PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática
Área de Concentração Matemática

Sabrina Alves Boldrini Cabral

DESENVOLVENDO O PENSAMENTO ARGUMENTIVO GEOMÉTRICO: Construindo práticas Investigativas

Belo Horizonte
2017

Sabrina Alves Boldrini Cabral

DESENVOLVENDO O PENSAMENTO ARGUMENTIVO GEOMÉTRICO: Construindo práticas Investigativas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Dra. Eliane Scheid Gazire

Belo Horizonte
2017

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Cabral, Sabrina Alves Boldrini
C117d Desenvolvendo o pensamento argumentivo geométrico: construindo práticas Investigativas / Sabrina Alves Boldrini Cabral. Belo Horizonte, 2017.
224 f.: il.

Orientadora: Eliane Scheid Gazire
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Geometria plana - Problemas, questões, exercícios. 3. Professores – Formação. 4. Material didático. 5. Transformações (Matemática). I. Gazire, Eliane Scheid. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 513:373

Sabrina Alves Boldrini Cabral

DESENVOLVENDO O PENSAMENTO ARGUMENTIVO GEOMÉTRICO: Construindo práticas Investigativas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

____

Prof.ª Dra. Eliane Scheid Gazire (Orientadora) – PUC Minas

____

Prof.ª Dra. Lílian Nasser - UFRJ

____

Prof. Dr. João Bosco Laudares – PUC Minas

Belo Horizonte, 09 de junho 2017.

Dedico esse trabalho:

À minha mãe Rozangela Alves Fumian, que com toda sua sabedoria e conhecimento orquestrou minha vida na mais perfeita harmonia. Meu espelho nessa trajetória terrena.

Ao meu pai Pedro Paulo Boldrini que mesmo não estando mais presente nesse plano físico, está sempre presente no meu coração.

Ao meu filho João Paulo Boldrini Cabral, fonte de toda minha inspiração, por todo seu carinho e compreensão nos momentos de ausência.

Ao meu esposo Elcy Cabral Junior, amigo e companheiro, que durante todo esse tempo de estudo acompanhou-me incansavelmente nessas longas viagens a Belo Horizonte. Sem o seu apoio não sei se teria chegado até aqui.

As minhas irmãs Ana Paula Alves Boldrini e Aline Alves Boldrini por se orgulharem do meu esforço e estarem sempre presentes em minha caminhada.

A todos minha eterna gratidão!

AGRADECIMENTOS

Agradecer, segundo o "Dicionário Aurélio" é retribuir, mostrar reconhecimento. Dessa forma, expresso aqui todo meu reconhecimento:

À professora Dra. Eliane Scheid Gazire, por dividir comigo seu conhecimento, pela gentileza de suas palavras, por acreditar no meu trabalho, pelo incentivo, por estar sempre disposta a atender-me e principalmente por orientar-me com tanta sabedoria.

Aos professores do programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC/Minas: Amauri Carlos Ferreira, Elenice de S. L. Zuin, Eliane Scheid Gazire, João Bosco Laudares, Lídia Maria Luz, Mariana Veríssimo e Tânia Fernandes Bogutchi, que com suas "Iluminadas" aulas contribuíram efetivamente com meu crescimento pessoal e profissional.

Aos meus colegas de turma: Augusto, Aloisio, Allan, Flávio, Fernanda, James, Nádia, Paulo e Rogéria, pela parceria, pelo carinho e por fazerem parte dessa etapa tão importante da minha vida.

À amiga, coordenadora do curso de Licenciatura de Matemática da UEMG, Luciane Silva Oliveira, pela oportunidade oferecida de lecionar nesse curso e por entusiasmar-se com minhas conquistas.

Aos meus alunos e ex-alunos por permitirem a troca de conhecimento nesse processo de formação docente.

À professora da geografia Madalena Sapavini, pela simplicidade e presteza em todos os momentos.

Aos docentes do curso de Licenciatura em Matemática da UEMG/Carangola, pelo apoio e troca de experiências.

Aos colegas da Escola Estadual "Prefeito Jayme Toledo", pelo incentivo.

E nessa "roda da vida" agradeço a Deus por tê-los colocado em meu caminho.

Muito obrigado!

Vendo então que verdade consiste na ordenação certa de nomes em nossas afirmações, um homem que busca verdade precisa teria necessidade de lembrar o que cada nome que ele usa representa e posicioná-lo devidamente; ou, então, ele se verá emaranhado em palavras, como um pássaro em galhos viscosos; quanto mais se esforça, mais preso fica ao visgo. Logo, em geometria, os homens começam chegando a um acordo sobre os significados de suas palavras; aos significados acordados, eles dão o nome de definições e os colocam no início de seus cálculos. (HOBBES, 1988, p.230)

RESUMO

Considerando a complexidade do processo de ensino aprendizagem, pensar no ensino de Geometria, por meio de provas e demonstrações, é propor um confronto entre o modelo cognitivo do aluno com o de outros alunos ou, até mesmo, com o do professor. A questão fundamental é que as "provas" devem ser vistas, primeiramente, como uma forma de argumentação, que trazem valiosos benefícios para o desenvolvimento de competências e habilidades geométricas, na perspectiva de: demonstrar a necessidade de uma melhor definição; contribuir para a comunicação de resultados e para a formalização do corpo desse conhecimento. Com o intuito de conhecer as percepções dos estudantes de diferentes níveis de ensino em suas construções argumentativas, parte de nossa pesquisa foi construída com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública de ensino, localizada na zona urbana do município de Caiana, no estado de Minas Gerias. Outra parte foi estruturada com alunos matriculados no 3º período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Minas Gerias (UEMG), unidade de Carangola, localizada na zona da Mata Mineira. Com objetivo de produzir saberes, práticas e inovações, sob uma epistemologia reflexiva e investigativa, construímos, com base nas experiências realizadas por Gazire (2000) e Nasser e Tinoco (2003), seis atividades de Provas Experimentais para serem aplicadas nas três turmas participantes da pesquisa durante o ano letivo de 2016. As atividades de provas experimentais propostas foram estruturadas em etapas e desenvolvidas com as turmas de acordo com a proposta curricular de cada curso. Os experimentos: "Engenharia de Grego"; "A excentricidade dos Planetas e a Primeira Lei de Kepler" e "Curvas, Superfícies e Arquitetura" foram aplicados na turma do 3º ano do Ensino Médio, quando trabalhamos conteúdos de Geometria Analítica. Os experimentos: "Curva de Nível" e "Demonstrando o Teorema de Pitágoras" foram desenvolvidos com a turma do 9º ano com o propósito de abordar as Relações Métricas no Triângulo Retângulo; e o experimento: "Descobrindo Propriedades das Cônicas com o GEOGEBRA" foi aplicado na turma do 3º período do curso de Licenciatura com o objetivo de demonstrar experimentalmente algumas propriedades das Superfícies Cônicas. Ao analisarmos os argumentos construídos pelos alunos, verificamos, de forma geral, que as construções de pensamento apresentadas, tanto no que se refere aos alunos da Educação Básica (9º ano e 3º ano), como do curso de Licenciatura (3º período), concentram-se, de acordo com o modelo proposto por Balacheff (2000), em um nível de "Prova Pragmática", variando entre os tipos: "Empirismo Ingênuo" e "Exemplo Genérico". Naqueles poucos casos em que uma precisão superior é obtida, percebe-se que os alunos recorrem a um “argumento de autoridade”, ou seja, definições apresentadas no livro didático ou explicações dadas pelo professor e que, mesmo assim, estão longe de alcançar um nível de “Prova Conceitual”. Considerando que os conceitos geométricos são formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão às formulações que enunciam e pelas verificações que realizam, entendemos que a utilização de atividades experimentais são importantes nas aulas de Matemática, pois abrem caminhos para a investigação e para o desenvolvimento do raciocínio lógico. Dessa forma, ao ensinar estudantes a desenvolverem métodos de argumentação e prova, é preciso que o professor esteja atento ao seu nível de desenvolvimento cognitivo e ao caminho pelo qual suas experiências prévias construirão estruturas conceituais que poderão ajudar ou impedir esse desenvolvimento.

Palavras-chave: Provas e demonstrações. Provas experimentais. Argumentação geométrica.

ABSTRACT

Considering the complexity of the teaching process learning demonstrations, thinking about teaching geometry through tests and demonstrations, is propose a confrontation between the cognitive model of the student with the other students or even with the teacher. The bottom line is that the "evidence" should be seen primarily as a form of argument, that bring valuable benefits to the development of skills and geometric skills with the perspective to: demonstrate the need for a better definition; contribute to the communication of results and the formalization of the body of this knowledge. In order to know the perceptions of students of different levels of education in their argumentative buildings, part of our research was built with 9th graders of elementary school and 3rd year of high school from a public school education located the urban area of Caiana, municipality in the state of Minas Gerais. Another part was structured with students enrolled in the 3rd period of the Bachelor's Degree in Mathematics from the State University of Minas Gerais (UEMG), Carangola unit, located in the area of Mata Mineira. In order to produce knowledge, practices and innovations. Under a reflective and investigative epistemology, built with the experience gained by Gazire (2000) and Nasser and Tinoco (2003), six activities Experimental Evidence to be applied in three groups participating in the research during the school year 2016. The activities of experimental evidence proposals were structured in stages and developed with the courses according to the proposed curriculum for each course. The experiments, "Greek Engineering"; "The eccentricity of the Planets and Kepler's First Law" and "Curves, Surfaces and Architecture" were applied in the 3rd year of high school class, when we work with this Analytic Geometry class content. Experiments: "Contour" and "Demonstrating the Pythagorean theorem" were developed with the class of 9 year purpose of addressing the metrics Relations in the Triangle rectangle; the experiment: "Discovering properties of Conic with Geogebra" was applied the class of the 3rd period of the Degree course in order to experimentally demonstrate some properties of Conic Surfaces. When we analyze the constructed arguments by the students, find, in general, the constructions of thought presented, both referred to students of basic education (9th grade and 3rd year) as the Bachelor's Degree (3rd period), focus according to the model proposed by Balacheff (2000), at a level of "Pragmatic Support" ranging between types: "naive empiricism" and "Generic Example". In those few cases where a higher accuracy is obtained, it is clear that students turn to an "argument from authority", ie definitions given in the textbook or explanations given by the teacher and that still are far from reaching a level of "proof Concept". Whereas the geometric concepts are formed by inward action of the student, the meaning they give to the words which enunciate and the tests they perform, we understand here that the use of experimental activities are important in mathematics classes, they open avenues for research and the development of logical reasoning. Thus, when teaching students to develop methods of argument and evidence, it is necessary that the teacher be aware of their level of cognitive development and the way in which their previous experiences build conceptual frameworks that may help or hinder this development.

Keywords: Evidence and statements. Experimental evidence. Geometric argument.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

> A educação, nessa perspectiva, assume papel de importância fundamental. É que a educação viabiliza a intervenção. Por isso digo: a educação sozinha não faz. Mas pode fazer algumas coisas importantes: entre abrir caminhos e intervir no mundo. Pode ser no sentido de preservar o status quo ou no sentido de mudá-lo. Minha opção é mudar. (FREIRE apud SCARPIN, 2005, p. 25)

Meu interesse em adentrar no programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC Minas e investigar a construção do Conhecimento Argumentativo Geométrico, buscando compreender como os alunos entendem um processo de prova e demonstração, encontra-se atrelado às minhas vivências como professora de Matemática na Educação Básica ao longo de 17 anos de trabalho e da experiência de lecionar as disciplinas de Geometria Plana, Analítica e Espacial no curso de Licenciatura de Matemática na Universidade do Estado de Minas Gerias, no município de Carangola (UEMG), nos últimos quatro anos.

Motivada pela ação transformadora que a Educação pode proporcionar, escolhi como profissão seguir a carreira docente. Por ter uma enorme afinidade, desde o início de meus estudos na Educação Básica, com a matemática, escolhi o curso de Licenciatura em Ciências e Matemática para tecer os fios de uma longa trajetória de minha vida: a carreira profissional.

Iniciei minha graduação no ano de 1998, na antiga FAFILE (Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Carangola), hoje atual UEMG (Universidade do Estado de Minas Gerias), logo após concluir o ensino médio, no final de 1997. O curso que escolhi me habilitou para trabalhar as disciplinas de Ciências e Matemática, no ensino Fundamental e Matemática no ensino Médio.

Como o curso era divido em duas etapas, Licenciatura Curta e Plena, os alunos, a partir no quinto período escolhiam qual licenciatura plena queriam obter: Ciências Biológicas ou Matemática. Escolhi Matemática, cursando mais três períodos específicos para essa disciplina.

Comecei a construir minha carreira docente logo no terceiro período do curso de graduação, no ano de 1999, quando fui selecionada, pela prefeitura municipal de minha cidade, Espera Feliz/MG, município de vinte e três mil (23.000) habitantes, localizado na Zona da Mata mineira, para trabalhar como professora auxiliar das disciplinas de Matemática e Ciências no programa Telessala[1]; projeto desenvolvido pela Fundação Roberto Marinho em parceira com a Secretaria Municipal de Educação.

[1] A Metodologia Telessala foi elaborada para desenvolver o currículo do Telecurso e era utilizada em todos os projetos implementados pela Fundação Roberto Marinho, em parceria com instituições públicas ou privadas.

O programa tinha como proposta oferecer formação Fundamental em dois anos (antigas 5ª a 8ª séries) a pessoas com idade escolar avançada. A primeira turma em que atuei, era constituída por trinta e dois (32) alunos com idades variando entre vinte e sessenta e nove anos. Turma bastante heterogênea, não só em relação à faixa etária, mas também no que diz respeito aos anseios e expectativas em relação ao curso, devido à diferenças na realidade sócio cultural pelos alunos vivenciadas.

A metodologia empregada no programa era muito nova para mim e no início tive certa dificuldade para me adaptar a ela. Porém, o que me motivava era perceber que meus diversos alunos tinham uma enorme vontade de aprender e que apesar de toda a dificuldade encontrada por eles, após anos de evasão escolar, devido a diversos problemas relacionados a horário, falta de transporte, cansaço após um dia trabalho exaustivo, e outros, estavam dispostos a recomeçar seus estudos, buscando, segundo alguns “melhorar a qualidade de vida”.

Apesar da imaturidade profissional, advinda dentre outros fatores, da falta de experiência, adentrei aos estudos de cada caso na busca constante de encontrar “caminhos” através dos quais realmente pudesse contribuir de forma significativa com a formação daqueles alunos.

As experiências ali vivenciadas, durante os dois anos de estudo e trabalho fizeram-me aprender muito mais do que ensinar. Com estes alunos tive a oportunidade de presenciar os encantos e desencantos, as contradições e os dilemas do sistema educacional, bem como, começar a aprender como se aprende e a compreender de fato o que é ser professor.

O trabalho nesse programa, foi uma caminhada muito importante para a minha formação profissional, que a cada passo ia refazendo-se e ampliando-se. Terminei minha graduação no final do ano de 2001; novas experiências foram surgindo e uma nova travessia se iniciando.

Logo no início do ano de 2002 comecei a trabalhar como professora de Matemática na rede Estadual de Ensino de Minas Gerais, em uma escola de zona rural no município de Espera Feliz, localizada na comunidade de São Gonçalo, situada a quarenta quilômetros da zona urbana, atuando nas turmas de primeiro, segundo e terceiro anos do Ensino Médio.

Mais uma vez, nessa dinâmica da vida, os caminhos percorridos proporcionaram-me experiências surpreendentes. Trabalhar em uma escola de zona rural com um contexto educacional escrito por um movimento real que constitui suas tensões, suas contradições, seus limites e suas possibilidades, mostrou-me a necessidade de buscar caminhos para provocar

---

Aplicada desde 1995, ela é resultado de um conjunto de processos, métodos, procedimentos e materiais que têm suas raízes nas práticas desenvolvidas nas décadas de 1970 e 80 no Brasil, inspiradas em Dom Helder Câmara, Paulo Freire, Freinet, Piaget, Anísio Texeira e Darcy Ribeiro.

naqueles alunos uma postura crítica, interrogativa e reflexiva sobre a realidade em que estavam inseridos.

Esta realidade precisava ser compreendida para ser transformada. Uma trajetória marcada por histórias vividas por sujeitos que ainda estavam começando a aprender a viver. Histórias de jovens e adolescentes na faixa etária de quatorze a dezoito anos, que enfrentavam em seu cotidiano o trabalho pesado nas lavouras cafeeiras e ainda encontravam forças para enfrentar uma jornada escolar no período noturno.

Diante de tais circunstâncias, buscava compreender: "como o Ensino Escolar que serve sempre a um determinado interesse, poderia ser direcionado a outra perspectiva? Como direcionar o ensino de Matemática a uma concepção de mundo e de sociedade?

> Ensinar matemática é deflagrar ideias matemáticas na cabeça do aluno. Isso é conseguido através de desafios postos na forma de situação-problema. Mergulhados nessas situações problemáticas, o aluno, conduzido por perguntas adequadas, é desafiado a resolvê-las, utilizando seu próprio referencial e suas próprias tentativas. Esse desafio é responsável pelo deflagrar de ideias. (GAZIRE, 2000, p. 14)

Foi nesse deflagrar de ideias matemáticas e nas experiências vivenciadas com toda essa diversidade educacional, que construí, embora em um espaço tão pequeno de tempo, minha identidade docente. E a partir dessas experiências, busquei significar e constituir a presente investigação.

Trabalhando desde o início do ano de 2013, com a disciplina de Geometria Plana, nos primeiros períodos do curso de Licenciatura em Matemática da UEMG (Universidade do Estado de Minas Gerais), unidade de Carangola, tenho observado que grande parte dos discentes desse curso, na maioria das vezes encontram grandes dificuldades em compreender e explicitar com clareza ideias Geométricas.

Esse fato causou-me grande inquietação: como esses alunos, hoje ingressos em um curso de Licenciatura de Matemática, amanhã futuros professores de matemática irão se portar em sala de aula com relação a essa disciplina?

O problema é que apesar dos esforços feitos nos últimos tempos para aperfeiçoar o ensino-aprendizagem dos conteúdos aplicados em matemática na Educação Básica, cada vez mais, percebe-se que a maioria dos alunos chega aos cursos de graduação com uma grande defasagem no que diz respeito à aprendizagem dessa disciplina, principalmente em relação aos conhecimentos geométricos.

Considerando a complexidade do processo de ensino-aprendizagem Geométrica, não só para o aluno, mas também para o professor, partimos do pressuposto de que a "Prova

Experimental" oferece ao docente, ferramentas necessárias para um trabalho pedagógico capaz de auxiliar o aluno no desenvolvimento do senso crítico, potencializando suas habilidades de reflexão, análise e argumentação.

Procuramos com esse trabalho, encontrar elementos indicativos de que um processo de "prova" pode contribuir com êxito no ensino-aprendizagem de Geometria.

Nesse sentido, no primeiro capítulo desse trabalho, *A Geometria*, encontramos na história da matemática, em Boyer (1996), Rooney (2012) e Eves (2011) fatos relacionados aos primeiros contatos humanos com a Geometria, bem como características que elevam o conhecimento dessa "ciência" a um caráter mais geral com uma perspectiva mais reflexiva.

No segundo capítulo, *A Construção do Pensamento Geométrico: da intuição à lógica dedutiva*, faz-se uma recensão ao desenvolvimento do pensamento racional com base nas concepções filosóficas apresentadas por: Platão [427 - 347 a.C]; Aristóteles [384 - 322 a. C]; Descartes [1596 – 1650]; Kant [1724 – 1804] e Husserl [1859 – 1938].

O terceiro capítulo, *Provas e Demonstrações na Matemática e na Educação Matemática*, apresenta inicialmente o processo de desenvolvimento individual do conhecimento humano sob as influências dos meios sociais, histórico e cultural com base nas teorias de Piaget (1977) e Vygotsky (1998).

Em seguida faz-se uma interligação entre a construção desse conhecimento e a aquisição dos saberes matemáticos. Por último, com base nos argumentos construído por Hanna (1990; 2000) e Bicudo (2010) buscamos compreender o papel da "prova" na Matemática e na Educação Matemática.

O quarto capítulo, *Aspectos Cognitivos e Didáticos das Provas e Demonstrações,* descreve o processo de construção dos saberes matemáticos de acordo com a "Ciência Cognitiva", partindo desses estudos, com base nas teorias propostas por Brousseau (2008) e Balacheff (2000), com base nos experimentos realizados por: Gazire (2000), Nasser e Tinoco (2003) e Nasser e Aguilar Junior (2012) procuramos entender o papel do professor na construção desse conhecimento.

Apresenta-se também nesse trabalho uma parte dedicada a *Trajetória e Metodologia* empregada na pesquisa. Nessa parte são apresentadas: as justificativas para a escolha dos aportes teóricos; a caracterização do local da pesquisa; a apresentação dos sujeitos envolvidos na pesquisa e a metodologia utilizada na construção das provas experimentais.

Na parte dedicada à *Análise dos Resultados*, buscamos descrever detalhadamente toda a interpretação feita a partir dos dados obtidos com as aplicações dos Experimentos, apoiando-nos na didática da matemática francesa, em Balacheff (1987; 1988; 2000) no que diz respeito ao nível de prova encontrado nas argumentações apresentadas por alunos em situação de "prova" matemática.

Com intuito de verificar se partindo da experimentação é possível que os alunos cheguem à construção de um pensamento argumentativo geométrico mais avançado, através da dialética das "provas e refutações", utilizamos o modelo proposto por Lakatos (1978).

Nas considerações finais, o tema dessa dissertação é brevemente retomado e com base nos dados coletados e nos estudos teóricos, enumeramos os resultados gerais da pesquisa e propomos algumas questões futuras ainda a serem desenvolvidas sobre o assunto.

2. A GEOMETRIA

> A Geometria existe, como já disse o filósofo, por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la. (TAHAN, 2003 p.34)

"Geometria": palavra grega que significa *Medição da Terra* é a ciência que trata das propriedades das figuras geométricas usadas para medir extensões. Acredita-se que as origens da geometria, remontam às próprias origens das civilizações, porém, o que se sabe ao certo sobre sua origem, é que há muito tempo atrás, o homem descobriu e interessou-se pelas estranhas e fascinantes formas apresentadas pela natureza e as adicionou às suas superstições e religiões, mudando assim nossa compreensão de tudo, fornecendo-nos uma chave para os segredos dessa ciência: a **Geometria**.

Primordialmente a geometria baseava-se em uma coleção de enunciados ou princípios descobertos empiricamente através dos sentidos ou de algumas experiências vivenciadas por um indivíduo ou um determinado grupo. Entre esses princípios, alguns se destacavam pela presença de cálculos relativamente sofisticados ao ponto de até hoje serem utilizados nas demonstrações de algumas propriedades da matemática moderna.

O fato de que a descoberta desta ciência e tantas outras tenham surgido da necessidade, não é surpreendente; pois tudo o que é produzido em uma geração, avança do imperfeito para o perfeito, até atingir seu ponto máximo.

De acordo com Rooney (2012), é provável que alguns dos primeiros cálculos geométricos tenham sido desenvolvidos a partir da construção de monumentos, demarcação de terra ou manufatura de artefatos para fins religiosos. Acredita-se que os problemas práticos da geometria tenham surgido nos projetos de construções muito antes deles serem registrados na forma escrita. Ao trabalhar com distâncias, áreas e volumes no mundo real, a geometria foi uma das primeiras aplicações da matemática nas civilizações.

Diversos estudos relacionados à história da geometria nos levam a pensar que uma das primeiras manifestações geométricas encontra-se nos desenhos deixados pelo homem primitivo (pré-histórico – por volta de mais de 3300 anos a.C.), que de maneira inconsciente, classificava os objetos à sua volta de acordo com sua forma e tamanho, atribuindo a essa etapa da geometria um tipo de Senso Geométrico Inato[2].

---

[2] Senso geométrico inato também conhecido como geometria subconsciente é caracterizada pelo fato de só se considerarem questões concretas, traduzindo-se o saber geométrico numa coleção desconexa de noções sobre o

Nessas abstrações de formas e tamanhos encontram-se os primeiros passos para uma Geometria informal e indutiva, que partindo da observação de alguns casos particulares buscava encontrar verdades para casos gerais. Dentre os povos mais antigos, tornaram-se grandes adeptos do trabalho com esse tipo de geometria os Egípcios, os Babilônios e os Sumérios.

Os Egípcios desenvolveram sua primeira forma de escrita no período pré-dinástico através de um sistema conhecido como hieroglífico que se compunha de sinais pictográficos para representar objetos.

Figura 1 - Sinais pictográficos

Fonte: Eves (2011).

Para os egípcios, uma das principais utilidades da geometria encontrava-se na necessidade de se elevar do Nilo durante as cheias e foi dessa necessidade, que a geometria egípcia desenvolveu métodos muito precisos para calcular áreas de terrenos e volumes de silos e pirâmides.

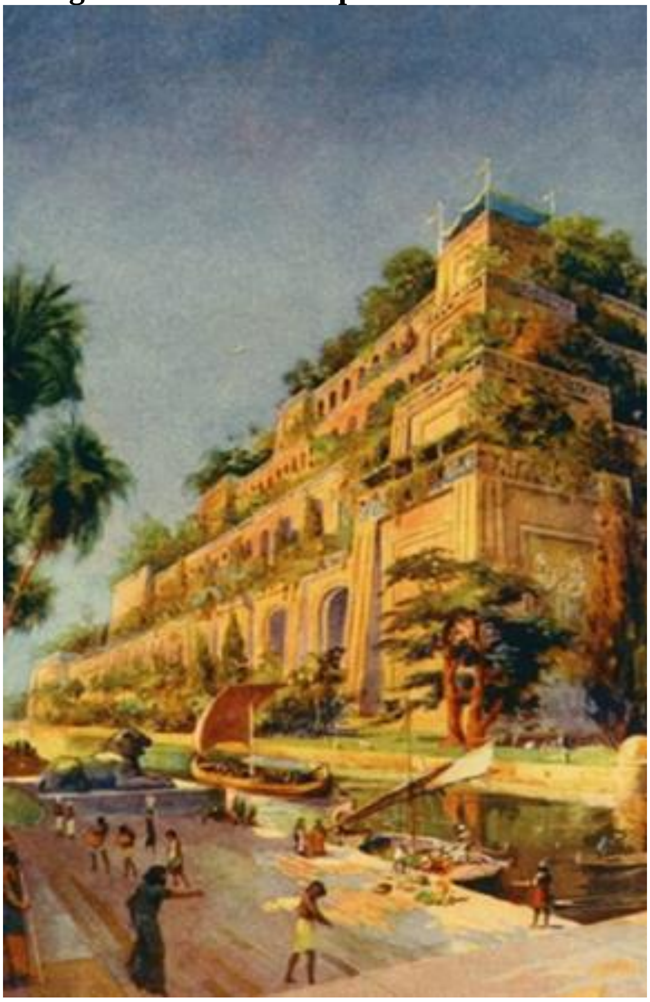
Problemas de medidas sobre volumes e áreas das figuras planas e dos sólidos mais familiares, foram, em sua maioria, trabalhados corretamente pelos egípcios que calculavam com precisão áreas de retângulos, triângulos e trapézios isósceles, provavelmente pelo método de decomposição e recomposição de figuras.

Os Babilônios viveram na Mesopotâmia, uma das primeiras civilizações que ocupou essa terra após os Sumérios. Tratava-se de uma civilização avançada, que construía cidades

espaço físico. (A.I. FETISSOV – A demonstração em Geometria, tradução: Hygino H. Domingues, São Paulo, 1994).

com arquiteturas sobrepostas e dispunha de um sistema de irrigação muito eficaz. Devido às necessidades de cavar canais para transporte de mercadorias e exércitos, os Babilônios desenvolveram-se muito bem na Geometria que estava intimamente relacionada às medições.

Figura 2 - Jardins suspensos da Babilônia



Fonte: (JARDINS..., 2016).

De acordo com Eves (2011), de numerosos exemplos concretos infere-se que os babilônios do período 2000 a 1600 a.C., deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal.

São muito diferentes as histórias políticas do Egito e da Babilônia. Esta última era aberta a invasões de povos vizinhos e, como consequência, havia períodos de muita turbulência em que um império sucedia a outro. O Egito antigo, ao contrário, manteve-se em isolamento, protegido naturalmente de invasões estrangeiras, governado pacífica e ininterruptamente por uma sucessão de dinastias. Ambos eram sociedades essencialmente teocráticas governadas por burocratas ricos e poderosos, íntimos da classe sacerdotal.

Ao contrário dos egípcios e babilônios que utilizavam de um conhecimento geométrico aparentemente empírico e indutivo que tinham os sentidos e a experiência como critério de verdade, os gregos, buscavam a "razão" como critério. Tanto no Egito como na Mesopotâmia, era a classe sacerdotal a detentora do conhecimento. Era função dos sacerdotes interpretar a vontade dos deuses. Entretanto, quando tal conhecimento chegou à Grécia, não encontrou ali uma classe sacerdotal.

> Foi provavelmente graças aos Aqueus que os gregos nunca tiveram uma classe sacerdotal, e isso pode bem ter tido algo a ver com o aparecimento da ciência livre entre eles. Além disso, a visão tradicional de mundo e as costumeiras regras de vida tinham colapsado. (BURNET, 2010, p. 4).

Essa mudança de pensamento, que mostra uma divergência entre ciência e senso comum, levou os Gregos a perceberam que o método experimental e indutivo não era tão satisfatório assim para a matemática em geral. Tais considerações demonstram que os povos daquela época já possuíam uma nova concepção da matemática como ciência, utilizando pela primeira vez demonstrações em Geometria.

De acordo com Eudemo[3], os primeiros traços de dedução lógica em geometria teriam surgido na Grécia, com Tales de Mileto [624 a.C – 558 a.C], na segunda metade do século VI a.C., atribuindo-lhe o teorema de que: "Qualquer ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto". Não se sabe ao certo a veracidade dessa afirmação, pois o que se sabe sobre Tales veio de resumos posteriores; mas o que se pode afirmar, é que, com ele a geometria teria começado a perder o caráter experimental e indutivo.

A primeira tentativa de organizar logicamente a geometria num sistema dedutivo único, a partir de umas poucas noções básicas teria sido feita por Hipócrates de Quio, no século V a.C. Porém, foi com o matemático grego Euclides de Alexandria, por volta do século III a.C., que a geometria dedutiva teria alcançado seu ápice. Euclides modificou a geometria instituindo a ela uma base lógica bem definida através de conceitos geométricos de um alto nível de abstração e complexidade que devido a sua aplicabilidade na álgebra e no cálculo, mudaram completamente a forma de se pensar a geometria.

---

[3] Eudemo de Rodes (século III a. C.) foi um discípulo de Aristóteles que viveu por volta de 320 a.C. e que escreveu uma parte da história da matemática, porém, essa obra se perdeu, mas antes de desaparecer alguém escreveu um resumo dela e mais tarde informações contidas nele foram utilizadas por Proclus a fim de propagar a geometria Grega. (GAZZIRE, 2000, p. 60).

Figura 3 - Iluminura do século XVII em uma tradução latina dos Elementos de Euclides atribuída a Abelardo de Bath personificação da geometria

Fonte: (ILUMINURA..., 2016).

Começando com cinco postulados e alguns axiomas, considerados incontestavelmente verdadeiros, Euclides buscou demonstrar um grande número de proposições. Enquanto apresentava a geometria, ensinava aspectos essenciais da matemática, mostrando como a abstração trabalhava e impunha a apresentação estritamente dedutiva de uma teoria.

