DOI: https://doi.org/10.29092/uacm.v20i53.1030

Lógica, lenguajes formales y modalidad

Otávio Bueno*
Melisa Vivanco**

Resumen. Este artículo examina dos supuestas limitaciones en el uso de lenguajes formales: por un lado, las compensaciones entre el poder expresivo e inferencial y, por el otro, el fenómeno del encarcelamiento del sistema. Después de reconceptualizar el tema, consideramos el papel que desempeña la modalidad en la comprensión de ciertos aspectos de las estructuras matemáticas y defendemos su centralidad.

Palabras clave. Lógica; lenguajes formales; poder expresivo; poder inferencial; modalidad.

Logic, formal languages and modality

Abstract. This paper examines two alleged limitations in the use of formal languages: on the one hand, the trade-offs between expressive and inferential power, and on the other, the phenomenon of system imprisonment. After reconceptualizing the issue, we consider the role played by modality in the understanding of certain aspects of mathematical structures, and argue for its centrality.

Key words. Logic; formal languages; expressive power; inferential power; modality.

* Departamento de Filosofía de la Universidad de Miami, Florida, Estados Unidos. Correo electrónico: otaviobueno@mac.com
** Departamento de Filosofía de la Universidad de Texas, Valle del Rio Grande, Texas, Estados Unidos. Correo electrónico: melisa.vivanco@utrgv.edu

1. Introducción

Los lenguajes formales han jugado un papel importante en la lógica: determinan características que son centrales para su comprensión. En este sentido, las contribuciones de Frege juegan un papel crucial en el campo. Cabe resaltar que los lenguajes formales no se limitan a expresar ciertas relaciones entre conceptos. Los lenguajes formales son herramientas importantes para la inferencia y el descubrimiento. En su trabajo *Lenguajes formales en lógica* (2012), Catarina Dutilh Novaes combina una cuidadosa investigación histórica con una atenta reflexión filosófica para profundizar en nuestra comprensión de los lenguajes formales: su naturaleza, significado y roles. Desde este punto de vista, los lenguajes formales son artefactos cognitivos que son particularmente importantes para usos computacionales e inferenciales. Estos usos involucran significativos rasgos cognitivos.

Comenzamos el presente artículo con el análisis y discusión de dos cuestiones que supuestamente constituyen importantes limitaciones en el uso de lenguajes formales. Por un lado, consideramos las concesiones mutuas (*trade-off*) entre el poder expresivo y el poder inferencial. Posteriormente discutimos el fenómeno de aprisionamiento de un sistema (*system imprisionment*). Para concluir, después de reconceptualizar el tema, examinamos el papel que juega la modalidad en la comprensión de algunos aspectos de las estructuras matemáticas, evidenciando su preeminencia.

2. Lenguajes formales: dos cuestiones limitantes

2.1. Concesiones mutuas: expresividad y poder inferencial

Vale la pena hacer el contraste entre dos roles que son tan importantes como significativamente diferentes (Dutilh, 2012). Por un lado, los lenguajes formales tienen una función expresiva: permiten caracterizaciones explícitas e inequívocas de conceptos. Por otro lado, estos lenguajes tienen una función computacional e inferencial: permiten derivaciones transparentes y sin lagunas de los resultados pretendidos. Dutilh Novaes argumenta que tradicionalmente, el énfasis en el uso de lenguajes formales ha estado en los recursos expresivos. Sin embargo, la autora también sostiene que el impor-

DOI: https://doi.org/10.29092/uacm.v20i53.1030

tante papel cognitivo de los lenguajes formales se encuentra, de hecho, en los rasgos computacionales e inferenciales más que en su poder expresivo.

Es importante reconocer que el contraste entre el poder expresivo e inferencial implica ciertas concesiones con respecto a ambos aspectos. Después de todo, cuanto más expresivo es un lenguaje formal, menos poder inferencial tiene, en el sentido de que el lenguaje permite la expresión de verdades que no se pueden derivar en el sistema formal en cuestión. El contraste entre lenguajes de primer orden y lenguajes de segundo orden ilustra claramente este punto. Debido a sus recursos expresivos más fuertes, los lenguajes de segundo orden permiten la expresión de oraciones que, aunque verdaderas, no pueden derivarse dadas las reglas de derivación pertinentes.

