczne

Jest to uogólnianie wyników uzyskanych z próby losowej na całą populację generalną, czyli podejmowanie decyzji o nieznanych parametrach i rozkładach w zbiorowości generalnej na podstawie wyników z próby w warunkach niepewności (ryzyka statystycznego) z wykorzystaniem reguł rachunku prawdopodobieństwa.



Próba

losowa i **reprezentatywna**

(każda jednostka populacji ma jednakowe szanse znalezienia się w próbie)

(struktura próby musi być najbardziej zbliżona do struktury zbiorowości generalnej)

1.9.6. Rozkłady statystyki z próby[28]

Statystyki z próby W, to parametry charakteryzujące próbę losową n-elementową: $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Są one zmiennymi losowymi określonymi na przestrzeni prób:

$$W = f\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$$

Podczas wnioskowania statystycznego o populacji na podstawie próby można posłużyć się różnymi statystykami, np. **średnią z próby**, **wariancją z próby**:

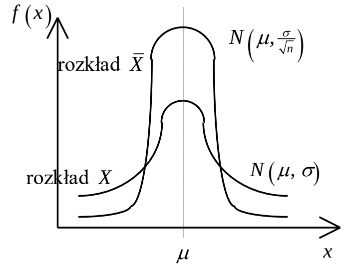
$$\boxed{\bar{X} = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}$$

Statystyka, jako funkcja zmiennych losowych, jest zmienną losową, która ma pewien rozkład – jest to rozkład statystyki z próby.

Rozkład średniej arytmetycznej z próby

Niech X ma rozkład $N\left(\mu,\sigma\right)$, a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - to n-elementowa próba losowa. Średnia arytmetyczna z próby ma rozkład normalny ze średnią $E\left(\bar{X}\right) = \mu$ i wariancją $D\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Czyli:

$$X \sim N\left(\mu,\sigma\right), \text{ to } \bar{X} \sim N\left(\mu, \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$



Do wnioskowania o średniej μ w populacji wykorzystuje się odpowiednią zmienną losową w zależności od tego, czy znane jest σ w populacji, czy nie:

σ - znane | lub | σ - nieznane

$U = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$

o rozkładzie $N\left(0,1\right)$

$t = \frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n-1}$

o rozkładzie t-Studenta o $k = n-1$ stopniach swobody, gdzie odchylenie standardowe z próby wyraża się wzorem:

$$S = \sqrt{\tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}$$

[28] Tamże, s. 66-68.

Rozkład wariancji z próby

Niech X ma rozkład $N(\mu,\sigma)$, a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - to n-elementowa próba losowa o wariancji $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$. Do wnioskowania o wariancji σ^2 w populacji wykorzystuje się odpowiednią zmienną losową w zależności od wielkości próby:

mała próba
$n \le 30$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{\left(X_i-\mu\right)^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

o rozkładzie χ^2
z $k = n-1$ stopniami swobody

duża próba
$n > 30$

$$Z = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2k-1}$$

o rozkładzie $N(0,1)$

1.9.7. Hipotezy i testy statystyczne

Hipoteza, to przypuszczenie dotyczące populacji. Zamiast weryfikować hipotezę badaną, buduje się hipotezę zerową – sprawdzaną za pomocą odpowiedniego testu.

Wyróżniamy hipotezę:

zerową
H_0

alternatywną (badawczą)
H_1

Hipotezę H_1 przyjmujemy wtedy, gdy na podstawie testu, hipotezę H_0 odrzucamy.

Rodzaje hipotez

parametryczne
- są to sądy dotyczące wartości parametrów rozkładu populacji

$H_0:$ parametr $Q = Q_0$

$H_1:$
$Q \ne Q_0$ (dwustronna)
$Q > Q_0$ (prawostronna)
$Q < Q_0$ (lewostronna)

(trzy wykluczające się wersje hipotezy H_1)

nieparametryczne
- są to sądy dotyczące np. postaci funkcji rozkładu populacji

$H_0:$ populacja ma rozkład G

$H_1:$ populacja nie ma rozkładu G

Test statystyczny (statystyka testująca), to reguła służąca do weryfikacji hipotez, czyli podejmowania decyzji odrzucenia lub nieodrzucenia hipotezy H_0 na podstawie wyników próby.

Wyróżniamy:

Testy istotności
służące do weryfikacji hipotez dotyczących parametrów charakteryzujących populację (np. μ, σ^2, σ)

Testy zgodności
służące do weryfikacji hipotezy o postaci funkcji rozkładu prawdopodobieństwa lub dystrybuanty zmiennej losowej w populacji generalnej

Testy losowości
służące do weryfikacji hipotezy, że próba ma charakter losowy

Testy weryfikujące sądy o parametrach populacji nazywają się testami parametrycznymi. Testy nieparametryczne służą do weryfikacji np. zgodności rozkładu cechy w populacji z określonym rozkładem teoretycznym lub zgodności rozkładów w dwóch populacjach, a także losowości wyboru próby – test serii.
Związek pomiędzy dwoma zmiennymi bada się za pomocą testu niezależności.

1.9.8. Weryfikacja wybranych hipotez statystycznych

(1) **Weryfikacja hipotezy o średniej μ w populacji normalnej**[29]

założenie: populacja ma rozkład $N(\mu,\sigma)$

σ - znane

ze znanym odchyleniem standardowym σ

$H_0: \mu = \mu_0$, np. $H_1: \mu \neq \mu_0$

Mając na podstawie n-elementowej próby średnią $\bar{X}$ oraz zadany poziom istotności α, stosujemy statystykę testującą:

$$U = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

o rozkładzie $N(0,1)$

σ - nieznane, mała próba $n \le 120$

z nieznanym odchyleniem standardowym

$H_0: \mu = \mu_0$, np. $H_1: \mu > \mu_0$

Mając na podstawie n-elementowej próby średnią $\bar{X}$ i odchylenie standardowe S oraz zadany poziom istotności α, stosujemy statystykę testującą t-Studenta z $k = n-1$ stopniami swobody:

$$t = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$$

Uwaga:
W przypadku weryfikacji hipotezy o średniej w populacji z nieznanym odchyleniem standardowym na podstawie dużej próby $(n > 120)$ stosujemy statystykę $U = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$ (przyjmujemy $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$), która ma rozkład asymptotycznie normalny $N(0,1)$.

[29] Pułaska-Turyna B.: *Statystyka dla ekonomistów*, Difin SA, Warszawa 2011, s. 236-239.

(2) **Weryfikacja hipotezy o wariancji w populacji normalnej**[30]

Założenia: populacja ma rozkład normalny $N(\mu,\sigma)$ o nieznanych parametrach μ, σ, próba jest mała $(n \le 30)$.

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{; np. } H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

Do weryfikacji hipotezy H_0 stosujemy statystykę χ^2:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2,$$

która ma rozkład χ^2 o $k = n-1$ stopniach swobody.

(3) **Weryfikacja hipotezy o frakcji (p) w populacji**[31]

Założenia: populacja ma rozkład dwumianowy o nieznanym parametrze p, próba liczy $n > 100$ jednostek statystycznych.

$H_0 : p = p_0$; możliwe hipotezy alternatywne:

$$H_1 : p < p_0 \quad \vee \quad H_1 : p \neq p_0 \quad \vee \quad H_1 : p > p_0$$

Do weryfikacji hipotezy H_0 wykorzystuje się wskaźnik struktury z próby $P = \frac{k}{n}$ o rozkładzie normalnym $N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$. Po standaryzacji statystyki $P = \frac{k}{n}$ otrzymujemy statystykę

$$U = \frac{\frac{k}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

o rozkładzie normalnym $N(0,1)$.

[30] Tamże, s. 244-245.
[31] Tamże, s. 242-243.

(4) **Weryfikacja hipotezy o dwóch średnich: μ_1 i μ_2 w populacjach normalnych**[32]

założenie:
populacja ma rozkład
$N(\mu,\sigma)$

σ_1,σ_2 - znane

ze znanymi warunkami standardowymi σ_1,σ_2

$H_0 : \mu_1 = \mu_2; \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

lub

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

lub

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$

Mając średnie: $\overline{x}_1$ i $\overline{x}_2$ z prób odpowiednio n_1 i n_2 elementarnych, stosujemy statystykę testującą:

$$U = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

o rozkładzie normalnym $N(0,1)$

σ_1,σ_2 - nieznane
ale $\sigma_1 = \sigma_2$

z nieznanymi odchyleniami standardowymi σ_1,σ_2, ale równymi $\sigma_1 = \sigma_2$

$H_0 : \mu_1 = \mu_2; \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

lub

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

lub

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$

Mając średnie: $\overline{x}_1$ i $\overline{x}_2$ oraz odchylenia standardowe S_1 i S_2 z prób odpowiednio n_1 i n_2 elementarnych stosujemy statystykę testującą t-Studenta o $k = n_1 + n_2 - 2$ liczbie stopni swobody:

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_1-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

(5) **Weryfikacja hipotezy o dwóch wariancjach**[33]

Założenia: obie populacje mają rozkład normalny $N(\mu,\sigma)$, o nieznanych parametrach μ i σ, S_1 i S_2 - odchylenia standardowe odpowiednio z n_1 i n_2 elementarnych prób, przy czym $n_1 > n_2$.

Wówczas hipotezy H_0 i H_1 mają postać:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \left(\text{lub } H_0 : \tfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1\right); \; H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \quad \left(\text{lub } H_1 : \tfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1\right)$$

Do weryfikacji hipotezy H_0 stosujemy statystykę F-Snedecora:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

o liczbie stopni swobody (licznika) $k_1 = n_1 - 1$ oraz (mianownika) $k_2 = n_2 - 1$, przy czym – ze względu na postać hipotezy alternatywnej – konieczne jest także ponumerowanie prób, aby: $S_1^2 \geq S_2^2$.

[32] Tamże, s. 245-252.
[33] Tamże, s. 254-256.

1.9.9. Przykłady rachunkowe

P1.)
Sprawdzić na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ zasadność twierdzenia, że przeciętnie dorosły człowiek śpi średnio 4,5 godziny na dobę zakładając wnioskowanie oparte na rozkładzie normalnym $N(\mu; 0,5)$, jeśli na podstawie próby liczącej 625 osób ustalono, że średnia długość snu tej grupy wynosi 6 godzin na dobę.

Rozwiązanie:
Stawiamy hipotezę zerową: $H_0 : \mu = 4,5 (= \mu_0)$ wobec hipotezy alternatywnej $H_1 : \mu \neq 4,5$.
Stosujemy statystykę $U = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{6-4,5}{\frac{0,5}{\sqrt{625}}} = 75 = u_{obl.}$ o rozkładzie normalnym $N(0,1)$.
Z tablic tego rozkładu odczytujemy dla $\alpha = 0,05$ wartość krytyczną $u_\alpha = u_{0,05} = 1,96$.
Obszar krytyczny jest obustronny:
$K = (-\infty; -u_\alpha \rangle \cup \langle u_\alpha; +\infty) = (-\infty; -1,96\rangle \cup \langle 1,96; +\infty)$.
Porównujemy $u_{obl.} = 75$ z $u_{0,05} = 1,96$ i mamy:
$u_{obl.} = 75 \in K = (-\infty; -1,96\rangle \cup \langle 1,96; +\infty)$.
Podejmujemy więc decyzję o odrzuceniu hipotezy H_0 na rzecz hipotezy H_1.
Odpowiedź: Zatem hipotezę o średniej równej 4,5 godziny snu dorosłego człowieka na dobę należy uznać za fałszywą.

P2.)
Utarg sklepów pewnej miejscowości ma rozkład normalny z nieznanymi parametrami. Przypuszcza się, że dzienny utarg jest rzędu 10 tys. zł. Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ sprawdzić, czy to przypuszczenie jest słuszne, jeśli w próbie 25 losowo wybranych takich sklepów otrzymano średni dzienny utarg $\bar{X} = 9,5$ tys. zł.

Rozwiązanie:
Stawiamy hipotezę zerową $H_0 : \mu = 10 (= \mu_0)$ wobec hipotezy alternatywnej $H_1 : \mu < 10$.
Stosujemy statystykę $t = \frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n} = \frac{9,5-10}{2}\sqrt{25} = -1,25 = t_{obl.}$ o rozkładzie t-Studenta o $n-1$ stopniach swobody. Z tablic tego rozkładu odczytujemy dla $\alpha = 0,05$ i $n-1 = 24$ stopni swobody wartość krytyczną: $t_{2\alpha,n-1} = t_{2\cdot 0,05;24} = t_{0,1;24} = 1,711$
Obszar krytyczny jest lewostronny: $K = (-\infty; -t_{2\alpha,n-1}\rangle = (-\infty; -1,711\rangle$
Porównujemy $t_{obl.} = -1,25$ z $-t_{0,1;24} = -1,711$ i mamy $t_{obl.} = -1,25 \notin K = (-\infty; -1,711\rangle$.
Odpowiedź: Podejmujemy więc decyzję, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Zatem
z błędem 0,05 przyjmujemy hipotezę o tym, że średni utarg dzienny tych sklepów jest rzędu 10 tys. zł.

P3.)

W losowo wybranej próbie 30 studentów obliczono wariancję $S^2 = 2$ papierosy wypalone dziennie przez tych studentów. Przy założeniu, że rozkład liczby wypalonych papierosów jest normalny, na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ zweryfikować hipotezę, że odchylenie standardowe wypalonych papierosów wynosi 3.

Rozwiązanie:

Stawiamy hipotezę zerową: $H_0 : \sigma^2 = 3^2 = 9\left(= \sigma_0^2\right)$ wobec hipotezy alternatywnej $H_1 : \sigma^2 > 9$.

Stosujemy statystykę $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{29 \cdot 2}{9} = 6,44 = u_{obl.}$ o rozkładzie chi-kwadrat z $n-1=29$ stopniami swobody. Z tablic tego rozkładu odczytujemy wartość krytyczną $\chi^2_{0,05;29} = 42,56$.

Obszar krytyczny jest prawostronny:

$K = \left\langle \chi^2_{\alpha,n-1}; +\infty\right) = \left\langle \chi^2_{0,05;29}; +\infty\right) = \left\langle 42,56; +\infty\right)$

Porównujemy $\chi^2_{obl.} = 6,44$ z $\chi^2_{0,05;29} = 42,56$ i mamy $\chi^2_{obl.} \notin K = \left\langle 42,56; +\infty\right)$.

Odpowiedź: Podejmujemy więc decyzję, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Zatem z błędem 0,05 przyjmujemy, że odchylenie standardowe wypalonych papierosów wynosi 3.

P4.)

W celu zbadania hipotezy, że 40% uczniów w wieku szkolnym nosi okulary, zbadano 5000 uczniów i stwierdzono, że 1500 uczniów tej grupy nosi okulary. Na poziomie istotności 0,01 zweryfikować tę hipotezę.

Rozwiązanie:

Stawiamy hipotezę zerową $H_0 : p = 0,4\left(= p_0\right)$ wobec hipotezy alternatywnej $H_1 : p \neq 0,4$.

Stosujemy statystykę $u = \frac{\frac{k}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{\frac{1500}{5000} - 0,4}{\sqrt{\frac{0,4\cdot(1-0,4)}{5000}}} = -0,019$ o rozkładzie normalnym $N(0,1)$. Z tablic tego rozkładu odczytujemy dla $\alpha = 0,01$ wartość krytyczna $u_\alpha = u_{0,01} = 2,58$. Obszar krytyczny jest obustronny:

$K = \left(-\infty; -u_\alpha\right\rangle \cup \left\langle u_\alpha; +\infty\right) = \left(-\infty; -2,58\right\rangle \cup \left\langle 2,58; +\infty\right)$

Porównujemy $u_{obl.} = -0,019$ z $u_{0,01} = 2,58$ i mamy

$u_{obl.} = -0,019 \notin K = \left(-\infty; -2,58\right\rangle \cup \left\langle 2,58; +\infty\right)$.

Odpowiedź: Podejmujemy więc decyzję o nieodrzuceniu hipotezy H_0, bowiem może ona być prawdziwa.

1.10. O metodach i technikach badawczych

1.10.1 O metodach ilościowych
1.10.2. Badania pełne, a częściowe – dobór jednostek statystycznych do próby
1.10.3. Podstawowe wiadomości o badaniach operacyjnych
1.10.4. Przykład rachunkowy
1.10.5. Metody prognostyczne

1.10. O metodach i technikach badawczych

METODY BADAŃ

jakościowe
- charakteryzowanie zjawisk lub obiektów badań w sposób opisowy bez określania parametrów liczbowych w celu dostarczenia nowych informacji o badanym zjawisku oraz pogłębienia istniejącej wiedzy

ilościowe
- badanie zjawisk lub obiektów wraz z określeniem parametrów liczbowych, np. gromadzenie i przetwarzanie danych, ilościowy opis struktury i dynamiki zjawisk

eksperymentalne
- wykonywanie działań powodujących określone reakcje i zjawiska wraz z ich obserwacją w badanych obiektach, np. eksperymenty laboratoryjne, terenowe

TECHNIKI BADAWCZE

sondaże

wywiady

obserwacja

eksperyment

analiza przypadków

1.10.1. O metodach ilościowych (patrz: 1.1.3.)

Model (matematyczny) – uproszczona konstrukcja formalna przedstawiająca zależności między zjawiskami przy pomocy określonej funkcji analitycznej. Najczęściej ma postać równania (układu równań).

Model ekonometryczny – zależność zmiennej objaśnianej Y od zmiennych objaśniających: $X_1, X_2, \ldots, X_k$:

$$Y = f\left(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k, \varepsilon\right)$$

gdzie f - funkcja analityczna, ε - odchylenie losowe

np. ekonometryczny model liniowy:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_k X_k + \varepsilon$$

Etapy ilościowego badania zależności między zjawiskami ekonomicznymi.

1) Projektowanie badania (określenie celu i metod badania).
2) Organizacja badań (opracowanie strony technicznej badań).
3) Pomiar i opis statystyczny (zebranie i uporządkowanie danych wraz z ich prezentacją (tablice, tabele, wykresy) i charakterystyką badanego obiektu lub zjawiska).
4) Wnioskowanie statystyczne w przypadku badania częściowego (na podstawie próby), czyli wnioskowanie o populacji na podstawie próby z zastosowaniem statystyki matematycznej.
5) Modelowanie ekonometryczne (wybór zmiennej objaśnianej Y, zmiennych objaśniających $\left(X_i\right)$ wraz z postacią analityczną funkcji f do modelu: $Y = f\left(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k, \varepsilon\right)$ oraz estymacja parametrów strukturalnych modelu i jego weryfikacja).
6) Wykorzystanie w badaniach operacyjnych zbudowanego modelu do analizy ekonomicznej i prognozowania – przez decydentów w procesach decyzyjnych.

1.10.2. Badania pełne, a częściowe – dobór jednostek statystycznych do próby[34]

BADANIA STATYSTYCZNE
(badanie empiryczne – obserwacja – prawidłowość w zjawiskach masowych)

pełne, wyczerpujące (badanie dotyczy wszystkich jednostek zbiorowości statystycznej)	**częściowe, niewyczerpujące z próby** (badanie dotyczy części jednostek – próby – a jego wyniki są uogólniane na całą populację)

Dobór jednostek statystycznych do próby

W celu rozpoznania prawidłowości dotyczących populacji generalnej na podstawie wyników częściowych, niezbędny jest: losowy dobór próby (o znalezieniu się jednostek w próbie decyduje przypadek):

(1) każda jednostka populacyjna ma szansę znalezienia się w próbie,
(2) każda część populacji ma szansę bycia próbą.

Nie wszystkie schematy losowania umożliwiają ekstrapolację wyników na zbiorowość generalną. Jeśli przyjmiemy, że istnieją dwie zasadnicze metody dobierania prób: **losowe** (probabilistyczne) i **nielosowe** (nieprobabilistyczne), to prawdopodobieństwo zajścia określonych zdarzeń można oszacować tylko w przypadku doboru losowego. Dlatego stwierdza się, że losowy dobór gwarantuje uzyskanie próby reprezentatywnej.

Mówiąc o **losowym doborze próby**, mamy na myśli wiele różnych sposobów, które w praktyce badawczej są mieszane, kombinowane, tak że ostateczna próba losowa może być funkcją kilku schematów losowania. Do najważniejszych należy zaliczyć losowanie systematyczne (np. co k-ty element lub kolejny zgodnie z liczbami losowymi), losowanie warstwowe (w którym populację dzielimy na pewną liczbę niezachodzących na siebie podpopulacji, czyli warstw, między które następnie rozdzielone są części całej próby), grupowe (w którym, podobnie, jak w losowaniu warstwowym, populację dzielimy na pewną liczbę niezachodzących na siebie stosunkowo niewielkich podpopulacji, czyli grup, przy czym tylko niektóre z nich – te losowo dobrane – wejdą w skład ostatecznej próby).

Metoda reprezentacyjna

Metoda reprezentacyjna polega na tym, że na podstawie wybranej w sposób losowy części zbiorowości (próbki) wnioskujemy o całości (tj. o zbiorowości generalnej). Aby jednak uzyskane wnioski można było odnieść do całej zbiorowości, badana zbiorowość (próba) musi być *reprezentatywna*. Oznacza to, że struktura próby musi być możliwie najbardziej zbliżona do struktury zbiorowości generalnej (całej zbiorowości).

Jednostki statystyczne mogą być wybrane do próby dwoma sposobami. Jeden to wybór przez *losowanie*, a więc *wybór przypadkowy*, dający każdej jednostce badanej zbiorowości takie same szanse wylosowania. Na podstawie teorii prawdopodobieństwa można więc stwierdzić, do jakiego stopnia próba jest reprezentatywna dla zbiorowości,

[34] Tamże, s. 18-20.

z której dokonaliśmy losowania. Drugi sposób to *celowa selekcja* (*dobór celowy*). W tym przypadku w sposób świadomy, tj. oparty na jakimś wstępnym rozeznaniu w zagadnieniu, typuje się pewne jednostki do próby, a inne się odrzuca.

Podstawowym zagadnieniem w metodzie reprezentacyjnej jest sprawa *dokładności badania*. Zależy ona od wielu czynników, m.in. od:

- struktury badanej zbiorowości,
- zastosowanego schematu losowania,
- liczebności próby (musi być dostatecznie duża).

Można ogólnie powiedzieć, że *metoda reprezentacyjna polega na szacowaniu nieznanych parametrów zbiorowości generalnej na podstawie wyników uzyskanych z badania próby*. Metoda ta pozwala ustalić przeciętne wielkości badanych zjawisk i ich strukturę. Stosuje się ją w wielu dziedzinach, a przede wszystkim w statystyce społeczno-ekonomicznej, w badaniach eksperymentalnych i w technice.

Z wielu zastosowań metody reprezentacyjnej przykładowo można wymienić statystyczną kontrolę jakości produkcji, badania budżetów rodzinnych, badania popytu konsumpcyjnego, współczesne spisy rolne.

Wiadomo, że im większa jest liczebność badanej próby, tzn. im większa jest liczba badanych jednostek, tym odchylenia przypadkowe znoszą się dokładniej, co oznacza, że prawidłowość w występowaniu zjawisk jest coraz wyraźniejsza w miarę wzrostu liczby obserwacji lub doświadczeń. Działa tu bowiem *prawo wielkich liczb*.

Zrozumiałe, że *zbiorowość nieograniczona* nie może być zbadana całkowicie. Toteż każde badanie takiej zbiorowości, bez względu na liczbę jednostek objętych badaniem, będzie zawsze badaniem częściowym. Ze zbiorowościami nieograniczonymi ma do czynienia np. statystyka ludnościowa, zajmująca się m.in. badaniem struktury ludności według płci, wieku i stanu rodzinnego, liczby małżeństw, urodzeń, zgonów; statystyka rolnicza, ustalająca np. wpływ opadów, temperatury, głębokości orki, czy nawożenia na wysokość plonów. Z nieograniczonymi zbiorowościami mamy również do czynienia przy statystycznych badaniach jakości produkcji seryjnej.

Podejmowanie badań metodą reprezentacyjną jest również często dyktowane koniecznością uzyskania wyników badań w stosunkowo krótkim czasie. Typowym przykładem jest tu stosowanie metody reprezentacyjnej przy badaniu wyników powszechnego spisu ludności.

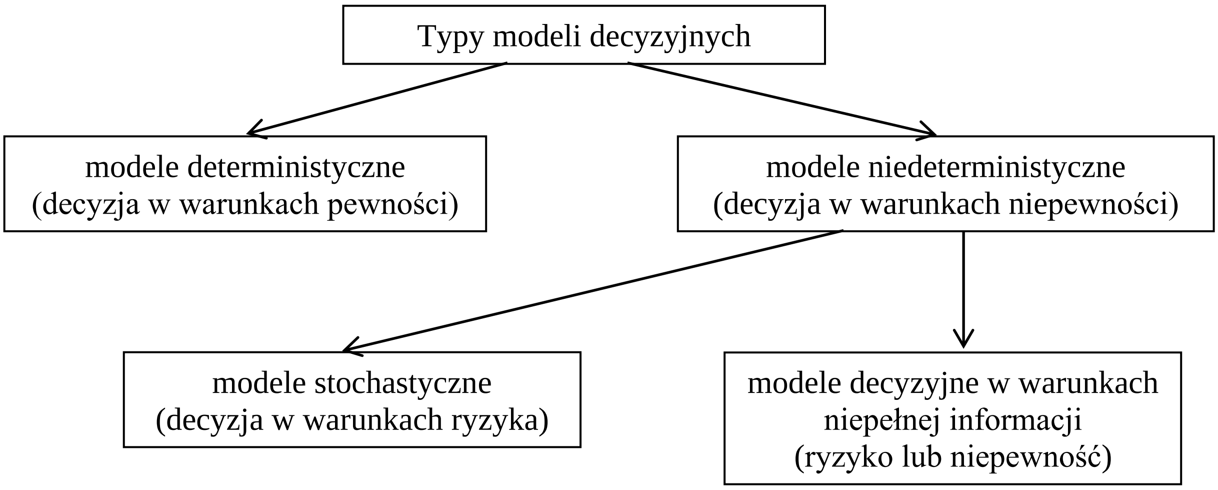
W wielu przypadkach przeprowadzeniu badania całkowitego stoją na przeszkodzie względy ekonomiczne lub praktyczne. Dzieje się tak wtedy, gdy badany przedmiot ulega zniszczeniu (np. cegła przy badaniu na wytrzymałość, żarówka przy badaniu długości świecenia, nasiona przy badaniu kiełkowania, konserwy przy badaniu jakości) lub gdy wielkość strat, które pociągnęłoby za sobą takie badanie, jest zbyt duża.

1.10.3. Podstawowe wiadomości o badaniach operacyjnych

Badania operacyjne ($\subset$ nauki o zarządzaniu) – teoria podejmowania decyzji wykorzystująca metody ilościowe matematyczne i statystyczne do wyznaczania optymalnych rozwiązań różnych problemów w wielu dziedzinach działalności człowieka (np. technicznych,

ekonomicznych i związanych z zarządzaniem) z zastosowaniem technik komputerowych. Geneza: metody zarządzania operacjami wojskowymi w okresie II wojny światowej.
Zatem: **badania operacyjne** (ang. *operations research*) – to zespół modeli i metod poszukiwania optymalnych rozwiązań ze względu na preferencje decydenta. Są one związane z programowaniem matematycznym.

Programowanie matematyczne – zajmuje się główną konstrukcją i analizą algorytmów rozwiązywania problemów optymalizacyjnych.



Modele operacyjne → decyzje o krótkim horyzoncie czasowym
Modele strategiczne → decyzje dalekosiężne

Decyzja i jej rodzaje:

- decyzja dopuszczalna (zgodna z ograniczeniami) → lepsza / → gorsza
- decyzja optymalna (najlepsza)

Ważne: kryterium wyboru

Problem decyzyjny – określona sytuacja decyzyjna

Zadanie decyzyjne – zapis sytuacji decyzyjnej z użyciem modelu matematycznego (zawierającego symbole i operatory matematyczne dotyczące warunków ograniczających, czy kryteriów wyboru).

Parametry – wielkości znane decydentowi występujące w warunkach ograniczających (układach równań i nierówności).

Zmienne decyzyjne – zmienne do ustalenia.

Warunki brzegowe w zadaniu decyzyjnym – np. nieujemność zmiennych, ich ciągłość.

Decyzje dopuszczalne – taki układ wartości zmiennych decyzyjnych, które spełniają wszystkie warunki brzegowe i ograniczające badaną sytuację decyzyjną.
Funkcja celu (funkcja kryterium) – kryterium wyboru mierzące stopień osiągnięcia celu, który decydent chce osiągnąć.

Wybór decyzji optymalnej – wyznaczanie takich wartości zmiennych decyzyjnych, przy których wartość funkcji celu osiąga wartość najkorzystniejszą (optymalną) – wartość minimalną lub maksymalną.

Opis zadania decyzyjnego (porównaj z: 1.5.)**:**

Niech: D - zbiór decyzji dopuszczalnych
d - dowolna decyzja
f - funkcja celu

Zadanie decyzyjne:

Znaleźć taką decyzję $d^* \in D$, że:

ALBO

$$f\left(d^*\right) = \max\left\{ f\left(d\right) : d \in D\right\} \qquad\qquad f\left(d^*\right) = \min\left\{ f\left(d\right) : d \in D\right\}$$

Uwaga:
Jeżeli funkcja celu oraz warunki ograniczające są liniowe, to zadanie decyzyjne nazywany zadaniem programowania liniowego (PL).

Programowanie liniowe w procesach decyzyjnych

Zadanie (model) programowania liniowego polega na znalezieniu wartości optymalnej funkcji liniowej postaci:

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = c_1 x_2 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

gdzie: $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - znane współczynniki,
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ - zmienne decyzyjne,
F - funkcja celu,
$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to$ opt. (max lub min).

Ograniczenie procesu optymalizacji ma postać:

$$\sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots n}}^{n} a_{ij} x_{ij} \underset{(\le \text{ lub } \ge)}{=} b_i \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \underset{(\le \text{ lub } \ge)}{=} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \underset{(\le \text{ lub } \ge)}{=} b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \underset{(\le \text{ lub } \ge)}{=} b_m \end{cases}$$

gdzie: a_{ij}, b_j - znane współczynniki

$i = 1, \dots, m$ - liczba ograniczeń

$j = 1, \dots, n$ - liczba zmiennych decyzyjnych

warunki brzegowe: $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$ - zmienne decyzyjne

Każde rozwiązanie $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ spełniające ograniczenia i warunki brzegowe, to **rozwiązanie dopuszczalne**.

Rozwiązanie optymalne – to rozwiązanie spełniające maksimum lub minimum funkcji celu.

Uniwersalną metodą rozwiązywania zadań prognozowania liniowego jest algorytm SIMPLEX (wraz z arkuszem kalkulacyjnym Excel i dodatkiem SOLVER).

Przykład zadania programowania liniowego:

Dane:

S_1, S_2, S_3 - zasoby magazynowe odpowiednio w b_1, b_2, b_3 - ilościach.

Należy wytworzyć: P_1, P_2 - dwa produkty odpowiednio w x_1, x_2 - ilościach.

Do wytworzenia jednostki produktu P_j $(j = 1, 2)$ zużywa się a_{ij} surowca S_i $(i = 1, 2, 3)$.

Zysk jednostkowy z wyprodukowania jednej jednostki produktu P_j wynosi c_j jednostek pieniężnych.

Polecenie:

Wyznaczyć optymalną decyzję $d^*(x_1, x_2)$ maksymalizującą całkowity zysk z wytworzenia produktów P_1 i P_2, przy danych zasobach b_1, b_2, b_3 surowców S_1, S_2, S_3.

Rozwiązanie:

Funkcja celu: $F(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$ ma osiągać maximum.

Jeśli (z treści zadania) wiemy, że:

(1) na wyprodukowanie 1-ej jednostki produktu P_1 zużywa się a_{11} ilości surowca S_1 oraz

(2) na wyprodukowanie 1-ej jednostki produktu P_2 zużywa się a_{12} ilości tego samego surowca S_1, ale przy ograniczonej do b_1 wielkości tego surowca,

to **warunek ograniczenia ma postać**:

$$
\begin{array}{cl}
\text{dla } S_1: & \left\{ \begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1; & \\ & \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 & \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3 & \\ & \\ x_1 \geq 0 & \text{o nieujemności} \\ x_2 \geq 0 & \text{zmiennych decyzyjnych} \end{array} \right. \\
\text{analogicznie} & \\
\text{dla surowców } S_2 \text{ i } S_3: & \\
\text{wraz z warunkami} & \\
\text{brzegowymi:} &
\end{array}
$$

Ww. układ, to klasyczna postać **zadania programowania liniowego**.

1.10.4. Przykład rachunkowy[35]

Niech:

- wielkości zasobów surowców S_1, S_2, S_3 będą ograniczone ilościami odpowiednio danymi: $b_1 = 24$, $b_2 = 20$, $b_3 = 28$,
- należy wytworzyć produkty: P_1 i P_2 w ilościach x_1 i x_2, korzystając z zasobów S_1, S_2, S_3,
- zysk jednostkowy z wytworzenia produktów P_1 i P_2 jest odpowiednio równy: $c_1 = 12$ i $c_2 = 8$,
- do wytworzenia jednej jednostki produktu P_1 oraz P_2 zużywa się odpowiednio $a_{11} = 3$ i $a_{12} = 4$ ilości surowca S_1 , zaś $a_{21} = 2$ i $a_{22} = 5$ surowca S_2 oraz tylko $a_{31} = 7$ surowca S_3.

Wyznaczymy optymalną decyzję: $d^*(x_1, x_2)$ maksymalizującą zysk z wytworzenia produktu P_1 i P_2.

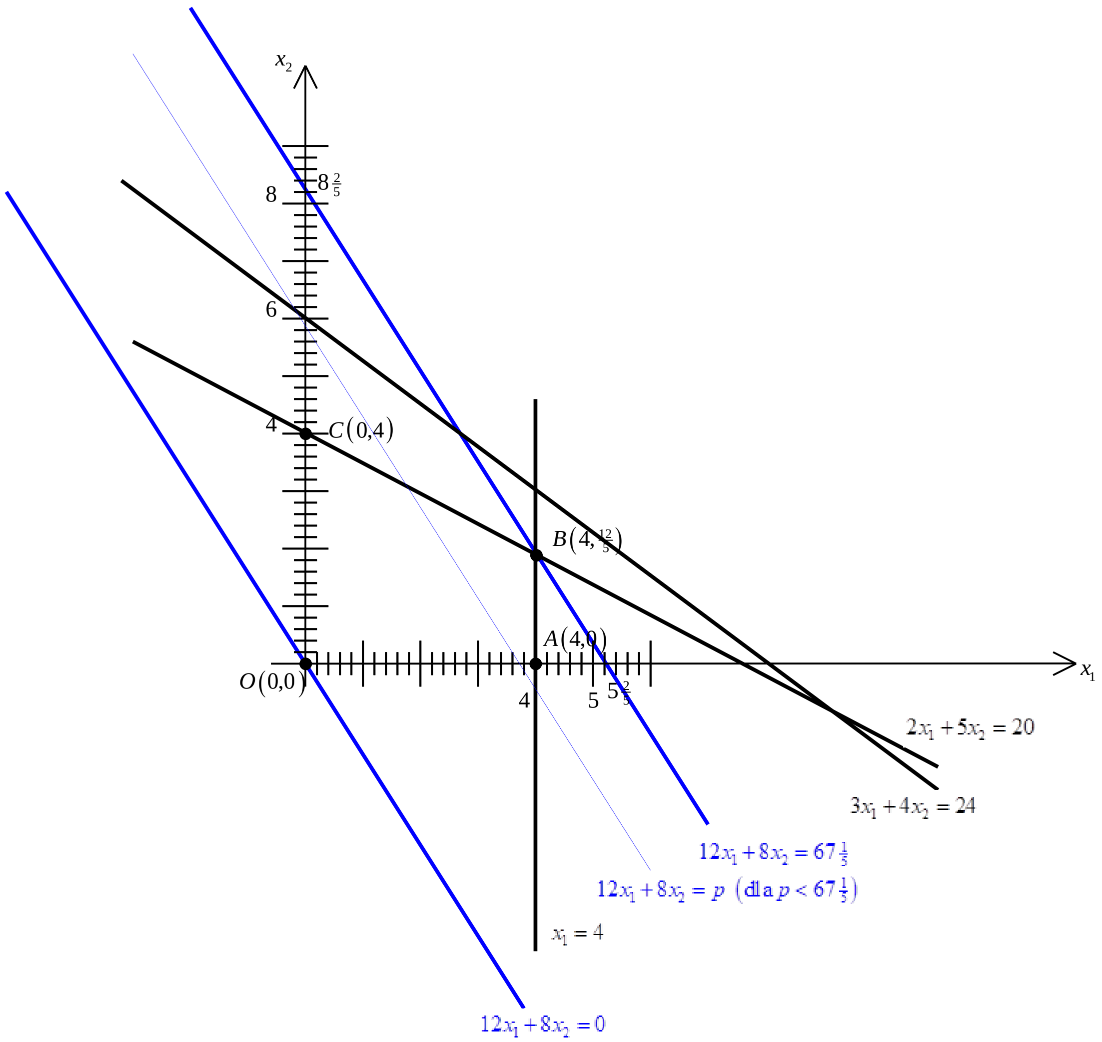
Rozwiązanie:

- Funkcja celu – zysk: $F(x_1, x_2) = 12x_1 + 8x_2$, którą należy zmaksymalizować.
- Ograniczenia wraz z warunkami brzegowymi:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 7x_1 + 0x_2 \le 28 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 \le -\frac{3}{4}x_1 + 6 \\ x_2 \le -\frac{2}{5}x_1 + 4 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- Interpretacja graficzna ww. układu nierówności na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, czyli zbioru dopuszczalnych decyzji (czworokąt $OABC$)

[35] Woźniak A.: *Badania operacyjne w logistyce i zarządzaniu produkcją*, Wydawnictwo Naukowe PWSZ w Nowym Sączu, Nowy Sącz 2010, s. 16-18.



- Rodzina prostych równoległych (innego koloru), to wykresy funkcji celu: $12x_1+8x_2=p$ dla określonego poziomu zysku p.
- Dopiero najwyżej położona prosta: $12x_1+8x_2=67\frac{1}{5}$ ma punkt wspólny: $B\left(4,\frac{12}{5}\right)$ ze zbiorem dopuszczalnych decyzji – czworokątem $OABC$.
- Zatem optymalna decyzja $d^*\left(x_1,x_2\right)=B\left(4,\frac{12}{5}\right)$ realizuje maksymalny zysk na poziomie $F\left(4,\frac{12}{5}\right)=12\cdot 4+8\cdot\frac{12}{5}=67\frac{1}{5}$ przy danych ograniczeniach, dla poziomów produkcji: $x_1=4$ produktu P_1 i $x_2=\frac{12}{5}$ produktu P_2.
- Każda (niżej położona – jaśniejsza) prosta: $12x_1+8x_2=p$ dla $p<67\frac{1}{5}$ jest wykresem funkcji zysku dla niepełnego wykorzystania zasobów potrzebnych do wytworzenia produktów P_1 i P_2 i nie realizuje maksymalnego zysku.
- **Odpowiedź:** Wytworzenie ilości $x_1=4$ produktu P_1 i $x_2=\frac{12}{5}$ produktu P_2 zrealizuje (przy danych ograniczeniach surowców S_1, S_2 i S_3) maksymalny zysk równy $F\left(4,\frac{12}{5}\right)=67\frac{1}{5}$.

1.10.5. Metody prognostyczne

Etapy prognozowania:

1) definicja problemu prognostycznego,
2) zebranie danych statystycznych i ich analiza,
3) wybór metody prognozowania,
4) postawienie prognozy,
5) ocena trafności prognozy.

Metody prognostyczne

METODY PROGNOSTYCZNE

METODY MATEMATYCZNO-STATYSTYCZNE (ilościowe)

- oparte na modelu deterministycznym
- oparte na modelu ekonometrycznym
  - 1-no równ. mod. ekon.
    - klas. mod. trendu
    - adept. mod. trendu
    - m. przycz.-opis.
    - m. autoregr.
  - wielorówn. m. ekon.
    - proste
    - rekurenc.
    - o rów. współzależ.

METODY NIEMATEATYCZNE (jakościowe)

- ankietowe
- intuicyjne
- kolejnych przybliżeń
- ekspertyz
- delficka
- refleksji
- analogowe
- inne

Niektóre metody predykcji:

1) Predykcja na podstawie trendu.
2) Predykcja na podstawie modelu ekonometrycznego.
3) Predykacja na podstawie szeregów czasowych.
4) Metody naiwne.
5) Metoda średniej ruchomej.
6) Prognozowanie analogowe.
7) Metody heurystyczne.
8) Scenariusze.

Zakończenie

Zaprezentowane w rozdziale merytoryczne treści matematyczne i statystyczne nie są przedstawione w formie systematycznego i regularnego wykładu – byłoby to niemożliwe, a nawet niewskazane. Bowiem treści te są dokładnie omawiane i analizowane na zajęciach z matematyki i przedmiotów pokrewnych. Stąd też nie było żadnych powodów, ani możliwości ponownego dokonywania takiej prezentacji w niniejszym rozdziale.

Bowiem zawsze możliwe jest pogłębienie zasygnalizowanych tutaj zagadnień z dostępnych źródeł według własnych potrzeb.

Zdecydowana większość teoretycznie zasygnalizowanych fragmentów poparta jest rozwiązanymi przykładowo zadaniami rachunkowymi z wyczerpującym komentarzem objaśniającym. Treści matematyczne i statystyczne rozdziału pierwszego pełnią rolę niezbędnego teoretycznego fundamentu dla lektury kolejnych specjalistycznych rozdziałów kierunkowych o charakterze praktycznym.

Streszczenie

Rozdział „Aparat matematyczny i statystyczny" prezentuje – zgodnie z tytułem – te specjalistyczne treści, które są wykorzystane w kolejnych kierunkowych rozdziałach monografii.

Zawarte w nim są odpowiednie pojęcia, definicje, twierdzenia, zasady i metody matematyczne i statystyczne, które stanowią fundament ich zastosowań w naukach ekonomicznych, finansach i informatyce.

Materiał rzeczowy rozdziału podzielony jest na 10 podrozdziałów, których tematyka obejmuje: język matematyczny, obliczenia finansowe, funkcje i ich pochodne, zagadnienia optymalizacji, równania różniczkowe, układy równań oraz statystykę opisową i matematyczną. Całość kończą rozważania o metodach i technikach badawczych oraz prognozowaniu. Każdy rozdział podzielony jest na odpowiednie tematyczne moduły.

Prezentowane wybrane zagadnienia ujęte są sygnalnie, schematycznie i syntetycznie w formie zwartej z wykorzystaniem porównań i rozumowania przez analogię. Prawie wszystkie podrozdziały zakończone są rozwiązanymi przykładami rachunkowymi wraz z wyczerpującymi komentarzami. Ilustrują one poprzedzające je treści o charakterze teoretycznym.

Słowa kluczowe
twierdzenie, model, kwantyfikacja, procent, kapitalizacja odsetek, funkcja, pochodna, optymalizacja, całka, równania różniczkowe, macierz, układy równań, struktura, dynamika i współzależność zjawisk, zmienna losowa i jej rozkład, weryfikacja hipotez statystycznych

The mathematical and statistical tool

Summary

The chapter 'The mathematical and statistical tool' presents-according to the title-this specialistic content which is used in the subsequent vocational chapters of the monograph. There are the appropriate concepts, definitions, statements, rules and mathematical and statistical methods included in it which are the fundament of their usage in economic, financial and computer science.

The content of the chapter is divided into 10 subsections which subject area includes: mathematical jargon, financial calculations, functions and their derivatives, optimisation matters, differential equation, equation systems and also descriptive and mathematical statistic. The whole content of the chapter is concluded by the consideration about the methods and the research technologies and the forecasting. Every chapter is divided into the appropriate subject module.

The presented, chosen issues are included perfunctorily, schematically, synthetically, in the compact form with the usage of the comparison and the analogizing. Almost all the subsections are concluded by the calculative examples of their solving with the comprehensive comment. They illustrate the preceded content of the theoretical nature.

Key words

statement, model, quantification, percentage, interest earned, function, derivative, optimization, integral, differential equation, matrix, equation system, structure, dynamic and the correlation of the phenomenon, random variable and its layout, the verification of statistic hypothesis.

Bibliografia

1. Adamkiewicz H.A.: *Statystyka. Zastosowanie w ekonomii*, ODiDK, Gdańsk 1996.
2. Banach S.: *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1979
3. Banaś J.: *Podstawy matematyki dla ekonomistów*, WNT, Warszawa 2005
4. Borowska M.: *MATEMATYKA Materiały pomocnicze dla studentów do nauki matematyki*, Wydawnictwo Diecezjalne i Drukarnia w Sandomierzu, Stalowa Wola 2015.
5. Borowska M.: *STATYSTYKA Materiały pomocnicze dla studentów do nauki statystyki*, Wydawnictwo Diecezjalne i Drukarnia w Sandomierzu, Stalowa Wola 2016.
6. Empacher A.B., Sęp Z., Żakowska A., Żakowski W.: *Mały słownik matematyczny*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1997.
7. Gajek L., Kałuszka M.: *Wnioskowanie statystyczne Modele i metody*, WN-T, Warszawa 1993.
8. Gurgul H., Suder M.: *Matematyka dla kierunków ekonomicznych*, Wydawnictwo Nieoczywiste – imprint GAB Media, Piaseczno, 2016.
9. Kordos M., Skwarczyński M., Zawadowski W.: *Leksykon matematyczny*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1993.
10. Ostoja-Ostaszewska A.: *Matematyka w ekonomii Modele i metody*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
11. Piłatowska M.: *Repetytorium ze statystyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
12. Podgórska M., Klimkowska J.: *Matematyka finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
13. Pułaska-Turyna B.: *Statystyka dla ekonomistów*, Difin SA, Warszawa 2011.
14. Skurzyński K.: *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura Materiały pomocnicze do nauczania dydaktyki matematyki*, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 1994.
15. Sobczyk M.: *Matematyka finansowa*, Agencja Wydawniczo-Poligraficzna PLACET, Warszawa 2007.
16. Woźniak A.: *Badania operacyjne w logistyce i zarządzaniu produkcją*, Wydawnictwo Naukowe PWSZ w Nowym Sączu, Nowy Sącz 2010, s. 16-18.

Łukasz Jabłoński, Bożena Zygmunt

Rozdział drugi

MATEMATYKA W BANKU

Spis treści Rozdziału drugiego

Wprowadzenie **99**
2.1. Zasady i procedury naliczania odsetek od rachunków bankowych **101**
2.2. Rozliczanie kredytów **105**
2.3. Wycena obligacji **110**
Zakończenie **115**
Streszczenie **116**
Słowa kluczowe **116**
Summary **117**
Key words **117**
Bibliografia **118**

Wprowadzenie

Bank, to instytucja finansowa zobligowana, jak każda działalność gospodarcza, do generowania zysków i wartości dla swoich klientów. Czynnikami produkcji w banku są: „przyjmowanie wkładów pieniężnych płatnych na żądanie lub z nadejściem oznaczonego terminu oraz prowadzenie rachunków tych wkładów, prowadzenie innych rachunków bankowych, udzielanie kredytów, udzielanie i potwierdzanie gwarancji bankowych oraz otwieranie i potwierdzanie akredytyw, emitowanie bankowych papierów wartościowych, przeprowadzanie bankowych rozliczeń pieniężnych, wykonywanie innych czynności przewidzianych wyłącznie dla banku w odrębnych ustawach”[36].

Bank jest osobą prawną, dlatego też jego działalność poddana jest ścisłej regulacji. Określone jest to odpowiednimi aktami prawnymi w stopniu szerszym, niż innych podmiotów gospodarczych. Komisja Nadzoru Finansowego udziela zezwoleń na jego utworzenie oraz odrębnie na prowadzenie przez niego działalności. Podstawowe akty prawne to: Ustawa Prawo bankowe[37], oraz Ustawa o Narodowym Banku Polskim[38].

W polskim systemie bankowym, oprócz banku państwowego, którym jest Narodowy Bank Polski, funkcjonują następujące banki: banki w formie spółek akcyjnych nazywane komercyjnymi, banki spółdzielcze, oraz spółdzielcze kasy oszczędnościowo kredytowe.

Badając strukturę bilansu banku widzimy, że największą część aktywów stanowią udzielone kredyty, a pasywa, czyli źródła finansowania aktywów stanowią głównie depozyty sektora niefinansowego. Banki to instytucje podejmujące ryzyko na własny rachunek. Wiąże się to ze zwrotem ulokowanych w nich środków na określonych z góry warunkach, oraz braku zwrotu zaciągniętych kredytów zgodnie z zawartą umową kredytową.

Zaprezentowane poniżej rozważania dotyczą jedynie wybranych kierunków działalności bankowej, tj. naliczania odsetek od depozytów, kredytów i obligacji.

Głównym kosztem, jak i głównym dochodem w banku jest oprocentowanie m. in. depozytów, kredytów i obligacji itp. Do wyliczenia tego potrzebna jest matematyka. Oprocentowanie to rynkowy koszt kapitału, albo inaczej cena, którą płaci się za pożyczenie pieniędzy na określony czas. Koszt ten wyraża się zazwyczaj, jako procent od pożyczonej sumy, mierzony w ujęciu rocznym.

Jeśli ktoś pożycza pieniądze na krótszy okres, to zapłaci mniej, proporcjonalne do czasu dysponowania pożyczonymi środkami. Pożyczka taka może mieć zarówno charakter kredytu, jak i również zakupu obligacji wyemitowanych przez potrzebującą kapitału instytucję. Stopy oprocentowania są niezwykle istotne dla funkcjonowania gospodarki, ponieważ ich poziom wpływa na wiele podejmowanych decyzji.

Wysokie oprocentowanie zniechęca do realizacji zakupów na kredyt, jak również utrudnia przedsiębiorstwom finansowanie bieżących kosztów działalności (kredyt obrotowy). Stopy procentowe, oprócz wpływu na decyzje gospodarstw domowych, oddziałują także na decyzje firm w sprawie inwestycji. Wysoki koszt kredytu może np. powstrzymać firmę przed zbudowaniem nowej fabryki, dzięki której powstałyby nowe miejsca pracy.

---

[36] Ustawa z dnia 29 sierpnia 1997 r. – Prawo bankowe (Dz.U. 2020 r., poz. 1896 z późn. zm.), art. 5.
[37] Ustawa z dnia 29 sierpnia 1997 r. – Prawo bankowe (Dz.U. 2020 r., poz. 1896 z późn. zm.).
[38] Ustawa z dnia 29 sierpnia 1997 r. – Ustawa o Narodowym Banku Polskim (Dz.U. 2020 r., poz. 2027 z późn. zm.).

Poziom stóp procentowych wpływa, więc na kondycję gospodarki. Generalnie rzecz biorąc, im wyższe stopy procentowe na rynku, tym niższy popyt w gospodarce. Natomiast, wysokie oprocentowanie zachęca do oszczędzania. Oprocentowanie jest również zyskiem za powierzone oszczędności na lokacie. Można powiedzieć, że stopa procentowa jest wynagrodzeniem za cierpliwość – oszczędzając pieniądze rezygnujemy z bieżącej konsumpcji na rzecz konsumpcji w przyszłości. Im wyższe wynagrodzenie, tym chętniej podejmujemy decyzję o oszczędzaniu, bowiem dzięki niemu przyszła konsumpcja staje się większa od tej, którą moglibyśmy zrealizować obecnie.

Oprocentowanie kredytów i lokat wpływa na ceny rynkowe, które równoważą dostępne oszczędności z popytem na kredyty. Jeśli popyt na kredyt jest większy od dostępnych oszczędności, to oprocentowanie rośnie. Na kształtowanie się poziomu rynkowych stóp procentowych wpływa bank centralny poprzez politykę pieniężną, a wysokość stóp procentowych ustala Rada Polityki Pieniężnej. Jeżeli następuje wzrost podaży pieniądza, to obniżane są stopy procentowe, w przypadku przeciwnym – ma miejsce wzrost.

2.1. Zasady i procedury naliczania odsetek od rachunków bankowych

W działalności każdego banku ważne są regulaminy wewnętrzne związane z działalnością podstawową. W regulaminach tych znajdują się szczegółowe zasady i procedury naliczenia odsetek. Zasady te wyrażają się wzorami matematycznymi służącymi do ich obliczania. W obecnych czasach nikt już nie nalicza odsetek ręcznie, do tego służą odpowiednie programy komputerowe, które wspomagają pracę pracowników bankowych. Nie mniej jednak, należy posiadać podstawową wiedzę związaną z tą procedurą.

Odsetki naliczane są z wykorzystaniem stóp procentowych. Ich wysokość określa Rada Polityki Pieniężnej, czyli organ decyzyjny Narodowego Banku Polskiego. Określanie wysokości stóp, ma na celu utrzymanie niskiego i stabilnego poziomu inflacji oraz wspieranie rozwoju gospodarczego kraju.

Wyróżniamy cztery podstawowe stopy procentowe: stopa referencyjna, stopa lombardowa, stopa depozytowa i stopa redyskontowa.

Stopa referencyjna – określa minimalną cenę, po jakiej Narodowy Bank Polski organizuje operacje otwartego rynku na rynku międzybankowym. Emitowane przez bank centralny krótkoterminowe papiery wartościowe, stanowią jedno z najważniejszych narzędzi, które pozwalają regulować wielkość pieniądza w obiegu. Jeżeli wprowadza się te instrumenty do obiegu, to zmniejsza się podaż pieniądza na rynku; jeżeli bank centralny je skupuje, to znaczy, że wprowadza na rynek dodatkową gotówkę.

Stopa lombardowa – określa maksymalny poziom oprocentowania kredytów udzielanych przez bank centralny, bankom komercyjnym. Kredyt ten nazywa się kredytem lombardowym, który jest udzielany pod zastaw papierów wartościowych.

Stopa depozytowa – określa minimalne oprocentowanie depozytów jednodniowych składanych przez banki komercyjne w banku centralnym.

Stopa redyskontowa – to kwota, jaką otrzymują banki komercyjne za sprzedaż weksli w banku centralnym, które wcześniej nabyły je od swoich klientów.

Zgodnie z ustawą Prawo bankowe (art. 52) do obliczania odsetek przyjmuje się rzeczywistą liczbę dni w roku. Odsetki nalicza się codziennie na zakończenie danego dnia, a dopisywane są do rachunku zgodnie z zawartą umową bankową. Dotyczy to zarówno rachunków bankowych, jak i kredytów.

2.1.1. Odsetki proste i składane

Do jednej z podstawowych działalności banku należy prowadzenie rachunków bankowych. Są to rachunki bieżące oraz rachunki terminowe. Środkami zgromadzonymi na rachunkach bieżących możemy w każdej chwili dysponować, natomiast te umieszczone na terminowych są zdeponowane na określony czas – termin.

Na oprocentowanie lokaty duży wpływ ma wysokość depozytu i czas jego trwania. Warto wiedzieć, że oprocentowanie lokaty może być stałe lub zmienne. Banki bardzo często podają oprocentowanie nominalne, w którym nie są uwzględnione podatki, czy odsetki.

Odsetki proste – to wynagrodzenie za powierzony bankowi kapitał, a ich naliczenie nie wpływa na wysokość kapitału. Pozostawione są one do dyspozycji klienta. W praktyce bankowej najczęściej są one księgowane na innym rachunku rozliczeniowym, z którego można w każdej chwili je wypłacić. Odsetki proste obliczamy według wzoru:

$$O = \frac{n \cdot K \cdot i}{365} \text{ lub } O = \frac{n \cdot K \cdot i}{366}$$

gdzie:

O – kwota odsetek, jaką otrzymamy,
n – liczba dni (okres wykorzystywania kapitału przez bank),
K – kapitał (podstawa naliczania odsetek),
i – stopa procentowa,
365 lub 366 – rzeczywista liczba dni w roku.

Przykład 1

W dniu 1 lutego 2020 roku (przystępny) Pan Kowalski założył w banku lokatę terminową w wysokości 10.000 zł. Na okres 12 miesięcy. Oprocentowanie lokaty 5% w stosunku rocznym. Odsetki będą naliczane co trzy miesiące i pozostaną do dyspozycji klienta. Obliczyć ile odsetek otrzyma Pan Kowalski za rok oszczędzania

Rozwiązanie:

Do obliczenia odsetek trzeba znać liczbę dni w każdych trzech miesiącach. W pierwszym okresie od 1 lutego do 30 kwietnia jest 90 dni (29+31+30), w drugim, trzecim i czwartym po 92 dni.