Até o início do século XIX, se houve um ramo do conhecimento que tenha sido considerado a apoteose da verdade e certeza, esse ramo era a Geometria Euclidiana. Embasada na busca pela verdade que fundamentaria o pensamento científico e a certeza da existência do universo, grande número de definições, axiomas e postulados que figuram nos Elementos de Euclides são atribuídos à Escola de Platão: "um dos poderes maiores do pensamento cientifico é a habilidade de desenvolver verdades que são visíveis somente aos olhos da mente e de desenvolver modos e meios de lidar com elas". (PLATÃO, 2000, p. 37)

A maioria dos cientistas, apesar de compreender a nítida distinção entre o mundo platônico ideal de formas matemáticas e a realidade física, considerava os objetos da geometria euclidiana simplesmente abstrações destiladas de suas contrapartidas físicas e reais.

O filósofo holandês Spinoza [1632-1677], em sua obra intitulada: *Ética, demonstrada na ordem Geométrica*[4], faz uma tentativa de unificar ciência, religião, ética e razão com base nos fundamentos da geometria euclidiana.

---

[4] *Ética, demonstrada na ordem Geométrica*: obra publicada em 1677 dividida em cinco partes: ***I -Sobre Deus; II-Sobre a Natureza e a origem da mente; III -Sobre a origem e a Natureza dos Afetos; IV- Sobre a Servidão Humana e V -Sobre a Liberdade Humana***, foi marcadamente polêmica pela sua forma de demonstrar os assuntos a partir de uma alusão ao postulados, axiomas e teoremas da geometria euclidiana. (FRAGOSO, 2012).

Para o empirista David Hume [1711-1776], a geometria euclidiana era tão sólida que em sua obra: Investigações sobre o entendimento humano classificou dois tipos de verdades: “Relações de Ideias e Questões de Fato”. Nesse sentido, “Relações de Ideias” constituía toda afirmação que fosse intuitiva ou demonstrativamente certa ou proposições que poderiam ser descobertas pela mera operação do pensamento, sem dependência de que exista em qualquer lugar do universo. Seriam verdades que reteriam para sempre sua certeza e evidência, assim como as verdades demonstradas por Euclides.

As “Questões de Fato”, seriam verdades que apenas para serem demonstradas necessitariam de uma contradição, pois, são claras por si mesmas. Como por exemplo, considere a proposição: “O Sol não nascerá amanhã”. Essa proposição apenas é demonstrada por sua contradição, ou seja, “O Sol nascerá amanhã”. Dessa forma, para Hume (1973), a geometria euclidiana representava a única descrição precisa do espaço físico.

Para o filósofo alemão Immanuel Kant [1724-1804], os Fundamentos da Geometria Euclidiana exaltavam uma certeza absoluta e uma validade inquestionável. Em sua obra “Crítica da Razão Pura”, Kant (2001) distinguiu dois tipos de conhecimento humano a priori: o analítico, que sabemos ser verdadeiro pela análise lógica, e o sintético, representado por nossas intuições de tempo e espaço. Nosso conhecimento de tempo seria sistematizado na aritmética, que seria embasado na intuição de sucessões, e o nosso conhecimento do espaço seria sistematizado na geometria.

Segundo Kant (2001) nossos sentidos não poderiam fazer seu trabalho sem ordenar suas percepções na estrutura de espaço e tempo. Nosso conhecimento sobre o mundo externo dependeria principalmente das informações obtidas pela visão. Kant (2001) deu à mente a função ativa de construir ou processar o universo percebido de acordo com a Geometria Euclidiana.

Até meados do século XV, as ideias de Euclides permaneciam incontestáveis. Embora ninguém duvidasse da veracidade dessas sentenças, ocorria uma insatisfação pelos matemáticos da época em relação ao seu quinto postulado, conhecido como “*Postulado das Paralelas*[5]”. Ele não tinha a simplicidade dos demais axiomas, o que acarretou várias tentativas fracassadas de demonstrá-lo a partir dos outros quatro axiomas.

Ao longo desse século algumas questões começaram a ser levantadas sobre os axiomas de Euclides, “e se esses não forem mesmo verdadeiramente auto evidentes? E se ao invés forem

[5] Postulado das Retas Paralelas – “E, no caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no qual estão os menores do que dois retos. (Os Elementos/Euclides, 2009, p. 98).

baseados na experiência? A relação entre a geometria e sua natureza demonstrativa tornou-se particularmente diferente, pois, o esquema dedutivo cuidadosamente construído, subitamente tornou-se refutável, ou seja, questionável.

O fato de poder ser possível escolher outro axioma e obter uma descrição tão válida quanto a inicial, revolucionou todo o conceito da geometria demonstrativa. Surgiram então, várias possibilidades de se construírem novos sistemas geométricos a partir da rejeição desse quinto postulado. No final do século XIX, novas geometrias foram construídas a partir da escolha de um axioma diferente do quinto de Euclides. Geometrias essas, tão precisas quanto a euclidiana, na capacidade de descrever o espaço físico.

Dentre os matemáticos que mais se destacaram nessas novas descobertas, estão: o padre jesuíta Girolamo Saccheri [1667-1733], que investigou a possibilidade de substituir o quinto postulado por uma sentença diferente; os alemães Georg Klugel [1739–1812] e Jhohann Heinrich Lambert [1728-1777], que provou que o π é incomensurável acrescentando isso às suas pesquisas em geometrias não euclidianas.

Gauss [1777-1855] também pensou consideravelmente sobre a existência de Geometrias não Euclidianas. Temia, porém que a geometria radicalmente nova, fosse considerada uma heresia pelos filósofos da época. Todavia não publicou nenhum dos resultados de seus trabalhos a respeito do assunto. Em anotações de abril de 1817, ele afirmou: “[...] estou cada vez mais me convencendo que a inevitabilidade de nossa geometria não pode ser demonstrada” (GAUSS apud LÍVIO, 2011, p. 239)

Figura 4 - Carl Friedrich Gauss

Fonte: (LÍVIO, 2011).

O primeiro matemático a publicar um estudo inteiro sobre a existência de outras geometrias foi o russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky [1792-1856], que apresentou uma geometria definida em uma superfície com um formato de uma sela curva, atualmente conhecida como *Geometria Hiperbólica*[6]. A geometria hiperbólica atingiu o mundo da matemática muito rápido e diversos trabalhos foram apresentados a partir desse.

A percepção de que a geometria euclidiana não seria mais a única e infalível descrição do espaço, causou um grande tumulto no mundo da matemática. Em 1854, o matemático Bernhard Riemann mostrou que a geometria hiperbólica também não seria a única geometria não euclidiana possível. Entre as teorias geométricas possíveis, Riemann discutiu a *Geometria Elíptica*[7], mostrando que a distância mais curta entre dois pontos não seria uma linha reta.

Para o matemático francês Henri Poincaré [1854-1912], os geômetras do século XIX desenvolveram uma intuição nas geometrias não euclidianas e aprenderam a visualizar o mundo ao longo dessas linhas. “Não são nem intuições sintéticas a priori nem fatos experimentais. São convenções. Nossa escolha entre todas as convenções possíveis é guiada por fatos experimentais, mas ela permanece livre.” (POINCARÉ, 2012, p. 44)

Os argumentos de Poincaré [1907] (2012) mostravam que cada objeto da geometria deveria ser precisamente localizado de acordo com o seu ponto correspondente. Para ele, seja na geometria euclidiana ou na geometria não euclidiana, “o conhecimento sempre gozaria das mesmas propriedades em relação ao mundo que ele habita” (POINCARÉ, 2012, p.44). Assim, a natureza das ideias são correspondentes à sua época. Euclides, por exemplo, edificou uma estrutura cientifica na qual seus contemporâneos não podiam colocar defeito, porém, com o passar dos tempos, as ideias mudaram.

Os rumos tomados pela geometria no século XIX levaram rapidamente ao reconhecimento das deficiências da geometria clássica nas aplicações matemáticas. Por muito tempo os objetos de que se ocupavam os matemáticos eram em sua maioria mal definidos; julgavam conhecê-los, porque os representavam com os sentidos ou com a imaginação, mas deles só tinham uma imagem grosseira, não uma ideia precisa sobre a qual o raciocínio pudesse atuar.

---

[6] Geometria Hiperbólica - Nesse tipo de Geometria, o quinto postulado de Euclides é substituído pela sentença que: Dados uma linha reta num plano e um ponto fora não pertencente a essa linha, existem pelo menos duas linhas através do ponto paralelas à linha dada. Outra diferença entre as duas geometrias está na propriedade dada a soma dos ângulos internos de um triângulo: para Euclides, a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre somam 180°, já na Geometria Hiperbólica, essa soma é sempre menor que 180°.

[7] Geometria é encontrada na superfície de uma esfera. Nota-se que em tal geometria, a distância mais curta entre dois pontos não é uma linha reta, mas sim um segmento de um grande círculo, cujo centro coincide com o centro da esfera. Riemann levou os conceitos não euclidianos a um passo adiante e introduziu geometrias em espaços curvos de três, quatro e até mais dimensões.

Com as mudanças ocorridas, os matemáticos foram forçados a examinar seriamente os fundamentos da matemática, principalmente àqueles que a relacionavam ao sistema lógico formal. Alguns adotaram uma abordagem pragmática com relação à validade dos fundamentos da geometria, outros decepcionados com a vulnerabilidade desses, voltaram-se à aritmética e foi nessa direção, que a geometria analítica de Descartes aflorou, fornecendo exatamente as ferramentas necessárias para fundamentar a matemática com base nos números.

A matemática “aritmetizou-se”. A relação entre a matemática e o mundo físico ganhou força com a matematização das ciências. No final do século XIX, a introdução de espaços não geométricos abstratos e da noção de infinito, ajudaram a aproximar ainda mais a matemática da realidade física. Novas linguagens foram aparecendo e com elas outras geometrias foram desenvolvidas.

> Um grande benefício que o estudo não euclidiano trouxe para a geometria foi a certeza de que é possível criar Geometrias diferentes e que, com a procura adequada, é possível encontrar um modelo físico para esta geometria que surgiu. Essa certeza de que é possível criar geometrias diferentes e de que é possível encontrar um modelo físico para elas (o que não significa necessariamente construir matérias concretos), terá, no futuro uma ressonância profunda no ensino das Matemáticas. (GAZIRE, 2000, p. 137).

Não há dúvida que a visão formalista da matemática prevaleceu durante muito tempo. O exame dos fundamentos e da estrutura lógica da mesma constitui grande parte do trabalho desenvolvido nessa ciência no século XX. Muitos dos conceitos básicos da matemática passaram por evoluções e generalizações notáveis e áreas de importância fundamental, como a teoria dos conjuntos, a álgebra abstrata e a topologia se desenvolveram enormemente. Um fato bastante curioso é que como grande parte da matemática, a maioria dessas considerações modernas têm suas raízes no trabalho dos gregos antigos, muito em particular nos Elementos de Euclides.

Com os reflexos das transformações que a própria Matemática vinha sofrendo, duas de suas características principais do século XX, a ênfase na abstração e a preocupação crescente com a análise das estruturas e modelos subjacentes, chamaram a atenção dos interessados em ensino da matemática. Dessa forma, em meados do século XX vários destes interessados, entenderam que seria oportuno adaptar tais características ao ensino e, não demorou, formaram-se grupos competentes e entusiastas empenhados em reformular e “modernizar” a matemática escolar. Nascia a Matemática Moderna, movimento esse, que teve influência direta no ensino de Geometria.

Se antes, no ensino, havia certa uniformidade nas abordagens da Geometria, por via do método axiomático euclidiano, com a Matemática Moderna essas abordagens começaram a apresentar mais distinções em relação aos padrões tradicionalmente aceitos. Esses reflexos começaram a ser percebidos nos livros didáticos. Alguns autores procuraram algebrizá-la com intuito de torná-la mais eficaz quanto às generalizações.

Assim como ocorre frequentemente com as ideias novas, houve uma tendência entre os mais arrebatados a aplicar os princípios da nova abordagem mesmo a situações em que não ajudavam a simplificar ou tornar mais claras as coisas.

Tendo em vista o ensino elementar, essa abordagem tornou-se inadequada para o estudo inicial de geometria, levando certos pedagogos a expressar uma enorme preocupação de que com o empenho em enfatizar o "porquê", o "como" teria sido deixado para trás.

> [...]Na verdade, a ideia de levar a escola elementar um assunto tão complexo não tem cabimento nem do ponto de vista matemático, muito menos ainda quando ao aspecto de aprendizagem. Isso porque impõe uma formulação geométrica, que é sofisticada, resultado de longa manipulação técnica formal, encobrindo toda raiz intuitiva inicial do assunto. A distância entre essa iniciação e o produto formal é tão grande que impede qualquer ligação na mente do aluno. (GAZIRE, 2000, p. 135).

O ensino de geometria passou então a ser o terror dos professores. Perdidos no meio das controvérsias que giravam em torno do método axiomático euclidiano e na impossibilidade de adaptação da Álgebra, muitos relegaram seu ensino a um segundo plano. Nas raras ocasiões em que a geometria era trabalhada em sala de aula, de acordo com Imenes (1987), constatava-se que o caminho adotado pelos professores não era "nenhum dos anteriores"; tratava-se de uma abordagem "despersonalizada, sem uma linha definida".

Diversos professores pararam realmente de apresentar e incentivar os alunos a fazer quaisquer demonstrações. O pretexto preferido para justificar tal atitude era de que "não daria tempo nem de ensinar Geometria quanto menos demonstrar teoremas". Outros justificavam a ausência desse ensino, dizendo que "a matemática ensinada deveria ser prática e que os alunos não iriam aprender tal conteúdo devido ao nível do ensino estar cada vez pior". Entretanto, quando trabalhada, observavam-se graves falhas em sua abordagem.

Atualmente, de acordo com Gazire (2000), a geometria continua ausente na maioria das salas de aula e está ausência é sem dúvida seu problema principal. A redução radical do seu ensino tem um preço muito alto para a educação: pois, a geometria que se originou de simples observações provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas e comparar formas e tamanhos, logo passou a ser científica ou experimental. Evoluindo para um estágio mais elevado tornando-se geometria demonstrativa, revela-se parte substancial do desenvolvimento da matemática como ciência e principalmente como base do desenvolvimento do pensamento racional humano.

A história nos mostra como a geometria se tornou não apenas a linguagem da natureza, mas também a linguagem do pensamento humano. Deixar seu ensino de lado é deixar de revelar linhas futuras no desenvolvimento da matemática e da humanidade.

2.1 A Construção do Pensamento Geométrico: da intuição à lógica dedutiva

> Assim começou, portanto, todo o conhecimento humano, com intuições, passando daqui a noções e acabando com ideias. (KANT, 2001, p.34).

Desde os tempos mais antigos, os indivíduos relacionam os acontecimentos de determinados fatos à sua intuição. Exprimem sentimentos e opiniões individuais e de grupos, variando de acordo com as condições por eles vivenciadas. Agrupam ou distinguem as coisas e fatos, de forma intuitiva através das semelhanças ou diferenças perceptíveis.

De acordo com o dicionário Aurélio (2010) a palavra **intuição** significa: 1-persepção instintiva; 2- conhecimento imediato; 3- pressentimento da verdade. A filosofia a define como forma de contato direto ou imediato da mente com o real, capaz de captar sua essência de modo evidente, mas não necessitando de demonstrações. Assim, para a filosofia, o termo intuição serve tanto para as interpretações do senso comum, quanto para o desenvolvimento do pensamento intelectual.

Na história da filosofia, segundo Chauí (2000), os dois exemplos mais célebres de intuição intelectual encontram-se em Platão [século IV a.C.] e em Descartes [século XVII].

Na narrativa do *Mito da Caverna*[8], Platão [século IV a.C.] conta o que se passa com um prisioneiro que, ao sair da escuridão da caverna, vê a luz do Sol e, em lugar de sombras, vê as próprias coisas. Nessa passagem, Platão [século IV a.C.] compara o prisioneiro ao filósofo que ao fazer o percurso do conhecimento, vê a luz do "Bem" e contempla as ideias verdadeiras.

O prisioneiro tem uma intuição empírica, pois tudo que conhece, conhece por sensação ou por percepção sensorial. O filósofo, por sua vez, tem uma intuição intelectual, pois, é seu intelecto ou sua inteligência que conhece as ideias verdadeiras. No entanto, o conhecimento de ambos é intuitivo porque é direto, imediato, sem necessidade de demonstrações, argumentos e provas.

---

[8] O Mito da Caverna, também conhecido como "Alegoria da Caverna" é uma passagem do livro "A República" do filósofo grego Platão. (A República; São Paulo: Nova Cultura, 2000. 352 pag. Tradução de Enrico Corvisiere).

O filósofo francês Descartes [século XVII] em sua obra intitulada *Discurso do Método*[9] que ficou conhecida como *Cogito Cartesiano*: "*Cogito, ergo sum*", (Penso, logo existo), descreve a intuição intelectual como um conhecimento intuitivo. Segundo o autor, "quando penso, sei que estou pensando e não preciso dessa forma, provar ou demonstrar isso" (DESCARTES, 2001, p. 17). Trata-se de intuição intelectual por ser realizada exclusivamente pelo intelecto ou pela inteligência que capta em um único ato a verdade do pensamento.

Na concepção de ambos, a intuição é uma compreensão completa ou imediata de um objeto, de um fato. Nela, a razão capta todas as relações que constituem a realidade e a verdade do objeto intuído. É um ato intelectual de discernimento e compreensão, sem necessidade de provas ou demonstração para saber o que se conhece.

Na Crítica da razão Pura, para Kant (2001), a intuição é uma forma "*a priori"* da sensibilidade, constituindo com o entendimento as condições de possibilidade do conhecimento. Assim, são duas as intuições: de espaço e de tempo relacionadas por Kant (2001) à Geometria Euclidiana. Espaço e tempo constituem o caminho verdadeiro para o processamento e a conceitualização de uma "coisa" possibilitando a unificação do sensível e a recepção das percepções. Segundo Kant (2001), "não podemos pensar em algo que não esteja nem no espaço, nem no tempo: os pensamentos sem conteúdo são vazios, as intuições sem conceitos são cegas" (Kant, 2001, p.89).

A intuição pode depender de conhecimentos anteriores e ocorre quando esses são percebidos de uma só vez, numa síntese em que aparecem articulados e organizados num todo: em sua forma, seu conteúdo, suas causas, suas propriedades, seus efeitos e suas relações com os outros.

No que diz respeito aos pensamentos filosóficos, a intuição pode ser o ponto de chegada, a conclusão de um processo de conhecimento, mas também pode ser o ponto de partida desse mesmo processo. Nesses dois casos, o processo cognitivo constitui a razão discursiva ou o raciocínio.

Ao contrário da intuição, o raciocínio é o conhecimento que exige provas e demonstrações das verdades conhecidas ou investigadas. Não é apenas um ato intelectual, mas sim vários atos intelectuais conectados com o objetivo de formar todo um processo de conhecimento. Trata-se de um exame de vários sinais que permitem a um indivíduo fazer inferências, ou seja, tirar conclusões com base em algum objeto do seu conhecimento ou em dados já conhecidos.

---

[9] O Discurso do Método – "Penso, logo existo": tal proposição resume o espirito de René Descartes (1596-1650), sábio francês, cujo O Discurso do Método inaugurou a filosofia moderna.

De acordo com a corrente do pensamento estruturalista, cada campo do conhecimento tem seu método próprio de estruturar o raciocínio. Por exemplo, quando o raciocínio é construído, seja por critérios de generalidade ou universalidade, tem-se a dedução.

A dedução é um método de estruturação do pensamento que Husserl [1859 – 1938] relaciona à matemática. Segundo ele, a dedução consiste em partir de uma verdade já conhecida e que funciona como um princípio geral ao qual se subordinam todos os casos que serão demonstrados a partir dela. Assim, permite que cada novo caso particular seja conhecido, demonstrando que a ele se aplicam todas as leis, regras e verdades da teoria.

De acordo com Chauí (1995), nossa ideia de verdade foi construída ao longo dos séculos a partir de três concepções diferentes: da linguagem grega (*aletheia)* – nessa concepção a verdade é uma qualidade das próprias "coisas", ou seja, a verdade está naquilo que pode ser visto e o conhecimento verdadeiro é a percepção intelectual ou racional dessa verdade; da linguagem latina (*veritas)* – concepção que se refere à precisão, ao rigor e a exatidão, assim, o critério da verdade é dado pela validade lógica de seus argumentos e da linguagem hebraica (*emunah)* – nessa concepção, a verdade é uma crença fundada na esperança e na confiança de algo que vai acontecer. Nesse caso, considera-se que a verdade depende de um acordo ou de um conjunto de convenções universais que devem ser respeitadas por todos, ou seja, um consenso.

O que se pretende através do raciocínio dedutivo é alcançar a verdade lógica de uma proposição, ou seja, dispor da "demonstração" desse raciocínio, partindo de argumentos já provados. A demonstração de uma proposição é algo que tem um significado bem determinado: saber se tal proposição é verdadeira. "A demonstração é uma cadeia de definições, já que a explicação de uma palavra é a sua definição e a explicação de uma proposição que consiste em um conjunto de definições, é igual a sua demonstração". (LEIBNIZ, 1686 apud MARK, p. 79-267, 2013).

De acordo com Aristóteles [384 a.C – 322 a.C] no livro *Segundos Analíticos*, "o conhecimento demonstrativo deve descansar em verdades básicas necessárias (razão), porque o objeto do conhecimento científico não pode ser distinto do que é" (ARISTÓTELES, 2004, p.74). Nesse aspecto, a demonstração é um método racional de conhecimento que deve ser rigoroso e tal rigor depende das "premissas" que são o ponto de partida de todo argumento.

O conhecimento racional constitui uma verdade necessária encontrada através de sua "decomposição" em ideias e verdades cada vez mais simples, até alcançar uma verdade primitiva (princípio). Assim, qualquer fato ou enunciado deve ter uma "razão" ou uma causa determinante para existir. Essas verdades elementares, que radicam a razão suficiente, são as

Definições, os Axiomas e os Postulados: "princípios primitivos e evidentes" que não necessitam de provas ou demonstrações.

O pensamento lógico ou racional opera de acordo com os *Princípios da Identidade,* da *Não Contradição,* do *Terceiro Excluído*, da *Razão Suficiente* e da *Causalidade* que distinguem verdades de fato e verdades de razão; diferenciam intuição e dedução considerando o conhecimento verdadeiro como o conhecimento de suas causas.

Para Kant (2001), o conhecimento humano distingue-se em dois tipos: "analítico", quando julgamos ser verdadeira determinada proposição por sua análise lógica e "sintético" que está relacionado às nossas percepções de espaço e tempo.

Segundo Kant (2001), essa percepção (espaço e tempo), ou seja, a geometria "pode ser perfeitamente compreendida se a tomamos em seu conjunto", não parcialmente e sim como uma introdução para um desenvolvimento superior. "Ela leva o homem à verdadeira compreensão do universo". Para Aristóteles (2004): "um instrumento para o conhecer".

> O que é suscetível de investigação é igual em número a tudo quanto conhecemos. Investigamos quatro coisas: o 'que', o 'por que', 'se é', 'o que é'. Pois, quando investigamos *se isto* ou *aquilo* (considerando-o como uma multiplicidade), por exemplo, se o Sol se eclipsa ou não, investigamos o *que.* Eis um sinal disso: tendo descoberto que se eclipsa, detemo-nos; e se desde o início sabemos *que* se eclipsa, não investigamos *se* se eclipsa. Por outro lado, quando conhecemos o '*que*', investigamos o '*por que*', por exemplo, sabendo que se eclipsa, ou que a Terra se move, investigamos o *por que* se eclipsa ou *por que* se move. Estas coisas, as investigamos assim, mas investigamos outras de um modo diverso, por exemplo, *se é ou não é o caso* centauro ou deus; e quero dizer 'se é ou não é' simplesmente sem mais, mas não 'se é branco ou não'. Sabendo *que é o caso*, investigamos *o que é*, por exemplo, *o que é* deus, ou *o que é* homem [*Segundos Analíticos* II 1, 89b 23-36].

Os seres humanos sempre foram movidos por um grande desejo de entender o mundo que os cerca. Seus esforços para encontrar bem a fundo o significado de todas as coisas estão relacionados à necessidade de buscar melhorias para sua sobrevivência e as razões que fundamentam a complexidade percebida de todo o universo estão relacionadas ao conhecimento. Nossos conhecimentos começam com as experiências vividas e nossas percepções acerca do universo estão relacionadas à maneira pela qual associamos o mundo percebido às nossas ideias.

Sabe-se que o conhecimento geométrico não nasceu de um sistema constituído de Teoremas demonstrados por raciocínios lógicos a partir de alguns princípios básicos. A produção do conhecimento nesse ramo da matemática aponta que suas utilidades práticas estão relacionadas a algumas necessidades da vida humana. A existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da geometria.

Segundo Rooney (2012), os primeiros contatos humanos com a Geometria são anteriores aos sistemas de números escritos: “[...] muitos povos antigos deixaram evidências de seu interesse por padrões repetidos, simetrias e formas na forma de padrões geométricos decorando seus objetos, estruturas e residências”. (ROONEY, 2012, p.73).

O homem neolítico, por exemplo, em seus desenhos e figuras nos mostra uma preocupação com as relações espaciais. Seus potes, tecidos e cestas apontam uma noção bastante relevante de simetria e congruência. Para Fetissov (1994), a primeira noção geométrica a se desenvolver nas civilizações foi a noção de distância, questão que certamente envolve a “ideia” de linha reta. Em seguida a noção de forma circular e a diferença entre “um e muitos”.

Com o nascimento das primeiras sociedades e o surgimento da agricultura que proporcionava aos homens uma existência sedentária (habitação fixa), outras manifestações geométricas são percebidas no desenvolvimento das civilizações, entre elas, capacidades de medir distâncias, áreas, volumes e tempo.

Documentos de aproximadamente 3100 a.C. revelam que os egípcios e babilônios já possuíam algumas regras matemáticas para medir recipientes de armazenamento, medir extensões de terrenos e planejar construções. Segundo Boyer (1996), a regra egípcia para achar a área do círculo tem sido considerada um dos maiores sucessos da época:

> No problema Geométrico número 50, o escriba *Ahames*[10] assume que a área de um campo circular com diâmetro de nove unidades é a mesma de um quadrado com lado oito unidades. Comparando com a fórmula moderna $A = \pi r^2$vemos que a regra egípcia equivale a atribuir a π o valor 3 1/6 é uma aproximação bastante elogiável[...] (BOYER, 1996, p. 12).

Para Boyer (1996), essa observação representa uma relação geométrica muito mais precisa e matematicamente significativa do que uma aproximação relativamente boa para o π. “O que importa aqui é a percepção das inter-relações entre as figuras geométricas” (BOYER, 1996, p. 12).

Relacionar entre si observações geométricas que, não obstante particulares tinham em comum algumas propriedades, era dessa forma, uma metodologia empregada pelos egípcios, que se embasavam em procedimentos empíricos (sem justificativas ou demonstrações) para desenvolver um pensamento geométrico. Mas ainda que essas culturas tenham produzido uma geometria reconhecível, faltava-lhe o caráter sistemático, rigoroso, puro, ou seja, não empírico.

[10] Muitas de nossas informações sobre a matemática egípcia vem do Papiro de Rhind ou de Ahmes, o mais extenso documento matemático do Antigo Egito. Com cerca de 0,30m de altura e 5m de comprimento é assim conhecido em honra ao escriba que o copiou por volta de 1650 a.C. Hoje esse documento pertence ao British Museum (exceto uns poucos fragmentos que estão no Brookliyn Museum. (Fonte: Carl B. Boyer – 1996).

Aos poucos, foram surgindo algumas leis geométricas pelas quais o homem passava a guiar-se em questões cuja natureza se adequava a elas. O saber geométrico, passa de uma coleção de noções desconexas sobre o espaço físico para uma fase de maior abstração, denominada por Fetissov (1994) como “Geometria Científica”.

O nome geometria científica para essa fase de construção do saber geométrico, justifica-se pelo fato da metodologia empregada (observações, ensaios e erro) ser um procedimento empírico e lembrar o método científico indutivo.

Para muitos, o nome do matemático francês, cientista e filósofo René Descartes [1596 – 1650] é sinônimo do nascimento da idade moderna na filosofia científica. Em lugar dos sentimentos, cores, cheiros e sensações, *Descartes* [1596 – 1650] quis que explicações científicas sondassem o micro nível bem fundamental e utilizassem a linguagem da matemática. “Não reconheço nenhuma matéria nas coisas corpóreas que não aquela que os geômetras chamam quantidade e tomam como objeto de suas demonstrações.” (DESCARTES, 2001, parte II, p. 19)

Descartes (2001) propõe uma instrumentalização da natureza. A explicação matemática e racional dos fenômenos e das coisas é a sua mecanização: tudo passa a ser entendido em razão das partes que o compõe. Para se compreender o todo basta compreender as partes.

O método científico proposto por Descartes [1596 – 1650] e que predominou até o final do século XIX e o início do século XX, ficou conhecido como “Determinismo Mecanicista” e se resume aos seguintes princípios: o conhecimento é o resultado da captura de verdades por um sujeito sobre um objeto; o sujeito percebe o objeto a partir de exercícios sensitivos e racionais que devem ser organizados de forma metodológica a fim de se obter o conhecimento verdadeiro, o objeto é separado do observador; conhecer o objeto é igual a dominá-lo; para conhecer o todo basta conhecer as partes.

O método cartesiano, nesse sentido, implica em uma simplificação onde o objetivo é encontrar a lei universal que explique todas as coisas. O mundo pode ser expresso por meio de equações matemáticas; o mundo deve ser compreendido, dominado e modificado em favor do homem.

Os argumentos indutivos criam um exercício para o pensar em que o caminho é percorrido a partir de observações particulares do objeto investigado, tomadas a priori como verdadeiras em busca de uma generalização conceitual da verdade observada.

Assim, os conceitos tornam-se necessários e o conhecimento a respeito de um determinado objeto torna-se mais preciso. Os homens aumentam seus esforços para compreender a fundo o significado de todas as coisas. Passam a buscar padrões que fundamentem a complexidade percebida do universo.

Nesse momento, a matemática dos antigos gregos mostra-se bastante modificada em conteúdos e métodos. Novas ciências surgem e a geometria se desenvolve consideravelmente. De maneira intencional, são elaboradas organizações estruturais que sustentam a compreensão das experiências vividas, permitindo que esses atos sejam formalizados e categorizados de uma maneira um pouco mais complexa.

Segundo Bicudo,

> Os modos de objetivação científica que tecem as camadas da construção do conhecimento geométrico estão nuclearmente ligados aos modos de eles próprios serem expressos. Significa que o percebido vai sendo construído como objetividade em concomitância com os modos linguísticos que os expressam, e vice-versa. (BICUDO, 2010, p. 142)

Procedimentos eminentemente matemáticos, como definir e demonstrar, elevam o conhecimento a um caráter mais geral e surge uma geometria com uma perspectiva mais reflexiva. É nesse âmbito que o conhecimento geométrico passa para uma fase de maior distinção entre as propriedades comuns dos objetos.

O conhecimento científico procura ir além do fato observado, buscando na razão um caminho para explicar a ocorrência de fenômenos particulares que não obstante entre si possuam características comuns a outros fenômenos observados.

Segundo o *Sumário Eudemiano*[11] a primeira tentativa de organizar logicamente a geometria em um sistema dedutivo único, a partir de umas poucas noções básicas e definições iniciais, teria sido feita por Hipócrates de Quio, no século V a.C. Porém, foi Euclides [século III a.C] com o livro *Os Elementos*[12], que mais se destacou nesse sentido. Euclides partia do pressuposto de que os conceitos básicos de seu discurso dedutivo já eram conhecidos intuitivamente.

O exercício do pensamento geométrico pela razão cria uma operação na qual o conhecimento sobre determinado objeto parte de leis universais, que supostas constituem as premissas do pensamento racional e quando deduzidas, chegam à conclusão. A essa fase do

---

[11] Nossa principal fonte de informações a respeito dos passos iniciais da matemática grega é o chamado Sumário Eudemiano de Proclo, do século V d. C. (BOYER, 1996).