Sin embargo, lo que estas concesiones ponen de manifiesto es que la distinción entre el poder expresivo y el poder inferencial o computacional no se puede distinguir tan claramente. Al especificar uno de los dos aspectos, por ejemplo, lo que se puede expresar en un lenguaje formal dado, automáticamente se restringe al otro. Es decir, se restringe lo que se puede derivar, dados los recursos inferenciales del lenguaje formal en consideración. No es casualidad que cuando Frege desarrolló el primer sistema formal de lógica de segundo orden con el objetivo de expresar la aritmética en él, también especificó el poder inferencial y computacional del lenguaje formal (un punto que Dutilh Novaes reconoce, ver 2012, p. 89-90 y 96). Contrastar el poder expresivo y el poder inferencial en este caso, como si fueran objetivos independientes que un lenguaje formal pudiera tener, sería poco realista.

Pero quizás el punto en cuestión es diferente. La idea es que al desarrollar un lenguaje formal uno puede tener diferentes objetivos en mente. Se puede intentar aumentar el poder expresivo del lenguaje, permitiendo la cuantificación sobre una gama más amplia de objetos, propiedades y relaciones. Esto sugeriría que cuantas menos restricciones se impongan a dicha cuantificación, mejor. Alternativamente, se pueden tratar de idear mecanismos de derivación cuyo objetivo sea llegar lo más ampliamente posible. Una vez más, esto sugeriría que cuantas menos restricciones se impongan a tales mecanismos de derivación, el resultado será mejor.

El problema con esta estrategia es que inmediatamente nos encontramos con dificultades. Esto es debido a que la cuantificación sobre el todo absoluto no puede lograrse consistentemente, y un mecanismo de

DOI: https://doi.org/10.29092/uacm.v20i53.1030

derivación completamente libre de restricciones puede resultar trivial (pues todo podría ser derivado). Esto muestra la necesidad de imponer ciertas restricciones. La solidez en la derivación es un requisito razonable, ya que presumiblemente, no se quieren derivar falsedades de premisas verdaderas. La completitud, por su lado, se presenta menos claramente como un requisito a cumplir. La razón es que tiene un precio alto: impone limitaciones en la información que se puede expresar. Para garantizar que se puedan derivar todas las oraciones verdaderas en el lenguaje formal, se deben imponer restricciones sobre lo que se puede expresar en dicho lenguaje.

Consideremos, como ilustración, el caso de la aritmética. Si el objetivo general es obtener la completitud, la aritmética puede ser completa (a pesar de los teoremas de incompletitud de Gödel). Pero en este caso enfrentamos una decisión entre la consistencia y los recursos inferenciales que están permitidos. Una aritmética completa puede ser obtenida si la teoría subyacente es inconsistente (y, por lo tanto, uno de los supuestos del teorema de incompletitud de Gödel no se aplicará) o si se permite la introducción de una regla de inferencia infinita, como la regla ω. Tal regla, que tiene infinitas premisas, solo puede expresarse presuponiendo los números naturales.

Esto sugiere que, en última instancia, en lugar de una elección directa entre poder expresivo e inferencial, lo que realmente se necesita elegir es, o bien la consistencia, o bien la informatividad. La consistencia solo se puede obtener a expensas de la informatividad (e incluso entonces, solo sería consistencia relativa). Se puede construir una aritmética consistente, pero será incompleta, y una aritmética consistente y completa solo se puede construir introduciendo una regla (la regla ω) que, en su misma formulación, ya presupone esos mismos objetos que la aritmética en cuestión se suponía debía proporcionar. Una vez más, esto compromete la informatividad del sistema en cuestión. Por lo tanto, para la construcción de lenguajes formales se requiere tomar algunas decisiones y hacer las concesiones correspondientes. Pero tal vez las decisiones últimas y las concesiones son de un tipo diferente a las destacadas por Dutilh Novaes.