Liczymy odsetki z pierwszy okres podstawiając do wzoru:

$$O = \frac{90 \cdot 10.000 \cdot 5\%}{366} = \frac{90 \cdot 10.000 \cdot 0,05}{366} = \frac{45.000}{366} = 122,95$$

$O = 122,95$ zł.

Za drugi i trzeci okres naliczamy odsetki w ten sam sposób, zmieniając jedynie liczbę dni w liczniku:

$$O = \frac{92 \cdot 10.000 \cdot 5\%}{366} = \frac{92 \cdot 10.000 \cdot 0,05}{366} = \frac{45.000}{366} = 125,68$$

$O = 125,68$ zł.

Czwarty okres naliczania odsetek przedstawia się następująco:

$$O = \frac{61 \cdot 10.000 \cdot 5\%}{366} + \frac{31 \cdot 10.000 \cdot 5\%}{365} = \frac{61 \cdot 10.000 \cdot 0,05}{366} + \frac{31 \cdot 10.000 \cdot 0,05}{365}$$
$$= \frac{30.500}{366} + \frac{15.500}{365} = 83,33 + 42,47 = 125,80$$

$O = 125,80$ zł.

W 2020 r. liczymy odsetki, podstawiając w mianowniku 366 dni, natomiast w roku 2021 obliczamy analogicznie z tym, że w mianowniku jest już 365 dni.

Odpowiedź: Za okres 12 miesięcy Pan Kowalski otrzyma odsetki w wysokości 122,95 + 125,68 + 125,68 + 125,80 = 500,11 zł.

Odsetki składane – to określenie na kolejne kapitalizacje odsetek. Jest wiele sposobów stosowania kapitalizacji odsetek, a ich częstotliwość zależy od podpisanej umowy z bankiem. Stasuje się harmonogram od dziennego, po roczny.

Kapitalizacja odsetek polega na dopisaniu odsetki do wartości początkowej kapitału, i wraz z nim w następnym okresie procentuje. Im więcej okresów rozliczeniowych, tym większa ich skala, gdyż za każdym razem rośnie podstawa ich naliczenia. Do wyliczenia kapitału po n latach oszczędzania stosujemy następujący wzór:

$$K_n = K \cdot (1 + \frac{i}{100 \cdot k})^{n \cdot k}$$

gdzie:

K_n – kapitał zgromadzony po n latach oszczędzania,
n – liczba lat oszczędzania,
K – kapitał początkowy,
i – stopa procentowa ,
k – liczba okresów kapitalizacji w ciągu roku.
Powyższy wzór należy uzupełnić o dodatkowe informacje:
stopa procentowa 10% w skali roku, to i = 10,
k liczba okresów kapitalizacji w ciągu roku: np. co miesiąc to k = 12,
co kwartał, to k = 4,
a jeżeli dzienna, to k = 365 lub 366.

Przykład 2

W dniu 1 kwietnia 2020 roku Pan Kowalski założył w banku lokatę terminową w wysokości 10.000 zł. Na okres 12 miesięcy. Oprocentowanie lokaty 5% w skali rocznej. Bank stosuje kwartalną kapitalizacje odsetek. Obliczyć jaką kwotę otrzyma Pan Kowalski na koniec terminu lokaty.

Rozwiązanie:

Informacje uzupełniające: i =5, k = 4. Po podstawieniu do wzoru otrzymujemy:

$$K_n = 10.000 \cdot (1 + \frac{5}{100 \cdot 4})^{1 \cdot 4} = 10.000 \cdot (1 + 0{,}0125)^4 = 10.000 \cdot (1{,}0125)^4$$
$$= 10.000 \cdot 1{,}0509 = 10.509$$

Odpowiedź: Pan Kowalski otrzyma: K_n = 10.509 zł, w tym odsetki: 10.509 – 10.000 = 509 zł.

Na podstawie powyższych przykładów, widzimy, że stosowana przez bank kwartalna kapitalizacja odsetek jest bardziej opłacalna.

2.1.2. Dyskonto

Dyskonto (ang. discount) – jest to metoda obliczania aktualnej wartości kapitału na podstawie jego oczekiwanej wartości, którą osiągnie w przyszłości. Dyskontowanie jest to zatem pomniejszanie wartości przyszłej kapitału o tzw. Kwotę dyskonta. Odzwierciedla ona zmianę wartości pieniądza w czasie. Do obliczenia kwoty dyskonta służy stopa procentowa, określana mianem stopy dyskontowej. Potocznie, dyskontowanie należności przez bank jest pojmowane jako wykup należności poniżej ich wartości nominalnej[39].

[39] https://www.ekspander.pl/slownik/dyskonto

Oto podstawowy wzór na dyskontowanie proste:

$$K_p = \frac{K_k}{1 + o \cdot t}$$

gdzie:

K_p – kapitał początkowy,
K_k – kapitał końcowy,
o – wysokość rocznej stopy procentowej,
t – czas wyrażony w latach.

Kwotę dyskonta obliczamy na podstawie poniższego wzoru:

$$D = K_k - K_p$$

gdzie:

D – dyskonto,
K_p – kapitał początkowy,
K_k – kapitał końcowy.

Zatem: kapitał początkowy

$$K_p = \frac{K_k}{1 + o \cdot t}$$

Przykład 3

W ofercie banku dla stałych klientów Pan Kowalski przeczytał: „bank oferuje lokatę na okres 1 roku, oprocentowaną 5% w skali roku. Odsetki są płatne w dniu likwidacji lokaty, a po roku otrzyma kwotę 10.500 zł”. Ile musi dzisiaj wpłacić klient, aby otrzymać oferowaną przez bank kwotę, a ile wynosi dyskonto?

Rozwiązanie:

Wyliczenie kwoty wpłaty:

$$K_p = \frac{K_k}{1 + ot} = \frac{10.500}{1 + 5\% \cdot 1} = \frac{10.500}{1 + 0{,}05 \cdot 1} = \frac{10.500}{1{,}05} = 10.000$$

$$K_p = 10.000 \text{ zł}$$

Wyliczanie kwoty dyskonta:

$$D = \frac{K_k \cdot o \cdot t}{1 + o \cdot t} = \frac{10.500 \cdot 5\% \cdot 1}{1 + 5\% \cdot 1} = \frac{10.500 \cdot 0{,}05}{1 + 0{,}05} = \frac{525}{1{,}05} = 500$$

$$D = 500 \text{ zł}$$

Oto prostszy sposób obliczenia dyskonta: 10.500 zł – 10.000 zł = 500 zł.

W powyższych przykładach zostało przedstawione dyskonto proste rzeczywiste. Jeżeli bank oferowałby lokatę np. na 60 dni, wówczas czas trwania lokaty wynosi: t = $\frac{60}{365}$.

2.1.3. Stopa nominalna i efektywna

Stopa nominalna jest równa rocznej stopie procentowej. Przedstawia ona wysokość oprocentowania lokaty bankowej lub kredytu w skali roku. Służy do wyliczenia oprocentowania w okresie użyczenia kapitału.

Efektywna roczna stopa procentowa składa się z dodatkowych elementów, o które zostanie powiększona początkowa kwota lokaty lub kredytu. Przy lokacie uzależniona jest ona od stopy nominalnej i okresów kapitalizacji, natomiast przy kredycie zależy od dodatkowych doliczanych prowizji i opłat.

Wzór na obliczenie wysokości efektywnej stopy procentowej jest następujący:

$$S_e = (1 + \frac{S_n}{k})^k - 1$$

gdzie:

S_e - efektywna stopa procentowa,
S_n – nominalna stopa procentowa,
k - liczba okresów w kapitalizacji rocznej.

Efektywna stopa procentowa jest zawsze wyższa od nominalnej. W rachunkowości bankowej termin: efektywna stopa procentowa, używany jest do opisania stopy, jaką stasuje się do wyliczenia przychodu i kosztu odsetkowego.

2.2. Rozliczanie kredytów

Kredyty bankowe stanowią jedno z głównych źródeł dochodu banku. Można je zaklasyfikować według różnych kryteriów.

Oto one:

- wg formy kredytu można je podzielić na: kredyty w rachunku bieżącym lub kredytowym,
- wg czasu – na krótkoterminowe lub długoterminowe,
- wg waluty – na kredyty złotowe lub dewizowe,
- wg oprocentowania – na kredyty o stałym lub zmiennym oprocentowaniu.

Przepisy ustawy: Prawo bankowe nie zawierają klasyfikacji kredytów i pożyczek. Podmioty będące stronami umowy same mogą wpływać na kształt umowy, a co za tym idzie na formę kredytu, czy oprocentowania.

Oprocentowanie kredytów uzależnione jest od wielu czynników wewnętrznych, jak i zewnętrznych, m. in. Od wysokości stóp procentowych ogłaszanych przez Radę Polityki Pieniężnej, rodzaju zabezpieczenia, kwoty kredytu, czy okresu kredytowania. Zgodnie z Ustawą o rachunkowości,[40] wszystkie naliczenia i księgowania odsetkowe wykonywane są na koniec każdego miesiąca, natomiast klient rozlicza się zgodnie z warunkami umowy.

W celu pozyskania klientów banki oferują różne rodzaje kredytów, oraz różne formy ich spłacania.

2.2.1. Metoda rat malejących

Zgodnie z prowadzoną polityką kredytową banku, udzielane są kredyty dla wszystkich podmiotów: takich jak przedsiębiorstwa, podmioty budżetowe, czy osoby fizyczne. W zależności od rodzajów kredytu i oprocentowania, kredyty mogą być spłacane jednorazowo lub w ratach. Oprocentowanie może być stałe albo zmienne. Przy kredytach długoterminowych banki zazwyczaj stosują oprocentowanie zmienne, w celu zapewnienia sobie możliwie najbardziej korzystnych warunków prowadzenia działalności.

Klient ma do dyspozycji spłatę kredytu w ratach stałych lub w malejących. Raty malejące, cieszą się mniejszą popularnością. Związane jest to z faktem, że w pierwszych miesiącach spłaty rata kapitałowo - odsetkowa jest wysoka. W poniższym przykładzie zostanie przedstawiona spłata kredytu z zastosowaniem rat malejących wraz z oprocentowaniem. W następnym zaś podrozdziale (2.2.2) zaprezentowany zostanie ten sam przykład, ale z zastosowaniem rat stałych.

Bank udziela kredytu w wysokości 12.000 zł. w dniu 5 stycznia 2019r. Kredyt ma być spłacany w 12 ratach miesięcznych. Oprocentowanie kredytu jest stałe i w skali roku wynosi 5%. Oto zaprezentowany w tabeli szczegółowy plan spłaty kredytu, stanowiący załącznik do umowy kredytowej.

Data spłaty	**Nr raty**	**Saldo kredytu**	**Ilość dni odsetkowych**	**Rata kapitałowa**	**Rata odsetkowa**	**Razem**
1	2	3	4	5	6	7
2019.01.31	1	12.000,00	26	1.000,00	42,74	1.042,74
2019.02.28	2	11.000,00	28	1.000,00	42,19	1.042,19
2019.03.31	3	10.000,00	31	1.000,00	42,47	1.042,47
2019.04.30	4	9.000,00	30	1.000,00	36,99	1.036,99
2019.05.31	5	8.000,00	31	1.000,00	33,97	1.033,97
2019.06.30	6	7.000,00	30	1.000,00	28,77	1.028,77
2019.07.31	7	6.000,00	31	1.000,00	25,48	1.025,48
2019.08.31	8	5.000,00	31	1.000,00	21,23	1.021,23
2019.09.30	9	4.000,00	30	1.000,00	16,44	1.016,44
2019.10.31	10	3.000,00	31	1.000,00	12,74	1.012,74
2019.11.30	11	2.000,00	30	1.000,00	8,22	1.008,22
2019.12.31	12	1.000,00	31	1.000,00	4,25	1.004,25
			Razem	**12.000,00**	**315,49**	**12.315,49**

Sposób wyliczenia odsetek w dniu spłaty pierwszej raty kredytu obliczamy następująco. Zadłużenie wynosi 12.000 zł. Od dnia 5 do 30 stycznia upłynęło 26 dni. Odsetki obliczamy korzystając ze wzoru[41]:

$$O = \frac{K \cdot d \cdot p}{365}$$

[40] Ustawa z dnia 29 września 1994 r. – Ustawa o rachunkowości (Dz.U. 2020 r., poz. 2122 z późn. zm.).

[41] K. Opolski, *ABC bankowości*, Instytut Naukowo-Wydawniczy OLIMPUS CEiRB, Warszawa 1998, s. 89.

gdzie:

O – narosłe odsetki
K – zadłużenie (saldo kredytu)
d – liczba dni (okres za jaki naliczane są odsetki)
p – oprocentowanie kredytu w skali roku
365 - liczba dni w roku

Czyli odsetki za styczeń wynoszą:

$$O = \frac{12000 \cdot 26 \cdot 5\%}{365} = 42{,}74 \text{ zł}$$

Przez cały czas spłaty kredytu odsetki są malejące (patrz kol. 6 w tabeli), co za tym idzie, rata kapitałowo - odsetkowa też jest malejąca. Kredytobiorca spłaca zatem coraz to mniejszą kwotę (patrz kol. 7 w tabeli), a zadłużenie kredytu zmniejsza się co miesiąc o taką samą wartość.

2.2.2. Metoda rat stałych

Spłata kredytu w formie annuitetowej, czyli takiej, gdzie raty spłat przez cały okres korzystania z kredytu mają stałą wysokość. Jest to bardzo wygodna forma spłaty dla klientów banku. Przedstawiony poniżej przykład pokazuje taką spłatę. Raty kapitałowo - odsetkowe maja tę sama wartość we wszystkich okresach spłaty. Planując korzystanie z kredytu bankowego można na wstępie ocenić możliwości spłaty zobowiązania finansowego[42].

Nawiązując do powyższego przykładu opisanego w 2.2.1 z zastosowaniem rat malejących, poniżej zostanie przedstawiona metoda rat stałych.

W tym przypadku plan spłaty kredytu zawarty jest w poniższej tabeli, jako załącznik do umowy kredytowej. Jest to ten sam kredyt, została jedynie zmieniona metoda spłaty: z rat malejących na raty stałe.

Data spłaty	**Nr raty**	**Saldo kredytu**	**Rata kapitałowa**	**Rata odsetkowa**	**Razem**
1	2	3	4	5	6
2019.02.05	1	12.000,00	977,29	50,00	1.027,29
2019.03.05	2	11.022,71	981,36	45,93	1.027,29
2019.04.05	3	10.041,35	985,45	41,84	1.027,29
2019.05.05	4	9.055,90	989,56	37,73	1.027,29
2019.06.05	5	8.066,34	993,68	33,61	1.027,29
2019.07.05	6	7.072,66	997,82	29,47	1.027,29
2019.08.05	7	6.074,84	1.001,98	25,31	1.027,29
2019.09.05	8	5.072,86	1.006,15	21,14	1.027,29
2019.10.05	9	4.066,71	1.010,35	16,84	1.027,29
2019.11.05	10	3.056,36	1.014,55	12,73	1.027,29
2019.12.05	11	2.041,81	1.018,78	8,51	1.027,29
2020.01.05	12	1.023,03	1.023,03	4,26	1.027,29
		Razem	**12.000,00**	**327,48**	**12.327,48**

[42] K. Stępień, *Bankowość – Podstawy,* Wydawnictwo i Handel Książkami „KaBe", Krosno 2015, s.115.

Oto wzór na wyliczenie stałej raty kapitałowo – odsetkowej:

$$I = \frac{K}{\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{r}{k})^{-i}} = \frac{K \cdot r}{k(1-(\frac{k}{k+r})^{n})}$$

gdzie:
I – wysokość raty stałej,
K – kwota udzielonego kredytu,
r – oprocentowanie kredytu w skali roku,
k – liczba rat w roku,
n – liczba wszystkich rat.

Podstawiając do wzoru wyliczymy stałą ratę kapitałowo - odsetkową:

$$I = \frac{12.000}{\frac{1}{(1+\frac{0,05}{12})} + \frac{1}{(1+\frac{0,05}{12})^2} + \frac{1}{(1+\frac{0,05}{12})^3} + \cdots + \frac{1}{(1+\frac{0,05}{12})^{11}} + \frac{1}{(1+\frac{0,05}{12})^{12}}} = \frac{12.000}{11,681} = 1.027,29$$

I = 1.027,29 zł

Zatem wysokość raty kapitałowo - odsetkowej w przypadku rat stałych wynosi 1.027,29 zł przez cały okres spłaty. Powyższą ratę można również obliczyć za pomocą funkcji PMT dostępnej w Microsoft Excel.

Zasada wyliczenia odsetek jest jednakowa w obu metodach. Po dokonaniu wyliczeń widoczna jest różnica pomiędzy wysokością odsetek zapłaconych przez cały okres kredytowania. W przypadku rat malejących (2.2.1) kwota odsetek wynosi 315,49 zł, natomiast w przypadku rat stałych (2.2.2) jest ona równa 327,48 zł. Różnica zatem jest równa 11,99 zł. Dla banku druga z przedstawionych metod jest bardziej opłacalna.

W omawianym przykładzie kredyt udzielony został tylko na okres 12 miesięcy, natomiast przy kredytach na dłuższe terminy, wysokość zapłaconych odsetek byłaby o wiele wyższa. Każda z przedstawionych metod ma zatem swoje zalety i wady.

2.2.3. RRSO – (rzeczywista roczna stopa oprocentowania)

Ustawa z dnia 12 maja 2011 r. o kredycie konsumenckim[43] zobligowała banki oraz instytucje finansowe do podawania całkowitego kosztu kredytu, nazywanego rzeczywistą roczną stopą oprocentowania. Do kosztów zalicza się: oprocentowanie, prowizję za udzielenie kredytu, koszty ubezpieczenia i koszty dodatkowych zabezpieczeń.

Sposób obliczania RRSO został ujednolicony, a wprowadzony przez KNF wzór jest jednakowy dla każdej instytucji finansowej i do każdego rodzaju kredytu[44]:

[43] Ustawa z dnia 12 maja 2011 r. O kredycie konsumenckim (Dz.U. 2019 r., poz. 1083 z późn. zm.). art. 13.
[44] Ustawa z dnia 12 maja 2011 r. O kredycie konsumenckim (Dz.U. 2019 r., poz. 1083 z późn. zm.) załącznik nr 4 ustawy.

$$\sum_{K=1}^{K=m} \frac{A_K}{(1+i)^{tK}} = \sum_{K\prime=1}^{K\prime=m\prime} \frac{A'_{K\prime}}{(1+i)^{tK\prime}}$$

gdzie:

K – numer kolejnej wypłaty raty kredytu,
K' – nr kolejnej spłaty kredytu lub wnoszonych opłat,
A_K – kwota wpłaty raty kredytu K,
$A'_{K'}$- kwota spłaty kredytu lub kosztów K,
Σ – suma, m – numer ostatniej wpłaty raty kredytu,
m' – nr ostatniej spłaty kredytu lub wnoszonych opłat,
t_K – okres wyrażony w latach lub ułamkach lat, miedzy dniem pierwszej wypłaty, a dniem każdej kolejnej wypłaty, zatem $t_1 = 0$,
$t_{K'}$ - okres wyrażony w latach lub ułamkach lat, miedzy dniem pierwszej wypłaty, a dniem każdej spłaty lub wniesienia opłat,
i – rzeczywista roczna stopa oprocentowania,

RRSO jest obliczana przez banki z wykorzystaniem programu komputerowego Microsoft Excel. Podawana wartość RRSO zawsze będzie wyższa od wartości stopy nominalnej. Obowiązkiem każdego banku jest informowanie kredytobiorcy o wysokości RRSO.

Na poniższym przykładzie zostanie zilustrowany prosty sposób obliczenia RRSO przez bank.

Przykład 4

Pan Kowalski zaciągnął kredyt w banku w wysokości 10.000 zł, na okres 12 miesięcy oprocentowany 5% w stosunku rocznym. Dodatkowo będzie musiał zapłacić prowizję w wysokości 300 zł, i koszty ubezpieczenie kredytu w wysokości 200 zł. Jaka jest rzeczywista roczna stopa oprocentowania tego kredytu i jaką kwotę będzie musiał zwrócić Pan Kowalski po 12 miesiącach?

Rozwiązanie:

Do kwoty kredytu dodajemy dodatkowe koszty:
10.000 + 300 + 200 = 10.500 zł.
Od tej kwoty naliczane jest oprocentowanie:
10.500 · 5% = 525 zł.
Kwota do zapłaty 10.500 + 525 = 11.025 zł.
RRSO $= \frac{11.025-10.000}{10.000} = 10{,}25\%$

Odpowiedź: Rzeczywista roczna stopa oprocentowania wynosi 10,25% natomiast kwota kredytu do zwrotu 11.025 zł.

2.3. Wycena obligacji

Obligacje, to instrumenty rynku finansowego, będące zarazem papierami wartościowymi, emitowanymi przez rząd danego kraju. Emitent obligacji to dłużnik obligatariusza, posiadacza obligacji, który zobowiązuje się wobec niego do wykupu obligacji. W praktyce polega to na tym, że emitent zaciąga dług u obligatariusza, który będzie spłacony wraz z odsetkami. Środki pozyskane w ten sposób służą finansowaniu deficytu budżetowego.

Cenę obligacji kształtuje rynek popytu i podaży, uzależniony od takich czynników, jak wysokość stóp procentowych, czy poziom ryzyka niedotrzymania warunków przez emitenta. Obligacje mogą być emitowane przez różne instytucje. Ustawą regulującą emisję obligacji jest Ustawa o obligacjach z 15 stycznia 2015 Dz. U. 2015r, poz. 238 (z późniejszymi zmianami) dotycząca emisji obligacji gminnych i korporacyjnych. Natomiast Rozporządzenie Ministra Finansów z dnia 26 czerwca 2006 r, reguluje emitowanie obligacji skarbowych, (wg podziału obligacji ze względu na emitenta). W Polsce obligacje były emitowane na różne okresy m.in. na 2, 3, 4 i 10 lat[45]. Obecnie dostępne są one w sprzedaży na okres 2, 4 i 10 letni.

Każdy rodzaj obligacji posiada swój symbol. Oznaczenia cyfrowe w nazwie serii obligacji oznaczają w kolejności miesiąc i rok wykupu tej obligacji. Obligacje dwuletnie: symbol DOS o stałym oprocentowaniu, mają odsetki płacone co roku. Obligacje czteroletnie: symbol COI indeksowane o zmiennym oprocentowaniu, uzależnionym od poziomu inflacji, mają odsetki płacone po każdym pełnym roku. Obligacje dziesięcioletnie: symbol EDO indeksowane o zmiennym oprocentowaniu są z roczną kapitalizacją, czyli odsetki są doliczone do obligacji i podlegają dalszemu oprocentowaniu, aż do terminu wykupu. Wartość nominalna obligacji (czyli wartość w momencie wykup) wynosi 100 złotych.

Inwestowanie w obligacje powinno być poprzedzone dokładną analizą wyceny, polegającej na określeniu ceny, po jakiej dana obligacja powinna być nabyta. Podstawową metodą stosowaną przy wycenie obligacji jest: metoda zdyskontowanych przepływów pieniężnych, która określa wartość obligacji. Zatem wartość obligacji jest sumą wartości obecnej przepływów pieniężnych, które inwestor otrzyma w okresie posiadania obligacji[46]. Do powyższej wyceny wykorzystamy następujący wzór.

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

gdzie:

P – wartość obligacji (cena rynkowa obligacji),
n – liczba okresów posiadanej obligacji,
C_t – przepływy pieniężne w okresie t,
r – wymagana stopa dochodu.

Obligacje kuponowe, to obligacje, których cena zwiera również narosłe odsetki. Mówi się tu o dwóch rodzajach ceny: cena „czysta”, nie zawierającą narosłych odsetek od ostatniej

[45] Ustawa z dnia 15 stycznia 2015 r. O obligacjach (Dz.U. 2015 r., poz. 238 z późn. zm.).
[46] K. Jajuga, *Obligacje*, Fundacja edukacji rynku kapitałowego, Warszawa 2006, s. 14.

płatności odsetek i cena „brudna", zawierającą narosłe odsetki od ostatniej płatności, zwana ceną rozliczeniową.

Przykład 5

Na rynku dostępne są obligacje serii EDO0725. Dzień 25 lipca to dzień, w którym doliczane są odsetki od tej obligacji (jeden raz w roku). Wartość nominalna obligacji to 100 zł, a oprocentowanie 6%. W dniu 25 października kupiono obligacje na giełdzie po 99,01 zł. za sztukę. Obliczymy: wycenę obligacji oraz różnicę pomiędzy ceną „czystą", a „brudną."

Rozwiązanie:

Musimy znać liczbę dni od 25 lipca do 25 października, (która wynosi: 6 dni lipca, 31 dni sierpnia, 30 dni września 25 dni października - razem 92 dni). Do wszystkich wyliczeń stosujemy rzeczywistą liczbę dni w roku (mianownik 365). Podstawiając do wzoru na wycenę obligacji, otrzymujemy:

$$P = 99{,}01 + \frac{92}{365} \cdot 6\% \cdot 100 = 100{,}52 \text{ zł}$$

Odpowiedź: Wycena obligacji wynosi: 100,52 zł. Różnica pomiędzy ceną „czystą", czyli 99,01 zł, a ceną „brudną": 100,52 zł, wynosi: | 99,01 zł. - 100,52 zł | = 1,41 zł. to kwota narosłych odsetek, którą uzyska nabywca obligacji.

2.3.1. Obligacje o stałym oprocentowaniu

Obligacje, których oprocentowanie jest znane i nie zmienia się aż do momentu wykupu. Oprocentowanie ustalone jest w momencie ich sprzedaży i obowiązuje przez cały czas, aż do dnia wykupu przez emitenta. Cena obligacji o stałym oprocentowaniu na rynku wtórnym podlega swoistemu mechanizmowi. Jeżeli stopy procentowe maleją, to wówczas ceny obligacji rosną, natomiast, gdy stopy procentowe rosną to spada cena obligacji. Obligacje o stałym oprocentowaniu przynoszą, więc stały dochód. Podstawowe parametry, które charakteryzują obligacje o stałym oprocentowaniu to:

- wartość nominalna, kwota zaciągniętego kredytu (zobowiązania) przez emitenta,
- cena emisyjna, czyli cena, po której dana obligacja jest sprzedawana obligatariuszom,
- kurs rynkowy obligacji, inaczej wartość wyrażona w procentach ceny nominalnej obligacji na rynku,
- rentowność nominalna wyraża stosunek wartości kuponu odsetkowego do wartości nominalnej obligacji,
- kupony odsetkowe, okresowe świadczenia pieniężne.

Rentowność nominalna wyraża się wzorem:

$$r_n = \frac{C}{W_n} \cdot 100\%$$

gdzie:

r_n - rentowność nominalna,

C – kupon odsetkowy,

W_n – wartość nominalna obligacji.

Rentowność bieżąca, to stosunek wartości kuponu odsetkowego do aktualnej ceny rynkowej obligacji wg wzoru:

$$r_b = \frac{C}{P} \cdot 100\%$$

gdzie:

r_b – rentowność bieżąca
C – kupon odsetkowy
P – cena rynkowa obligacji

W obligacjach o stałym oprocentowaniu znamy wielkość wypłacanych w przyszłym okresie odsetek. Wartość obligacji stanowi suma zdyskontowanych strumieni przychodów pieniężnych otrzymywanych w przyszłości z tytułu posiadania obligacji. Stopą dyskonta jest średnia rentowność w okresie do wykupu obligacji (YTM)[47], (ang. Yield To Maturity) nazywana inaczej wewnętrzną stopą zwrotu. Jeżeli znamy wielkość odsetek wypłacanych w przyszłości, to wzór na wartość obligacji przedstawia się następująco:

$$P = \frac{C_1}{(1 + YTM)^1} + \frac{C_2}{(1 + YTM)^2} + \Delta + \frac{C_n + W_w}{(1 + YTM)^n}$$

gdzie:

P – wielkość obligacji,
C_1, C_2, C_n – wartość strumieni odsetkowych,
W_w – wartość nominalna obligacji (wartość wykupu),
YTM – stopa zwrotu w terminie do wykupu,
n – liczba okresów odsetkowych.

Przykład 6

Stopa zwrotu z inwestycji wynosi 4,9%, kupon odsetkowy wypłacany raz w roku w wysokości 4%. Ile powinien zapłacić inwestor za obligacje trzyletnie o wartości nominalnej 100 zł, aby powyższa stopa zwrotu była zrealizowana?

Rozwiązanie:

Obliczamy zatem wartość obligacji:

$$P = \frac{4}{(1 + 0{,}049)^1} + \frac{4}{(1 + 0{,}049)^2} + \frac{4 + 100}{(1 + 0{,}049)^3} = 3{,}81 + 3{,}64 + 90{,}09 = 97{,}54$$

Odpowiedź: Inwestor powinien zapłacić 97,54 zł, i wtedy zostanie zrealizowana stopa zwrotu.

2.3.2. Obligacje o zmiennym oprocentowaniu

Obligacje, których wysokość oprocentowania oparta jest na takich parametrach, jak stopa referencyjna, czyli przeciętna stopa oprocentowania kredytów na rynku międzybankowym WIBOR. Na tej podstawie, przed każdym okresem odsetkowym, ustalana

[47] https://www.bankier.pl/wiadomosc/Matematyka-obligacji-1880750.html (dostęp: 18.12.2018 r.).

jest jej wysokość. Do tak zdefiniowanej stopy procentowej dodawana jest stała marża. Obligacje indeksowane to też obligacje o zmiennym oprocentowaniu, jednak tutaj oprocentowanie za dany okres zależy od stopy inflacji. Podsumowując: w każdym okresie odsetkowym nabywca otrzymuje inną wartość odsetek. Zobrazujemy w poniższym przykładzie wycenę obligacji z dwuletnim terminem wykupu.
Np. inwestor, posiada obligacje o wartości nominalnej 100 zł, z dwuletnim terminem wykupu, odsetki płatne są raz w roku. Stopa procentowa na początek okresu wynosi WIBOR 12M tj. 0,25% plus 3 punkty procentowe marży, co znaczy, że odsetki po roku wyniosą: (0,25% + 3%)·100 zł = 3,25%·100 zł = 0,0325·100 zł = 3,25 zł.

Jeżeli płatność odsetek odbywa się dwa razy w roku, a termin wykupu wynosi trzy lata, przy czym cena emisyjna stanowi 90% wartości nominalnej 100 zł, (co daje 90 zł. za obligację), to oprocentowanie w skali roku jest równe stawce WIBOR 6M + 450 punktów bazowych, (100 punktów bazowych, to 1 punk procentowy).

Wówczas w kolejnych sześciu okresach poprzedzających wykup, oprocentowanie obligacji wyniosło: 8,44%, 7,68%, 6,86%, 6,24%, 6,10% i 5,88% w skali roku. Ponieważ odsetki naliczane są co pół roku, zatem powyższe oprocentowania należy podzielić przez dwa. Za każdy okres odsetki wynoszą kolejno: 4,22 zł., 3,84 zł., 3,43 zł., 3,12 zł., 3,05 zł., a odsetki za ostatnie 6 miesięcy, to 2,94 zł.

Zatem w dniu wykupu obligacji inwestor otrzyma 100 zł. (wartość nominalna obligacji) oraz 2,94 zł. odsetek. Więc przez 3 lata, od zainwestowania kwoty 90 zł., otrzyma on 120,60 zł. tj.: 100 zł. - wartość nominalna obligacji + 20,60 zł. odsetek. Zysk na inwestycji wyniósł 30,60 zł.

2.3.3. Obligacje zero kuponowe

Obligacje, w których nie występuje oprocentowanie. Nabywca obligacji kupuje obligacje poniżej wartości nominalnej, a zarobek inwestora to dyskonto, czyli różnica pomiędzy wartością nominalną, a ceną nabycia. Oznacza to, że inwestor nie otrzyma żadnej płatności, aż do terminu zapadalności, czyli do terminu wykupu[48].

Oto wzór na wycenę obligacji zerokuponowej:

$$P = \frac{N}{(1 + r)^n}$$

gdzie:

P – cena obligacji zerokuponowej,
N – wartość nominalna obligacji,
r – roczna stopa dochodu,
n – okres do wykupu obligacji (w latach).

Przykład 7

Przedmiotem transakcji jest obligacja z czteroletnim terminem wykupu. Wartość nominalna to 1.000 zł., roczna stopa dochodu wynosi 5%. Wycenić zerokuponową obligacje.

---

[48] J. Czekaj, (red. nauk..): *Rynki, instrumenty i instytucje finansowe,* PWN Warszawa 2017, s. 654.

Rozwiązanie:
Stosujemy wzór:

$$P = \frac{1000}{(1 + 5\%)^4} = \frac{1000}{1{,}05^4} = \frac{1000}{1{,}2155} = 822{,}71$$
$$P = 822{,}71$$

Odpowiedź: Obligacja została wyceniona na 822,71 zł., natomiast podając cenę w wartość nominalnej obligacji, wynosi ona 82,27% (w taki sposób podawane są ceny obligacji).

Kolejny przykład ilustruje tą sama obligacją, tylko z dwuletnim terminem wykupu:

$$P = \frac{1000}{(1 + 5\%)^2} = \frac{1000}{1{,}05^2} = \frac{1000}{1{,}1025} = 907{,}03$$
$$P = 907{,}03$$

Zatem wycena obligacji w tym przypadku wynosi 907,03 zł.

Przy obliczaniu wartość obligacji zerokuponowej, należy mieć na uwadze sposób, w jaki parametry danego papieru wartościowego wpływają na jego wartość. Im bardziej będzie odległy termin wykupu, tym niższa będzie wartość obligacji.

W przedstawionych przykładach zaprezentowane są podstawowe wiadomości z zakresu wyceny obligacji. Bardziej skomplikowane przykłady wymagają szczegółowych zagadnień matematycznych. Celem prezentacji jest przybliżenie czytelnikom, jak zainwestowane środki pieniężne przynoszą zyski w racjonalnym zarządzaniu finansami własnymi, czy firmowymi.

Zakończenie

Zaprezentowane w rozdziale rozważania teoretyczne przedstawiają podstawowe sposoby, obliczania odsetek w banku.

Są to :naliczenia odsetek:

- od depozytów,
- od kredytów,
- od obligacji.

Wszystkie w/w metody są zilustrowane rozwiązanymi przykładami rachunkowymi wraz z wyczerpującym komentarzem wyjaśniającym.

Czytelnik, po wnikliwej analizie rozdziału, będzie posiadał właściwą i dogłębną orientację na temat działalności banku w zakresie funkcjonowania depozytów i udzielania kredyt oraz inwestowania w obligacje.

Wiedza ta przyczyni się do racjonalnego gospodarowania posiadanymi środkami finansowymi, a zarazem do optymalnego funkcjonowania w otaczającej rzeczywistości.

Pytania i zadania do samodzielnego wykonania:

W celu zweryfikowania nabytej wiedzy i umiejętności proponuje się następujące pytania i zadania do samodzielnego rozwiązania.

P1. Jaka stopa procentowa określa maksymalny poziom oprocentowania kredytów udzielanych przez bank centralny, bankom komercyjnym?

P2. Która z metod spłat kredytu jest korzystniejsza dla kredytobiorcy i dlaczego?

P3. Spadek oprocentowania lokat o 100 punktów bazowych ile to procent?

P4. Co to jest obligacja?

P5. Wyjaśnić oznaczenia literowe i cyfrowe na obligacji EDO1023.

Zd.1. Pan Kowalski wpłacił do banku pieniądze na dwie 12 miesięczne lokaty po 10.000 zł. Oprocentowanie pierwszej lokaty 5% w stosunku rocznym z kapitalizacją kwartalną, drugiej zaś lokaty oprocentowanie 6% w stosunku rocznym, kapitalizacja po roku. Oblicz odsetki i porównaj opłacalność lokat.

Zd.2. Bank oferuje kredyt w wysokości 1.000 zł na 12 miesięcy, oprocentowany 2%, spłata jednorazowo na koniec kredytowania. Dodatkowe koszty, które zostaną doliczone do sumy zobowiązania to: ubezpieczenie 100 zł, prowizja 200 zł. Oblicz rzeczywistą roczna stopę oprocentowania tego kredytu.

Zd.3. Inwestor nabył dwuletnią obligację zerokuponową o wartości nominalnej 100 złotych za cenę 92 złotych. Oblicz stopę zwrotu uzyskaną przez inwestora w skali roku.

Zd.4. Jaką kwotę otrzyma inwestor ze sprzedaży 10-letniej obligacji skarbowej oprocentowanej 5% w skali roku, którą kupił po kursie równym wartości nominalnej, a po upływie 91 dni sprzedał po kursie równym 97 zł.

Streszczenie

Działalność operacyjna banku obejmuje różne formy usług bankowych. Funkcjonowanie tej instytucji jest wszechstronne i wielokierunkowe. W niniejszym rozdziale zostały scharakteryzowane jedynie wybrane podstawowe pojęcia, metody i techniki naliczania odsetek w banku. Narzędzia te w sposób istotny wykorzystują aparat matematyczny.

Niniejszy rozdział składa się z trzech podrozdziałów zawierających m. in. odpowiednie pojęcia i wzory matematyczne poparte przykładami naliczania odsetek od depozytów, kredytów i obligacji. Treści merytoryczne rozdziału dotyczą w/w form usług bankowych.

Podrozdział pierwszy dotyczy naliczania odsetek od depozytów. Zaprezentowane w nim są różne rodzaje depozytów i różne sposoby ich oprocentowania.

W rozdziale drugim omawiane jest oprocentowanie kredytów wraz z ich klasyfikacją. Ponadto przedstawione są różne metody ich spłacania.

Trzeci rozdział poświęcony jest wycenie obligacji. Dokonany również w nim został podział na różne ich typy.

Treści każdego podrozdziału wzbogacone zostały przykładami rachunkowymi ilustrującymi wcześniej zaprezentowany materiał rzeczowy. Przykłady te zawierają wyczerpujący komentarz wyjaśniający.

Wiadomości zawarte w niniejszym rozdziale służą wyposażeniu czytelnika w niezbędne umiejętności i kompetencje korzystania z usług bankowych.

Słowa kluczowe
stopa procentowa, oprocentowanie stałe lub zmienne, kapitalizacja odsetek, rachunki bankowe a'vista i terminowe, kredyty, raty malejące, raty annuitetowe, obligacje zerokuponowe, obligatariusz.

Mathematics at the bank

Summary

The operational activity of the bank involves different forms of bank service. The functioning of this institution in comprehensive and cross-curricular. In this chapter there has been only characterized a few basic concepts, the methods and the techniques of interest calculations at the bank. The mathematics is widely used for that.

This chapter consists of three subsections involving among other the appropriate concepts and mathematical formulas backed up with the examples of interest calculations from the deposits, credits and bonds. The substantive content of the chapter involves the indicated forms of bank service.

The first subsection concerns interest calculations from the deposit. There has been presented different kind of deposits and different ways of their bank rates.

In the second chapter there has been discussed the lending rated of credits including their classification. Furthermore, there has been presented different forms of their paying off.

The third chapter is devoted to the valuation of bonds. There has been made the division into their different types.

The content of every subsection has been enriched by computational examples illustrating formerly presented substantive material. These examples include the expository explaining comment.

The information included in this chapter serves for the acquiring the reader with crucial skills and competences of using the bank service.

Key words

Interest rate, fixed or floating interest rate, interest earned, a’vista and term bank accounts, credits, decreasing instalments, equal instalments, zero-coupon bonds, bond holder

Bibliografia

1. Czekaj J., (red. nauk..): *Rynki, instrumenty i instytucje finansowe,* PWN Warszawa 2017, s. 654.
2. Jajuga K., *Obligacje*, Fundacja edukacji rynku kapitałowego, Warszawa 2006, s. 14
3. Opolski K., *ABC bankowości*, Instytut Naukowo - Wydawniczy OLIMPUS CEiRB, Warszawa 1998, s. 89
4. Stępień K., *Bankowość – Podstawy,* Wydawnictwo i Handel Książkami „KaBe", Krosno 2015, s.115
5. Ustawa z dnia 29 sierpnia 1997 r. – Prawo bankowe (Dz.U. 2020 r., poz. 1896 z późn. zm.),
6. Ustawa z dnia 29 sierpnia 1997 r. – Ustawa o Narodowym Banku Polskim (Dz.U. 2020 r., poz. 2027 z późn. zm.).
7. Ustawa z dnia 29 września 1994 r. – Ustawa o rachunkowości (Dz.U. 2020 r., poz. 2122 z późn. zm.),
8. Ustawa z dnia 12 maja 2011 r. O kredycie konsumenckim (Dz.U. 2019 r., poz. 1083 z późn. zm.)
9. Ustawa z dnia 15 stycznia 2015 r. O obligacjach (Dz.U. 2015 r., poz. 238 z późn. zm.).
10. https://www.bankier.pl/wiadomosc/Matematyka-obligacji-1880750.html (dostęp: 18.12.2018 r.)
11. https://www.ekspander.pl/slownik/dyskonto

Łukasz Jabłoński, Bożena Zygmunt

Rozdział trzeci

ZASTOSOWANIE TEORII PROCENTU W OCENIE EFEKTYWNOŚCI PROCESÓW INWESTYCYJNYCH

Spis treści Rozdziału trzeciego

Wprowadzenie **121**
3.1. Okres zwrotu PP (ang. Payback Period) **123**
3.2. Zdyskontowany okres zwrotu **124**
3.3. Wartość bieżąca netto NPV (Net Present Value) **124**
3.4. Metoda IRR (ang. Internal Rate of Return, Wewnętrzna stopa zwrotu) **128**
3.5. Księgowa stopa zwrotu (ang. Accounting Rate of Return) **131**
3.6. Wskaźnik rentowności (ang. Profitability Index – PI) **131**
3.7. Analiza wrażliwości SA (ang. Sensitivity Analysis) **132**
3.8. Analiza progu rentowności BEP (ang. Break Even Point) **136**
Zakończenie **139**
Streszczenie **140**
Słowa kluczowe **140**
Summary **141**
Key words **141**
Bibliografia **142**

Wprowadzenie

Podstawowym zagadnieniem w podejmowaniu decyzji produkcyjnych, czy inwestycyjnych jest ekonomiczna efektywność. Powstaje pytanie, czy dane nakłady, założenia zostaną zrównoważone przez przyszłe korzyści. Aby odpowiedzieć na to pytanie, ważna jest wiedza o przyczynach i skutkach decyzji finansowych. Należy więc zbadać, jakie czynniki mogą mieć wpływ na opłacalność i jakie jest z tym związane ryzyko niepowodzenia. Aby to stwierdzić, potrzebne jest zastosowanie metod finansowych, tożsamych z metodami matematycznymi. W związku z czasem, który musi upłynąć od rozpoczęcia inwestycji do jej ekonomicznego zwrotu, stosujemy metody dyskontowe, w celu uwzględnienia wpływu zmian wartości pieniądza na przepływy pieniężne z inwestycji, aby podane wartości były realne, nie teoretyczne.[49]

W rozdziale są opisane różne metody: proste i bardziej skomplikowane. W doborze metod, zostało uwzględnione założenie, aby opisać wszystkie ważniejsze metody stosowane przy ocenie ekonomicznej efektywności projektów inwestycyjnych i pokrewnych, m. in. produkcyjnych - równocześnie nie wchodząc zbyt głęboko w modyfikacje metod, dzięki czemu opracowanie jest łatwiejsze w odbiorze.

Podstawową miarą, w oparciu o którą dokonuje się wyborów: przyjęcia lub odrzucenia projektów inwestycyjnych, jest efektywność ekonomiczna (finansowa). Aby dokonać właściwej decyzji, konieczne są właściwe dane i metody ich kalkulacji. Dane te dotyczą także prognoz finansowych, stąd zachodzi konieczność ich właściwego oszacowania. W rozdziale tym nie są uwzględnione sposoby szacowania danych, niezbędnych do przeprowadzenia analizy (koszt inwestycji, przyszłe przepływy pieniężne, zysk, lub strata). Przedstawione są natomiast metody analizy ww. danych finansowych.

Podstawowym pojęciem związanym z tematyką niniejszych rozważań jest analiza (łac. analysis, od stgr. ἀνάλυσις z ἀνά 'w górę' i λύω 'rozwiązywać') – rozkład na składniki (czynniki), zarówno w znaczeniu materialnym, jak i niematerialnym. Polega ona na wyodrębnieniu cech, właściwości i składników badanego przedmiotu lub zjawiska. Czynnością przeciwną do analizy jest synteza.

Ogólnie w analizie uwzględniamy na następujące metody: indukcje i dedukcję.

Indukcja polega na wyciąganiu wniosków ogólnych z wielu spostrzeżeń szczegółowych. Jest to metoda poznawcza nauk doświadczalnych.

Dedukcja - polega na wnioskowaniu od ogółu do szczegółu. Najpierw na podstawie znanych faktów formułuje się hipotezy, a następnie sprawdza ich zgodność z rzeczywistością. Hipotezy możemy też wyprowadzać z przesłanek ogólnych, kierując się logiką powiązań między pewnymi zjawiskami, a następnie sprawdzamy, czy fakty potwierdzają hipotezy.[50]

Wymienione wyżej metody służą do analizy, także jakościowej, my natomiast skupimy się na metodach analizy ilościowej, czyli opartej na wartościach liczbowych i wzorach matematycznych.

[49] M. Jerzemowska, *Analiza ekonomiczna w przedsiębiorstwie*, PWE, Warszawa 2018, s. 21.
[50] A. Żwirbla, *Metody badawcze analizy ekonomicznej*, WSHE, Włocławek 2001, s. 20.

Przedmiotem zainteresowania tego rozdziału są analizy, dotyczące procesów inwestycyjnych i związane z obliczeniami efektywności (opłacalności) konkretnych projektów inwestycyjnych.[51]

Przez projekty inwestycyjne, możemy rozumieć: inwestycje rzeczowe (budowa środków trwałych) lub wartości niematerialne i prawne (np. oprogramowania komputerowego), bądź inwestycje finansowe. Inwestycje materialne (i niematerialne), dotyczą powstawania nowych aktywów, które w przyszłości przyniosą korzyści ekonomiczne i posłużą w głównym obszarze działalności organizacji (działalność statutowa). Przez inwestycje finansowe, rozumiemy inwestycje w instrumenty finansowe (akcje, obligacje, bony skarbowe, opcje itp.), w celach osiągnięcia korzyści majątkowych lub zabezpieczenia przed ryzykiem np. walutowym, w obszarze działalności finansowej przedsiębiorstwa (w odróżnieniu od działalności zasadniczej – statutowej).

Zarówno inwestycje w aktywa, jak i finansowe charakteryzują się tymi samymi następującymi cechami:

1. określoną wartością inwestycji, stanowiącą zazwyczaj pierwszy i ujemny przepływ finansowy,
2. określonym czasowo początkiem ,
3. określonym okresem trwania procesu inwestycyjnego,
4. określonym horyzontem czasowym, w którym nastąpi osiąganie korzyści z inwestycji,
5. oszacowaną wartością dodatnich przepływów pieniężnych z danej inwestycji.

Podstawowymi pytaniami, na które należy dać odpowiedź, aby podjąć decyzje o rozpoczęciu inwestycji są:

1. czy inwestycja będzie rentowna, czy ujemne przepływy inwestycyjne zostaną zrównoważone przez dodatnie wpływy związane z korzystaniem z zakończonego procesu inwestycyjnego?
2. kiedy nastąpi zwrot zainwestowanej kwoty?

Oznacza to, że mamy do czynienia z dłuższymi (kilkuletnimi) okresami kalkulacyjnymi. W związku z tym musimy uwzględnić zmianę wartości pieniądza w czasie.[52] Jak wiemy z ekonomii, zjawiska pieniężne możemy liczyć w wartościach nominalnych (według cen z danego okresu), lub w wartościach realnych (z wyłączeniem zmian wywołanych czynnikiem inflacji).[53]

Analogicznie, w analizie opłacalności procesów inwestycyjnych, przy ustalaniu wyniku finansowego, musimy uwzględnić zmianę wartości pieniądza w czasie. Zmiany te będą nasilać się wraz z długością horyzontu czasowego oraz ze wzrostem wartości stopy procentowej, która może odzwierciedlać wartość procesów inflacyjnych, a także wyrażać koszt (w tym koszt utraconych korzyści) pieniądza.

Dla porównania wyników finansowych z różnych okresów czasu (lat), wykorzystuje się metodę dyskonta (dyskontowania), aby wyeliminować wpływ zmian wartości pieniądza w czasie na końcowy wynik operacji.

[51] N. Grzenkowicz, *Analiza finansowo-ekonomiczna jako narzędzie oceny kondycji przedsiębiorstwa*, WWZ 2013 s. 323.
[52] K. Piasecki, *E-matematyka wspomagająca ekonomię*, C. H. Beck, Warszawa 2013, s. 299.
[53] R. Mantegna, *Ekonofizyka wprowadzenie*, PWN, Warszawa 2014, s. 27.

Dla porządku, podane też są metody bazujące na innych zagadnieniach matematycznych tak, aby w miarę szeroko opisać tematykę analizy efektywności inwestycji.

3.1. Okres zwrotu PP (ang. Payback Period)

Metody oceny efektywności ekonomicznej inwestycji dzielimy na: proste i dyskontowe. Wszystkie zaprezentowane metody są zilustrowane przykładami rachunkowymi, gdzie występujące liczby oznaczają wielkości pieniężne np. w złotych lub w Euro.

Metody proste, polegają na obliczeniu momentu, w którym inwestycja się zwróci.[54] Poniższy przykład ilustruje taką metodę.

Przykład 1

Okres	Przepływ pieniężny (CF)	Saldo
0	-100 000	-100 000
1	20 000	- 80 000
2	30 000	- 50 000
3	50 000	0
4	60 000	60 000

Widzimy, że zwrot z inwestycji nastąpił w końcu trzeciego okresu. Możemy też wyliczyć dokładnie czas zwrotu (np. miesiąc), zakładając, że przepływy równo rozkładają się w poszczególnych okresach.

Metoda ta charakteryzuje się tym, że nie uwzględnia zmian wartości pieniądza w czasie.[55] Jeżeli okres szacowania efektywności finansowej wynosi kilka, albo kilkanaście lat, należy zawsze uwzględniać powyższą zmianę w czasie.

Okres zwrotu PP (ang. Payback Period) projektu inwestycyjnego jest miarą mówiącą o tym, po jakim okresie dodatnie przepływy generowane przez projekt, pokryją koszty jego uruchomienia i ewentualne przepływy ujemne.[56] Okres zwrotu jest to najmniejsza liczba N (liczba okresów), dla którego spełniona jest następująca nierówność:

$$\sum_{i+0}^{N} CF_i \geq 0$$

gdzie:

N – liczba okresów trwania projektu,

CF_i – przepływ gotówkowy w i-tym okresie (roku).

Metody dyskontowe, do których należy metoda NPV, uwzględniają wpływ czynnika, jakim jest czas na wartość poszczególnych przepływów pieniężnych. Metody te posiadają dwie podstawowe zmienne, które determinują wartość przepływów pieniężnych w poszczególnych okresach (np. latach):

[54] M. Herman, *Analiza i ocena nowych projektów inwestycyjnych*, Prawo i Finanse nr. 1-2/2003 s. 51.
[55] R. Pastusiak, *Ocena efektywności inwestycji*, CeDeWu, Warszawa 2003, s. 72.
[56] L. Czerwonka, *Zarządzanie finansami, wprowadzenie i przykłady*, C. H. Beck, Warszawa 2018, s. 126.

- czas (lata),
- stopa procentowa, która jest kosztem pieniądza.

Im wyższa stopa procentowa i (lub) dłuższy okres, tym większa wartość współczynnika korygującego wartość przepływów pieniężnych.

3.2. Zdyskontowany okres zwrotu

Metoda dyskontowanego okresu zwrotu koryguje poprzednią metodę (Payback Period) o zmianę wartości pieniądza w czasie, poprzez zdyskontowanie przepływów pieniężnych w poszczególnych okresach.[57]

Wyraża to wzór:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{CF_i}{(1+r)^i} \geq 0$$

gdzie:

N – liczba okresów trwania projektu,
CF_i – przepływ gotówkowy w i-tym okresie (roku),
r – stopa procentowa (stopa dyskontowa).

Dzięki tej metodzie wyznaczenie okresu, w którym nastąpi moment zwrotu z inwestycji, urealniamy o koszt pieniądza. Tym sposobem przechodzimy od metod prostych do technik związanych z wykorzystaniem dyskonta.

3.3. Wartość bieżąca netto NPV (Net Present Value)

Wartość bieżąca netto (NPV) wiąże się ściśle z teorią procentu matematycznego,[58] którego podstawowymi działaniami jest procent: prosty i złożony, oraz metoda jemu przeciwna, czyli dyskonto (także proste i złożone). Metoda NPV wywodzi się z metody dyskonta.[59] Idea tej metody polega na korygowaniu przepływów pieniężnych, w poszczególnych okresach o wartość dyskonta, czyli dzielimy je przez współczynnik dyskontowy:

$$D = \frac{CF}{(1+r)^i}$$

gdzie:

D – współczynnik dyskontowy dla CF,
CF – Cash Flow (przepływ pieniężny),
r – stopa procentowa (rate),
i – liczba okresów (lat).

Ww. metodę ilustruje następujący przykład.

---

[57] N. Grzenkowicz, *Analiza finansowo-ekonomiczna jako narzędzie oceny kondycji prze*dsiębiorstwa, WWZ 2013 s. 325.
[58] A. Ostoja-Ostaszewski, *Matematyka w ekonomii*, PWN 2006, s. 90.
[59] R. Pastusiak, *Ocena efektywności inwestycji*, CeDeWu, Warszawa 2003, s. 74

Przykład 2

I - okresy	Przepływ pieniężny	r – stopa procentowa	Współczynnik dyskontowy	Zdyskontowany przepływ pieniężny
0	-670000	2,50%	1,00	-670 000,00
1	100000	2,50%	0,98	97 560,98
2	200000	2,50%	0,95	190 362,88
3	220000	2,50%	0,93	204 291,87
4	180000	2,50%	0,91	163 071,12
5	130000	2,50%	0,88	114 901,06
Suma	**160000**			**100187,8987**

W tabeli okresy (dla ułatwienia zakładamy, że 1 okres, to rok), oznaczone są cyframi od 0 do N, przy czym okres 0 oznacza okres inwestycji (przepływ ujemny, initial outlay), zaś następne cyfry oznaczają kolejne okresy, w których następuje stopniowo zwrot z inwestycji - są to przepływy dodatnie.[60]

Jest to modelowe uproszczenie, w rzeczywistości można spotkać przepływy dodatnie i ujemne w różnych okresach czasu. Powyższy przykładowy model został przyjęty dla klarowności przekazu. Pierwszy okres jest celowo zaznaczony jako nie 1 lecz 0, ze względu na fakt, że jako pierwszy nie podlega dyskontowaniu (współczynnik dyskontowy wynosi 1), co wyjaśnione jest w dalszej części materiału.

Mamy dane z 6 okresów (od 0 do 5), z określonymi przepływami pieniężnymi (CF). Stopa procentowa wynosi 2,5% dla wszystkich okresów.

Teraz współczynnik dyskontowy wyraża się następującym wzorem, gdzie CF = 1:

$$D = \frac{1}{(1+r)^i}$$

Zdyskontowany przepływ pieniężny powstał z pomnożenia CF przez współczynnik dyskontowy, właściwy dla danego okresu. Suma tych przepływów daje wartość NPV.[61]

Należy zauważyć, że suma niezdyskontowanych CF (kolumna 2) różni się od sumy zdyskontowanych CF (kolumna 5). Tak działa dyskonto. Obserwując jego wartość (kolumna 4), widzimy jak wartość pieniądza zmienia się wraz z upływem czasu. Oczywiście drugim czynnikiem wpływającym na wielkość współczynnika dyskontowego jest stopa procentowa, która im wyższa, tym bardziej koryguje (in minus) wartość przepływu pieniężnego.[62] Należy zwrócić uwagę na oznaczenie pierwszego okresu jako „0” a nie „1”. Dzięki temu wartość dyskonta dla okresu 0 jest równa 1, gdyż w mianowniku ułamka mamy wartość podniesioną do potęgi okresu (czyli 0), przez co wartość mianownika, w tym przypadku daje wartość 1.