[12] Os Elementos - obra de Euclides, escrita em torno de 300 a. C é composta de 13 livros ou capítulos e reúne os conhecimentos de geometria, álgebra e aritmética. Para os gregos um discurso lógico era "uma sequência de afirmações obtidas por raciocínio dedutivo a partir de um conjunto aceito de afirmações iniciais", que deveriam ser explicitadas (Eves,1992 p.9).

pensamento geométrico, Fetissov (1994) atribui o nome de “Geometria Demonstrativa”. Assim, demonstrar uma proposição significa argumentar pela aceitação de sua validade, a partir da validade de outras proposições já demonstradas.

O que se percebe nesse aspecto, é que a construção do pensamento geométrico parte do estudo das propriedades espaciais (forma, grandezas, posições) do mundo material através do pensamento intuitivo que constitui a atividade prática (experimentação) do homem e leva à descoberta das verdades geométricas (demonstração).

2.2 Provas e Demonstrações na Matemática e na Educação Matemática

> O conhecimento se faz a custo de muitas tentativas e da incidência de muitos feixes de luz, multiplicando os pontos de vista diferentes. A incidência de um único feixe de luz não é suficiente para iluminar um objeto. O resultado dessa experiência só pode ser incompleto e imperfeito, dependendo da perspectiva em que a luz é irradiada e de sua intensidade. A incidência a partir de outros pontos de vista e de outras intensidades luminosas vai dando formas mais definidas ao objeto, vai construindo um objeto que lhe é próprio. A utilização de outras fontes luminosas poderá formar um objeto inteiramente diverso ou indicar dimensão inteiramente nova ao objeto. (LIMOEIRO, 1978, p. 27)

A construção do pensamento humano alicerça-se na experiência cultural e social do homem, que a partir de sua concepção de mundo busca explicações para a realidade na qual está inserido. A construção do pensamento é feita pela leitura daquilo que foi armazenado na memória. Desse armazenamento, o ser humano constrói as suas teorias para explicar experiências realizadas e discutir conceitos a partir de observações e análises, sistematizando, assim, o seu conhecimento.

Pensando na evolução e história da humanidade, pode-se perceber que todo o seu processo de desenvolvimento está fundamentado na edificação do conhecimento humano, que ao longo dos tempos foi transmitido de várias formas às gerações com intuito de melhorar a vida em sociedade.

A construção do conhecimento, no sentido de aprendizagem, tem sido, durante muito tempo, objeto de pesquisa em vários ramos das ciências que, cada vez mais, se ocupam em tentar compreendê-la. Teóricos como Piaget[13] e Vygotsky[14] atribuem o processo de

[13]Piaget - A compreensão dos mecanismos de constituição do conhecimento, na concepção de Piaget, equivale à compreensão dos mecanismos envolvidos na formação do pensamento lógico, matemático. A lógica representa para Piaget a forma final do equilíbrio das ações. (Fonte: O desenvolvimento do pensamento “Equilibração das estruturas cognitivas”. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1977).

[14]Vygotsky - Enfatiza o processo histórico-social e o papel da linguagem no desenvolvimento do indivíduo. Sua questão central é a aquisição de conhecimentos pela interação do sujeito com o meio. Para o teórico, o sujeito é interativo, pois adquire conhecimentos a partir de relações intra e interpessoais e de troca com o meio, a partir de um processo denominado mediação. (Fonte: Pensamento e Linguagem. Rio de Janeiro: Martins Fontes, 1998).

desenvolvimento individual do conhecimento à influência dos meios sociais, histórico e cultural.

Para Piaget [1918] (1977), a aprendizagem tem um enfoque diferente do que normalmente se atribui a esta palavra. Segundo ele, o processo cognitivo inteligente pode ser divido em duas classes: “aprendizagem e desenvolvimento”. A aprendizagem refere-se à aquisição de uma resposta particular, aprendida em função da experiência obtida de forma sistemática ou não.

O desenvolvimento, por sua vez, constitui uma aprendizagem de fato, sendo este o responsável pela formação dos conhecimentos. É pelo desenvolvimento que se reconhece a identidade, formulando-se a estratégia da ação que determinará a atuação do ser e sua interferência no meio; ou seja, seu conhecimento.

Vygotsky [1917] (1998), enfatiza o processo histórico-social e o papel da linguagem no desenvolvimento do indivíduo. Sua questão central é a aquisição de conhecimentos pela interação do sujeito com o meio. O sujeito é interativo, pois adquire conhecimentos a partir de relações intra e interpessoais e de troca com o meio, a partir de um processo denominado mediação. Para que a aprendizagem ocorra a interação social deve acontecer.

Para ambos teóricos, a aprendizagem é o processo pelo qual o indivíduo adquire informações, habilidades, atitudes e valores a partir de seu contato com a realidade, com o meio ambiente e com outras pessoas. A aprendizagem é condição necessária e essencial do desenvolvimento potencial do sujeito e tem influência direta no processo de construção do seu conhecimento.

E nesse processo de construção do conhecimento humano, o saber matemático apresenta-se como ponto de partida, pois reflete seu conhecimento acerca do mundo, explorando questões que permitem ao homem pensar e repensar suas práticas, buscando cada vez mais por um novo conhecimento, que muitas vezes não se faz aplicável à prática cotidiana de sua época, mas que pode se fazer útil e necessário em tempos futuros.

Vincular o saber matemático à aprendizagem constitui papel fundamental de seu ensino, que tem como objetivo principal o contexto social escolar de formar cidadãos capazes de argumentar e fazer inferências de forma crítica diante das situações enfrentadas no dia a dia. Cabe portanto, à escola propiciar aos alunos relações com a informação, a cultura e o desenvolvimento, assegurando-lhes acesso a esse saber, a fim de que possam participar ativamente da vida em sociedade.

Estudos apresentados por Lakatos[15](1978) mostram a dimensão social que uma aula de matemática pode alcançar. Para o pesquisador, a matemática desempenha papel essencial na construção do pensamento humano. Segundo ele, os alunos devem aprendê-la como um "conhecimento social". Os significados aprendidos não devem ser eficientes apenas na resolução de problemas propostos pela escola, mas devem também ser coerentes com os resultados socialmente reconhecidos.

Compreender a Matemática num âmbito social, pensada na perspectiva do desenvolvimento do senso crítico e da capacidade argumentativa do indivíduo é um dos focos principais de estudo da Educação Matemática, que busca atender a determinadas finalidades humanas, como algumas aspirações concretas da prática social que podem se abrir para aspectos psicológicos, cognitivos, sociológicos, históricos e culturais concernentes ao contexto em que as ações educadoras são efetuadas.

Com um pensar reflexivo e sistemático concernente à prática pedagógica da matemática e ao contexto sociocultural no qual ocorrem situações de ensino-aprendizagem da matemática, a Educação Matemática aponta em diversos de seus estudos o resultado das múltiplas relações que se estabelecem entre ensino, aprendizagem e conhecimento matemático.

Para Bicudo (2010), a Educação Matemática apresenta-se como uma área complexa de atuação, pois traz, de modo estrutural, em seu núcleo constitutivo a Matemática e a Educação, cada uma com suas especificidades: a "matemática" com a produção de teorias e suas respectivas possibilidades de aplicações e a "educação" com o ensino dessa produção, de forma que essa seja relevante para a construção do conhecimento humano.

A matemática, ciência derivada do pensamento puro, constitui-se essencialmente em um processo de construção mental. Suas atividades caracterizam-se pela formulação de conjecturas que se validam quando acompanhadas das devidas demonstrações. Isto é, quando o matemático está fazendo matemática, ele está convencido de estar lidando com uma realidade objetiva, cujas propriedades procura demonstrar.

Para o matemático francês *Alain Connes*[16], um matemático em "ação" pode ser comparado a um explorador que se põe a trabalhar com intenção de descobrir o mundo:

---

[15] Imre Lakatos – foi um filósofo da matemática e das ciências de renome internacional, tem normalmente seu nome relacionado aos chamados programas de pesquisa, termo cunhado pelo mesmo para descrever como se dá o avanço das ciências. Neste trabalho, contudo, buscamos abordar a concepção do mesmo frente a sua filosofia da matemática, explorando um pouco seu livro: "A lógica do descobrimento matemático: provas e refutações", livro esse publicado após sua morte e baseado em sua tese de doutorado.

[16] Alain Connes – matemático francês ganhador de dois prêmios de maior prestígio em matemática: a Medalha Fields (1982) e o Prêmio Crafoord (2001).

> [...] Descobrimos fatos básicos por experiência. Ao fazermos cálculos simples, por exemplo, percebemos que uma série de números primos parece continuar sem fim. O trabalho do matemático é demonstrar que existe uma infinidade de números primos. Uma das consequências mais interessantes dessa demonstração, é que, se alguém algum dia alegar ter encontrado o maior número entre todos os primos, será fácil mostrar que ele está errado. (ALAIN CONNES apud LIVIO, 2011, p. 210).

Logo, a linguagem matemática considerada suficientemente clara a respeito do desenvolvimento de uma teoria mostra-se extremamente formal. Os argumentos matemáticos usados na validação de um teorema baseiam-se na complexidade de um raciocínio corretamente estruturado, ou seja, na sua demonstração.

> Um matemático pode, ocasionalmente, usar a observação; pode, por exemplo, medir os ângulos de muitos triângulos e concluir que a soma dos ângulos é sempre 180°. Entretanto, aceitará isso, como uma lei da matemática, somente quando tiver sido demonstrado. (KLEENE, 2002, p.6)

O conceito de demonstração em matemática evoluiu muito ao longo dos tempos. Houve época em que a matemática era **retórica**[17] e não possuía uma simbologia própria. Quando Euclides [300 a.C] escreveu *Os Elementos*, estabeleceu-se um novo padrão de demonstrações matemáticas, introduzindo os conceitos de axiomas e postulados. Desde então, as demonstrações do ponto de vista da Matemática, vêm sendo definidas dentro dos moldes da Lógica como uma sucessão de inferências construídas a partir de axiomas ou proposições aceitas a priori, podendo ser vista como uma forma de verificação da verdade.

Esse tipo de pensamento é derivado de uma das leis da lógica *O Princípio da Razão Suficiente*[18] que utiliza de argumentos suficientemente sólidos para confirmar a veracidade de uma afirmação. O uso da lógica simbólica foi um passo muito importante na evolução do conceito moderno de demonstração matemática. Assim, para o matemático, demonstrar uma proposição, significa “argumentar pela aceitação de sua validade” seguindo uma sequência finita de enunciados, em que o último enunciado é a conclusão do argumento.

> Matemática e lógica historicamente falando, têm sido estudos inteiramente distintos. A matemática tem sido conectada com ciência, a lógica com grego. Mas ambas se desenvolveram em tempos modernos: a ciência tornou-se mais matemática e a matemática tornou-se mais lógica. A consequência é que agora [em 1919] tornou-se inteiramente impossível desenhar uma linha entre as duas; de fato, as duas são uma.

---

[17] Retórica é uma palavra com origem no termo grego rhetorike, que significa a arte de falar bem, de se comunicar de forma clara e conseguir transmitir ideias com convicção. A retórica corresponde à formulação de um pensamento através da fala e por isso depende em grande parte da capacidade mental do orador.

[18] *Princípio da Razão Suficiente* - O princípio da razão suficiente, afirma que tudo o que existe e tudo o que acontece tem uma razão (causa ou motivo) para existir ou para acontecer, e que tal razão (causa ou motivo) pode ser conhecida pela nossa razão.

> Diferem como um menino e um homem: a lógica é a juventude da matemática e a matemática é a maturidade da lógica. (RUSSELL, 2006, p. 191)

Matemática e lógica estão intimamente relacionadas. A matemática pode ser basicamente reduzida aos argumentos da lógica, onde seus conceitos, até mesmo os numéricos, podem de fato ser definidos a partir de leis fundamentais do raciocínio.

Assim, seja na Matemática ou na Lógica, mesmo que o formalismo necessário para demonstrar certos resultados possa ser mudado, os resultados matemáticos por si só não se alteram. Uma “prova” ou “demonstração” (ambas compreendidas com o mesmo sentido) tem como significado “convencer”, “validar”, ou seja, legitimar um resultado.

Não é difícil perceber que uma argumentação matemática caracteriza-se em um sistema formal que tem raízes muito profundas e que seu objetivo ao demonstrar ou provar uma determinada proposição consiste em partir de algumas leis gerais e fazer inferências sobre conhecimentos ou verdades particulares, apresentando os raciocínios de forma axiomática.

A Educadora Matemática Hanna, em seu trabalho: “Proof, explanation and exploration: an overview” (2000) considera que a demonstração para a Matemática possui como caráter principal a apresentação de um conceito de maneira “rígida e formal”, por meio de uma técnica específica. A forma como essa técnica é abordada constitui caráter secundário; a solidez do argumento não depende de forma alguma de uma ou outra opinião sobre o assunto.

Sua validade é garantida devido ao fato de produzir uma verdade lógica, ou seja, uma verdade preestabelecida: “a demonstração é o caminho encontrado pelo matemático para jogar a máquina ‘matemática’ de resolver problemas e para justificar que uma proposta de solução para um problema é realmente sua solução”. (HANNA, 2000, p. 05).

Por outro lado, para os matemáticos, compreender a matemática em seu significado científico significa compreender seu sistema lógico estrutural, sua “demonstração”: a matemática que tende identificar a matemática com sua abstração axiomática formal.

Convém aqui destacar que, seja no campo da matemática, ou em qualquer outro ramo do conhecimento, a demonstração é uma ferramenta essencial para validação de uma determinada propriedade, pois, conduz a um exercício que possibilita a comunicação entre sua construção e sua formalidade. É também um objeto de estudo, pois busca uma definição precisa de teorias formalizadas.

Não importa se são os físicos tentando formular teorias do universo, analistas de bolsa de valores tentando prever a próxima quebra de mercado ou neurobiólogos construindo modelos da função cerebral. O que se percebe é que todos eles, em suas atividades diversas otimizam seus resultados por meio de um modelo matemático que obviamente é aceito como uma verdade devido à sua demonstração.

Compreende-se que as demonstrações podem desempenhar diferentes papéis. Entre os vários, funcionam como instrumento de validação de um argumento, geram debates e conduzem a novas descobertas.

A questão aqui levantada, é que é preciso saber fazer uma distinção entre o papel das provas e demonstrações na "Matemática do matemático" e na "Matemática do Educador Matemático". O primeiro tende a conceber a prova matemática como um fim em si mesma. "Quanto ao educador matemático, a tendência é concebê-la como um instrumento importante à formação intelectual e social do indivíduo". (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 03)

De fato, a demonstração é um elemento importante tanto para a matemática praticada pelos matemáticos quanto para a matemática escolar, uma vez que esse procedimento leva ao desenvolvimento da argumentação e à construção do raciocínio. Faz-se necessário então, observarmos que, enquanto na Matemática vemos um significado único e bem delimitado para a demonstração, no Ensino vemos pesquisadores buscando alternativas para abordá-la em sala de aula.

Pogorélov[19] (1974), no prefácio de seu livro "Geometria Elementar, aponta que a demonstração no ensino de Geometria deve ser compreendida como um instrumento que leva à construção racional do pensamento.

> Nas etapas iniciais, o ensino de geometria tem por objetivo além de fornecer aos alunos os conhecimentos das propriedades geométricas, mostrar-lhes os métodos pelos quais essas propriedades são obtidas. Sabemos que os resultados geométricos (teoremas) são obtidos a partir de raciocínios lógicos. O raciocínio lógico é parte fundamental de todo conhecimento. [...] Ao fornecer esse curso, partimos de que a tarefa essencial do ensino da Geometria na escola consiste em ensinar o aluno a raciocinar logicamente, argumentar e demonstrar suas afirmações. Muito poucos dos egressos na escola serão matemáticos e muito menos geômetras. Também haverá os que não utilizem nenhuma vez em sua atividade prática o Teorema de Pitágoras. Porém, dificilmente se achará um só que não deva raciocinar, analisar ou demonstrar. (POGORÉLOV, 1974, p. 9)

Nesse aspecto, o registro matemático é entendido como uma forma de comunicação de ideias, sobre objetos e processos matemáticos constituídos, não somente por termos técnicos,

[19]A.V. Pogorélov é o autor de vários livros escritos para as escolas superiores em todos os assuntos de geometrias básicas. Sua principal preocupação concentra-se na melhoria da educação matemática escolar. Ele criou o livro de texto da geometria que foi incluído nos currículos escolares, em 1982, depois de ter sido testado experimentalmente em um número de escolas secundárias. O livro é conhecido, por uma lado, pelo seu aspecto prático do ensino da geometria direcionando a atenção para um desenvolvimento do pensamento lógico, para as habilidades dos alunos de acordo com suas características de idade e dons individuais; por outro lado, por cumprir integralmente com os requisitos do ensino de geometria.

mas por uma forma de argumentação que contribui diretamente com a formação do conhecimento.

Assim, apesar de aparentemente completa, uma demonstração torna-se convincente e legítima, do ponto de vista da Educação Matemática, somente quando leva à “verdadeira compreensão matemática”. Então, apresentá-la aos alunos de forma mecanizada faz com que se torne apenas uma ferramenta de prova, ou seja, uma maneira de validar um enunciado, desconsiderando-a como um gênero de um discurso, cuja base essencial é sua estrutura.

Para Balacheff (2000), o uso das demonstrações no ensino, apenas como uma forma de se reproduzir cálculos lógicos, leva os alunos a realizarem uma série de procedimentos mecanizados sem saber como esses foram elaborados, não produzindo significado algum. Apenas memorização. Esse tipo de abordagem, não leva em consideração o compromisso social que ela implica.

Para Lakatos (1978) a abstração e a apresentação precoce em sala de aula dos sistemas lógicos dedutivos relacionados à prova ou demonstração de uma determinada propriedade matemática conduzem a uma simbolização extremamente exagerada ao ensino de matemática, por desconsiderar os dados culturais, sociais e intuitivos que objetivam sua aprendizagem.

Segundo Hanna (2000), a demonstração é uma parte importante da matemática e por esse motivo devemos discutir com nossos alunos sua função. Assim, uma das nossas principais tarefas como Educadores Matemáticos, é compreender o seu papel no ensino, para que possamos reforçar sua utilização na sala de aula.

Dessa forma, entende-se que do ponto de vista da Educação Matemática, a tarefa do professor é tornar a demonstração acessível, de fácil compreensão, para que o aluno se torne capaz de reproduzi-la e, após um período mais longo de estudo, de criá-la, criticá-la, analisá-la e aprender com ela.

2.3 Aspectos Cognitivos e Didáticos das Provas e Demonstrações

> [...]Aquelas crianças que, segundo os professores da escola, não aprendiam nada, não sabiam nada, me ensinaram muita coisa. Foram elas que nos fizeram questionar, pela primeira vez, a escola, o professor, o ensinar e o aprender. (GAZIRE, 2000, p.07)

A visão de mundo de um povo, de uma civilização ou de uma cultura, corresponde de modo geral, ao conjunto de ideias, valores e práticas pelos quais uma sociedade aprende e compreende o mundo e a si mesma. As condições para a construção do conhecimento racional baseiam-se na aquisição de valores éticos, políticos, artísticos e culturais. O saber é adquirido à medida que o ser se relaciona com o conhecimento, com quem o oferece e com a sua história.

O conhecimento acontece em diferentes situações de aprendizagem, sejam elas, 'conscientes, inconscientes ou pré-conscientes'[20]. O que se observa é que cada pessoa tem uma forma singular de aprendizagem que se organiza de forma direta ou indireta, a partir daquele que ensina: seja família ou escola.

No campo da educação, o saber está estruturado na aprendizagem de conteúdos disciplinares que implicam o desenvolvimento de competências e habilidades para compreendê-los. Os níveis de compreensão dos alunos são dependentes dos conceitos e das operações a serem aprendidos.

Na escola, os objetos de conhecimento (conceitos e operações relativas a uma disciplina) podem ser muito difíceis para alguns alunos. Em alguns casos, porque lhes faltam recursos cognitivos para compreender o que se está ensinando; em outros, porque em muitas situações didáticas, os conteúdos apresentam-se integrados na perspectiva dos professores, mas são indiferentes na perspectiva dos alunos. Quando relacionada ao ensino-aprendizagem de matemática, essa dificuldade torna-se mais evidente.

Sabe-se que a matemática é uma das formas mais puras de pensamento e que ela tem uma infinidade de aplicações práticas. Entender como se dá o desenvolvimento dessa competência intelectual pode contribuir diretamente para sua aprendizagem.

Nos últimos tempos, tem-se observado uma crescente busca nas ciências cognitivas por uma justificativa para a compreensão dos fundamentos da matemática na cognição humana. Em situações de aprendizagem em que se pretende desenvolver os saberes matemáticos, os subsídios teóricos da 'Ciência Cognitiva' são valiosos para levar à compreensão da dinâmica que se estabelece entre funcionamentos cognitivos e a construção intelectual desse saber.

Para Gardner (1994), a inteligência não deve ser vista simplesmente como "uma coisa em si" ela deve ser concebida mais como "um potencial para diversos tipos de exigências sociais e profissionais", e apesar de ser dotada de uma herança genética, não está confinada somente a essa condição biológica, já que seu desenvolvimento depende também das interações dos indivíduos com os ambientes naturais e sociais em que vivem.

---

[20] De acordo com a Teoria Psicanalítica desenvolvida pelo psiquiatra austríaco Sigmund Freud [1856-1939] os níveis de consciência humano ou modelo topológico da mente podem ser definidos em três estágios: consciente – que diz respeito à capacidade de ter percepção dos sentimentos, pensamentos, lembranças e fantasias do momento; pré consciente – relaciona-se com os conteúdos que podem chegar facilmente à consciência; e inconsciente – refere-se a um material não disponível à consciência do indivíduo, como um receptáculo de lembranças traumáticas reprimidas ou um reservatório de impulsos (PAPALIA et al, 2001).

> [...] existem evidências persuasivas para a existência de diversas competências intelectuais humanas relativamente autônomas. [...]. A exata natureza e extensão de cada 'estrutura' individual não é até o momento satisfatoriamente determinada, nem o número preciso de inteligências foi estabelecido. Parece-me, porém, estar cada vez mais difícil negar a convicção de que há pelo menos algumas inteligências, que estas são relativamente independentes umas das outras e que podem ser modeladas e combinadas numa multiplicidade de maneiras adaptativas por indivíduos e culturas". (GARDNER, 1994, p. 7).

Nessa teoria, Gardner (1994) mostra que todos os indivíduos têm a habilidade de questionar e procurar respostas usando algum tipo de inteligência, ou seja, todos os indivíduos possuem como parte de sua bagagem genética, certas habilidades fundamentais em todas as inteligências. Por exemplo, para Gardner (1994) qualquer indivíduo é capaz de desenvolver sua "inteligência lógico-matemática[21]" ou seja, a habilidade de explorar relações, categorias e padrões. Porém, para que isso ocorra em um estágio mais avançado, é necessário um esforço maior de aprendizado.

Nesse sentido, a Teoria das Inteligências Múltiplas funciona como uma ferramenta que pode contribuir consideravelmente para o processo de ensino-aprendizagem, visto que parte do pressuposto de que a abordagem de ensino do professor deva privilegiar as características pessoais dos alunos frente a um determinado conteúdo.

Para Piaget (1986), a inteligência do ser vai mudando junto com seu desenvolvimento cognitivo, passando por estágios de reorganização, seguidos de períodos de reintegração nos quais um novo estágio é alcançado e mudanças são assimiladas. Assim, cada estágio de desenvolvimento corresponde a um sistema cognitivo específico que determina todo o funcionamento do sujeito à medida que esse vai interagindo com o meio.

Em contextos de sala de aula de matemática, as implicações das teorias de Gardner (1994) e Piaget (1986) são claras quando observadas as diversas formas de pensamentos que compõem a estrutura desse saber e a relação existente entre a aquisição do seu conhecimento e o desenvolvimento de competências e habilidades.

Pensando na estruturação do conhecimento matemático que decorre da prática escolar cotidiana e da consequente busca pela compreensão das dificuldades enfrentadas por professores e alunos em lidar com seus conceitos, pesquisadores e educadores, vêm tentando

---

[21]Inteligência Lógico Matemática: Os componentes centrais desta inteligência são descritos por Gardner como uma sensibilidade para padrões, ordem e sistematização. É a habilidade para explorar relações, categorias e padrões, através da manipulação de objetos ou símbolos; é a habilidade para lidar com séries de raciocínios, para reconhecer problemas e resolvê-los. A criança com especial aptidão nesta inteligência demonstra facilidade para contar e fazer cálculos matemáticos e para criar notações práticas de seu raciocínio (GARDNER, 1994, p.4-10).

de diversas maneiras, fazer com que a ação pedagógica do professor incorpore diferentes concepções capazes de elevar os estudantes a um nível de compreensão que transcenda o conhecimento de determinadas propriedades matemáticas, de forma, que o mesmo possa entender as relações que definem o conhecimento dos objetos matemáticos e a realidade que circunscreve seu saber.

Encontrar situações de diferenciação entre 'o quê' se estuda e o 'por que' se estuda, constitui um dos principais objetos de pesquisa relacionada à didática da matemática que, não se preocupa, apenas em fazer com que os alunos sejam capazes de resolver o problema mais difícil, mas sim com que sejam capazes de ampliar os horizontes da própria matemática. Além da importância de dominar os conteúdos a serem ensinados, faz-se necessário que o professor tenha conhecimento didático desse conteúdo, para que então possa encontrar a maneira mais adequada de apresentá-los aos alunos.

A matemática é parte natural do ser humano, originando-se de suas experiências diárias com o mundo, e nesse contato, o homem tem necessidades que, sempre que supridas, geram novas necessidades. Assim também acontece com o conhecimento matemático: 'o aluno precisa conhecer cada vez mais para cada vez mais poder questionar de maneira melhor'.

As construções de processos de pensamentos que traduzam conceitos matemáticos abstratos em outros mais concretos tornam-se ferramentas importantes para auxiliar os alunos a avançarem além das habilidades matemáticas inatas. Os alunos precisam ser encorajados a fazer perguntas, analisar erros e propor soluções diferentes. Faz se necessário despertar nos alunos o desejo pelo questionamento; despertar um 'espirito científico', que, segundo Bachelard (1996):

> Trata-se de um espírito inquieto, desconfiado que busque nos questionamentos, encontrar novos dados, mais precisos [...]. Em todas as ciências rigorosas, um pensamento inquieto desconfia das identidades mais ou menos aparentes e exige sem cessar mais precisão e, por conseguinte, mais ocasiões de distinguir. Precisar, retificar, diversificar são tipos de pensamento dinâmico que fogem da certeza, que encontram nos sistemas homogêneos mais obstáculos do que estímulo. (BACHELARD, 1996, p.21)

Entretanto, a realidade nas escolas não reflete essa concepção, visto que o sistema didático matemático atual apresenta-se como um obstáculo para o desenvolvimento dessa competência intelectual. A forma como a matemática é ensinada, de acordo com Balacheff (2000), priva os alunos de uma responsabilidade com a verdade. Esse fato é particularmente notável quando um problema proposto se apresenta na forma: "mostre que", um enunciado desse tipo já diz ao aluno que essa situação é verdadeira, assim o que ele tem que fazer, é apenas escolher um critério de resolução que será aceita ou não se satisfizer o professor. É preciso encorajar os estudantes a conceituar suas próprias argumentações.

Para Brousseau (2008), "cada conhecimento ou saber é determinado por meio de uma situação[22] " (BROUSSEAU, 2008, p. 23) entendida como uma ação entre duas ou mais pessoas. Assim, para que essa situação seja solucionada, é preciso fazer com que os alunos mobilizem um conhecimento correspondente a ela. Ao utilizar um jogo, por exemplo, o professor pode levar o estudante a usar o que já sabe para criar uma estratégia adequada de resolução. Porém, para que o saber seja estruturado, é preciso que o professor proponha um jogo em que eles possam agir, refletir, falar e evoluir por iniciativa própria.

Brousseau (2008) confere ao professor o papel fundamental de iniciar o aluno a um novo saber científico. Para o filósofo francês *Gaston Bachelard*[23], trata-se de um novo olhar para um conhecimento anteriormente adquirido, uma (re) significação do saber. “O ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização”. (BACHELARD, 1996, p. 17).

A construção do saber matemático, de forma a sustentar um processo de aprendizagem significativa, implica em uma postura pedagógica capaz de considerar que um fato matemático relaciona-se também à capacidade de utilização das diferentes formas de linguagens e que, para aprender significados, transformá-los e combiná-los de forma a construir novas aprendizagens é preciso que o professor configure diferentes formas de expressão e novos questionamentos sobre esses mesmos significados.

> [...] o aprendizado não é desenvolvimento; entretanto, o aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer. Assim, o aprendizado é um aspecto necessário e universal do processo de desenvolvimento das funções psicológicas culturalmente organizadas e especificamente humanas”. (VYGOTSKY, 1998, p. 101).

Identificar fatores, evidenciar e descrever características do ensino que aceleram ou inibem o desenvolvimento do raciocínio matemático, têm suscitado um grande número de

[22] A teoria das situações didáticas, formulada por Brousseau, faz referência ao processo de ensino aprendizagem matemática em sala de aula. Na teoria de Brousseau, uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição. (BROUSSEAU, 2008).

[23] Gaston Bachelard (1884-1962), compreende o ato de conhecer como um ato de negação. Esse pensador enfatiza o processo de construção da ciência, suas fronteiras e diferenças em relação ao senso comum e apresenta a noção de obstáculo epistemológico como categoria central para compreender a pedagogia da processualidade da ciência. (BACHELARD, 1996. 314 p).

trabalhos, que procuram, a partir de características gerais, buscar soluções para o caso especifico da sala de aula e de seus professores.

Muito já se discutiu e ainda se discute sobre a função das provas e demonstrações no ensino como forma de levar à construção do senso crítico, sistemático e reflexivo devido à abrangência de sua estrutura. Considerando a complexidade do processo de ensino aprendizagem das demonstrações, não só para o aluno, mas também para o professor, pensar no ensino de matemática, por meio de provas e demonstrações, é propor um confronto entre o modelo cognitivo do aluno com o de outros alunos ou até mesmo com o do professor.

A questão fundamental, é que as “provas”[24] e as “demonstrações”[25], devem ser vistas primeiramente como uma forma de argumentação, que tem valiosos benefícios para o desenvolvimento de competências e habilidades como: explorar situações-problemas e observar implicações da utilização de distintas definições. Em seguida, na perspectiva de demonstrar a necessidade de uma melhor definição; produzir um algoritmo útil, contribuir para a comunicação de resultados ou para a formalização de um corpo de conhecimento matemático.

O estudante de matemática precisa compreender que o fato de uma afirmação ser verdadeira está relacionado com a consistência da argumentação. Ao considerar a prova um meio de comunicação de ideias matemáticas que permeia todo um processo de buscar regularidades, propor conjecturas e pensar logicamente, alcança novas dimensões no entendimento da matemática.

O ato de ensinar por meio de uma prova, deve incluir a possibilidade de diferenciar uma ‘prova rigorosa’, que enfatize somente o raciocínio lógico formal, de uma ‘prova argumentativa’, que envolve investigações e explicações de “porque” determinado resultado é válido. Para os alunos, o primeiro tipo de prova, na maioria das vezes não produz significado algum, pois, não tem conexão existente com sua estrutura mental.

Quando utilizada como forma de argumentação, a prova torna-se acessível a um número maior de estudantes, pois, possui um maior valor educativo, oportunizando os alunos a perceberem detalhes, conjecturar e cometer erros para refletir e interpretar as relações entre objetos e oferecer-lhes explicações matemáticas.

[24] Para Balacheff, prova é uma explicação que refere-se a um processo social pelo qual um discurso é aceito como valido ou não, ou seja, uma mesma prova pode ser aceita como verdade para uma determinada comunidade e para outra não. (BALACHEFF, 2000. p. 17).