2.2. Aprisionamiento de un Sistema

Otra limitación importante (presuntamente) del uso de lenguajes formales es lo que Johan van Benthem llama “aprisionamiento de un sistema”:

DOI: https://doi.org/10.29092/uacm.v20i53.1030

> Las nociones que definimos [en un sistema lógico formal] son relativas a los sistemas formales. Esta es una de las razones por las que desde afuera [del sistema] haya tanta dificultad para comprender los resultados lógicos: suele haber algún parámetro que relativiza el enunciado con respecto a algún sistema formal, ya sea lógica de primer orden o algún otro sistema. Pero los matemáticos quieren resultados sobre la 'aritmética', no sobre el sistema de primer orden para la aritmética, y los lingüistas quieren resultados sobre el 'lenguaje', no sobre los sistemas formales que modelan el lenguaje. (van Benthem, 2011, p. 3)

Dutilh Novaes (2012, p. 100-103) identifica el aprisionamiento de un sistema como una fuente significativa de limitación para los lenguajes formales. La autora resalta:

> Un desarrollo esencial después de *Principia Mathematica* fue la formulación explícita y rigurosa de los sistemas deductivos, dando así nacimiento a la noción moderna de un sistema formal. Esto tuvo dos consecuencias epistémicas opuestas: por un lado, debido a que ahora se podían probar las metapropiedades deseables de los sistemas (consistencia, completitud), la confiabilidad de las pruebas dentro de ellas aumentó; pero, por otro lado, la validez de estas pruebas ahora era relativa al sistema formal en cuestión, y podría haber, al menos en teoría, varios sistemas formales igualmente "buenos". Ya no había un sentido absoluto de validez o prueba en la que confiar. Carnap (1934) representa el pináculo autoconsciente de estos desarrollos, con su sugerencia de que no existe una perspectiva absoluta para las pruebas, solo pruebas relativas a un lenguaje/cálculo. (Dutilh, 2012, p. 101)

Una de las consecuencias del desarrollo de un sistema formal fue la clara comprensión de que, al probar los resultados en un sistema dado, éstos se sustentan en dicho sistema. Sin embargo, la cuestión de si se mantienen más allá de ese sistema se convierte en una pregunta abierta. Necesitaríamos establecer el resultado una vez más en el nuevo sistema (si es que acaso fuera posible) para poder afirmar que el resultado se mantiene válido. Este es el

DOI: https://doi.org/10.29092/uacm.v20i53.1030

problema de la transportabilidad de los teoremas a través de distintos sistemas formales: los resultados quedan atrapados dentro del sistema en el que se establecieron, a menos que se establezcan de nuevo. En otras palabras, la confiabilidad de un resultado en virtud de la validez de un sistema está relativizada de origen. De esta manera, el sistema siempre queda "aprisionado".

El aprisionamiento de un sistema es, ciertamente, una cuestión de hecho. Pero (a) parece que ha estado con nosotros incluso antes de que se haya desarrollado la noción formal de un sistema lógico, y (b) bien entendido, puede que no sea una característica tan problemática después de todo.

(a) Considere el destino del quinto postulado en geometría euclidiana, y el eventual desarrollo de geometrías no euclidianas. En una de sus formulaciones, el postulado establece que dada una recta n y un punto P que no está sobre n, existe una única recta e paralela a n que cruza a P. A lo largo de su historia, el quinto postulado ha sido objeto de importantes controversias (si era realmente un postulado, si era derivable de los otros postulados, hasta qué punto era evidente por sí mismo, entre otras). Eventualmente, como es bien sabido, el postulado fue negado y se desarrollaron geometrías internamente consistentes en las que el postulado falla. El resultado es una serie de geometrías no euclidianas.

Puede parecer que aquí no hay un aprisionamiento del sistema. Los objetos geométricos estaban siendo estudiados directamente mediante la introducción de postulados adecuados, como suelen ser dentro de las matemáticas. No están en juego las propiedades de un determinado sistema, sino las propiedades de los propios objetos relevantes. Sin embargo, como quedó muy claro con la eventual introducción de geometrías no euclidianas, lo que los postulados geométricos iniciales permitieron estudiar a los matemáticos griegos antiguos no fueron los objetos geométricos en general, sino una clase particular de ellos: los euclidianos. Objetos geométricos muy diferentes no podrían caracterizarse, y mucho menos estudiarse, con los postulados euclidianos originales. De hecho, las propiedades del sistema eran relativas al sistema euclidiano y no caracterizaban a los no euclidianos. Para estudiar estos últimos se necesitaron diferentes postulados.