Wartość NPV, jak widać z Przykładu 2, jest sumą zdyskontowanych przepływów pieniężnych, co możemy ogólnie zapisać następującą formułą:

$$NPV = \sum_{i=1}^{N} \frac{CF_i}{(1+r)^i} - CF_0$$

[60] R. Pastusiak, *Ocena efektywności inwestycji*, CeDeWu, Warszawa 2003, s. 75.
[61] K. Piasecki, *E-matematyka wspomagająca ekonomię*, C. H. Beck, Warszawa 2013, s. 312.
[62] M. Herman, *Analiza i ocena nowych projektów inwestycyjnych*, Prawo i Finanse nr. 1-2/2003 s. 52.

gdzie:

NPV – wartość bieżąca netto,
CF_i – Cash Flow (przepływ pieniężny), w kolejnym okresie,
CF_0 – Cash Flow (przepływ pieniężny ujemny), w okresie inwestycji,
N – liczba okresów,
r – stopa procentowa (rate),
i – liczba okresów (lat).

Wartość CF_0 odejmujemy bez dyskontowania, gdyż jest to pierwszy okres. Można, zmieniając zakres sumowania, wzór ten zapisać łącznie z okresem CF_0 w sposób następujący:

$$\mathrm{NPV} = \sum_{i=0}^{N} \frac{\mathrm{CF_i}}{(1+\mathrm{r})^{\mathrm{i}}}$$

gdzie poszczególne wielkości są wyjaśnione powyżej.

Interpretacja wyniku NPV jest prosta, gdyż oznacza, że każda jej wartość dodatnia, wyznacza poziom opłacalności inwestycji. Oczywiście im wartość ta jest wyższa, tym opłacalność jest większa.[63]

W Przykładzie 2. otrzymaliśmy wartość NPV równą: 100 187,90, co wskazuje na wysoką efektywność finansową inwestycji.

W kolejnym, analogicznym przykładzie uwzględniona jest wyższa stopa procentowa.

Przykład 3

i	Przepływ pieniężny	r	Współczynnik dyskontowy	Zdyskontowany przepływ pieniężny
0	-670000	10,00%	1,00	-670 000,00
1	100000	10,00%	0,91	90 909,09
2	200000	10,00%	0,83	165 289,26
3	220000	10,00%	0,75	165 289,26
4	180000	10,00%	0,68	122 942,42
5	130000	10,00%	0,62	80 719,77
Suma	**160000**			**-44 850,20**

W porównaniu z Przykładem 2, zmieniła się tu tylko wartość stopy procentowej z 2,5% na 10%. Otrzymany teraz wynik ujemny NPV, wskazuje na nieopłacalność inwestycji. Należy zauważyć, że prosty okres zwrotu (kolumna 2), pokazuje wartość dodatnią.

Ważnym czynnikiem przy obliczaniu wartości NPV,[64] jest właściwe określenie wartości stopy procentowej, jako kosztu pieniądza. Może to być przykładowo oprocentowanie bonów skarbowych, plus tzw. premia za ryzyko, co stanowi tzw. koszt utraconych korzyści. Problem szacowania stóp procentowych, jako kosztu pieniądza, jest bardzo ważny, jednak wykracza poza tematykę niniejszego rozdziału.

[63] L. Czerwonka, *Zarządzanie finansami, wprowadzenie i przykłady*, C. H. Beck, Warszawa 2018, s. 128.
[64] K. Piasecki, *E-matematyka wspomagająca ekonomię*, C. H. Beck, Warszawa 2013, s. 312.

Metoda NPV przedstawia wynik w postaci wartości absolutnych. Przez to nie można jej zastosować do prostego porównania różnych sposobów wykorzystania kapitałów. Aby móc to uczynić, należy przekształcić NPV do postaci następującego wskaźnika:

$$\mathrm{NPVR} = \frac{\mathrm{NPV}}{\mathrm{PVI}} \geq 0$$

gdzie:

NPVR – wskaźnik NPV (Net Present Value Ratio),
NPV – wartość bieżąca netto,
PVI - bieżąca wartość wymaganego nakładu inwestycyjnego.

W Przykładzie 2. wskaźnik ten wynosi: 100 187,90 / 670 000 = 0,15, co można zinterpretować następująco: z jednej złotówki nakładu, otrzymamy 15 groszy zysku.

Wartość NPV jest trudna do wyliczenia za pomocą zwykłego kalkulatora. Właściwym rozwiązaniem jest wykorzystanie kalkulatora finansowego, który ma wbudowaną funkcję NPV lub, co jest znacznie wygodniejsze, należy zastosować arkusz kalkulacyjny na komputerze. Wszystkie arkusze posiadają wbudowaną formułę NPV.[65]

Z powodów praktycznych, do wyliczenia NPV z pomocą formuły w arkuszu kalkulacyjnym, do danych warto zaznaczyć przepływy dodatnie (od 1 do N), a od tak otrzymanej wartości NPV odjąć wartość nakładu inwestycyjnego z okresu „0”. W przeciwnym przypadku formuła NPV zdyskontuje także okres „0”, zniekształcając wynik końcowy.

Metoda wartości bieżącej netto zawiera pewne uproszczenia metodologiczne, które można minimalizować poprzez określone modyfikacje tej metody.

Pierwszą modyfikacją jest dodanie założenia, że stopa reinwestycji dodatnich przepływów pieniężnych (okresy 1 – N) ma być różna od przyjętej stopy dyskontowej. [66] Zmodyfikowana w ten sposób metoda NPV wyraża się następująco:

$$\mathrm{MNPV} = \frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}(1+\mathrm{rei})^{\mathrm{N}-1}}{(1+\mathrm{r})^{\mathrm{N}}} - \mathrm{CF}_0$$

gdzie:

MNPV – zmodyfikowana stopa zwrotu,
r – stopa procentowa,
rei – stopa reinwestycji,
N – liczba okresów,
CF_0 – przepływ pieniężny inwestycyjny.

[65] https://econopedia.pl/fp/budzetowanie/npv-wartosc-biezaca-netto/ (dostęp: 12.04.2021 r.).
[66] M. Herman, *Analiza i ocena nowych projektów inwestycyjnych*, Prawo i Finanse nr. 1-2/2003 s. 53.

Aby powyższe założenie miało sens, należy przepływy otrzymywane w kolejnych okresach skapitalizować stopą reinwestycji na koniec czasu trwania projektu. Następnie są one zsumowane (licznik ułamka), a z kolei ta suma skapitalizowanych przepływów jest dyskontowana (mianownik ułamka).

Reasumując, modyfikacja ta polega nie tylko na zastosowaniu dwóch różnych wartości stóp procentowych (dyskontującej i reinwestycji), ale także na połączeniu dwóch metod (kapitalizacji i dyskontowania).

Kolejną modyfikacją metody NPV, jest uwzględnienie zmian wartości stóp procentowych w poszczególnych okresach. Metoda NPV uwzględniała jedną wartość stopy dyskontowej dla całego okresu inwestycji. Uwzględnienie różnych wartości stóp procentowych w różnych okresach pozwala na dostosowanie modelu do zmiany kształtu krzywej rentowności inwestycji (poprzez dostosowanie stóp procentowych w poszczególnych okresach czasu).

Jeżeli każdy kolejny okres ma przyporządkowaną inną stopę procentową, to można dokonać następującego uogólnienia wyrażonego wzorem:

$$\mathrm{NPV} = \frac{\mathrm{CF}_1}{(1+\mathrm{r}_1)} + \frac{\mathrm{CF}_2}{(1+\mathrm{r}_1)\times(1+\mathrm{r}_2)} +$$

$$+ \frac{\mathrm{CF}_3}{(1+\mathrm{r}_1)\times(1+\mathrm{r}_2)\times(1+\mathrm{r}_3)} + \cdots + \frac{\mathrm{CF}_N}{(1+\mathrm{r}_1)\ldots(1+\mathrm{r}_N)} - \mathrm{CF}_0$$

gdzie poszczególne symbole zostały wyjaśnione powyżej.

Różnica między niezmodyfikowaną metodą NPV, a zmodyfikowaną polega z jednej strony na zastąpieniu jednej stopy dyskontowej, wieloma różnymi wartościami stóp procentowych odpowiadających liczbie okresów, a z drugiej strony podnoszenie (w mianowniku) do potęgi stopy procentowej, odpowiadającej numerowi okresu, jest zastąpione iloczynami stóp procentowych obowiązujących w danym okresie i w okresach poprzednich.

3.4. Metoda IRR (ang. Internal Rate of Return, Wewnętrzna stopa zwrotu)

Metoda IRR – jest to dyskontowa stopa procentowa (r), przy której wartość NPV dla danej inwestycji wynosi 0 (zero). [67] Inaczej mówiąc, inwestycja według metody NPV w danym projekcie jest na granicy opłacalności. Można to opisać w języku matematyki, jako wyznaczanie wartości stopy procentowej, dla której funkcja NPV posiada miejsce zerowe.

Patrząc od strony matematycznej, możemy analizować różne zachowanie funkcji NPV: może ona w skrajnych sytuacjach nie posiadać miejsc zerowych, lub mieć ich wiele. Tych jednak analiz nie będziemy tutaj prowadzić.

Warto zauważyć, że w zależności od tego, jak kształtują się przepływy pieniężne, w sensie wielokrotnej zmiany znaku (z przepływów dodatnich do ujemnych i na odwrót),

[67] K. Piasecki, *E-matematyka wspomagająca ek*onomię, C. H. Beck, Warszawa 2013, s. 317.

możemy mieć do czynienia z dwoma, lub większą liczbą miejsc zerowych, a więc liczbą mnogą stopy IRR. Dalsze rozważania dotyczą typowego przypadku, jakim jest: pierwszy przepływ ujemny, a kolejne dodatnie.

Metoda IRR jest ściśle związana z metodą NPV i wymaga obliczenia wartości stopy procentowej dyskontowej, dla której NPV = 0. Odpowiada ona na pytanie, przy jakiej stopie procentowej inwestycja jest opłacalna.

IRR to stopa rentowności danego przedsięwzięcia. Jest to również stopa graniczna, ukazująca najwyższą stopę zwrotu z danego projektu, która może zostać zaakceptowana przez inwestora.[68]

Można to zapisać poniższym wzorem:

$$NPV = \sum_{i=1}^{N} \frac{CF_i}{(1 + IRR)^n} - I_0 = \sum_{i=0}^{N} \frac{CF_i}{(1 + IRR)^n} = 0$$

gdzie:

NPV – wartość bieżąca netto,
CF_i – przepływy pieniężne w kolejnych okresach,
I_0 – przepływ inwestycyjny (ujemny),
n – liczba okresów w których występują przepływy,
IRR – wewnętrzna stopa zwrotu (dyskontowa).

Z powyższego wzoru wynika fakt, że wyznaczenie IRR nie jest zadaniem łatwym.[69] Mamy tu do czynienie z wielomianem, który wielokrotnie (w zależności od liczby okresów) podnoszony jest do i-tej potęgi. Dlatego też, nie da się przekształcić tego wzoru w taki sposób, aby IRR znalazło się po lewej stronie równania. Obliczenie IRR jest możliwe przy zastosowaniu np. algorytmu Newtona-Raphsona. [70]
W celu przybliżonego obliczenia IRR można zastosować następujący wzór:

$$IRR \approx i_1 + \frac{NPV_1 \times (i_2 - i_1)}{NPV_1 + |NPV_2|}$$

gdzie:

IRR – wewnętrzna stopa zwrotu,
i_1 – stopa procentowa, dla której NPV przyjmuje wartość ujemną, bliską zero,
i_2 – stopa procentowa, dla której NPV przyjmuje wartość dodatnią, bliską zeru,
NPV_1 – wartość NPV, wyliczona dla stopy procentowej i_1,
NPV_2 – wartość NPV, wyliczona dla stopy procentowej i_2.

Uwzględniamy we wzorze w mianowniku: moduł liczby NPV_2 , czyli: $|NPV_2|$, gdyż chodzi o wartość dodatnią tej liczby, podczas gdy jest ona zawsze wartością ujemną bliską zeru.

---

[68] R. Pastusiak, *Ocena efektywności inwestycji*, CeDeWu, Warszawa 2003, s. 77.
[69] N. Grzenkowicz, *Analiza finansowo-ekonomiczna jako narzędzie oceny kondycji przedsiębiorstwa*, WWZ 2013 s. 322.
[70] K. Piasecki, *E-matematyka wspomagająca ekonomię*, C. H. Beck, Warszawa 2013, s. 317.

Powyższą metodę ilustruje Przykład 4.

Przykład 4

Ponieważ będziemy obliczać NPV dla oszacowanej wartości stopy procentowej IRR, należy więc zacząć od ustalenia wartość przepływów pieniężnych (tabela):

Argument	Wartość
Inwestycja początkowa	-400000
Przepływ nr 1	80000
Przepływ nr 2	90000
Przepływ nr 3	100000
Przepływ nr 4	90000
Przepływ nr 5	80000

Drugim krokiem, do szacowania IRR,[71] jest obliczenie wartości NPV (tabela) dla różnych stóp procentowych r (od 1 do 10%), dzięki czemu widzimy, które wartości są bliskie zeru:[72]

Wymagana stopa %	NPV
1%	27 099,07 zł
2%	14 773,35 zł
3%	2 990,24 zł
4%	-8 280,68 zł
5%	-19 067,79 zł
6%	-29 397,61 zł
7%	-39 294,91 zł
8%	-48 782,87 zł
9%	-57 883,18 zł
10%	-66 616,17 zł

Z powyższej tabeli wnioskujemy, że szukana IRR będzie w przedziale pomiędzy 3%, a 4%.

Podstawiając do wzoru otrzymujemy:

$$\text{IRR} \approx 5\% + \frac{19\,067{,}79\,(6\% - 5\%)}{19\,067{,}79 + |-29\,397{,}61|} = 3{,}1541\%$$

Dla tak obliczonej stopy IRR, NPV będzie wynosić:

$$\begin{aligned}\text{NPV}_{r=3,1541} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{CF_i}{(1+r)^i} - CF_0 \\ &= \frac{80\,000}{(1+3{,}1541)^1} + \frac{90\,000}{(1+3{,}1541)^2} + \frac{100\,000}{(1+3{,}1541)^3} + \frac{90\,000}{(1+3{,}1541)^4} \\ &+ \frac{80\,000}{(1+3{,}1541)^5} = 1\,220{,}72\end{aligned}$$

[71] K. Piasecki, *E-matematyka wspomagająca ekonomię*, C. H. Beck, Warszawa 2013, s. 231.
[72] https://warsztatanalityka.pl/irr-wewnetrzna-stopa-zwrotu/ (dostęp: 17.04.2021 r.).

Jak widać na powyższym przykładzie, szacowanie daje przybliżony wynik, lecz nie dokładnie 0. W zależności od wartości przepływów, IRR (wg tej metody) będzie przybierało mniejsze lub większe wartości, ale zawsze bliskie zeru.

Na dokładne obliczenie wartości stopy procentowej IRR pozwala, wbudowana w arkusz kalkulacyjny formuła finansowa IRR, która jest prosta w zastosowaniu.[73] Należy wówczas zaznaczyć, wszystkie przepływy w okresie inwestycji, także przepływ ujemny, a wtedy wartość IRR zostanie obliczona automatycznie. Tym sposobem, w powyższym przykładzie otrzymamy, korzystając z funkcji Excela: IRR = 3,2610%, dla której wartość NPV wynosi dokładnie 0.

3.5. Księgowa stopa zwrotu (ang. Accounting Rate of Return)

Wskaźnikiem informującym o średnim zysku w stosunku do średniej wartości inwestycji jest księgowa stopa zwrotu.

Wcześniejsze wskaźniki porównywały poziom inwestycji do przepływów pieniężnych w okresach, ta metoda bierze do porównania zysk netto. Tak więc opieramy się na wartości nominalnej, nie realnej, jak w przypadku metody np. NPV, co stanowi jej ograniczenie.

Metoda księgowej stopy zwrotu (ARR), w swej konstrukcji nie bierze pod uwagę zmianę wartości pieniądza w okresie inwestycji. Wskaźnik informuje o tym, ile wynosi średni zysk netto, z uśrednionej wartości inwestycji. Ze względu na ograniczenie metodologiczne można go stosować jedynie pomocniczo.[74]

Oto zapis metody ARR:

$$\mathrm{ARR} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N} \mathrm{ZN}_i}{\mathrm{N}}}{\frac{\mathrm{WPI} + \mathrm{WKI}}{2}}$$

gdzie:

ARR - księgowa stopa zwrotu,
N – liczba okresów w projekcie,
ZN – zysk netto w i-tym okresie,
WPI – wartość początkowa inwestycji,
WKI – wartość końcowa inwestycji.

3.6. Wskaźnik rentowności (ang. Profitability Index – PI)

Wskaźnik rentowności (PI) jest metodą, która nawiązuje (bazuje) na wartości NPV. Różnica jedna dotyczy sposobów prezentacji wyniku, który zamiast postaci bezwzględnej ukazuje wartość procentową. Aby jednak tą metodę zastosować, należy wcześniej obliczyć wartość NPV.[75]

---

[73] L. Czerwonka, *Zarządzanie finansami, wprowadzenie i przykłady*, C. H. Beck, Warszawa 2018, s. 133.
[74] L. Czerwonka, *Zarządzanie finansami, wprowadzenie i przykłady*, C. H. Beck, Warszawa 2018, s. 127.
[75] M. Herman, *Analiza i ocena nowych projektów inwestycyjnych*, Prawo i Finanse nr. 1-2/2003 s. 53.

Struktura tej metody przedstawia się następująco:

$$PI = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{CF_i}{(1+r)^i}}{CF_0}$$

gdzie:

PI – indeks rentowności,
CF_i – Cash Flow (przepływ pieniężny), w kolejnym okresie,
CF_0 – Cash Flow (przepływ pieniężny ujemny), w okresie inwestycji,
N – liczba okresów,
r – stopa procentowa (rate),
i – liczba okresów (lat).

Tak więc, jest to relacja zdyskontowanych przepływów pieniężnych od okresu 1 do N (dodatnich), w stosunku do wartości przepływu inwestycyjnego (ujemnego).ć[76] Wskaźnik ten może pociąga następujące wartości:

- ✓ jeśli PI < 1, to projekt należy odrzucić, gdyż realizacja projektu jest nierentowna,
- ✓ jeśli PI = 1, to projekt może zostać zaakceptowany (po przeprowadzeniu bardziej szczegółowej analizy), gdyż koszt kapitału zostanie pokryty, jednak nie uzyska się dodatkowej premii, dzięki której wzrosłaby wartość firmy realizującej projekt. Jeżeli koszt kapitału traktowany jest jako koszt utraconych korzyści, wówczas można stwierdzić, że projekty: rozpatrywany i projekt alternatywny przynoszą takie same korzyści,
- ✓ jeżeli PI > 1, to projekt może zostać zaakceptowany.

Wzór na PI można uogólnić, na przypadek kiedy w projekcie mamy przepływy ujemne i dodatnie:

$$PI = \frac{\sum_{i=0}^{N} \frac{CF_i^{(+)}}{(1+r)^i}}{\sum_{i=0}^{N} \frac{CF_i^{(-)}}{(1+r)^i}}$$

gdzie użyte symbole oznaczają jak wyżej,
zaś suma: w liczniku oznacza zdyskontowane przepływy pieniężne dodatnie (CF^+), a w mianowniku ujemne (CF^-).

3.7. Analiza wrażliwości SA (ang. Sensitivity Analysis)

W poprzednich podrozdziałach omówione zostały metody oceny efektywności ekonomicznej projektów, takie jak NPV i IRR. Analiza wrażliwości pozwala dodatkowo zbadać, jak zmienia się wartość NPV, czy IRR,[77] w zależności od zmian czynników towarzyszących.

---

[76] R. Pastusiak, *Ocena efektywności inwestycji*, CeDeWu, Warszawa 2003, s. 81.
[77] K. Piasecki, *E-matematyka wspomagająca eko*nomię, C. H. Beck, Warszawa 2013, s. 231.

Po pierwsze otrzymujemy odpowiedź na pytanie, czy zmiana danego czynnika ma wpływ na wartość NPV (lub inne, np. zysk), po drugie jaka jest ta zależność: dodatnia, czy ujemna i jaka jest jej siła. Możemy też zidentyfikować te czynniki. Czynnikami tymi mogą być np. zmiany przychodów, kosztów, cen itp.

Metoda ta nadaje się do tworzenia różnych wariantów projektów inwestycyjnych oraz pozwala dostrzec ich szanse i zagrożenia. Jest ona uszczegółowieniem metod NPV i IRR.

Analiza wrażliwości jest modelem statycznym, ma więc swoje ograniczenia.

Podstawą metody SA (oprócz wyliczenia wartości NPV i IRR) jest ustalenie współczynnika wrażliwości, związanego z kątem nachylenia krzywej będącej wykresem funkcji NPV, przy różnych wartościach zmiennej.

Współczynnik wrażliwości można zapisać jako:

$$\mathrm{SA} = \frac{\dfrac{\mathrm{NPV}_2 - \mathrm{NPV}_1}{\mathrm{NPV}_1}}{\dfrac{\mathrm{Z}_2 - \mathrm{Z}_1}{\mathrm{Z}_1}}$$

gdzie:

SA – współczynnik wrażliwości,

Z_i – wartość i-tej zmiennej,

NPV_i – wartość NPV przy i-tej wartości zmiennej Z_i, dla i=1, i=2.

W liczniku ułamka mamy procentową zmianę wartości NPV, a w mianowniku procentową zmianę czynnika Z.[78] Wskaźnik ten informuje, jaki wpływ ma procentowa zmiana czynnika Z na procentową zmianę NPV.

Ponieważ wartości czynników sprawczych Z, w porównaniu do NPV mogą być wyrażone w różnej skali, obliczone wartości powinny być wyrażone w procentach, nie w wartościach bezwzględnych.[79]

Interpretacja współczynnika wrażliwości SA jest następująca:

- ✓ SA = 0 oznacza, że wartość NPV jest niezależna od badanej zmiennej,
- ✓ SA < 0 oznacza, że zmienna ma wpływ na wartość NPV, jednak kierunek zmian czynnika Z i NPV jest przeciwny (wzrost jednego powoduje spadek drugiego),
- ✓ SA > 0 oznacza, że zmienna ma wpływ na wartość NPV, ale kierunek zmian czynników: Z i NPV jest taki sam.

Analizę wrażliwości SA ilustruje Przykład 5.

Przykład 5

Rozpatrzymy inwestycję o wartości 5 mln zł., przy następujących założeniach zmiennych kształtujących oczekiwane przepływy pieniężne z przedsięwzięcia w okresie kolejnych 5 lat jego eksploatacji:

- wielkość rocznej sprzedaży - 30 000 szt. wyrobu;
- cena jednostkowa sprzedaży - planowana na rok pierwszy w wysokości 300 zł.; w kolejnych latach wzrost ceny w tempie inflacji 3% rocznie;

[78] K. Mikołajczyk, *Narzędzia analizy danych finansowych w programie Ms Excel*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków, 2014, s. 79.

[79] N. Grzenkowicz, *Analiza finansowo-ekonomiczna jako narzędzie oceny kondycji przedsiębiorstwa*, WWZ 2013 s. 323.

- koszt zmienny - 65% wartości sprzedaży netto w każdym roku;
- koszty stałe ogólne (bez amortyzacji) - planowane na rok pierwszy w wysokości 1 000 000 zł,; w kolejnych latach wzrost ich wartości w tempie inflacji 6% rocznie;
- amortyzacja inwestycji liniowa, stopa amortyzacji 10% rocznie;
- nakłady na kapitał obrotowy netto - planowane w momencie realizacji inwestycji na 700 000 zł,; w kolejnych latach stanowić będą 10% prognozowanej wartości sprzedaży;
- stopa podatku dochodowego - przyjęto stopę równą 19%;
- oczekiwana stopa zwrotu z kapitałów zaangażowanych w przedsięwzięcie: 15% rocznie.

Na podstawie powyższych oczekiwanych wartości przygotowano zestawienie planowanych przepływów pieniężnych z inwestycji - tabela poniżej.

Zestawienie planowanych przepływów pieniężnych z inwestycji (dane w zł)

Pozycja	Rok 0	Rok 1	Rok 2	Rok 3	Rok 4	Rok 5
Produkcja roczna	0,00	30000,00	30000,00	30000,00	30000,00	3000,00
cena jednostkowa	0,00	300,00	309,00	318,27	327,82	337,65
Sprzedaż roczna	0,00	9000000,00	9270000,00	9548100,00	9834543,00	10129579,29
Sprzedaż roczna	0,00	5850000,00	6025500,00	6206265,00	6392452,95	6584226,54
Koszt zmienny	0,00	1000000,00	1030000,00	1060900,00	1092727,00	1125508,81
Koszty stałe (bez amortyzacji)	0,00	300000,00	300000,00	300000,00	300000,00	300000,00
Zysk operacyjny EBIT	0,00	1850000,00	1914500,00	1980935,00	2049363,05	2119843,94
Podatek dochodowy	0,00	351500,00	363755,00	376377,65	389378,98	402770,35
Zysk po opodatkowaniu	0,00	1498500,00	1550745,00	1604557,35	1659984,07	1717073,59
Amortyzacja CF	0,00	300000,00	300000,00	300000,00	300000,00	300000,00
Zapotrzebowanie KON	700000,00	900000,00	927000,00	954810,00	983454,30	1012957,93
Zmiana KON		200000,00	27000,00	27810,00	28644,30	29503,63
Inwestycja	5000000,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Wartość umorzeniowa inwestycji		-	-	-	-	3500000,00
CF netto	-5700000,00	1598500,00	1823745,00	1876747,35	1931339,77	5487569,96

Dla powyższych danych obliczymy wartość NPV i IRR:

NPV dla powyższych przepływów pieniężnych, w okresie 0 – 5, z uwzględnieniem 15% stopy procentowej wynosi: 2 135 546,98 zł. co jest bardzo dobrym wynikiem.

IRR natomiast wynosi 27,07 %, co stanowi nadwyżkę 12,07% ponad oczekiwaną stopę zwrotu (15%).

Aby obliczyć współczynnik wrażliwości musimy dokonać zmiany wybranego parametru Z, następnie obliczyć wartości NPV i IRR, z uwzględnieniem tej zmiany.[80] Przykładowo może to być wzrost lub spadek wartości kosztów stałych, lub zmiennych, zmiana wartości przychodów, cen itp. Można też zbadać jak zmiana różnych czynników sprawczych wpływa na rentowność inwestycji. Ważne jest, aby dane czynniki sprawcze miały związek ze zmianą przepływów pieniężnych, czyli w efekcie wpływały na zmianę NPV i IRR. W przeciwnym wypadku wskaźnik wrażliwości wykaże wartość zerową.[81]

Powyższy przykład zmodyfikujemy następująco:
ma miejsce wzrost poziomu kosztów zmiennych w projekcie o 10% w stosunku do założonych 65%, czyli nastąpił wzrost kosztów do 75% wartości sprzedaży netto.

W wyniku tej zmiany otrzymujemy następujące wartości:

Pozycja	**Rok 0**	**Rok 1**	**Rok 2**	**Rok 3**	**Rok 4**	**Rok 5**
Produkcja roczna	0,00	30 000,00	30000,00	30000,00	30000,00	30000,00
cena jednostkowa	0,00	300,00	309,00	318,27	327,82	337,65
Sprzedaż roczna	0,00	9000000,00	9270000,00	9548100,00	9834543,00	10129579,29
Sprzedaż roczna	0,00	6750000,00	6952500,00	7161075,00	7375907,25	7597184,47
Koszt zmienny	0,00	1000000,00	1030000,00	1060900,00	1092727,00	1125508,81
Koszty stałe (bez amortyzacji)	0,00	300000,00	300000,00	300000,00	300000,00	300000,00
Zysk operacyjny EBIT	0,00	950000,00	987500,00	1026125,00	1065908,75	1106886,01
Podatek dochodowy	0,00	180500,00	187625,00	194963,75	202522,66	210308,34
Zysk po opodatkowaniu	0,00	769500,00	799875,00	831161,25	863386,09	896577,67
Amortyzacja CF	0,00	300000,00	300000,00	300000,00	300000,00	300000,00
Zapotrzebowanie KON	700000,00	900000,00	927000,00	954810,00	983454,30	1012957,93
Zmiana KON	0,00	200000,00	27000,00	27810,00	28644,30	29503,63
Inwestycja	5000000,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Wartość umorzeniowa inwestycji		-	-	-	-	3500000,00
CF netto	-5 700000,00	869500,00	1072875,00	1103351,25	1134741,79	4667074,04

Dla powyższych danych obliczymy wartość NPV i IRR.

- ✓ NPV dla powyższych przepływów pieniężnych, w okresie 0 – 5, z uwzględnieniem 15% stopy procentowej wynosi: - 435 041,11 zł. co świadczy o nieopłacalności inwestycji przy założonych warunkach.
- ✓ IRR natomiast wynosi 12,47 %, a tym samym nie pokrywa oczekiwanej stopy zwrotu.

Mając powyższe dane, możemy zbadać dynamikę wzrostu kosztów zmiennych i zmianę wartości NPV wywołaną innymi kosztami zmiennymi oraz porównać je ze sobą.[82]

Obliczamy wskaźnik wrażliwości wykorzystując odpowiedni wzór:

$$\mathrm{SA} = \frac{\dfrac{-438041{,}11 - 2\,135\,546{,}98}{2\,135\,546{,}98}}{\dfrac{12{,}47 - 27{,}07}{27{,}07}} = -\,2{,}23$$

[80] I. Staniec, *Metody ilościowe w zarządzaniu organizacją, poradnik z wykorzystaniem arkusza kalkulacyjnego Excel*, C. H. Beck, Warszawa 2013, s. 125.
[81] R. Pastusiak, *Ocena efektywności inwestycji*, CeDeWu, Warszawa 2003, s. 103.
[82] M. Herman, *Analiza i ocena nowych projektów inwestycyjnych*, Prawo i Finanse nr. 1-2/2003 s. 56.

Wskaźnik ten ma wartość wysoką ale ujemną, co świadczy o silnej ujemnej korelacji, oznacza to, że zwiększenie czynnika (kosztów zmiennych), powoduje zmianę przeciwną (zmniejszenie) wartości NPV projektu.

Taką samą analizę można wykonywać dla innych czynników,[83] badając, które z nich mają duży wpływ i są decydujące dla powodzenia projektu. Wykorzystując arkusz kalkulacyjny, można z łatwością zmieniać wartości danych, a wszelkie obliczenia dokonają się same, oczywiście stosując wcześniej odpowiednie formuły.

3.8. Analiza progu rentowności BEP (ang. Break Even Point)

Kolejnym narzędziem pomocnym w podejmowaniu decyzji inwestycyjnych, czy produkcyjnych, jest analiza progu rentowności BEP.

Każda inwestycja, czy decyzja o produkcji lub zmianie warunków inwestycyjnych (produkcyjnych) wymaga odpowiedzi na pytanie dotyczące opłacalności przedsięwzięcia. Omówione zostały metody NPV i IRR związane z przepływami pieniężnymi w projekcie. Konieczne jest pogłębienie wiedzy na temat przyczyn (czynników) decydujących o ekonomicznym powodzeniu projektu. Ważną metodą jest analiza wrażliwości, kolejną zaś pozwalającą na oszacowanie opłacalności jest BEP, która odnosi się do analizy wyniku finansowego oraz czynników go kształtujących, a więc do przychodów i kosztów.

W omawianej analizie badamy, kiedy koszty produkcji pokryte zostaną przychodami ze sprzedaży wyrobów i usług oraz kiedy zacznie inwestycja zacznie przynosić zysk. Punkt zerowy, w którym realizowane przychody ze sprzedaży dokładnie pokrywają się z poniesionymi kosztami, nosi nazwę progu rentowności (BEP). Firma osiąga zatem próg rentowności w stosunku do takiej wartości poziomu wolumenu sprzedaży, przy której przychody operacyjne są równe kosztom operacyjnym (zysk brutto ze sprzedaży jest równy zero) lub przychody pokrywają wszystkie koszty (zysk netto jest równy zero).

Próg rentowności dla danej zmiennej wpływającej na przepływy lub na stopę dyskontową (zmiennej decyzyjnej), to taka wartość tej zmiennej, przy której pewna zmienna wynikowa projektu (np. NPV, PI, czy IRR) przyjmuje określoną wartość uznaną za progową.[84]

Próg rentowności może być wyrażony ilościowo lub wartościowo. Ilościowy próg rentowności oznacza taką liczbę sprzedanych produktów, przy której przychody ze sprzedaży zrównają się z, poniesionymi na ich wytworzenie kosztami. Wartościowy próg rentowności oznacza taki poziom przychodów ze sprzedaży, który pokrywa wszystkie koszty produkcji. Próg rentowności jest też zwany punktem wyrównania BEP (ang. Break Even Point). Przez analogię można jednak przenieść określenie progu rentowności na każdą zmienną i w stosunku do każdej miary. Przyjmując NPV za podstawową miarę opłacalności projektu inwestycyjnego, można powiedzieć, że próg rentowności danej zmiennej, to taka jej wartość, przy której NPV projektu wynosi zero.

---

[83] K. Mikołajczyk, *Narzędzia analizy danych finansowych w programie Ms Excel*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków, 2014, s. 79.

[84] N. Grzenkowicz, *Analiza finansowo-ekonomiczna jako narzędzie oceny kondycji przedsiębiorstwa*, WWZ 2013 s. 324.

Analiza progu rentowności polega zatem na ustaleniu wartości progu dla wszystkich zmiennych decyzyjnych modelu i ustaleniu prawdopodobieństwa, przy którym rzeczywista wartość danej zmiennej istotnie spadnie do wartości progu lub poniżej.

Ilościowy próg rentowności (P_{il}) wyznaczymy ze wzoru:

$$P_{il} = \frac{K_s}{c - z} = \frac{K_s}{M_b}$$

gdzie:

P_{il}- ilościowy próg rentowności,
K_s - całkowite stałe koszty produkcji,
z - jednostkowe koszty zmienne,
c - jednostkowa cena sprzedaży,
M_b - całkowita marża brutto.

Wartościowy próg rentowności wyraża się wzorem:

$$P_w = \frac{K_s}{\frac{(c - z)}{c}} = \frac{K_s}{\frac{(1 - z)}{c}} = \frac{K_s}{W}$$

gdzie:

wzór na współczynnik marży W brutto ma postać:

$$W = \frac{c - z}{c} = \frac{1 - z}{c}$$

P_w- wartościowy próg rentowności,
a pozostałe zmienne, jak wyżej.

Produkcję w jednostkach naturalnych w punkcie zrównania kosztów z przychodów otrzymujemy więc dzieląc całkowite koszty stałe przez jednostkową marże brutto, czyli przypadającą na jeden wyrób nadwyżkę ceny nad jednostkowymi kosztami zmiennymi, która pozwala, przy odpowiedniej skali produkcji pokryć koszty stałe.[85]

Analiza progu rentowności BEP jest zilustrowana Przykładem 6.

Przykład 6

Dane do przykładu:

Jednostkowe koszty zmienne (z) wytwarzanego wyrobu wynoszą - 30, koszty stałe (K_s) - 70.000, cena sprzedaży (c) jednego wyrobu - 40.

Chcąc ustalić próg rentowności w jednostkach naturalnych, dokonujemy następujących obliczeń:

$$P_{il} = \frac{70\,000}{40 - 30} = 7\,000 \text{ szt.}$$

W analizowanym przedsiębiorstwie zrównanie przychodów ze sprzedaży produktów z całkowitymi kosztami produkcji ma więc miejsce wówczas, gdy skala produkcji wynosi 7 000 szt. Z kolei próg w ujęciu wartościowym kształtuje się na poziomie:

---

[85] M. Herman, *Analiza i ocena nowych projektów inwestycyjnych*, Prawo i Finanse nr. 1-2/2003 s. 56.

$$P_w = \frac{70\,000}{\frac{(40-30)}{40}} = \frac{70\,000}{\frac{1}{4}} = 280\,000$$

Wartość sprzedaży w wysokości 280 000 oznacza, że przedsiębiorstwo nie ponosi straty, ani też nie generuje zysków.

Zakończenie

Decyzje finansowe (inwestycyjne, produkcyjne, dotyczące zmiany cen, oraz poziomu kosztów i przychodów) pociągają zawsze określone skutki finansowe. Ze względu na skalę działania, wartość i czas trwania inwestycji zwiększa ryzyko, które jest dodatkowym kosztem, decydującym o powodzeniu lub porażce przedsięwzięcia. Aby wyliczyć konsekwencje decyzji ekonomicznych posługujemy się modelami (finansowymi, matematycznymi), które, co prawda są pewnym uproszczeniem rzeczywistości gospodarczej (stąd ich ograniczenia), jednak znacznie ułatwiają identyfikację zagrożeń oraz wyliczenie korzyści i kosztów, a także służą podjęciu odpowiednich decyzji.[86]

W niniejszym rozdziale zaprezentowane zostały najważniejsze metody dotyczące badania ekonomicznej efektywności procesów inwestycyjnych, które również można zastosować do badania innych decyzji np. produkcyjnych, kosztowych, cenowych itp. Przedstawione zagadnienia, po przyjęciu odpowiednich modyfikacji, mają bardzo szerokie zastosowanie praktyczne - zarówno w aspekcie diagnostycznym, jak i prognostycznym.

Pytania i zadanie do samodzielnego wykonania:

P1. Jaką metodę matematyczną możemy zastosować, aby uwzględnić zmianę wartości pieniądza w czasie przy ocenie inwestycji?

P2. Jaki jest związek między metodami: NPV i IRR?

P3. Podaj praktyczne zastosowania analizy wrażliwości.

Z.1 Na podstawie danych z tabeli, oblicz:

a) wartość współczynnika dyskontowego dla poszczególnych okresów,

b) zdyskontowane CF,

c) zsumuj tak wyliczone przepływy (inaczej oblicz NPV),

d) oszacuj wartość IRR.

	N	Przepływ pieniężny	r	Współczynnik dyskontowy	Zdyskontowany przepływ pieniężny
Io	0	-500000	3,00%		
CF1	1	100000	3,00%		
CF2	2	200000	3,00%		
CF3	3	25000	3,00%		
CF4	4	180000	3,00%		
CF5	5	130000	3,00%		
				Suma NPV	

[86] M. Jerzemowska, *Analiza ekonomiczna w przedsiębiorstwie*, PWE, Warszawa 2018, s.21

Streszczenie

Rozdział trzeci prezentuje wybrane metody oceny ekonomicznej efektywności projektów inwestycyjnych i produkcyjnych oraz analizę wrażliwości wybranych wskaźników finansowych na zmiany czynników je tworzących.[87] Zostały w nim omówione wybrane najważniejsze metody, tak, aby można było kompleksowo przedstawić ww. zagadnienia.

Poszczególne podrozdziały rozpoczynają się od omówienia tzw. metod prostych oceny inwestycji, kolejne zaś, dotyczą metod dyskontowych. W następnych podrozdziałach omówione są pozostałe metody, które służą ocenie inwestycji, a także wpływowi zmian wartości ekonomicznych na wartości wynikowe. We wszystkich rozważaniach wykorzystywane są metody ilościowe. Omawiane treści podzielone zostały na 8 merytorycznych podrozdziałów:

Podrozdział 1 omawia tzw. prostą metodę oceny finansowej inwestycji, pozwalającą ustalić czas zwrotu nakładów z inwestycji, czyli pokrycia wydatków przyszłym strumieniem wpływów finansowych. Podrozdział 2 rozważa powyższą metodę, ale z uwzględnieniem zmiany wartości pieniądza w czasie, wykorzystując metodę dyskonta. Podrozdział 3 dotyczy najbardziej znanej metody: wartości bieżącej netto (NPV), która także wykorzystuje metodę dyskonta. Podrozdział 4 wiąże się z poprzednim, gdzie NPV jest funkcją, dla której szukamy miejsca zerowego czyli stopy, dla której inwestycja jest opłacalna. Podrozdział 5 zawiera opis księgowej stopy zwrotu (ARR), która jest wskaźnikiem podającym relację wartości zysku z inwestycji do nakładu inwestycyjnego. Podrozdział 6 opisuje wskaźnik zysku (PI), bazujący na metodzie NPV, od której różni się prezentacją wyniku, który zamiast postaci bezwzględnej, ukazuje wartość procentową przepływów pieniężnych netto z inwestycji. Podrozdział 7 - podczas, gdy poprzednie podrozdziały zawierają opis metod oceny efektywności ekonomicznej projektów, takich jak NPV i IRR, to niniejszy - poświęcony jest analizie wrażliwości, która pozwala dodatkowo zbadać, jak zmienia się wartość NPV, czy IRR, w zależności od zmian czynników towarzyszących. Podrozdział 8, to Analiza progu rentowności (BEP), gdzie kolejną omówioną metodą, pozwalającą na oszacowanie opłacalności, jest Break Even Point.

Powyższe metody, zostały opisane w sposób syntetyczny, aby zachować jasność przekazu. Niektóre techniki są opatrzone przykładami liczbowymi, inne mniej skomplikowane i łatwiejsze, tego nie posiadają, gdyż zastosowanie ich w praktyce wydaje się oczywiste i nie wymaga ilustrowania rachunkowymi przykładami .

Zapoznanie się z powyższym rozdziałem powinno dostarczyć kompleksową wiedzę, która jest niezbędna w praktycznym zastosowaniu, jakim jest zarządzanie finansami w zakresie podejmowania decyzji inwestycyjnych, produkcyjnych i dostosowawczych do zmieniających się warunków ekonomicznych.

Słowa kluczowe
inwestycje, rentowność, metody dyskontowe, stopa zwrotu, ryzyko inwestycyjne, analiza rentowności, NPV, IRR, próg rentowności, analiza wrażliwości, okres zwrotu, księgowa stopa zwrotu, wskaźnik rentowności.

[87] R. Mantegna, *Ekonofizyka wprowadzenie*, PWN, Warszawa 2014, s. 75.

Application of the percentage theory in the assessment of the effectiveness of investment processes

Summary

The chapter 3 presents selected methods of economic assessment of the effectiveness of investment and production projects and the analysis of the sensitivity of selected financial ratios to changes in the factors that constitute them. It discusses selected the most important methods so that it is possible to comprehensively present the above-mentioned issues. Individual subsections begin with an overview of the so-called simple methods of investment evaluation, the next ones concern discount methods. The following subchapters discuss other methods that are used to evaluate the investment, as well as the impact of changes in economic values on the resulting values. Quantitative methods are used in all considerations. The discussed content has been divided into 8 substantive subsections:

Section 1 discusses the so-called a simple method of financial evaluation of an investment, allowing to determine the time of return on investment, i.e. covering the expenses with a future stream of financial revenues Section 2 considers the above method, but taking into account the change in the value of money over time, using the discount method. Section 3 deals with the best known method: Net Present Value (NPV), which also uses the discount method. Section 4 is related to the previous one, where NPV is the function for which we are looking for the zero place, i.e. the rate for which the investment is profitable. Subchapter 5 contains a description of the accounting rate of return (ARR), which is an indicator that gives the ratio of the profit on investment to the investment expenditure. Section 6 describes the profit ratio (PI), which is based on the NPV approach, which differs from the presentation of the result, which, instead of being absolute, shows the percentage of net cash flows from the investment. Subchapter 7 - while the previous subchapters describe methods for assessing the economic efficiency of projects, such as NPV and IRR, this one - is devoted to the sensitivity analysis, which allows you to additionally examine how the NPV or IRR value changes, depending on changes in accompanying factors . Subchapter 8 is Break-even Point Analysis (BEP), where Break Even Point is another method discussed, allowing to estimate profitability.

The above methods have been described synthetically to keep the message clear. Some techniques are provided with numerical examples, while others are less complicated and easier, do not have this, as their application in practice seems obvious and does not require illustration with accounting examples.

Reading the above chapter should provide comprehensive knowledge that is necessary in the practical application of financial management in the field of making investment, production and adaptation decisions to changing economic conditions.

Key words

investments, profitability, discount methods, rate of return, investment risk, profitability analysis, NPV, IRR, break-even point, sensitivity analysis, payback period, accounting rate of return, profitability ratio.

Bibliografia

1. Czerwonka L., *Zarządzanie finansami, wprowadzenie i przykłady*, C. H. Beck, Warszawa 2018.
2. Grzenkowicz N., *Analiza finansowo-ekonomiczna jako narzędzie oceny kondycji przedsiębiorstwa*, WWZ, Warszawa 2017.
3. Herman M., Koroblowski P, *Analiza i ocena nowych projektów inwestycyjnych*, Prawo i Finanse nr. 1-2/2003.
4. Jerzemowska M., *Analiza ekonomiczna w przedsiębiorstwie*, PWE, Warszawa 2018..
5. Mantegna R., Stanley H., *Ekonofizyka wprowadzenie*, PWN, Warszawa 2014.
6. Mikołajczyk K., *Narzędzia analizy danych finansowych w programie Ms Excel*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków, 2014.
7. Ostoja-Ostaszewski A., *Matematyka w ekonomii, modele i metody*, PWN, Warszawa 2006.
8. Pastusiak R., *Ocena efektywności inwestycji*, CeDeWu, Warszawa 2003.
9. Piasecki K., Anholcer M., Echaust K., *E-matematyka wspomagająca ekonomię*, C. H. Beck, Warszawa 2013.
10. Staniec I., *Metody ilościowe w zarządzaniu organizacją, poradnik z wykorzystaniem arkusza kalkulacyjnego Excel*, C. H. Beck, Warszawa 2013.
11. Żwirbla A., *Metody badawcze analizy ekonomicznej*, WSHE, Włocławek 2001.
12. https://econopedia.pl/fp/budzetowanie/npv-wartosc-biezaca-netto/ (dostęp: 12.04.2021 r.)
13. https://warsztatanalityka.pl/irr-wewnetrzna-stopa-zwrotu/(dostęp: 17.04.2021 r.).

Łukasz Jabłoński, Bogusław Kaczmarczyk

Rozdział czwarty

WYBRANE FUNKCJE FINANSOWE ARKUSZA MS EXCEL – ZASTOSOWANIA OBLICZEŃ ORAZ RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO DLA FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH W OCENIE RYZYKA

Spis treści Rozdziału czwartego

Wprowadzenie **145**
4.1. Ogólne zasady wykonywania obliczeń w arkuszu kalkulacyjnym **146**
4.2. Obliczenie NPV za pomocą arkusza kalkulacyjnego **153**
4.3. Obliczenie IRR za pomocą arkusza kalkulacyjnego **156**
4.4. Wartość ryzykowna – wprowadzenie do metod dyskontowych wyceny projektów inwestycyjnych **161**
4.5. Zastosowanie rachunku pochodnych do badania własności funkcji wielu zmiennych, w tym wyprowadzenie wzoru na ryzyko wartości dla funkcji NPV **162**
4.6. Analiza oceny parametrów strukturalnych błędu funkcji wielu zmiennych na przykładzie NPV **- mikro studium z wykorzystaniem generatora liczb losowych** **168**
Zakończenie **171**
Streszczenie **172**
Słowa kluczowe **172**
Summary **173**
Keywords **174**
Bibliografia **175**
Netografia **176**

Wprowadzenie

Obliczenia dotyczące funkcji finansowych wymagają użycia odpowiednich metod i narzędzi matematycznych. Wykonywanie działań finansowych na prostym kalkulatorze jest bardzo trudne, a niekiedy niemożliwe. Dlatego skonstruowano kalkulatory finansowe, zawierające podstawowe funkcje, omawiane poniżej.

Zastosowanie kalkulatora finansowego pozwala uzyskać właściwe wyniki działań, jednak zachodzi potrzeba wprowadzania wielu danych obliczeniowych. Jest to jednak czynność żmudna i nieergonomiczna. Idealnym rozwiązaniem jest w tym przypadku zastosowanie arkusza kalkulacyjnego, który posiada wbudowane funkcje finansowe (i wiele innych), tak więc można w nim dokonać dowolne obliczenia i to w wygodny sposób z podglądem wprowadzanych danych i możliwością ich dalszej obróbki.

W rozdziale tym omówione są podstawowe funkcje finansowe arkusza kalkulacyjnego na przykładzie programu MS Excel.

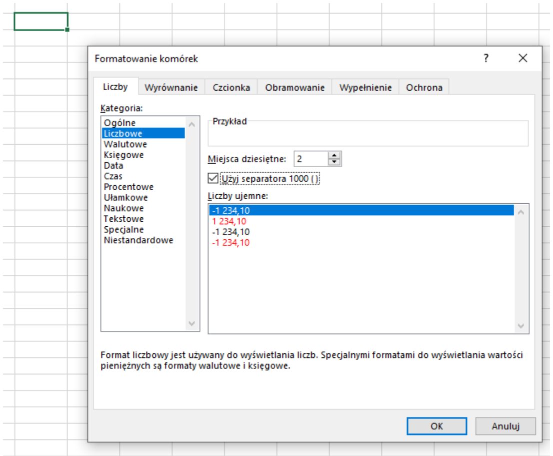
4.1. Ogólne zasady wykonywania obliczeń w arkuszu kalkulacyjnym

Objaśniane w rozdziale zasady, metody i przykłady dotyczą zastosowania programu komputerowego, arkusza kalkulacyjnego. Podane informacje dotyczą wszystkich wersji arkuszy kalkulacyjnych, zarówno płatnych, jak i bezpłatnych licencji (wchodzących w skład pakietów: MS Office, Libre Office, WPS Office itp.). Jednak ze względu na dużą popularność i funkcjonalność programu MS Excel (Arkusz), powyższa tematyka została omówiona na przykładzie tego programu. Omawiane zasady i funkcje są dostępne we wszystkich wersjach programów, lecz ich umiejscowienie i układ graficzny jest różny[88].

Nie będą tu omawiane wszystkie zagadnienia związane z obsługą arkusza, lecz tylko niezbędne do wykonania podanych w rozdziale obliczeń. Zakłada się, że czytelnik posiada umiejętność obsługi arkusza kalkulacyjnego w stopniu podstawowym. Podstaw obsługi Arkusza można nauczyć się na różnych kursach dostępnych w internecie.[89]

Pierwsza podstawowa zasada brzmi: proszę pamiętać o właściwym sformatowaniu komórek arkusza, poprzez menu podręczne - formatowanie komórek - zakładka liczby:[90]

Rysunek 1.

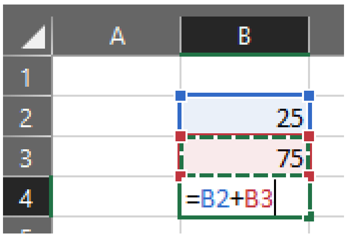


Na Rysunku 1. zaznaczono (tak jak najczęściej się stosuje) dane liczbowe, z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku i separatorem tysięcy, co pozwala wyświetlać poprawne dane liczbowe w przejrzysty sposób. Zwracam na to uwagę, gdyż nie sformatowanie komórek, bądź sformatowanie w przypadkowy sposób wpływa na dokładność obliczeń i sposób wyświetlania danych, co jest sprawą zasadniczą.

Przy wprowadzaniu danych liczbowych wpisujemy je w poszczególne komórki arkusza. W przypadku wykonywania obliczeń lub wstawiania funkcji, zawsze na początku wstawiamy znak równości, wtedy arkusz rozpoznaje, że wykonujemy działanie a nie wprowadzamy dane.

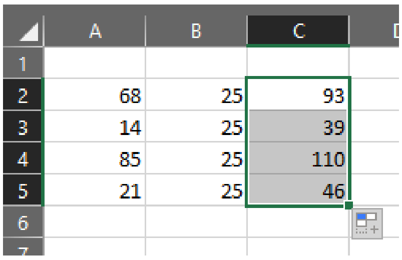
[88] Różnice miedzy arkuszami i ich wersjami, dotyczą oprócz różnej szaty graficznej, także funkcjonalności i dokładności wyliczeń. Dla celów dydaktycznych wystarczające będą wersje bezpłatne, do zastosowań profesjonalnych, niezbędny jest zakup wersji płatnych.
[89] https://www.superprof.pl/blog/excel-krok-po-kroku/ - (dostęp 14.06.2021 r.)
[90] J. Cypryjański, *Excel dla menedżera*, PWN, Warszawa 2016, s.299

Rysunek 2.



Kolejną przydatną funkcją jest możliwość przeciągnięcia komórki z określoną funkcją (działaniem matematycznym), w wybranym kierunku, dzięki czemu nie musimy powtarzać przepisywania danych lub wypełniania ich w kolejnych komórkach.

Rysunek 3.



Należy też wspomnieć o znaku „$", który wstawiony przed symbol (adres) komórki np. A1 „blokuje" ją w kolumnie ($A) lub w wierszu (A$1), bądź w całości ($A$1),[91] co powoduje, że wraz z przeciąganiem komórek z obliczeniami, tak zaznaczona komórka będzie zawsze w swojej pozycji uwzględniana w obliczeniach.

Pomocne jest także posługiwanie się symbolami i znakami, np. potęgowanie w Arkuszu opisane jest znakiem „^" na klawiaturze.

Są to podstawowe informacje, które ułatwiają używanie programu MS Excel.

W kolejnym etapie, będą omówione podstawowe funkcje finansowe.

Podstawowymi funkcjami finansowymi w arkuszu są:

1. PV – zwraca wartość bieżącą,
2. FV – podaje wartość przyszłą,
3. PMT - oblicza kwotę spłaty (np. pożyczki) przy założeniu stałych rat (spłat) i stałej stopy procentowej,
4. RATE - zwraca stopę procentową dla okresu raty (rentowej).

Ad. 1.

Funkcja PV (Present Value, wartość obecna) - jest tożsama z pojęciem wartości obecnej (bieżącej) w teorii finansów i metodą dyskontową w matematyce. Mając określoną wartość strumienia przyszłych płatności (rat), możemy obliczyć tą metodą ich wartość obecną.

W funkcji Excel argument ten ma postać:

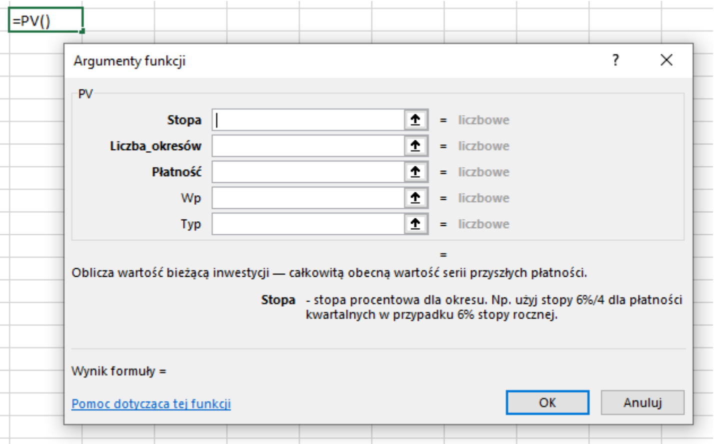
PV(stopa; liczba okresów; rata;[wp];[typ])

[91] I. Staniec, *Metody ilościowe w zarządzaniu organizacją*, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa 2013, str. 15

Poszczególne argumenty funkcji oznaczają[92] następujące pojęcia:

- ✓ **stopa** - stopa procentowa dla okresu,
- ✓ **liczba okresów** - całkowita liczba okresów płatności w okresie spłaty,
- ✓ **rata** - płatność dokonywana w każdym okresie, niezmienna przez cały okres pożyczki,
- ✓ **Wp** - przyszła wartość, czyli saldo kasowe, które ma zostać osiągnięte po dokonaniu ostatniej płatności - tego argumentu nie musimy wypełniać, zazwyczaj zostawia się to pole jako puste,
- ✓ **typ** - liczba 0, oznacza że płatność przypada na koniec okresu albo 1, jeśli na początek, a także argument opcjonalny. Zostawienie pola pustym, oznacza wybór płatności na koniec okresu.