[25] As demonstrações são provas particulares com as seguintes características: são as únicas aceitas pelos matemáticos; respeitam regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas); outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados. (ALMOULOUD, p. 1-18).

A função da prova é útil somente quando o professor é capaz de usá-la de forma que transmita entendimento. Mais do que permitir que as hipóteses confirmem veracidade aos teoremas, as provas têm o efeito de questionar essas condições e promover o entendimento matemático: "[...] a melhor prova é a que ajuda compreender melhor o significado do teorema a ser provado: não só para ver que é verdade, mas também, porque é verdade. É claro que tal prova é também mais convincente e mais propensa a levar a novas descobertas" (HANNA, 2000, p.7).

O que se segue é que geralmente, segundo Balacheff (2000), o professor faz uma prova ou demonstração de um teorema ou propriedade diante dos alunos e logo depois pede para que façam o mesmo, sem se preocupar com as dificuldades que surgem. Logo, a imitação é o modo mais utilizado de ensino de uma demonstração. Nesse processo, faz-se da demonstração uma ferramenta de verificação, apresentada como uma retórica da classe dos matemáticos. "Não é de se admirar quando os alunos dizem não ser necessário demonstrar em geometria pois a figura por si só basta como demonstração". (FETISSOV, 1994, p. 4).

Os alunos não conseguem compreender por que se faz necessária a demonstração de uma determinada propriedade, pois, não participam do processo de elaboração da mesma. Elas são apresentadas prontas, não permitindo ao aluno explorar, conjecturar ou testar.

Nasser e Tinoco (2003) propõem como estratégia para o desenvolvimento da capacidade de justificar e argumentar, dar oportunidade ao aluno de observar e analisar justificativas e argumentações dadas por seus colegas. Esse tipo de estratégia motiva os alunos a investigarem as soluções dos colegas e tentar descrevê-las corretamente.

Chevallard e Tonelle, citados por Balacheff (2000, p. 10), sugerem que o ensino da demonstração "deve partir dos argumentos dos alunos, ou seja, deve conduzi-los a uma situação em que se vejam obrigados a argumentar e demonstrar um fato por eles afirmado": trata-se de problematizar a evidência.

Análises do comportamento dos alunos diante de uma situação problema e do caminho que fazem para validar seus resultados demonstram que estes não possuem experiências de pensamentos que envolvam construções cognitivas mais complexas. As operações ou os conceitos desenvolvidos por eles expressam-se em ações que nem sempre utilizam diferenciações ou articulações referentes ao que se pretende provar.

Para Nasser e Tinoco (2003), é possível que essa dificuldade de "provar", esteja relacionada, ao fato de que a maioria dos alunos não esteja aprendendo a pensar e raciocinar quando estudam diversos conteúdos matemáticos.

> [...]os jovens não estão habituados a pensar e comunicar suas ideias. Isto é, na maioria das escolas, o aluno ainda é levado a resolver uma lista enorme de exercícios repetitivos, que para ele não tem significado algum. Não vendo uma ligação significativa do conteúdo com sua vida, o aluno apenas repete os modelos dados pelo professor ou aplica fórmulas e em nenhum momento é questionado ou levado a pensar por que a resposta é aquela, ou mesmo se a resposta é coerente, plausível com a pergunta do problema". (NASSER E TINOCO, 2003, p.1- 2).

As dificuldades encontradas por alunos em formular uma demonstração estão diretamente relacionadas à sua falta de experiência e maturidade matemática. Por isso, é necessário levar em consideração que, ao ensinar estudantes a desenvolverem métodos de argumentação e prova, é preciso estar atento ao seu nível de desenvolvimento cognitivo e ao caminho pelo qual suas experiências prévias construirão estruturas conceituais que podem ajudar ou impedir esse desenvolvimento.

Para Balacheff (2000), o desenvolvimento desse tipo de habilidade depende de uma reconstrução do pensamento. Para que o aluno possa provar ou demonstrar uma determinada propriedade matemática, é preciso que este reconstrua "razões que estão implícitas em sua mente", ou seja, o conhecimento que até agora, agiu para fora, torna-se objeto de reflexão, de discursos e divergências. A linguagem matemática deve tornar-se não apenas uma ferramenta, mais um meio de comunicação.

Produzir provas e demonstrações e dominar seu processo lógico dedutivo são competências que devem ser alcançadas pelos alunos que devem buscar compreendê-las em sua complexidade e tratá-las como um tema passível de um processo de evolução no ensino de matemática.

Cabe ao professor focar em suas aulas atividades que tenham como objetivo ajudar o aluno a desenvolver competências para um pensar que leve aos caminhos da investigação e da argumentação, buscando procedimentos apropriados às ações de educar e ensinar Matemática em consonância com o nível de desenvolvimento cognitivo do seu aluno.

Viabilizar propostas transformadoras para que se possam superar as dificuldades inerentes desse processo de ensino aprendizagem, com o objetivo de se produzir uma aprendizagem significativa, faz-se necessário que mudanças ocorram. Para Gazire (2000), a mudança na escola só ocorre se todos, sem exceção a buscam:

> [...]a cumplicidade entre os professores na aplicação de propostas inovadoras faz com que o sucesso e o fracasso de cada um se complete na busca de razões para execução de um novo trabalho. Se um só dos professores não aceita as mudanças, ele se torna foco de discórdias e é inevitável, mais cedo ou mais tarde, o fracasso da inovação. (GAZIRE, 2000, p. 19)

Isso quer dizer que o sucesso na busca de uma solução para esse problema relaciona-se não só às inovações do ensino, mas também, às mudanças na formação do professor. É preciso que os futuros professores desenvolvam uma profunda compreensão da Matemática que vão ensinar, não só em seus conteúdos, mas também na forma de como ensiná-los.

Oferecer maiores reflexões sobre prática educativa eleva a possibilidade do sistema didático-pedagógico influenciar diretamente no desenvolvimento cognitivo do aluno. A atividade pedagógica há de ser direcionada por análises e reflexões sobre os diferentes modos de conceber a produção do conhecimento matemático. É preciso considerar os diversos aspectos da Matemática e de sua realidade, a fim de conhecer seus objetos e de trabalhar com eles.

A Educação Matemática tem por meta a formação de pessoas, que irão intervir diretamente na dimensão política, histórica e cultural de uma determinada sociedade. Portanto, é importante fazer com que o conteúdo trabalhado em sala de aula seja capaz de educar matematicamente através de atividades que explicitem posturas éticas, concepções de cognição, de formação cidadã, de bem estar, de visão de mundo e de conhecimento.

3. A PESQUISA: TRAJETÓRIA E METODOLOGIA

Nessa parte do trabalho apresenta-se a trajetória da pesquisa, começando pelas decisões e escolhas que auxiliaram na delimitação do objeto de estudo bem como alguns detalhes importantes do processo de constituição da pesquisa.

3.1 Trilhando o caminho da Pesquisa

> [...] Pesquisar é: ter uma interrogação, e andar em torno dela em todos os sentidos, sempre buscando todas as suas dimensões e andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentidos, mais dimensões e outra vez... (MARTINS apud BICUDO, 1993, p. 18-23).

A construção do conhecimento humano é um processo longo e demorado que requer tempo, dedicação e paciência. Educar em sentido geral, ou ensinar qualquer disciplina é algo que se realiza em um dado contexto ou circunstância constituída por diferentes situações de ensino e aprendizagem. Compreender como se realiza a aprendizagem é compreender a dinâmica que constitui esse processo.

A aprendizagem é um processo derivado de diferentes perspectivas sociais e culturais. Entender os diferentes posicionamentos pessoais de cada sujeito envolvido nesse processo faz com que a ação educativa se relacione com as vivências e atividades de cada indivíduo. Dentro de um mesmo referencial é possível haver diversas abordagens de ensino.

Aprender implica a existência de um contexto sociocultural que funciona como uma fonte propulsora para todo o conhecimento que será produzido. Fora desse contexto, o conhecimento não adquire sentido e o processo de aprendizagem não acontece: "aprender é dar significado".

Na tentativa de evidenciar o modo de aprender e compreender a realidade matemática considerando sua aprendizagem como a criação, ou melhor, como a construção de um nível social, cultural e histórico de um indivíduo ou determinado grupo de indivíduos, as pesquisas em Educação Matemática buscam realizar seus estudos, utilizando métodos interpretativos e analíticos das ciências sociais e humanas, tendo como perspectiva o desenvolvimento de conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam para uma formação mais integral, humana e crítica, tanto do aluno quanto do professor.

Nessa perspectiva entende-se que aprender matemática consiste em perceber quais são suas questões, o que ela propõe a respeito de mundo, seus métodos, teorias e como ela é capaz de ajudar o ser humano a se compreender mais e a compreender melhor o meio em que vive.

De acordo com Bicudo (1993), pesquisar em Educação Matemática é trabalhar em torno de preocupações que interroguem o compreender, o fazer matemático e os significados a ela atribuídos; “é preocupar-se com as interpretações e elaborações sobre os significados sociais, culturais e históricos da matemática.” (BICUDO, 1993, p.20). Sob esse ponto de vista, a pesquisa em Educação Matemática permite que se compreenda o modo pelo qual essa disciplina é construída, atribuindo significados à sua prática educativa.

A pesquisa em Educação Matemática tem evoluído muito nos últimos anos, principalmente no Brasil, onde ocorrem anualmente diversos eventos na área. Muitas pesquisas têm contribuído diretamente para melhor compreensão das dificuldades encontradas por alunos e professores no ensino-aprendizagem dos conteúdos ligados a essa disciplina. Dentre essas, algumas têm conseguido aproximar-se bem das salas de aula, como é o caso das pesquisas relacionadas a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD) que influenciaram diretamente na construção dos Parâmetros Curriculares Nacionais para a disciplina de Matemática (BRASIL, 1997) e consequentemente na elaboração de alguns livros didáticos.

Atualmente, tem-se observado, dentro dessa linha de pensamento, uma crescente busca por situações de ensino que levem o aluno a observar, experimentar, fazer inferências e chegar a uma interpretação própria; isso, devido ao fato de que, para construir o saber matemático, o aluno deve aplicar os seus conhecimentos e modos de pensar a fim de desenvolver habilidades e competências que irão refletir diretamente sobre suas ações, como se destaca nos PCN (Brasil, 1997):

> [...] desenvolver no educando a capacidade/habilidade de comprovação, argumentação e justificação, com vistas à formação do cidadão crítico, além de propiciar que a Matemática seja encarada pelo estudante como um conhecimento que possibilita o desenvolvimento de seu raciocínio e de sua capacidade expressiva. (PCN: MATEMÁTICA, 1997, p. 26)

De acordo com os PNC para a disciplina de matemática no Ensino Médio (PCNEM, 1999): “só aprende a dominar linguagens quem faz uso delas”, a compreender processos e fenômenos quem os investiga, a enfrentar situações problemas quem é desafiado a isto, a “construir argumentações quem as constrói e a elaborar proposições quem as elabora” (PCN, 1999, p. 46).

Motivada pelos estudos em Educação Matemática e, particularmente, pela necessidade de compreendê-la num âmbito social, pensada na perspectiva do desenvolvimento do senso crítico e da capacidade argumentativa do aluno, buscamos inicialmente, realizar uma pesquisa que apontasse caminhos para que a produção natural do saber matemático se desenvolvesse no aluno a partir de suas ações de observar, experimentar, conjecturar, refutar, testar, demonstrar e generalizar.

Entre tecer fios, cruzar e entrelaçar ideias, no sentido de possibilitar o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento, que permita a compreensão, descrição e representação de propriedades e conceitos matemáticos partindo da travessia da experimentação para a construção do pensamento argumentativo, encontra-se na Geometria o mais apropriado caminho.

Sabe-se que a prática da argumentação Geométrica exige um raciocínio apurado e ao mesmo tempo um estado específico de conhecimento, além de envolver um compromisso com uma abordagem de resolução de problemas não só na sua eficácia (uma exigência prática), mas também com seu rigor (a exigência teórica).

Investigar um problema a partir da Geometria e demonstrar seu resultado construído de uma forma mais geral, analisando modos de aplicação de uma teoria é um processo de construção desse conhecimento. Esse processo pode caminhar para novas descobertas, gerar debates e, certamente ajudar na formação de um pensamento matemático mais avançado.

O delineamento do tema investigado surgiu da pretensão de analisar os níveis de provas (demonstração) encontrados nas argumentações de alunos em processos formativos (nono ano do ensino fundamental e terceiro ao do ensino médio), como nos alunos em trajetórias de formação na Licenciatura (terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática). Nessa perspectiva, buscamos considerar que as demonstrações exigem dos estudantes processos mentais que caracterizam o pensamento matemático avançado, havendo necessidade de abstrações e representações de objetos matemáticos.

Considerando que a admissão de diferentes níveis de argumentação exige uma reconsideração dos critérios de julgamento acerca da validade formal da prova, que o nível de aprendizagem do aluno e de exigência quanto ao valor do argumento por ele produzido deve estar relacionado ao tipo de habilidade que se deseja construir, considerando as relações da matemática com a realidade, encontram-se em Hanna (1990; 2000) discussões e investigações endereçadas ao papel da prova em Matemática e na Educação Matemática e sua importância no currículo escolar.

De acordo com Hanna (1990), as provas são explicações aceitas por outros em um determinado momento, podendo ter o status de prova para determinado grupo social, mas não para outro. Segundo a pesquisadora, “a validade de uma prova pode estar tanto na derivação formal de seus termos, como na formulação de seus argumentos tornando-se, no entanto, convincente e legítima, somente quando leva à verdadeira compreensão” (HANNA, 1990, p. 10).

Ao falar sobre o ensino de prova na Escola Básica, Hanna (1990) destaca a importância das demonstrações que explicam a validade de um resultado (provas que ensinam) e daquelas que provam efetivamente o resultado (provas que provam), mas sem explicar de forma clara aos alunos o porquê da validade do resultado em discussão. Nesse aspecto, a prova dá sua maior contribuição na sala de aula somente quando oferece oportunidades para os alunos perceberem detalhes, conjecturar, cometer erros, refletir, interpretar as relações entre objetos e oferecer-lhes explicações matemáticas.

Para Hanna (2000), uma prova precisa ser simultaneamente válida, tanto no sentido de demonstrar o resultado matemático conforme padrões de rigor necessários, quanto no sentido de explicar porque determinado resultado é válido. Nessa perspectiva, a pesquisadora aponta várias funções que uma prova pode admitir. Entre elas a de verificar (relacionada com a verdade da afirmação), a de explicar (fornecendo respostas ao porquê de ser verdade), a de descobrir (no sentido de encontrar novos resultados) e principalmente a de comunicar (no sentido de transmitir o conhecimento matemático).

Compreende-se assim, que o ato de ensinar por meio de uma demonstração inclui a possibilidade de se fazer da própria demonstração a resposta de como foi possível provar e não apenas demonstrar o resultado, incorporando diferentes contextos a um mesmo conhecimento.

Com relação a alguns aspectos da prova e das demonstrações em geometria, tanto no que diz respeito às suas caracterizações bem como os aspectos cognitivos e didáticos responsáveis pelo seu desenvolvimento na Matemática e na Educação Matemática, buscamos elementos na didática da matemática francesa com Balacheff (1987; 1988; 2000) em várias abordagens suas sobre prova em matemática.

Os estudos de Balacheff (2000) trazem uma noção de prova sobre o ponto de vista da matemática praticada pelos alunos e não sobre o ponto de vista dos especialistas na teoria da lógica. Para isso, utiliza em sua pesquisa uma abordagem experimental da análise dos processos de prova utilizados na resolução de um problema por alunos da educação básica, verificando como esses alunos se comportam diante de uma solução de um problema e como fazem para validar seus resultados.

De acordo com Balacheff (1987), existem dois tipos básicos de provas, denominados de: “Provas Conceituais” e “Provas Pragmáticas”. Uma prova pragmática é aquela que recorre a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar um determinado resultado, chamados pelo autor de “recursos de ação”, sem formalismo lógico, apresentadas por meio de exemplo. Uma prova conceitual se caracteriza por formulações de propriedades e conexões existentes entre elas.

As demonstrações matemáticas são exemplos desse tipo de prova, não recorrendo aos recursos utilizados nas provas pragmáticas no momento de formular as propriedades envolvidas e as possíveis relações entre elas.

Ainda em Balacheff (1987), há a constatação de que a passagem do aluno de um tipo de prova pragmática para um tipo de prova conceitual, requer certa distância do modo como a ação pode ser descrita e explicitada: "o conhecimento que até agora, agiu para fora, torna-se objeto de reflexão, de discurso e de divergências" (BALACHEFF, 1987, p. 153). O caminho para provas conceituais está essencialmente na qualidade daquelas situações genéricas vistas pelo aluno anteriormente; seu conhecimento adquirido.

Entre os vários tipos de provas conceituais e pragmáticas, Balacheff (1987) aponta para quatro tipos principais que possuem uma posição privilegiada no desenvolvimento cognitivo do aluno: o empirismo ingênuo, o experimento crucial, o exemplo genérico e a experiência de pensamento. De acordo com o autor, os dois primeiros tipos não estabelecem a prova de uma afirmação. Todavia, para o exemplo genérico e a experiência de pensamento, existe um longo caminho para provar o resultado, porque nesse nível de prova, uma verdade é estabelecida através da natureza de suas razões, tratando de uma mudança radical no pensamento dos alunos.

Balacheff (1987) considera que as provas são explicações realizadas em um determinado momento para um determinado grupo social e que as demonstrações são tipos particulares de provas.

Com relação ao crescimento do conhecimento matemático através da dialética das provas e refutações, utilizamos o modelo proposto por Lakatos (1978). Nesse trabalho, o autor descreve o crescimento do conhecimento matemático seguindo a hipótese de que o estudante participa ativamente na construção de seu próprio conhecimento matemático.

Lakatos (1978) mostra que a complexidade de superar uma contradição em matemática está relacionada à diversidade de maneiras de lidar com uma refutação. O ponto de partida para o seu processo de desenvolvimento é a experiência que uma contradição pode proporcionar.

Em um estudo histórico, sobre Provas e Refutações, Lakatos (1978) aponta para a importância da dimensão social dessa dialética, que segundo o pesquisador pode ser observada em dois níveis: o primeiro, que os alunos devem aprender a matemática como um conhecimento social, assim, eles não são livres para escolher os significados que eles desejam construir. Esses significados não devem ser apenas eficientes na resolução de problemas, mas eles também devem ser coerentes com os resultados socialmente reconhecidos. Esta condição é necessária para a futura participação dos estudantes como adultos nas atividades sociais.

O segundo, que após as primeiras etapas, a matemática não pode mais ser aprendida por meio de interações com um ambiente físico, portanto requer um confronto entre o modelo cognitivo do aluno com o de outros alunos ou até mesmo com o do professor no contexto de uma determinada atividade matemática, especialmente quando têm que lidar com uma refutação em que a relevância é a superação do confronto de dois entendimentos pelos alunos. Primeiro o entendimento do problema e segundo seu conteúdo matemático.

Lakatos (1978) propõe com esse modelo, que a questão didática tome duas vertentes: em primeiro lugar, determinar quais são as condições necessárias para gerar, por parte do aluno a consciência de uma contradição e, em segundo lugar, quais são as condições sob as quais o estudante pode resolvê-la.

Esses teóricos concordam que no processo de ensino-aprendizagem matemáticas deve se fazer presente o uso de demonstrações, tanto com o caráter de sistematização de um resultado, quanto na construção e validação de argumentos, a fim de que possam originar opiniões, crenças e saberes que permitam a tomada racional de decisões em diferentes situações vivenciadas.

Na busca de verificar se a partir da experimentação é possível que os alunos cheguem à construção de um pensamento argumentativo matemático mais avançado, construímos modelos fundamentados nas experiências realizadas por Gazire (2000), Nasser e Tinoco (2003) e Nasser e Aguilar Junior (2012), cujo objetivo principal é o de produzir saberes, práticas e inovações sob uma epistemologia reflexiva e investigativa dos processos de formação e constituição do raciocínio Matemático Geométrico.

Abordando a temática do "**Não Resgate das Geometrias**" nas escolas de Ensino Fundamental e Médio, Gazire (2000) aponta para uma enorme lacuna no que diz respeito à formação dos professores de matemática com relação a essa disciplina. Em pesquisa realizada com 200 professores, alunos da disciplina de Fundamentos Modernos de Geometria, do curso de pós graduação em Educação Matemática (lato sensu) da UNI-BH, constatou-se que, embora a maioria desses professores considerassem ser de fundamental importância para o desenvolvimento do aluno ter contato com o conhecimento geométrico, muitos destes profissionais apresentaram uma imensa fragilidade para trabalhar com essa disciplina.

> Têm a concepção de que aprender é repetir, é seguir modelos, ou adestrar (aquilo que ainda não se sabe). [...] falam da aplicação da geometria na vida diária, mas utilizam

> em suas aulas, apenas uma lista de exercícios prontos, formais e completamente desligados da vida e da realidade. (GAZIRE, 2000, p.168-169).

O estudo de Gazire (2000) revela diversas contradições presentes no ensino de Geometria e nos discursos apresentados por esses professores. Contradições essas, geradas a partir de conflitos existentes entre noções de conhecimento e a reprodução de práticas pedagógicas tradicionalmente legitimadas por uma educação formal extremamente conteúdista.

O processo mais usado pelo ser humano em sua própria aprendizagem é a **IMITAÇÃO:** "[...] sujeito a um único tipo de ensino, a tendência será, no futuro, o professor agir exatamente como agiram com ele. Dificilmente conseguirá trabalhar diferente. (GAZIRE, 2000, p. 179-180).

Caracterizando e identificando que o professor de matemática encontra-se completamente desamparado em suas tarefas, sempre desacompanhado de preparação e orientação adequada e necessária, o trabalho realizado por Gazire (2000) com esses retrata uma triste realidade do ensino de geometria: "o professor não resgata a geometria, dentre outros motivos, por ser vítima de um processo vicioso: não aprendeu geometria então não ensina" (GAZIRE, 2000, p. 198).

Nesse sentido, Gazire (2000) aponta para a necessidade de se propor um ensino de matemática no qual o aluno deverá percorrer um caminho equivalente ao caminho natural de desenvolvimento da matemática, partindo de diferentes olhares, propondo-lhe investigar, experimentar para que então possa conjeturar suas próprias ideias.

Vinculada à perspectiva de compreender como os alunos se comportam diante de uma situação de prova matemática, pensando na capacidade argumentativa relacionada ao seu desenvolvimento cognitivo, a pesquisa realizada por Nasser e Tinoco (2003), desenvolvida por um grupo do Projeto Fundão do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, contando com a participação de professores do ensino fundamental e médio, confirma a importância de preparar os alunos para dominar o processo dedutivo e desenvolver seu raciocínio lógico, a fim de que a habilidade de argumentar seja construída:

> [...] a habilidade de argumentar deve ser trabalhada desde as primeiras séries, para que o aluno mais tarde seja capaz de defender um ponto de vista próprio, seja numa conversa informal, seja numa questão matemática (NASSER e TINOCO, 2003, p. 09).

Nos experimentos desenvolvidos com alunos do ensino fundamental e médio, Nasser e Tinoco (2003) constataram que em turmas onde não havia sido feito nenhum trabalho no sentido de desenvolver a argumentação, quando desafiados a justificar por que determinada situação é verdadeira ou falsa, diversos alunos se limitaram a usar um argumento de "autoridade": "é um teorema da geometria” ou “está no livro” (NASSER e TINOCO, 2003, p.11). Diante de situações em que deveriam justificar alguma propriedade, perceberam que os alunos consideravam apenas o caso particular, não conseguindo chegar a uma generalização da propriedade proposta.

De acordo com Nasser e Tinoco (2003) uma das estratégias importantes para desenvolver a capacidade de argumentar “é dar oportunidade ao aluno de observar e analisar as justificativas e argumentações dadas por um colega seu” (NASSER e TINOCO, 2003, p.17).

Nesse sentido, as pesquisadoras apontam que, de uma forma geral, poucos trabalhos vêm sendo desenvolvidos nas salas de aula com intuito de levar os alunos a desenvolver a capacidade argumentativa e sua competência de comunicar ideias. Acreditam que a falta desse domínio faz com que os jovens, na maioria das escolas brasileiras, não saibam pensar e raciocinar matematicamente.

Nessa linha de pensamento, partindo do pressuposto que o papel do professor está ancorado ao processo de conhecimento educacional do aluno, os pesquisadores Nasser e Aguilar Júnior (2012), buscaram verificar se o professor está inclinado ao trabalho pedagógico que desenvolva nos alunos do Ensino Fundamental a habilidade de argumentação e prova e analisaram a capacidade deste de avaliar e valorizar os tipos de argumentação e prova apresentados pelos alunos.

O trabalho desenvolvido Aguilar Júnior (2012), aponta para a constatação de um fato que é bastante pertinente nas diversas pesquisas que analisamos. O desenvolvimento da habilidade de argumentar e provar em Matemática requer um trabalho voltado para tal, ou seja, deve-se preparar a aula e o professor para a condução desta tarefa.

> Pelos resultados que obtivemos, podemos especular que, em relação aos alunos investigados nesta fase da pesquisa, esta habilidade não está sendo desenvolvida em sala de aula, uma vez que grande parte dos alunos apresentaram apenas exemplos como argumentos e justificativas. (AGUILAR JÚNIOR, 2012, p. 62-63).

Esse resultado aponta também para outras questões, dentre elas, as seguintes indagações: será que o professor prova um teorema utilizando o rigor de uma demonstração? Seria esse resultado obtido pelos alunos um trabalho de **imitação**? Da mesma forma, como já foi colocado pelos diversos autores analisados percebemos um enorme despreparo dos professores em relação ao trabalho com provas e demonstrações.

Constata-se, assim, que o ensino de prova não faz parte da prática pedagógica da maioria dos professores da Escola Básica. De fato a argumentação lógico-dedutiva é uma habilidade que não pode ser ensinada em apenas algumas aulas. É uma habilidade que deve ser desenvolvida desde os primeiros anos, ao longo de toda escolaridade dos alunos, numa constante gradação dos níveis de argumentação, de maneira a conduzir o aluno a construir justificativas que possam ser aceitas como prova de resultados matemáticos.

Neste sentido, é importante compreendermos que nenhum conhecimento é construído sozinho, mas sim em parceria. A prática cotidiana do professor não pode ser pautada em um conhecimento tácito, implícito, sem articulação com os conhecimentos científicos, sobre os quais ele deixa de exercer um controle específico. Nesse sentido, o conhecimento estável e espontâneo mostra-se insuficiente para o professor atuar mediante os casos conflituosos que requerem soluções sensatas e imediatas. Seu conhecimento tácito acumulado e cristalizado já não lhe permite corresponder a novas situações.

É urgente a formação de práticas inovadoras, geradas na e pela ação do profissional investigador, questionador de sua prática educativa. Não mais um mero repetidor de ações de outras gerações, mas um profissional capaz de fazer coisas novas.

Buscamos com essa pesquisa apresentar subsídios de que o ensino de provas e demonstrações, partindo da experimentação, pode levar o aluno a desenvolver um nível mais elevado de argumentação geométrica.

3.2 Caracterizando o Local da Pesquisa

> Construir um objeto de estudo é um exercício de indagação. Isso implica em compreender que o problema de pesquisa não está à deriva no mundo, pronto para ser descoberto pelo investigador, mas ao contrário ele vai se forjando a partir de inquietações do próprio sujeito que se pretende pesquisar. (CARVALHO, 1995, p.101).

Investigar a construção do conhecimento argumentativo partindo das provas e demonstrações geométricas pressupõe caminhar em dois sentidos diferentes, porém complementares: o primeiro, diz respeito ao estudante da Educação Básica, buscando identificar o nível de prova matemática utilizada por ele para demonstrar uma determinada propriedade geométrica. O segundo, em relação ao estudante do curso de Licenciatura em Matemática, futuro professor da Educação Básica, na perspectiva de verificar como esses alunos compreendem uma prova matemática.

Ao adentrarmos nesse campo investigativo, vivenciamos conflitos que nos fazem transitar entre a certeza e a dúvida, como também, entre as contradições e a necessidade de trazer algo novo para o conhecimento.

Com o intuito de conhecer as percepções dos estudantes de diferentes níveis de ensino em suas construções argumentativas, identificando os saberes que os circundam, parte de nossa pesquisa foi construída com alunos do nono ano do Ensino Fundamental e do terceiro ano do Ensino Médio na escola em que atuo como docente da disciplina de Matemática desde o ano de 2006: Escola Estadual Prefeito Jayme Toledo, localizada na zona urbana do município de Caiana.

Trata-se de um pequeno município da Zona da Mata, região leste do Estado de Minas Gerias que segundo dados do IBGE (2016), conta com uma população estimada de cinco mil, trezentos e noventa e oito (5.398) habitantes, área da unidade territorial de cento e seis vírgula quatrocentos e sessenta e cinco quilômetros quadrados (106,465 km²) e densidade demográfica de quarenta e seis vírgula sessenta e seis habitantes por quilômetros quadrados (46,66 hab/km²).

Cidade que, segundo o Atlas Brasil (2013) do Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento, apresenta um Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) de zero vírgula seiscentos e trinta e três (0,633), índice esse considerado como médio desenvolvimento, sendo sua principal fonte de renda diretamente relacionada à produção cafeeira.

A Escola Estadual Prefeito Jayme Toledo é uma escola pequena com um quadro total de quinhentos e setenta e dois (572) alunos distribuídos em três turnos: matutino, que possui sete turmas, sendo duas do nono ano do ensino fundamental, duas do primeiro ano do ensino médio, duas do segundo ano do ensino médio e uma de terceiro ano do ensino médio; vespertino com três turmas de sexto ano, duas turmas de sétimo ano e três turmas de oitavo ano; e turno noturno, que conta com três turmas de Educação de Jovens e Adultos, uma turma do curso pós médio e uma turma regular de terceiro ano do ensino médio.

Embora esteja situada na zona urbana, a escola possui características bastante semelhantes a uma escola de zona rural, pois, setenta por cento (70%) do corpo discente da mesma é formado por alunos que moram nas comunidades rurais do município. Por ser a única escola estadual do Município e também a única a oferecer ensino fundamental (sexto ao nono ano) e ensino médio, a Escola Estadual Prefeito Jayme Toledo recebe também alunos de outras localidades rurais próximas, pertencentes a outros municípios mineiros, além do município limítrofe, Santa Clara, localizado no Estado do Rio de Janeiro.

Trata-se de uma escola bastante diversificada, tanto do ponto de vista pedagógico quanto do ponto de vista didático, ou seja, as turmas são formadas por alunos com faixa etária bem diferentes.

Em relação à realidade social, constata-se a presença de pontos muito semelhantes: a maioria são “trabalhadores” rurais e ajudam os pais ou “patrões” no cultivo da lavoura, desde o plantio até a safra, o que muitas vezes compromete a frequência escolar, causando defasagem de aprendizagem, culminando com um alto percentual de evasão.

Embora os alunos sejam disciplinados e participativos, as faltas excessivas e a carga horária de trabalho exaustivo a que são submetidos, são fatores altamente prejudiciais ao rendimento escolar, uma vez que a perda de conteúdos base para o entendimento e desenvolvimento de outros subsequentes dificultam a realização de tarefas, principalmente no que diz respeito à interpretação e resolução de problemas. As condições acima explicitadas, além de outros fatores, apontam para a necessidade de construir práticas pedagógicas inovadoras, que estimulem a construção de um raciocínio mais avançado, mais reflexivo e crítico.

Outra parte dessa pesquisa foi estruturada com alunos matriculados no terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Minas Gerias (UEMG) unidade de Carangola, localizada na zona da Mata Mineira, universidade na qual faço parte do corpo docente, desde o início do primeiro semestre de 2013, trabalhando com as disciplinas de Geometria Plana, Geometria Analítica e Geometria Espacial.