Este ejemplo no es una excepción. De hecho, es un caso bastante típico de las matemáticas. Considere cómo se han introducido los números complejos. Los postulados aceptados en ese momento (antes de que se

DOI: https://doi.org/10.29092/uacm.v20i53.1030

reconocieran tales números) no pudieron identificar ciertas entidades que se requerían para la solidez de ciertas derivaciones. Si hubiera objetos que cumplieran estos roles —a los cuales se les denominaba "imaginarios" dado su estatus— las derivaciones pasarían. Sin embargo, dado que los principios aceptados de la teoría de números no daban cabida a tales entidades adicionales, éstas no pudieron introducirse. Para estudiar dichas entidades, y validar las inferencias relevantes, sería necesario introducir nuevos principios. Cuando finalmente se introdujeron, se postularon los números complejos. Así, los sistemas previamente aceptados no estudiaban todos los números, sino sólo una clase particular y restringida de ellos, que excluía los números complejos. Todos los resultados obtenidos fueron relativos a los sistemas en consideración, restringidos a los números específicos en cuestión.

Pareciera que todo sistema matemático, sea formal o no, se enfrenta al problema de aprisionamiento. Esto se debe al hecho de que cada sistema de este tipo depende de principios y postulados para caracterizar el tema relevante y, en muchos casos, diferentes postulados conducen a sistemas significativamente diferentes.

(b) Pero ¿es esto un problema? No realmente. Mas bien es una característica central de las matemáticas. Las referencias de los conceptos matemáticos están indeterminadas a menudo. Consideremos, por ejemplo, el concepto *conjunto*. Hay una plétora de diferentes objetos que caen bajo tal concepto: conjuntos cantorianos, conjuntos no cantorianos, conjuntos acumulativos, conjuntos no acumulativos, conjuntos bien fundados, conjuntos no fundados, etcétera. Lo mismo ocurre con el concepto *número*. Hay números naturales, reales, complejos, números estándar, números no estándar, etcétera. Para determinar a cuál de ellos nos referimos es necesario introducir los postulados apropiados. Como resultado, es solo en esa etapa que las propiedades de los objetos relevantes pueden estudiarse e identificarse con precisión. Sin embargo, estas propiedades también dependen de los postulados en consideración. Así es como debe ser, y una vez que los conceptos matemáticos relevantes se determinan correctamente, se pueden comprender y estudiar con éxito. Aunque el aprisionamiento de un sistema es inevitable en matemáticas, al final no tiene por qué ser problemático. El fenómeno ha estado con nosotros mucho antes de que se hayan diseñado los sistemas formales.

DOI: https://doi.org/10.29092/uacm.v20i53.1030

¿Se sigue de las observaciones anteriores que "ya no existe un sentido absoluto de validez o prueba en la que confiar" (Dutilh, 2012, p. 101)? No necesariamente. La misma noción de consecuencia lógica (validez) puede usarse en todo momento, lo que ocurre es que hay diferentes especificaciones de cómo se implementa tal noción. Esto eventualmente puede conducir a diferentes lógicas. La noción de validez es fundamentalmente modal: un argumento es válido si no es posible la conjunción de sus premisas y la negación de su conclusión. Dependiendo de las posibilidades que se revelen, emergen diferentes lógicas. Por ejemplo:

- Si las posibilidades involucran solo situaciones completas y consistentes, obtenemos la lógica clásica.
- Si las posibilidades involucran situaciones incompletas pero consistentes, obtenemos lógicas constructivas.
- Si las posibilidades involucran situaciones inconsistentes pero completas, obtenemos lógicas paraconsistentes (para detalles y referencias adicionales consultar: Bueno y Shalkowski, 1999; Bueno, 2021).

Así, la misma noción de consecuencia (o validez) puede ser utilizada de manera confiable: la dependencia del sistema emerge en la especificación de las lógicas particulares, no al nivel del concepto mismo de validez. La necesidad de asegurar la derivabilidad de ciertos resultados se hace evidente cada vez que nos damos cuenta de que existen diferentes sistemas, ya sean formales o no. A la luz de los supuestos de estos sistemas y los tipos de objetos y las propiedades que se reconocen en ellos, se pueden (o no) establecer ciertos resultados, como lo ejemplifica la historia del quinto postulado de Euclides. El aprisionamiento de los resultados no se limita a los sistemas formales, sino que es una característica crucial de la práctica matemática, aunque ciertamente, los sistemas formales ponen especialmente de manifiesto las relaciones de dependencia en cuestión.