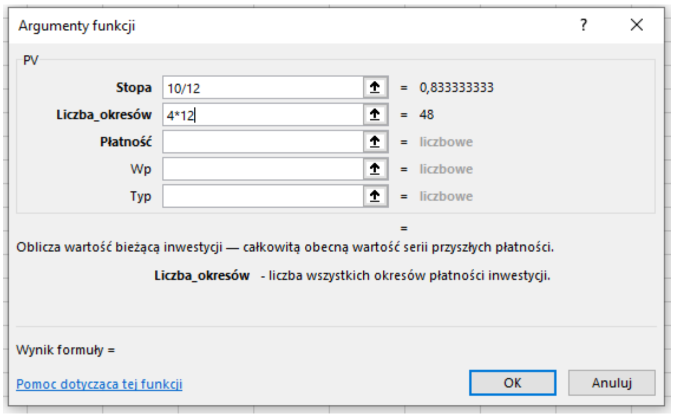
Rysunek 4.



Bardzo ważne jest rozgraniczenie, czy mamy do czynienia z kapitalizacją równą okresowi (zazwyczaj roczną), czy kapitalizacja jest częstsza (np. kwartalna). W przypadku kapitalizacji częstszej, niż raz w roku (pod okresowej) należy uwzględnić to w argumentach: stopa i liczba okresów. Jeśli dokonuje się płatności miesięcznych pożyczki czteroletniej, oprocentowanej na 10% rocznie, należy użyć wartości 10%/12 dla argumentu stopa i 4*12 dla argumentu liczba okresów. Jeśli dokonuje się rocznych spłat tej samej pożyczki, to stopa wynosi 12%, zaś liczba okresów to 4.

[92] https://support.microsoft.com/pl-pl/office/funkcja-pv-23879d31-0e02-4321-be01-da16e8168cbd - (dostęp 16.06.2021 r.)

Rysunek 5.

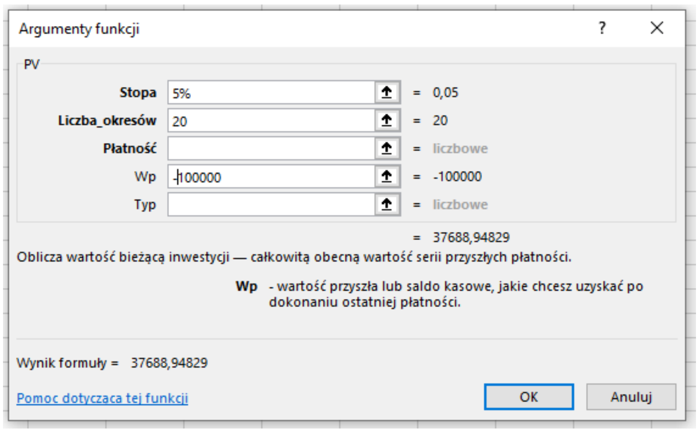


Przykład 1

Jaką należy zdeponować kwotę (płatność jednorazowa), aby przy stałej stopie procentowej – 5, otrzymać po 20 latach kwotę 100 000,00 zł.[93]

Rozwiązanie: (za pomocą funkcji PV)

Rysunek 6



Przy argumencie WP zastosowano znak ujemny, w celu uzyskania wyniku dodatniego.
Odpowiedź: Aby otrzymać kwotę 100 000,00 zł. należy wpłacić kwotę 37 688,95 zł.

<u>Ad. 2.</u>

Funkcja FV (Future Value, wartość przyszła) - oblicza wartość przyszłą inwestycji przy założeniu stałej wysokości rat i jednakowej stopy procentowej. Funkcji FV można używać w przypadku okresowych, stałych płatności albo pojedynczej płatności.
W programie MS Excel funkcja ta ma postać: FV(stopa;liczba_okresów;rata;[wb];[typ])
W składni funkcji FV występują następujące argumenty.[94]

- **Stopa** Argument wymagany - stopa procentowa dla okresu.

[93] http://www.excelowo.pl/index.php/funkcje/finansowe/152-funkcja-finansowa-pv-w-praktyce - (dostęp 16.06.2021 r.)
[94] https://support.microsoft.com/pl-pl/office/fv-funkcja-2eef9f44-a084-4c61-bdd8-4fe4bb1b71b3 - (dostęp 14.06.2021 r.)

- **Liczba okresów** Argument wymagany - całkowita liczba okresów płatności w okresie spłaty.
- **Rata** Argument wymagany - stała płatność dokonywana w każdym okresie. Jeśli argument „rata” zostanie pominięty, to musi zostać podany argument „wb”.
- **Wb** Argument opcjonalny - wartość bieżąca lub skumulowana wartość przyszłego strumienia płatności według wyceny na dzień obecny.
- **Typ** Argument opcjonalny - liczba 0 albo 1, która wskazuje, kiedy płatność jest należna. Jeśli typ zostanie pominięty, przyjmuje się, że jego typ wynosi 0.

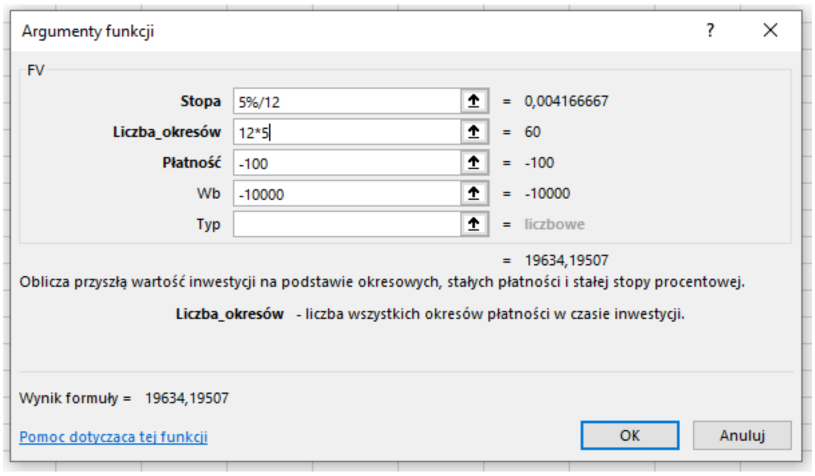
Ta sama uwaga, co przy funkcji PV dotyczy też funkcji FV, w zakresie płatności pod okresowych, trzeba pamiętać o dostosowaniu stopy procentowej i liczby płatności.[95]

Przykład 2

Inwestujemy kwotę 10 000,00 zł., przy stopie procentowej 5% – w skali roku. Dodatkowo, będziemy wpłacać comiesięcznie po 100 zł. Jaką kwotę będziemy mieli po 5 latach inwestycji?

Rozwiązanie: (za pomocą funkcji FV)

Rysunek 7.



Wartości płatności wprowadzono ze znakiem ujemnym, w celu uzyskania dodatniego wyniku.

Odpowiedź: Po 5 latach otrzymamy 19 634,20 zł.

<u>Ad.3.</u>

Funkcja PMT (Payment) - zwraca wysokość raty dla inwestycji polegającej na okresowych, stałych wpłatach przy stałym oprocentowaniu.

Oto składnia funkcji PMT [96].

- **Stopa** Argument wymagany - stopa procentowa pożyczki.
- **Liczba okresów** Argument wymagany - całkowita liczba spłat w ramach pożyczki.

---

[95] http://www.excelowo.pl/index.php/funkcje/finansowe/22-funkcja-fv-wartosc-przyszla-inwestycji - (dostęp 14.06.2021 r.)

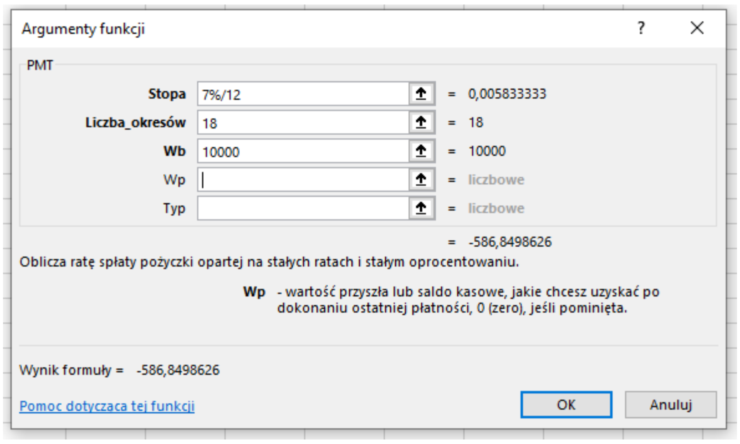
[96] https://support.microsoft.com/pl-pl/office/funkcja-pmt-0214da64-9a63-4996-bc20-214433fa6441 - (dostęp 16.06.2021 r.)

- **Wart. obecna** Argument wymagany - wartość bieżąca, czyli całkowita kwota będąca wartością serii przyszłych płatności.
- **Wart. przyszła** Argument opcjonalny - przyszła wartość, czyli saldo kasowe, które ma zostać osiągnięte po dokonaniu ostatniej płatności. Jeśli argument wp zostanie pominięty, tzn. zostanie przyjęta wartość 0 (zero) (czyli przyszła wartość pożyczki wynosi 0).
- **Typ** Argument opcjonalny - liczba 0 (zero) albo 1, która wskazuje, kiedy płatność jest należna.

Przykład 3

Zaciągnięto pożyczkę na kwotę 10 000,00 zł., oprocentowaną w skali rocznej na 7%. Okres spłaty wynosi 18 miesięcy. Jaka będzie wysokość miesięcznej raty?[97]

Rysunek 8.



Odpowiedź: Miesięczna rata wyniesie 586,85 zł.

<u>Ad.4.</u>

Funkcja RATE (stopa procentowa) - oblicza stopę procentową, dla której kwota wpłaty początkowej i serii przyszłych płatności (rate) w ciągu danego okresu przyjmuje określoną wartość końcową. Wartość rate jest obliczana przez iterację i może mieć co najmniej zero rozwiązań. Jeśli kolejne wyniki rate nie są zbieżne z zakresem 0,0000001 po 20 iteracjach, funkcja RATE zwraca wartość #NUM! wartość błędu.[98]

W składni funkcji RATE występują następujące argumenty.

- **Liczba okresów** Argument wymagany - całkowita liczba okresów płatności w okresie spłaty.
- **Rata** Argument wymagany - płatność dokonywana w każdym okresie, niezmienna przez cały okres pożyczki.
- **Wb** Argument wymagany - obecna wartość, czyli całkowita suma bieżącej wartości szeregu przyszłych płatności.

---

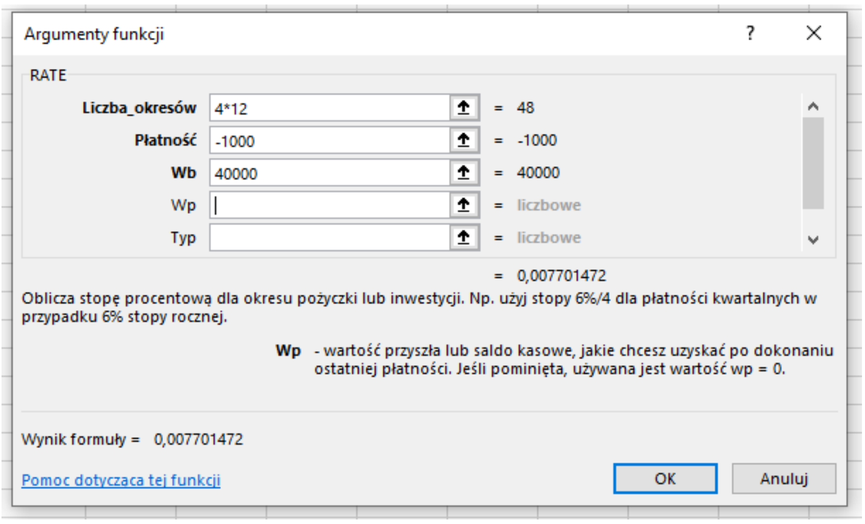
[97] https://excelness.com/blog/funkcja-pmt-czyli-jak-policzyc-rate-kredytu/ - (dostęp 16.06.2021 r.)
[98] https://support.microsoft.com/pl-pl/office/funkcja-rate-9f665657-4a7e-4bb7-a030-83fc59e748ce - (dostęp 14.06.2021 r.)

- **Wp** Argument opcjonalny - przyszła wartość, czyli saldo kasowe, które ma zostać osiągnięte po dokonaniu ostatniej płatności. Jeśli argument wp jest pominięty, za jego wartość jest uznawane 0 (przyszła wartość pożyczki np. wynosi 0). Jeśli argument wp zostanie pominięty, musi zostać podany argument rata.
- **Typ** Argument opcjonalny - liczba 0 albo 1, która wskazuje, kiedy płatność jest należna.

Przykład 4

Dana jest oferta zakupu samochodu o wartości 40 000,00 zł., z możliwością spłaty w równych miesięcznych ratach 1 000,00 zł., w okresie 4 lat. Jakie zastosowano oprocentowanie pożyczki?[99]

Rysunek 9.



W tym przypadku podanie wartości ujemnej raty jest niezbędne do prawidłowego obliczenia. Otrzymujemy wartość 0,0077 w zaokrągleniu 0,8%, co jest oprocentowaniem miesięcznym. Mnożymy 0,8 * 12 i otrzymujemy oprocentowanie w skali rocznej w wysokości 9,6%.

Odpowiedź: Oprocentowanie w skali rocznej w wysokości: 9,6%.

Liczba funkcji w arkuszu kalkulacyjnym jest znacznie większa. Oprócz funkcji finansowych mamy jeszcze funkcje matematyczne, logiczne, statystyczne i inne.[100] Powyższy materiał stanowi niezbędny wstęp, umożliwiający wykonywanie podstawowych obliczeń z wykorzystaniem programu MS EXCEL.

[99] https://www.officekurs.pl/formula-rate-excel - (dostęp 16.06.2021 r.)

[100] Dodatkowo wbudowane w arkusz funkcje można łączyć, zagnieżdżać, dostosowywać, co daje wiele możliwości obliczeniowych.

4.2. Obliczenie NPV za pomocą arkusza kalkulacyjnego

Funkcja wartości bieżącej netto od strony teoretycznej, z podaniem wzorów, została omówiona w Rozdziale trzecim niniejszej monografii. W podrozdziale 4.2. niniejszego rozdziału opisane zostanie zastosowanie arkusza kalkulacyjnego do wyliczenia w/w funkcji.

NPV[101] oblicza wartość bieżącą netto inwestycji na podstawie danej stopy procentowej (dyskontowej) oraz serii przyszłych płatności inwestycyjnych (wartości ujemne) i płatności dodatnich - wpływów (wartości dodatnie).

Oto składnia funkcji: NPV(stopa;wartość1;[wartość2];...)[102].

W składni funkcji NPV występują następujące argumenty.

- **Stopa** Argument wymagany - stopa dyskontowa stała w danym okresie.
- **Wartość1; wartość2;...** Argument - liczba1 jest wymagany, pozostałe są opcjonalne.
  - Przyjmuje się, że wartość1, wartość2,... - są równomiernie rozmieszczone w czasie i przypadają na koniec każdego okresu.
  - Funkcja NPV wykorzystuje sekwencję wartość1, wartość2,... - do przedstawienia przepływów gotówkowych. Wartości płatności i dochodów należy koniecznie wprowadzać we właściwej kolejności.

Inwestycja w funkcji NPV - rozpoczyna się jeden okres przed datą przepływu gotówkowego (przed wartość1), w okresie 0, który jako pierwszy nie jest dyskontowany, gdyż wartość dyskonta dla okresu 0 wynosi 1, a kończy się wraz z ostatnim przepływem gotówkowym znajdującym się na liście. Obliczenie wartości funkcji NPV jest wykonywane na podstawie przyszłych przepływów gotówkowych. Jeżeli pierwszy przepływ (inwestycyjny, ujemny) ma miejsce na początku, to wartość ta musi być dodana do wyniku NPV, a nie zawarta w wartościach argumentów. Dlatego proponuję się, jak w poniższym przykładzie pierwszy przepływ (inwestycyjny, ujemny) oznaczyć jako 0, kolejne (dodanie) od 1 do N. Funkcją NPV dyskontujemy przepływy: 1 – N, i dopiero po tej czynności dodajemy przepływ 0 (jako ujemny).

Funkcja NPV jest podobna do funkcji PV (wartość bieżąca). Podstawowa różnica między funkcjami PV i NPV polega na tym, że funkcja PV pozwala, by przepływy zaczynały się na końcu lub na początku okresu. W odróżnieniu od zmiennych przepływów gotówkowych NPV, przepływy gotówkowe PV muszą być stałe w okresie inwestycji.[103]

Przykład 5

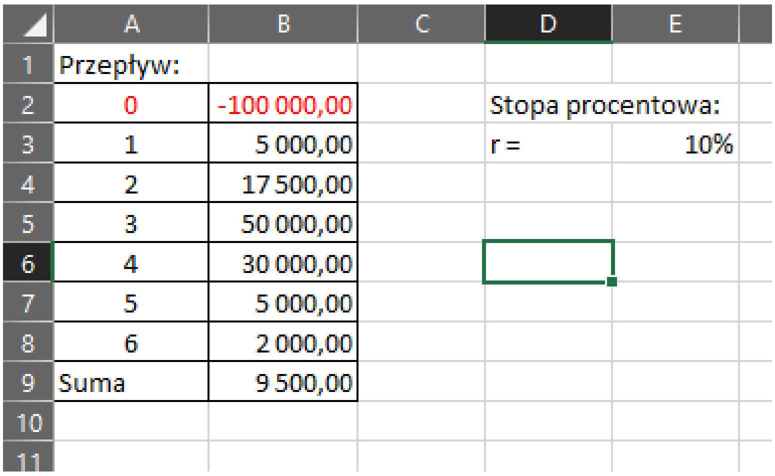
Rozważmy poniższe przepływy pieniężne, oraz stopę procentową, opisane na poniższym Rysunku 10.:

[101] Arkusz zawiera także funkcje XNPV, która różni się od omawianej możliwością określenia daty przepływów pieniężnych, dzięki czemu uwzględnia odstępy między datami w obliczeniach. NPV zakłada równe okresy przepływów (miesięczne lub roczne).

[102] https://support.microsoft.com/pl-pl/office/funkcja-npv-8672cb67-2576-4d07-b67b-ac28acf2a568 - (dostęp 16.06.2021 r.)

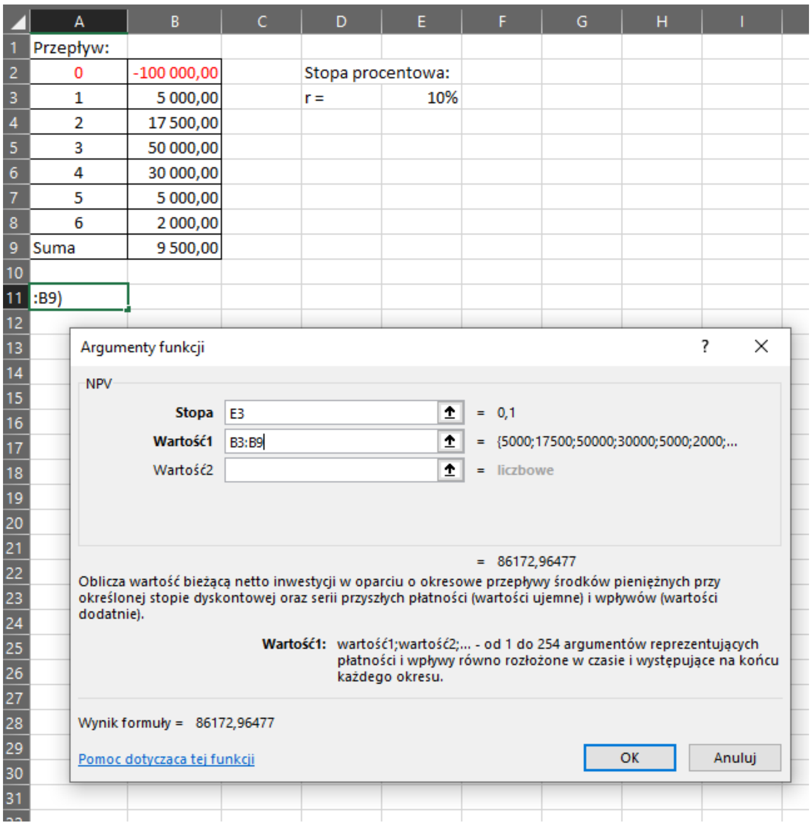
[103] https://econopedia.pl/fp/budzetowanie/npv-wartosc-biezaca-netto/ - (dostęp 16.06.2021 r.)

Rysunek 10.



Obliczmy NPV, przy wykorzystaniu funkcji Excel:

Rysunek 11.



Po zatwierdzeniu funkcji, dodajemy przepływ 0 (ujemny):

Rysunek 12.

	A	B	C	D	E
1	Przepływ:				
2	0	-100000		Stopa procentowa:	
3	1	5000		r =	0,1
4	2	17500			
5	3	50000			
6	4	30000			
7	5	5000			
8	6	2000			
9	Suma	=SUMA(B2:B8)			
10					
11	=NPV(E3;B3:B8)+B2				
12					

W wyniku tego działania otrzymujemy wartość NPV:

Rysunek 13.

	A	B	C	D	E
1	Przepływ:				
2	0	-100 000,00		Stopa procentowa:	
3	1	5 000,00		r =	10%
4	2	17 500,00			
5	3	50 000,00			
6	4	30 000,00			
7	5	5 000,00			
8	6	2 000,00			
9	Suma	9 500,00			
10					
11	-18 702,04 zł				
12					

Widzimy, iż pomimo dodatniej sumy przepływów (9 500,00) wartość NPV jest ujemna, wynika to z zastosowania dyskonta o 10% stopie procentowej.

Powyższy przykład możemy wykonać za pomocą samodzielnych obliczeń, bez wykorzystywania wbudowanej w Arkusz funkcji NPV, posługując się wzorem na wartość bieżącą netto. Poniżej podany jest jeden ze sposobów takiego obliczenia.

Ponieważ funkcja NPV to suma zdyskontowanych przepływów pieniężnych w okresie inwestycji[104], zacznijmy więc od ustalenia współczynnika dyskontowego dla poszczególnych okresów:

$$D = \frac{1}{(1+r)^n}$$

gdzie:

D – współczynnik dyskontowy,
r – stopa procentowa (dyskontowa),
n – liczba okresu.

[104] R. Pastusiak, *Ocena efektywności inwestycji*, Wydawnictwo CeDeWu, Warszawa 2003, s. 74

Wprowadzamy do Arkusza współczynnik dyskontowy dla poszczególnych okresów:

Rysunek 14.

	A	B	C
1	Przepływ:		współczynnik dyskontowy
2	0	-100000	=1/(1+$B$14)^A2
3	1	5000	=1/(1+$B$14)^A3
4	2	17500	=1/(1+$B$14)^A4
5	3	50000	=1/(1+$B$14)^A5
6	4	30000	=1/(1+$B$14)^A6
7	5	5000	=1/(1+$B$14)^A7
8	6	2000	=1/(1+$B$14)^A8
9	Suma	=SUMA(B2:B8)	
10			
11	=NPV(E3;B3:B8)+B2		
12			
13	Stopa procentowa:		
14	r =	0,1	

Następnie dyskontujemy przepływy w poszczególnych okresach, mnożąc przepływy pieniężne przez współczynnik dyskontowy:

Rysunek 15.

	A	B	C	D	E
1	Przepływ:		współczynnik dyskontowy		
2	0	-100 000,00	1,0000	-100 000,00	
3	1	5 000,00	0,9091	4 545,45	
4	2	17 500,00	0,8264	14 462,81	
5	3	50 000,00	0,7513	37 565,74	
6	4	30 000,00	0,6830	20 490,40	
7	5	5 000,00	0,6209	3 104,61	
8	6	2 000,00	0,5645	1 128,95	
9	Suma	9 500,00	NPV	-18 702,04	
10					
11	-18 702,04 zł				
12					
13	Stopa procentowa:				
14	r =	10%			
15					

Suma zdyskontowanych przepływów pieniężnych, daje wartość NPV, co widać na powyższym Rysunku 15.

4.3. Obliczenie IRR za pomocą arkusza kalkulacyjnego

Umiejętność obliczenia NPV będzie potrzebna do kalkulacji wewnętrznej stopy zwrotu IRR. Metodologia i przykład wyliczenia IRR zawarta jest w Rozdziale trzecim niniejszej monografii. W tym natomiast, zostanie opisane zastosowanie arkusza kalkulacyjnego do wyżej wymienionych obliczeń.

Otóż obliczanie IRR za pomocą Arkusza jest bardzo proste, wystarczy wybrać funkcję finansową IRR, oraz podać tylko jeden argument tj.: zakres przepływów pieniężnych (płatności), a wewnętrzna stopa zwrotu zostanie wyliczona automatycznie.

Funkcja IRR[105] zwraca stopę zwrotu dla serii przepływów gotówkowych reprezentowanych przez wartości liczbowe. Przepływy gotówkowe muszą występować w regularnych interwałach, np. rocznie lub miesięcznie. Wewnętrzna stopa zwrotu jest stopą zwrotu otrzymywaną z inwestycji składającej się z wydatków (wartości ujemne) i dochodów (wartości dodatnie) występujących regularnie.[106]

Oto składnia funkcji: IRR(wartości; [wynik])
W składni funkcji IRR występują następujące argumenty:[107]

- **Wartości** Argument wymagany - tablica lub odwołanie do komórek zawierających liczby, dla których ma zostać obliczona wewnętrzna stopa zwrotu.
- Obliczenie wewnętrznej stopy zwrotu wymaga obecności przynajmniej jednej liczby dodatniej i jednej liczby ujemnej w wartościach.
- W interpretacji kolejności przepływów gotówkowych funkcja IRR wykorzystuje kolejność wartości. Należy się zatem upewnić, że wartości wydatków i dochodów wprowadzane są we właściwej kolejności.
- Jeśli argument tablicowy lub odwołaniowy zawiera tekst, wartości logiczne lub puste komórki, to wartości te są pomijane.
- **Wynik** Argument opcjonalny - liczba przypuszczalnie zbliżona do wyniku funkcji IRR.
- Microsoft Excel do obliczania wartości IRR stosuje technikę iteracyjną. Zaczynając od przypuszczenia, że narracja IRR przechodzi przez obliczenia, aż wynik będzie dokładny z dokładnością do 0,00001 procenta. Jeśli po 20 próbach nie można uzyskać wyniku działania narracji IRR, to wynik #NUM! zwróci wartość błędu #VALUE!.
- W większości przypadków wprowadzenie argumentu przypuszczenia nie jest wymagane do obliczenia funkcji IRR. W przypadku pominięcia argumentu przypuszczenia zakłada się, że jego wartość wynosi 0,1 (10%).
- Jeśli funkcja IRR wyświetla wartość błędu #LICZBA! lub jeśli wynik nie jest zbliżony do wyniku oczekiwanego, należy wtedy powtórzyć próbę, podając inną wartość argumentu przypuszczenia.

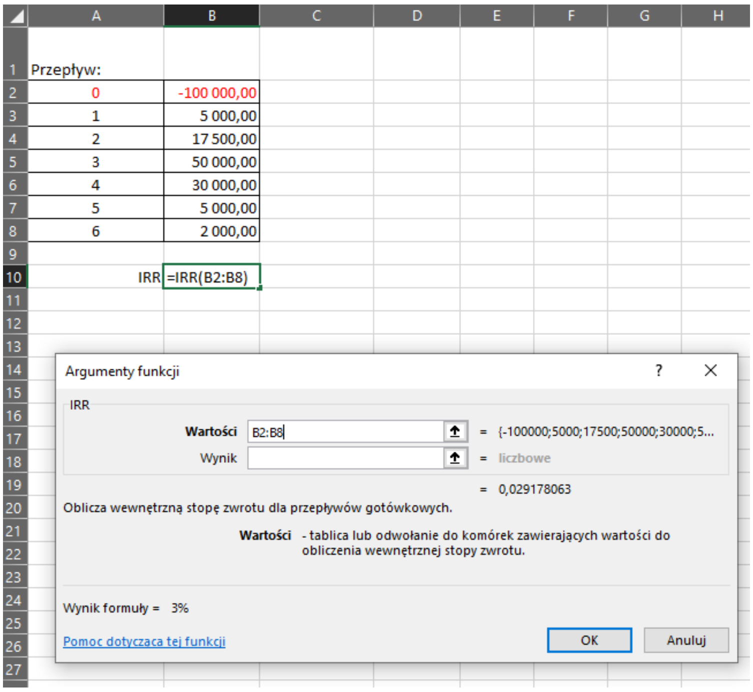
Przykład 6

Posłużmy się danymi liczbowymi (przepływami) z Przykładu 5. Obliczenie za pomocą funkcji IRR wygląda następująco:[108]

---

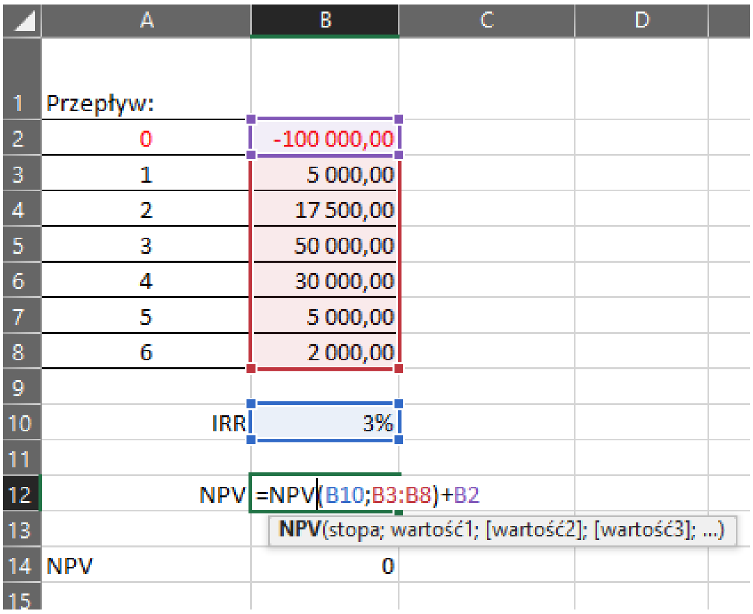
[105] MS Excel zawiera dodatkowo formułę XIRR, która podobnie jak formuła XNPV, uwzględnia w obliczeniach okres czasu pomiędzy konkretnymi datami (w dniach).
[106] K. Piasecki, *E-matematyka wspomagająca ekonomię*, Wydawnictwo C. H. Beck, Warszawa 2013, s. 317
[107] https://support.microsoft.com/pl-pl/office/irr-funkcja-64925eaa-9988-495b-b290-3ad0c163c1bc - (dostęp 14.06.2021 r.)
[108] https://econopedia.pl/finanse/irr-wewnetrzna-stopa-zwrotu/ - (dostęp 16.06.2021 r.)

Rysunek 16.



Widzimy, że wynik formuły na dole rysunku podaje wartość 3%. Zawsze warto sprawdzić poprawność wyliczeń, w tym przypadku podstawiając stopę procentową IRR do obliczenia NPV od powyższych przepływów pieniężnych, w tym przypadku wartość NPV powinna mieć wartość 0, jak to poniżej przedstawiono na Rysunku 17 :

Rysunek 17.



Jak to było omówione w Rozdziale trzecim, IRR można wyliczyć ze wzoru:

$$IRR \approx i_1 + \frac{NPV_1 \times (i_2 - i_1)}{NPV_1 + |NPV_2|}$$

gdzie:

IRR – wewnętrzna stopa zwrotu,

i_1 – stopa procentowa, dla której NPV przyjmuje wartość ujemną, bliską zeru,

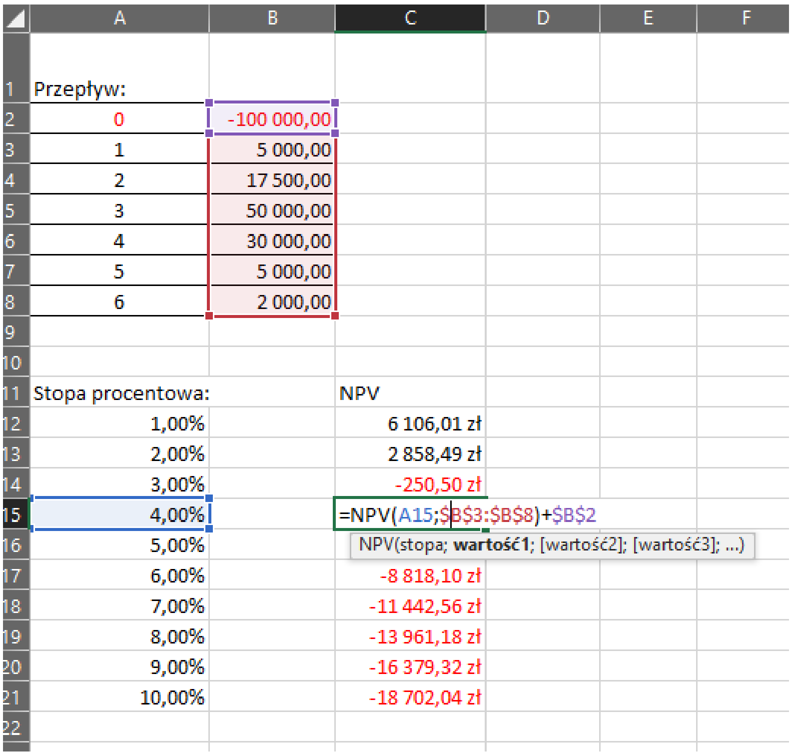
i_2 – stopa procentowa, dla której NPV przyjmuje wartość dodatnią, bliską zeru,

NPV_1 – wartość NPV, wyliczona dla stopy procentowej i_1,

NPV_2 – wartość NPV, wyliczona dla stopy procentowej i_2.

Obliczając ta metodą, otrzymamy wynik zbliżony do wartości NPV=0, lecz niedokładny. Można znacznie uprościć obliczenia wykonując je w arkuszu kalkulacyjnym. Metoda ta została omówiona w Rozdziale trzecim, tutaj zaś zostanie wskazany sposób wykonania w Arkuszu.

Rysunek 18.



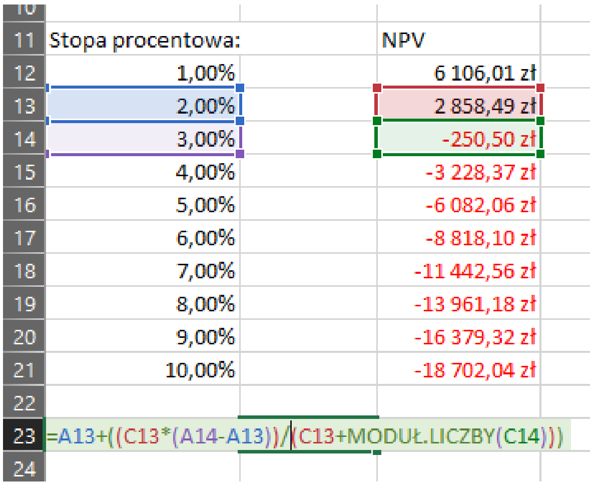
	A	B	C
1	Przepływ:		
2	0	-100 000,00	
3	1	5 000,00	
4	2	17 500,00	
5	3	50 000,00	
6	4	30 000,00	
7	5	5 000,00	
8	6	2 000,00	
9			
10			
11	Stopa procentowa:		NPV
12	1,00%		6 106,01 zł
13	2,00%		2 858,49 zł
14	3,00%		-250,50 zł
15	4,00%		=NPV(A15;$B$3:$B$8)+$B$2
16	5,00%		NPV(stopa; **wartość1**; [wartość2]; [wartość3]; ...)
17	6,00%		-8 818,10 zł
18	7,00%		-11 442,56 zł
19	8,00%		-13 961,18 zł
20	9,00%		-16 379,32 zł
21	10,00%		-18 702,04 zł
22			

Obliczamy wartość NPV dla kolejnych wartości stóp procentowych, tak aby pozyskać dane do wzoru na IRR. Pamiętamy o zastosowaniu symbolu \$, aby zablokować wybrane komórki, dzięki czemu zautomatyzujemy wykonanie kolejnych obliczeń przez przeciągnięcie funkcji do kolejnych komórek.[109]

Tak otrzymane NPV i odpowiadające im stopy procentowe podstawiamy do wzoru, który samodzielnie przepisujemy do Excela:

[109] K. Mikołajczyk, *Narzędzia analizy danych finansowych w programie Microsoft Excel*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków 2014, s.79

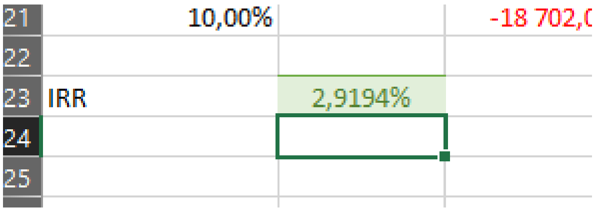
Rysunek 19.



11	Stopa procentowa:		NPV
12	1,00%		6 106,01 zł
13	2,00%		2 858,49 zł
14	3,00%		-250,50 zł
15	4,00%		-3 228,37 zł
16	5,00%		-6 082,06 zł
17	6,00%		-8 818,10 zł
18	7,00%		-11 442,56 zł
19	8,00%		-13 961,18 zł
20	9,00%		-16 379,32 zł
21	10,00%		-18 702,04 zł
22			
23	=A13+((C13*(A14-A13))/(C13+MODUŁ.LICZBY(C14)))		
24			

Tym sposobem otrzymujemy wartość:

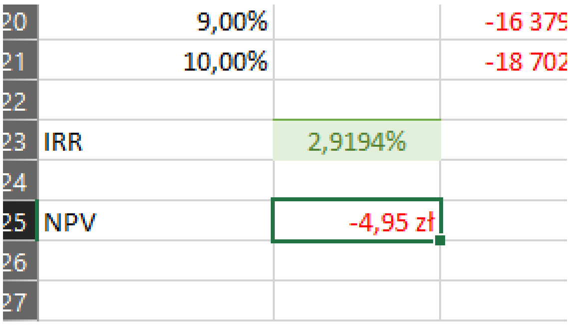
Rysunek 20.



21	10,00%		-18 702,(
22			
23	IRR	2,9194%	
24			
25			

Jest to liczba zbliżona do 3%, ale nie jest dokładna. Spróbujmy podstawić tą wartość do funkcji NPV – wynik powinien też być bliski 0.

Rysunek 21.



20	9,00%		-16 379
21	10,00%		-18 702
22			
23	IRR	2,9194%	
24			
25	NPV	-4,95 zł	
26			
27			

Otrzymaliśmy wartość zbliżoną do zera. W ten sposób można wykorzystywać arkusz kalkulacyjny do wykonywania obliczeń na podstawie różnych wzorów, co jest znacznym ułatwieniem. Dodatkowo mamy możliwość śledzenia wyniku i łatwo jest znaleźć ewentualny błąd, czy wykorzystać te same dane do wielu wyliczeń. Zalet zastosowania arkusza kalkulacyjnego jest więc bardzo dużo.

Proszę o samodzielne wykonanie obliczeń według podanej powyżej metodologii. Wprawdzie przykłady zobrazowane są rysunkami, lecz dopiero samodzielne wykonanie kilku dodatkowych przykładów, pozwoli zaznajomić się z opisywanymi metodami. Przeczytanie ze zrozumieniem nie wystarczy, trzeba nabyć doświadczenia w pracy z Excelem, gdyż nawet prozaiczne czynności mogą sprawiać na początku wiele trudności.

4.4. Wartość ryzykowna – wprowadzenie do metod dyskontowych wyceny projektów inwestycyjnych

Ryzyko stanowi nieodłączny element każdego działania. Przykładem w finansach, dla działania obarczonego ryzykiem, są wszelkiego rodzaju inwestycje z możliwością poniesienia straty przez inwestora, która to strata w momencie podejmowania decyzji inwestycyjnej jest wielkością nieznaną. Bardzo przystępny wykład na temat typologii ryzyk, pomiaru ryzyka, wielu źródeł i modeli ryzyka, zarządzania ryzykiem zawierają prace: Maliny, Pawełek, Wanata, Zeliasia [1998, s. 17-41], Krysiaka [2006, s. 15], Kuziaka [2011] i Borowskiego [2014, s. 26-96]. Ponadto bardzo wyczerpujący wykład przedstawiają Czaja [2001, s. 49-124], Marcinek [2009 s. 152] i wielu innych słusznie wskazując na miary statystyczne stosowane w ocenie ryzyka oparte na fundamentalnym znaczeniu prawdopodobieństwa w znaczeniu probabilistycznym.

Na gruncie nauki finansów szczególnego znaczenia nabierają wszelkiego rodzaju ryzyka rynkowe na ogół związane bezpośrednio z losową zmianą cen, stóp procentowych, czy kursów walutowych. Problem ryzyka oraz wyceny (kwantyfikacji) ryzyka stanowi fundament dla każdej decyzji inwestycyjnej. Na gruncie metod ilościowych w znaczeniu optymalizacyjnym Butler [1998, s. 44-46], Jackson, Staunton [2004, s. 126-132], wskazują, że punktową miarą ryzyka (w znaczeniu ryzyka wyniku) jest odchylenie standardowe, bądź kwadrat odchylenia standardowego tj. wariancja. Z kolei wg. koncepcji opartej na ryzyku rozumianego w znaczeniu negatywnym (niepożądane przez inwestora odchylenie lub jako kategoria odchylenia cen od spodziewanego poziomu) Ostrowska [2003, s. 125-127] proponuje zastosowanie miary ryzyka jako semiodchylenie standardowe lub semiwariancję. Wnioskowanie powyższe jest słuszne, bowiem w praktyce inwestycyjnej nie rozważa się ryzyka zysku przy jego maksymalizacji na rzecz analizy wystąpienia ryzyka w formie straty finansowej.

Jedną z podstawowych metod wyceny projektów inwestycyjnych w znaczeniu finansowej oceny inwestowania przy podejmowaniu decyzji finansowej zdaniem Sierpińskiej, Jachny [1994] oraz Matłoki, Światłowskiego [2003, s. 18-19] oraz Jajugi K, Jajugi T [2012 s. 91] i wielu innych wskazaną w artykule jest metoda z grupy metod dyskontowych tj. zaktualizowanej wartości netto - metoda NPV (*net present value* - NPV). Wielkość NPV w znaczeniu dynamicznego pomiaru inwestycji obliczona na konkretny dzień wyceny, to suma zdyskontowanych[110] przepływów pieniężnych o określonym wyniku finansowym dla stałej stopy dyskontowej pomniejszona o wartość nakładu inwestycyjnego. Formuła wyceny NPV udziela odpowiedzi na pytanie: o jaką wartość, inwestycja przeznaczona do realizacji, przewyższa koszt realizacji tej inwestycji. W teorii analizy ekonomicznej inwestycji funkcje NPV określa równanie (1):

[110] Dyskontowanie w finansach oznacza odwrotność procesu kapitalizacji (pomnażania).

$$NPV = \sum_{t=1}^{t=n} \frac{D_t}{(1+r)^t} - I_1 \qquad (1)$$

gdzie:

NPV - zaktualizowana wartość netto (wartość bieżąca netto),

D_t - dochody roczne w kolejnych latach inwestycji,

r - stopa dyskontowa, lub czynnik dyskontowy jako $(1+r)^{-t}$

I_1 - nakład inwestycyjny (nakład początkowy),

$t = 1,2,...,n$ - okres obliczeniowy (rok obliczeniowy, wartość stała w zależności od projekcji finansowej).

W harmonogramie inwestycji, dla szeregu przyszłych przepływów pieniężnych z których część jest dodatnia, a część ujemna, każda z nich ma określoną wartość teraźniejszą, obliczoną na podstawie stopy dyskontowej dla danego okresu czasu. Z drugiej strony, w znaczeniu inwestycyjnym dla formuły (1) decyzja inwestycyjna zależy od znaku i wielkości samego NPV, mianowicie dla wyceny NPV najbardziej pożądany stan opłacalności inwestycji polega na istnieniu największej (maksymalnej) wartości, jako funkcji celu w formule (1.1):

$$NPV \to \max. \qquad (1.1)$$

4.5. Zastosowanie rachunku pochodnych do badania własności funkcji wielu zmiennych, w tym wyprowadzenie wzoru na ryzyko wartości dla funkcji NPV

Spośród wielu działów matematyki bardzo ważną rolę w dydaktyce matematyki (i nie tylko) odgrywa dział analizy matematycznej, w szczególności znane i szeroko opisane w literaturze przedmiotu przez Gintera [2008, s. 13] i wielu innych zagadnienie pochodnej funkcji.

W znaczeniu ogólnym rozważmy zagadnienie pochodnej funkcji[111] $y = f(x)$. Przyjmijmy definicje, według której pochodną funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0 oznaczoną jako $f'(x_0)$ lub $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$ lub $(y')_{x=x_0}$ nazywamy granicę ciągu ilorazu różnicowego określonego formułą (2) (o ile istnieje) przy założeniu, że przyrost zmiennej niezależnej , Δx jako (3), dąży do zera, zatem:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2)$$

[111] Jedna z wielu definicji, którą można znaleźć w dowolnym podręczniku nt. analizy matematycznej przykładowo: F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1977, s. 159-194.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f^{'}(x_0) \tag{3}$$

Podana definicja pochodnej dla funkcji jednej zmiennej rozciąga się na funkcje wielu zmiennych. W tym miejscu warto wskazać na podstawowe własności pochodnej funkcji $f'(x_0)$ wykorzystywane w rachunku różniczkowym:

– pochodna funkcji $f^{'}(x_0)$ jest równa tangensowi kąta β, jaki tworzy z dodatnim kierunkiem osi Ox styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, y = f(x_0))$. Równanie tej stycznej ma postać (3.1):

$$y - f(x_0) = f^{'}(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{3.1}$$

– jeżeli funkcja $y = f(x)$ ma pochodną w punkcie $x = x_0$, to jest w tym punkcie ciągła.
– jeżeli istnieją pochodne $f^{'}(x)$ i $g^{'}(x)$, to zachodzą reguły (3.2):

$$\left.\begin{aligned} &[f(x) \pm g(x)]^{'} = f^{'}(x) \pm g^{'}(x) \\ &[f(x) \cdot g(x)]^{'} = f^{'}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g^{'}(x) \\ &[c \cdot f(x)]^{'} = c \cdot f^{'}(x); \forall c \neq 0 \\ &\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{'} = \frac{f^{'}(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g^{'}(x)}{[g(x)]^2}; \forall g(x) \neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

– pochodna funkcji złożonej: jeżeli funkcja $u = g(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x oraz funkcja $y = f(u)$ jest różniczkowalna w punkcie $u = g(x)$, to funkcja złożona $y = f[g(x)]$ jest różniczkowalna i punkcie x i ma pochodną wyrażona wzorem (3.3):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ dla } u = g(x) \tag{3.3}$$

Rachunek różniczkowy to niezwykle przydatne narzędzie analityczne, na przykładzie funkcji jednej zmiennej ma szerokie zastosowanie do badania własności funkcji w szczególności obejmując (poza różniczką zupełną oraz pochodna logarytmiczną):

– monotoniczność funkcji – $f^{'}(x)$,
– ekstrema lokalne funkcji,
– najmniejsza i największa wartość,
– wklęsłość i wypukłość oraz punkt przegięcia - $f^{''}(x)$,
– asymptoty:
  - pionowe,
  - poziome,
  - ukośne.
– badanie przebiegu zmienności funkcji.

Szerzej na temat szeregu własności funkcji jednej bądź wielu zmiennych oraz wykorzystania rachunku różniczkowego w wielu zagadnieniach praktycznych zawierają prace: Banacha [1957, s. 105 -150], Zaporożca19 [76, s. 9-194], Zeldowicza [1976, s. 84-212] i wielu innych. Dla osób pragnących poszerzyć swoją wiedzę z zastosowań matematyki autorzy polecają zawansowane prace na temat zagadnień optymalizacyjnych: Luenbergera [1974, s. 28 - s.200, 2003, s. 45-46], Cea [1976, s.89 - s.157], również na gruncie ekonomii dla zagadnień teorii wzrostu gospodarczego przedstawionych i przeanalizowanych bardzo wnikliwie przez Jakimowicza [2003, s. 42-181]. W tym miejscu warto dodać, że zagadnienia ścisłego pomiaru ryzyka stanowią domenę dla metod ilościowych wnioskowania, nie mniej jednak część z nich została zaadaptowana na grunt analiz jakościowych, szerzej w pracy Fergusona, Takane [2002, s. 489-503].

W wielu zagadnieniach dla opisu naukowego w sensie poznawczym wykorzystując zagadnienia analizy matematycznej definiuje się funkcje wielu zmiennych (n zmiennych), jako odwzorowanie (4):

$$f : X^n \to Y \tag{4}$$

gdzie:

$X \subset R$

$Y \subset R$

Tradycyjnie odwzorowanie (4) zapisujemy w postaci (5):

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{5}$$

gdzie:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n \tag{5.1}$$

W przypadku funkcji wielu zmiennych do obliczania pochodnych po konkretnej zmiennej, uwzględniając definicję pochodnej funkcji (3) oraz formułę (5), w analizie matematycznej powszechnie stosuje się zapis: *„de y po de x”* (5.2):

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} \tag{5.2}$$

Odnosząc zapis funkcyjny (5) do formuły (1) dla ,NPV jako funkcji trzech[112] zmiennych rzeczywistych otrzymamy zapis w postaci (6):

$$NPV = y = f(D_t, r, I_1) \tag{6}$$

Kontynuując poszukiwanie wzoru na błąd funkcji wielu zmiennych, załóżmy dla zmiennych w ramach funkcji NPV (6) ich niezależność[113] oraz istnienie dla nich

[112] Zmienna czas ozn. t jest traktowana jako stała, ponadto $\sigma_t = 0$.

odpowiednich błędów[114] w formie odchyleń standardowych. Zmienne funkcji NPV wraz z ich błędami standardowymi zestawione są w postaci (7.1) do (7.3):

$$(D_t \text{ z błędem } \pm\sigma_{D_t}) \Rightarrow D_{t_0} \pm \varepsilon_1 \tag{7.1}$$

$$(r \text{ z błędem } \pm\sigma_r) \Rightarrow r_0 \pm \varepsilon_2 \tag{7.2}$$

$$(I_1 \text{ z błędem } \pm\sigma_{I_1}) \Rightarrow I_{1_0} \pm \varepsilon_3 \tag{7.3}$$

Na mocy (6) oraz (7.1) do (7.3) otrzymujemy najbardziej prawdopodobną wartość funkcji NPV wraz z analizą dokładności w danej klasie[115] dokładności, jako formułę (8):

$$NPV = y = f(D_t, r, I_1) = f(D_{t_0} \pm \varepsilon_1, r_0 \pm \varepsilon_2, I_{1_0} \pm \varepsilon_3) \tag{8}$$

Następnie stosując definicję pochodnej funkcji oraz rozwijając wyrażenie (8) w szereg[116] Taylora względem błędów: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ i pomijając potęgi wyższe od pierwszej, otrzymujemy (9):

$$NPV = y = f(D_{t_0}, r_0, I_{1_0}) + \left(\frac{\partial NPV}{\partial D_t}\right)_0 \cdot \varepsilon_1 + \left(\frac{\partial NPV}{\partial r}\right)_0 \cdot \varepsilon_2 + \left(\frac{\partial NPV}{\partial I_1}\right)_0 \cdot \varepsilon_3 \tag{9}$$

Przy czym dla formuły (9) odpowiednie pochodne cząstkowe wynoszą: (9.1), (9.2) i (9.3):

$$\left(\frac{\partial NPV}{\partial D_t}\right)_0 = (r+1)^{-t} \tag{9.1}$$

$$\left(\frac{\partial NPV}{\partial r}\right)_0 = -D_t \cdot (r+1)^{-t-1} \cdot t \tag{9.2}$$

---

[113] Wynik dla zmiennej D_t jest niezależny od wyniku dla zmiennej r oraz wynik dla zmiennej r jest niezależny od wyniku dla zmiennej I_1.

[114] Błędy ε_i jako błędy historyczne bądź błędy implikowane.

[115] W metodach ilościowych klasa dokładności zależy od liczności próby, poziomu istotności, stopni swobody oraz przyjętej w obliczeniach wielokrotności odchyleń standardowych.

[116] Twierdzenie Taylora o szeregu potęgowym dla funkcji $y = f(x)$ nieskończenie razy różniczkowalnej w otoczeniu punktu x_0. „Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest n krotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu $U(x_0)$ i x jest różnym od x_0 punktem tego otoczenia, to istnieje taki punkt c, leżący miedzy x i x_0, że zachodzi wzór Taylora z resztą Taylora (ostatni wyraz szeregu):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\cdot(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{n}(c)}{n!}\cdot(x-x_0)^n \text{”.}$$

$$\left(\frac{\partial NPV}{\partial I_1}\right)_0 = -1 \tag{9.3}$$

Za wskazane w formule (8) błędy, ozn. jako ε_i można przyjąć w analizie dokładności i obliczeniach, rzeczywiste odchylenia standardowe σ_{x_i} próby losowej w związku z obliczaniem NPV. Odchylenia standardowe to pierwiastki z wariancji próby , $D^2(x_i)$ czyli pierwiastki z kwadratów odchyleń różnic pomiędzy daną cechą x_i a wielkością średnią $\bar{x}$ podzieloną przez zbiorowość $n-1$ - jest to formuła (10):

$$\sigma_{x_i} \pm \sqrt{D^2(x_i)} = \pm\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i-\bar{x})^2} \tag{10}$$

Składając formuły (6) oraz (8) i (9.1) do (9.3.) z uwzględnieniem (10) otrzymujemy (11) oraz (11.1):

$$NPV = f(D_t \pm \sigma_{D_t}, r \pm \sigma_r, I_1 \pm \sigma_{I_1}) \tag{11}$$

$$\sigma_{NPV_\pm} = f(D_t \pm \sigma_{D_t}, r \pm \sigma_r, I_1 \pm \sigma_{I_1}) \tag{11.1}$$

Dla wyprowadzenie wzoru na błąd funkcji NPV jako $\sigma_{NPV_\pm}$, należy zastosować prawo[117] C.F Gaussa o przenoszeniu się błędów średnich dla pomiarów niezależnych tj. takich pomiarów (obserwacji), dla których ocena parametrów strukturalnych zmiennych w ramach funkcji wielu zmiennych jest znana na podstawie zmienności historycznej lub zmienności implikowanej - formuła (12):

$$\sigma_{NPV_\pm} = \sqrt{\sum_{t=1}^{t=n}\left[\left(\frac{\partial NPV}{\partial D_t}\right)_0^2 \cdot (\sigma_{D_t})^2 + \left(\frac{\partial NPV}{\partial r}\right)_0^2 \cdot (\sigma_r)^2\right] + \left(\frac{\partial NPV}{\partial I_1}\right)_0^2 \cdot (\sigma_{I_1})^2} \tag{12}$$

Uwzględniając formuły (6) do (12) otrzymano ostatecznie wzór na wartość ryzykowną VaR_{NPV} jako odchylenie standardowe funkcji NPV, ozn. $\sigma_{NPV_\pm}$ w formułach (13) oraz (14):

$$\sigma_{NPV_\pm} = \sqrt{\sum_{t=1}^{t=n}\left[[(r+1)^{-t}]^2 \cdot (\sigma_{D_t})^2 + [-D_t \cdot (r+1)^{-t-1} \cdot t]^2 \cdot (\sigma_r)^2\right] + (\sigma_{I_1})^2} \tag{13}$$

po uproszczeniu (14):

---

[117] Carl Friedrich Gauss udowodnił, że dla pomiarów niezależnych błędy sumują się w kwadracie. Źródło: C.F. Gauss, *Theoria motus corporum coelestium...* (infn.it) – dostęp: (14-06-2021r.). Tytuł oryginału: C.F. Gauss., *Theoria Motus Corporum Coelestium*, Hamburg 1809.

$$\sigma_{NPV_{\pm}} = \sqrt{\sum_{t=1}^{t=n} \left[(r+1)^{-2\cdot t} \cdot \sigma_{D_t}^2 + D_t^2 \cdot (r+1)^{-2\cdot(t+1)} \cdot t^2 \cdot \sigma_r^2 \right] + \sigma_{I_1}^2} \tag{14}$$

W dalszych analizach i obliczeniach praktycznych zawartych w podrozdziale 4.6 niniejszego rozdziału, przyjęto - dla estymacji wielkości prawdziwej korektę dla dokonanej wyceny NPV o jednokrotną wartość $\sigma_{NPV_{-}}$ - jako miarę rozproszenia wyceny inwestycji ze znakiem minus. Zapis końcowy dla ryzyka formuły NPV przedstawia różnica wielkości estymowanej i jej błędu w formule (15) :

$$VaR_{NPV} = (NPV - \sigma_{NPV_{-}}) = \left(\sum_{t=1}^{t=n} \frac{D_t}{(1+r)^t} - I_1 \right) - \sigma_{NPV_{-}} \tag{15}$$

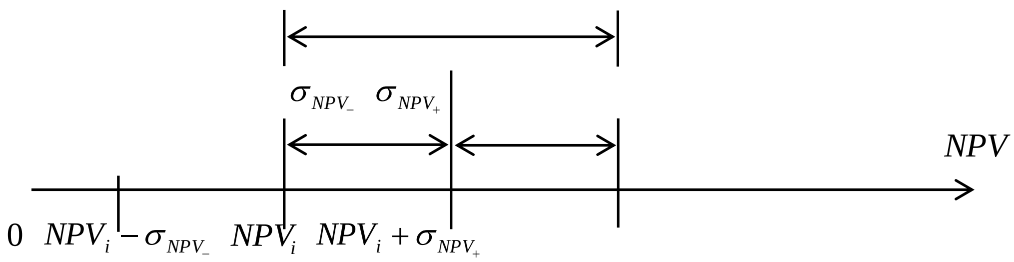
lub jako procentowa zmienność dla efektywności mierzonej inwestycji dla miary NPV wraz z dokonaną analizą dokładności w formule (16):

$$NPV_{Zm}\_(\%) = \left(\frac{\sigma_{NPV_{-}}}{\left(\sum_{t=1}^{t=n} \frac{D_t}{(1+r)^t} - I_1 \right)} \right) \cdot 100\% \tag{16}$$

Ogólnie otrzymany w wyniku estymacji błąd standardowy[118] $\sigma_{NPV_{\pm}}$ (14) , jako parametr dokładnościowy dla oceny dokładności mierzonej wielkości NPV_i ma swoją ogólną interpretację graficzną –

Rysunek 22.