Ao iniciar meu trabalho nessa unidade de ensino, a mesma estava passando por um período de transição. Funcionava como uma instituição particular de ensino superior (Instituição Faculdades Vale do Carangola – FAVALE) associada a UEMG. Prestes a ser absorvida pelo Estado como uma unidade de sua rede de ensino, a FAVALE/Carangola através da Lei nº 20.807 de 26 de julho de 2013 que “dispõe sobre a absorção das fundações educacionais de ensino superior à Universidade do Estado de Minas Gerais – UEMG”, no início do segundo semestre de 2013, junto a outros processos, de outras unidades, a Fundação de Carangola teve sua absorção implementada.

Em 30 de novembro de 2013, por meio do Decreto nº 46.539, a Instituição Faculdades Vale do Carangola foi absorvida pela Universidade do Estado de Minas Gerais – UEMG, passando a partir desta data a ser a primeira universidade pública da Zona da Mata Leste de Minas.

O município de Carangola, segundo dados do IBGE (2016) tem uma população estimada em trinta e três mil, quinhentos e treze habitantes (33.513) e área de unidade territorial de trezentos e cinquenta e três vírgula quatrocentos e quatro quilômetros quadrados (353,404 km²). O Curso de Licenciatura Plena em Matemática da FAFILE foi implantado em 1975, reconhecido pelo Decreto nº 79.264, de 14 de fevereiro de 1977, com a renovação de reconhecimento pelo Decreto de nº 40.700, de 11 de novembro de 1999, conferindo ao licenciado o título de Licenciatura Curta em Ciências com Habilitação Plena em Matemática.

Buscando formar professores com amplo domínio do conhecimento matemático, capazes de compreender e transformar a realidade com responsabilidade social, pautados em valores e princípios éticos da profissão, de cidadania e democracia, o curso de Licenciatura em Matemática oferece exclusivamente vagas noturnas, com a intenção de possibilitar aos professores da região, ampliar sua formação e ainda poderem trabalhar durante o dia, para custear seus estudos.

Nessa perspectiva, o curso de Licenciatura em Matemática procura formar professores capazes de desenvolver conhecimentos matemáticos que estimulem o desenvolvimento do espírito científico e do pensamento reflexivo dando-lhes condições e oportunidades de promover uma reflexão teórica e prática sobre a matemática a fim de que possam compreender sua formação profissional como processo contínuo, autônomo e permanente.

Entende-se que o caminho para se chegar à consolidação das ideias geométricas é longo, pois parte da análise do tipo de prova encontrado nas argumentações feitas por alunos da escola básica e da evolução desses argumentos encontrados nos alunos da universidade.

3.3 Os Sujeitos da Pesquisa

> Nosso olhar no trabalho de campo, portanto, é orientado pelas nossas questões e pelo que queremos investigar. Isso significa que não podemos inventar qualquer coisa sobre a realidade nem abarcar sua totalidade. Isso porque algo sempre escapa de nosso olhar e de nossa síntese, por mais atentos e cuidadosos que sejamos. (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 101)

Educar para vida é um grande desafio. Modificar o processo de transformação social através da educação é trilhar um caminho que exige muita dedicação, energia e desejo de mudança de atitude frente ao mundo em que se vive. Para que as mudanças aconteçam é necessário envolver-se com elas, ou seja, fazer parte da mudança.

Considerando a Educação Matemática uma prática social, o desenvolvimento de trabalhos nessa área do conhecimento, segundo Fiorentini e Lorenzato (2012) torna-se importante, pois fornece elementos que nos permitem compreendê-la. A Educação Matemática, enquanto campo investigativo possui um objeto de estudo próprio com uma problemática específica e com suas próprias questões investigativas.

Para Fiorentini e Lorenzato (2012) é por meio da análise criteriosa do discurso dos sujeitos envolvidos na pesquisa que “buscamos chegar à essência do fenômeno pesquisado: a uma resposta a nossa questão” (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p.193). Portanto, mesmo que a pesquisa esteja inserida em uma rede complexa de significados, a resposta, é o ‘pensamento’ dos sujeitos da pesquisa, ou seja, como eles veem, como percebem e como se sentem em relação ao fato pesquisado.

De acordo com Borba e Araujo (2004), as pesquisas em Educação Matemática, devem ser desenvolvidas a fim de que se possam obter modelos de como determinado grupo de alunos ou professores pensam sobre um assunto. Qualquer que seja a alternativa de pesquisa a ser seguida, o sucesso da investigação está diretamente relacionado às experiências e reflexões desses grupos.

Quanto à metodologia empregada nas pesquisas, Fiorentini e Lorenzato (2012) afirmam ser a natureza do objeto de estudo que irá definir qual a melhor abordagem metodológica a ser seguida ou construída pelo investigador. Nessa perspectiva, a presente pesquisa foi desenvolvida de forma que pudéssemos “ouvir” a matemática desenvolvida pelos *sujeitos-colaboradores*[26] da pesquisa. De acordo com Borba e Araujo (2004), esse tipo de metodologia apresenta uma modalidade de pesquisa qualitativa que “enfatiza a valorização da voz do sujeito pesquisado” (BORBA e ARAUJO, 2004, p. 9).

Conforme já sinalizamos, o lócus de nossa investigação foi direcionado a alunos dos anos finais do ensino fundamental e médio da Escola Estadual Prefeito Jayme Toledo, localizada no Município de Caiana e aos alunos do terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática da UEMG, unidade de Carangola. O fato de escolhermos esse campo de pesquisa se justifica pela nossa trajetória docente.

Quanto aos sujeitos-colaboradores dessa investigação, contamos com 28 alunos da turma do nono ano “B” do ensino fundamental, com idades compreendidas entre 14 e 16 anos; 29 alunos do terceiro ano “A” do ensino médio, cujas idades variam entre 17 e 19 anos; e 19 alunos do terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática, na faixa etária de 20 a 34 anos.

A turma do nono ano “B” é formada por vinte e uma meninas e sete meninos, dentre os quais aproximadamente quarenta e sete por cento (47%) são moradores da zona rural e enfrentam diariamente uma viagem de uma hora e meia para chegar até à escola. Devido às estradas rurais do município não serem asfaltadas, em dias chuvosos o ônibus escolar não consegue fazer o transporte desses alunos.

[26] Sujeito-colaborador – de acordo com Fiorentini (2004) “[...] um grupo autenticamente colaborativo é constituído por pessoas voluntárias, no sentido de que participam do grupo espontaneamente, por vontade própria, sem serem coagidas ou cooptadas por alguém a participar. As relações no grupo tendem a ser espontâneas quando partem dos próprios professores, enquanto grupo social, e evoluem a partir da própria comunidade, não sendo, portanto, reguladas externamente, embora possam ser apoiadas administrativamente ou mediadas/assessoradas por agentes externos”. (FIORENTINI, 2004, p. 53).

No que diz respeito à aprendizagem, o grupo encontra-se em níveis bem diferenciados de saberes. Alguns apresentam um nível de compreensão matemática bem mais avançado que outros. Embora sejam bastante disciplinados, percebe-se que alguns desses alunos necessitam de estímulos em forma de desafios a fim de que apresentem uma reação positiva.

O terceiro ano “A” apresenta uma trajetória escolar um pouco conturbada, devido a políticas Educacionais que não tiveram continuidade e não levaram em conta vários fatores relacionados à realidade dos territórios educativos e de seus educandos. No início de 2014, foi implantado o projeto **Reinventando o Ensino Médio**[27] desenvolvido pela Secretaria Estadual de Educação que tinha como principal objetivo o desenvolvimento de um currículo próprio de ensino. Os alunos recém-ingressos no primeiro ano do ensino médio foram submetidos a esse projeto com intuito de receberem uma capacitação voltada para o desenvolvimento do empreendedorismo e gestão de negócios.

Embora a proposta curricular do projeto fosse bastante inovadora, nem a escola, nem os alunos estavam preparados para desenvolvê-lo. Diante disso, no início de 2015 o projeto não teve continuidade e os alunos começaram o segundo ano do Ensino Médio com o currículo baseado no CBC (Currículo Básico Comum).

Dos vinte e nove alunos que compõem essa turma, 21 são meninas e 8 são meninos. Dentre esses, noventa e quatro por cento (94%) são moradores da zona rural e enfrentam a mesma rotina de transporte que os alunos do nono ano “B”. Apesar dos transtornos ocorridos na vida escolar desses alunos durante o primeiro ano do ensino médio, o terceiro ano “A” é uma turma motivada e interessada, principalmente quando lhe é proposta alguma atividade desafiadora.

Um fato muito importante que tem sido observado durante alguns anos na escola, é que o número de meninas nas turmas do turno diurno é bem maior do que o número de meninos. Acredita-se que isso ocorra devido à divisão do trabalho exercido nas lavouras de café. Geralmente, cabe às mulheres organizar as “marmitas” que os homens levam para a lavoura, bem como espalhar o café no terreiro; trabalho esse que executado nas primeiras horas do dia e no fim da tarde. Os homens, no entanto, são responsáveis pela colheita do café e manejo da lavoura; trabalho realizado durante todo o dia.

[27] O Projeto “Reinventando o Ensino Médio” tinha como objetivo principal a reformulação curricular de Ensino Médio da rede pública do estado. Com o propósito de criar um ciclo de estudos com identidade própria e que fosse capaz de propiciar ao estudante condições de ingressar no mercado de trabalho, foi criado um currículo que favorecia a área da empregabilidade. Além disto, o projeto pretendia estimular o jovem a prosseguir seus estudos aprofundando os conhecimentos que havia adquirido com os estudos nas áreas de empregabilidade. (Governo de Minas Gerais, Reinventando o Ensino Médio, 2011).

Devido a essa circunstância, as meninas levantam bem cedo, organizam as marmitas e pegam o transporte escolar. Aos meninos, resta apenas a alternativa de se matricularem no período noturno.

O perfil dos alunos do terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática da UEMG (Universidade do Estado de Minas Gerais), não é muito diferente do perfil dos alunos da Educação Básica. Muitos também são trabalhadores rurais e enfrentam uma rotina de trabalho pesado durante o dia, outros trabalham no comércio local e também possuem uma carga horaria excessiva. Geralmente tentam aproveitar a hora de almoço ou o dia de folga para se dedicarem aos estudos. Grande parte desses educandos reside nos municípios vizinhos de Carangola e depende de transporte Escolar para se deslocar até a Universidade.

No que diz respeito à aprendizagem geométrica, durante algum tempo trabalhando com essa turma tenho observado que grande parte dos discentes não consegue compreender que para provar de forma lógica alguma coisa é preciso partir de alguns elementos que devem ser aceitos com base em uma teoria ou em alguns fatos verdadeiros que envolvem esses elementos. Na maioria das vezes eles encontram grandes dificuldades em argumentar e explicitar com clareza as ideias relacionadas às propriedades geométricas.

Levando em consideração as dificuldades encontradas por esses alunos em expressar suas ideias num processo de prova que conjectura estruturas para a resolução de um problema geométrico, percebe-se que apesar dos esforços feitos nos últimos tempos para aperfeiçoar o ensino-aprendizagem da Geometria na Educação Básica, cada vez mais a maioria dos alunos chega aos cursos de graduação com uma grande defasagem no que diz respeito à sua aprendizagem, principalmente em relação à construção de argumentos que lhes permita provar ou demonstrar uma determinada propriedade geométrica; o que nos remete mais uma vez à inquietação:

“Como esses alunos, hoje ingressos em um curso de Licenciatura de Matemática, amanhã, futuros professores, irão se portar em sala de aula com relação a esse conteúdo?”

3.4 A Atividade Investigativa Experimental

> Entendemos por ciência uma sistematização de conhecimentos, um conjunto de proposições logicamente correlacionados sobre o comportamento de certos fenômenos que se deseja estudar. (EVA LAKATOS, 1991, p. 80)

Desde a antiguidade, até os dias atuais, um camponês, mesmo iletrado, sabe o momento certo da semeadura, adubação e colheita. Esse tipo de conhecimento utilizado pelo camponês no manejo de uma lavoura é um tipo de conhecimento que parte da observação de um determinado fenômeno, transformando-se em uma crença aceita por várias gerações. Porém, esse tipo de conhecimento não garante a certeza de uma boa colheita.

Para chegar a resultados desse tipo, faz-se necessário um conhecimento que se baseie em investigações sistemáticas obtidas de forma racional e que resultem em modelos que possam ser generalizados quando submetidos a uma mesma situação.

Construir modelos de objetos, com base na investigação e experimentação de acordo com Eva Lakatos (1991) são características de uma visão construtivista, que considera como ciência a construção de modelos explicativos para a realidade e não uma representação da própria realidade, em que não se espera apresentar uma verdade absoluta e sim uma verdade aproximada que pode ser corrigida, modificada, abandonada por uma mais adequada aos fenômenos.

Desenvolver a capacidade investigativa e a construção do conhecimento científico com base na experimentação, compõe um dos principais objetivos para o ensino-aprendizagem de matemática de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997):

> "Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação" (PCN: MATEMÁTICA, 1997, p. 06).

No que diz respeito à aprendizagem geométrica, segundo Imenes (1987), deveria iniciar-se nas primeiras séries da Educação Básica através da exploração sensorial de objetos, para que logo cedo as crianças aprendam a reconhecer formas e classificar as figuras, "a fim de que mais tarde sejam capazes de comparar e medir comprimentos, bem como descobrir e identificar as propriedades dessas figuras" (IMENES, 1987, p. 58). Esse processo permite que a criança a partir da investigação e da experimentação construa o conceito de algumas dessas propriedades.

A utilização de atividades de demonstrações experimentais em sala de aula, de acordo com Gaspar (2005) "[..] podem proporcionar situações específicas e momentos de aprendizagem que dificilmente aparecem em aulas tradicionais" (GASPAR, 2005, p.230). Segundo o pesquisador, o impacto que essas atividades provocam na construção do conhecimento do aluno, tanto do ponto de vista cognitivo quanto da aprendizagem de conceitos, confirmam que a experimentação pode ser pedagogicamente válida e significativa.

Com base em estudos desenvolvidos por Figueroa [28], Meseguer Dueñas [29] e Barreiro e Bagnato [30] citados por Gaspar (2005), voltados para o ensino de algumas propriedades da Física, entende-se que a demonstração experimental de uma determinada propriedade em sala de aula acrescenta ao pensamento do aluno elementos da realidade e da experiência pessoal, que segundo Vygotsky (1998) podem preencher uma lacuna cognitiva característica dos conceitos científicos e dar a esses conceitos uma (re) significação. Dessa forma, foram desenvolvidas seis atividades de demonstrações experimentais para serem trabalhadas com as três turmas durante o ano letivo de 2016.

Com intuito de identificar o nível de prova encontrado nas demonstrações feitas pelos alunos envolvidos na pesquisa, com base no modelo proposto por Balacheff (1987; 2000) e com a finalidade de verificar se partindo da experimentação é possível fazer com que desenvolvam um nível de prova mais avançado, buscamos a partir desses experimentos chegar à essência do fenômeno pesquisado, ou seja, a uma resposta à nossa questão.

Relacionando o conteúdo a ser trabalhado em sala de aula com os objetivos da pesquisa, optamos por fazer experimentos que levassem os alunos a investigar, analisar e conjecturar algumas propriedades geométricas.

Os experimentos eram desenvolvidos à medida que iniciávamos um novo conteúdo proposto pelo CBC (Currículo Básico Comum), com as turmas do nono ano do ensino fundamental e do terceiro ano do ensino médio e também com alguns conteúdos propostos no

---

[28] Figueroa et al. (1994) realizaram um trabalho enfocando o uso das atividades de demonstração na Universidade Simon Bolívar, em Caracas, Venezuela. Adotando uma concepção semelhante à das 'lectures demonstrations', as demonstrações foram apresentadas paralelamente às aulas regulares em um auditório com capacidade para duzentas pessoas, em sessões de duas horas, com a frequência média de uma apresentação a cada cinco semanas. Essas sessões foram assistidas voluntariamente pelos estudantes sem controle de presença nem avaliações individuais. Foram analisadas oito seções do programa de demonstrações, assistidas por um total de 640 estudantes da universidade, com frequência de cerca de 70%. Verificou-se que, dos alunos presentes, cerca de 80% permaneciam, no auditório, durante as duas horas de demonstrações. Este fator foi considerado pelos pesquisadores como um indicativo de interesse e da participação ativa dos estudantes na maioria das demonstrações. (Apud Gaspar, 2005).

[29] Meseguer Dueñas et al. (1994) relatam atividades semelhantes realizadas na Universidade Politécnica de Valência, na Espanha. O trabalho, desenvolvido com a disciplina de Física, incluía o uso de equipamentos, vídeos e softwares. Entrevistas realizadas com cerca de 60 alunos mostraram que, para a grande maioria, essas atividades facilitaram a compreensão da teoria. Os autores concluíram que as experiências motivaram os alunos, despertaram neles o interesse pelos temas abordados e tornaram as aulas mais atrativas. (Apud, Gaspar 2005).

[30] Barreiro & Bagnato (1992) desenvolveram um trabalho com aulas demonstrativas com a disciplina Mecânica Geral I, destinada aos alunos dos cursos de Engenharia do Instituto de Física da Universidade Federal de São Carlos, Brasil, durante o primeiro semestre letivo de 1992. As aulas teóricas e de exercícios foram intercaladas e ilustradas com demonstrações experimentais avaliadas, ao final, por meio um questionário respondido pelos alunos. Em linhas gerais, das respostas dos alunos, os autores destacam a importância atribuída a esse tipo de aula como instrumento capaz de concretizar a teoria por meio da prática. Em suas conclusões afirmam que, para os alunos, as demonstrações experimentais tornaram as aulas mais interessantes, os conceitos ficaram mais bem esclarecidos e a fixação da matéria melhorou, fatores esses que ajudaram na compreensão da teoria, nas aplicações e resoluções de exercícios. (Apud, Gaspar 2005).

plano de Ensino das disciplinas de Geometria Analítica e de Geometria Espacial para o curso de Licenciatura.

3.5 As Provas Experimentais

> Informal, quase empírica, a matemática não cresce através de um monótono aumento do número de teoremas improvavelmente estabelecidos, mas através da melhoria incessante de suposições por especulação e critica, pela lógica das provas e refutações. (LAKATOS, 1978, p. 5).

Os experimentos aqui propostos foram estruturados em etapas, que em linhas gerais apresentaram-se organizados da seguinte forma: “introdução”, “desenvolvimento” e “socialização” dos conceitos ou propriedades construídos pelos alunos.

Na “**introdução**” dos experimentos, buscávamos inicialmente fazer uma abordagem geral sobre o assunto que iríamos tratar durante a realização de cada atividade. Acreditamos ser importante que o professor explique para os alunos em que sentido a aula será desenvolvida, pois essa prática possibilita a produção de significados que serão compartilhados entre os alunos e o professor no contexto da atividade proposta.

Nessa perspectiva, procurando “significar” o conceito ou a propriedade geométrica que seria demonstrada a partir da experimentação, na maioria das vezes, introduzimos o assunto com o auxílio de um texto-base, que geralmente trazia uma curiosidade ou alguma aplicação do conteúdo abordado em situações de práticas. O processo de leitura, de acordo com Silva e Rêgo (2006) possibilita meios para que o aluno se torne um agente “ativo e interativo na formação de seu próprio conhecimento” (SILVA e RÊGO, 2006, p. 229).

No “**desenvolvimento**”, procurávamos inicialmente, com base na observação da situação proposta, orientar aos alunos que a partir da manipulação dos objetos representados no experimento formulassem estratégias de soluções para o fato observado. Nessa etapa, solicitávamos que anotassem todas as estratégias construídas e todas as características observadas durante o processo de construção.

Acredita-se que os registros são fundamentais na atividade desenvolvida, tanto para “guardar” um resultado, como para refletir sobre uma “ação” executada. A elaboração de estratégias de resolução de uma situação proposta dá oportunidade ao aluno de aprimorar o pensamento matemático.

Para Lorenzato (2006), esse tipo de metodologia é um “processo que permite ao aluno se envolver com o assunto em estudo, participar das descobertas e socializar-se com os colegas” (LORENZATO, 2006, p.72).

Procurávamos, em cada experimento desenvolvido, a partir da “**socialização**” dos resultados obtidos, com base nos argumentos construídos pelos alunos, fazer uma sistematização das propriedades abordadas por eles, buscando de maneira geral, acrescentar alguns elementos importantes no desenvolvimento do pensamento matemático.

Para Lakatos (1978), essa abordagem também desempenha um papel essencial no processo de aprendizagem, pois possibilita que aluno reconheça a matemática como um conhecimento “social” e que seus significados não devem apenas ser eficientes na resolução de uma determinada situação problema, mas que eles devem ser coerentes com os resultados socialmente reconhecidos.

O quadro a seguir mostra as provas experimentais que foram realizadas com as turmas do nono ano “B”, terceiro ano “A” e terceiro período do curso de Licenciatura, na ordem cronológica em que foram aplicadas, bem como os equipamentos utilizados e as propriedades geométricas abordadas. Logo em seguida faz-se uma breve descrição de cada uma delas.

Quadro 1 – Provas Experimentais desenvolvidas

(Continua)

Experimento	**Conceitos geométricos**	**Material utilizado**	**Número de aulas**	**Turma**
I – Engenharia de Grego.	Condição de alinhamento de três pontos; ponto médio de um segmento e distância entre dois pontos.	Cartolina; régua; caixa de papelão ou mochila.	2h/a	3º ano “A”
II - A Excentricidade dos Planetas e a Primeira Lei de Kepler.	Elementos da elipse; excentricidade da elipse.	Barbante; folha oficio; fita adesiva; caneta; procedimentos para construção geométrica da elipse (em anexo); situação problema e texto-base (em anexo).	2h/a	3º ano “A”
III - Curvas, superfícies e arquitetura.	Elementos da hipérbole; hipérbole; definição de hipérbole.	Barbante; folha oficio; fita adesiva; caneta; procedimentos para construção geométrica da hipérbole (em anexo) e situação problema.	2h/a	3º ano “A”.

Provas Experimentais desenvolvidas

(continuação)

Experimento	**Conceitos geométricos**	**Material utilizado**	**Número de aulas**	**Turma**
IV - Curvas de níveis.	Projeção ortogonal; representação plana de formas tridimensionais; curva de nível; tipos de relevo; perfil topográfico.	300 g de Massa de modelar (por grupo de alunos); cartolina; palito de picolé; linha de nylon; mapa topográfico do Município; projetor de slides; régua.	3h/a	9º ano "B"
V-Provando o Teorema de Pitágoras.	Teorema de Pitágoras e classificação de triângulos quanto à medida de seus ângulos.	Papel quadriculado; lápis de colorir; régua; compasso; transferidor; tesoura; cola e texto-base (em anexo).	2h/a	9º ano "B"
VI- Descobrindo Propriedades das Cônicas com o Geogebra – elipses e hipérboles.	Definição de Elipse; elementos da elipse; excentricidade das elipses; definição de hipérbole; elementos da hipérbole.	Laboratório de informática; software Geogebra 3D; atividades propostas adaptadas do Caderno de Atividades de Geometria Analítica (em anexo).	3h/a	3º período

Fonte: Elaborado pela autora

3.6 Provas Experimentas – etapas e desenvolvimento

> [...] Sujeito não é uma distância para com o social, é sim um ser singular que se apropria do social sob forma específica, transformada em representações, comportamentos, aspirações, práticas etc. (CHARLOT, 2000, p.43).

Apresentamos a seguir a descrição dos experimentos realizados, a situação proposta, os objetivos e procedimentos de cada um. Vale ressaltarmos que as explicações, intervenções e direcionamentos são relevantes em todo o processo de construção do conhecimento do aluno. Assim, planejamos cada etapa desses experimentos com o objetivo de atribuir significado a linguagem matemática.

Entendemos que os alunos participam de forma distinta na apropriação do conhecimento. Alguns se envolvem mais na realização da atividade proposta e outros se envolvem com menor intensidade. Acreditamos, porém, que a metodologia utilizada seja capaz de contribuir nesse processo de ensino-aprendizagem matemática.

3.6.1 Experimento I – Engenharia de Grego

- Situação proposta: “Encontrar uma maneira de projetar um túnel que será construído partindo ao mesmo tempo de dois pontos fixados no contorno de uma montanha”. (Adaptado do Matemática Multimídia, UNICAMP, 1991).
- Objetivo: Aplicar conceitos básicos de geometria analítica na solução de um problema de construção civil, bem como desenvolver a capacidade de planejar, construir e avaliar um projeto.
- Organização da Turma: Grupos com quatro ou cinco alunos.
- Procedimentos: Inicia-se a aula fazendo uma breve explanação sobre o assunto que será abordado; em seguida, propõem-se a situação problema. Na sequência, orientar os alunos a fazer a representação gráfica da situação proposta. Propor aos alunos que criem estratégias para solucionar a situação proposta. No final, faz-se a socialização dos resultados obtidos.

3.6.2 Experimento II – A excentricidade dos Planetas e a Primeira Lei de Kepler

- Situação proposta: “Exceto por pequenas perturbações devido às influências de outros planetas, no Sistema Solar, cada planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica, tendo o Sol em um dos focos (Primeira Lei de Kepler). Dessa forma, as excentricidades das órbitas dos planetas são bem próximas de zero, configurando então órbitas aproximadamente circulares”. Por que isso acontece?
- Objetivo: identificar que esse fenômeno ocorre devido ao fato de que quanto mais próximo de zero estiver o foco, os comprimentos dos eixos maior e menor da elipse tendem a igualar-se, chegando à propriedade de que a excentricidade da elipse é igual c/a.
- Organização da turma: individualmente.
- Procedimentos: inicia-se a aula com a leitura e a interpretação do texto-base deixando que os alunos se posicionem em relação às informações apresentadas; em seguida, faz-se a construção geométrica da elipse, de acordo com o modelo proposto por Costa 2007 (modelo em anexo). Na sequência, propor aos alunos que com base na construção feita apresentem uma solução para a situação proposta; no final, faz-se a socialização dos resultados apresentados pelos alunos.

3.6.3 Experimento III – Curvas, superfícies e arquitetura

- Situação proposta: "Com base na construção feita (Ramo da Hipérbole), compare os valores obtidos entre as distâncias do ponto P aos focos da hipérbole sobrepondo os barbantes e verifique o que essa diferença pode corresponder na hipérbole".
- Objetivos: identificar alguns elementos das hipérboles e apresentar sua definição a partir da construção realizada.
- Organização da turma: individualmente.
- Procedimentos: iniciar o experimento fazendo uma explanação sobre o assunto mostrando imagens de algumas construções arquitetônicas onde são encontradas formas que se assemelham a uma hipérbole. Como essa curva não é muito conhecida pelos alunos, fazer uma apresentação de suas principais características. Se necessário utilizar massa de modelar e um cone feito com papel cartão para mostrar-lhes como essa curva pode ser obtida a partir da interseção deste, por uma superfície plana. Prosseguir o experimento com a construção geométrica do ramo da hipérbole seguindo modelo proposto por Costa (2007), modelo em anexo). **Observação**: nessa etapa julgamos ser necessário que o professor realize a construção no quadro junto com os alunos. Para que os alunos compreendam a condição que define hipérbole, orientá-los a escolher um ponto P qualquer da hipérbole e medir, com o auxílio de um pedaço de barbante a distância desse ponto a cada um de seus focos anotando os valores obtidos. Em seguida comparar os valores entre as distâncias do ponto P aos focos da hipérbole sobrepondo os barbantes e verificar o que essa diferença pode corresponder na hipérbole. Fazer a socialização dos resultados obtidos pelos alunos.

3.6.4 Experimento IV – Curvas de Nível

- Situação proposta: "As curvas de nível são usadas por vários tipos de profissionais como geólogos, engenheiros, cartógrafos e agrônomos. Suas aplicações vão desde análise de erosões até manobras militares. Com base no mapa cartográfico do Município de Caiana (em anexo), onde fica localizada nossa escola, identifiquem um tipo de relevo e com a massa de modelar façam a construção do mesmo. Em seguida façam cortes paralelos no relevo construído começando de baixo para cima e provem que as projeções desses cortes sobre um plano determinam as curvas de nível desse relevo".
- Objetivos: desenvolver experimentalmente os conceitos geométricos de projeção ortogonal; aprimorar a capacidade de visualização e associação de figuras tridimensionais à

uma representação plana; e aplicar conhecimentos geométricos a situações de caráter prático partindo do estudo das curvas de nível e suas aplicações.

- Organização da turma: grupos com cinco alunos.
- Observação: por se tratar de uma aula interdisciplinar para o desenvolvimento do experimento contamos com o apoio da professora da disciplina de Geografia.
- Procedimentos: inicia-se a aula com uma apresentação feita pela professora de Geografia, sobre alguns tipos de curvas de níveis encontrados no entorno da escola e breve explanação sobre o conceito de Relevo. Na sequência, faz-se uma explanação sobre como as curvas de nível são obtidas. Em seguida, divide-se a turma em grupos distribuindo o material necessário ao desenvolvimento do experimento. Nessa etapa é importante deixar os alunos manusear a massa de modelar para que fiquem mais familiarizados com o material. Para isso, sugere-se que construam com a mesma, algumas formas de relevo que podem ser encontradas no percurso feito de suas casas até a escola. Na etapa seguinte, orientar aos alunos a escolherem uma das formas de relevo apresentadas pela professora de Geografia, ou até mesmo utilizar a construção realizada anteriormente por eles, para que possam modelar a mesma e desenvolver com base nela a situação proposta. No final, faz-se a socialização dos resultados obtidos.

3.6.5 Experimento V – Demonstrando o Teorema de Pitágoras

- Situação proposta: "Vamos trabalhar como os matemáticos: vamos demonstrar o Teorema de Pitágoras - *Prove que a área do quadrado que tem o lado com medida igual à medida da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas de outros dois quadrados que têm os lados com medidas iguais aos lados dos catetos desse mesmo triângulo*".
- Objetivos: comprovar a relação métrica conhecida como Teorema de Pitágoras.
- Organização da turma: individualmente.
- Procedimentos: inicia-se a aula com a leitura do texto-base, incentivando os alunos apresentarem suas interpretações e contribuições a respeito das informações apresentadas. Na etapa seguinte, com base nas informações obtidas do texto, apresenta-se a situação proposta. É importante que nessa etapa os alunos formulem uma hipótese e uma tese a partir do Teorema para que então possam prová-lo. No final, propõem-se a socialização dos resultados obtidos com o experimento a fim de que os alunos possam comparar as suas respostas com as de seus colegas.

3.6.6 Experimento VI – Construção de Cônicas com o GEOGEBRA

- Situação proposta: Com base no comportamento das cônicas construídas com o auxílio do GEOGEBRA encontre um modelo matemático que represente cada situação observada.
- Objetivos: desenvolver nos discentes as capacidades de reconhecer uma cônica, seus elementos e demonstrar algumas de suas propriedades a partir de suas representações gráficas.
- Organização da turma: dividir os alunos em duplas ou individualmente, conforme a capacidade do laboratório de informática.
- Procedimentos: inicialmente faz-se uma breve explanação sobre as funções de cada ferramenta do software GEOGEBRA. Na sequência, propõem-se a realização das atividade de construção e análise do comportamento gráfico das Cônicas construídas no desenvolvimento do experimento. Na etapa seguinte, faz-se uma socialização das ideias abordadas no experimento.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

> Nem sempre é possível a quem planeja uma demonstração experimental saber quais os limites ou qual o alcance dessa intersubjetividade, ou seja, quais ideias serão bem entendidas e quais terão sua explicação adiada para uma atividade posterior ou para um futuro mais distante. (GASPAR, 2005, p. 247)

Apresentam-se nesse capítulo a análise das aplicações e os resultados obtidos nos seis experimentos desenvolvidos com as turmas do nono ano B do ensino fundamental, terceiro ano A do ensino médio e terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática.