La derivabilidad en un sistema y, de manera más general, la consecuencia lógica son esencialmente conceptos modales. Las matemáticas están, por lo tanto, inherentemente entrelazadas con la modalidad. Pero ¿cómo el conocimiento de la modalidad relevante da forma a nuestra comprensión de las matemáticas? A continuación, examinaremos algunos aspectos de esta cuestión.

DOI: https://doi.org/10.29092/uacm.v20i53.1030

3. Modalidad

En su conocido trabajo, Paul Benacerraf (1973) argumentó que existe una tensión entre lo que supuestamente se considera la mejor metafísica para las matemáticas, a saber, el platonismo, pues éste –al postular objetos matemáticos– permite que el lenguaje matemático se tome literal y uniformemente con el resto del discurso científico, y lo que se considera la mejor epistemología para las matemáticas; a saber, una que nos proporcione un acceso adecuado a la ontología relevante, o una que produzca formas confiables de formar creencias verdaderas sobre él. No obstante, dado el platonismo, cualquier acceso a los objetos matemáticos relevantes se vuelve muy controvertido, dado que no está claro cómo se puede acceder a objetos causalmente inertes, no espaciotemporales.

Para resolver la tensión evidenciada por Benacerraf se han propuesto diferentes enfoques, por ejemplo, argumentando que uno puede dar cuenta del conocimiento matemático en términos de la coherencia de los principios matemáticos, en lugar de postular una ontología platónica (Field, 1989). Dichos enfoques implican la introducción de la modalidad primitiva. Esto es, una modalidad que no requiere ser explicada en términos de mundos posibles o modelos matemáticos.

Alternativamente, se puede cuestionar directamente que, al invocar cuantificadores ontológicamente neutrales, es decir, cuantificadores que no requieren la existencia de lo que se cuantifica, el platonismo proporcione la mejor metafísica para las matemáticas. Como resultado, se puede tomar el discurso matemático literalmente sin comprometerse con la existencia de objetos matemáticos (Azzouni, 2004; y Bueno, 2005). Esto disuelve por completo el problema de Benacerraf dada la falta de compromiso con una ontología platónica.

Sharon Berry (2019) argumenta que los enfoques de la epistemología matemática a través de la modalidad como primitiva se enfrentan a un "problema de acceso residual", ya que aún es necesario dar cuenta del conocimiento que uno tiene de las posibilidades relevantes. Para abordar este problema y ofrecer una base para la teoría de conjuntos potencialista (Berry, 2022), Berry introduce la posibilidad lógica condicional, una noción intuitiva de posibilidad que convierte oraciones verdaderas como: (a)

DOI: https://doi.org/10.29092/uacm.v20i53.1030

"Es lógicamente posible que algo sea rojo y redondo"; (b) "No es lógicamente posible que algo sea rojo y no rojo", y (c) "*Dados los gatos y canastas que hay*, es lógicamente imposible que cada gato duerma en una canasta diferente" (Berry, 2022, p. 42 y 47; Berry, 2019). La innovación surge aquí con la tercera oración (c) en la que siempre que haya más gatos que canastas, no es lógicamente posible (no simplemente físicamente posible), que cada gato duerma en una canasta diferente. Esto significa mantener fijas las propiedades que tienen los gatos y las canastas en el mundo real y considerar la asignación de exactamente un gato por canasta. Entonces se seguiría una contradicción lógica si hubiera más gatos que canastas y la tercera afirmación resultaría verdadera. La motivación para la introducción de la posibilidad lógica condicional es centrarse en lo que es lógicamente posible dadas las características físicas, metafísicas o epistémicas que están involucradas en los escenarios relevantes. La noción es especialmente útil en el contexto de las matemáticas, ya que la naturaleza última de los objetos de los que parece hablarse en el discurso matemático suele ser irrelevante para el contenido de las teorías matemáticas.