$(NPV_i - \sigma_{NPV_{-}} < NPV_i < NPV_i + \sigma_{NPV_{+}})$



Źródło: Opracowanie własne.

[118] Znak $\pm$ przy odchyleniu standardowym $\sigma_{NPV_{\pm}}$ jako analizie dokładności mierzonej wielkości NPV_i oznacza odchylenia standardowe odpowiednio: $\sigma_{NPV_{-}}$ lewostronne i $\sigma_{NPV_{+}}$ prawostronne.

Wskazane na rysunku NPV_i wraz z wielkością $\sigma_{NPV\_}$ obejmuje estymację wielkości wynikowej, przy założeniu maksymalizacji zysku.

Aby przybliżyć zagadnienie wykorzystania rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych w ocenie ryzyka inwestycji z wykorzystaniem funkcji NPV, w następnym punkcie niniejszego rozdziału przedstawiony jest przykład liczbowy (analiza mikro studium) z wykorzystaniem powyższych reguł różniczkowania oraz analizą dokładności w oparciu o odchylenie standardowej funkcji wielu zmiennych.

4.6. Analiza oceny parametrów strukturalnych błędu funkcji wielu zmiennych na przykładzie NPV - mikro studium z wykorzystaniem generatora liczb losowych

Przykład 7

Na podstawie umowy deweloperskiej przedsiębiorstwo, mając zawarte umowy przedwstępne sprzedaży, zobowiązało się do wybudowania na terenie Tarnobrzegu w cyklu trzyletnim, na działce o powierzchni 0,98 ha łącznie 100 mieszkań o powierzchni użytkowej łącznie 6 tys. m^2. Harmonogram inwestycji[119] obejmuje sprzedaż mieszkań w stanie deweloperskim: rok pierwszy 20 mieszkań, łącznie 1200m^2 w cenie średniej 1 850 zł/m^2, rok drugi 30 mieszkań, łącznie 1 860m^2 w cenie średniej 1 920 zł/m^2, rok trzeci 50 mieszkań, łącznie 2 940m^2 w cenie średniej 2 100 zł/m^2. Firma developerska poza kontraktami wykonawczymi planuje w pierwszym roku inwestycji zakupić potrzebny grunt za kwotę 700 tys. zł.

Pytanie: jaka jest wartość bieżąca netto dla przyszłej inwestycji oraz ile wynosi wartość ryzykowna VaR_{NPV} dla pojedynczego odchylenia standardowego tej inwestycji dla następujących założeń[120]: zakup gruntu w momencie decyzji inwestycyjnej: 700 tys. zł z odch. standardowym 70 tys. zł, dochody netto przedsiębiorstwa ze sprzedaży mieszkań: rok pierwszy: 1 180 tys. zł z odch. standardowym 150 tys. zł., rok drugi: 1 890,6 tys. zł z odch. standardowym 220 tys. zł., rok trzeci: 3 260 tys. zł. z odch. standardowym 300 tys. zł. Okres zwrotu w nieruchomości został oszacowany na poziomie 12-stu lat z odch. standardowym dwóch lat, co odpowiada stopie dyskontowej 8,3% z błędem standardowym 1,4%.

Rozwiązanie:

NPV - zaktualizowana wartość netto (wartość bieżąca netto) inwestycji developera na podstawie (1) wynosi:

$$NPV = \sum_{t=1}^{t=3} \frac{D_t}{(1+r)^3} - I_1 = (5267{,}93 - 700)\_tys.zł = 4567{,}93\_tys.zł$$

Następnie, uwzględniając dane do wyceny wartości bieżącej netto projektu inwestycyjnego z uwzględnieniem formuł: (7.1) do (7.3), zestawiamy:

[119] Wykorzystano generator liczb losowych.

[120] Funkcja LOS w MS Excel zwraca losową liczbę rzeczywistą o równomiernym rozkładzie, która jest większa niż lub równa 0 i mniejsza od 1. Nowa losowa liczba rzeczywista jest zwracana po każdym obliczeniu arkusza.

$$(D_{t_1} \text{ z błędem } \pm\sigma_{D_{t_1}}) \Rightarrow (1180 \pm 150)\_tys.zł$$

$$(D_{t_2} \text{ z błędem } \pm\sigma_{D_{t2}}) \Rightarrow (1890{,}6 \pm 220)\_tys.zł$$

$$(D_{t_3} \text{ z błędem } \pm\sigma_{D_{t_3}}) \Rightarrow (3260 \pm 300)\_tys.zł$$

$$(r \text{ z błędem } \pm\sigma_r) \Rightarrow (0{,}083 \pm 0{,}014)$$

$$(I_1 \text{ z błędem } \pm\sigma_{I_1}) \Rightarrow (700 \pm 70)\_tys.zł$$

Wykorzystując formuły (9.1), (9.2) i (9.3) oraz (14) dla poszczególnych lat zestawiamy iloczyny kwadratów odpowiednich pochodnych wraz z ich błędami:

rok pierwszy:

$$\left(\frac{\partial NPV}{\partial D_{t_1}}\right)^2 \cdot \sigma_{D_{t_1}}^2 + \left(\frac{\partial NPV}{\partial r}\right)_1^2 \cdot (\sigma_r)^2 = 1{,}083^{-2} \cdot 150^2 + 1180^2 \cdot 1{,}083^{-4} \cdot 0{,}014^2 = 19381{,}78\_tys.zł$$

rok drugi:

$$\left(\frac{\partial NPV}{\partial D_{t_2}}\right)^2 \cdot \sigma_{D_{t_2}}^2 + \left(\frac{\partial NPV}{\partial r}\right)_2^2 \cdot (\sigma_r)^2 = 1{,}083^{-4} \cdot 220^2 + 1890{,}6^2 \cdot 1{,}083^{-6} \cdot 4 \cdot 0{,}014^2 = 36919{,}67\_tys.zł$$

rok trzeci:

$$\left(\frac{\partial NPV}{\partial D_{t_3}}\right)^2 \cdot \sigma_{D_{t_3}}^2 + \left(\frac{\partial NPV}{\partial r}\right)_3^2 \cdot (\sigma_r)^2 = 1{,}083^{-6} \cdot 300^2 + 3260^2 \cdot 1{,}083^{-8} \cdot 9 \cdot 0{,}014^2 = 65685{,}31\_tys.zł$$

zakup gruntu w pierwszym roku inwestycji:

$$\left(\frac{\partial NPV}{\partial I_1}\right)^2 \cdot \sigma_{I_1}^2 = 4900\_tys.zł$$

Wynikowe odchylenie standardowe dla inwestycji deweloperskiej obliczone na podstawie (14) wynosi:

$$\sigma_{NPV_{\pm}\_tys.zł} = \sqrt{19381{,}78 + 36919{,}67 + 65685{,}31 + 4900} = \sqrt{126886{,}76} = \pm 356{,}21\_tys.zł$$

Zapis końcowy dla ryzyka wartości *VaR* formuły *NPV* realizowanej dewelopersko inwestycji przedstawia różnica wielkości estymowanej i jej błędu standardowego. Uzasadnienie powyższe jest zgodne z opinią Luenbergera [2003, s. 140-146], bowiem dla analizy ekonomicznej inwestycji w dążeniu do maksymalizacji zdyskontowanych przepływów pieniężnych D_t pomniejszonych o nakład początkowy inwestycji zysku z inwestycji I_1 (jako funkcji celu (1.1)) rozważania ilościowe na temat ryzyka wartości inwestycji odniesione do zysku poprzez jego korektę in plus z jednoczesnym założeniem jego maksymalizacji nie mają sensu ekonomicznego, zatem ostatecznie przedział wartości:

$$VaR_{NPV} = (NPV - \sigma_{NPV\_}) = (4567{,}93 - 356{,}21)\_tys.zł = (4211{,}72 - 4567{,}93)tys.zł$$

oraz jako zmienność:

$$NPV_{Zm}\_(\%) = \left(\frac{356{,}21\_tys.zł}{4567{,}93\_tys.zł}\right) \cdot 100\% \approx 8\%$$

Odpowiedź: Inwestycja developerska ma wartość zawartą w przedziale od 4,2 mln. zł do 4,6 mln. zł z błędem 8%.

Zakończenie

Arkusz kalkulacyjny jest potężnym narzędziem obliczeniowym, ułatwiającym wszelkie kalkulacje. Posiada wbudowane funkcje finansowe, rozbudowane możliwości konfiguracyjne, oraz - co najważniejsze - jest bardzo wygodny w obsłudze. Aby skorzystać z możliwości jakie oferuje Arkusz, należy się zapoznać z podstawowymi jego funkcjami. Samodzielne wykonanie zadań, nawet tych najprostszych, zachęci do korzystania z tego narzędzia oraz wzbudzi potrzebę zdobycia szerszej wiedzy na ten temat. Niniejszy rozdział dostarczył informacji w zakresie wykorzystania funkcji finansowych w programie MS Excel.

W pracy, zamiarem autorów było pokazanie zastosowania wybranych metod dochodowych (dyskontowanych), na przykładzie różnych funkcji stosowanych w arkuszu MS Excel. W pewnych sytuacjach decyzyjnych, samo obliczenie wartości jako wyniku, może być informacją niewystarczającą - w Przykładzie 7. w podrozdziale 4.6 - dla funkcji NPV uzyskano wynik 4,6 mln. zł. Taka sytuacja dotyczy uzasadnienia finansowego dla przyjętego pola negocjacji, kiedy wartość wyceny ma wymiar ustalający (konstytutywny).

Uwzględniając ustaloną w sposób empiryczny tolerancję wyceny, wyniki obliczeń poza przykładem zastosowań zostały uzupełnione metodycznym, graficznym i analitycznym modelem wyceny ryzyka wartości, jako *Value at Risk* , otrzymując błąd wyceny na poziomie 8% dla szacowanej inwestycji deweloperskiej. Pod tym względem, w obszarze zastosowań praktycznych w rachunku wyceny inwestycji, rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych okazał się bardzo przydatnym i efektywnym narzędziem badawczym.

Streszczenie

Rozdział czwarty prezentuje podstawowe informacje i zasady korzystania z arkusza kalkulacyjnego na przykładzie programu MS Excel. Zostały w nim omówione wybrane zagadnienia, dotyczące funkcji finansowych. Opisane w rozdziale metody, pozwolą na wykonanie podstawowych operacji obliczeniowych, dotyczących teorii finansów oraz związanych z nimi metod matematycznych tj.: teoria procentu, czy renty matematycznej (annuity). W podrozdziałach zostały omówione także podstawowe funkcje finansowe (FV, PV, PMT i RATE), a zasady ich zastosowania, zobrazowane zostały prostymi przykładami liczbowymi. W kolejnych podrozdziałach są omówione bardziej szczegółowo metody: NPV i IRR, wraz z przykładami liczbowymi.

Podrozdział 4.1 przedstawia ogólne zasady wykonywania obliczeń w arkuszu kalkulacyjnym, w zakresie pozwalającym na swobodne wykonanie obliczeń finansowych. Zaprezentowane zostały również podstawowe funkcje finansowe, zobrazowane przykładami. Funkcje te wykorzystywane są samodzielnie, oraz wchodzą w skład bardziej złożonych modeli obliczeniowych w grupie metod dochodowych, stąd zakres opisanych metod obejmuje funkcje: PV, FV, PMT i RATE. Podrozdział 4.2 skupia się na funkcji wartości bieżącej netto (NPV). Zawiera także przykład liczbowy dla właściwego zobrazowania i do samodzielnego wykonania podobnych zadań. Podrozdział 4.3 zawiera omówienie metody obliczenia wewnętrznej stopy zwrotu (IRR), z wykorzystaniem wzoru, oraz wbudowanej w arkusz kalkulacyjny funkcji. Dla lepszego wyjaśnienia, zamieszczono przykład liczbowy. W podrozdziale 4.4 przedstawiono na przykładzie funkcji NPV opis dla, szerokiego w finansach, pojęcia wartości ryzykownej. W znaczeniu ilościowej oceny, istotą ryzyka inwestycyjnego jest odpowiedź na pytanie o wielkość straty w związku z podejmowaną decyzją inwestycyjną. Podrozdział 4.5 zawiera, w oparciu o reguły rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych, na przykładzie funkcji NPV wyprowadzenie wzoru dla wartości ryzykownej. Reguła wyznaczania błędu maksymalnego dla funkcji wielu zmiennych, poprzez jej różniczkowanie cząstkowe, stanowi o istocie zasad dla prawa przenoszenia się błędów w powszechnie stosowanym w finansach modelu Value at Risk (VaR) opartym na pojedynczym odchyleniu standardowym. W podrozdziale 4.6 przedstawiono w sposób praktyczny zastosowanie wyprowadzonego wcześniej wzoru na wartość ryzykowną dla funkcji NPV, jako funkcji wielu zmiennych. W obliczeniach pokazano przykład liczbowy z wykorzystaniem generatora liczb losowych zawartego w arkuszu MS Excel.

Zapoznanie się z Rozdziałem czwartym pozwoli przyswoić wiedzę z teorii finansów w zakresie swobodnego wykonania podstawowych obliczeń finansowych wraz z szczegółowym rachunkiem błędów na przykładzie funkcji NPV- w sposób jak najbardziej przystępny dla osób, które chcą poznać podstawowe pojęcia finansowe lub powtórzyć wiadomości z tej dziedziny, jak również w sposób praktyczny wykorzystać zagadnienia rachunku różniczkowego dla funkcji wielu zmiennych.

Słowa kluczowe

NPV, IRR, PMT, FV, PV, RATE, inwestycje, pochodnia funkcji wielu zmiennych, prawo C.F. Gaussa przenoszenia się błędów, VaR.

Selected financial functions in MS Excel - applications of calculations and calculus for functions of many variables in risk assessment

Summary

Chapter 4 presents the basic information and rules of using a spreadsheet, based on the example of MS Excel. It discusses selected issues related to financial functions. The methods described in this chapter will allow you to perform basic computational operations regarding the theory of finance and related mathematical methods, i.e. the theory of interest or mathematical rent (annuity). The subsections also discuss the basic financial functions (FV, PV, PMT and RATE) and the principles of their application, illustrated with simple numerical examples. The following sections discuss the NPV and IRR methods in more detail, with numerical examples.

Subchapter 4.1 presents general rules for performing calculations in a spreadsheet, to the extent that allows you to freely perform financial calculations. The basic financial functions were also presented, illustrated with examples. These functions are used independently and are part of more complex calculation models, hence the scope of the methods described includes the functions: PV, FV, PMT and RATE. Section 4.2 focuses on the Net Present Value (NPV) function. It also contains a numerical example for proper display and for self-execution. Section 4.2 discusses the method of calculating the internal rate of return (IRR) using a formula and a function built into the spreadsheet. For a better explanation, a numerical example is provided, also for self-execution. Getting acquainted with chapter 4 will allow you to acquire knowledge of the theory of finance in the field of the free implementation of basic financial calculations (and mathematics related to this subject). This is the basis for the use of many more advanced methods that will be discussed later in this chapter. In section 4.4, a description of the concept of risky value in board understanding in finance, is presented using the NPV function as an example. The essence of investment risk, in sense of quantitative assessment, is the answer to the question of the amount of loss in connection with an investment decision. Section 4.5 contains the derivation of the formula for the Value at Risk (VaR), based on the rules for the application of calculus for functions of many variables on the example of the NPV function. The rule for determining the maximum error for a function of many variables by its partial differentiation is the essence of the rules for the law of transmission of errors in the Value at Risk (VaR) model commonly used in finance and based on a single standard deviation. Section 4.6 presents a practical application for the value at risk formula, derived above for the NPV function as a multivariable function. A numerical example using the random number generator included in the MS Excel worksheet has been included in the calculation.

Referring to chapter 4 will allow to acquire the knowledge from the finance theory in the scope of free performance of the basic financial calculations with the detailed error calculation on the example of NPV function in the most accessible way for people who want to learn the basic financial concepts or repeat the knowledge from this field as well as to use the concept of differential calculus for functions of many variables in a practical way.

Keywords
NPV, IRR, PMT, FV, PV, RATE, investment, derivative of multivariable function, Carl Friedrich Gauss's law of error propagation, Value at Risk (VaR).

Bibliografia

1. Banach S., *Rachunek różniczkowy i całkowy tom 1 i tom 2*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1957.
2. Borowski K., *Miary ryzyka na rynku akcji i obligacji*, Wydawnictwo Difin, Warszawa 2014.
3. Butler C., *Mastering Value at Risk. A step-by step guide to understanding and applying Var*, Finanncial Times Proffessional Limited 1998.
4. Cea J., *Optymalizacja. Teoria i algorytmy*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1976.
5. Cypryjański J., Borawska A., Komorowski T., *Excel dla menedżera*, Wydawnictwo PWN, Warszawa 2016.
6. Czaja J., *Metody szacowania wartości rynkowej i katastralnej nieruchomości*, Wydanie pierwsze, KOMP-SYSTEM, Kraków 2001.
7. Ferguson G.A., Takane Y., *Analiza statystyczna w psychologii i pedagogice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.
8. Gauss C.F., *Theoria Motus Corporum Coelestium,* Hamburg 1809.
9. Ginter J., *Nie bój się pochodnej*, Wydawnictwo Naukowo Techniczne, Warszawa 2008.
10. Jackson M., Staunton M., *Zaawansowane modele finansowe z wykorzystaniem Excela i VBA*, Wydawnictwo HELION, Gliwice 2004.
11. Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje. Instrumenty finansowe. Aktywa niefinansowe. Ryzyko finansowe. Inżynieria finansowa,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
12. Jakimowicz A., *Od Keynesa do teorii chaosu*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.
13. Krysiak Z., *Ryzyko kredytowe a wartość firmy*, Wydawnictwo Oficyny Ekonomicznej Kraków, Kraków 2006.
14. Kuziak K., *Pomiar ryzyka przedsiębiorstwa. Modele pomiaru i ich ryzyko*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław 2011.
15. Leja F., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1977.
16. Luenberger D.G., *Teoria inwestycji finansowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.
17. Luenberger D.G., *Teoria optymalizacji*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1974.
18. Marcinek K., *Finansowa ocena inwestowania w nieruchomości komercyjne,* Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 2009.
19. Matłoka M., Światłowski J., *Matematyka finansowa i funkcje finansowe arkusza kalkulacyjnego*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej, Poznań 2003.
20. Mikołajczyk K., *Narzędzia analizy danych finansowych w programie Microsoft Excel*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków 2014.
21. Ostrowska E., *Inwestycje Finansowe*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2003.
22. Pastusiak R., *Ocena efektywności inwestycji*, Wydawnictwo CeDeWu, Warszawa 2003.

23. Piasecki K., Anholcer M., Echaust K., *E-matematyka wspomagająca ekonomię*, Wydawnictwo C. H. Beck, Warszawa 2013,
24. Sierpińska M., Jachna T., *Ocena przedsiębiorstwa według standardów światowych*, Wydanie drugie, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994.
25. Staniec I., *Metody ilościowe w zarządzaniu organizacją*, C.H. Beck, Warszawa 2013.
26. Zaporożec G.I., *Metody rozwiązywania zadań z analizy matematycznej*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1976.
27. Zeldowicz J.B., *Matematyka wyższa dla poczatkujących zastosowania w fizyce*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1976.
28. Zeliaś A., red. nauk., *Statystyczne metody oceny ryzyka w działalności gospodarczej*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków 1998.

Netografia

29. https://www.superprof.pl/blog/excel-krok-po-kroku/ - (dostęp 14.06.2021 r.)
30. https://support.microsoft.com/pl-pl/office/funkcja-pv-23879d31-0e02-4321-be01-da16e8168cbd - (dostęp 16.06.2021 r.)
31. http://www.excelowo.pl/index.php/funkcje/finansowe/152-funkcja-finansowa-pv-w-praktyce - (dostęp 16.06.2021 r.)
32. https://support.microsoft.com/pl-pl/office/fv-funkcja-2eef9f44-a084-4c61-bdd8-4fe4bb1b71b3 - (dostęp 14.06.2021 r.)
33. http://www.excelowo.pl/index.php/funkcje/finansowe/22-funkcja-fv-wartosc-przyszla-inwestycji - (dostęp 14.06.2021 r.)
34. https://support.microsoft.com/pl-pl/office/funkcja-pmt-0214da64-9a63-4996-bc20-214433fa6441 - (dostęp 16.06.2021 r.)
35. https://excelness.com/blog/funkcja-pmt-czyli-jak-policzyc-rate-kredytu/ - (dostęp 16.06.2021 r.)
36. https://support.microsoft.com/pl-pl/office/funkcja-rate-9f665657-4a7e-4bb7-a030-83fc59e748ce - (dostęp 14.06.2021 r.)
37. https://www.officekurs.pl/formula-rate-excel - (dostęp 16.06.2021 r.)
38. https://support.microsoft.com/pl-pl/office/funkcja-npv-8672cb67-2576-4d07-b67b-ac28acf2a568 - (dostęp 16.06.2021 r.)
39. https://econopedia.pl/fp/budzetowanie/npv-wartosc-biezaca-netto/ - (dostęp 16.06.2021 r.)
40. https://support.microsoft.com/pl-pl/office/irr-funkcja-64925eaa-9988-495b-b290-3ad0c163c1bc - (dostęp 14.06.2021 r.)
41. https://econopedia.pl/finanse/irr-wewnetrzna-stopa-zwrotu/ - (dostęp 16.06.2021 r.)
42. Gauss C.F., *Theoria motus corporum coelestium...* (infn.it) – dostęp: (14-06-2021 r.).

Przemysław Leończyk, Marcelina Słaba – Wiącek

Rozdział piąty

ANALIZA DANYCH Z WYKORZYSTANIEM NARZĘDZI SAS

Spis treści Rozdziału piątego

Wprowadzenie 179
5.1. Ogólna charakterystyka systemu SAS 180
5.2. Wybrane zagadnienia wnioskowania statystycznego z zastosowaniem parametrycznych testów statystycznych 182
5.3. Wybrane zagadnienia wnioskowania statystycznego z zastosowaniem nieparametrycznych testów statystycznych 185
Zakończenie 187
Streszczenie 188
Słowa kluczowe 188
Summary 189
Keywords 189
Bibliografia 190
Netografia 190

Wprowadzenie

Tematyka rozdziału dotyczy analizy rozkładu danych informacji w celu uzyskania na ich podstawie kolejnych użytecznych informacji oraz dalszych wniosków. Ze względu na rodzaj danych, a także stawianych problemów, konieczne jest w tym celu użycie metod statystycznych. Obecnie wykorzystywane są różnego rodzaju narzędzia informatyczne, które służą ułatwianiu i usprawnianiu oraz optymalizacji procesów przetwarzania danych informacji w procesie badawczym. Jednym spośród nich są systemy SAS (Statistica Analysis System).

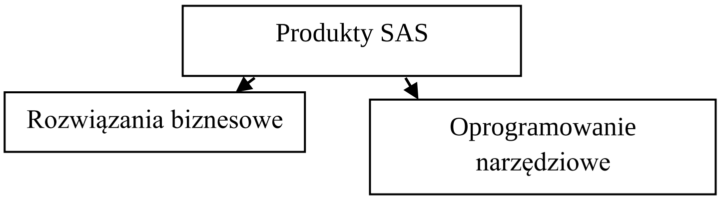
W rozdziale zostały przedstawione podstawowe informacje na temat narzędzi informatycznych SAS oraz przykłady zastosowań różnego rodzaju testów statystycznych w procesie wnioskowania statystycznego.

Na rynku dostępnych jest wiele programów statystycznych ułatwiających pracę osobom prowadzącym badania statystyczne. Najbardziej znanymi są *Statistica*, *SPSS* oraz *SAS.* Programy te są na tyle popularne, że weszły do kanonu nauczania w szkołach wyższych. *SAS* jest wykorzystywany głównie *do opisu interacji gospodarczych*, a także ma zastosowanie w procesie dydaktycznym na uczelniach wyższym.

5.1. Ogólna charakterystyka systemu SAS

SAS jest to system służący do analiz statystycznych zapoczątkowany przez Jamesa Goodnighta. Johna Salla oraz Tonego Barr w latach 1966-72. Początkowo system był przeznaczony na platformę *mainfrane IBM*. W roku 1976 powstała firma SAS Institut. Od tego czasu zarówno firma, jak i oprogramowanie przeszły wiele zmian, natomiast jądro systemu pozostało takie, jak na początku[121] Celem tego oprogramowania (jak również konkurencyjnych produktów) jest przekształcenie danych w informację. Wydobycie wiedzy z danych, tu i teraz daje przewagę konkurencyjną nad innymi podmiotami.

Poniższy schemat przedstawia podział produktów SAS.

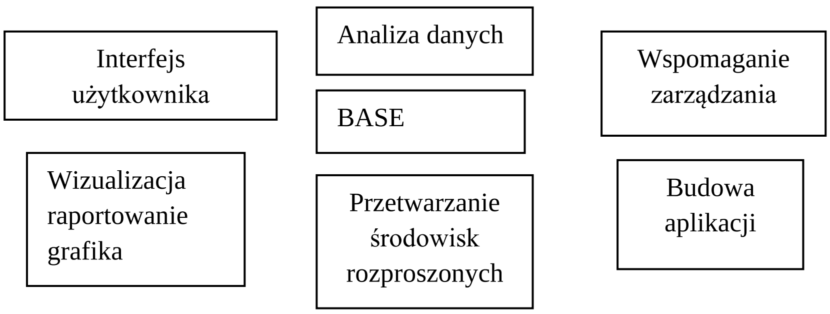


Źródło: Opracowanie własne.

SAS Institue dostarcza zintegrowanych pakietów informatycznych zawierających pakiet wysoce specjalistycznych rozwiązań i usług dla Business Intelligence. Są one doskonałym narzędziem służącym do analizy bieżących wyzwań biznesowym oraz prognozowania przyszłych. Oprogramowanie to znajduje również liczne zastosowania w projektach badawczych.

SAS jest zbudowany z oddzielnie instalowanych modułów przeznaczonych do wykorzystywania w określonych zastosowaniach.[122]

Oto podstawowe moduły systemu SAS.



Źródło: W. Grzenda, A. Ptak – Chmielewska, K. Przanowski, U. Zwierz: Przetwarzanie danych w SAS, Wyd. II, Oficyna Wydawnicza SGH w Warszawie, Warszawa 2012, s. 14.

W procedurach statystycznych używane dane wprowadzane są bezpośrednio z klawiatury podczas sesji SAS [123] lub wczytywane z tabeli bazy danych. Wszystkie dane, które są przetwarzane w systemie SAS są przechowywane w tzw. Informacyjnej Bazie

---

[121] E. Frątczak, A. Korczyński, *Statystyka od podstaw z systemem SAS*, Oficyna Wydawnicza. Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Warszawa 2013, s. 10
[122] Tamże, s. 15
[123] Tamże, s. 15

Danych. Głównym elementem tej bazy jest Biblioteka. Ponadto dane statystyczne są przechowywane za pomocą tabel zawierających wiersze i kolumny. Wiersze przedstawiają obserwacje, natomiast kolumny odpowiednie zmienne.

W systemie SAS Biblioteka nie jest tworzona w postaci tabel, ale za pomocą referencji dostosowanych do istniejącej struktury katalogów oraz plików w systemie operacyjnym. Ponadto referencje te są aktywne tylko podczas trwania sesji SAS. Ponadto Biblioteka może być powiązana z wieloma katalogami na dysku. Ten sam fizyczny zbiór na dysku może być z wieloma Bibliotekami. Biblioteka zawiera zbiory oraz katalog z danymi. Użytkownik, który korzysta z danych nie musi znać ich położenia na danym dysku. [124] Jedynie wykorzystuje je do uruchomienia interesującej go procedury.

Oprogramowanie SAS przekształca dane w pewne informacje. Przekształcanie danych z próby statystycznej w informacje o populacji to zadanie wnioskowania statystycznego.

Wnioskowanie statystyczne zajmuje się wnioskowaniem o populacji generalnej na podstawie danych zebranych na podstawie statystycznej próby badawczej. Próba ta jest (powinna być) dobierana w sposób losowy, zgodnie z procedurą, z populacji generalnej. Losowość oraz reprezentatywność próby są głównymi założeniami niezbędnymi do przeprowadzenia prawidłowego wnioskowania statystycznego.

Za pomocą wnioskowania statystycznego dokonujemy:

- estymacji (szacowania) nieznanych parametrów populacji generalnej lub jej rozkładu na podstawie próby,
- weryfikacji hipotez dotyczących populacji generalnej na podstawie badań z próby.

Do weryfikacji hipotez statystycznych służą testy statystyczne. W zależności od rodzaju danych przeznaczonych do analizy wybieramy narzędzie z grupy testów parametrycznych, bądź nieparametrycznych.

W tabeli poniżej przedstawiony jest podstawowy podział na testy parametryczne oraz nieparametryczne, wymieniając kilka testów z każdej z grup.

Testy statystyczne	
Parametryczne	**Nieparametryczne**
- test istotności dla średniej - test istotności dla różnicy dwóch średnich - test istotności dla wariancji - test istotności dla dwóch wariancji - test istotności dla frakcji	- test znaków - test serii - test niezależności x^2

Źródło: Opracowanie własne.

Obecnie wyróżniamy dwa podejścia z wykorzystaniem narzędzi SAS do weryfikacji hipotez statystycznych: tradycyjne i współczesne.

Podejście tradycyjne polega na tym, że dane obliczone z próby służą do wyliczenia odpowiedniej statystyki testującej i porównania jej z odpowiednią wartością odczytaną z tablic dotyczących zastosowanej statystyki. Jeżeli wartość statystyki testującej znajdzie się w obszarze krytycznym, to hipotezę zerową odrzucamy na rzecz hipotezy alternatywnej. W przypadku przeciwnym, stwierdzamy, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, czyli ją praktycznie przyjmujemy.

[124] Tamże, s.32

Podejście współczesne opiera się na porównaniu założonego poziomu istotności α z prawdopodobieństwem P, które stanowi miarę wiarygodności weryfikowanej hipotezy. Decyzję weryfikacyjną podejmuje się w momencie porównania wartości przyjętego poziomu istotności α z wartością prawdopodobieństwa P.

5.2. Wybrane zagadnienia wnioskowania statystycznego z zastosowaniem parametrycznych testów statystycznych

Zaprezentowane tu zostanie wnioskowanie statystyczne z wykorzystaniem testów parametrycznych.

Jednym z przykładów wnioskowania o populacji generalnej jest weryfikacja hipotezy o średniej w populacji generalnej z danym odchyleniem standardowym. Oto przykład. .

Przykład 1[125]

Czas korzystania z parkingu wynosi 90 minut. Posiadana próba losowa składa się z 320 czasów postoju, gdzie średnia to 120 minut. Natomiast odchylenie standardowe wynosi 15 minut. Czy średni czas postoju wynosi 90 minut? Przyjmijmy, że poziom istotności jest równy α = 0,05 oraz czas postoju na parkingu ma rozkład normalny.

Rozwiązanie:

Na początku ustalamy hipotezę zerową H_0 oraz alternatywną H_1:

$$H_0 : m = 90 \text{ minut}; \quad H_1 : m > 90 \text{ minut}$$

Stosujemy statystykę U z rozkładem normalnym standaryzowanym N(0;1) i wykorzystujemy dane z zadania:

$$\mathrm{U} = \frac{120-90}{15}\sqrt{320} = 35{,}78$$

Z tablic rozkładu normalnego N(0;1) odczytujemy, dla podanego poziomu istotności α = 0,05, wartość u_{α} = 1,64.

Stwierdzamy, że jednostronny obszar krytyczny, określony relacją: P (U ≥ $u_{2,\alpha}$) = α, zawiera obliczoną z próby wartość. Zatem odrzucamy hipotezę zerową na rzecz hipotezy alternatywnej. Praktycznie oznacza to, że cyrkulacja pojazdów na parkingu jest za niska i należy wprowadzić dodatkową opłatę po 1,5 w celu jej przyśpieszenia.

Odpowiedź: Średni czas postoju przekracza 90 minut.

Za pomocą testu statystycznego możemy również zweryfikować hipotezę o różnicy średnich (którego szczególnym przypadkiem jest hipoteza o równości średnich) w dwóch populacjach generalnych. Test ten może być szczególnie przydatny do wykrywania systemowych dyskryminacji np. w zakresie nierówności płac pomiędzy przedstawicielami poszczególnych płci lub innych, ale jednorodnych pod jakimś względem, grup społecznych.

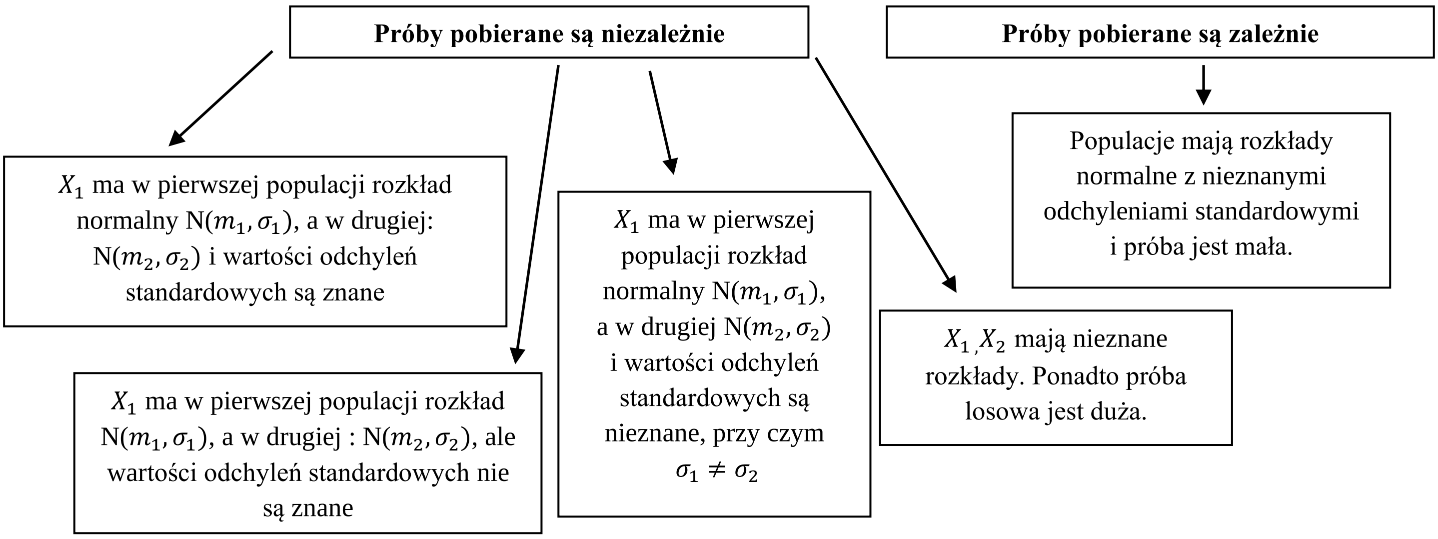
Niech X_1 oznacza badaną cechę w populacji pierwszej, natomiast X_2 tą samą cechę, ale w populacji drugiej.[126] Liczebność prób z odpowiednich populacji, to odpowiednio: n_1

[125] B. Pułaska – Turyna, *Statystyka dla ekonomistów wydanie III zmienione*, Copyright by Difin SA, Warszawa 2011, s. 240

i n_2. Hipoteza zerowa zakłada, że różnica pomiędzy średnimi w danych populacjach ma wartość σ_0, alternatywna zaś, że jest różna od σ_0.[127]

$$H_0 : m_1 - m_2 = \sigma_0; \qquad H_1 : m_1 - m_2 \neq \sigma_0$$

Weryfikując hipotezę H_0 należy wziąć pod uwagę różne sposoby doboru prób z badanych populacji, a także założenia dotyczące rozkładu cech X_1 i X_2. Rozróżniamy następujące przypadki, które są przedstawione na poniższym rysunku.



Źródło: Opracowanie własne na podstawie Frątczak E., Korczyński A: Statystyka od podstaw z systemem SAS. Oficyna Wydawnicza. Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Warszawa 2013, s. 172.

W Przykładzie 2. zilustrujemy weryfikację hipotezy o średnich w dwóch populacjach generalnych.

Przykład 2[128]

Posiadamy dane dotyczące kosztów wytworzenia kolekcjonerskich szabel w dwóch warsztatach. Produkt nie jest wykonywany w sposób seryjny i z tego powodu koszty są szacowane w sposób indywidualny i ulegają istotnym zmianom. Z warsztatu pierwszego otrzymano losową próbę 140 cen (n_1 = 140,) zaś z warsztatu drugiego otrzymana próbę 160 (n_2 = 160). Na podstawie zebranych danych wyznaczono: $\bar{x}_1$= 1850 zł, S_1 = 250zł oraz $\bar{x}_2$ = 1650 zł, S_2 = 450zł.
Zweryfikować: hipotezę, że średnie koszty w obu firmach są równe, przy poziomie istotności równym α = 0,05.

[126] E. Frątczak, A. Korczyński, *Statystyka od podstaw z systemem SAS*, Oficyna Wydawnicza. Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Warszawa 2013, s. 165.
[127] Tamże, s. 171
[128] B. Pułaska – Turyna, *Statystyka dla ekonomistów wydanie III zmienione*, Copyright by Difin SA, Warszawa 2011.

Rozwiązanie:
Formułujemy hipotezy: zerową H_0 i alternatywną H_1:

$$H_0 : m_1 = m_2; \qquad H_1 : m_1 \neq m_2$$

Dokonujemy obliczeń statystyki U z rozkładem N(0;1) przy nieznanym odchyleniu standardowym dla dużych prób:

$$U = \frac{1850-1650}{\sqrt{\frac{250^2}{140}+\frac{450^2}{160}}} = 4{,}83$$

Przy zadanym poziomie istotności α = 0,05, odczytana z tablic wartość u_α = 1,96. Porównując: U = 4,83 z u_α = 1,96, stwierdzamy, że U należy do obszaru krytycznego obustronnego: P(|U|≥ u_α). Zatem hipotezę H_0 odrzucamy i przyjmujemy alternatywną H_1.
Odpowiedź: Średnie koszty w obu firmach nie są równe.

Kolejnym omówionym przypadkiem weryfikacji hipotezy jest hipoteza o wariancji w populacji z rozkładem normalnym z nieznaną wartością średnią oraz odchyleniem średnim.

Oto hipotezy: zerowa i alternatywna:[129]

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2; \qquad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

Hipotezę tą weryfikujemy na podstawie n- elementowej próby losowej za pomocą statystyki x^2 o liczbie stopni swobody s = n – 1 dla małej próby n ≤ 30:[130]

$$x^2 = \frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma_0^2}$$

Następnie omówiona zostanie weryfikacja hipotezy o dwóch wariancjach dwóch populacji generalnych. Wówczas hipotezy przyjmują następujące postacie:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ lub } H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1; \qquad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \text{ lub } H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$$

Stosowany test istotności, który bada zasadność hipotezy zerowej ma następującą postać:[131]

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Ze względu na postać hipotezy alternatywnej zasadne jest ponumerowanie prób w taki sposób, aby była spełniona relacja: $S_1^2 \geq S_2^2$.

Innym przykładem weryfikacji hipotez jest hipoteza o frakcjach w populacji generalnej. Oto hipotezy:[132]

$$H_0 : p_1 = p_2 \text{ lub } H_0 : p_1 - p_2 = 0; \qquad H_1 : p_1 \neq p_2 \text{ lub } H_1 : p_1 - p_2 \neq 0$$

ewentualnie: [133] $H_1 : p_1 > p_2$ lub $H_1 : p_1 - p_2 > 0$

$$H_1 : p_1 < p_2 \text{ lub } H_1 : p_1 - p_2 < 0$$

Stosujemy statystykę U o asymptotycznym rozkładzie N(0;1):[134]

[129] B. Pułaska – Turyna, *Statystyka dla ekonomistów wydanie III zmienione,* Copyright by Difin SA, Warszawa 2011, s. 244
[130] Tamże, s. 245
[131] Tamże, s. 261
[132] Tamże, s. 252
[133] Tamże, s. 253
[134] Tamże, s. 257

$$U = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\frac{\hat{P} \cdot (1 - \hat{P})}{n}}}$$

W praktyce jest to rozkład wykorzystywany dla „dużych” prób:

$$n_1 > 100 \text{ oraz } n_2 > 100.$$

Rozważania te zilustrujemy przykładem rachunkowym.

Przykład 3.[135]

Mamy 200 klientów, którzy dokonują zakupu 85 soków pomarańczowych oraz 300 innych klientów którzy kupują 162 soki jabłkowe. Zbadać, czy frakcje obu grup klientów są jednakowe.

Rozwiązanie:

Formułujemy hipotezę zerową oraz alternatywną:

$$H_0 : p_1 = p_2 ; \quad H_1 : p_1 \neq p_2$$

Hipoteza zerowa zakłada, że prawdopodobieństwo zakupu soków pomarańczowych oraz jabłkowych jest takie samo wobec założenia przeciwnego, które przedstawione jest w hipotezie alternatywnej. Zatem konieczne jest wyliczenie frakcji, które są wyróżnione w pierwszej i drugiej próbie oraz frakcji kupujących:

$$\widehat{p_1} = \frac{85}{200} = 0{,}425, \widehat{p_2} = \frac{162}{300} = 0{,}540, \hat{p} = \frac{85+162}{200+300} = 0{,}494, \text{n} = \frac{200 \cdot 300}{200+300} = 120.$$

Stwierdzamy, że 42,5% ogółu klientów kupuje soki pomarańczowe, a 54% soki jabłkowe. Ogółem spośród 500 kupujących. 49,4% nabywców dokonuje zakupu któregoś soku. Obliczone wyniki podstawiamy do wzoru na statystykę U i otrzymujemy :

$$U = \frac{0{,}425 - 0{,}540}{\sqrt{\frac{0{,}494 \cdot (1 - 0{,}494)}{120}}} = -2{,}52$$

Z tablic N(0;1) odczytujemy: u_{α} = 1,96 i stwierdzamy, że obliczona wartość należy do obszaru krytycznego.

Odpowiedź: Odrzucamy hipotezę zerową na rzecz hipotezy alternatywnej. Zatem frakcje obu grup klientów różnią się od siebie.

5.3. Wybrane zagadnienia wnioskowania statystycznego z zastosowaniem nieparametrycznych testów statystycznych

Kolejną grupą testów są testy nieparametryczne. Zaliczamy do nich m.in. test znaków. Jest to test, który jest także nazywany testem istotności dla mediany. Stosujemy go do oceny różnic pomiędzy danymi parami obserwacji. Hipoteza zerowa tutaj zakłada, że różnice które występują pomiędzy obserwacjami rozkładają się równomiernie:[136]

$$H_0 : P\,(H_i > Y_i) = 0{,}5$$

Natomiast typ hipotezy alternatywnej jest zależny od jej etapu dwustronnego, jednostronnego oraz lewostronnego. W celu przeprowadzenia testu istotności dla mediany

[135] Tamże, s. 257

[136] E. Frątczak, A. Korczyński, *Statystyka od podstaw z systemem SAS*, Oficyna Wydawnicza. Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Warszawa 2013, s. 187

musimy w pierwszej kolejności wyznaczyć liczbę obserwacji, które uwzględniane są podczas weryfikacji hipotezy. Kolejno liczone są obserwacje większe od mediany. Natomiast liczba obserwacji o wartościach, które przekraczają medianę są zmienną losową o rozkładzie dwumianowym.

Do badania losowości uporządkowania ciągu, który jest złożony z dwóch rodzajów elementów służy test serii. Za wadliwe elementy przyjmujemy „a", one „rozkładają się" w sposób nielosowy pomiędzy elementami, które są niewadliwe i oznaczone jako „b". Czyli nasz proces, najprościej mówiąc, jest rozregulowany. Do sprawdzania hipotezy zerowej służy statystyka V, która za liczbę serii znaków przyjmuje wyrazy widoczne w danym ciągu.

Test ten jest zilustrowany następującym Przykładem 4:[137]

Przykład 4.

Przyjmujemy za „a" – wadliwy element, zaś za „b" – niewadliwy element. Wówczas mamy: aababbaaba.

Liczba serii w naszym przykładzie wynosi V = 6. W przypadku prób o małej liczebność korzystamy z tablic rozkładu serii. W momencie, w którym liczebność obu typów elementów jest większa od 10, to do weryfikacji wartości statystyki V jest wykorzystywany wzór:[138]

$$U = \frac{V-E(V)}{D(V)}$$

Statystyka ta ma asymptotyczny rozkład normalny N(0;1).

Do badania zależności pomiędzy dwiema cechami służy test niezależności x^2. Test ten dotyczy dużej próby, która musi być próbą prostą. Wówczas hipotezy przyjmują następującą postać:[139]

$$H_0 : F(x) = F_0(x); \qquad H_1 : F(x) \neq F_0(x)$$

Hipoteza zerowa zakłada, że dystrybuanta F rozkładu danej populacji jest opisana dystrybuantą F_0, wobec hipotezy alternatywnej, która stanowi jej zaprzeczenie. Rozkład, który jest określony na bazie próby nie powinien różnić się od teoretycznego. Test niezależności bada rozbieżność pomiędzy rozkładem empirycznym, a teoretycznym. Różnica pomiędzy tymi rozkładami jest mierzona rozbieżnością pomiędzy liczebnościami empirycznymi, a teoretycznymi.

[137] Tamże, s. 193
[138] Tamże, s. 194
[139] Tamże, s. 197

Zakończenie

Narzędzia SAS mają bardzo duże znaczenie praktyczne nie tylko w wielu dziedzinach gospodarki. Można je stosować do weryfikacji różnych hipotez statystycznych. Wówczas w sposób istotny skracają one żmudne przeliczenia ręczne oraz ułatwiają podejmowanie właściwych decyzji dotyczących stawianych hipotez.

Jednak stosowanie narzędzi SAS w niektórych usługach np. kurierskich, ze względu na optymalizację, może prowadzić do wykluczenia niektórych jednostek.

Testy nieparametryczne posiadają dane, które w celu ich opracowania, nie mają dużych wymogów przy stosowaniu narzędzi SAS. Ma to oczywiście pewne konsekwencje, ponieważ nie dostarczają one wyczerpujących informacji w porównaniu z testami parametrycznymi. Testy parametryczne dostarczają statystykom dogłębne interpretacje otrzymanych wyników. Istnieją jeszcze inne możliwości wykorzystywania tych testów np. w badaniach przesiewowych. Narzędzia SAS można również wykorzystywać do stosowania testów parametrycznych.

Streszczenie

Tematyka rozdziału obejmuje analizy dotyczące rozkładu i przetwarzania danych informacji w celu uzyskania, na ich podstawie, użytecznych kolejnych informacji, a także ważnych wniosków praktycznych. W tym celu, ze względu na rodzaj danych oraz stawiane problemy, konieczne jest zastosowanie metod statystycznych.

Obecnie w badaniach naukowych wykorzystywane są powszechnie różnego rodzaju technologie informatyczne służące ułatwianiu i usprawnianiu procesów przetwarzania danych informacji. Jednym spośród wielu narzędzi wspomagających przetwarzanie danych są systemy SAS wykorzystywane przede wszystkim w interakcjach gospodarczych, a także w procesie dydaktycznym na uczelniach wyższych.

W niniejszym rozdziale zaprezentowane są podstawowe informacje o tych narzędziach wraz z możliwością wykorzystania ich do obróbki i wizualizacji danych oraz raportowania. Podane są też przykłady analizy wybranych schematów losowania próby z populacji generalnej. Podstawą wykorzystania powyższych narzędzi jest statystyka w zakresie m. in. metody reprezentacyjnej, wnioskowania statystycznego, analizy szeregów czasowych, wariancji i kowariancji. Ponadto, w rozdziale zawarte są też praktyczne zastosowania metod i narzędzi SAS.

Zawartość merytoryczna rozdziału została podzielona na trzy podrozdziały. W pierwszym z nich przedstawione są ogólne informacje o systemie SAS i jego budowie. W drugim i trzecim podrozdziale omówione są kolejno: statystyczne testy parametryczne i nieparametryczne. Rozważania teoretyczne poparte są rozwiązanymi przykładami rachunkowymi wraz z wyczerpującym komentarzem wyjaśniającym.

Lektura rozdziału wzbogaci wiedzę czytelnika na temat systemu SAS oraz analizy danych z ich praktycznym wykorzystaniem zarówno w procesach gospodarczych, jak i w realizacji różnych przedsięwzięć dydaktycznych w edukacji.

Słowa kluczowe
analiza danych, statystyka, testy parametryczne, testy nieparametryczne

Data analysis using SAS tools

Summary

The subject matter of the chapter shall include analyses on the distribution and processing of the information data in order to obtain, on the basis of it, useful further information as well as important practical conclusions. To this end, due to the type of data and the problems posed, statistical methods must be used.

Today, research is widely used in various information technologies to facilitate and streamline information processing processes. One of the many tools supporting data processing is SAS systems used primarily in economic interactions, as well as in the teaching process in universities.

This chapter presents basic information about these tools, along with the possibility of using them for data processing, visualization and reporting. Examples of analysis of selected sample draw schemes from the general population are also given. The basis for the use of the above tools is statistics on, inter alia, representational method, statistical inference, time series analysis, variance and covariance. In addition, the chapter also includes practical applications of SAS methods and tools

The substantive content of the chapter is divided into three subchapes. The first provides general information about the SAS system and its design. The second and third subseparals discuss statistical parametric and non-parametric tests in turn. Theoretical considerations are supported by resolved accounting examples together with comprehensive explanatory commentary.

Reading the chapter will enrich the reader's knowledge of the SAS system and data analysis with their practical use both in economic processes and in the implementation of various didactic projects in education.

Keywords
data analysis, statistics, parametric tests, non-parametric tests

Bibliografia

1. Borowska M., *Statystyka. Materiały Pomocnicze dla studentów do nauki statystyki*, Copyright by Maria Borowska, Stalowa Wola 2016.
2. Frątczak E., Korczyński A., *Statystyka od podstaw z systemem SAS*, Oficyna Wydawnicza. Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Warszawa 2013.
3. Kot S., Jakubowski J., Sokołowski A., *Statystyka*, Copyright by Difin SA, Warszawa 2012.
4. Ostasiewicz S., Rusnak Z., Siedlecka Z., *Statystyka. Elementy teorii i zadania*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2001.
5. Podgórki J., *Statystyka dla studiów licencjackich*, Polskie Wydawnictwa Ekonomiczne, Warszawa 2010.
6. Pułaska – Turyna B., *Statystyka dla ekonomistów wydanie III zmienione*, Copyright by Difin SA, Warszawa 2011.
7. Sall J., Creight L., Lehman A., *JMP Start Statistics*, Copyright 2007.
8. Starzyńska W., *Statystyka praktyczna*, Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa 2012.

Netografia

9. https://www.naukowiec.org/wiedza/statytyka/testy-parametryczne-vs-nieparametryczne_753.html

Przemysław Leończyk, Joanna Olszowy

Rozdział szósty

MODELOWANIE ZACHOWAŃ GOSPODARCZYCH KONSUMENTA ZA POMOCĄ MIKROEKONOMICZNYCH FUNKCJI POPYTU

Motto:
Potrzeby są ściśle związane z człowiekiem. Cała działalność ludzka nierozerwalnie wiąże się z powstawaniem potrzeb i dążeniem do ich zaspokojenia. Stanowią one punkt wyjścia wszystkich zachowań konsumenta na rynku, są pierwotnym czynnikiem wszelkich działań związanych z dokonywaniem zakupów i uruchamiają cały proces zakupu.
(prof. dr hab. Leszek Rudnicki, ekonomista)

Spis treści Rozdziału szóstego

Wprowadzenie 193
6.1. Modele zachowań konsumenta indywidualnego 194
6.2. Istota aproksymacji 196
6.3. Mikroekonomiczne funkcje popytu - krzywe Engla 198
6.4. Modelowanie ekonometryczne 200
Zakończenie 208
Streszczenie 210
Słowa kluczowe 210
Summary 211
Keywords 211
Bibliografia 212
Netografia 213

Wprowadzenie

Współczesne działania marketingowe koncentrują się na poszukiwaniu sposobów dostarczania konsumentom satysfakcjonujących ich produktów i usług oraz na metodach utrzymania ich zainteresowania w celu generowania zysku dla firmy, poprawiania jej konkurencyjności oraz zabezpieczania pożądanego jej udziału w rynku. Jak wiadomo, zachowanie konsumentów jest systemem złożonym. Istnieje zatem problem odkrycia reguł rządzących podejmowaniem przez nich decyzji konsumenckich.

Badacze różnych dziedzin naukowych stosują wiele metod modelowania zachowań gospodarczych konsumentów. Są to m.in. techniki oparte na logice rozmytej, sieciach neuronowych, drzewach decyzyjnych, czy algorytmach genetycznych. Jednak często stosowane metody nie biorą pod uwagę wielu ważnych czynników, bądź są one mało precyzyjne. Stąd propozycja zastosowania, w badaniach dotyczących zachowań konsumentów, metody modelowania z zastosowaniem mikroekonomicznych funkcji popytu.

W rozdziale dokonana jest krótka charakterystyka przeglądu modeli popytu konsumenta indywidualnego z wykorzystaniem wybranych postaci funkcji popytu Engla. Celem rozważań tego rozdziału jest prezentacja możliwości zastosowania powyższej metody.

Zachowania konsumentów w obecnych warunkach rynkowych, to jedno z bardziej interesujących zagadnień o charakterze zarówno teoretycznym, jak i praktycznym. Zmiany związane z dynamicznie zmieniającą się rzeczywistością gospodarczą, charakteryzują się między innymi szczególnym natężeniem walki konkurencyjnej pomiędzy przedsiębiorstwami. Istotnego znaczenia nabiera wiedza o konsumentach w szerokim ujęciu, związana z zaspokajaniem potrzeb przez konsumentów, ich zachowaniami na globalnych rynkach oraz prawidłowościach w postępowaniu podczas procesu zakupowego. Równocześnie ma miejsce rozwój społeczno-gospodarczy, który powoduje wzrost stopy życiowej, a także unowocześnia się rozwój produkcji związany z automatyzacja i robotyzacją. Na rynku pojawiają się coraz to nowe dobra i usługi, które są wynikiem przemian cywilizacyjno – kulturowych, a to z kolei wpływa nieustannie na preferencje w postępowaniu konsumentów podczas dokonywania przez nich decyzji zakupowych. Zachowanie konsumenta wynika z wrodzonych i nabytych (wciąż modyfikowanych) potrzeb i aspiracji, których zaspokojenie jest połączeniem procesów świadomych i nieświadomych oraz czynników emocjonalnych[140].