Como critérios de análise dos resultados, utilizamos os argumentos expressos pelos alunos antes e durante a realização dos experimentos. Fomos anotando todo tipo de questionamento feito e ao final recolhemos todo material produzido, para fim de análises posteriores.

Conforme dito anteriormente, a presente pesquisa buscou responder as seguintes questões:

a) Em que nível de prova encontram-se as argumentações utilizadas por alunos do ensino fundamental, ensino médio e do curso de Licenciatura em Matemática para validar um processo de prova Geométrica?

b) Partindo de "Provas Experimentais" é possível que esses alunos alcancem um pensamento Geométrico mais avançado?

A fim de compreender o nível de prova geométrica utilizado pelos sujeitos da pesquisa em um processo de demonstração, procurou-se fazer uma análise de como os alunos estruturam suas argumentações para provar uma determinada situação de acordo com o modelo proposto por Balacheff (1987; 2000).

Nesse estudo, Balacheff (2000) traz uma noção de prova sobre o ponto de vista da matemática praticada pelo aluno, para isso, utiliza uma abordagem experimental permitindo que os processos de prova utilizados na resolução de um problema possam ser entendidos mais facilmente.

A pesquisa realizada por Balacheff (2000), foi desenvolvida em um ambiente social (escola) que exige uma interação falada do observador (professor), porém, requer que o mesmo faça poucas intervenções nas discussões que forem ocorrendo, a fim de não interferir nas decisões tomadas pelos alunos.

Entre os vários tipos de provas conceituais e pragmáticas, Balacheff (2000), aponta para quatro tipos principais que possuem uma posição privilegiada no desenvolvimento cognitivo do aluno: o empirismo ingênuo, o experimento crucial, o exemplo genérico e a experiência de pensamento.

- Empirismo Ingênuo: consiste em chegar a um resultado verdadeiro através da verificação de vários casos. Estes são muito rudimentares e também são insuficientes meios de prova.
- Experimento Crucial: a expressão experimento crucial refere-se a um experimento que permite que uma escolha seja feita entre duas hipóteses, considerando que o resultado obtido deve ser considerado diferente em uma ou outra hipótese.
- Exemplo Genérico: o exemplo genérico envolve fazer explícitas as razões para a verdade de uma proposição por meio de operações ou transformações feitas em um objeto, ou seja, parte da análise de uma propriedade particular para se chegar a uma propriedade geral.
- Experiência de Pensamento: envolve a ação internalizada destacando-se de uma forma particular de representação. Isso ocorre por meio de um desenvolvimento narrativo temporal, onde as operações e fundamentações das provas percorrem um outro caminho, ou seja, exige uma maior maturidade matemática.

De acordo com Balacheff (2000), essas formas de provas estruturam-se seguindo um tipo de hierarquia construído sob uma ordem de apresentação que depende do tipo de conhecimento envolvido na construção da argumentação. Assim, do empirismo ingênuo para a experiência de pensamento, existe um longo caminho a ser percorrido pelo aluno.

Nas atividades de Provas Experimentais propostas, buscou-se encontrar subsídios que apontassem para importância da utilização das mesmas como base para a construção de um pensamento geométrico mais avançado. Nesse trabalho, o conceito de prova diz respeito ao desenvolvimento e elevação da compreensão que o aluno deve ter. É um conceito que não apenas difunde-se em seu trabalho na matemática, mas é também envolvido em todas as situações onde uma conclusão seja alcançada e a decisão seja construída

Os recortes que apresentaremos a partir de agora são uma síntese dos resultados obtidos nas seis atividades experimentais desenvolvidas. Optamos por realizar algumas transcrições das falas e de alguns pontos que julgamos caracterizadores do processo desencadeado durante os experimentos. Os registros escritos dos alunos foram analisados com intuito de descortinar a relação entre a compreensão expressa pela fala e a escrita usada para representar tal compreensão.

4.1 Experimento I – Engenharia de Grego

Ao iniciarmos o segundo bimestre do ano letivo, no mês de abril, o conteúdo a ser trabalhado com a turma do terceiro ano "A" proposto pelo planejamento anual de acordo com os **Conteúdos Básicos Comuns**[31] (CBC, 2006) de matemática para o ensino médio, propunha o estudo de alguns tópicos de Geometria Analítica, dentre eles: o estudo do ponto e da reta, bem como algumas de suas principais propriedades, como: distância entre dois pontos, condição de alinhamento entre três pontos, ponto médio de um segmento e a equação geral da reta.

O objetivo desse estudo é desenvolver no aluno a capacidade de compreender e utilizar o pensamento geométrico a fim de que possa resolver situações-problema de localização e deslocamento, reconhecendo as noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo.

Procurando relacionar o conteúdo a ser trabalhado com a turma e o objetivo de nossa pesquisa, optamos por iniciar esse estudo partindo de uma atividade experimental, que de acordo com Alves (2002), deve ser entendida como um "objeto didático", ou seja, o produto de uma Transposição Didática capaz de agregar características de versatilidade e contribuir de forma mais significativa para o processo de ensino-aprendizagem. Assim, estruturamos nossa aula com base no experimento "**Engenharia de Grego**[32]".

Adaptado do portal M³ Matemática Multimídia da UNICAMP, o experimento Engenharia de Grego tinha como principal objetivo desenvolver nos alunos a capacidade de planejar, construir e avaliar um projeto, bem como aplicar conceitos básicos de geometria analítica na solução de um problema de construção civil.

Seguindo uma sequência didática que nos parecia mais coerente, introduzimos o assunto proposto para aquela aula fazendo uma explanação geral sobre o conteúdo que iríamos abordar. Com o auxílio do livro didático Matemática Ciências e Aplicações (IEZZI et al., 2014), adotado pela escola para o terceiro ano do ensino médio, apontamos alguns fatos do cotidiano nos quais são aplicados alguns conceitos básicos da Geometria Analítica. Após fazermos essa introdução, organizamos os dezessete (17) alunos presentes naquele dia, em grupos, obtendo assim, três

---

[31] CBC – proposta curricular que estabelece os conhecimentos, as habilidades e competências a serem adquiridos pelos alunos na educação básica, bem como as metas a serem alcançadas pelo professor a cada ano nas escolas da rede pública Estadual de Minas Gerais. A definição dos conteúdos básicos comuns (CBC) para os anos finais do ensino fundamental e para o ensino médio constitui um passo importante no sentido de tornar a rede estadual de ensino de Minas num sistema de alto desempenho.

[32] O experimento "Engenharia de Grego" foi adaptado do portal educacional M³ Matemática Multimídia que contém recursos educacionais multimídia em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp com financiamento do FNDE, SED, MCT e MEC para o Ensino Médio de Matemática no Brasil.

grupos com quatro integrantes cada e um grupo com cinco. Na etapa seguinte, o problema foi dado aos alunos, sem antes explanarmos qualquer definição ou conceito do conteúdo abordado:

> *Encontrar uma maneira de projetar um túnel que será construído partindo ao mesmo tempo de dois pontos fixados no contorno de uma montanha.*

O problema apresentado foi escolhido como forma de se observar a possibilidade dos alunos utilizarem conceitos matemáticos anteriormente adquiridos como base para resolução da situação proposta. Acreditamos que essa contextualização seja muito importante na abordagem com o aluno, pois os mesmos demonstram mais interesse quando o conteúdo é apresentado dessa forma.

Prosseguimos o experimento orientando aos alunos que realizassem os seguintes procedimentos a fim de que pudessem representar graficamente a situação dada:

> *Coloque uma cartolina em um local plano; sobre ela coloque uma mochila que irá simular a montanha; faça o contorno da montanha e marque nesse contorno dois pontos que serão as extremidades do túnel. Anote todas as estratégias que irão utilizar para realizar a tarefa.*

Explicamos apenas o que deveria ser feito para representar a situação proposta, de forma que os alunos pudessem discutir ideias, justificativas, estratégias e argumentos para formulação da solução do problema. Percebemos nesse momento muita interação entre os componentes dos grupos. Notamos que todos estavam empenhados em determinar estratégias para solucionar a situação proposta (como mostra figura 05).

Figura 5 - Alunos desenvolvendo a primeira etapa do experimento

Fonte: Dados da pesquisa

Na sequência, os alunos deveriam planejar como escavar a montanha de forma que as escavações se encontrassem num mesmo ponto. Esperávamos nessa etapa que os mesmos utilizassem alguns conceitos de geometria para decidir em que direção iniciar as escavações em cada uma das extremidades do túnel.

Como não haviam recebido nenhuma sistematização sobre o conteúdo, todos os grupos tiveram muita dificuldade em estabelecer o critério que iriam seguir para resolver o problema proposto. Muitos se queixavam por não saber qual "fórmula" deveriam utilizar para resolver o problema, como pode ser constatado nas transcrições de algumas falas desses alunos:

> *Aluno A: "Professora, qual fórmula nós temos que usar para resolver o problema? (Aluno A, 3ª ano A).*
> *Aluno B: "Professora, em qual página do livro eu encontro a fórmula para resolver essa atividade? (Aluno B, 3º ano A).*
> *Aluno C: "Não temos como resolver o problema, pois a senhora ainda não explicou essa matéria." (Aluno C, 3º ano A).*

De acordo com Nasser e Tinoco (2003), essas manifestações revelam que quando desafiados a resolver uma determinada situação problema, os alunos se limitam a usar um argumento de "autoridade", na maioria das vezes, pelo motivo de não terem sido acostumados a investigar. Assim, ficam esperando que o professor determine quais estratégias devem seguir para chegar à solução do problema proposto.

Esses tipos de questionamentos nos remetem à ideia de que o trabalho com a Matemática enfatiza sempre um conhecimento finalizado, pronto para ser transmitido, ou seja, uma relação ensinar-aprender, em que o professor é aquele que sabe e o aluno deve aprender aceitando passivamente o discurso do professor.

Segundo Hanna (2000), a ocorrência desse tipo de comportamento está relacionada ao fato dos alunos estarem acostumados a lidar com atividades sequenciadas, abordadas sempre de forma mecanizada. Para a pesquisadora, essa abordagem faz com que a Matemática seja trabalhada pela Matemática em si mesma, sem considerar a possibilidade de oferecer ao aluno uma vivência das ideias matemáticas de forma que os mesmos possam compreendê-las.

Consideramos que os conceitos matemáticos são formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão às formulações que enunciam e às verificações que realizam. Nessa perspectiva, tendo em vista os questionamentos feitos pelos grupos, para que se sentissem mais “livres” na investigação da situação proposta, julgamos ser necessário fazer uma intervenção, a fim de esclarecer que eles deveriam criar seus próprios métodos de resolução.

> *“Não tem uma fórmula exata, vocês devem escolher os procedimentos que irão seguir para solucioná-lo. Analisem o problema e construam estratégias para tentar solucioná-lo da maneira que acharem mais conveniente”. (Professora, dados da pesquisa).*

Após essa intervenção percebemos que os alunos sentiram-se mais seguros para assumir e defender posicionamentos, tomar decisões e formular estratégias para tentar solucionar o problema proposto.

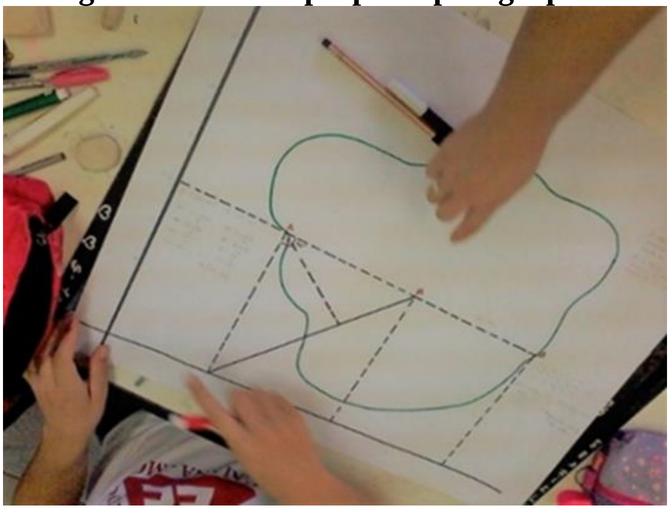
De acordo com Nasser e Tinoco (2003), “é sempre recomendável ouvir o aluno para bem compreender a sua maneira de pensar” (NASSER e TINOCO, 2003, p. 56). Quando esse é convidado a manifestar sua forma de pensar, maior será a possibilidade de aprendizagem, pois o mesmo participa da busca por “significar” as ideias trabalhadas. Nesse sentido, prosseguimos o experimento, sempre nos preocupando em identificar possíveis concepções espontâneas ou explicações prévias dadas por eles.

A cada etapa do processo, procurávamos saber o que os alunos esperavam com a realização dessa atividade. À medida em que propunham suas próprias interpretações para a situação, procurávamos reunir essas ideias no quadro.

Entendemos que essas discussões em grupo e no grupo contribuíram para que os alunos tivessem oportunidade de expor suas opiniões. Percebemos também que os mesmos sentiram-se motivados e desafiados a participar desse processo. No decorrer dessas discussões, recebemos de um determinado grupo, denominado aqui por grupo 01, uma contribuição bastante interessante em relação ao problema proposto:

> *Grupo 01: Para determinarmos a direção em que as equipes deverão escavar precisamos saber onde cada equipe está localizada. Se traçarmos um plano cartesiano, poderemos encontrar as coordenadas dos pontos A e B que se encontram nas extremidades da montanha e assim determinar a distância entre eles. Depois é só encontrarmos o ponto médio desse segmento e assim saberemos o local de encontro das duas equipes. (Grupo 01, 3º ano A, 2016)*

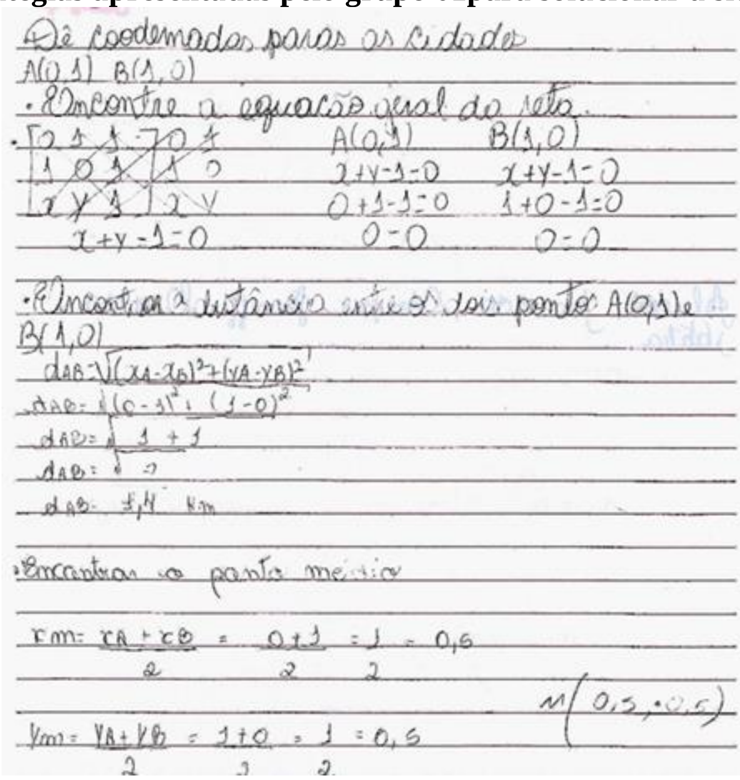
Figura 6 - Modelo proposto pelo grupo 01



Fonte: Dados da pesquisa

Nesse momento, observamos que ao se envolverem com a tarefa de verificar a distância entre as extremidades da montanha, com o propósito de determinar as coordenadas dos pontos A e B, o grupo 01 traçou as estratégias (figura 07) que seguiriam para solucionar o problema. Esse ato propicia o estabelecimento de uma relação com o saber. Na tentativa de solucionar o problema, os alunos recorreram a conhecimentos adquiridos anteriormente e que julgavam ser suficientes para solucionar a situação proposta.

Figura 7 - Estratégias apresentadas pelo grupo 01para solucionar a situação proposta



Dê coodernadas paras as cidades
A(0,1) B(1,0)
• Encontre a equação geral da reta.
0 1 1 0 1 | A(0,1) | B(1,0)
1 0 1 1 0 | $x+y-1=0$ | $x+y-1=0$
x y 1 x y | $0+1-1=0$ | $1+0-1=0$
$x+y-1=0$ | $0=0$ | $0=0$

• Encontrar a distância entre os dois pontos A(0,1) e B(1,0)
$d_{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$
$d_{AB}=\sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2}$
$d_{AB}=\sqrt{1+1}$
$d_{AB}=\sqrt{2}$
$d_{AB}=1,4$ km

• Encontrar o ponto médio
$x_m=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}=0,5$
M(0,5 ; 0,5)
$y_m=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}=0,5$

Fonte: Dados da pesquisa.

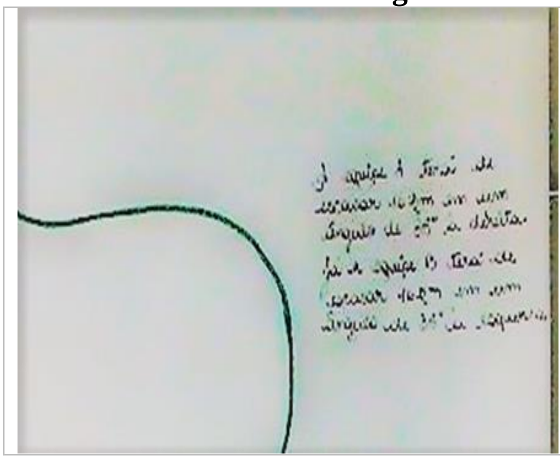
Ao focalizarmos a atividade desenvolvida, constatamos que as ideias utilizadas para solucionar o problema fazem parte de uma habilidade mental do aluno que lhe permite reconhecer e identificar algumas relações matemáticas, que de acordo com Nasser e Tinoco (2003), está diretamente ligada à capacidade de justificar conceitos.

Considerando a importância da construção do conhecimento, vemos nos argumentos construídos pelos alunos um grande valor educacional, pois, ao determinar as estratégias que seguiriam para solucionar a situação proposta, eles trabalharam com afirmações que descreviam, de maneira bastante próxima, uma situação vivida expressa numa linguagem matemática estruturada e formalizada de acordo com a sua percepção.

Analisando as estratégias construídas pelo grupo e a solução apresentada para o problema, verificamos que, de acordo com Balacheff (1987), o tipo de argumentação utilizada pelos alunos para provar o resultado obtido é conhecida como "Prova Pragmática" e classificada como "Empirismo Puro". Nesse tipo de prova o aluno tira suas conclusões a respeito de uma determinada situação a partir de um pequeno teste que realiza.

Nessa caracterização, fica implícita a ideia de que, ao desenvolverem estratégias para solucionar uma determinada situação dada, os alunos não se preocupam em demonstrar esse fato como uma verdade matemática, ou seja, buscam apenas encontrar resultados, que na maioria das vezes apresentam-se de forma bastante empírica, mas que de certa forma consideram solucionar o problema. Como pode ser notado na solução apresentada pelo grupo 04.

Figura 8 - solução proposta pelo grupo 04



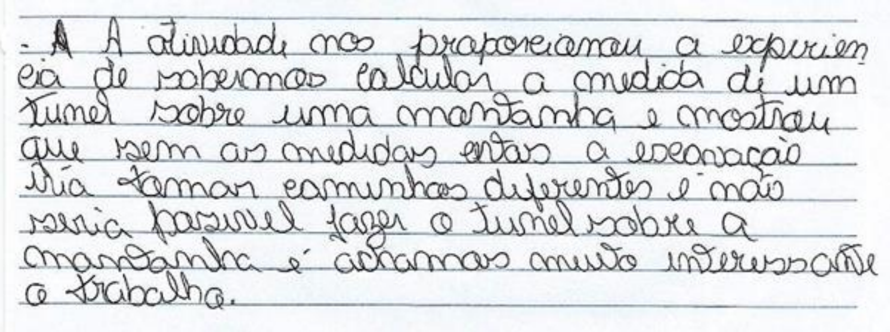
"A equipe A terá de escavar 16km em um ângulo de 35º à direita. Já a equipe B terá que escavar 16 km em um ângulo de 35º à esquerda". (Solução apresentada pelo grupo 04 para a situação proposta)

Fonte: Dados da pesquisa

Na sequência, propusemos aos alunos a socialização dos resultados obtidos para que os mesmos analisassem as estratégias desenvolvidas por eles e pelos demais grupos, a fim de que pudessem verificar a validade dos argumentos construídos e os possíveis erros cometidos.

Durante a socialização dos resultados, constatamos que os alunos perceberam a necessidade da generalização das ideais matemáticas e reconheceram a importância do conhecimento científico como forma de preencher o sentido das ideias trabalhadas (figura 09).

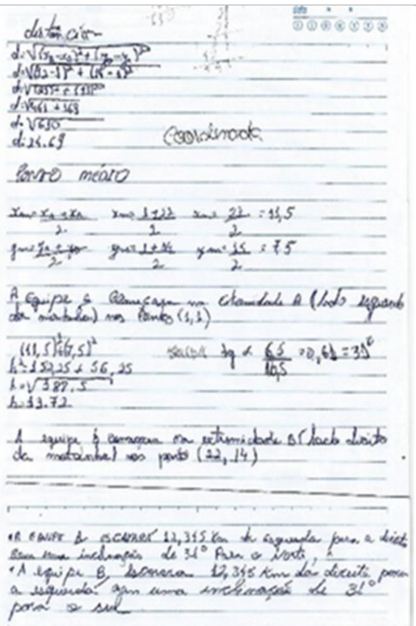
Figura 9 - Comentário feito pelo aluno Y em relação a atividade desenvolvida


A atividade nos proporcionou a experiencia de sabermos calcular a medida de um tunel sobre uma montanha e mostrou que sem as medidas entao a escavação iria tomar caminhos diferentes e não seria possivel fazer o tunel sobre a montanha e achamos muito interessante o trabalho.

Fonte: Dados da pesquisa.

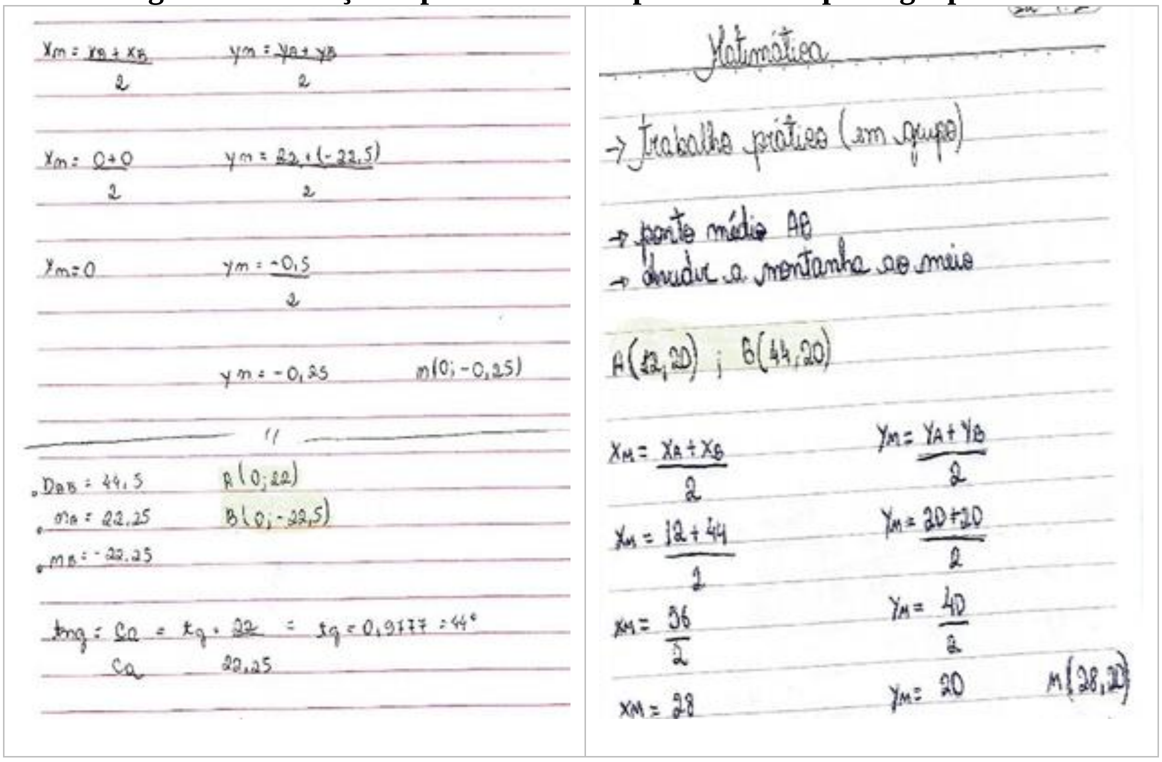
Observamos nessa etapa, que embora as estratégias utilizadas por todos os grupos para solucionar a situação proposta fossem as mesmas, cada grupo distinguiu sua referência espacial com base na localização dos pontos que haviam fixado nas extremidades da montanha. Notamos que, enquanto no primeiro argumento (grupo 02) os alunos buscaram descrever com palavras todos os procedimentos necessários para que as equipe “A” e “B” efetuassem as escavações, nos outros dois argumentos construídos (grupo 03 e grupo o4) os alunos limitaram-se apenas em apresentar as operações matemáticas que realizaram para chegar à conclusão apresentada.

Figura 10 – Estratégias apresentada pelo grupo 02

	Distância $... \boldsymbol{d} = \sqrt{\mathbf{24,69}}$ Coordenada Ponto médio $... \boldsymbol{x_m} = \mathbf{11,5}$ $... \boldsymbol{y_m} = \mathbf{7,5}$ A equipe “A” começara na extremidade A (lado esquerdo da montanha no ponto (1,1) ... A equipe “B” começara na extremidade B (lado direito da montanha no ponto (22,14). A frente A escavará 12,345 km da esquerda para a direita com uma inclinação de 31° para o Norte. A equipe B escavará 12,345km da direita para a esquerda com uma inclinação de 31° para o Sul.

Fonte: Dados da pesquisa.

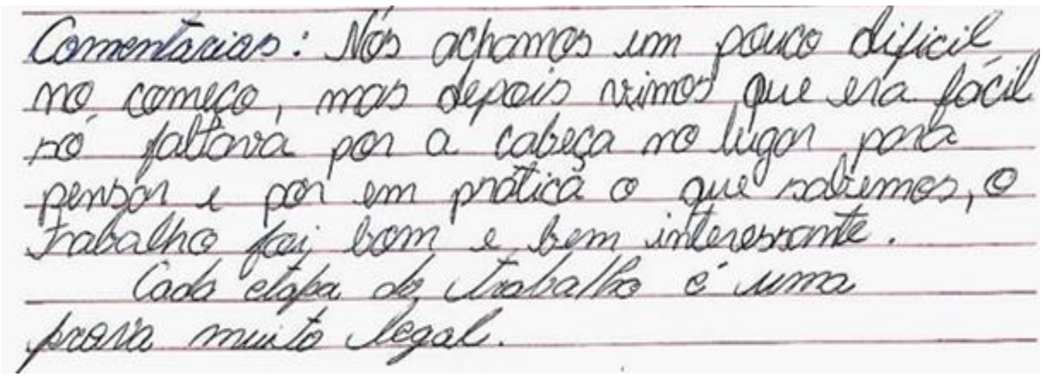
Figura 11 - Soluções apresentadas respectivamente pelos grupos 03 e 04



Fonte: Dados da pesquisa.

Para Lakatos (1978) essas contradições apresentadas, são favoráveis para o crescimento do conhecimento matemático do aluno. Segundo o pesquisador, “o ponto de partida para todo processo de desenvolvimento matemático é encontrado na experiência que uma contradição pode proporcionar” (LAKATOS, 1978, p.45). É importante destacarmos, que a proposta de trabalho aqui apresentada valoriza o raciocínio e estimula o interesse do aluno, como pode ser notado no comentário feito pela aluna “B” a respeito da atividade realizada (figura 12).

Figura 12 - Comentário da aluna “B” do 3º ano A


Comentários: Nós achamos um pouco difícil
no começo, mas depois vimos que era fácil
só faltava por a cabeça no lugar para
pensar e por em prática o que sabemos, o
trabalho foi bom e bem interessante.
Cada etapa do trabalho é uma
prova muito legal.

Fonte: Dados da pesquisa.

Dessa forma, acreditamos que o experimento desenvolvido deu ênfase à comunicação de ideias e à contínua construção do conhecimento matemático produzido. Percebemos nas interações entre os alunos e nas exposições de ideias e estratégias apresentadas durante o desenvolvimento do experimento uma crescente autonomia intelectual e crítica.

Ao final do experimento, não nos preocupamos em apresentar uma sistematização da solução do problema proposto. Após as apresentações dos grupos, a partir dos argumentos e das estratégias construídas por eles, apenas buscamos demonstrar as propriedades geométricas que utilizaram em suas argumentações, a fim de auxiliar na construção de um pensamento geométrico mais avançado.

4.2 Experimento II – A excentricidade dos Planetas e a Primeira Lei de Kepler

Esse experimento foi desenvolvido com a turma do terceiro ano "A", com o objetivo de trabalhar o conceito de elipse, bem como a definição de algumas de suas propriedades partindo da construção geométrica. O experimento foi realizado no segundo bimestre do ano letivo escolar de 2016, no final do mês de maio, quando iniciamos o estudo das "Superfícies Cônicas".

Para despertar o interesse da turma sobre o assunto que iriamos tratar, introduzimos o experimento com a leitura do texto: "**As órbitas dos Planetas**" (IEZZI et al, 2014, p. 96). O texto traz uma breve explanação sobre o modelo Heliocêntrico, proposto inicialmente pelo astrônomo austríaco Aristarco de Samos [310 a.C – 230 a.C.] e retomado posteriormente pelo astrônomo polonês Nicolau Copérnico [1473 - 1543], além disso, contém também algumas informações sobre as *Órbitas Elípticas dos Planetas e a Primeira Lei de Kepler*.

As informações contidas no texto, de fato despertaram muito o interesse dos alunos. Antes mesmo de terminarmos a leitura, percebemos que duas alunas apresentavam-se incomodadas com as informações ora apresentadas. Fizemos então uma pausa e pedimos as mesmas que compartilhassem aquela inquietação com a turma. Embora tivessem ficado um pouco envergonhadas, uma das alunas aqui denominada de Aluna "X", fez o seguinte questionamento:

> *Aluna X: Por que a maioria das descobertas foram feitas antigamente? Como aquelas pessoas conseguiam descobrir tantas coisas naquela época?*

Nesse momento, outra aluna da turma, denominada Aluna "Y" fez a seguinte intervenção:

> *Aluna Y: Porque eles tinham "curiosidade".*

Para Bicudo (2010), o trabalho interdisciplinar revela uma característica muito importante na construção do conhecimento. Os saberes manifestos da ação reflexiva vão obtendo significados e diferentes perspectivas são alcançadas dando oportunidade aos alunos de relacionar o que já sabem ao conhecimento que está sendo construído.

Aproveitamos o diálogo iniciado, com o objetivo de estabelecer uma conexão entre o questionamento feito pela aluna X e a atividade que iríamos realizar. Buscamos, então, explicitar que toda "descoberta" requer uma interrogação e uma natureza investigativa:

> *Professora: Uma descoberta não é uma tarefa que exige apenas um olhar para o que está pronto é uma ação que se relaciona integralmente com uma busca incessante por uma reposta.*

Para Lakatos (1978), a "atividade investigativa é uma atividade humana" e certos aspectos dessa atividade podem emergir e desenvolver-se a partir de uma mente cheia de questionamentos e ideias (LAKATOS, 1978, p. 186).