Sin embargo, en este punto surgen algunas preocupaciones. Podemos preocuparnos por lo que, en efecto, es nuevo acerca de la noción de posibilidad lógica condicional. Podría decirse que tal posibilidad parece ser solo una posibilidad lógica aplicada a cualquier condición física, metafísica o epistémica que esté en su lugar cuando se hace una afirmación de posibilidad. La expresión "posibilidad lógica condicional" sugiere que todas esas condiciones se agregan en el antecedente del enunciado de posibilidad en cuestión. Consideremos, por ejemplo, la declaración (c) anterior: "Dados los gatos y canastas que hay, es lógicamente imposible que cada gato duerma en una canasta diferente". La cláusula en letra cursiva fija las características físicas y metafísicas de los gatos y las canastas, basándose en hechos como, por ejemplo, que los gatos no pueden reducir su tamaño arbitrariamente para caber dentro de las canastas, ni las canastas pueden agrandarse arbitrariamente para que se puedan acomodar a más gatos. Una vez que se fijan todas estas condiciones, se convierte en una cuestión de consistencia lógica si cada gato puede (o no) dormir en una canasta diferente. Al final, esto parece ser solo una variante notacional del uso estándar de la posibilidad lógica aplicada a cualquier restricción física, metafísica o epistémica que pueda estar en juego.

DOI: https://doi.org/10.29092/uacm.v20i53.1030

Más aún, analizando cuidadosamente la opinión de Berry, podemos concluir que la evaluación de la posibilidad lógica implica la consideración de todas las posibilidades que se contemplan en los enunciados que se examinan. Esto es similar, según ella, a la exigencia de que el rango de los cuantificadores de segundo orden abarque todas las colecciones posibles. A la luz de esto, Berry defiende la reescritura de formulaciones de segundo orden de estructuras matemáticas en términos de posibilidad lógica condicional (Berry, 2019; 2022).

El problema con esta lectura del cuantificador de segundo orden (relativo a la noción de posibilidad lógica), como quedará claro más adelante, es que la posibilidad lógica tiene un rango mucho mayor que la posibilidad teórica de conjuntos. En primer lugar, los cuantificadores de segundo orden no necesitan ni deben interpretarse como enunciados de la teoría de conjuntos enmascarados. Se interpretan mejor en términos de pluralidades (Boolos, 1998). Más aún, la expresión "todas las colecciones posibles" no necesita tener la misma extensión que la expresión "todas las posibilidades", dado que es posible que haya posibilidades que no forman una colección. Consideremos, por ejemplo, la posibilidad de que exista el conjunto de todos los conjuntos. Ésta es una posibilidad real siempre que la lógica subyacente sea paraconsistente (da Costa, Krause y Bueno, 2007), aún cuando no haya un conjunto correspondiente de todos los conjuntos sobre la base de una teoría clásica de conjuntos.

No es difícil observar que la modalidad primitiva es crucial para dar un sentido a los aspectos centrales de la teorización lógica y matemática (Bueno y Shalkowski, 2009; 2015; y Bueno, 2022). Como se señaló anteriormente, la modalidad primitiva es necesaria para dar sentido a nociones cruciales como la de consecuencia lógica, dada la imposibilidad de la conjunción de las premisas y la negación de la conclusión en un argumento válido. La preocupación es que Berry parece asumir, sin argumentos, que la posibilidad lógica condicional se comporta de acuerdo con la lógica clásica. Pero ¿por qué debería ser este el caso? Más aún, ¿cómo se podría saber que éste es realmente el caso?

En el marco de la lógica clásica, el que algo sea rojo y no rojo no es lógicamente posible. Pero en una lógica paraconsistente (Priest, 2006; da Costa, Krause, y Bueno, 2007), el que algunos objetos tengan propiedades

DOI: https://doi.org/10.29092/uacm.v20i53.1030

inconsistentes es lógicamente posible sin trivialidad. Es decir, sin que todo se derive de la contradicción en cuestión. Por ejemplo, la oración "Esta oración no es verdadera", que constituye la paradoja del mentiroso, resulta ser tanto verdadera, como no verdadera. Por poner otro ejemplo, el conjunto de Russell (el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos) es miembro de sí mismo y no es miembro de sí mismo. La formulación original de los infinitesimales, magnitudes positivas más pequeñas que cualquier número dado, se usa de una manera que considera que los infinitesimales son diferentes de cero (por lo tanto, uno puede dividir por un infinitesimal) e idénticos a cero (por lo tanto, uno puede eliminar un infinitesimal). Todas estas posibilidades están descartadas, por decreto, en un contexto clásico (uno que está presidido por la lógica clásica), pero no se descartan en un escenario paraconsistente. Curiosamente, esto permite estudiar propiedades de objetos matemáticos inconsistentes, como el conjunto de Russell y los infinitesimales originales, sin trivialidades (da Costa, Krause y Bueno, 2007). Sin embargo, la posibilidad de estudiar estas estructuras (coherentes pero inconsistentes) no puede acomodarse dentro del marco propuesto por la posibilidad lógica condicional, debido a que la lógica clásica se presupone desde el principio.