Globalizacja doprowadziła m.in. do umasowienia konsumpcji, która przejawia się poprzez wielkie serie i standaryzację produktów, a tym samym prowadzi do homogenizacji konsumpcji. Wielkie serie produktów nie odpowiadają jednak wszystkim konsumentom. Wielu z nich świadomie dąży do heterogenizacji swojej konsumpcji, chcąc podkreślić swój indywidualizm[141].

Zachowania konsumentów[142] i czynniki je determinujące są od wielu lat istotnym nurtem badań różnych nauk, a w szczególności nauk ekonomicznych. Zachowania nabywcze e-konsumentów są zjawiskiem o znacznej dynamice, podlegającym, w swej relatywnie

---

[140] Z. Rusnak, *Statystyczna analiza dobrobytu ekonomicznego gospodarstw domowych*, Wyd. Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław, 2007 s. 118 i 126-127

[141] C. Bywalec, *Konsumpcja a rozwój gospodarczy i społeczny*, C.H. Beck, Warszawa, 2010, 206-211.

[142] Pojęcie „zachowanie konsumenta” pochodzi od takich terminów, jak: consum behavior i consumer behavior, a jednym z pierwszych, który go użył (początek XX w.), był amerykański ekonomista W.H. Reynolds. Annales H - Oeconomia http://oeconomia.annales.umcs.pl . (data dostępu 14.06.2021)

krótkiej historii, istotnym zmianom dokonującym się wraz z szybko ewoluującą technologią teleinformatyczną.

W dyskusji naukowej na temat zachowań konsumentów zauważalny jest wzrost zainteresowania tą problematyką, zwłaszcza w kontekście badań ekonomicznych. Jest przy tym charakterystyczne, że wiedza o zachowaniach konsumentów ma charakter interdyscyplinarny. Informacje na temat ludzkich zachowań pochodzą z wielu dyscyplin naukowych, takich jak: ekonomia, zarządzanie, psychologia, socjologia i kulturoznawstwo. Rok temu nasz świat się zmienił. I choć wciąż powtarzamy, że żyjemy w świecie i w realiach nieuchronnych i ciągłych zmian, to wielu z nas ma wrażenie, że to co znane, odeszło bezpowrotnie. Bez znaczenia, czy traktujemy tę zmianę jako zdarzenie, serię zdarzeń, czy ciągły proces, jedno jest pewne: wpływa ona na wiele dziedzin naszego życia, nie oszczędzając nawet obszarów nam najbliższych, najczulszych, zapewniających nam poczucie bezpieczeństwa.

Wielu z nas odczuwa obawę przed utratą stanowiska, pozycji zawodowej, bezpieczeństwa finansowego. Zresztą, to już nie tylko obawa, ale też nowa rzeczywistość, w której przyszło nam funkcjonować. Przedsiębiorcy działający w nowej rzeczywistości, którą narzuca nam świat WUCA[143] zdają sobie sprawę, że sukces firmy jest zależny od satysfakcji klientów, bo to oni wyznaczają nowe trendy rynkowe.

Skuteczność działań rynkowych jest uzależniona od umiejętności dopasowania się do oczekiwań i zachowań konsumentów oraz antycypowania zmian w tym zakresie. Ponieważ zmiany te wyznaczają przewidywane kierunki działań makroekonomicznych. Jedną z metod pozwalających na prowadzenie badań, dotyczących przewidywania zachowania konsumentów, jest modelowanie zachowań gospodarczych. Identyfikacja czynników, które w najsilniejszy sposób wpływają na decyzje zakupowe, może ułatwić i przyspieszyć podejmowanie właściwych decyzji przez osoby odpowiedzialne za tworzenie strategii działań w firmach.

6.1. Modele zachowań konsumenta indywidualnego

Ekonometryczne modele konsumpcji można podzielić na mikro- i makroekonomiczne. Zbieżne jest to z rozróżnieniem pomiędzy mikro- i makroekonomicznymi funkcjami popytu, które są podstawowym elementem modelu[144].

Modele, opisujące prawidłowości w mikroskali, charakterystyczne są dla indywidualnych „typowych" konsumentów (gospodarstw domowych) będących reprezentantami homogenicznych grup konsumentów. W tego typu modelach akcent położony jest na wyjaśnienie roli czynników ekonomicznych (zwłaszcza dochodu) oraz

[143] VUCA pochodzi od słów: **v**olatility (zmienność), **u**ncertainty (niepewność), **c**omplexity (złożoność) i **a**mbiguity (niejednoznaczność). Termin ten został wymyślony przez amerykańską armię, utworzony z pierwszych liter słów opisujących specyfikę sytuacji podczas wojny. Dosyć szybko zaadaptowano VUCA na grunt biznesu – odnosząc go zwłaszcza do dziedziny rozwoju i szkoleń, ale również ogólnie do sposobu zarządzania organizacjami i różnymi dziedzinami społecznymi, https://www.pwc.pl/pl/artykuly/2019/czlowiek-w-swiecie-VUCA.html (data dostępu 14.06.2021).

[144] B. Mróz, *Procesy globalizacji konsumpcji. Eurokonumenci* [w:] M. Janoś-Kresło, B. Mróz (red.), *Konsument i konsumpcja we współczesnej gospodarce*, SGH, Warszawa 2006, s.46.

czynników demograficznych i społecznych, które są wyznacznikiem preferencji konsumentów w kształtowaniu struktury konsumpcji[145].

Głównym źródłem danych statystycznych są budżety gospodarstw domowych, które mają na ogół charakter danych przekrojowych. Mikroekonomiczne funkcje popytu modelują relacje między popytem pojedynczych konsumentów lub gospodarstw domowych, a poziomem dochodów, statusem społecznym, wykształceniem, zawodem, składem demograficznym rodziny, czy liczbą osób w rodzinie itp. Warto założyć, że konsumenci działają na rynku racjonalnie, podejmując decyzje konsumpcyjne i wybierają ze zbioru dostępnych koszyków, ten najbardziej przez nich pożądany, dążąc do maksymalizowania użyteczności. Konsument wydaje „swój dochód w taki sposób, aby osiągnąć możliwie maksymalną użyteczność”[146].

Podstawowym założeniem, przy konstrukcji funkcji użyteczności, jest możliwość przyporządkowania każdemu zestawowi dóbr - pewnej liczby, która będzie charakteryzować jego miejsce w uporządkowanym, według preferencji, szeregu możliwych zestawów dóbr. Funkcja użyteczności jest traktowana, jako punkt wyjścia przy konstrukcji funkcji popytu i kompletnych modeli popytu.

Zachowania konsumentów wynikają z wrodzonych i nabytych potrzeb. Potrzeby są nazywane podstawą zachowania się konsumenta i definiowane są, jako stan uświadomienia sobie braku czegoś. Potrzeba stanowi główny bodziec aktywności człowieka, który dążąc do wyeliminowania tego przykrego stanu zakłócenia równowagi organizmu, podejmuje starania o zdobycie środków przywrócenia wewnętrznego komfortu, a więc zaspokojenia potrzeby. Potrzeby w swej istocie są nieograniczone[147].

W literaturze jest duża zbieżność w definiowaniu zachowania konsumenta. Jest ono określane, jako „zachowanie, jakie konsument okazuje w poszukiwaniu, zakupach, użytkowaniu, ocenianiu i dysponowaniu produktami i usługami, które zdaniem konsumenta, zaspokoją jego potrzeby”. Jeśli założyć, że konsumenci działają na rynku racjonalnie, podejmując decyzje konsumpcyjne, to wybierają oni ze zbioru dostępnych koszyków ten najbardziej przez nich pożądany, dążąc do maksymalizowania użyteczności. Konsument wydaje „swój dochód w taki sposób, aby osiągnąć możliwie maksymalną użyteczność”[148].

Funkcja użyteczności traktowana jest jako punkt wyjścia przy konstrukcji funkcji popytu i kompletnych modeli popytu. Za wyborem mikroekonomicznego modelu funkcji popytu przemawiają następujące czynniki[149]:

- prawidłowości w mikroskali charakterystyczne dla typowych gospodarstw domowych,
- profilowanie użytkowników,
- możliwość analizy wpływu poszczególnych czynników na zmianę zapotrzebowania danej grupy konsumentów,
- możliwość analizy wpływu czynników ekonomicznych i demograficzno-społecznych,
- odzwierciedlenie preferencji konsumentów,

[145] A. C. Samli, *International Consumer Behavior in the 21st Century: Impact on Marketing Strategy Development*, Springer Science & Business Media, 2012, s.9.
[146] B. Mróz, *Konsument w globalnej gospodarce. Trzy perspektywy*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2013. s.37.
[147] W. Sadowski, *Elementy ekonometrii i programowania matematycznego*, PWN, Warszawa 1980, s. 28.
[148] file:///C:/Users/pc/Downloads/miz_zn_875_pzfim_nr_41_t._2.pdf (data dostępu z dnia 13.06.2021)
[149] Tamże.

– danymi wejściowymi do modelu są dane z budżetów gospodarstw domowych.

6.2. Istota aproksymacji

Rozwiązywanie zagadnień z zakresu nauk ścisłych od zarania dziejów posiada tę samą logikę postępowania polegającą na sprowadzeniu wszelkich rzeczy i czynników nieznanych do tych prostych, które możemy łatwo rozwiązać. Oczywiście nie każde zagadnienie rzeczywiste da się rozwiązać w ogólności. Aby otrzymywać pewne schematy dowolnie bliskie prawdziwemu rozwiązaniu, stosuje się coraz to bardziej skomplikowane modele matematyczne, coraz to lepiej odwzorowującego rzeczywiste zagadnienie. Przykładem takiego zagadnienia jest aproksymacja.

Jednym z zagadnień, pojawiających się przy rozwiązywaniu wielu problemów fizycznych, jest odtworzenie funkcji na podstawie pomiarów jej wartości w skończonej liczbie punktów. Zazwyczaj charakter funkcji *f* opisującej dane zjawisko nie jest dokładnie znany, a wyniki pomiarów są obarczone błędami. W takich przypadkach można jedynie zadowolić się rozwiązaniem przybliżonym uproszczonym, znajdując inną funkcję *g* w ustalonej klasie funkcji, np. w postaci wielomianu, która aproksymuje (przybliża) funkcję *f*.

W najprostszym przypadku poszukiwaną funkcją aproksymującą jest funkcja liniowa (wielomian stopnia co najwyżej pierwszego), a metoda jej wyznaczania jest oparta na minimalizacji odchylenia średniokwadratowego. W celu uściślenia problemu zakładamy, że w punktach $x_1, x_2, ..., x_n$ dane są wartości $y_1, y_2, ..., y_n$ (dokładne lub przybliżone) funkcji *f*:

$$y_k = f(x_k) \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

Zagadnienie liniowej aproksymacji średniokwadratowej, znane jest, w niektórych środowiskach, pod nazwą regresji liniowej.

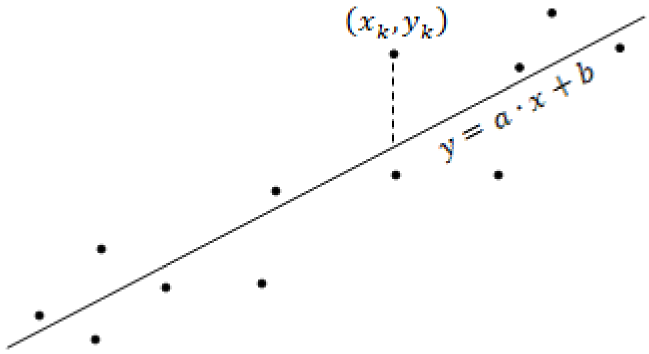
Aproksymacja liniowa polega na znalezieniu funkcji *g* postaci:

$$y = g(x) = a \cdot x + b$$

tak, aby suma kwadratów odchyleń:

$$S = \sum_{k=1}^{n} [y_k - g(x_k)]^2 = \sum_{k=1}^{n} [y_k - (a \cdot x_k + b)]^2$$

była jak najmniejsza. Odchylenia wartości funkcji aproksymującej od punktów (x_k y_k) są mierzone wzdłuż osi *y* (pionowej), co obrazuje poniższy rysunek.



Wyrażenie *S*, traktowane jako funkcja dwóch zmiennych rzeczywistych *a* i *b*, jest wielomianem stopnia drugiego o wartościach nieujemnych, ma więc minimum, które wyznaczamy stosując rachunek różniczkowy funkcji dwóch zmiennych. Obliczamy zatem pochodne cząstkowe funkcji *S(a,b)* względem *a* i *b*, a następnie przyrównujemy je do zera.

Jest to metoda najmniejszych kwadratów (MNK). W rezultacie otrzymujemy następujący układ dwóch równań liniowych o dwóch niewiadomych *a* i *b*:

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ a \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k + b \cdot n = \sum_{k=1}^{n} y_k \end{cases}$$

Rozwiązujemy go w taki sposób, że najpierw obliczamy cztery sumy:

$$s_{xx} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \quad s_x = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad s_{xy} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \quad s_y = \sum_{k=1}^{n} y_k$$

a następnie wyznaczamy wartości *a* i *b*, korzystając ze wzorów Cramera wyrażających rozwiązanie układu poprzez wartości jego odpowiednich wyznaczników:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} s_{xy} & s_x \\ s_y & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_{xx} & s_x \\ s_x & n \end{vmatrix}} = \frac{s_{xy} \cdot n - s_x \cdot s_y}{s_{xx} \cdot n - s_x \cdot s_x}, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} s_{xx} & s_{xy} \\ s_x & s_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_{xx} & s_x \\ s_x & n \end{vmatrix}} = \frac{s_{xx} \cdot s_y - s_x \cdot s_{xy}}{s_{xx} \cdot n - s_x \cdot s_x}$$

Oczywiście do tych samych wzorów końcowych można dojść bez korzystania z wzorów Cramera, czyli rozwiązując powyższy układ równań metodą podstawiania lub przeciwnych współczynników. Układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdyż jego macierz jest nieosobliwa – (wyznacznik w mianowniku w powyższych wyrażeniach jest różny od zera). Należy jednak pamiętać, że obliczenia komputerowe na liczbach rzeczywistych (typu float i double w C#) nie są dokładne, toteż należy unikać dzielenia nie tylko przez zero, lecz także przez wartości bliskie zero. .

Aproksymacja jest narzędziem matematyki o szerokich zastosowaniach w naukach technicznych i ekonomicznych. Ujmując problem językiem naukowym: mamy dane wartości nieznanej funkcji f (x) w punktach - węzłach aproksymacji i poszukujemy funkcji F(x), która w węzłach aproksymacji przyjmuje wartości bliskie funkcji f(x), a w pozostałych punktach możliwie dobrze ją oddaje. Powyższe stwierdzenie może przywieść na pamięć zagadnienie interpolacji. Interpolacja jest szczególnym rodzajem aproksymacji - funkcja interpolująca musi przyjmować w węzłach identyczne wartości, co funkcja interpolowana, podczas gdy w przypadku aproksymacji nie stawiamy takiego wymagania.

Samą ideę aproksymacji bardzo dobrze ilustruje również twierdzenie o trzech punktach i prostej. Oto jego treść.

Twierdzenie: Przez dowolne trzy punkty można przeprowadzić prostą, jeśli ta prosta jest odpowiednio gruba.

Zadaniem aproksymacji jest taki dobór nachylenia prostej, by miała możliwie jak najmniejszą grubość i spełniała powyższe twierdzenie.

Zauważmy, że gdybyśmy chcieli zastosować w tym przypadku interpolację, to w ogólnym przypadku funkcja interpolacyjna nie opisywała by prostej, lecz krzywą (np. wielomian drugiego stopnia). Uwidacznia się tu zasadnicza różnica między interpolacją, a aproksymacją. Stąd funkcje aproksymujące mogą być dużo prostsze od interpolujących (przypomnijmy choćby interpolację wielomianową – stopień wielomianu dla n węzłów wynosi w ogólnym przypadku $n - 1$, podczas gdy wielomian aproksymacyjny może mieć stopień dowolnie niższy).

Zatem aproksymacja, jest to przybliżenie danych zagadnień poprzez ich uproszczenie i wyrównanie znanych wskaźników, zgodnie z trendami. Sama nazwa pochodzi z języka łacińskiego od słowa proxima, co oznacza najbliższa. Ta metoda jest używana w programie Microsoft Excel do prognozowania oraz analizowania badań i już dostępnych wyników; dlatego jej znajomość często przydaje się np. w pracy biurowej. Stosując metodę aproksymacji w Excelu**,** musimy stworzyć linię trendu na rynku (w zależności od branży). Jej głównym celem jest przygotowanie prognoz, bądź identyfikacja ogólnego trendu. Przede wszystkim należy to zrobić na podstawie już istniejących wskaźników np. danych z ubiegłych lat dotyczących firmy, branży itd. Dzięki aproksymacji z pewnością rozpatrywane zagadnienia będą bardziej czytelne i zrozumiałe**.**

Rozwijający się prężnie aparat matematyczny stworzył pewien zasób analitycznych funkcji, które są niezwykle często wykorzystywane w bardziej zaawansowanych modelach. Jednakże spora część tych utworzonych funkcji posiada znaczny stopień skomplikowania, co istotnie ogranicza możliwość ich zastosowania. Idea aproksymacji polega na poszukiwaniu pewnych funkcji będących prostym przybliżeniem określonych zależności, których zastosowanie w rozważanych zagadnieniach, pozwoli osiągnąć w przybliżeniu wynik bliski prawdziwemu.

6.3. Mikroekonomiczne funkcje popytu - krzywe Engla

Zachowania i wybory konsumenta modeluje się w ekonomii za pomocą funkcji i ich wykresów. Jednymi z takich krzywych są krzywe Engla. Nazwa krzywej pochodzi do niemieckiego statystyka i ekonomisty Ernesta Engla, który badając budżety rodzin, sformułował prawo dotyczące elastyczności dochodowej popytu danych dóbr i popytu ogółem. Krzywe te ilustrują zależność wydatków od poziomu dochodów konsumenta[150].

Omawiana krzywa, to wykres popytu na jedno dobro, jako funkcji dochodu, przy odpowiednim założeniu dotyczącym wszystkich cen i innych zmiennych. Przy pomocy krzywych Engla dobra można podzielić na : podrzędne, podstawowe i luksusowe.

W tym kontekście mogą zaistnieć trzy sytuacje ekonomiczne dotyczące gospodarstw domowych lub społeczeństwa:

- przedenglowską - kiedy prawo Engla jeszcze nie działa, co oznacza, że przyrost dochodów jest w całości przeznaczany na żywność; (dotyczy to ubogich gospodarstw, znajdujących się często na granicy minimum egzystencji),
- englowską - to stan typowy, który ma miejsce wtedy, gdy przyrosty dochodów są w coraz mniejszym stopniu przeznaczane na wyżywienie, (ujawnia się wtedy w klasyczny sposób prawidłowość zwana prawem Engla),
- poenglowską - prawo Engla już nie działa, wzrost dochodów nie ma wpływu na poziom wydatków na żywność; sytuacja taka dotyczy gospodarstw domowych bardzo zamożnych; (chociaż wydatki na żywność nie ulegają zmianie, to jednak ich relacja do globalnych dochodów wciąż się obniża).

Podstawą powyższej klasyfikacji są dwie ekonomiczne prawidłowości. Według pierwszej udział wydatków na żywność zwiększa się wraz ze wzrostem liczby osób, natomiast według drugiej, udział wydatków na żywność zmniejsza się wskutek wzrostu dochodów.

Druga zależność, zwana prawem Engla, wynika z faktu, że wraz ze wzrostem dochodu, popyt na żywność rośnie relatywnie wolniej od popytu na pozostałe dobra i usługi. W metodzie Engla zakłada się, że gospodarstwa – niezależnie od swojej wielkości – osiągają jednakowy poziom dobrobytu, kiedy udział wydatków na żywność jest dla nich taki sam. Wskaźnikiem dobrobytu ekonomicznego jest zatem odsetek wydatków na żywność – im jest mniejszy, tym lepsza jest sytuacja gospodarstwa domowego[151].

Według prawa Engla, im więcej zarabiamy, tym mniejszy powinien być udział wydatków na żywność w naszym budżecie domowym. Jednak, od prawie dekady, mimo wzrostu wynagrodzeń, Polacy wciąż czwartą część swoich dochodów przeznaczają na produkty spożywcze[152].

W świetle teorii mikroekonomicznych produkty spożywcze są dobrem zwykłym, czyli takim, które chętniej kupimy, jeśli więcej zarabiamy. Związane to jest z elastycznością funkcji popytu konsumpcyjnego. Jednak wraz ze wzrostem dochodów powinniśmy przeznaczać na nie relatywnie mniejszą część naszego budżetu, wydając więcej na dobra luksusowe, na które dotychczas nie mogliśmy sobie pozwolić. Tak przynajmniej wynika z teorii[153].

---

[150] H. Annales - Oeconomia http://oeconomia.annales.umcs.pl (data dostępu z dnia 15.05.2021)
[151] file:///C:/Users/pc/Downloads/1455-2931-1-SM.pdf (data dostępu z dnia 15.05.2021)
[152] https://repozytorium.amu.edu.pl/bitstream/10593/20121/1/012%20ZDZISŁAW%20KRASIŃSKI%20RPEiS%2024%283%29%2C%201962.pdf data dostępu z dnia 15.05.2021
[153] file:///C:/Users/pc/Downloads/211%20(8).pdf (data dostępu z dnia 15.05.2021)

Metoda Engla umożliwia wyznaczenie skal ekwiwalentności bez konieczności arbitralnego ustalania potrzeb przez ekspertów. Niewątpliwą zaletą tej metody jest jej prostota oraz możliwość wprowadzania wielu zmiennych opisujących cechy społeczno-demograficzne gospodarstwa. Znalezienie właściwej postaci funkcji oraz oszacowanie jej parametrów może jednak przysporzyć wiele trudności.

Ponadto, prawo Engla nie dotyczy gospodarstw bardzo ubogich, ani bardzo bogatych . Metoda ta jest jednak krytykowana głównie ze względu na swoje podstawowe założenie, stwierdzające, że miarą dobrobytu jest odsetek wydatków na żywność Pierwszym etapem wyznaczania skal ekwiwalentności metodą Engla jest wybór postaci krzywej Engla. Postać funkcyjna tej krzywej określa charakter zależności w postaci jednorównaniowego modelu ekonometrycznego. Za zmienną objaśnianą przyjmuje się odsetek udziałów wydatków na żywność ogółem, która wyjaśniana jest przez zmienne reprezentujące cechy, takie jak dochód lub całkowite wydatki gospodarstw domowych[154].

Ponadto, aby model mógł być wykorzystany do wyznaczania skal ekwiwalentności, należy wprowadzić co najmniej jedną zmienną opisującą typ demograficzny gospodarstwa. Podstawową cechą jest wielkość gospodarstwa domowego. Poza charakterystykami demograficznymi można uwzględnić również zmienne opisujące parametry społeczno-ekonomiczne. Wśród tego typu cech szczególnie ważny jest podział na grupy społeczno-ekonomiczne, ponieważ wydatki na żywność w poszczególnych grupach kształtują się zazwyczaj na różnym poziomie[155].

Z pewnością na zachowania konsumentów mają także wpływ media społecznościowe. To one coraz częściej oddziałują na ich preferencje zakupowe i żywieniowe. Użytkownicy zaczynają traktować produkty spożywcze, jako dobra komplementarne do zdrowego trybu życia np. osoby uprawiające sport, szukają właściwej diety, a to kosztuje. Konsumenci wybierają chętniej produkty z etykietą *bio* lub *eko*, wydając na nie odpowiednio więcej pieniędzy. Poszukują także żywności regionalnej, która z punktu widzenia Engla byłaby niezrozumiale droga. Jest to paradoks globalnej gospodarki: np. taniej (nawet przy uwzględnieniu kosztu transportu) jest sprowadzić czosnek z Chin, niż wyhodować go na Dolnym Śląsku.

Inną kwestią w zachowaniach konsumenta jest wszechobecna moda na gotowanie i popularność blogerów kulinarnych. Z każdej strony jesteśmy zalewani informacjami na temat tego, co powinniśmy jeść, w jaki sposób i kiedy. Setki użytkowników wrzucają co minutę zdjęcia swoich talerzy. Gotowanie i konsumowanie stało się więc sposobem na spędzanie wolnego czasu. Niektórzy zaczęli więc traktować żywność, jako substytut usług czasu wolnego, takich jak np. wyjście na spacer, czy do muzeum i kina. Można więc przewrotnie powiedzieć, że Awokado staje się tak samo dobrem luksusowym, jak perfumy.

6.4. Modelowanie ekonometryczne

Podstawowym narzędziem ekonometrii jest model ekonometryczny. Ekonometria, badając ilościowe zależności zachodzące między zjawiskami ekonomicznymi, musi

---

154 Tamże.
155 Tamże.

dysponować określonym aparatem narzędziowym. W rozpatrywaniu nadmienionych relacji, narzędziami tymi - przydatnymi w praktyce - są modele ekonometryczne.

Pojęcie modelu występuje niemal w każdej dyscyplinie naukowej. Dlatego w rozważaniach o modelowaniu ekonometrycznym przytoczymy ogólną definicję modelu, (sformułowaną przez I.D.J. Brossa). Według tego autora, model to uproszczone odwzorowanie rzeczywistości. Łatwo zauważyć, iż określenie to ma charakter na tyle ogólny, iż jest właściwe dla modeli występujących w różnych dziedzinach nauki. Warto jeszcze zwrócić uwagę na trzy ostatnie słowa: uproszczone odwzorowanie rzeczywistości. W tym kontekście, słowo „uproszczone", oznacza uwzględnienie w modelu jedynie tych elementów rzeczywistości, które są najważniejsze i pominiecie elementów mniej istotnych[156].

Definicja modelu Brossa ma związek z definicją modelu ekonometrycznego sformułowaną przez Zbigniewa Pawłowskiego, (przedwcześnie zmarłego polskiego ekonometryka, autora wielu cennych podręczników i monografii z zakresu statystyki oraz ekonometrii). Definicja ta brzmi: „Model ekonometryczny jest to konstrukcja formalna, która za pomocą pewnego równania lub układu równań przedstawia zasadnicze powiązania występujące pomiędzy rozpatrywanymi zjawiskami ekonomicznymi". Z definicji tej wynika, iż model ekonometryczny należy postrzegać jako równanie (lub układ równań) przedstawiające ważne relacje występujące w gospodarce[157].

Celem budowy modelu jest poznanie czynników i określenie, w jakim stopniu wpływają one na zmianę preferencji konsumentów odnośnie jego popytu na dane dobro lub usługę. Preferencje konsumentów zmieniają się w czasie. Zmiany te mogą wynikać z wielu czynników, takich jak zmiany w sytuacji demograficznej i pozycji społeczno-zawodowej konsumenta, miejsca jego zamieszkania, czy oddziaływania polityki społeczno-gospodarczej, postępu technicznego, mody, poprawy jakości itp.

Model ekonometryczny może być wykorzystywany do badania reguł przebiegu zjawisk ekonomicznych w przeszłości i podejmowania na tej podstawie decyzji ekonomicznych. Może być przez to narzędziem rozpatrywania skutków różnych wariantów rozwiązań diagnostycznych i prognostycznych związanych z procesem decyzyjnym[158].

Praktyczne wykorzystanie modelu związane jest więc głównie z prognozowaniem i symulacją. Prognozy stanowią też ważny element racjonalnego programowania procesów gospodarczych. Dostarczają one bardziej lub mniej prawdopodobnych informacji o przyszłości, wskutek czego stwarzają dodatkowe przesłanki do podejmowania słusznych decyzji. Pozwalają na oszacowanie skutków określonych decyzji oraz umożliwiają ocenę kształtowania się wybranych wielkości ekonomicznych, przy założeniu określonych poziomów innych zmiennych.

Przykłady modeli ekonometrycznych

Dalej zostaną zaprezentowane przykłady niektórych rodzajów modeli ekonometrycznych.

---

[156] A.S. Goldberger, *Teoria ekonometrii*, PWE, Warszawa 1975, s. 7.
[157] S. Bartosiewicz, *Metody ekonometryczne. Przykłady i zadania, praca zbiorowa*, PWE, 1980, s. 5.
[158] Tamże, s.12.

Zebrane do obliczeń dane, dotyczące produkcji i konsumpcji, są wyszczególnione w Tabeli 1. Będą one wykorzystane w kolejnych przykładach.

Tabela 1. Dane dotyczą dwóch zmiennych x, y

Lp.	x^1	y^1
1.	200	145,92
2.	300	214,44
3.	400	280,44
4.	500	344,3
5.	600	406,2
6.	700	466,55
7.	800	523,92
8.	900	583,29
9.	1000	640
10.	1200	695,86
11.	1300	750,72
12.	1400	804,7
13.	1500	858,2
14.	1600	911,25
15.	1700	1016,43
16.	1800	1068,66
17.	1900	1120,81
Suma	**1 890**	**11 795,69**

Źródło: Na podstawie DieProductions- und Consumtionsverhältnisse des Königreichs Sachsens. s. 30.

Model liniowy

Poniżej omówiona zostanie praktycznie budowa liniowego modelu ekonometrycznego:

$$y=\alpha_0+\alpha_1 x$$

Przykład 1.

Dla danych z Tabeli 1. zbudować linowy model ekonometryczny zależności zmiennej y od zmiennej x.

Rozwiązanie:

W celu wyznaczenia parametrów strukturalnych modelu liniowego:

$$y=\alpha_0+\alpha_1 x$$

stosujemy metodę najmniejszych kwadratów (MNK) poniżej zaprezentowaną praktycznie.

Pomocnicze obliczenia - dla ułatwienia - są umieszczone w Tabeli 2.

Tabela 2. Aproksymacja krzywej Engla za pomocą funkcji liniowej – obliczenia pomocnicze.

i	X_1	y_i	x_i^2	Y_1*x_1	$\hat{y}_i$	u_i	u_i^2	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$
1	200	145,92	40000	29184	172,68	26,76	716,32	-509,4	259484,4
2	300	214,44	90000	64332	229,46	15,02	225,73	-440,88	194371,75
3	400	280,44	160000	112176	286,24	5,8	33,69	-374,88	140532,1
4	500	344,3	250000	172150	343,02	-1,28	1,63	-311,02	96731,02
5	600	406,2	360000	243720	399,81	-6,39	40,9	-249,12	62058,84
6	700	466,55	490000	326585	456,59	-9,96	99,3	-188,77	35632,64

7	800	523,92	640000	419136	513,37	-10,55	111,4	-131,4	17264,94
8	900	583,29	810000	524961	570,15	-13,14	172,77	-72,03	5187,76
9	1000	640	1000000	640000	626,93	-13,07	170,93	-15,32	234,58
10	1100	695,86	1210000	765446	683,71	-12,15	147,71	40,54	1643,81
11	1200	750,72	1440000	900864	740,49	-10,23	104,73	95,4	9101,9
12	1300	804,7	1690000	1046110	797,27	-7,43	55,25	149,38	22315,55
12	1400	858,2	1960000	1201480	854,05	-4,15	17,25	202,88	41161,87
13	1500	911,25	2250000	1366875	910,83	-0,42	0,18	255,93	65502,16
14	1600	964	2560000	1542400	967,61	3,61	13,01	308,68	95285,74
15	1700	1016,43	2890000	1727931	1024,39	7,96	63,32	361,11	130403,24
16	1800	1068,66	3240000	1923588	1081,17	12,51	156,45	413,34	170853,17
17	1900	1120,81	3610000	2129539	1137,95	17,14	293,72	465,49	216684,56
Suma	**18900**	**11795,69**	**24690000**	**15136477**	**11795,69**	**0**	**2424,28**	**0**	**1564450,03**

Źródło: Na podstawie Die Productions- und Consumtionsverhältnisse des Königreichs Sachsens. s. 30.

Stosując odpowiednie wzory obliczamy współczynniki strukturalne modelu:

$$\alpha_1=\frac{n\sum x_i y_i-\sum x_i\sum y_i}{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}$$

$$\alpha_0=\bar{y}-\alpha_1\bar{x}$$

Odpowiedź: Zbudowany model liniowy ma postać:

$$\hat{y}=0,5678x+59,1236$$

Pozostaje jeszcze weryfikacja modelu w celu sprawdzenia, czy dobrze pasuje on do rzeczywistości. Należy więc obliczyć następujące miary dopasowania:

1. odchylenie standardowe składnika resztowego,
2. współczynnik zmienności resztowej,
3. współczynnik zbieżności
4. współczynnik determinacji liniowej.

Przykład 2.

Zweryfikować liniowy model zbudowany w Przykładzie 1.

Rozwiązanie:

Oto wyniki obliczeń miar dopasowania modelu liniowego zbudowanego w Przykładzie 1.

1. Odchylenie standardowe składnika resztowego:

$$s_e=3,077$$

2. Współczynnik zmienności resztowej:

$$V_e=\frac{s_e}{\bar{y}}$$

3. Współczynnik zbieżności:

$$\varphi^2=\frac{\sum e_i^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2}=0,01$$

4. Współczynnik determinacji liniowej:

$$R^2=1-\varphi^2=0,99$$

Odpowiedź: Zatem okazuje się, że zbudowany w Przykładzie 1. model liniowy:

$$\hat{y}=0,5678x+59,1236$$

dobrze (w 99 %) opisuje stan faktyczny.

Model potęgowy

Aby wyznaczyć model potęgowy:

$$Y=\alpha_0 X^{(\alpha_1)},$$

dokonujemy najpierw przekształcenia go do postaci liniowej poprzez obustronne zlogarytmowanie:

$$\ln Y=\ln\alpha_0+\alpha_1\ln X$$

Następnie parametry modelu wyznaczamy metodą (MNK).

Przykład 3.

Dla danych z Tabeli 1. zbudować potęgowy model ekonometryczny:

$$Y=\alpha_0 X^{(\alpha_1)},$$

Rozwiązanie:

Dla ułatwienia obliczeń posługujemy się Tabelą 3.

Tabela 3. Aproksymacja krzywej Engla za pomocą funkcji potęgowej – obliczenia pomocnicze.

i	$\ln x_i$	$\ln y_i$	$(\ln x_i)^2$	$\ln y_i\cdot\ln x_i$	$\ln\hat{y}_i$	u_i	u_i^2	$\ln y_i-\overline{\ln y}$	$(\ln y_i-\overline{\ln y})^2$
1	5,29832	4,98306	28,07217	26,40183	5,00769	-0,02464	0,00061	-1,36639	1,86702
2	5,70378	5,36803	32,53313	30,61808	5,37223	-0,00420	0,00002	-0,98142	0,96318
3	5,99146	5,63636	35,89765	33,77005	5,63087	0,00549	0,00003	-0,71309	0,50850
4	6,21461	5,84151	38,62135	36,30272	5,83149	0,01002	0,00010	-0,50794	0,25800
5	6,39693	6,00685	40,92071	38,42537	5,99541	0,01144	0,00013	-0,34260	0,11738
6	6,55108	6,14537	42,91665	40,25878	6,13400	0,01137	0,00013	-0,20408	0,04165
7	6,68461	6,26134	44,68403	41,85462	6,25405	0,00729	0,00005	-0,08811	0,00776
8	6,80239	6,36868	46,27257	43,32231	6,35995	0,00874	0,00008	0,01924	0,00037
9	6,90776	6,46147	47,71708	44,63424	6,45467	0,00680	0,00005	0,11202	0,01255
10	7,00307	6,54515	49,04293	45,83610	6,54036	0,00479	0,00002	0,19570	0,03830
11	7,09008	6,62103	50,26919	46,94363	6,61859	0,00244	0,00001	0,27158	0,07376
12	7,17012	6,69047	51,41061	47,97147	6,69055	-0,00008	0,00000	0,34102	0,11630
12	7,24423	6,75484	52,47883	48,93358	6,75718	-0,00234	0,00001	0,40539	0,16434
13	7,31322	6,81482	53,48319	49,83826	6,81921	-0,00439	0,00002	0,46537	0,21657
14	7,37776	6,87109	54,43133	50,69326	6,87723	-0,00614	0,00004	0,52164	0,27211
15	7,43838	6,92405	55,32955	51,50375	6,93174	-0,00768	0,00006	0,57460	0,33017
16	7,49554	6,97416	56,18315	52,27511	6,98312	-0,00896	0,00008	0,62471	0,39026
17	7,54961	7,02181	56,99660	53,01190	7,03173	-0,00993	0,00010	0,67236	0,45207
Suma	**122,23295**	**114,29008**	**837,26073**	**782,59504**	**114,29008**	**0,00000**	**0,00152**	**0,00000**	**5,8302**

Źródło: na podstawie Die Productions- und Consumtionsverhältnisse des Königreichs Sachsens. s. 30.

Zatem otrzymujemy:

$$l\widehat{ny} = 0{,}24421 + 0{,}89905 \ln x$$

t (0,003629) (0,024755)

i wracając do postaci potęgowej otrzymujemy model potęgowy.

Odpowiedź: Zbudowany model potęgowy ma postać:

$$\hat{y} = 1{,}27661 \cdot x^{0{,}89905}$$

Przykład 4.

Sprawdzić, czy zbudowany w Przykładzie 3. potęgowy model, jest dobrze dopasowany do rzeczywistości.

Rozwiązanie:

Obliczamy miary dopasowania modelu:

1. odchylenie standardowe składnika resztowego:

$$s_e = 0{,}00974728$$

2. współczynnik zmienności resztowej:

$$V_e = \frac{s_e}{\bar{y}} = 0{,}001535$$

3. współczynnik zbieżności:

$$\varphi^2 = \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 0{,}00027$$

4. współczynnik determinacji liniowej:

$$R^2 = 1 - \varphi^2 = 0{,}99973$$

Odpowiedź: Zbudowany model potęgowy ma postać:

$$\hat{y} = 1{,}27661 \cdot x^{0{,}89905}$$

i wyjaśnia on zmienność zmiennej endogenicznej w 99%.

Model Tornquista dla dóbr pierwszej potrzeby

Ma on postać:

$$y = \frac{\alpha \cdot x}{x + \beta}$$

Dokonujemy linearyzacji funkcji Tornquista za pomocą podstawień:

$$\tilde{y} = \frac{1}{y}; \tilde{x} - \frac{1}{x}; \tilde{\alpha} = \frac{1}{\alpha}; \tilde{\beta} = \frac{\beta}{\alpha}$$

i otrzymujemy postać liniową:

$$\tilde{y} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{x}$$

Przykład 5.

Posługując się danymi z Tabeli 1. zbudować model Tornquista.:

$$y=\frac{\alpha\cdot x}{x+\beta}$$

Rozwiązanie:

Pomocnicze obliczenia są umieszczone w poniższej Tabeli 4.

Tabela 4. Aproksymacja krzywej Engla za pomocą funkcji Tornquista – obliczenia pomocnicze.

i	$\tilde{x}_i$	$\tilde{y}_i$	$\hat{\tilde{y}}$	$e_i=\tilde{y}-\hat{\tilde{y}}$	e_i^2	$\tilde{y}_i-\bar{\tilde{y}}_i$	$(\tilde{y}_i-\bar{\tilde{y}}_i)^2$
1	0,005000000000	0,006853070175	0,006853070175	0	0	0,004747454906	0,000022538328
2	0,003333333333	0,004663309084	0,004663309084	0	0	0,002557693814	0,000006541798
3	0,002500000000	0,003565825132	0,003565825132	0	0	0,001460209862	0,000002132213
4	0,002000000000	0,002904443799	0,002904443799	0	0	0,000798828529	0,000000638127
5	0,001666666667	0,002461841457	0,002461841457	0	0	0,000356226188	0,000000126897
6	0,001428571429	0,002143392991	0,002143392991	0	0	0,000037777721	0,000000001427
7	0,001250000000	0,001908688349	0,001908688349	0	0	-0,000196926920	0,000000038780
8	0,001111111111	0,001714413071	0,001714413071	0	0	-0,000391202199	0,000000153039
9	0,001000000000	0,001562500000	0,001562500000	0	0	-0,000543115270	0,000000294974
10	0,000909090909	0,001437070675	0,001437070675	0	0	-0,000668544595	0,000000446952
11	0,000833333333	0,001332054561	0,001332054561	0	0	-0,000773560709	0,000000598396
12	0,000769230769	0,001242699143	0,001242699143	0	0	-0,000862916127	0,000000744624
12	0,000714285714	0,001165229550	0,001165229550	0	0	-0,000940385719	0,000000884325
13	0,000666666667	0,001097393690	0,001097393690	0	0	-0,001008221580	0,000001016511
14	0,000625000000	0,001037344398	0,001037344398	0	0	-0,001068270871	0,000001141203
15	0,000588235294	0,000983835581	0,000983835581	0	0	-0,001121779688	0,000001258390
16	0,000555555556	0,000935751315	0,000935751315	0	0	-0,001169863955	0,000001368582
17	0,000526315789	0,000892211882	0,000892211882	0	0	-0,001213403387	0,000001472348
Suma	**0,025477396571**	**0,037901074855**	**0,037901074855**	**0,000000000000**	***5,40408296102258E-09**	**0,000000000000**	**0,000041396914**

Źródło: na podstawie Die Productions- und Consumtionsverhältnisse des Königreichs Sachsens . s. 30.

* - wynik sumy kwadratowego błędu estymacji 0,0000000054048296102258 został wyznaczony za pomocą Libre Office Calc Wersja: 6.4.6. Suma ta zawiera pierwszą znaczącą cyfrę na dziewiątym miejscu po przecinku.

Otrzymujemy postać liniową modelu:

$$\tilde{y}=1,33268625762551\cdot\tilde{x}+0,000219316586891$$

6,91364582376145E-06 0,00380691604782

t 350,069778499222 31,7222768538317

Odpowiedź: Zbudowany model po przekształceniu odwrotnym do linearyzacyjnego, pozwala otrzymać model Tornquista:

$$\hat{y}=\frac{4559,6186\,x}{6076,54111+x}$$

Otrzymany model zostanie zweryfikowany w Przykładzie 6.

Przykład 6.

Dokonać sprawdzenia, czy i na ile zbudowany w Przykladzie 5. Model Tornquista jest dopasowany do rzeczywistości.

Rozwiązanie:
Obliczamy miary dopasowania:
1. odchylenie standardowe składnika resztowego:

$$s_e = 1{,}83781170162754 \cdot 10^{-5}$$

2. współczynnik zmienności resztowej:

$$V_e = \frac{s_e}{\bar{y}} = 0{,}008728145773167$$

3. współczynnik zbieżności:

$$\varphi^2 = \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 0{,}00013$$

4. współczynnik determinacji liniowej:

$$R^2 = 1 - \varphi^2 = 0{,}99987$$

0,00380691604782 6,91364582376145E-06

Odpowiedź: Model Tornquista:

$$\hat{y} = \frac{4559{,}6186\, x}{6076{,}54111 + x}$$

z Przykładu 5. w 99% wyjaśnia. zmienność, a więc jest on dobrze dopasowany do rzeczywistości.

Wnioski

1. Podczas budowy ekonometrycznych modeli, opisujących zależność np. wydatków od dochodów, należy rozważyć kilka postaci analitycznych funkcji i wybrać właściwą funkcję. Od tego wyboru zależą m.in. wartości dochodowej elastyczności popytu.
2. Przy doborze postaci analitycznej funkcji, oprócz miar dopasowania modelu do danych empirycznych i precyzji oszacowań parametrów, wygodnie jest posłużyć się analizą graficzną. Wartości oszacowanych parametrów dla ustalonej postaci analitycznej funkcji są na ogół różne w przypadku zastosowania różnych metod estymacji. Modele oszacowane na podstawie metod estymacji nieliniowej, zawsze cechują się nie gorszym dopasowaniem, niż modele zlinearyzowane.
3. W przypadku modelu liniowego parametry strukturalne są statystycznie istotne (dla $\alpha=0{,}001$ i 16 stopni swobody t= 4,015) Model wyjaśnia zmienność zmiennej endogenicznej w 99%.
4. W przypadku modelu potęgowego parametry strukturalne są statystycznie istotne. Model wyjaśnia zmienność zmiennej endogenicznej w 99,973%.
5. W przypadku modelu wykorzystującego funkcję Tornquista dla dóbr pierwszej potrzeby parametry strukturalne również są statystycznie istotne. Model wyjaśnia zmienność zmiennej endogenicznej w 99,987%.
6. Wszystkie modele są dobrze dobrane do analizowanych danych rzeczywistych.

Zakończenie

Fundamentalna dla społeczeństwa konsumpcyjnego zasada głosi, iż jego członków utrzymywać trzeba w stanie permanentnego niespełnienia. To właśnie niemożność zaspokojenia pragnień oraz mocne i trwałe przekonanie, że każdy akt zaspokojenia pozostawia wciąż jeszcze wiele do życzenia i zasługuje na korektę, stanowią koło zamachowe prokonsumenckiej gospodarki.

Współcześnie konsumpcja przestaje być jedynie środkiem do zaspokojenia potrzeb fizjologicznych. Staje się ona elementem ogólnie rozumianej kultury, a potrzeby, jakie zaspokaja, można zaliczyć do wszystkich poziomów potrzeb zgodnie z klasyfikacją przyjętą przez A. Maslowa. Jak zauważył M. Kempny: „obecnie nie tyle po prostu żyjemy w społeczeństwie konsumpcyjnym, ile stanowimy część cywilizacji konsumpcyjnej ze swoistą dla niej epistemologią. Skutkiem zmieniających się uwarunkowań konsumpcji o charakterze ekonomicznym, społecznym i kulturowym są nowe trendy w zachowaniach konsumpcyjnych społeczeństwa rozumiane jako określony kierunek zmian w preferencjach konsumentów, będący konsekwencją przemian dokonujących się permanentnie w otoczeniu rynkowym[159] .

Procesy globalizacji i wirtualizacji powodują zmiany w zachowaniach konsumentów, a ich potrzeby ewoluują, co wymusza zmiany w działalności innowacyjnej przedsiębiorstw. Konsumenci, dzięki nowoczesnym technologiom (Internet, smartfon), stają się aktywnymi partnerami przedsiębiorców, tzn. współtworzą produkty, a następnie je nabywają. To właśnie Internet jest innowacją, która ma podstawowy wpływ na zachowania konsumentów i ich decyzje na rynku. Producenci zmuszeni są zatem do obserwacji wszelkich zmian w trendach konsumenckich i do dynamicznego reagowania na nie. Polega to nie tylko na wykorzystywaniu informacji o zachowaniach konsumentów, ale także na angażowaniu ich w procesy produkcyjne[160].

Elastyczne ofertowanie jest trendem, który nawiązuje do zmienności decyzji nabywców oraz do ich rosnących oczekiwań względem punktów sprzedaży, jakości obsługi i, ogólnie, marek. Nie wystarczy już tylko oferowanie „najlepszej jakości w najlepszej cenie", często konsumenci oczekują rozwiązań, które nie tylko będą wyróżniały się spośród innych rynkowych ofert, ale również będą proponować większą elastyczność np.. możliwość wycofania się z transakcji w każdej chwili i bez konsekwencji - może też chodzić o produkty, które podlegają modyfikacjom - również po zakupie, w trakcie użytkowania, w zależności od doraźnych potrzeb.

W omawianym rozdziale przedstawiono możliwość zastosowania modelowania i symulacji zachowań gospodarczych konsumenta za pomocą mikroekonomicznych funkcji popytu, jako narzędzia do badania zachowania konsumentów. Wykazano, że jest to metoda, która pozwala na prowadzenie eksperymentów z uwzględnieniem niejednorodnej złożoności - zarówno na poziomie indywidualnego konsumenta, jak i złożonego środowiska marketingowego.

---

[159] T. Zalega, *Nowe trendy w zachowaniach konsumpcyjnych miejskich gospodarstw domowych w okresie kryzysu*, „Marketing i Rynek" 2013, nr 8, s. 26.
[160] C. Bywalec, *Konsumpcja a rozwój gospodarczy i społeczny*, C.H. Beck, Warszawa 2010, s. 5

Ponadto symulacja daje także możliwość modelowania interakcji między poszczególnymi podmiotami rynku. Poza wymienionymi korzyściami wynikających ze stosowania omawianej metody modelowania zachowań konsumenta, należy wskazać również na pewne trudności, jakie mogą pojawiać się podczas jej stosowania. Stosowanie tego rodzaju modelowania wymaga od badacza posiadania określonych kompetencji Nie mniej jednak wysiłek włożony w konstrukcję przedstawionych modeli procentuje w postaci sprawnego narzędzia, które może z powodzeniem być stosowane w omawianym obszarze.[161]

Pandemia COVID-19 przyspieszyła tempo zmian behawioralnych w stylu życia ludzi na całym świecie, w sposobie w jaki: pracują, jedzą, komunikują się, bawią, czy uczą. Dotyczy to również wzorców konsumpcji w każdej kategorii.

Sektor handlu i produktów konsumenckich znajduje się w punkcie zwrotnym. Nadszedł czas, by przemyśleć na nowo większość dotychczasowych założeń biznesowych. Firmy muszą zastanowić się, jaką wartość i w jaki sposób oferują ją dziś swoim klientom oraz, co najważniejsze, w jaki sposób będą to robić w przyszłości. Wyzwania przyszłości implikują potrzebę zdecydowanie bardziej proaktywnej polityki firm i szybszego reagowania na zachodzące zmiany. Wymuszają one również konieczność oparcia strategii rozwoju na coraz większej liczbie danych oraz dialogu ze wszystkimi interesariuszami. Rewolucja technologiczna wciąż zmienia krajobraz konsumencki. Nowoczesne technologie usprawniają procesy biznesowe, otwierają nowe kanały sprzedaży i interakcji z konsumentami tworząc nowe i nieznane dotąd modele biznesowe.

Nowe trendy w konsumpcji, zaobserwowane najpierw na rynkach krajów zachodnich, występują także na rynku polskim, gdyż zaistniały warunki im sprzyjające. Wpływają na to procesy globalizacji, w tym konsumpcji oraz poprawa warunków ekonomicznych społeczeństwa, czy zmiany społeczne i kulturowe. Zachowania konsumentów, jako nabywców dóbr i usług na rynku, są zróżnicowane. Z jednej strony następuje proces ujednolicania konsumpcji i przejmowanie wzorców z innych krajów, z drugiej zaś – ma miejsce indywidualizacja preferencji zakupowych i stylu życia.

---

[161] A. Dąbrowska. i in., *Kompetencje konsumentów – innowacyjne zachowania, zrównoważona konsumpcja*, PWE, Warszawa 2015, 25.

Streszczenie

Celem rozważań zawartych w rozdziale jest zapoznanie czytelników z elementarnymi metodami matematyczno-statystyczno-ekonometrycznymi stosowanymi w tworzeniu mikroekonomicznych modeli popytu na dobra określonego typu. Ponieważ zachowanie konsumentów jest systemem złożonym, istnieje więc problem odkrycia reguł rządzących procesem podejmowania przez nich decyzji.

W rozdziale mówione zostały następujące zagadnienia**:** modele zachowań konsumenta indywidualnego, idea aproksymacji oraz wybrane mikroekonomiczne funkcje popytu w postaci krzywych Engla. Treści merytoryczne rozdziału zostały podzielone na 4 podrozdziały.

Dwa początkowe podrozdziały zawierają: ekonometryczne modele konsumpcji w odniesieniu do konsumenta indywidualnego oraz istotę aproksymacji.

Rozdział trzeci został poświęcony wybranym mikroekonomicznym funkcjom popytu w postaci krzywych Engla.

W rozdziale czwartym omówione jest modelowanie ekonometryczne, które zostało zilustrowane przykładami rachunkowymi wraz z wyjaśniającym komentarzem.

Przedstawione w rozdziale treści, dotyczą ekonometrycznego modelowania zachowań konsumenta na rynku towarów konsumpcyjnych i mają zastosowanie w nowoczesnych technologiach informatycznych. Konsument jest osobą podejmującą racjonalną decyzję dotyczącą optymalnego wyboru dóbr i usług, więc teoria wyboru konsumenta ma niewątpliwie duże zastosowanie praktyczne i wymaga posiadania określonych kompetencji w zakresie modelowania ekonometrycznego.

Słowa kluczowe
modelownie, mikroekonomiczne modele, zachowania konsumentów, aproksymacja, krzywe Engla

Modeling of economic behavior of the consumer using microeconomic functions of demand

Summary

The aim of the considerations in this chapter is to familiarize readers with elementary mathematical-statistical-econometric methods used in creating microeconomic models of demand for a specific type of goods. Since consumer behavior is a complex system, there is a problem of discovering the rules governing the decision-making process.

The following issues were discussed in the chapter: an overview of individual consumer behavior models, the idea of approximation and selected microeconomic functions of demand in the form of Engel curves. The content of the chapter has been divided into 4 subsections.

The first two sections include: econometric models of consumption in relation to the individual consumer and the essence of approximation.

The third chapter is devoted to selected microeconomic functions of demand in the form of Engel curves.

Chapter four discusses econometric modeling, which has been illustrated with accounting examples with an explanatory commentary.

The content presented in the chapter on econometric modeling of consumer behavior on the consumer goods market is applicable in modern information technologies. The consumer is a person who makes a rational decision regarding the optimal choice of goods and services, so the theory of consumer choice has undoubtedly a great practical application and requires specific competences in econometric modeling.

Keywords
modeling, microeconomic models, consumer behavior, approximation, Engel curves

Bibliografia

1. Bartosiewicz S., *Metody ekonometryczne. Przykłady i zadania, praca zbiorowa*, PWE, 1980.
2. Bauman Z., *Płynne życie*, tłum. Tomasz Kunz, Wydawnictwo Literackie, Kraków 2007.
3. Buga J., *Metody ilościowe w naukach ekonomicznych*, Prace Naukowe, Ekonomika Nr 1/14/2006, Wydawnictwo Politechnika Radomska, Radom 2006.
1. Bywalec C., *Konsumpcja a rozwój gospodarczy i społeczny*, C.H. Beck, Warszawa 2010, s. 18.
2. Consumer Behavior, ed. L.G. Schiffman, 9th ed., New Jersey Prentice Hall 2007.
3. Czyżycki R., Hundert M., Klóska R., *Wybrane zagadnienia ekonometrii*, Economicus, Szczecin 2004.
4. Dąbrowska A. i in., *Kompetencje konsumentów – innowacyjne zachowania*, zrównoważona konsumpcja, PWE, Warszawa 2015, s.5.
5. Dudek H., S*kale ekwiwalentności – estymacja na podstawie kompletnych modeli popytu*, Wydawnictwo SGGW, Warszawa, 2011.
6. Engelhardt H., Kohler P., Prskawet A., *Causal Analysis in Population Studies: Concepts, Methods, Applications*, Springer, 2009.
7. Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., *Metody numeryczne*, Wydawnictwo Naukowo – techniczne, wydanie VI, Warszawa 2002.
8. Goldberger A.S., *Teoria ekonometrii*, PWE, Warszawa 1975.
9. Hicks J.R.S., *Wartość i kapitał*, PWN, Warszawa 1975.
10. Kempny M., *Wprowadzenie – Konsumpcja wyzwaniem dla socjologii współczesnej*, [w:] *Konsumpcja – istotny wymiar globalizacji kulturowej*, Wydawnictwo IFiS PAN, Jawłowska A., Kempny M. (red.), Warszawa 2005.
11. Kukła K., Goryl A., Jędrzejewski Z., Osiewalski J., Walkosz A., *Wprowadzenie do ekonometrii*, PWN, Warszawa 2009.
12. Mróz B. (2006), *Procesy globalizacji konsumpcji. Eurokonumenci* [w:] Janoś-Kresło M., Mróz B. (red.), *Konsument i konsumpcja we współczesnej gospodarce*, SGH, Warszawa.
13. Mróz B., *Konsument w globalnej gospodarce. Trzy perspektywy*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2013.
14. Ostrowska I., *Potrzeby i aspiracje jako czynniki inspirujące zachowania nabywców*, [w:] *Zachowania nabywców*, Perenc J. i Rosa G. (red.), WN US, Szczecin.
15. Perali F., *The Behavioral and Welfare Analysis of Consumption: The Cost of Children*, Equity and Poverty in Colombia, Springer, 2003.
16. Rusnak Z. *Statystyczna analiza dobrobytu ekonomicznego gospodarstw domowych*, Wyd. Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław 2007.
17. Sadowski W., *Elementy ekonometrii i programowania matematycznego*, PWN, Warszawa 1980.
18. Skowron S., Skowron Ł., *Lojalność klienta a rozwój organizacji*, Difin, Warszawa 2012.
19. Światowy G., *Zachowania konsumentów. Determinanty oraz metody poznania i kształtowania,* PWE, Warszawa 2006.