Após várias discussões a respeito das informações contidas no texto, prosseguimos o experimento. A fim de que pudéssemos analisar precisamente o tipo de argumentação utilizada por cada aluno no desenvolvimento desse processo, orientamos aos mesmos a realizarem as próximas etapas do experimento individualmente.

A etapa seguinte do experimento consistia em realizar a construção geométrica da elipse e optamos por fazer essa construção na lousa junto com os alunos, utilizando o modelo proposto por Costa (2007).

A cada passo dessa construção, procurávamos interagir com os alunos procurando verificar possíveis dificuldades encontradas por eles nesse processo. A turma estava muito envolvida com a realização dessa atividade, por isso não identificamos nenhum aluno com dificuldade em compreender os procedimentos utilizados.

Realizado o experimento, orientamos aos alunos que observassem a construção obtida e identificassem alguns pontos que considerassem importante na curva. Partindo dessa observação, propusemos a eles o seguinte desafio:

> *Exceto por pequenas perturbações devido às influências de outros planetas, no Sistema Solar, cada planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica, tendo o Sol em um dos focos (Primeira Lei de Kepler). Dessa forma, as excentricidades das órbitas dos planetas são bem*

> *próximas de zero, configurando então órbitas aproximadamente circulares. Por que isso acontece?*

A ideia aqui apresentada é mostrar a possibilidade de focalizar aplicações interessantes ao ensino de matemática, sem eliminar tópicos importantes dessa disciplina. Os conhecimentos desenvolvidos nesse experimento são “tradicionais”, porém à abordagem de ensino é que determina o processo de produção de significados que serão construídos pelos alunos.

Nessa perspectiva, esperávamos que os alunos fossem capazes de identificar que esse fenômeno ocorre devido ao fato de que quanto mais próximo de zero estiver o foco, os comprimentos dos eixos maior e menor da elipse tendem a igualar-se.

Participaram desse processo de construção vinte e três (23) alunos. Para que pudéssemos analisar os argumentos construídos, optamos por agrupar o material coletado de acordo com o nível de prova apresentada. A fim de preservar as identidades dos alunos envolvidos na pesquisa, utilizamos letras maiúsculas do nosso alfabeto para identificá-los.

4.2.1 Tipos de provas Observados:

Nessa etapa pesquisa faremos uma análise mais detalhada das fases de validação dos argumentos apresentados pelos alunos durante o processo de desenvolvimento do experimento com intuito de verificar as dificuldades encontradas nesse processo de ensino-aprendizagem.

- **Empirismo Ingênuo - Baseado na Experimentação**

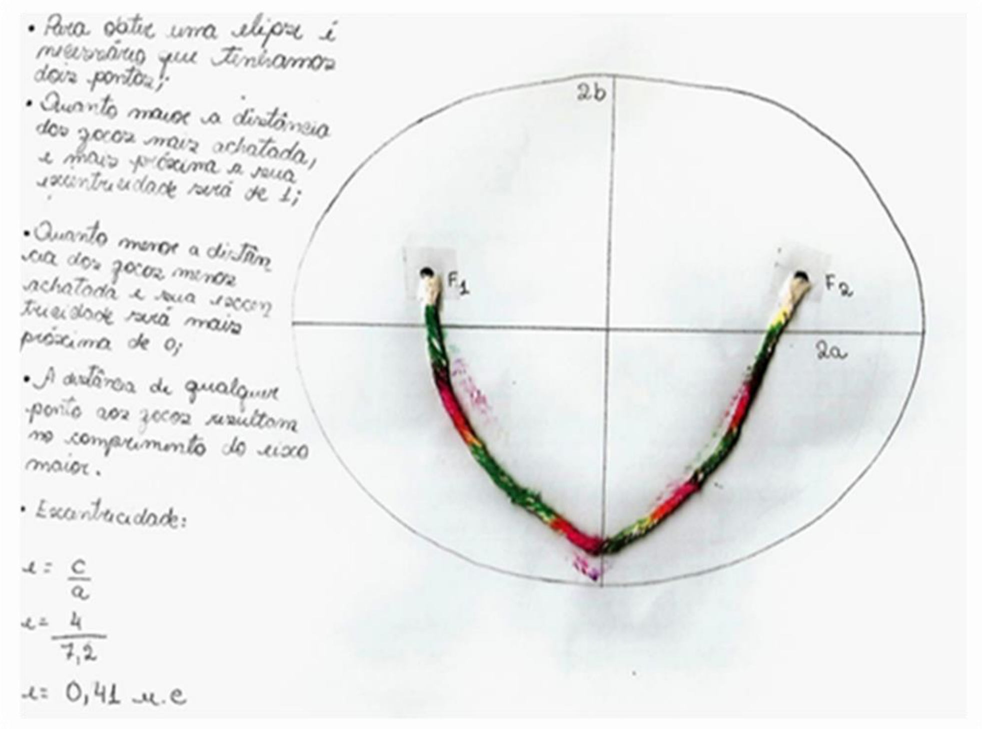
De acordo com Balacheff (1988), esse procedimento de prova (Empirismo Ingênuo) é marcado pela ausência de processos de validação. Para o pesquisador, nesse tipo de argumentação os alunos estabelecem a solução para uma situação proposta com base na experimentação de alguns exemplos.

> No empirismo ingênuo, os alunos determinam experimentalmente que o número de diagonais de um certo pentágono é 5; modificam a forma do pentágono e conferem novamente a constatação inicial; daí concluem que um hexágono tem 6 diagonais. (BALACHEFF, 1988, p. 218)

Segundo Hanna (2000) nessa abordagem, o aluno busca a partir da observação, explicar o “porque” daquela conjectura ser verdadeira. Porém, para a pesquisadora esse caráter de prova apresenta-se apenas como uma maneira de produzir “um argumento convincente” não demonstrando o resultado matemático conforme os padrões de rigor necessários.

Podemos observar esse tipo de construção mental no argumento construído pela aluna E (Figura 13).

Figura 13 - Argumento apresentado pela aluna E para justificar a situação proposta



Fonte: Dados da pesquisa.

Verifica-se no argumento construído, que a aluna busca inicialmente “definir” algumas propriedades da curva apresentada, em seguida, justifica a situação proposta a partir da experimentação de um exemplo com intuito de “convencer” porque a argumentação construída é válida.

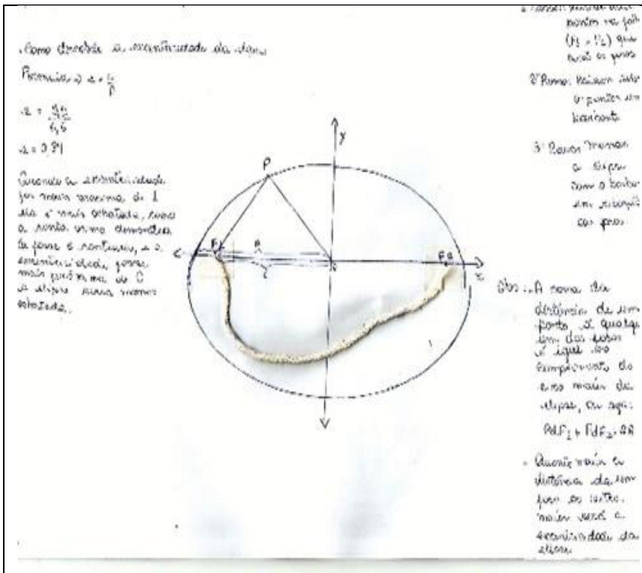
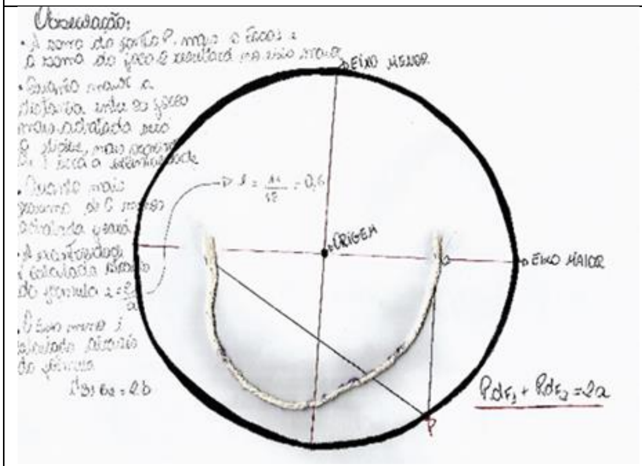
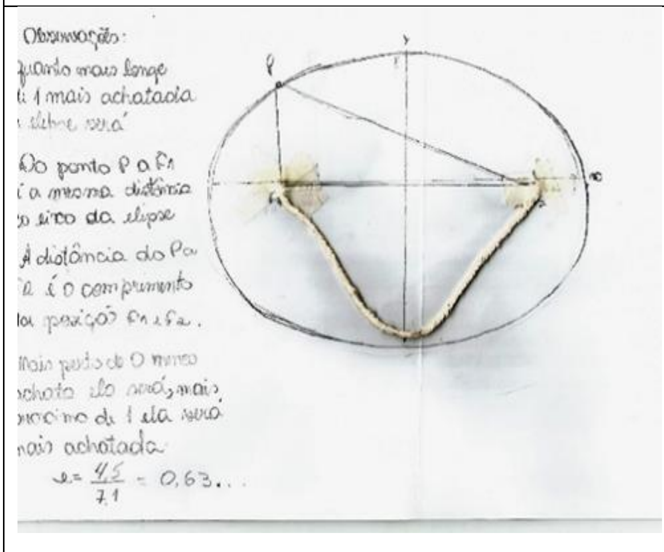
Acreditamos que esse tipo de comportamento esteja relacionado ao fato dos alunos não estarem acostumados a trabalhar com atividades de provas geométricas. Sabemos que as experiências matemáticas ocorrem no campo das “ideias”, no uso da imaginação, por isso, faz-se necessário que o professor construa um espaço em suas aulas para introduzir o aluno na experiência e vivência que compõem o método científico.

Notamos que, embora o argumento construído apresente-se de forma bastante rudimentar e também insuficiente para provar a situação proposta, podemos afirmar que, segundo Balacheff (1988) esse tipo de argumentação é um passo inicial para um processo de generalização.

Percebemos essa mesma forma de argumentar utilizada pela aluna E, em onze (11) dos vinte e três (23) casos analisados, conforme quadro 02.

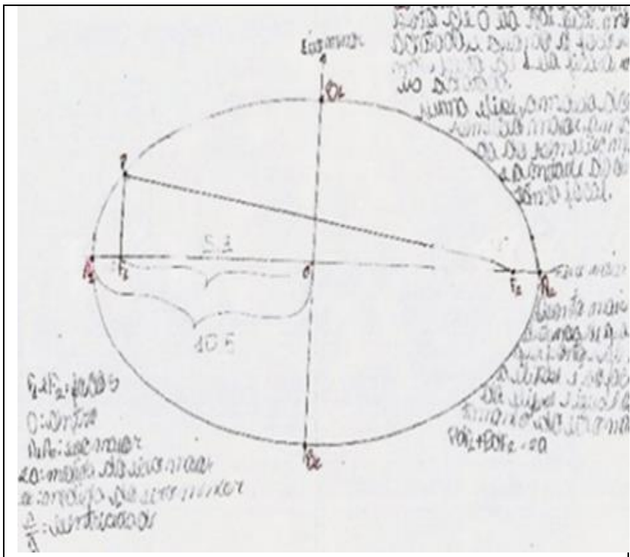
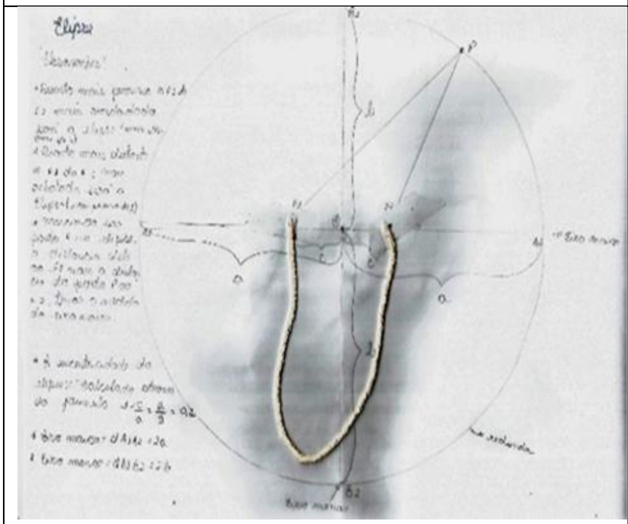
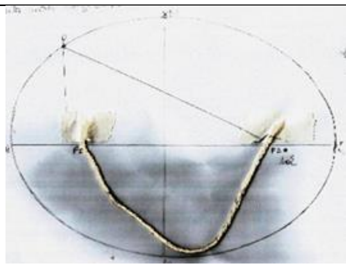
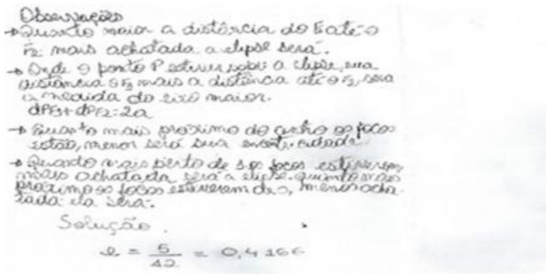
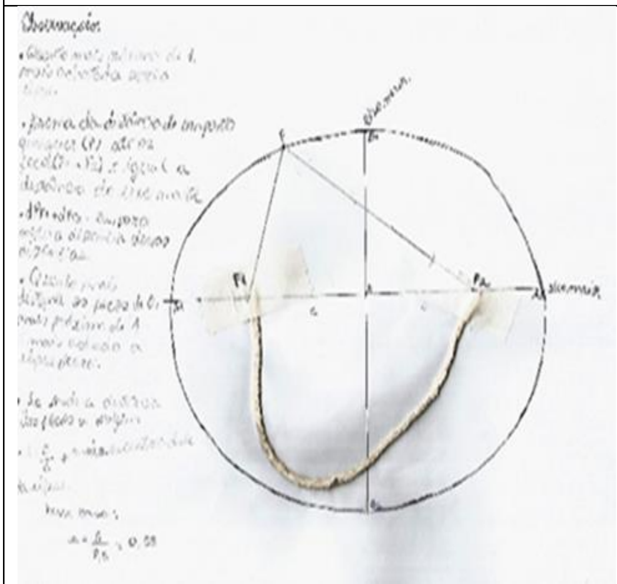
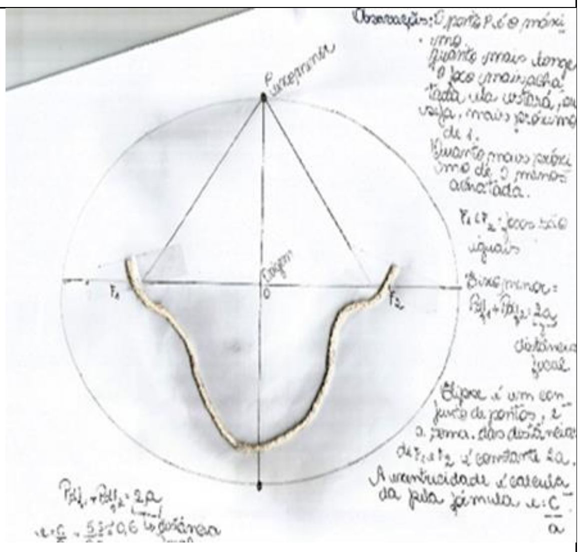
Quadro 2 - Nível de argumentação Empirismo Ingênuo

(Continua)

	**... Quando a excentricidade for mais próxima de 1 ela é menos achatada, como mostra a construção. Se for mais próxima de zero será menos achatada...**
	**Observação:** **A soma do ponto P mais os focos e a soma do foco resultará no eixo maior... quanto maior a distância entre os focos mais achatada será a elipse e mais próxima sua excentricidade será de 1... a excentricidade é calculada pela fórmula e=c⁄a ...**
	**Observação:** **Focos mais longe de 1 mais achatada será a elipse ... mais perto de zero menos achatada...** **e= 4,5⁄7,1=0,63…**

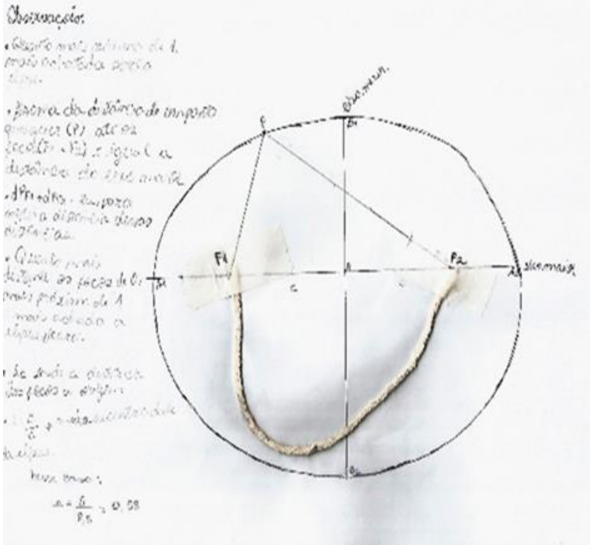
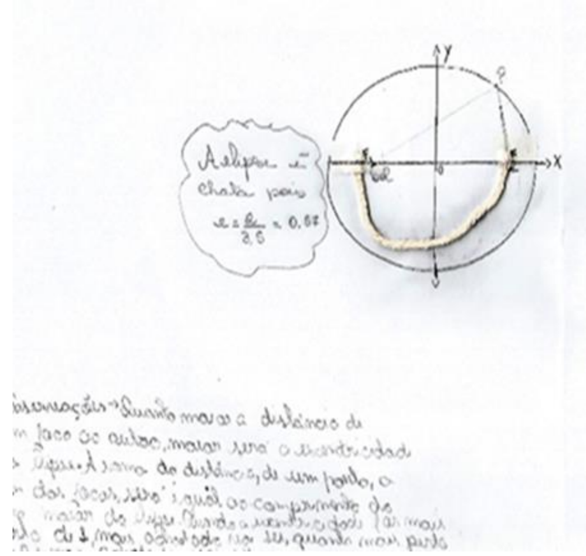
Nível de argumentação Empirismo Ingênuo

(continuação)

	... Quando a excentricidade for mais próxima de 1 ela é menos achatada, como mostra a construção. Se for mais próxima de zero será menos achatada...
	 
	

Nível de argumentação Empirismo Ingênuo

(continuação)

Fonte: Dados da pesquisa.

De acordo com os resultados apresentados nesse experimento, observamos que os alunos demonstraram confiança em suas palavras. Faz-se necessário, porém, que a justificativa que constitui a base da validação do argumento construído, apoie-se sobre uma análise das propriedades do objeto em questão não de maneira particular, mas sim de forma generalizada.

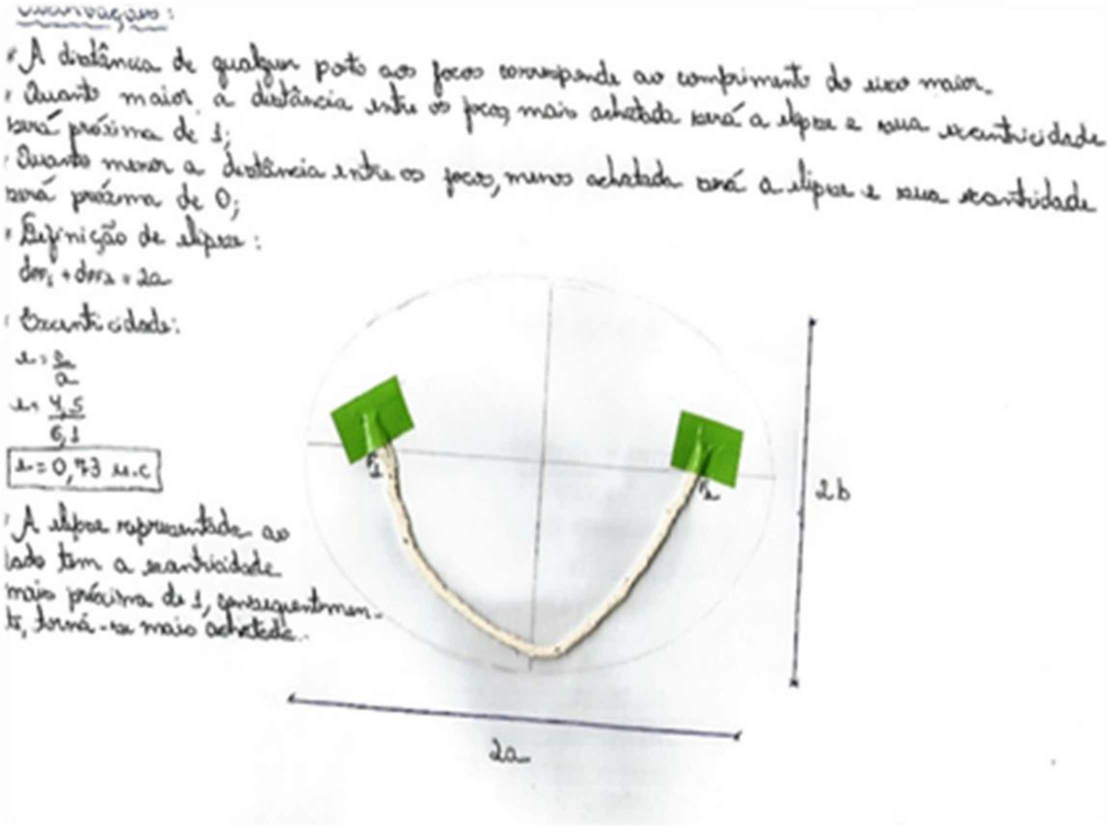
- **Exemplo Genérico**

Balacheff (1988) classifica o "Exemplo Genérico" como o tipo de prova em que o aluno apoia-se em um "caso particular" para validar as conclusões a respeito de uma determinada propriedade ou estrutura. Nesse caso, o aluno elege aquele modelo para generalizar a situação apresentada.

> No exemplo genérico os alunos utilizam o caso particular do hexágono para explicação, mas desprendem-se de particularidades, o que dá indícios de pensamento dedutivo: "num polígono com 6 vértices, em cada vértice temos 3 diagonais. Assim são 18 diagonais; mas como uma diagonal une dois pontos, o número de diagonais é 9. O mesmo acontece com 7 vértices, 8, 9. (BALACHEFF, 1988, p. 228)

Essa característica pode ser observada nos argumentos construídos pela aluna M (figura 14). Na justificativa apresentada por ela, percebemos uma melhor compreensão da linguagem formal. Observamos que a mesma utilizou o exemplo experimentado para asseverar a verdade da afirmação feita procurando deixá-lo com uma característica que representasse todo um grupo de objetos.

Figura 14– Justificativa apresentada pela aluna M



Fonte: Dados da pesquisa.

Constata-se assim, que no argumento apresentado, além de expor sua opinião, a aluna comprometeu-se em buscar explicações lógicas que respondessem o fenômeno observado, permitindo a compreensão sobre a forma como concebeu a solução apresentada.

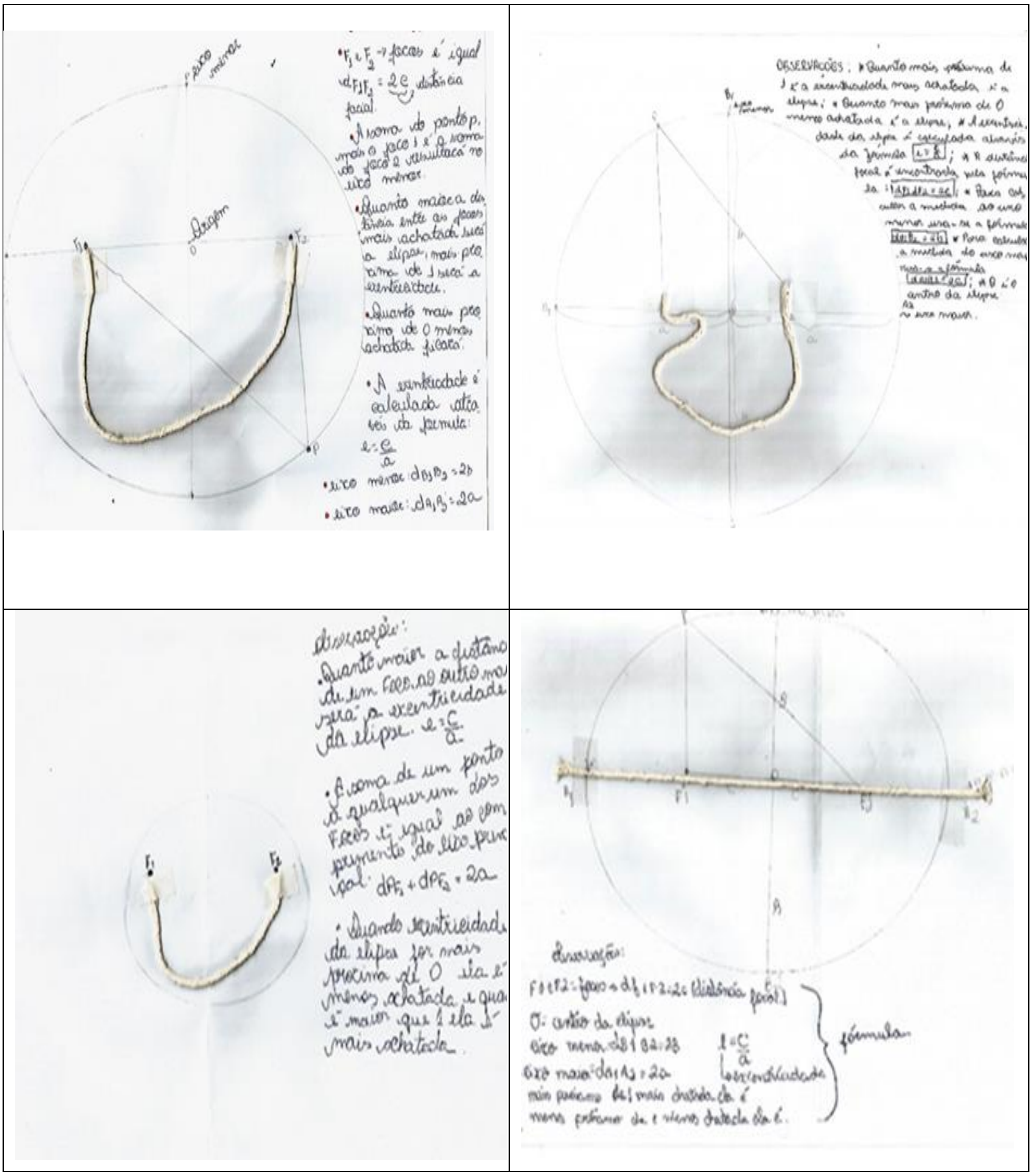
Reconhece-se nesse argumento uma mudança na forma de pensar sobre a situação proposta, o que para Balacheff (1988) corresponde à necessidade de assegurar a generalidade da conjectura apoiada. No entanto, ao apoiar-se num caso particular, fica evidente que o nível de argumentação apresentada pela aluna “M” remete à mesma racionalidade empírica utilizada numa prova baseada no “Empirismo Ingênuo”, ou seja, parte da experiência.

- **Recorrência a um Argumento de “Autoridade”**

Em quatro (04) dos casos analisados, observa-se que as tentativas dos alunos em estabelecer uma prova por meio de uma argumentação lógica esbarra na dificuldade de desvincular-se do fato de não ter uma “fórmula” resolutiva pré-estabelecida pelo professor.

A falta de um conhecimento prévio levou esses alunos utilizarem em suas argumentações, definições apresentadas no livro didático (quadro 03).

Quadro 3– Recorrência a um Argumento de Autoridade



Fonte: Dados da pesquisa.

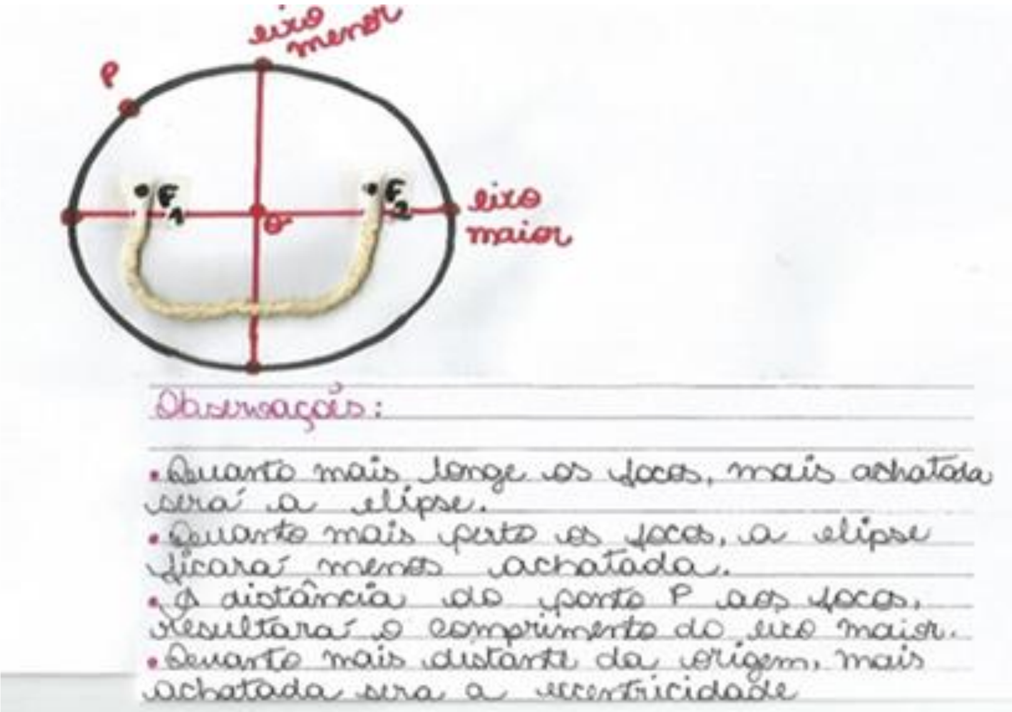
Em relação às características das expressões linguísticas apresentadas nesse tipo de argumentação, observa-se que são insuficientes para tornar claro o nível de prova utilizada pelo aluno, pois, suas justificativas são construídas sobre definições ou propriedades explicitadas no livro.

De acordo com Nasser e Tinoco (2003) a "capacidade do aluno de justificar uma afirmativa está ligada à formação dos conceitos" (NASSER e TINOCO, 2003, p. 62). Nesse sentido, a recorrência a um argumento de “autoridade” pode indicar a falta de compreensão do que foi proposto.

- **Empirismo Ingênuo - Baseado nos Aspectos cognitivos**

Considerando os aspectos do desenvolvimento cognitivo dos alunos, percebe-se que, na maioria das vezes a maneira como conjecturaram os resultados, apontam para a forma como compreenderam a situação proposta, tal qual se observa no argumento construído pelo aluno “A” (Figura 15).