Con la finalidad de ser menos radicales consideremos las matemáticas constructivas. En contraste con un aspecto sobresaliente de las matemáticas clásicas, el constructivismo incluye un poco de indeterminación matemática. Después de todo, el que un objeto matemático tenga una determinada propiedad o carezca de ella, depende de la etapa de su construcción: hasta que se alcancen ciertas etapas (si es que se alcanzan), estará indeterminado si el objeto en cuestión tiene o carece de cierta propiedad. Como resultado, el principio del tercero excluido no se cumple de forma general. Pero si la lógica clásica es presupuesta desde el principio para dictar lo que es lógicamente posible, tal indeterminación queda descartada por decreto: no hay lugar para ella si la noción subyacente de posibilidad requiere del principio del tercero excluido. Entonces se vuelve difícil explicar cómo se puede dar sentido a las matemáticas constructivas si la estrategia para explicar el conocimiento matemático descarta las mismas posibilidades que contemplan los constructivistas.

Nuestra sugerencia es avanzar en un marco más pluralista. Esto en lugar de permitir la posibilidad lógica solo desde la comprensión clásica, dejando espacio para una comprensión mucho más rica de la posibilidad lógica, que

DOI: https://doi.org/10.29092/uacm.v20i53.1030

es la que de hecho tenemos: una noción que permite la inconsistencia y la incompletitud tanto de la lógica, como de matemáticas. En consecuencia, se hace posible un marco más amplio, capaz de acomodar matemáticas inconsistentes y constructivas, entre otros enfoques no clásicos (Bueno y Shalkowski, 2009; da Costa, Krause y Bueno, 2007; recomendamos también revisar las referencias incluidas en estos dos trabajos).

Una observación final. No hay duda de que es útil invocar una noción primitiva de posibilidad y poder razonar a partir de ella. Sin embargo, debemos reconocer que no está claro que la utilidad de postular tal noción sea suficiente para proporcionar un argumento a favor de su confiabilidad (Berry, 2019). Dado que conceptos útiles, como los involucrados en idealizaciones (océanos infinitamente profundos, océanos perfectamente libres de fricción, aviones, entre otros muchos ejemplos) pueden estar completamente equivocados como descripciones acertadas y precisas del mundo real, podría decirse que en la medida en que debe establecerse la confiabilidad de la posibilidad lógica condicional, ésta necesita ser apoyada de alguna otra manera.

Es claro que, subyacente a la noción de posibilidad lógica condicional, hay una visión estructuralista con respecto a las matemáticas. Esto se vuelve especialmente destacado en la discusión de Berry acerca de lo que implica preservar o acordar hechos estructurales sobre ciertas relaciones. Desde la perspectiva de la autora:

> Dos interpretaciones estarán de acuerdo acerca de la *estructura* de los números naturales si ambas toman las nociones de "número" y "sucesor" para aplicarlas a alguna secuencia ω—incluso si no están de acuerdo sobre el tamaño total del universo o sobre si Julio César o el conjunto vacío son idénticos a cualquier número, etcétera. Mi comprensión de lo que se necesita para mantener fijos los hechos estructurales generaliza esta forma de pensar sobre lo que se requiere para preservar la estructura del número natural (es decir, la estructura de los objetos bajo las relaciones "número natural" y "sucesor"). (Berry, 2022, p. 48)

El hecho de que dos interpretaciones puedan estar de acuerdo o preservar la misma estructura, incluso si ofrecen versiones contradictorias del tamaño del

DOI: https://doi.org/10.29092/uacm.v20i53.1030

universo o identifican números con tipos muy diferentes de objetos, sugiere que ni la naturaleza de los objetos involucrados ni la cantidad de objetos existentes en el universo son cruciales para determinar la estructura en juego. Las consideraciones de cardinalidad son, por supuesto, importantes para la caracterización de la estructura, pero no hay que perder de vista que la estructura de los números naturales se puede especificar en universos que tienen innumerables objetos. Todas estas ideas estructuralistas son significativas.