20. Witek J., *Zachowania konsumentów – wyzwaniem rynku*, [w:] *Zachowania nabywców*, Perenc J., Rosa G. (red.), WN US, Szczecin 2011.
21. Zalega T., *Konsumpcja*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2012.
22. Zalega T., *Nowe trendy w zachowaniach konsumpcyjnych miejskich gospodarstw domowych w okresie kryzysu*, „Marketing i Rynek" 2013, nr 8, s. 26.

Netografia

23. Bray, Consumer Behaviour Theory: Approaches and Models, s. 3–26, http://eprints.bournemouth.ac.uk/10107/1/Consumer_Behaviour_Theory_Approaches_%218._Models.pdf.
24. http://jacek.zlydach.pl/old-blog/download/numerki/sprawozdanka/Aproksyksy%20-%20teoria.pdf
25. The poorer is a family, the greater is the proportion of the total outgo [family expenditures] which must be used for food." (Engel quoted in Zimmerman, 1932)
26. file:///C:/Users/pc/Downloads/b_bazeli%20(1).pdf
23. Die Productions- und Consumtionsverhältnisse des Königreichs Sachsens.
24. https://www.pwc.pl/pl/artykuly/2019/czlowiek-w-swiecie-VUCA.html.
25. Annales H - Oeconomia http://oeconomia.annales.umcs.pl.
26. file:///C:/Users/pc/Downloads/1455-2931-1-SM.pdf
27. file:///C:/Users/pc/Downloads/211%20(5).pdf
27. https://repozytorium.amu.edu.pl/bitstream/10593/20121/1/012%20ZDZISŁAW%20KRASIŃSKI%20RPEiS%2024%283%29%2C%201962.pdf
28. file:///C:/Users/pc/Downloads/miz_zn_875_pzfim_nr_41_t._2.pdf

Marcelina Słaba – Wiącek

Rozdział siódmy

OPTYMALNE FUNKCJONOWANIE PRZEDSIĘBIORSTWA W OKRESIE NIEPEWNOŚCI RYNKOWEJ – PANDEMII COVID – 19 NA PRZYKŁADZIE PGNIG

Spis treści Rozdziału siódmego

Wprowadzenie 216
7.1. Charakterystyka Polskiego Górnictwa Naftowego i Gazownictwa S.A. 216
7.2. Przekrój zmian w działalności PGNiG w latach 2018 - 2021 217
Zakończenie 220
Streszczenie 221
Słowa kluczowe 221
Summary 222
Keywords 222
Bibliografia (netografia) 223

Wprowadzenie

Okres niepewności rynkowej zazwyczaj powoduje zaburzenia w działalności przedsiębiorstw. Pociągają one na ogół konsekwencje w sferze finansowej, jak też wpływają na funkcjonowanie firmy. Historycznie rzecz ujmując, z największymi okresami niepewności rynkowej mieliśmy do czynienia podczas wojen, rewolucji (w tym także w różnego rodzaju rewolucjach technologicznych - prowadzących do przemodelowania globalnego systemu gospodarczego) lub w czasie krachów bankowych, czy klęsk żywiołowych. Okres pandemii korona wirusa Covid-19, który rozpoczął się w 2019 roku, a pełny zasięg osiągnął w 2020roku, przełożył się na całą gospodarkę światową. Obserwowaliśmy niebywały wzrost sektora produkcji materiałów medycznych (w szczególności rękawic i fartuchów ochronnych, maseczek, płynów dezynfekcyjnych, itp.), zaś po drugiej stronie gospodarki -nastąpiła zapaść rynku różnych usług np. turystycznych.

W artykule przedstawione jest przedsiębiorstwo, które może posłużyć, jako względny index zachowania całej gospodarki narodowej w okresie pandemii. Jest to Polskie Górnictwo Naftowe i Gazowe Spółka Akcyjna (PGNIG) - podmiot monopolistyczny na rynku dostaw gazu na terytorium Rzeczypospolitej Polskiej. Strategiczna rola gazu w modernizującej się energetyce oraz jego istotne znaczenie w przemyśle chemicznym sprawiają, że jakiekolwiek większe zaburzenia w gospodarce powinny przekładać się wprost na wyniki finansowe firmy.

Przykładem przedsiębiorstwa, które nie doznało w/w strat, a nawet odnotowało pewne korzyści jest polskie duże przedsiębiorstwo: PGNiG. W treści niniejszego opracowania zawarte jest ilościowo - liczbowe uzasadnienie wypowiedzianej tezy.

7.1. Charakterystyka Polskiego Górnictwa Naftowego i Gazownictwa S.A.

Spółka PGNiG powstała 1 września 1982 w wyniku przekształcenia Zjednoczenia Górnictwa Naftowego i Gazowniczego utworzonego jeszcze w 1972 roku w wyniku połączenia Zjednoczenia Przemysłu Gazowniczego oraz Zjednoczenia Przemysłu Naftowego. W 1996 roku firma została przekształcona w spółkę akcyjną, zaś 2005 jej akcje zaczęto notować na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych (GPW). Obecnie 71% akcji przedsiębiorstwa znajduje się w posiadaniu Skarbu Państwa. Można więc uznać za zasadną hipotezę, że zarządzanie PGNiG jest mocno skorelowane z polityką gospodarczą rządu RP.

Działalność przedsiębiorstwa PGNiG można podzielić na cztery obszary:

- wydobywczy,
- wytwórczy,
- obrót i magazynowanie,
- dystrybucyja.

Spółka jest również odpowiedzialna za bezpieczeństwo gazowe Polski i w związku z tym posiada liczne podziemne magazyny gazu (część z nich powstała w wyniku zagospodarowania byłych sztolni górniczych). Przedsiębiorstwo posiada 7 oddziałów w kraju oraz dwa oddziały za granicą: Oddział Operatorski w Pakistanie oraz Oddział w Ras Al Khaimah w Zjednoczonych Emiratach Arabskich

7.2. Przekrój zmian w działalności PGNiG w latach 2018 - 2021

Osiągane przez przedsiębiorstwo wyniki finansowe są najczęściej charakteryzowane przez: EBIT i EBITDA.

EBIT, to wskaźnik, który jest liczony „od dołu". Do zysku netto dodawany jest podatek, a także koszty odsetkowe netto. W EBT znajduje się wynik pochodzący z działalności pozaoperacyjnej. Natomiast zysk operacyjny nie wlicza wyników z działalności pozarolniczej.[162]

EBITDA, to miara, która dotyczy rentowności działalności biznesowej. Ponadto jest ona wykorzystywana podczas wyceny przedsiębiorstwa. EBITDA osiąga się poprzez wykorzystanie kapitałów własnych, jak i finansowania zewnętrznego.[163]

Porównując przychody PGNiG uzyskane ze sprzedaży swoich produktów w latach 2018 – 2019 stwierdzamy, że finanse w roku 2019 kształtowały się wysokim poziomie. W okresie tym przychody ze sprzedaży wyniosły 42,05 mld zł. Jest to dobry wynik ze względu na to, że w roku poprzedzającym były one o 2% niższe. Wynik EBITDA sięgnął 5,5 mld zł, a zysk netto 1,37 mld zł. Zatem sprzedaż gazu w roku 2019 była większa, niż w roku poprzednim o około 6%, pomimo, że I i IV kwartał tego roku charakteryzował się wyższymi temperaturami atmosferycznymi, które sprawiały u odbiorców mniejsze ich zapotrzebowanie na zużycie tego produktu m.in. na ogrzewanie.

Na przełomie lat 2018/2019 import gazu z Rosji do Polski spadł z 67%, aż do 60%. Wzrósł natomiast LNG z 20% do 23 %. Ponadto obrót detaliczny rok do roku, dotyczący baz odbiorców paliwa gazowego, wzrósł o około 67 tys. mln. m^3. Sprzedaż odbiorcom końcowym w roku 2019 wyniosła o ok. 100 mln m^3 więcej, niż w roku poprzednim. Natomiast usługi dystrybucyjne w analizowanych latach spadły o 5% przy zmniejszonej o 2% ilości dystrybuowanego paliwa.[164] Należy ponadto stwierdzić, iż od miesiąca lutego 2019 r. obowiązuje niższa o 5% stawka taryfy dystrybucyjnej względem stawki z roku 2018. Na tak dobry wynik finansowy w roku 2019 miały wpływ zawarte w IV kwartale odpisy na Rzeczowy Majątek Trwały oraz na Obrót i Magazynowanie.

W związku z powszechnie zaistniałą w 2020r. pandemią COVID – 19 spółka PGNiG nie wstrzymywała dostaw swoich produktów dla klientów, pomimo tego że część z nich miało problem z terminowymi płatnościami. W marcu w/w roku Spółka odnotowała znaczący sukces w zakresie zawierania nowych umów z odbiorcami.

Z powodu pandemii w roku 2020 zostało wprowadzonych w gospodarce światowej wiele ograniczeń. Uwzględniając zaistniałą sytuację, Spółka - w trosce o bezpieczeństwo klientów - zawierała nowe umowy przez platformę informatyczną e-BOK. Platforma ta umożliwia zawieranie umów z PGNiG on-line, co jest szczególnie istotne w kontekście braku możliwości osobistego kontaktu klienta z Biurem Obsługi Klienta z powodu pandemii. Dla przykładu, w jednym z tygodni marca 2020 r. spółka zawarła aż 735 nowych lub znowelizowanych umów. W całym zaś miesiącu marcu 2020r. spółka zawarła aż o 1000% nowych umów więcej w porównaniu z miesiącem lutym tegoż roku. Jest to bardzo duży

---

162 https://www.gpwonfostrefa.pl/co-to-jest-ebit-a-zysk-operacyjny/

163 https://www.private-equity.pl/co-to-jest-ebitda/

164 https://pgnig.pl/aktualnosci/-/news-list/id/koronawirus-w-polsce-pgnig-zapewni-dostawy-gazu-i-pradu-dla-klientow-majacych-opoznienia-w-platnosciach/newsGroupId/10184?changeYear=2020&currentPage=13

wzrost z 250 umów w lutym do 2500 nowych podpisanych w marcu. Następnie w kwietniu 2020 przedsiębiorstwo zawarło kolejnych aż 7 tysięcy nowych umów.

Zatem, na przykładzie PGNiG, można stwierdzić, że umowy zawarte online, podczas zdalnej obsługi klientów, są skuteczniejsze i przedsiębiorstwo może sobie nieźle radzić podczas pracy zdalnej w kontaktach z klientami z powodu wciąż trwającej pandemii.

Rok 2020 upłynął pod wciąż trwającym znakiem ogólnoświatowej pandemii COVID – 19. W tym czasie bardzo wiele firm istotnie ograniczyło swoją działalność lub nawet zrezygnowało z dalszego funkcjonowania na rynku. W przedsiębiorstwie PGNiG odnotowano sytuację wprost przeciwną.

W I półroczu 2020 roku nastąpił rekordowy wzrost wyników działalności tego przedsiębiorstwa. Zysk netto oraz wskaźnik EBIT, w porównaniu z I półroczem w 2019 roku, wzrósł aż czterokrotnie. Natomiast parametr EBITDA w tym samym okresie porównawczym również wzrósł i to aż trzykrotnie. Ponadto przedsiębiorstwo zwiększyło sprzedaż gazu ziemnego, co w konsekwencji przyczyniło się do wzrostu sprzedaży energii cieplnej.

W 2020 r. przychody ze sprzedaży produktów PGNiG wyniosły 21,04 mld zł, a zysk netto 5,92 mld zł. Wskaźnik EBITDA ukształtował się na poziomie 9,35 mld zł, zaś EBIT sięgnął 7,65 mld zł. Konkludując, należy stwierdzić, iż pomimo wciąż trwającej pandemii COVID – 19, spółka osiągnęła w I półroczu 2020r. bardzo dobre wyniki. Ponadto w rankingu raportowanych przedsiębiorstw za I półrocze oraz kwartał PGNiG osiągnęło, spośród wszystkich spółek notowanych na giełdzie[165], wyniki najlepsze.

Przychody finansowe analizowanego przedsiębiorstwa w I półroczu 2020 r. kształtowały się na poziomie 2,12 mld zł. Oznacza to jednak spadek o 29% w porównaniu rok do roku. Na taki wynik miała wpływ cena ropy naftowej, która była niższa aż o 34% niż w roku poprzednim, przy czym jej wydobycie było o 7% wyższe, niż przed rokiem.

Ponadto na wyniki finansowe I półrocza analizowanej firmy miały wpływ Odpisy na Majątek Trwały w kwocie 853 mln zł.[166] Przychody firmy ze sprzedaży w obrocie i magazynowaniu spadły o 8% rok do roku do tj. do poziomu 16,48 mld zł. Nastąpił wówczas wzrost sprzedaży gazu ziemnego ogółem o 6% do 16,90 mld m^3.[167] Na ten segment działalności PGNiG największy wpływ miało pomniejszenie kosztów operacyjnych - tych które dotyczą pozyskania gazu ziemnego wskutek wpływu rozliczenia za okres od 2014 do lutego 2020 roku.[168]

Dystrybucja gazu w 2020 r. utrzymywała się na poziomie zbliżonym do poziomu z I półrocza 2019 roku. Wyniosła ona 6,19 mld m^3, czyli jest to spadek o2 % rok do roku. Natomiast przychody z usług dystrybucyjnych wzrosły do 2,28 mld zł oraz wskaźnik EBITDA także wzrósł w tym segmencie o 5%.

W 2020 przychody ze sprzedaży energii cieplnej kształtowały się na poziomie 790 mln zł, czyli wzrosły o 7% przy wyższej taryfie i średniej miesięcznej temperaturze niższej o 0,3 stopnia C niż w tym samym porównawczym okresie roku wcześniejszego.[169]

---

[165] https://pgnig.pl/aktualnosci/-/news-list/id/pgnig-prawie-100-proc-wzrost-sprzedazy-lng-w-i-kwartale-2021-roku/newsGroupId/10184?changeYear=2021&currentPage=1
[166] Tamże.
[167] Tamże.
[168] https://pgnig.pl/aktualnosci/-/news-list/id/solidny-wzrost-wynikow-gk-pgnig-w-i-kwartale-2021-roku/newsGroupId/10184?changeYear=2021&currentPage=1
[169] Tamże.

Kondycja gospodarcza i finansowa PGNiG w roku 2021 kształtowała się na dobrym poziomie. W I kwartale bieżącego roku spółka odnotowała prawie 100%-owy wzrost sprzedaży. Na tak dobry wynik wpływ miała rosnąca popularność autobusów oraz ciężarówek napędzanych gazem. W pierwszych trzech miesiącach 2021 r. przychody PGNiG kształtowały się na poziomie 14,6 mld zł, wskaźnik EBITDA - 3,4 mld zł, a zysk netto sięgnął 1,7 mld zł. Tak dobre wyniki spółka zawdzięcza poprawie wyników operacyjnych.

Zatem I kwartał bieżącego roku, to kolejny bardzo dobry okres dla przedsiębiorstwa. Od stycznia do marca spółka osiągnęła 14,55 mld zł przychodów, czyli w porównaniu z I kwartałem roku poprzedniego jest to wzrost o 6%. Stało się tak dzięki obniżeniu kosztów operacyjnych o 3%, tj. aż o 12,12 mld zł. Wskaźnik EBITDA ukształtował się na poziomie 3,39 mld zł, a parametr EBIT wzrósł aż o 102% w porównaniu rok do roku. Zatem zysk netto wyniósł 124% wyniku sprzed roku.

Udział w poszczególnych segmentach miernika EBITDA wyniósł, jak następuje: [170]

- Poszukiwanie i Wydobycie - 40%
- Obrót i Magazynowanie - 15%
- Dystrybucja - 30%
- Wytwarzanie - 14%

Przychody do marca 2021 r. w pierwszym z w/w segmentów wyniosły o 1,79 mld zł więcej niż w roku wcześniejszym. Natomiast sam wynik EBITA był aż 18 – krotnie wyższy. Kwartalna cena ropy wzrosła o 20% rok do roku, czyli do 60,7 dolarów za baryłkę.[171] Spowodowało to wzrost wydobycia gazu ziemnego z 1,16 mld m^3 do 1,24 mld m^3.[172] Na tak dobry wynik w tym segmencie miały wpływ odpisy aktualizujące Rzeczowy Majątek Trwały.

W segmencie drugim - Obrót i Magazynowanie przychody ze sprzedaży wyniosły 11,49 mld zł. Czyli jest to wzrost o 4% w porównaniu z rokiem poprzednim. Ponadto został odnotowany ujemny wynik z tytułu realizacji instrumentów zabezpieczających. Te czynniki przyczyniły się do obniżenia wyników EBITDA o 46%.

Warto też zauważyć, iż pandemia COVID-19 w roku 2021 nie ustała i nadal stanowi istotne niebezpieczeństwo dla przedsiębiorstw produkcyjnych. Natomiast pomoc rządowa dla przedsiębiorstw jest sukcesywnie wygaszana.

Niskie temperatury atmosferyczne, który utrzymywały się przez dłuższą część I kwartału bieżącego roku spowodowały wzrost poziomu sprzedaży gazu ziemnego o 6% w porównaniu rok do roku, co dodatkowo wpłynęło pozytywnie na budżet PGNiG. Największy rekord sprzedaży paliwa gazowego został przez spółkę odnotowany w dniu 18 stycznia 2021 roku. Przyczyniły się do tego niskie temperatury zewnętrzne. W związku z tym w I kwartale bieżącego roku odnotowano wzrost sprzedaży gazu o 20%, gdyż niskie temperatury zawsze przekładają się na wzrost zapotrzebowania klientów na paliwo gazowego przez, a tym samym zwiększa się sprzedaż produktów oferowanych przez PGNiG.

---

[170] Tamże.

[171] https://pgnig.pl/aktualnosci/-/news-list/id/pgnig-obrot-detaliczny-wzrost-sprzedazy-cng-i-lng-w-2020-roku/newsGroupId/10184?changeYear=2021&currentPage=4

[172] Tamże.

Zakończenie

Powyższe analizy porównawcze wykazały, że wpływ pandemii COVID – 19 nie odbił się niekorzystnie na działalności PGNiG S.A.. Przedsiębiorstwa wychodzi z okresu pandemicznego z bardzo dobrymi wynikami finansowymi.

Ponieważ przedsiębiorstwo to możemy traktować (dzięki funkcji dystrybucyjnej w zakresie gazu ziemnego), jako wskaźnik odnoszący się do gospodarki narodowej w zakresie produkcyjnym, więc zasadne jest sformułowanie hipotezy, że pandemia nie odbiła się znacząco na polskim sektorze produkcyjnym. Najpewniej determinantą tegoż jest pomoc rządowa skierowana do całej gospodarki. Weryfikacja tej hipotezy będzie celem badawczym, który podejmę w kolejnych pracach.

Pod wpływem różnych czynników zewnętrznych przedsiębiorstwa starają się dostosowywać swoją działalność do nowych warunków gospodarczych dokonując szeregu analiz optymalizujących swoje funkcjonowanie w zakresie opłacalności i zyskowności oraz w odniesieniu do podejmowanych przedsięwzięć. W analizach tych stosuje się odpowiednie narzędzia i metody ilościowe z zakresu matematyki i statystyki oraz prognozowania.

Streszczenie

Tematyka rozdziału dotyczy działań podejmowanych przez firmę w celu optymalizacji finansowej i gospodarczej w okresie niepewności rynkowej - na przykładzie zaistniałej pandemii COVID – 19 i przedsiębiorstwa PGNiG S.A..

Rozdziału został podzielony na dwa podrozdziały, z których pierwszy przedstawia ogólną charakterystykę omawianego przedsiębiorstwa, jakim jest PGNiG S.A., natomiast w drugim zaprezentowane są wskaźniki dynamiki odnoszące się do sytuacji finansowej i gospodarczej analizowanej firmy w okresie od 2018 do I kwartału 2021 roku włącznie.

Publikacja pokazała, jak przykładowe przedsiębiorstwo pomimo tego, że działało w warunkach niepewności poprawiło wskaźniki finansowe. .

Słowa kluczowe
analiza, przedsiębiorstwo, optymalizacja, niepewność rynkowa

Optimal operation of the company in a period of market uncertainty – COVID pandemic – 19 on PGNIG example

Summary

The theme of the chapter concerns the various financial and economic measures undertaken by the company during a period of market uncertainty - on the example of the covid pandemic - 19 and PGNiG S.A..

The content of the chapter is divided into two sub-chapters, the first of which presents the general characteristics of the company in question, which is PGNiG S.A., while in the second, various indicators of dynamics relating to the financial and economic situation of the company under analysis are presented in the period from 2018 to Q1 2021 inclusive.

The publication showed how the sample company, as a result of optimising and adapting to the previously unpredictable external disadvantages, nevertheless obtained certain advantages, despite the unfavourable socio-economic changes caused by the global pandemic, that is, during a period of market uncertainty.

Keywords
analysis, enterprise, optimisation, market uncertainty

Bibliografia (netografia)

1. https://pgnig.pl/aktualnosci/-/news-list/id/pgnig-prawie-100-proc-wzrost-sprzedazy-lng-w-i-kwartale-2021-roku/newsGroupId/10184
2. https://pgnig.pl/aktualnosci/-/news-list/id/gk-pgnig-wzrost-zysku-netto-w-i-polroczu-2020-roku-do-ponad-5-9-mld-zl/newsGroupId/10184?changeYear=2020&currentPage=5
3. https://pgnig.pl/aktualnosci/-/news-list/id/rekord-ebok-pgnig-ponad-7-tys-umow-online-tylko-w-kwietniu-/newsGroupId/10184?changeYear=2020&currentPage=10
4. https://pgnig.pl/aktualnosci/-/news-list/id/rekordowy-marzec-ebok-pgnig-wzrost-nowych-umow-online-o-ponad-1000-/newsGroupId/10184?changeYear=2020&currentPage=11
5. https://pgnig.pl/aktualnosci/-/news-list/id/blisko-700-wiecej-umow-online-/newsGroupId/10184?changeYear=2020&currentPage=12
6. https://pgnig.pl/aktualnosci/-/news-list/id/koronawirus-w-polsce-pgnig-zapewni-dostawy-gazu-i-pradu-dla-klientow-majacych-opoznienia-w-platnosciach/newsGroupId/10184?changeYear=2020&currentPage=13
7. https://pgnig.pl/aktualnosci/-/news-list/id/gk-pgnig-ponad-42-mld-zl-przychodow-i-1-37-mld-zl-zysku-w-2019-roku/newsGroupId/10184?changeYear=2020&currentPage=13
8. https://pgnig.pl/aktualnosci/-/news-list/id/pgnig-prawie-100-proc-wzrost-sprzedazy-lng-w-i-kwartale-2021-roku/newsGroupId/10184?changeYear=2021&currentPage=1
9. https://pgnig.pl/aktualnosci/-/news-list/id/solidny-wzrost-wynikow-gk-pgnig-w-i-kwartale-2021-roku/newsGroupId/10184?changeYear=2021&currentPage=1
10. https://pgnig.pl/aktualnosci/-/news-list/id/gk-pgnig-osiagnela-ponad-7-3-mld-zl-zysku-w-2020-roku/newsGroupId/10184?changeYear=2021&currentPage=3
11. https://pgnig.pl/aktualnosci/-/news-list/id/pgnig-obrot-detaliczny-wzrost-sprzedazy-cng-i-lng-w-2020-roku/newsGroupId/10184?changeYear=2021&currentPage=4
12. https://pgnig.pl/aktualnosci/-/news-list/id/rekordowe-wyniki-grupy-kapitalowej-pgnig-po-trzech-kwartalach-2020-roku/newsGroupId/10184?changeYear=2020&currentPage=2
13. https://www.gpwonfostrefa.pl/co-to-jest-ebit-a-zysk-operacyjny/
14. https://www.private-equity.pl/co-to-jest-ebitda/

Bogusław Kaczmarczyk

Rozdział ósmy

NIEDOOKREŚLONE UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

Motto:
Trzeba podważać wszystko, co się da podważyć,
gdyż tylko w ten sposób można wykryć to,
co podważyć się nie da.
(prof. Tadeusz Kotarbiński, filozof*)*

Spis treści Rozdziału ósmego

Wprowadzenie ... **226**
8.1. Kostka danych, układ równań liniowych, niedookreślony układ równań liniowych ... **226**
8.2. Pojęcia wyznacznika macierzy, rzędu, defektu i transpozycji w analizie macierzowej ... **228**
8.3. Macierz odwrotna – ujęcie klasyczne dla rozwiązania układu równań liniowych ... **229**
8.4. Metoda najmniejszych kwadratów opracowania obserwacji w badaniach naukowych – wyprowadzenie metody wraz z dowodem ... **231**
8.5. Rozwiązanie niedookreślonego układu równań w oparciu o macierz *MP-odwrotną* dla bezdefektowej macierzy danych wraz z budową modelu ekonometrycznego ... **232**
Zakończenie ... **235**
Streszczenie ... **236**
Słowa kluczowe ... **236**
Summary ... **237**
Keywords ... **237**
Bibliografia ... **238**
Netografia ... **239**

Wprowadzenie

W nauce dla szeregu prac i badań naukowych, zwłaszcza na gruncie ilościowym analizowanych zagadnień, dominują wzory jako rozwiązania ścisłe celem poznania naukowego. W klasycznym ujęciu ekonometrycznym bardzo przydatnym narzędziem analitycznym jest wielowymiarowa analiza porównawcza (WAP) według [Łuniewskiej, Tarczyńskiego, 2006, s. 9-21].

Pełny i zdefiniowany do analizy zbiór przypadków i zmiennych, przyjęto w analizie danych, w tym w nauce ekonometrii i taksonometrii, nazywać kostką danych. Pojęcie kostka danych zdaniem [Nowaka, 1990, s. 15-18], [Jajugi, 1993, s. 49-177], [Grabińskiego, 1994, s. 68-84], [Popławskiego i Kaczmarczyka, 2016, s.121-133 i 2017, s. 35-49] i wielu innych, to wyjściowa macierz danych o jednoznacznym ujęciu: ilościowym lub jakościowym [Charmaz, 2009, s. 227-238], [Jemielniak, 2012, t.1 s. 89-113, 2012, t.2 s. 131-162] i wielu innych, o możliwe różnym stopniu wyskalowania danych oraz kompletności. Na ogół w badaniach naukowych kostki danych w zbiorach danych występują bez braku danych, jednak z możliwym badawczo brakiem danych. Sytuacja braku danych występuje nawet w zbiorach demograficznych, bądź w badaniach społecznych, w tym dla danych socjologicznych, czy psychologicznych przykładowo: badania sondażowe, ankietowe, wywiady, testy.

Dla kompletnej kostki danych istnieje zdaniem [Kaczmarczyka, 2017] nowe pojęcie analizy danych tj. objętość informacyjna w kostkach danych, jako *miotełka obiektów* stanowiąca łącznie jedną z wielu możliwych miar dla kostek danych, jako wielowymiarowy i wieloobiektowy szereg czasowy dla stosowanych analiz w ramach WAP. Przedmiotowe ujęcie dla wyjściowej kostki danych jest zgodne z fundamentalną zasadą nauki tj. zasadą dedukcji według [Kotarbińskiego, 1986, s. 212-213], [Marciszewskiego, 1987, s. 72-82], [Apanowicza, 2005, s. 26-37] i wielu innych, jako implikacyjna zasada przyczynowości.

Z uwagi na złożoność zagadnienia (braków danych w bazach danych) oraz fakt, że problem braków danych w kostkach danych stanowi stały i ciągle nierozwiązany (pomimo ogromnego postępu informatycznego) problem w nauce, przyjmuje się w zdecydowanej większości analiz pełną kompletność kostki danych, jako podstawę badań i wnioskowania.

Powyższy postulat w zakresie pełnej kompletności danych, dotyczy również niniejszego rozdziału (w znaczeniu teoretycznym i praktycznym) dla opisu systematyki układów równań, wraz z istnieniem ścisłych rozwiązań (w klasie rozwiązań liniowych), analizą dokładności oraz zastosowaniem niedookreślonych układów równań.

8.1. Kostka danych, układ równań liniowych, niedookreślony układ równań liniowych

W ramach kostki danych[173] rozważmy ogólny zbiór obiektów i oraz zmiennych z przypisanymi cechami danych zapisany w postaci macierzy A wymiaru $(m \cdot n)$ w postaci (1):

[173] Wyjściowa macierz danych dla której zdefiniowano zmienną objaśnianą i zmienne objaśniające.

$$
A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \qquad (1)
$$

W kostce danych, w ramach klasycznych badań naukowych, w tym badań ekonometrycznych, wyodrębnia się:

- obiekty, czyli przypadki oznaczone, jako m_i będące wierszami w A oraz
- zmienne będące kolumnami w macierzy $,A$ którym przypisano liczbowo wyskalowane cechy[174] w danej skali pomiarowej [Stevens, 1959, s. 18-64].

W ramach zestawu n_i zmiennych, dla kostki danych istnieje w nauce dalszy podział na zmienne objaśniane i zmienną objaśnianą, którą najczęściej w literaturze przedmiotu stanowi jednokolumnowa macierz oznaczona w tekście monografii, jako macierz $B_{m,1}$. Stąd w przypadku najbardziej ogólnym, pełną (bez braków danych) wieloprzypadkową i wielowymiarową kostkę danych można zapisać, jako układ równań liniowych[175] w formule (2) w postaci:

$$
A_{m,n} \cdot X^{\wedge}_{n,1} = B_{m,1} \xleftrightarrow{\textit{Odpowiada}} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^{\wedge}_{1,1} \\ x^{\wedge}_{2,1} \\ \dots \\ x^{\wedge}_{n,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \dots \\ b_{m,1} \end{bmatrix} \qquad (2)
$$

gdzie:

$A_{m,n}$ - wyjściowa macierz obserwacji,

$X^{\wedge}_{n,1}$ - macierz rozwiązań,

$B_{m,1}$ - macierz zmiennej objaśnianej.

Poza zapisem formalnym, niezmiernie ważnym wręcz fundamentalnym elementem dla (2) jest struktura, w tym wymiar macierzy A, który z kolei zależy od dostępnych (zgromadzonych) danych wyjściowych analizy. Z drugiej strony, wymiar kostki danych determinuje relacja pomiędzy liczbą wierszy, a liczbą kolumn w A, zatem ogólnie: każda kompletna i niezerowa macierz A może w danym memencie badawczym geometrycznie przyjmować tylko i wyłącznie jedną z trzech możliwych postaci – Tabela 1.

[174] Cechy ilościowe zaprezentowane na przykład w skali porządkowej, bądź cechy jakościowe zaprezentowane jako przymiotniki opisowe danej zmiennej. Szerzej nt. analiz jakościowych w pracy Aranowska E. *Elementy zastosowań modelu wielowymiarowej analizy wariancji (MANOVA) w badaniach psychologicznych* w: *Wielozmiennowe modele statystyczne w badaniach psychologicznych pod redakcją Jerzego Brzezińskiego*. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa-Poznań 1987, s. 115-151.

[175] Niewiadoma (poszukiwany estymator rozwiązania układu równań) jest w potędze pierwszej.

Tabela 1. Typologia geometryczna kompletnych wielowymiarowych kostek danych.

Lp.	Geometria kostki danych	Nazwa układu równań	Wymiar kostki danych	Przykład macierzy danych	Układ równań typu
1	2	3	4	5	6
1	Prostokątna i pionowa	Nad określony	$A_{m,n}$ liczba wierszy jest większa od liczby kolumn.	$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{31} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} \end{bmatrix}$	$A \cdot X = B$
2	Kwadratowa	Tożsamy	$A_{m,m}$ liczba wierszy jest równa liczbie kolumn.	$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$	
3	Prostokątna i pozioma	Niedookreślony	$A_{m,n}$ liczba wierszy jest mniejsza od liczby kolumn.	$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \end{bmatrix}$	

Źródło: Opracowanie własne.

8.2. Pojęcia wyznacznika macierzy, rzędu, defektu i transpozycji w analizie macierzowej

W rozważaniach na temat układów równań liniowych istotnymi pojęciami w zakresie otrzymania rozwiązań dla układu typu (2) bez względu na kształt geometryczny kostki danych są pojęcia:

a) *wyznacznika macierzy* A oznaczonego $\det(A)$, który zgodnie definicją podaną przez [Goodfellow, Bengio, Courville, 2018, s. 45] jest funkcją odwzorowującą macierz na skalary rzeczywiste. Wartość wyznacznika jest równa iloczynowi wszystkich wartości własnych macierzy A.

b) *rzędu macierzy* oznaczonego, jako $R(A_{m,n})$, który wg definicji [Turowicza, 1995, s. 27] oznacza amaksymalny minor[176] (podwyznacznik, jako $\det(A)$ różny od zera wyjęty z macierzy A), bądź liczbę liniowo niezależnych wierszy lub liczbę liniowo niezależnych kolumn w A, zatem (3):

$$0 < R(A_{m,n}) \leq \min.(m,n) \tag{3}$$

c) *defektu macierzy* oznaczamy $d(A_{m,n})$, jako liczba całkowita obliczona wg. formuły (4):

$$d(A_{m,n}) = \min(m,n) - R(A_{m,n}) \tag{4}$$

[176] Minor, czyli podwyznacznik równy wyznacznikowi uzyskanego po skreśleniu i-tego wiersza oraz j-tej kolumny w macierzy A.

z własnościami: (4.1) i (4.2):

$$\text{jeżeli } d(A_{m,n}) = 0 \text{ to macierz } A_{m,n} \text{ jest pełnego rzędu} \tag{4.1}$$

oraz

$$\text{jeżeli } d(A_{m,n}) > 0, \text{ to macierz } A_{m,n} \text{ jest niepełnego rzędu, zatem jest osobliwa} \tag{4.2}$$

d) *transpozycji macierzy* $A_{m,n}$, jako zamiany wierszy na kolumny odwrotnie zgodnie z formułą (5):

$$\underset{i,j}{\forall} : a_{i,j}^T = a_{j,i} \tag{5}$$

z własnościami:

$$(A^T)^T = A \tag{5.1}$$

$$(A+B+C)^T = A^T + B^T + C^T \tag{5.2}$$

$$(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T \tag{5.3}$$

$$(c \cdot A)^T = c \cdot A^T \tag{5.4}$$

$$A^T = A : \forall A_{m,m}\ (A) \text{ jest symetryczna} \tag{5.5}$$

8.3. Macierz odwrotna – ujęcie klasyczne dla rozwiązania układu równań liniowych

W rozwiązaniach ścisłych dla kostek danych i rozwiazywania układów równań niezmiernie ważnym pojęciem jest pojęcie *macierzy odwrotnej*, czyli *inwers macierzy*. Macierz odwrotna jest narzędziem matematycznym dla jednoznacznego rozwiązania układu równań. Dla kwadratowej kostki danych zgodnie z systematyką podaną w Tabeli 1 wyjściowy układ równań, wraz z schematem rozwiązania przedstawiono, w formule (6):

$$A_{m,m} \cdot X^{\wedge}_{m,1} = B_{m,1} \xleftrightarrow{Odpowiada} X^{\wedge} = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} x^{\wedge}_{1,1} \\ x^{\wedge}_{2,1} \\ \dots \\ x^{\wedge}_{m,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,m} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \dots \\ b_{m,1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Dla nieosobliwej macierzy kwadratowej A odwrotność A^{-1} jest zdefiniowana jako (7):

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I \tag{7}$$

z własnościami:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \tag{7.1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \tag{7.2}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \tag{7.3}$$

$$(c \cdot A)^{-1} = \frac{1}{c} \cdot A^{-1} \tag{7.4}$$

Odwrotność każdej nieosobliwej, bez defektu, macierzy kwadratowej można obliczyć korzystając z formuły (8):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)^T \tag{8}$$

W formule (8) $adj(A)^T$ oznacza transponowaną macierz dopełnień algebraicznych. W celu sprawnego dokonania analizy dla celów obliczenia odwrotności w niniejszej pracy wykorzystano wbudowaną funkcje matematyczną w programie[177] DERIVE.

Przykład liczbowy P₁

W celu przybliżenia teorii w związku zagadnieniami klasycznej odwrotności macierzy dla kwadratowych kostek danych rozważmy przykład P_1: przyjmijmy w ramach kwadratowej kostki danych kompletną, niezerową a zarazem dowolną[178] macierz $A_{3,3}$ w postaci:

$A_{3,3}$	2	5	3
	3	-1	2
	8	5	9

dla której:

rząd według formuły (3) wynosi $R(A) = 3$, stąd defekt zgodnie z formułą (4) $d(A) = \min(m, n) - R(A_{m,n}) = 3 - 3 = 0$, czyli macierz A jest bez defektu (ma defekt zerowy). Obliczony niezerowy wyznacznik[179] $\det(A) = -24$ wskazuje, że macierz $A_{3,3}$ jest nieosobliwa. Zatem można dokonać zgodnie z formułą (8) obliczenia odwrotności macierzy wraz z jej sprawdzeniem wg. formuły (7):

$A_{3,3}^{-1}$	$\frac{19}{24}$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{-13}{24}$
	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-5}{24}$
	$\frac{-23}{24}$	$-1\frac{1}{4}$	$\frac{17}{24}$

Sprawdzenie obliczeń dla odwrotności polega na wykonaniu mnożenia macierzy $(A^{-1} \cdot A) = I$ zgodnie z formułą (7). Wynik mnożenia, to kwadratowa, symetryczna i jednostkowa macierz I, która potwierdza prawidłowość obliczeń.

$A_{3,3}^{-1} \cdot A_{3,3} = I_{3,3}$	**1**	0	0
	0	**1**	0

[177] Źródło: DERIVE 6,0 nr lic. 372E-DR2J-C4D2-VRJ2T.
[178] Źródło danych: generator liczb losowych w MS Excel funkcja (LOS) zawarta na załączonym CD w ramach: Jackson M, Staunton M., *Zaawansowane modele finansowe z wykorzystaniem Excela i VBA*. Wydawnictwo Helion Warszawa 2004, s. 24.
[179] Źródło: DERIVE 6,0 – op.cit.

	0	0	**1**

W przypadku stwierdzenia osobliwości tj. sytuacji kiedy $\det(A) = 0$ - przykład P_2 - klasyczna odwrotność macierzy nie istnieje, co nie wyklucza istnienia odwrotności przy zastosowaniu zaawansowanych, nieklasycznych metod estymacji opisanych przez [Deutscha, 1969, s. 109-118] i wielu innych.

8.4. Metoda najmniejszych kwadratów opracowania obserwacji w badaniach naukowych – wyprowadzenie metody wraz z dowodem

Pomimo upływu wielu lat od czasów wybitnego matematyka[180] C.F. Gaussa, współtwórcy metody najmniejszych kwadratów (MNK), ta metoda jest ciągle stosowana i udoskonalana [Linnik, 1962, s. 261-267], [Larose, 2012, s. 36-72 i wielu innych].

W nauce ważną tezą tej metody jest stwierdzenie, że odległość pomiędzy obiektami (prawdziwym i estymowanym) jest najmniejsza wtedy i tylko wtedy, kiedy kwadrat odległości pomiędzy danymi rzeczywistymi, a estymowanym modelem jest najmniejszy – stąd nazwa: metoda najmniejszych kwadratów. Wiele algorytmów MNK zostało wpisane bezpośrednio w biblioteki programów do obliczeń i analizy danych: MS Excel, Statistica, SAS, SPSS, GRETL i wiele innych.

W celu przybliżenia czytelnikowi zasad metody najmniejszych kwadratów (MNK) autor monografii zaprezentował poniżej wyprowadzenie tej metody w klasie rozwiązań liniowych na podstawie prostokątnej i pionowej kostki danych w warunkach nie sprzecznych – wiersz pierwszy Tabela 1, zatem wychodząc z założenia (2) oraz uwzględniając (9) i (10) łącznie dla MNK zachodzi:

$$\delta = (A \cdot X - B) - (A \cdot X^{\wedge} - B^{\wedge}) \tag{9}$$

$$(B - B^{\wedge}) \longrightarrow \min. \Leftrightarrow (B - B^{\wedge})^2 \longrightarrow \min. \tag{10}$$

gdzie:

δ - odchyłka pomiędzy wielkością prawdziwą, a wielkością estymowaną (szacowaną),
A - macierz obserwacji,
X - macierz niewiadomych,
B - macierz wyrazów wolnych,
$X^{\wedge}$ - estymator macierzy niewiadomych,
$B^{\wedge}$ - estymator macierzy wyrazów wolnych.

Przechodząc do dowodu i wyprowadzenia zasad dla metody MNK rozważmy funkcję F w postaci macierzowej:

[180] Carl Friedrich Gauss ur. 30 kwietnia 1777r. zm. 23 lutego 1855. Wybitny matematyk niemiecki.

$$F \xrightarrow{\text{minimum}} (\delta^T - \delta) = \sum_{i=1}^{i=n} (B - B^{\wedge})^2 = (B - B^{\wedge})^T \cdot (B - B^{\wedge}) = (B - A \cdot X^{\wedge})^T \cdot (B - A \cdot X^{\wedge}) =$$

$$= B^T \cdot B - B^T \cdot A \cdot X^{\wedge} - X^{\wedge^T} \cdot A^T \cdot B + X^{\wedge^T} \cdot A^T \cdot A \cdot X^{\wedge} = \tag{11}$$

$$= B^T \cdot B - X^{\wedge^T} \cdot A^T \cdot B - X^{\wedge^T} \cdot A^T \cdot B + X^{\wedge^T} \cdot A^T \cdot A \cdot X^{\wedge} =$$

$$= B^T \cdot B - 2 \cdot X^{\wedge^T} \cdot A^T \cdot B + X^{\wedge^T} \cdot A^T \cdot A \cdot X^{\wedge}$$

Estymator $X^{\wedge}$ wyznaczono z warunku koniecznego[181] minimalizacji wyrażenia F względem parametru $X^{\wedge}$ dla istnienia ekstremum lokalnego funkcji różniczkowalnej:

$$\frac{\partial F}{\partial X^{\wedge}} = -2 \cdot A^T \cdot B + 2 \cdot A^T \cdot A \cdot X^{\wedge} \tag{12}$$

oraz dla (13) tj. przyrównaniu pierwszej pochodnej do zera:

$$\frac{\partial F}{\partial X^{\wedge}} = 0 = (-2 \cdot A^T \cdot B + 2 \cdot A^T \cdot A \cdot X^{\wedge}) = 0 \tag{13}$$

Stosując przekształcenia z wykorzystaniem (7) otrzymano w (14) równania normalne wraz z rozwiązaniem:

$$\begin{aligned} & A^T \cdot A \cdot X^{\wedge} = A^T \cdot B \,\Big|\cdot (A^T \cdot A)^{-1} \\ & (A^T \cdot A)^{-1} \cdot (A^T \cdot A) \cdot X^{\wedge} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B \\ & (A^T \cdot A)^{-1} \cdot (A^T \cdot A) = I \\ & I \cdot X^{\wedge} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B \\ & X^{\wedge} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B \end{aligned} \tag{14}$$

przy warunku koniecznym istnienia minimum (15):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X^{\wedge}} = (2 \cdot A^T \cdot A) > 0 \tag{15}$$

własność (15) zachodzi dla niezerowych elementów kostki danych.

c.b.d.u

8.5. Rozwiązanie niedookreślonego układu równań w oparciu o macierz *MP-odwrotną* dla bezdefektowej macierzy danych wraz z budową modelu ekonometrycznego

[181] Na mocy twierdzenia P. *de* Fermata. „Jeżeli funkcja różniczkowalna w przedziale osiąga w pewnym punkcie wewnętrznym $x = x_0$ tego przedziału ekstremum lokalne, to pochodna w tym punkcie $f'(x) = 0$. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.” Źródło: poch+ext.pdf (umk.pl) – dostęp: (3-06-2021r.)

Kontynuując opis kostek danych zgodnie z Tabelą 1, rozważmy sytuacje dotyczącą niedookreślonego układu równań tj. przypadku wskazanego w trzecim wierszu Tabeli 1 tj. przypadku niedookreślonego układu równań, sytuacja która w badaniach naukowych występuje bardzo często zarówno w znaczeniu ilościowym jak i jakościowym.

Przykład liczbowy P2 (niedookreślony układ równań liniowych - wyjściowa kostka danych)

Na gruncie wielowymiarowości, rozważmy poszukiwanie modelu w klasie rozwiązań liniowych w sytuacji, kiedy liczba wierszy $m = 3$ w kostce danych jest mniejsza od liczby kolumn $n = 4$ - formuła 16.

$$A_{3,4} \cdot X^{\wedge}_{4,1} = B_{3,1} \xleftrightarrow{Odpowiada} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^{\wedge}_{1,1} \\ x^{\wedge}_{2,1} \\ x^{\wedge}_{3,1} \\ x^{\wedge}_{4,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ b_{3,1} \end{bmatrix} \xleftrightarrow{Odpowiada} X^{\wedge} = A^{-1} \cdot B \quad (16)$$

Przykładowo, układ trzech równań liniowych i czterech niewiadomych tj. prostokątny i poziomy układ typu $m \cdot n = 3 \cdot 4$ formuła (16.1):

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 + 3 \cdot x_4 = 2958 \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 3333 \\ 6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 = 3754 \end{cases} \quad (16.1)$$

W wyniku estymacji poszukujemy dla równania (16.1) ścisłego rozwiązania (16.2) w klasie rozwiązań liniowych z wykorzystaniem *MP-odwrotności*:

$$\begin{gathered} X^{\wedge} = A^{+} \cdot B \Rightarrow B = f(a_1, a_2, ..., a_5) \\ (B = A \cdot X^{\wedge} \pm \varepsilon) \Leftrightarrow b = a_1 \cdot x^{\wedge}_1 + a_2 \cdot x^{\wedge}_2 + a_3 \cdot x^{\wedge}_3 + a_4 \cdot x^{\wedge}_4 + a_5 \cdot x^{\wedge}_5 \pm \varepsilon \end{gathered} \quad (16.2)$$

Jeżeli rząd macierzy $R(A_{3,4}) = 3$ jest mniejszy niż liczba niewiadomych $n = 4$, to takim przypadku klasyczna odwrotność w formule (8) nie istnieje, ponieważ macierz wyjściowa danych nie jest macierzą kwadratową.

Dla odwrotności prostokątnej i poziomej macierzy danych *MP odwrotność* została udowodniona na gruncie teorii estymacji przez [Moore, 1935][182] i [Penrose, 1955, s. 406-413], którzy zdefiniowali w sposób niezależny istnienie jednoznacznej i jednej odwrotności macierzy (w zależności od geometrii kostki danych) zwanej w nauce [Deutsch, 1969 s. 111], [Theil, Goldberger, 1961, s. 65-78] odwrotnością Moore'a-Penrose'a *(MP-odwrotność),* która dla bez defektowej kostki danych (kostka danych jest pełnego rzędu) przyjmuje postać (17)**:**

$$A^{+} = A^{T} \cdot (A \cdot A^{T})^{-1} \quad (17)$$

Macierz A^{+} spełnia łącznie następujące warunki (18):

[182] E.H. Moore, *General Analysis*, American Phil. Soc. 231 Philadelphia 1935.

$$
\begin{cases}
A \cdot A^{+} \cdot A = A \\
(A \cdot A^{+})^{T} = A \cdot A^{+} \\
(A^{+} \cdot A)^{T} = A^{+} \cdot A \\
A^{+} \cdot A \cdot A^{+} = A^{+} \\
Spectrum\left\{ A^{+} \cdot (A^{+})^{T} \right\} = \min .
\end{cases}
\tag{18}
$$

W celu jednoznacznego rozwiązania układu (16.1) przy realizacji warunku[183] (19):

$$
\left\| X^{\wedge}_{4,1} \right\|_{2}^{2} = X^{\wedge T}_{1,4} \cdot X^{\wedge}_{4,1} \rightarrow \min . \tag{19}
$$

Stosując formuły (16.2) do (19) jednoznacznie rozwiązano układ równań liniowych dla którego liczba niewiadomych jest większa od liczby wierszy.

Szczegółowo zagadnienia dla zaawansowanych odwrotności macierzy, numerycznej algebry liniowej wraz z analizą dokładności ocen parametrów strukturalnych oraz istnienia szeregu algorytmów estymacyjnych w różnych ograniczeniach analitycznych poza kwadratową, nieosobliwą kostką danych zostało opisane w pracach: [Deutscha, 1969, s. 109-118], [Warmusa, 1972, s. 40-44], [Rao, 1982, s. 42-45], [Kiełbasińskiego i Schetlicka, 1992, s. 137-252], [Czaję, 1997, s. 21-23], [Iosifescu, 1998, s. 45-52], [Kaczmarczyka, 2015, s. 115-162], [Goodfellow, Bengio, Courville, 2018, s.45] wielu innych.

Uwzględniając układ i strukturę monografii pełne rozwiązanie niedookreślonego układu równań wskazanego w formułach (16) i (16.1) w poszukiwaniu rozwiązania liniowego w postaci (16.2) przykład praktyczny (rozszerzony przykład P_2) na gruncie stosowanej w finansach wartości godziwej wraz z analiza dokładności ocen parametrów strukturalnych, z zachowaniem numeracji formuł zawarto w następnym tj. 9-tym rozdziale niniejszej monografii.

---

[183] Zapis $\left\| X^{\wedge}_{4,1} \right\|_{2}^{2}$ oznacza kwadrat normy euklidesowej (kwadrat iloczynu skalarnego).

Zakończenie

Celem niniejszej pracy było przedstawienie sposobów ujęcia teoretycznego oraz rozwiązań w kategorii wybranego przez autora zagadnienia dotyczącego niedookreślonych układów równań w klasie rozwiązań liniowych z uwzględnieniem problematyki *MP-odwrotności*.

Zasadniczy problem postawiony w tytule pracy został wnikliwie zaprezentowany ze szczególnym uwzględnieniem metodyki badań naukowych w rachunku macierzowym wraz z dokonanym wyprowadzeniem zasad dla metody MNK.

Wagę zaprezentowanego i rozwiązanego zagadnienia stanowi fakt, że w określonych sytuacjach badawczych skala zaprezentowanego zagadnienia dotyczy jednej trzeciej wszystkich możliwych przypadków z ciągle nierozpoznaną i nierozwiązaną tezą autora w poszukiwaniu rozwiązań dla ilościowo-jakościowych zagadnień i problemów dla takich kostek danych, w których występują braki danych. Warunki monografii, jak również dążenie autora do przedstawienia czytelnikowi w sposób jak najbardziej przystępny zawartych treści, skłoniły autora w rozdziale następnym z zachowaniem ciągłości merytorycznej do przedstawienia w sposób pełny autorskiego przykładu wraz z rozwiązaniem dla zagadnień niniejszego rozdziału.

Streszczenie

Celem pracy jest metodyczne ujęcie - wraz z zaprezentowanymi sposobami rozwiązań, również w ujęciu praktycznym - niedookreślonych układów równań w klasie rozwiązań liniowych.

W znaczeniu matematycznym, dokładnie dla jednej trzeciej wszystkich możliwych przypadków, w analizowanej badawczo kostce danych zachodzi sytuacja, kiedy liczba wierszy jest mniejsza od liczby kolumn. Ze względu na złożoność tego zagadnienia, aby zachować metodyczny układ pracy, problem ten jest opisany w dwóch kolejnych następujących po sobie rozdziałach monografii: w pierwszej kolejności teoretycznie (rozdział niniejszy), a następnie praktycznie (rozdział następny).

Cześć teoretyczna - pierwsza (rozdział niniejszy) - zawiera pięć podrozdziałów, które strukturalnie obejmują następujące pojęcia:

- kostka danych wraz z jej strukturą, rząd, defekt i transpoza macierzy,
- macierz odwrotna w tym macierz *MP-odwrotna* bez defektu,
- podstawowe zasady i wyprowadzenie metody najmniejszych kwadratów (MNK) wraz z dowodem,
- jednoznaczne rozwiązania dla osobliwych, niedookreślonych układów równań liniowych bez defektu,
- budowa modelu ekonometrycznego dla prostokątnej i poziomej kostki danych.

W rozdziale następnym przedstawione są praktyczne zastosowania teoretycznych rozważań.

Słowa kluczowe
kostka danych, układ równań niedookreślony, macierz osobliwa, macierz odwrotna, macierz *MP-odwrotna*

Underdetermined systems of linear equations

Summary

The aim of this study is to provide the methodological approach – together with its presented solutions, and a practical approach for underdetermined systems of equations focused on linear equations.

In the mathematical approach, exactly for one third of all possible cases in the data cube analysed in the study there is a situation, when the number of rows is less than the number of columns. Given to the complexity of this matter, in order to maintain the methodical approach, underdetermined systems of equations are described in two consecutive chapters of the monograph: first theoretical approach (this chapter), and then then practical approach (the next chapter).

The theoretical part - the first one (this chapter) - contains five subsections which structurally cover the following concepts:

- data cube including its structure, row, defect and transpose of a matrix,
- inverse matrix including Moore–Penrose-defect-free inverse matrix,
- basic principles and derivation of the least squares method (LSM) with proof,
- explicit solutions for singular, underdetermined systems of linear equations without defect,
- construction of an econometric model for rectangular and horizontal data cube.

In the next chapter practical applications of the theoretical considerations are presented.

Keywords

data cube, underdetermined system of equations, singular matrix, inverse matrix, MP-inverse matrix / Moore–Penrose inverse matrix

Bibliografia

1. Apanowicz J., *Metodologiczne uwarunkowania pracy naukowej. Prace doktorskie. Prace habilitacyjne*, Wydawnictwo Difin, Warszawa 2005.
2. Aranowska E., *Elementy zastosowań modelu wielowymiarowej analizy wariancji (MANOVA) w badaniach psychologicznych*, [w:] *Wielozmiennowe modele statystyczne w badaniach psychologicznych pod redakcją Jerzego Brzezińskiego*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa-Poznań 1987.
3. Charmaz K., *Teoria ugruntowana. Praktyczny przewodnik po analizie jakościowej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.
4. Czaja J., *Modele statystyczne w informacji o terenie*, Wydawnictwo AGH, Kraków 1997.
5. Deutsch R., *Teoria estymacji*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1969.
6. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A., *Deep learning. Systemy uczące się*, Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa 2018.
7. Grabiński T., *Analiza stopnia informacyjności kostek danych*, [w:] Zeliaś A. (red.), *O związkach demografii, statystyki i ekonometrii. Księga jubileuszowa dla uczczenia 50-lecia pracy naukowo-dydaktycznej profesora Kazimierza Zająca*, Wydawnictwo AE w Krakowie, Kraków 1994.
8. Iosifescu M., *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1988.
9. Jackson M., Staunton M., *Zaawansowane modele finansowe z wykorzystaniem Excela i VBA*, Wydawnictwo Helion, Warszawa 2004.
10. Jajuga K., *Statystyczna analiza wielowymiarowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993.
11. Jemielniak D. (red. nauk.), *Badania jakościowe. Podejścia i teorie*, tom 1, *Metody i narzędzia* tom 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
12. Kaczmarczyk B., Popławski Ł., *Kwantyfikacja przestrzeni publicznej Na przykładzie Sanoka*, [w:] Studia i Prace WNEiZ Uniwersytetu Szczecińskiego, nr 44, t. 1, Szczecin 2016
13. Kaczmarczyk B., Popławski Ł., *Taksonomiczna analiza informacyjności kostek danych – objętość informacyjna na wybranym przykładzie ekorozwoju*, [w:] Studia i Prace WNEiZ Uniwersytetu Szczecińskiego, nr 47, t. 3, Szczecin 2017.
14. Kaczmarczyk B., *Wielowymiarowe ujęcie estymacji wartości rynkowej przedsiębiorstw na przykładzie branży energetycznej* – praca doktorska pod kierunkiem dr hab. Łukasza Popławskiego prof. UEK w Krakowie, Materiał niepublikowany, Kraków 2015.
15. Kiełbasiński, Schwetlick, *Numeryczna algebra liniowa. Wprowadzenie do obliczeń zautomatyzowanych*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1992.
16. Kotarbiński T., *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*, Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa 1986.
17. Larose D.T., *Metody i modele eksploracji danych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
18. Linnik J.W., *Metoda najmniejszych kwadratów i teoria opracowywania obserwacji*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1962.

19. Łuniewska M., Tarczyński W., *Metody wielowymiarowej analizy porównawczej na rynku kapitałowym*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
20. Marciszewski W. (red. nauk.), *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1987.
21. Moore E.H., *General Analysis,* American Phil. Soc. 231, Philadelphia 1935.
22. Nowak E., *Problem informacji w modelowaniu ekonometrycznym*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1990.
23. Penrose R., *A generalized inverse for matrices*, Proc. Camb. Phil. Soc. 51, 1955.
24. Rao C.R., *Modele liniowe statystyki matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1982.
25. Stevens S.S., *Measurement, psycho-physics and utility*, [w:] *Measurement: definitions an theories,* Churchman C.W. i Ratoosh P. (red.), Wiley, New York 1959.
26. Theil H., Goldberger A.S., *On Pure and Mixed Statistical Estimation in Economics*, International Economics Review 2/1961 s. 65-78.
27. Turowicz A., *Teoria macierzy wykłady na studium doktoranckim* Wydanie V-te. Skrypt Uczelniany Akademii Górniczo-Hutniczej, Wydawnictwo AGH w Krakowie, Kraków 1995.
28. Warmus M., *Uogólnione odwrotności macierzy,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1972

Netografia

29. poch+ext.pdf (umk.pl) – dostęp: (3-06-2021r.)

Bogusław Kaczmarczyk

Rozdział dziewiąty

NIEDOOKREŚLONE UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH – NA PRZYKŁADZIE WYCENY WARTOŚCI RYNKOWEJ NIERUCHOMOŚCI

Spis treści Rozdziału dziewiątego

Wstęp **242**
Przykład liczbowy (z poprzedniego rozdziału P_2 – rozszerzony) **243**
Zakończenie **249**
Streszczenie **250**
Słowa kluczowe **250**
Summary **251**
Key words **251**
Bibliografia **252**
Netografia **252**

Wstęp

Na gruncie nauk: prawa cywilnego[184] (art. 46 K.C.) oraz rachunkowości[185] (art. 28 Ust.) przedsiębiorcy, ustalając wyniki finansowy danego roku obrotowego, bądź dokonując wyceny na dzień bilansowy BO/BZ wyceny, obligatoryjnie stosują się do zasad wyceny wartości godziwej z prymatem treści ekonomicznej nad formą. Ponadto nieruchomość w znaczeniu przedmiotowym zawsze stanowiła i stanowi nadal istotny składnik zasobu prywatnego, bądź aktywów trwałych przedsiębiorstwa.

Cechą ściśle związaną z nieruchomością jest jej wartość godziwa (rynkowa), która poprzez Ustawę o gospodarce nieruchomościami[186] (art. 159) oraz przepisy odnośnie zasad[187] i trybu wyceny wartości rynkowej nieruchomości sporządzanej dla różnych gospodarczo celów różnymi metodami, jest silnie z nią skorelowana. Metodą, która określa wartość godziwą poprzez odwołanie się wprost do metod statystycznych, jest metoda cenowo porównawcza wyceny wskazana wprost w §4 ust. 1 pkt. 5 Rozporządzenia w sprawie wyceny.

Niniejszy rozdział nawiązuje do części teoretycznej zawartej w rozdziale poprzednim, jak również do wykonanej w tym zakresie kwerendy naukowej. Jest tu przedstawiony praktycznie: sposób rozwiązania niedookreślonego układu równań na gruncie wyceny wartości rynkowej nieruchomości (z zachowaniem tych samych zasad numeracji formuł i tabel pomiędzy rozdziałami). W układzie tym liczba wierszy jest mniejsza od liczby niewiadomych w sposób ścisły. Przykład liczbowy zaprezentowany jest wraz z pełnym rozwiązaniem, jako część praktyczna dla zintegrowania z częścią teoretyczną.

Zatem, wskazana w poprzednim rozdziale bardzo szeroka bibliografia oraz wszelkie przypisy, stanowią element wspólny dla wiedzy teoretycznej wykorzystanej na potrzeby niniejszego rozdziału.

Zaprezentowany poniżej przykład liczbowy stanowi rozszerzenie Przykładu 2 z poprzedniego rozdziału i dotyczy wyceny wartości rynkowej pewnej nieruchomości.

[184] Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964r. Kodeks Cywilny, Dz. U 1964, poz. 93 – źródło: Akt prawny (sejm.gov.pl) – dostęp: (3-06-2021r.)

[185] Ustawa z dnia 29 września 1994r. o rachunkowości, Dz. U 1994, poz. 591 – źródło: Akt prawny (sejm.gov.pl) – dostęp: (3-06-2021r.)

[186] Ustawa o gospodarce nieruchomościami z dnia 21 sierpnia 1997r, Dz. U 1997, poz. 741 – źródło: Akt prawny (sejm.gov.pl) - dostęp: (3-06-2021r.)

[187] OBWIESZCZENIE PREZESA RADY MINISTRÓW z dnia 3 marca 2021 r. w sprawie ogłoszenia jednolitego tekstu rozporządzenia Rady Ministrów w sprawie wyceny nieruchomości i sporządzania operatu szacunkowego, Dz. U 2021, poz. 555 – źródło: akty prawne do ISAP-u (sejm.gov.pl) – dostęp: (3-06-2021 r.)

Przykład liczbowy (z poprzedniego rozdziału P2 – rozszerzony)

Wyceniona zostanie wartość rynkowa lokalu mieszkalnego[188] o powierzchni użytkowej 55 m^2 w Tarnobrzegu.

Załóżmy, że wartość rynkowa tego lokalu jest zmienną zależną oznaczoną przez B. Cena (wartość rynkowa) podlega opisowi atrybutowemu ustalonemu na dany moment wyceny. Atrybuty zestawione w macierzy *A*, jako zmienne niezależne zostały przyjęte w skali porządkowej, jako stymulanty wartości rynkowej. Przyjmujemy, że wyceniana nieruchomość, opisana atrybutowo w macierzy $, F$ jest na tyle nietypową nieruchomością w Tarnobrzegu i okolicach, że autor wyceny, dokonując analizy rynku, zebrał tylko i wyłącznie z wszystkich możliwych baz jedynie trzy transakcje porównawcze dla czterech atrybutów opisowych wyceny.

Sytuacje danych wyjściowych do wyceny oraz przedmiotu wyceny jest zestawiona w Tabeli 1 oraz odpowiednio w macierzach A, B i F.

Tabela 1. Analiza rynku oraz przedmiot wyceny dla prostokątnej i poziomej kostki danych wraz z opisem atrybutowym.

Status	**Lokalizacja zakres cech 1-6** a_1	**Moda zakres cech 1-3** a_2	**Standard wykończenia budynku zakres cech 1-3** a_3	**Piętro w budynku** a_4	**Wartość rynkowa jednostkowa, dane w zł/m^2. Jednokolumnowa macierz** B
1	2	3	4	5	6
Analiza rynku nieruchomości i przedmiot wyceny jako układ równań liniowych typu: $A\cdot X = B \overset{Odpowiada}{\longleftrightarrow} X^{\wedge} = A^{-1}\cdot B$					
Nieruchomości wzorcowe	5	2	1	3	2 958
	5	3	2	4	3 333
	6	2	3	5	3 754
	Parametry opisowe				
	Suma				10 045,00
	Średnia				3 348,33
	Mediana				3 33300
	Odchylenie standardowe				398,22
	Współczynnik zmienności				12%
Nieruchomość wyceniana	5	2	3	3	Wartość rynkowa jednostkowa $W_r = ?$ Wartość rynkowa mieszkania o pow. 55 m^2 $, W_r^{\sim} = ?$

Źródło: Opracowanie własne.

Kontynuując, dla postawionego problemu sformułowano następujące pytania w związku z wyceną wartości godziwej:

[188] Cena nie scalona - wartość wycenianej nieruchomości stanowi iloczyn wartości jednostkowej i powierzchni użytkowej mieszkania bez przynależnego gruntu.

I. - czy w procesie wyceny wartości rynkowej nieruchomości dla prostokątnej i poziomej kostki danych (niedookreślony układ równań) istnieje, w klasie rozwiązań liniowych, model (ścisły wzór regresyjny) w formule: $A \cdot X = B \xleftrightarrow{Odpowiada} X^{\wedge} = A^{-1} \cdot B$ na tle nieruchomości wzorcowych ?.

II. - jak wyglądają - dla otrzymanego liniowego modelu wyceny wartości rynkowej - kryteria formalne stawiane układom równań liniowych, w tym:

II.1. - własnościom macierzy *MP-odwrotnej*.

II.2. - spełnieniu, przez uzyskane niewiadome wyjściowego, niedookreślonego układu równań, czyli $L \quad P$?,

III. - ile wynosi wartość rynkowa jednostkowa nieruchomości oznaczonej przez W_r oraz wartość rynkowa nieruchomości oznaczona $W_r^{\sim}$ na tle nieruchomości porównawczych?

IV. - czy, na gruncie teorii estymacji, istnieje macierz ocen parametrów strukturalnych dla prezentowanego modelu wyceny wartości rynkowej nieruchomości?

Rozwiązanie

Ad. I.

Powyższy przypadek na gruncie zgromadzonych zmiennych objaśniających i zmiennej objaśnianej można zapisać w formie wyjściowych kostek danych:

$A_{3,4}$	5	2	1	3
	5	3	2	4
	6	2	3	5

$B_{3,1}$
2 958
3 333
3 754

$F_{1,4}$	5	2	3	3

oraz jako niedookreślony układ trzech równań o czterech niewiadomych (16.1) w postaci:

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 + 3 \cdot x_4 = 2958 \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 3333 \\ 6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 = 3754 \end{cases} \tag{16.1}$$

wraz z parametrami opisowymi dla lewej strony układu równań (16.1) tj.:

- rząd macierzy współczynników równa się trzy: rzA =3 (liczba wierszy dla (16.1)),
- defekt macierzy $A_{3,4}$ wynosi zero, ponieważ istnieje niezerowy wyznacznik stopnia trzeciego dla dowolnej podmacierzy, jako $\det(A_{3,3}^{--})$ wyjętej z $A_{3,4}$, przykładowo:

$\det(A^{--}_{3,3}) = 4$	2	1	3
	3	2	4
	2	3	5

oraz w formie modelu wyceny w postaci ogólnej:

$$W_r = f(a_1,...,a_4) = a_1 \cdot \hat{x_1} + a_2 \cdot \hat{x_2} + a_3 \cdot \hat{x_3} + a_4 \cdot \hat{x_4} \pm \varepsilon \qquad (16.1.1)$$

Ad. II.1.

Następnie rozwiązujemy układ równań liniowych (16.1) za pomocą formuły (17), stosując zasady istnienia macierzy *MP-odwrotnej,* wraz ze sprawdzeniem łącznym pięciu własności macierzy *MP-odwrotnej* wskazanych w formule (18):

$A^{+}_{4,3}$	0,5495	-0,3964	0,0270
	-0,2252	0,8018	-0,4865
	-0,5135	0,1081	0,3108
	-0,2613	0,0901	0,1757

własność pierwsza:

$A_{3,4} \cdot A^{+}_{4,3} \cdot A_{3,4} = A_{3,4}$	5	2	1	3	spełniona
	5	3	2	4	
	6	2	3	5	

własność druga:

$(A_{3,4} \cdot A^{+}_{4,3})^T = A_{3,4} \cdot A^{+}_{4,3}$	1	0	0	spełniona
	0	1	0	
	0	0	1	

własność trzecia:

$(A^{+}_{4,3} \cdot A_{3,4})^T = A^{+}_{4,3} \cdot A_{3,4}$	0,9279	-0,0360	-0,1622	0,1982	spełniona
	-0,0360	0,9820	-0,0811	0,0991	
	-0,1622	-0,0811	0,6351	0,4459	
	0,1982	0,0991	0,4459	0,4550	

własność czwarta:

$A^{+}_{4,3} \cdot A_{3,4} \cdot A^{+}_{4,3} = A^{+}_{4,3}$	0,5495	-0,3964	0,0270	spełniona

	-0,2252	0,8018	-0,4865	
	-0,5135	0,1081	0,3108	
	-0,2613	0,0901	0,1757	

Własność piąta $A^{+}_{4,3}$ jest związana z istnieniem diagonalnej macierzy wartości własnych dla iloczynu $A^{+}_{4,3} \cdot (A^{+}_{4,3})^{T}$, którego suma wartości własnych λ_i układu równań jest najmniejsza.

$A^{+}_{4,3} \cdot (A^{+}_{4,3})^{T}$	0,4599	-0,4548	-0,3167	-0,1745
	-0,4548	0,9303	0,0511	0,0456
	-0,3167	0,0511	0,3720	0,1985
	-0,1745	0,0456	0,1985	0,1072

$Spectrum\{\ A^{+}_{4,3} \cdot (A^{+}_{4,3})^{T}\ \} = = 1{,}87 = \min.$	$\lambda_1 = 0{,}58$	0	0	0
	0	$\lambda_2 = 1{,}29$	0	0
	0	0	$\lambda_3 = 0$	0
	0	0	0	$\lambda_4 = 0$

<u>Ad. II.2.</u>

Przemnożenie macierzy *MP-odwrotnej* przez macierz wyrazów wolnych pozwala uzyskać niewiadome dla układu równań (16.1), jako macierz $X^{\wedge}_{4,1}$:

	Wartość niewiadomej	Oznaczenie niewiadomej układu równań	Nazwa atrybutu w układzie równań
$X^{\wedge}_{4,1} = A^{+}_{4,3} \cdot B_{3,1}$	405,84	$x^{\wedge}_1$	Lokalizacja
	179,92	$x^{\wedge}_2$	Moda
	8,14	$x^{\wedge}_3$	Standard wykończenia budynku
	186,95	$x^{\wedge}_4$	Piętro w budynku

W wyniku estymacji otrzymano, w klasie rozwiązań liniowych, ścisłe rozwiązanie w formule (16.2):

$$X^{\wedge} = A^{+} \cdot B \Rightarrow W_r = f(a_1, ..., a_4)$$
$$(B = A \cdot X^{\wedge} \pm \varepsilon) \Leftrightarrow b = a_1 \cdot 405{,}84 + a_2 \cdot 179{,}92 + a_3 \cdot 8{,}14 + a_4 \cdot 186{,}95 \pm \varepsilon \qquad (16.2)$$

Sprawdzenie poprawności obliczeń niewiadomych dla układów równań następuje zawsze poprzez sprawdzenie, czy uzyskane w wyniku estymacji rozwiązanie wskazane w (16.2) spełnia układ równań (16.1) jako formuła (20):

$$
\begin{cases}
5\cdot 405{,}84+2\cdot 179{,}92+8{,}14+3\cdot 186{,}95=2958 \Leftrightarrow L=P \\
5\cdot 405{,}84+3\cdot 179{,}92+2\cdot 8{,}14+4\cdot 186{,}95=3333 \Leftrightarrow L=P \\
6\cdot 405{,}84+2\cdot 179{,}92+3\cdot 8{,}14+5\cdot 186{,}95=3754 \Leftrightarrow L=P
\end{cases}
\qquad (20)
$$

c.b.d.u

Ad. III.

W wyniku estymacji otrzymano model wyceny oraz poszukiwaną wartość 1m^2 dla wycenianej nieruchomości[189] – Tabela 2.:

Tabela 2. Wycena nieruchomości w oparciu o metodę cenowo porównawczą w wersji wieloatrybutowej.

<table>
<tr><th>Status</th><th>Lokalizacja zakres cech 1-6 a_1</th><th>Moda zakres cech 1-3 a_2</th><th>Standard wykończenia budynku zakres cech 1-3 a_3</th><th>Piętro w budynku a_4</th><th>Wartość rynkowa jednostkowa, dane w zł/m^2</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="6">$W_r = f(a_1,...,a_4) = a_1\cdot 405{,}84 + a_2\cdot 179{,}92 + a_3\cdot 8{,}14 + a_4\cdot 186{,}95 \pm \varepsilon =$
$= 5\cdot 405{,}84 + 2\cdot 179{,}92 + 3\cdot 8{,}14 + 3\cdot 186{,}95 \pm \varepsilon = (F_{1,4}\cdot \hat{X}_{4,1}) \pm \varepsilon = W_r = (2974 zł/m^2) \pm \varepsilon$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nieruchomość wyceniana F</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>Wartość rynkowa jednostkowa $W_r = 2974$</td></tr>
<tr><td colspan="5">Wartość rynkowa nieruchomości oznaczona: $W_r^{\sim}$
$W_r^{\sim} = 2974 zł/m^2 \cdot 55m^2 = 163570 zł$</td></tr>
</table>

Źródło: Opracowanie własne.

Ad. IV.

Obliczając normę wskazaną w formule (19), uzyskamy następującą wariancję jednostkową σ_0^2 dla wektora niewiadomych danej formułą (21) :

$$
\sigma_0^2 = \frac{(\hat{X}_{4,1})^T \cdot \hat{X}_{4,1}}{n=3} = \frac{232090{,}14}{3} = 77363{,}38 \qquad (21)
$$

stąd odchylenie standardowe poszczególnych niewiadomych[190] $(\hat{X}_{4,1})$, z wykorzystaniem formuły (22):

$$
\text{var}-\text{cov}(\hat{X}_{4,4}) = \sigma_0^2 \cdot [I_{4,4} - (A^{+}_{4,3}\cdot A_{3,4})] \qquad (22)
$$

przedstawia ocenę parametrów strukturalnych modelu wyceny.

---

[189] W zaawansowanych modelach statystycznych, znając macierz wariancyjno-kowariancyjną, dla kostek danych powyżej 40 – stu wierszy (przypadków), obliczenia wykonuje się z uwzględnieniem estymacji punktowej i estymacji przedziałowej dla uzyskanych wartości. W tym celu należy wykorzystać kwantyl rozkładu *t-Studenta* dla określonego prawdopodobieństwa wystąpienia błędu oraz określonej liczby stopni swobody dla ustalonego poziomu ufności.

[190] Analiza dokładności w oparciu o wielkość pojedynczego odchylenia standardowego.

Stosowne obliczenia zawiera kwadratowa, symetryczna macierz wariancyjno-kowariancyjna – Tabela 3.:

Tabela 3. Analiza dokładności ocen parametrów strukturalnych modelu wyceny.

$\text{var}-\text{cov}(\hat{X}_{4,4}) =$ $= \sigma_0^2 \cdot [I_{4,4} - (A_{4,3}^{+} \cdot A_{3,4})]$	**5 575,74**	2 787,87	12 545,41	-15 333,28
	2 787,87	**1 393,93**	6 272,71	-7 666,64
	12 545,41	6 272,71	**28 227,18**	-34 499,88
	-15 333,28	-7 666,64	-34 499,88	**42 166,53**
Oznaczenie niewiadomej modelu wyceny $\hat{x}_i$	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$\hat{x}_4$
Wartość niewiadomej (estymatory jako wagi dla atrybutów wyceny modelowej)	405,84	179,92	8,14	186,95
Model wyceny	$W_r = f(a_1,...,a_4) = a_1 \cdot 405,84 + a_2 \cdot 179,92 + a_3 \cdot 8,14 + a_4 \cdot 186,95 \pm \varepsilon$			
Szacunkowy błąd estymacji ocen parametrów strukturalnych modelu wyceny	$\sigma_{\hat{x}_1} = \sqrt{5575,74} =$ $= \pm 74,7$	$\sigma_{\hat{x}_2} = \sqrt{1393,93} =$ $= \pm 37,3$	$\sigma_{\hat{x}_3} = \sqrt{28227,18} =$ $= \pm 168,0$	$\sigma_{\hat{x}_4} = \sqrt{42166,53} =$ $= \pm 205,3$

Źródło: Opracowanie własne.

Odpowiedź: Wartość rynkowa nieruchomości to:

$$W_r^{\sim} = 2974 zł / m^2 \cdot 55 m^2 = 163570 zł$$ (Tabela 3.)

Zakończenie

Jak wynika z systematyki układów równań, układy niedookreślone stanowią ważną część pola naukowego nie tylko w ujęciu teoretycznym, ale również praktycznym. Wskazany w pracy przykład autorski został w sposób metodyczny w pełni rozwiązany, a informacje w nim zawarte mogą stanowić w obszarach wyceny, i nie tylko, inspirację dla osób, które poszukują ścisłych rozwiązań w klasie rozwiązań liniowych w innych zagadnieniach - wykorzystując w tym celu dorobek naukowy związany z wielowymiarową analizą danych.

Wykonana analiza rynku oraz obliczenia zestawione w macierzy wariancji-kowariancji wykazały, że wykorzystując zagadnienia teoretyczne, istnieje jednoznaczne rozwiązanie niedookreślonych układów równań na przykładzie modelu wyceny. Zmienna oznaczona jako a_3 (standard wykończenia budynku) dla przedmiotowej analizy nie ma wpływu na wycenę nieruchomości, co zostało udowodnione, nie tylko przez niewielką wartość odpowiadającej tej zmiennej niewiadomej, ale również przez dużą wielkość błędu dla niewiadomej $\hat{x}_3$.

W kostkach danych, co do zasady, wybór zmiennych diagnostycznych w ilościowo-jakościowym znaczeniu, jest niezwykle ważną czynnością. Z uwagi na fakt, że nie jest to wybór przypadkowy, tylko celowy, dlatego też należy poświęcić mu szczególną uwagę stosując dobór merytoryczny oraz badając wzajemne zależności pomiędzy zmiennymi.

W tekście, analizach, wynikach i wnioskach zaprezentowanego autorskiego przykładu świadomie pominięto aspekt normalizacji zmiennych wartościujących. Ta kwestia w drodze taksonometrycznej będzie stanowić dla autora podstawę kolejnych wnikliwych badań i analiz w dalszym ciągu pracy naukowej.

Dzięki wielu zaletom stosowania uogólnionych odwrotności macierzy, w tym *MP-odwrotności*, można odkrywać nowe metody analityczne dające satysfakcję z rozwiązania-otrzymując estymatory: zgodne, nieobciążone i najefektywniejsze, a przedmiotowy rozdział stanowi inspirację i propozycję autora, by zaadaptować część z nich na grunt ekonometrii w ujęciu szerszym.

Streszczenie

Kontynuując rozważania teoretyczne z poprzedniego rozdziału na temat niedookreślonych układów równań liniowych, niniejszy rozdział przedstawia zagadnienie praktycznego zastosowania rozwiązania układu równań liniowych, dla którego liczba wierszy jest mniejsza od liczby kolumn.

Analitycznie wagę naukową tego problemu obrazuje sytuacja, dla której następujące moduły: dane, analiza danych, regresja w arkuszu Excel, czy GRETL i wielu innych, pozostają - mimo postępu informatycznego - ciągle jeszcze nierozwiązane.

Celem pracy jest wypełnienie tej luki naukowej w znaczeniu teoretycznym (rozdział poprzedni) i praktycznym (rozdział bieżący).

Uwzględniając ograniczenia monografii, zagadnienia dotyczące podstaw teorii estymacji na przykładzie wyceny nieruchomości, zostały zaprezentowane w sposób jak najbardziej przystępny w formie analizy danych zastanych.

Słowa kluczowe
wartość rynkowa nieruchomości, analiza danych, regresja wielowymiarowa

Underdetermined systems of linear equations - on the example of real estate market valuation

Summary

Continuing the theoretical discussion from the previous chapter on underdetermined systems of linear equations, this chapter presents the issue of the practical approach of solving a system of linear equations for which the number of rows is less than the number of columns.

Analytically, the scientific importance of this subject matter is illustrated by the situation in which the following modules: data, data analysis, regression in Excel spreadsheet, or in GRETL statistical software and many others, remain - despite the IT progress - still unsolved.

The aim of this work is therefore to fill this knowledge gap in theoretical term (previous chapter) and in practical term (current chapter).

Issues concerning the base of estimation theory on the example of real estate valuation are presented, taking into account the limitations of the monograph, in the most accessible way of collected data analysis.

Key words

real estate market valuation, data analysis, multivariate regression

Bibliografia

Wspólna dla Rozdziału: ósmego (poprzedniego) i dziewiątego (niniejszego).

Netografia

1. Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964r. Kodeks Cywilny, Dz. U 1964, poz. 93 – źródło: Akt prawny (sejm.gov.pl) – dostęp: (3-06-2021r.)
2. Ustawa z dnia 29 września 1994r. o rachunkowości, Dz. U 1994, poz. 591 – źródło: Akt prawny (sejm.gov.pl) – dostęp: (3-06-2021r.)
3. Ustawa o gospodarce nieruchomościami z dnia 21 sierpnia 1997r, Dz. U 1997, poz. 741 – źródło: Akt prawny (sejm.gov.pl) - dostęp: (3-06-2021r.)
4. OBWIESZCZENIE PREZESA RADY MINISTRÓW z dnia 3 marca 2021 r. w sprawie ogłoszenia jednolitego tekstu rozporządzenia Rady Ministrów w sprawie wyceny nieruchomości i sporządzania operatu szacunkowego, Dz. U 2021, poz. 555 – źródło: akty prawne do ISAP-u (sejm.gov.pl) – dostęp: (3-06-2021r.)

Aleksander Kasprzyk, Paweł Maciaszczyk

Rozdział dziesiąty

WYBRANE NARZĘDZIA WSPIERAJĄCE PROGNOZOWANIE SEZONOWOŚCI POPYTU I SPRZEDAŻY USŁUG FINANSOWYCH W PROCESIE PODEJMOWANIA E-DECYZJI RYNKOWYCH

Spis treści Rozdziału dziesiątego

Wprowadzenie **255**
10.1. Specyfika rynku usług finansowych **256**
10.2. Rola prognozowania i metod ilościowych w prowadzeniu działalności rynkowej oraz w procesie sprzedaży **257**
10.3. Prognozowanie sprzedaży w oparciu o szeregi stacjonarne **258**
Zakończenie **267**
Streszczenie **268**
Słowa kluczowe **268**
Summary **269**
Key words **269**
Bibliografia **270**
Netografia **270**

Wprowadzenie

Zmiany zachodzące na konkurencyjnym rynku, przy dynamicznym rozwoju technologii informacyjnych oraz implementacji naukowych metod i narzędzi z zakresu prognozowania, stwarzają nowe przestrzenie i szanse do kreowania optymalnych rozwiązań w celu podnoszenia efektywności procesów decyzyjnych i sprzedażowych. Przedsięwzięcia te służą zwiększaniu skuteczności sprzedaży i jakości obsługi klienta, a także planowania i optymalizacji struktury produktów i usług oraz strategii działania i umacniania pozycji konkurencyjnej na rynku.

Dlatego tak ważnym elementem prowadzenia biznesu jest synchronizacja wszystkich planów operacyjnych z prognozami popytu, a przede wszystkim z prognozami sprzedaży w odpowiednio dobranych horyzontach czasowych (zazwyczaj 1-3 miesięcy, nazywanych „zamrożonymi" horyzontami planowania).[191]

Celem niniejszego opracowania jest przedstawienie wybranych narzędzi prognozowania wspierających proces podejmowania e-decyzji w zakresie sprzedaży usług finansowych.

[191]K.P. Frankowski, *Prognozowanie sprzedaży*, Wyd. CeDeWu, Warszawa 2018, s. 27.

10.1. Specyfika rynku usług finansowych

Rynek usług finansowych postrzegany jest jako niezwykle atrakcyjny i rozwijający się w bardzo szybkim tempie segment rynku finansowego. W niektórych krajach dąży się do rozwoju usług finansowych, w szczególności do posiadania przez obywateli rachunku bankowego, który jest dotowany przez państwo, dzięki czemu pomaga zapobiegać wykluczeniu społecznemu promując jednocześnie obrót bezgotówkowy i elektroniczne instrumenty płatnicze.[192]

Zdefiniowanie pojęcia usług finansowych jest bardzo trudne. Zarówno na gruncie prawa polskiego, jak i prawa UE brak jest jednolitej, ogólnej definicji usługi finansowej (także używane zamiennie: świadczenia finansowego).[193]

W dyrektywie 2002/65/UE z dnia 23 września 2002 r. o świadczeniu usług finansowych na odległość na rzecz konsumentów, „usługa finansowa" oznacza wszelkie usługi o charakterze bankowym, kredytowym, ubezpieczeniowym, emerytalnym, inwestycyjnym lub płatniczym (art. 2 lit. b dyrektywy 2002/65/UE).

Usługi finansowe w ujęciu Ustawy z dnia 16 kwietnia 2004 r. o zmianie ustawy o ochronie niektórych praw konsumentów oraz o odpowiedzialności za szkodę wyrządzoną przez produkt niebezpieczny - w rozdziale 2a, w art. 16a ust 1 - stwierdza się, że usługami finansowymi w rozumieniu ustawy są w szczególności:

- czynności bankowe,
- umowy kredytu konsumenckiego,
- czynności ubezpieczeniowe,
- umowy uczestnictwa w: funduszu inwestycyjnym otwartym, specjalistycznym funduszu inwestycyjnym otwartym, funduszu inwestycyjnym zamkniętym, specjalistycznym funduszu inwestycyjnym zamkniętym i funduszu inwestycyjnym mieszanym.[194]

Usługi finansowe możemy podzielić na następujące grupy:

– bankowe,
– ubezpieczeniowe,
– inwestycyjne,
– płatnicze.

Zasady regulujące rynek usług finansowych w UE nie zostały w pełni zharmonizowane, a zdaniem niektórych przedstawicieli, doktryny nie zostały zharmonizowane odpowiednio.[195]

U podstaw działalności człowieka jest zaspokajanie potrzeb konsumpcyjnych.[196]

---

[192] W. Szpringer, *Społeczna odpowiedzialność banków: Między ochroną konsumenta a osłoną socjalną*, Wolters Kluwer, Warszawa 2009, s. 19.

[193] D. Ślażyńska-Kluczek, *Zmiany na rynku usług finansowych w kontekście dyrektywy PAD*, Zeszyty Naukowe PWSZ w Płocku Nauki Ekonomiczne, t. XXIII, 2016, s. 130.

[194] Ustawa z dnia 16 kwietnia 2004 r. o zmianie ustawy o ochronie niektórych praw konsumentów oraz o odpowiedzialności za szkodę wyrządzoną przez produkt niebezpieczny.

[195] E. Avgouleas, *The harmonization of rules of conduct in EU financial markets: economic analysis, subsidiary and investor protection*, European Law Journal, 2000, vol 6 nr 1, s. 72.

[196] A. Mastalerz-Kodzis, M. Miśkowicz-Nawrocka, E. Pościech, H. Zawadzki, K. Zeug-Żebro, *Elementy ekonomii matematycznej dla studentów i zarządzania,* Wyd. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice 2018, s. 9.

10.2. Rola prognozowania i metod ilościowych w prowadzeniu działalności rynkowej oraz w procesie sprzedaży

Z uwagi na duże znaczenie prognoz gospodarczych w kształtowaniu najbardziej prawdopodobnego obszaru wzrostu gospodarki, jej poszczególnych gałęzi lub wybranych zjawisk społeczno-gospodarczych, prognozowanie, jako dyscyplina naukowa, rozwija się od niedawna, ale w sposób bardzo dynamiczny.[197]

Szybko zmieniające się warunki funkcjonowania podmiotów gospodarczych powodują, że decydującą rolę w ich działalności odgrywa informacja zorientowana na przyszłość[198].

Precyzyjne prognozy w przedsiębiorstwie są potrzebne nie tylko zarządowi, ale właściwie wszystkim pionom (finanse, marketing, produkcja, sprzedaż, kadry, obsługa klienta), a także menedżerom produktów i regionów.[199]

Warto podkreślić, że prawidłowo zbudowane prognozy są niezbędne przy podejmowaniu odpowiednich decyzji gospodarczych.[200]

Jak wynika z badań empirycznych, w większości firm funkcja prognozowania realizowana jest[201] na bieżąco.

Prognozy nie są planami, a jedynie pewnymi informacjami planistycznymi wolnymi od wartościowania i stawiania celów.[202]

Badając szeregi czasowe bez okresowości zakłada się, że zmiany w nich zachodzące podlegają wpływom jedynie od strony przyczyn głównych (determinant w działach produkcji i marketingu (40%)) oraz tych, następujących po sobie i w zasadniczym stopniu układających tendencję rodzajowa analizowanego zjawiska, a także ubocznych (mających wyłącznie charakter przypadkowy). [203]

Otóż, jeśli rozważamy sprzedaż oraz jej prognozę, to należy mieć świadomość, iż jej wielkość w ogólności jest sumą trzech składowych zależnych od specyfiki procesu sprzedaży w danej firmie lub na danym rynku. Składowe te, to:

- prognoza sprzedaży bazowej,
- prognoza sprzedaży promocyjnej,
- prognoza sprzedaży NPD[204].[205]

W ogólności istnieją dwa obszary korzyści wynikające z poprawy jakości prognoz sprzedaży. Są to:

[197] A. Zeliaś, B. Pawełek, S. Wanat, *Prognozowanie ekonomiczne. Teoria. Przykłady. Zadania*, Wyd. PWN, Warszawa 2003, s. 11.

[198] M. Witkowski, T. Klimanek, *Prognozowanie gospodarcze i symulacje w przykładach i zadaniach*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, , Poznań 2006, s. 7.

[199] M. Witkowski, T. Klimanek, *Prognozowanie gospodarcze i symulacje w przykładach i zadaniach*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, , Poznań 2006, s. 7.

[200] R. Czyżycki, R. Klóska, *Wybrane zagadnienie z prognozowania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2019, s. 10.

[201] M. Witkowski, T. Klimanek, *Prognozowanie gospodarcze i symulacje w przykładach i zadaniach*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, , Poznań 2006, s. 7.

[202] Por. J. Gereń, *Metodologiczne aspekty prognozowania ekonomicznego*, Przegląd statystyczny, 1978, nr 1, s. 7

[203] R. Czyżycki, R. Klóska, *Wybrane zagadnienie z prognozowania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2019, s. 19.

[204] K.P. Frankowski, *Prognozowanie sprzedaży*, Wyd. CeDeWu, Warszawa 2018, s.91-92.

[205] NPD- z ang. *NEW Product Development*, czyli

- oszczędności, które powstają głównie w obszarach operacyjnych (łańcuchach dostaw, logistyka, produkcja),
- wzrost sprzedaży(wolumenu lub wartości) wynikających głównie z eliminowania sprzedaży potencjalnie utraconej.[206]

Pomiar jakości trafności prognoz na rynku usług finansowych.

10.3. Prognozowanie sprzedaży w oparciu o szeregi stacjonarne

Metody prognostyczne wykorzystujące analizę szeregów czasowych na podstawie danych historycznych, potrafią przewidzieć zachowanie obiektu prognozy w przyszłości i na tej podstawie są w stanie dokonać predykcji wartości przyszłych.[207]

Dla szeregów stacjonarnych są to metody:
- naiwna I rodzaju,
- średniej arytmetycznej,
- średniej kroczącej,
- średniej kroczącej ważonej,
- wygładzania wykładniczego Browna.

Najpowszechniej stosowana z tych metod polega na obliczaniu prognozy na moment lub okres t przyjmując jej wartość równą wartości obserwacji bezpośrednio poprzedzającej, czyli dla okresu t-1. Zaleca się wówczas, iż współczynnik zmienności dla tej metody nie powinien być większy od 10%.

Zapisujemy to następująco:

$$y_t^* = y_{t-1}$$

gdzie:

y_t^* - prognoza zmiennej Y wyznaczona na okres *t*,

y_{t-1} -wartość zmiennej prognozowanej w okresie poprzednim, czyli w okresie *t-1*

Jeżeli w szeregu czasowym występuje trend, wówczas prognozy możemy budować dodając jeszcze różnicę pomiędzy kolejnymi poprzednimi obserwacjami, czyli dla okresu *t-1* w porównaniu z okresem *t-2.*

Wyrazić to można następująco:

$$y_t^* = y_{t-1} + (y_{t-1} - y_{t-2}),$$

gdzie:

y_t^* - prognoza zmiennej Y wyznaczona na moment lub okres *t*,

y_{t-1}, y_{t-2} - wartości zmiennej w okresach *t-1, t-2.*

Jeżeli prognozowana zmienna ma tendencję wzrostową lub spadkową, to do prognozowania możemy przyjąć metodę, w której zakłada się, że wartość prognozowanej zmiennej wzrośnie (spadnie) o pewien procent w odniesieniu do poziomu zmiennej z okresu poprzedniego *t-1*:

[206] K.P. Frankowski, *Prognozowanie sprzedaży*, Wyd. CeDeWu, Warszawa 2018, s. 26.
[207] K.P. Frankowski, *Prognozowanie sprzedaży*, Wyd. CeDeWu, Warszawa 2018, s. 156.

Zapisać to możemy następująco:

$$y_t^* = (1+c)y_{t-1},$$

gdzie:

y_t^* - prognoza zmiennej Y wyznaczona na okres *t,*

y_{t-1} -wartość zmiennej prognozowanej w okresie *t-1,*

c- nazywamy wskaźnikiem wzrostu (lub spadku, gdy c jest ujemne).

Jeśli zmienna ma tendencje wzrostową o 1% miesięcznie, to prognozę można obliczymy następująco:

$$y_t^* = 1{,}01 y_{t-1}$$

Podobnie możemy założyć, iż zmienna rośnie powiększając się o stała wartość i wtedy prognozę obliczymy dodając do kolejnych obserwacji stałą c.

Można to zapisać:

$$y_t^* = y_{t-1} + c$$

gdzie:

c- stała.

Przyrost zmiennej może być uśredniony z kolejnych wszystkich przyrostów poprzedzających obserwację, a budowana prognoza na okres *t* powstaje przez dodawanie takiego średniego przyrostu do kolejnych wartości zmiennej prognozowanej z okresu *t-1.*

Można to przedstawić następująco:

$$y_t^* = y_{t-1} + \frac{1}{t-2}\sum_{i=1}^{t-2}(y_{i+1} - y_i),$$

Jeżeli w szeregu czasowym zmiennej prognozowanej występują wahania sezonowe, np. kwartalne, wówczas można przyjąć, iż prognoza będzie taka, jak w adekwatnym kwartale poprzedniego roku, czyli w okresie *t-4.* Można to zapisać :

$$y_t^* = y_{t-4},$$

gdzie:

y_t^* - prognoza zmiennej Y wyznaczona na moment lub okres *t,*

y_{t-4} - wartość zmiennej prognozowanej w odpowiednim kwartale ubiegłego roku.

Można również zbudować prognozę na okres *t* posługując się wartością w okresie poprzednim *t-1* i weryfikować ją odpowiednim wskaźnikiem sezonowości :

$$y_t^* = \frac{y_{t-1}}{c_{t-1}} c_t,$$

gdzie:

c_t, c_{t-1} - wskaźniki sezonowości dla okresów *t* oraz *t-1*.

Podsumowując zauważamy, iż najprostsza z metod naiwnych uwzględnia jedynie ostatnią obserwację. Bardziej złożone metody naiwne wymagają użycia większej liczby danych z szeregu czasowego.

Wybór metody w zasadzie opieramy na obserwacji wykresu szeregu i badaniu jego zmienności - dla najprostszej z tych metod.

Prognozy metodami naiwnymi, niestety nie bywają dokładne i możemy je weryfikować jedynie po realizacji prognoz, czyli obliczając błąd ex-post.

Błędy ex-ante nie są możliwe do określenia w tym przypadku, czyli nie możemy przewidzieć ich dokładności przed wyznaczeniem samych prognoz. Możliwość tą dają nam bardziej "finezyjne" metody.[208]

Poniższy przykład zilustruje decyzję o zbudowanie prognozy metodą naiwną.

Przykład 1.

Sprawdzić, czy do danego pewnego szeregu czasowego możemy zastosować najprostszą metodę naiwną tj:

$$y_t^* = y_{t-1}.$$

Rozwiązanie

Należy na podstawie danych obliczyć pewne parametry, które wskażą na poziom zmienności zmiennej, a co za tym idzie uzasadnią zastosowanie metody naiwnej.

Korzystamy wówczas ze wzorów na: odchylanie standardowe, średnią arytmetyczną i współczynnik zmienności:

$$s = \left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \overline{y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}; \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t, ; \quad V_z = \frac{s}{\overline{y}} * 100\,\%$$

i obliczamy wartości w/w parametrów.

Jeżeli okaże się, że odchylenie standardowe i średnia arytmetyczna badanej zmiennej wynoszą: np.: S= 46,55938212 oraz $\overline{y} =$ 649,1222222 i do oceny siły wahań przypadkowych zastosujemy współczynnik zmienności: Vz=0,07172668 = 7,2%, to jego wielkość uzasadni zastosowanie najprostszej metody naiwnej.

Odpowiedź: Współczynnik zmienności jest niski, zatem uzasadnione jest zastosowanie tej metody.[209]

Kolejny przykład prezentuje budowę prognozy za pomocą metody naiwnej z tendencją rozwojową.

Przykład 2.

[208] http://www.ekonometria.4me.pl/metody_naiwne.htm [dostęp 9.02.2021, godz. 14.00]
[209] http://www.ekonometria.4me.pl/metody_naiwne.htm [dostęp 10.02.2021, godz. 14.00]

Wyznaczyć, za pomocą metody naiwnej z tendencja rozwojową (trendem), prognozę na najbliższy miesiąc (czyli maj) 2013 r., dla danego szeregu czasowego wielkości sprzedaży w firmie Iglopol (w tys zł) - od lipca 2011 r. do kwietnia 2013 r.:
52,05; 51,25; 50,70; 51,20; 50,50; 50,50; 50,90; 50,35; 48,91; 49,00; 48,74; 47,80;
47,60; 47,70; 47,70; 47,20; 47,34; 47,99; 47,85; 47,90; 47,79; 47,79.

Rozwiązanie
Stosujemy poniższy wzór:

$$y^{*}_{T+1} = y_T + \frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T} (y_T - y_{T-1})$$

Zastosowany wzór pozwolił wyznaczyć prognozę wielkości sprzedaży firmy Iglopol ma kolejny miesiąc (maj) na poziomie: **47.403** (tys. zł) – (Tabela 1).

W poniższej tabeli są zaprezentowane zebrane dane (od lipca 2011 r. do kwietnia 2013r.) oraz obliczona ze wzoru prognoza wielkości sprzedaży na maj 2013 r.,

Tabela 1. Sprzedaż w Firmie Iglopol w latach 2011-2013.

Data	t	y	Przyrost y-y_{t-1}	Prognoza naiwna z trendem	Błąd	Błąd względny
lip-11	1	52,05	-	y_{teor}	$u=y-y_{teor}$	$\vert Y-Y_{teor}\vert Y$
sie-11	2	51,25	-0,8	51,250	0,000	0,000
wrz-11	3	50,70	-0,55	50,575	0,125	0,002
paź-11	4	51,20	0,5	50,417	0,783	0,015
lis-11	5	50,50	-0,7	50,813	-0,313	-0,006
gru-11	6	50,50	0	50,190	0,310	0,006
sty-12	7	50,90	0,4	50,308	0,592	0,012
lut-12	8	50,35	-0,55	50,657	-0,307	-0,006
mar-12	9	48,91	-1,44	49,958	-1,048	-0,021
kwi-12	10	49,00	0,09	48,571	0,429	0,009
maj-12	11	48,74	-0,26	48,669	0,071	0,001
cze-12	12	47,80	-0,94	48,354	-0,554	-0,012
lip-12	13	47,60	-0,2	47,429	0,171	0,004
sie-12	14	47,70	0,1	47,265	0,435	0,009
wrz-12	15	47,70	0	47,389	0,311	0,007
paź-12	16	47,20	-0,5	47,377	-0,177	-0,004
lis-12	17	47,34	0,14	46,906	0,434	0,009
gru-12	18	47,99	0,65	47,101	0,889	0,019
sty-13	19	47,85	-0,14	47,757	0,093	0,002
lut-13	20	47,90	0,05	47,632	0,268	0,006
mar-13	21	47,79	-0,11	47,687	0,103	0,002
kwi-13	22	47,79	0	47,587	0,203	0,004
			-	**47,403**	**2,819**	**0,058**
				Prognoza		

Źródło: Prognozowanie i symulacje, Metody prognozowania, Pomoc dla studentów kierunków ekonomicznych – wykonywanie projektów i zadań – korepetycje, Prognozowanie naiwne -http://www.prognozowanie.info/ - [dostęp 11.02.2021, godz. 12.00].

Można też podać interpretację graficzną na wykresie.

Oto wykresy: wartości rzeczywistych i wygładzonych oraz wyznaczona prognoza wielkości sprzedaży na miesiąc maj 2013r.

Wykres 1. Wartości rzeczywiste sprzedaży i wygładzone wraz z prognozą wielkości sprzedaży na maj 2013 roku.

Źródło: Prognozowanie i symulacje, Metody prognozowania, Pomoc dla studentów kierunków ekonomicznych – wykonywanie projektów i zadań – korepetycje, Prognozowanie naiwne http://www.prognozowanie.info/ - [dostęp 11.02.2021, godz. 12.00].

Można teraz obliczyć średni błąd expost.
Średni względny błąd prognoz *ex-post* dla prognoz wygasłych wynosi:

$$\Psi = \left| \frac{(y_t - \hat{y}_t)}{y_t} \right| = \frac{\mathbf{0{,}058}}{\mathbf{21}} = \mathbf{0{,}0027}$$

Ponieważ błąd ten jest znikomy i wynosi tylko 0,27% możemy uznać, iż wyznaczona prognoza, z użyciem tej metody, jest trafna.

Odpowiedź: Postawiona prognoza wielkości sprzedaży na maj 2013 roku w firmie Iglopol wynosi 47,403 tys. zł.[210] i jest ona trafna.

Kolejna grupa metod prognozowania w sposób istotny wykorzystuje pojęcie średniej arytmetycznej. Wartość średniej arytmetycznej jest ilorazem (wynikiem dzielenia) zsumowanej wartości wszystkich badanych zmiennych oraz liczebności badanej populacji (N).

Najbardziej popularne metody prognozowania stosują następujące trzy ich rodzaje:
1. prosta średnia krocząca,
2. wykładnicza średnia krocząca,
3. ważona średnia krocząca.[211]

[210] Prognozowanie i symulacje, Metody prognozowania, Pomoc dla studentów kierunków ekonomicznych – wykonywanie projektów i zadań – korepetycje, Prognozowanie naiwne http://www.prognozowanie.info/ - [dostęp 11.02.2021, godz. 12.00]

Wymienione wyżej średnie kroczące są przedstawione są w Tabeli 2.

Tabela 2. Syntetyczne zestawienie najpopularniejszych średnich kroczących.

Prosta średnia krocząca	Ważona średnia krocząca	Wykładnicza średnia krocząca
Simple MovingAverage (SMA)	*WeightedMovingAverage* (WMA)	*ExponentialMovingAverage* (EMA)
$SMA_x = \frac{\sum_{i=1}^{x} c_i}{x}$	$WMA_x = \frac{\sum_{i=1}^{x}(w_i c_i)}{\sum_{i=1}^{x} w_i}$	$EMA_x = \frac{\sum_{i=0}^{x}(1-a)^i c_i}{\sum_{i=0}^{x}(1-a)^i}$ $a = \frac{2}{i+1}$
x – liczba notowań brana pod uwagę, c – cena z i-tego notowania branego pod uwagę.	x – liczba notowań brana pod uwagę, c – cena z i-tego notowania branego pod uwagę, w – waga dla i-tego notowania branego pod uwagę.	x – liczba wszystkich notowań dostępnych dla danego waloru, c – cena z i-tego notowania, a – współczynnik nadający wagę dla kolejnych notowań, przyjmuje wartości od 0 do 1

Źródło: opracowanie na podstawie K. Borowski: Nowe zastosowania średnich ruchomych, http://bossa.pl/analizy/techniczna/elementarz/srednie_ruchome/ z dnia 26 maja 2010r. [w:] https://analizy.investio.pl/srednie-kroczace/- [dostęp 12.02.2021, godz. 14.00].

Wygładzanie wykładnicze polega (w skrócie) na tym, że szereg jest wygładzany za pomocą ważonej średniej ruchomej, przy czym wagi obliczane są według porządku wykładniczego.

W zależności od wniosków wynikających z dekompozycji szeregu, dostosowujemy odpowiednią metodę wyrównywania wykładniczego.

Do powszechnie znanych i stosowanych metod należą:

- prosty model wygładzania wykładniczego Browna,
- model liniowy Holta
- model Wintersa - wersja addytywna i multiplikatywna.[212]

Prosty model wygładzania wykładniczego Browna stosujemy w przypadku występowania prawie stałego poziomu zmiennej prognozowanej oraz niewielkich wahań przypadkowych.

Poniższy wzór określa sposób obliczenia prognozy na podstawie średniej ruchomej prostej. Wyznacza on prognozę na okres *t-1* :

$$y_{t-1}^{*} = F_{t-2} = \frac{y_{t-2} + y_{t-3} + \ldots + y_{t-k-1}}{k}.$$

Wartość prognozy na okres *t* można wyrazić następująco:

$$y_t^{*} + F_{t-1} = \frac{y_{t-1}}{k} - \frac{y_{t-k-1}}{k} + y_{t-1}^{*}.$$

[211] https://analizy.investio.pl/srednie-kroczace/- [dostęp 12.02.2021, godz. 14.00]

[212] http://www.ekonometria.4me.pl/wygladzanie-wykladnicze-Browna.htm - [dostęp 14.02.2021, godz. 10.00]

Zmodyfikujmy to równanie wstawiając, zamiast wartości zmiennej prognozowanej w okresie *t-k-1,* przybliżoną wartość prognozy wyznaczonej na poprzedni okres.

Wówczas otrzymujemy:

$$y_t^* = \frac{1}{k} y_{t-1} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) y_{t-1}^*$$

W ten sposób uzyskaliśmy równanie, w którym najświeższej obserwacji zmiennej prognozowanej nadana jest waga $\frac{1}{k}$, a prognozie zaś - waga $\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

Symbolem *alfa:* α możemy zastąpić wagę $\frac{1}{k}$, wtedy otrzymujemy:

$$y_t^* = F_{t-1} = \alpha y_{t-1} + (1 - \alpha) y_{t-1}^*.$$

Model ten, po podstawieniu za $y_{t-1} - y_{t-1}^*$ (czyli za błąd *ex post* prognozy obliczonej na okres *t-1*), wyrażenia $q_{t-1},$ przyjmuje postać następującą:

$$y_t^* = F_{t-1} = y_{t-1}^* + \alpha q_{t-1}.$$

Można równanie to rozwinąć zastępując wartość prognozy wyznaczonej na okres $t-1$, czyli: (y_{t-1}^*) , wyrażeniem: $\alpha y_{t-2} + (1-\alpha) y_{t-2}^*.$ i wtedy otrzymamy:

$$y_t^* = \alpha y_{t-1} + (1 - \alpha)[\alpha y_{t-2} + (1 - \alpha) y_{t-2}^*] = \alpha y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha) y_{t-2} + (1 - \alpha)^2 y_{t-2}^*.$$

Powtarzając to samo wielokrotnie, czyli podstawiając za: y_{t-2}^*, wyrażenie: $\alpha y_{t-3} + (1-\alpha) y_{t-3}^*$, itd., otrzymamy:

$$y_t^* = \alpha y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha) y_{t-2} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{t-3} + (1 - \alpha)^3 y_{t-3}^*,$$

a następnie:

$$y_t^* = \alpha y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha) y_{t-2} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{t-3} + \alpha(1 - \alpha)^3 + y_{t-4} +$$
$$+ \alpha(1 - \alpha)^4 y_{t-5} + \ldots + (1 - \alpha)^{t-1} y_1^*.$$

Ponieważ parametr α jest liczbą należącą do przedziału (0, 1], to, wagi: α $_1$, $\alpha(1-\alpha),\ \alpha(1-\alpha)^2$ ... maleją wykładniczo i stąd wzięła się nazwa metody: wygładzanie wykładnicze, zaś od nazwiska twórcy tej metody przyjęło się w literaturze nazywać ją metodą **wyrównywania wykładniczego Browna**.

Konstruując prognozę na okres *t*, przyjmuje się tutaj, że wyniesie ona tyle, ile prognoza wyznaczona na okres poprzedni *t-1*, po skorygowaniu jej o pewną część *(a - stałą wygładzania)* jej bezwzględnego błędu *ex post*.

Zatem, jeżeli wyznaczona prognoza na okres *t-1* była, w porównaniu z rzeczywistą wartością y_{t-1}, zbyt niska, to prognozę konstruowaną na okres *t* - zwiększa się (porównując z poprzednią) i odwrotnie, jeśli wyznaczona prognoza na okres *t-1* była zbyt wysoka, w porównaniu z rzeczywistą wartością zmiennej prognozowanej y_{t-1}, to prognozę konstruowaną na okres *t* zmniejsza się (w porównaniu z poprzednią).[213]

[213] http://www.ekonometria.4me.pl/wygladzanie-wykladnicze-Browna.htm - [dostęp 14.02.2021, godz. 10.00]

Zakończenie

Działalność podmiotów w zmiennych warunkach rynkowych przy silnej konkurencji wymaga przygotowania odpowiedniej strategii działania ukierunkowanej na optymalizację procesów i maksymalizację zysków.

Proces prognozowania, opierający się na nowoczesnych i klasycznych narzędziach oraz metodach symulacji transakcji sprzedażowych, przyczynia się do minimalizowania ryzyka działań biznesowych. Korzyści wynikające z implementacji i wdrożenia procesów prognozowania przyczyniają się do optymalizacji sprzedaży produktów i usług finansowych oraz kreowania wysokiej jakości obsługi klientów indywidualnych i instytucjonalnych.

Streszczenie

W pracy przedstawione są wybrane narzędzia służące do wspierania procesu sprzedaży usług finansowych. Ukazano specyfikę oraz rolę prognoz w prowadzeniu działalności gospodarczej. Zaprezentowane metody, w tym prognozowanie z wykorzystanie danych *ex-post*, pozwalają na zmniejszanie ryzyka i błędów w procesie planowania sprzedaży w organizacji.

Słowa kluczowe
proces sprzedaży, narzędzia prognostyczne, finanse, sprzedaż

Selected tools supporting forecasting of the seasonality of demand and sales of financial services in the process of making market e-decisions

Summary

The paper presents selected tools for supporting the process of selling financial services. The specifics and the role of forecasts in running a business are shown. The presented methods, including forecasting with the use of ex-post data, allow to reduce the risk and errors in the sales planning process in the organization.

Key words

sales process, forecasting tools, finances

Bibliografia

1. Avgouleas E., *The harmonization of rules of conduct in EU financial markets: economic analysis, subsidiary and investor protection*, European Law Journal, 2000, vol 6 nr 1.
2. Czyżycki R., Klóska R., *Wybrane zagadnienie z prognozowania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2019,
3. Frankowski K.P., *Prognozowanie sprzedaży*, Wyd. CeDeWu, Warszawa 2018.
4. Gereń J., *Metodologiczne aspekty prognozowania ekonomicznego*, Przegląd statystyczny, 1978, nr 1.
5. Mastalerz-Kodzis A., Miśkowicz-Nawrocka M., Pościech E., Zawadzki H., Zeug-Żebro K., *Elementy ekonomii matematycznej dla studentów i zarządzania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice 2018.
6. Ślażyńska-Kluczek D., *Zmiany na rynku usług finansowych w kontekście dyrektywy PAD*, Zeszyty Naukowe PWSZ w Płocku Nauki Ekonomiczne, t. XXIII, 2016.
7. Szpringer W., *Społeczna odpowiedzialność banków: Między ochroną konsumenta a osłoną socjalną*, Wolters Kluwer, Warszawa 2009.
8. Witkowski M., Klimanek T., *Prognozowanie gospodarcze i symulacje w przykładach i zadaniach*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2006.
9. Zeliaś A., Pawełek B., Wanat S., *Prognozowanie ekonomiczne. Teoria. Przykłady. Zadania*, Wyd. PWN, Warszawa 2003.
10. Ustawa z dnia 16 kwietnia 2004 r. o zmianie ustawy o ochronie niektórych praw konsumentów oraz o odpowiedzialności za szkodę wyrządzoną przez produkt niebezpieczny.

Netografia

11. https://analizy.investio.pl/srednie-kroczace/
12. http://obliczeniastatystyczne.pl/srednia-arytmetyczna/
13. http://www.ekonometria.4me.pl/wygladzanie-wykladnicze-Browna.htm
14. http://www.prognozowanie.info/-Prognozowanie i symulacje, Metody prognozowania, Pomoc dla studentów kierunków ekonomicznych – wykonywanie projektów i zadań – korepetycje, Prognozowanie naiwne.