Es interesante señalar que dichas ideas también tienen un componente modal, ya que los números naturales no podrían ser lo que son a menos que se dieran las condiciones apropiadas: se deben ordenar suficientes objetos de cierta manera para que se forme una secuencia ω. Como podemos ver, la cualidad modal de estructuras matemáticas es crucial.

4. Conclusión

En este trabajo hemos examinado y discutido dos supuestas limitaciones de los lenguajes formales. Por un lado, planteamos el problema de la compensación entre el poder expresivo e inferencial, para posteriormente, hacer lo propio con respecto al fenómeno de aprisionamiento de un sistema. Nuestra sugerencia es que el primero de estos supuestos problemas implica un compromiso más profundo entre consistencia e información. En lo que concierne a la segunda cuestión, hemos mostrado que este fenómeno se entiende mejor como una característica profundamente arraigada de las matemáticas, en lugar de como una limitación de los lenguajes formales. Nuestro objetivo último es que, al examinar el significado de estas supuestas limitaciones, se puedan aclarar los problemas resultantes y agudizar el debate actual sobre ellos. Como podemos ver a partir de los diferentes ejemplos, estos debates son un terreno fértil para refinar nuestro entendimiento tanto en el caso de la lógica, como de las matemáticas.

Finalmente, hemos hecho manifiesta la importancia de la modalidad (tomada como primitiva) en la caracterización de estructuras matemáticas. Aunque la noción de posibilidad lógica condicional es sugerente, hemos señalado algunas preocupaciones que esta noción enfrenta. Sin embargo, como hemos argumentado, estas preocupaciones no socavan de ninguna manera la importancia de la modalidad para la comprensión de las matemáticas.

DOI: https://doi.org/10.29092/uacm.v20i53.1030

Fuentes consultadas

Azzouni, J. (2004). *Deflating Existential Consequence*. Nueva York: Oxford University Press.

Benacerraf, P. (1973). Mathematical Truth. En *Journal of Philosophy*. Núm. 70. pp. 29-55.

Berry, S. (2022). *A Logical Foundation for Potentialist Set Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Berry, S. (2019). The Residual Access Problem. *Artículo presentado en la sesión de la División Este de la Asociación Filosófica Americana*, Filadelfia. Enero. pp. 8-11. Publicado en 2020.

Boolos, G. (1998). *Logic, Logic, and Logic*. Cambridge: Harvard University Press.

Bueno, O. (2021). Modality and the Plurality of Logics. En O. Bueno y S. Shalkowski (Eds.). *Handbook of Modality*. Londres: Routledge. pp. 319-327.

Bueno, O. (1995). Dirac and the Dispensability of Mathematics. En *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*. Núm. 36. pp. 465-490.

Bueno, O. y Shalkowski, S. (2015). Modalism and Theoretical Virtues: Toward an Epistemology of Modality. En *Philosophical Studies*. Núm. 172. pp. 671-689.

Bueno, O. y Shalkowski, S. (2009). Modalism and Logical Pluralism. En *Mind*. Núm. 118. pp. 295-321.

Carnap, R. (1934). *The Logical Syntax of Language*. Londres: Open Court.

da Costa, N., Krause, D. y Bueno, O. (2007). Paraconsistent Logics and Paraconsistency. En D. Jacquette (Ed.). *Philosophy of Logic*. Amsterdam: North-Holland. pp. 791-911.

Dutilh, C. (2012). *Formal Languages in Logic: a Philosophical and Cognitive Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.

Field, H. (1989). *Realism, Mathematics and Modality*. Oxford: Blackwell.

Priest, G. (2006). *Contradiction*. Oxford: Oxford University Press.

DOI: https://doi.org/10.29092/uacm.v20i53.1030

van Benthem, J. (2011). The Dynamic World of Martin Stokholf. En C. Dutilh y J. van der Does (Eds.). *Festschrift for Martin Stokhof*. Disponible en www.vddoes.net/Martin/mf.html.

Fecha de recepción: 15 de abril de 2023
Fecha de aceptación: 4 de septiembre de 2023

DOI: https://doi.org/10.29092/uacm.v20i53.1030