Figura 15 - Resposta dada a situação proposta pelo aluno A



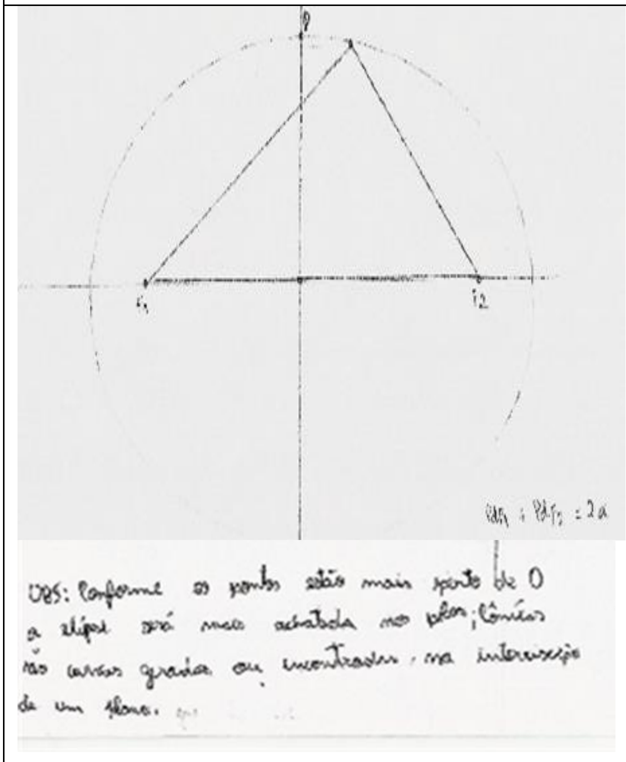
Fonte: Dados da pesquisa.

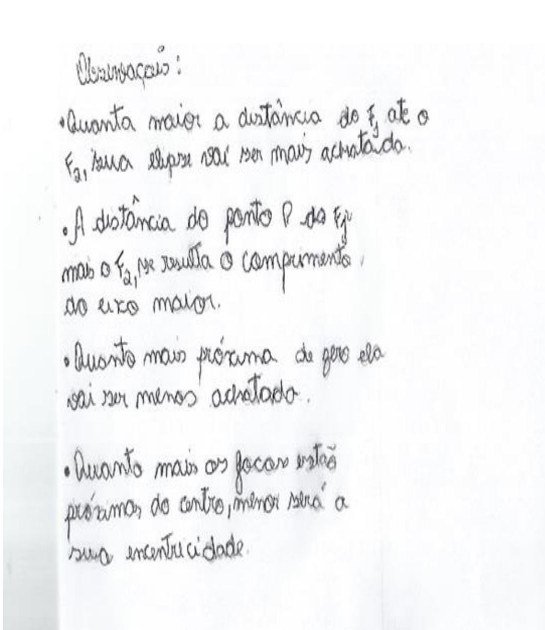
Nesse argumento o aluno busca apresentar em sua justificativa informações que ele obteve a partir da experiência estabelecida com base no esboço do gráfico. Para Balacheff (1988) esse tipo de prova também pode ser classificada como “Empirismo Ingênuo”, pois embora a argumentação construída apresente-se teoricamente incompleta ou parcialmente correta, a complexidade da explicação dada obedece aos limites cognitivos desse aluno, ou seja, sua zona de desenvolvimento imediato.

Percebe-se esse tipo de construção mental em sete (07) dos vinte e três (23) casos analisados. Nas justificativas construídas, é possível constatar que embora tenham chegado a um resultado verdadeiro, a argumentação foi apresentada de forma bastante rudimentar e também insuficiente para provar a situação proposta.

Quadro 4- Empirismo Puro baseado no aspecto cognitivo do aluno

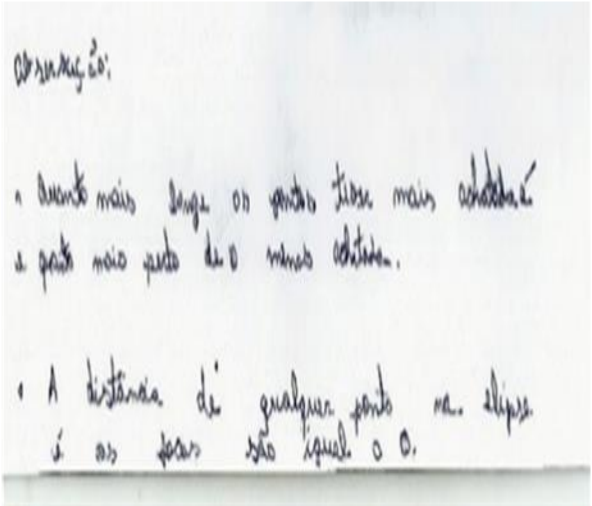
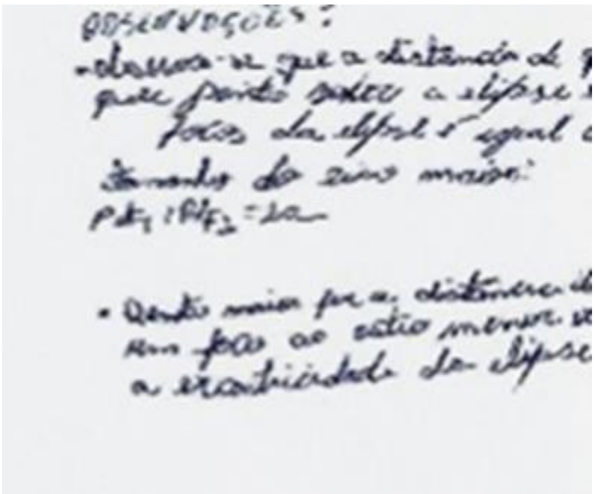
(Continua)





Empirismo Puro baseado no aspecto cognitivo do aluno

(continuação)

Fonte: Dados da pesquisa.

As justificativas apresentadas por esses alunos podem ser interpretadas como uma leitura compreensiva de uma representação visual gráfica. Para Balacheff (2000) existe uma complexidade que não é apenas linguística, mas que também tem origens cognitivas. Nesses casos os alunos tentam expressar o processo de maneira interativa, mas para "dominá-lo", eles não têm as ferramentas conceituais necessárias. Assim, as provas aparecem como "explicações" realizadas em um determinado momento para um determinado grupo social.

No experimento realizado, houve a percepção de que o nível de prova “Empirismo Ingênuo” é dominante entre as justificativas apresentadas pelos alunos. Na análise dos argumentos evidencia-se que a falta de uma linguagem matemática mais rigorosa pode estar relacionada à ausência do desenvolvimento no aluno de ferramentas conceituais necessárias para a prova.

Em todos os argumentos analisados, percebe-se que alguns dos alunos reconhecem a necessidade de uma prova matemática, mas que a maioria deles não tenta produzi-la. Na verdade eles ficam num nível de prova que é consistente, por um lado, com o nível de certeza que eles julgam ser necessária para provar a situação proposta e, por outro lado, com o cognitivo e construções linguísticas que eles são capazes de realizar.

4.3 Experimento III – Curvas, superfícies e Arquitetura

Existem diferentes caminhos para se chegar a um processo de aprendizagem significativa. Hoje a ideia de que a “meta” principal da matemática não é o ensino de conteúdo, mas sim o desenvolvimento de “competências” gera um profundo mal entendido no que diz respeito ao seu ensino-aprendizagem. Entende-se que os conteúdos matemáticos não devem ser tratados como um fim, em si mesmos; mas que devem desempenhar o papel de mediação entre o conhecimento (em seu sentido pleno) e o meio para o desenvolvimento de tais competências e habilidades.

Deve-se reconhecer que a aquisição do conhecimento exige uma organização social e intelectual e que cada uma de suas etapas constitui uma área de investigação pautada no ensino e aprendizagem de conteúdos escolares. Assim, torna-se necessário dar oportunidade ao aluno de buscar meios para construir de forma significativa a própria ação de aprendizagem.

Prosseguindo o estudo das “**Superfícies Cônicas**”, iniciado com a turma do terceiro ano “A”, no final do mês de maio do ano de 2016, foi introduzido o conteúdo relacionado ao estudo das Hipérboles, partindo da atividade experimental “**Curvas, Superfícies e Arquitetura**”.

Sabe-se que muitas vezes, falta tempo para o estudo completo das cônicas no ensino médio. Entretanto, é necessário que algumas ideias centrais sejam construídas. Dessa forma, buscamos com esse experimento trabalhar a definição de “hipérbole” de forma que pudéssemos levar os alunos a perceber a importância de um conhecimento elementar como um meio de um desenvolvimento pessoal e social.

Por ser essa curva, pouco conhecida pelos alunos, iniciamos o experimento, apresentando algumas imagens de construções arquitetônicas onde poderiam ser encontradas formas que se assemelhassem a ela.

Figura 16 - Catedral de Brasília e Planetário do St. Louis Science Center

Fonte: (CÔNICAS ..., 2013).

Mesmo considerando que muitas dessas obras não faziam parte do conhecimento cotidiano desses alunos, acreditávamos que ao utilizarmos essas imagens estávamos ampliando as possibilidades de aprendizagem, proporcionando inclusive, uma reflexão crítica, por parte do aluno, sobre o que estavam aprendendo.

Com o objetivo de definir hipérbole e identificar alguns de seus elementos, iniciamos o experimento com a "**Construção Geométrica do Ramo da Hipérbole**", seguindo modelo o proposto por Costa (2007)[33]. Por se tratar de uma construção um pouco complexa, optamos por realizá-la na lousa junto com a turma, orientando passo a passo durante todo esse processo.

Durante o desenvolvimento dessa etapa, percebemos que alguns alunos apresentavam um pouco de dificuldade em manusear os instrumentos utilizados para a construção desse desenho. Assim, foi necessário fazermos uma intervenção revendo alguns procedimentos geométricos que seriam adotados na determinação dessa curva.

Acreditamos que essa dificuldade esteja relacionada à ausência de atividades de construções geométricas em toda a Educação Básica. Apesar de não ser padrão nas aulas de matemática, entendemos a importância do "desenho geométrico" como forma de auxiliar na aprendizagem conceitual e prática de alguns objetos geométricos.

Figura 17 - Construção Geométrica do Ramo da Hipérbole

Fonte: Dados da pesquisa.

Terminada a Construção Geométrica dos Ramos da Hipérbole, na etapa seguinte, para que pudessem compreender a condição que a define, orientamos aos alunos que escolhessem um ponto qualquer no Ramo construído e que medissem, com o auxílio de um pedaço de barbante a distância desse ponto a cada um de seus focos anotando os valores obtidos:

---

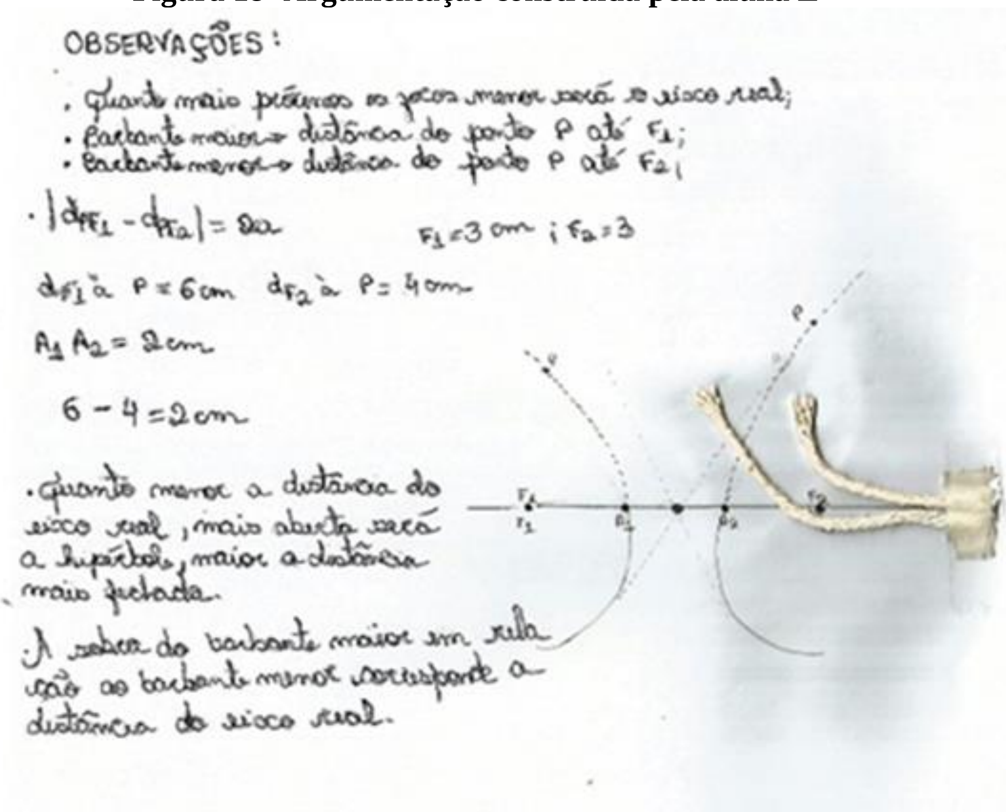
[33] Trace uma reta x sobre um plano. Marque sobre x os pontos $F1$ e $F2$. Em seguida, prenda uma das extremidades de uma régua a $F1$ de modo que ela possa girar ao redor deste ponto. Na outra extremidade da régua, N, fixe a ponta de um barbante. A outra ponta, fixe-a no ponto $F2$. O comprimento do barbante deve ser tal que a diferença entre o comprimento da régua e a do barbante seja igual à distância entre $F1$ e $F2$. Inicialmente, posicione a régua sobre a reta x. A ponta do lápis deverá estar sobre o ponto A, que é determinado pela intersecção da reta x com a curva que está sendo traçada. Em seguida, com o fio sempre esticado e a ponta do lápis encostada à régua, gira-se a régua ao redor do ponto $F1$, para cima ou para baixo, enquanto desliza-se o lápis ao longo da borda da régua. A curva que se obtém é um ramo de hipérbole. (COSTA, 2007, p. 86).

Compare os valores obtidos entre as distâncias do ponto P aos focos da hipérbole sobrepondo os barbantes e verifique o que essa diferença pode corresponder na hipérbole.

Esperávamos que os alunos fossem capazes de interpretar as informações observadas e adicionar a elas, conhecimentos matemáticos anteriormente adquiridos, para que então, pudessem construir argumentos que definissem essa curva. No entanto, é importante considerarmos que, segundo Fetissov (1994), é necessário prestar atenção ao papel desempenhado pelo desenho na demonstração de um teorema ou propriedade geométrica. Segundo o pesquisador “deve-se ter em mente que o desenho é apenas um meio auxiliar para a demonstração”, que é apenas um caso particular (FETISSOV, 1994, p. 28).

Assim, ao analisarmos os argumentos construídos, percebemos que grande parte dos alunos objetivou-se em estabelecer que as relações existentes entre a distância do ponto P (ponto qualquer sobre um dos ramos da hipérbole) e os pontos F1 e F2 (focos da hipérbole) estavam relacionadas ao comprimento do barbante. Percebemos que as argumentações apresentadas evidenciaram o uso de uma linguagem matemática pouco rigorosa, como podemos observar no argumento construído pela aluna L.

Figura 18- Argumentação construída pela aluna L

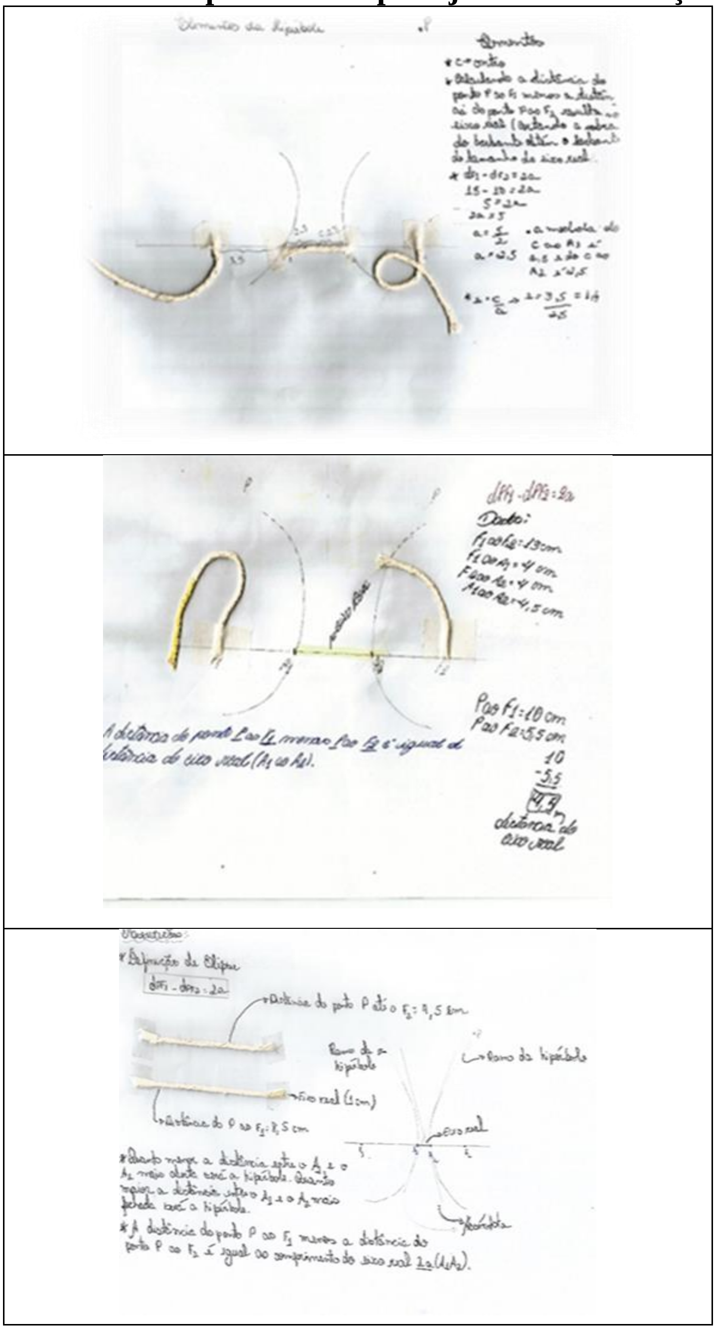


Fonte: Dados da pesquisa.

Para Balacheff (1988), esse tipo de argumento revela um obstáculo que frequentemente é observado na forma como o aluno concebe e formula uma afirmação. Percebe-se que, as ideais matemáticas ou até mesmo as linguísticas que eles são capazes de construir, correspondem apenas à necessidade de satisfazer a exigência prática do problema apresentado deixando de lado a necessidade de satisfazer sua exigência teórica.

Notamos também, que em alguns casos, os alunos buscaram apresentar um conjunto de informações numéricas e operações matemáticas, embora não tenham conseguido explicar bem, o que de fato queriam concluir, conforme mostra quadro 05.

Quadro 5 – Resultados apresentados para justificar a situação proposta

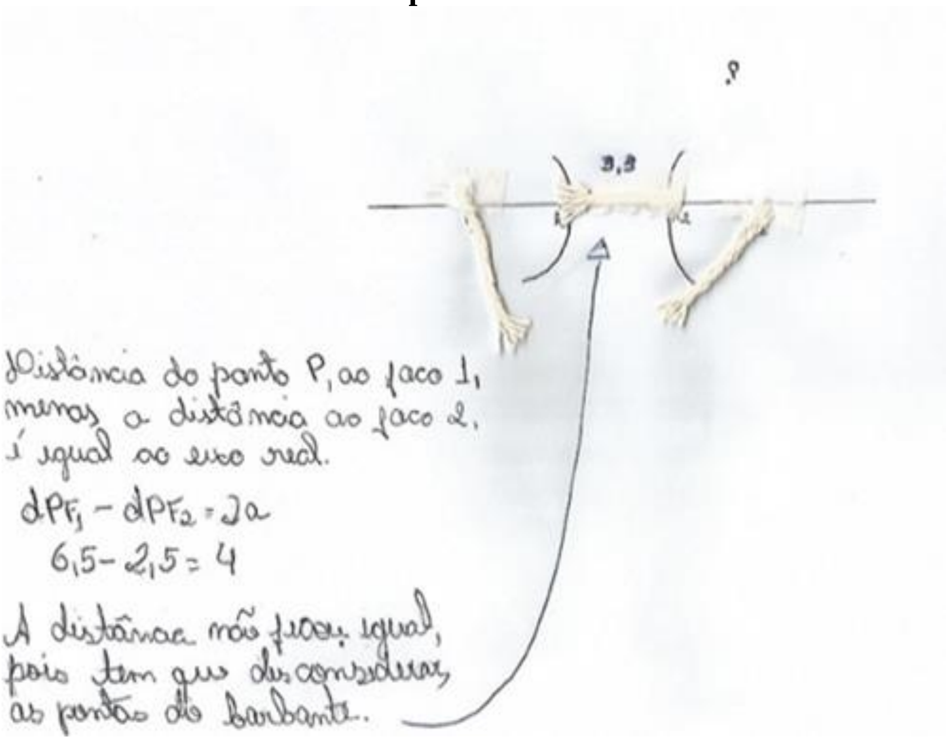


Fonte: Dados da pesquisa.

Porém, embora não tenham apresentado uma solução concisa para o problema proposto, percebemos nesses argumentos uma tentativa de aprimorar a linguagem matemática envolvida na resolução do problema. Para Nasser e Tinoco (2003), ao utilizar esse tipo de linguagem, o aluno busca uma melhor forma de expressar a compreensão que obteve dos elementos matemáticos envolvidos no problema. Acreditamos que em seu zelo crítico, os alunos entenderam o conceito de hipérbole e que a conjectura apresentada, representa a sua maneira de interpretar o problema.

Nos demais argumentos construídos, notamos em um dos casos analisados, que na tentativa de justificar o erro da solução apresentada, a aluna levou em consideração a quantidade de barbante que utilizou na construção.

Figura 19 - Argumento apresentado pela H para justificar o erro obtido na conclusão apresentada



Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

Esse tipo de justificativa indica uma “disposição” da aluna em tentar estabelecer uma solução geral para o problema, mas essa “disposição” é dificultada pela falta de uma ferramenta conceitual eficiente que possibilite a ela relacionar as propriedades dos objetos envolvidos no problema com o processo de solução apresentado. Para Balacheff (2000), a falta de um meio linguístico operatório é uma das principais razões para a ausência de provas conceituais.

Em todos os casos analisados, percebemos que os alunos se encontram em um nível de prova denominado “Empirismo Ingênuo”. Notamos que ao tentarem expressar matematicamente a justificativa apresentada, os alunos esbarraram na dificuldade de desligarem-se do contexto situacional que lhes foi apresentado.

No entanto, não há como negar que o experimento aqui proposto possibilitou a formação de elementos constitutivos do conhecimento matemático. Entendemos que a intencionalidade aqui apresentada aponta para uma melhor compreensão do fato observado.

4.4 Experimento IV – Curva de Nível

Desenvolver um conceito geométrico envolve todo um contexto e situações que sejam capazes de produzir significado ao que se deseja construir. Para que os alunos sejam levados a pensar de forma lógica a respeito de uma determinada situação, faz-se necessário que os mesmos encontrem significados nas atividades matemáticas desenvolvidas em sala de aula e para que isso aconteça é preciso propor situações que estabeleçam conexões entre os diferentes temas matemáticos e as demais áreas do conhecimento.

Ao iniciarmos o terceiro bimestre do ano letivo de 2016, o conteúdo a ser trabalhado com a turma do nono ano "B" propunha o ensino das **Relações Métricas no Triângulo Retângulo**[34]. Sabendo que muitas vezes os alunos encontram dificuldades em compreender essas relações, principalmente no que se refere às projeções dos catetos sobre a hipotenusa, optamos por introduzir esse conteúdo partindo de uma atividade experimental.

Com o objetivo de desenvolver experimentalmente o conceito geométrico de **Projeção Ortogonal**, aprimorar a capacidade de visualização e associação de figuras tridimensionais a uma representação plana e aplicar conhecimentos geométricos a situações de caráter prático, desenvolvemos com a turma o experimento **Curva de Nível**[35].

Por se tratar de um conteúdo relacionado ao ensino de Geografia julgamos ser interessante ter a parceria de um profissional dessa área no desenvolvimento desse experimento. Dessa forma, convidamos a professora de Geografia da escola para que juntas pudéssemos superar o desafio de apresentar a turma do nono ano "B" o encontro dessas disciplinas.

Para Bicudo (2010), o envolvimento de duas disciplinas distintas em um trabalho busca explorar possibilidades que se abrem para o ensino e a aprendizagem, assumindo, dessa forma,

---

[34] Chamamos relações métricas no triângulo retângulo às relações existentes entre os diversos segmentos desse triângulo. Assim, para um triângulo retângulo ABC, podemos estabelecer as seguintes relações entre as medidas de seus elementos: quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto sobre a hipotenusa; o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa à hipotenusa; o quadrado da altura é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa; o quadrado da hipotenusa é igual à soma do quadrado dos catetos (teorema de Pitágoras).

[35] Adaptado do portal educacional M³ Matemática Multimídia da UNICAMP o experimento tinha como principal objetivo propor um estudo sobre curvas de níveis e suas principais aplicações, utilizando massa de modelar.

a dimensão social de um trabalho que busca caminhar na direção da produção de um determinado conhecimento.

Como a professora de Geografia da escola, é uma profissional muito "interessada" em práticas investigativas e procura sempre em suas aluas utilizar metodologias inovadoras, aceitou imediatamente nosso convite, trazendo logo de início muitas contribuições para o desenvolvimento do experimento.

Buscando fazer com que essa atividade de ensino-aprendizagem fosse capaz de estimular o aluno a investigar e refletir sobre o fato observado, estabelecendo sentido ao conhecimento que seria produzido, planejamos durante duas semanas todas as etapas do experimento. Como iríamos utilizar muita "informação visual", optamos por fazer a apresentação da aula no formato "Power Point".

O que nos motivou a realizar esse trabalho foi o entusiasmo com o qual a professora de Geografia recebeu nosso convite. Estávamos muito ansiosas com os resultados que poderíamos obter com essa experiência.

No dia determinado para aplicação da atividade, como não havíamos informado aos alunos com antecedência que iríamos realizar uma atividade interdisciplinar, os mesmos ficaram "um tanto quanto surpresos". Ao entrarmos juntas na sala de aula, antes mesmo que pudéssemos explicar o que seria proposto para aquele momento, surgiram alguns comentários:

> *Aluno Z: Professoras, as senhoras erraram o horário?*
> *Aluno W: Meu Deus, vamos estudar matemática e geografia junto?*
> *Aluno Y: Não tem como estudar as duas matérias ao mesmo tempo. Talvez se fosse história e geografia até que seria possível.*

Percebemos nessas intervenções, que na maioria das vezes, os alunos não fazem inferências dos conteúdos estudados em matemática com as demais áreas do conhecimento. Reconhecemos então, a importância de cada vez mais, trabalhar a matemática partindo da apresentação de informações precisas e de ideias representativas que desafiem e motivem o aluno pensar produtivamente.

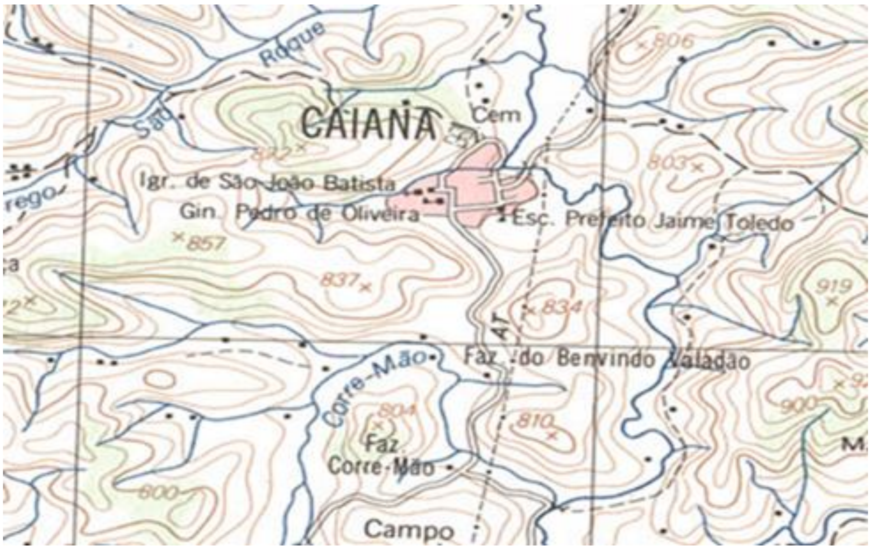
Nessa perspectiva, após fazermos todos os esclarecimentos sobre a atividade que iríamos desenvolver durante aquela aula, iniciamos a primeira etapa do experimento. Assim, conforme havíamos planejado, a professora de Geografia fez uma breve explanação sobre alguns tipos de relevos encontrados no entorno da escola.

Figura 20 - Professora de Geografia apresentando a primeira etapa do experimento

Fonte: Dados da pesquisa.

Com o objetivo de despertar a curiosidade e tornar a aula ainda mais interessante, a professora de Geografia prosseguiu sua apresentação utilizando parte do mapa topográfico de Caiana - MG, município no qual a escola está localizada.

Figura 21 - Mapa Topográfico do Município de Caiana – MG



Fonte: (Google Map. ..., 2016)

Optamos por utilizar o mapa topográfico do Município no qual a escola está localizada, por acreditarmos que a aplicação dos aprendizados em diferentes contextos exige muito mais do que a simples "decoração" ou a "solução mecânica" de exercícios. As variações do modo de ensinar determinam diferenças nos resultados que serão obtidos. Dessa forma, acreditávamos que essa estratégia iria contribuir muito para uma melhor compreensão e envolvimento dos alunos.

Percebemos então, que nesse momento, os alunos buscavam localizar no mapa apresentado locais conhecidos por eles, fazendo uma associação entre a sua percepção "espacial" e a respectiva representação "plana".

> *Aluna N: Sabe professora, bem ali no mapa onde está escrito "Fazenda do Benvindo Valadão"? Minha tia mora lá.*
> *Aluno S: Eu conheço esse lugar, fica perto da casa do meu avô.*
> *Aluno K: Quando venho para escola, meu transporte passa pelo "Morro do Corre Mão".*

Essa discussão reforça a importância de que as ideias matemáticas ganhem sentido, para que de fato o aluno possa desenvolver a capacidade que lhe permite compreender a finalidade de um determinado conceito ou propriedade. Identificamos nessa etapa do processo, que a maioria dos alunos mostrava-se efetivamente comprometidos com a atividade que estava sendo desenvolvida.

Dessa forma, conforme planejamos, a professora de Geografia continuou a atividade explicando as principais funções de um Mapa Topográfico e como é feita a representação gráfica de uma Curva de Nível.

> *Notemos que as curvas de níveis são obtidas pela intersecção do relevo com planos paralelos que mantêm a mesma distância entre si. Essas intersecções, projetadas ortogonalmente sobre um plano, determinam as curvas de nível.*

É importante esclarecermos, que nesse momento, não tínhamos o intuito de fazer nenhuma sistematização de conceitos geométricos ou geográficos; nosso objetivo nessa etapa, resumia-se apenas a identificar possíveis obstáculos que impossibilitassem os alunos alcançarem um melhor nível de compreensão do experimento proposto.

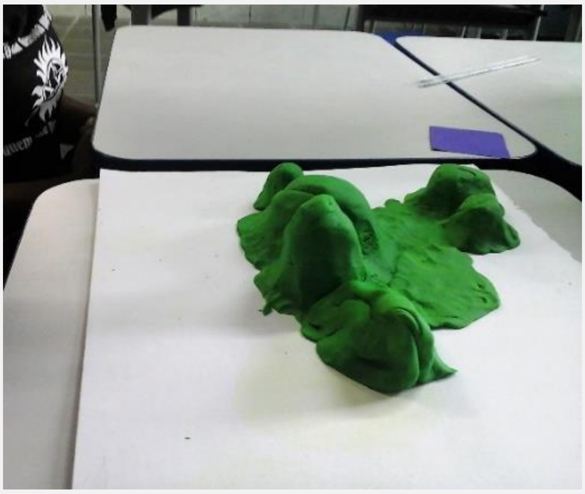
De acordo com Hanna (2000), o ensino de matemática no qual os alunos aprendem pela construção de significados, possibilita o desenvolvimento da capacidade cognitiva de planejar, aplicar, avaliar e até mesmo alterar consistentemente estratégias utilizadas para solucionar uma determinada situação proposta.

Após essas explanações, prosseguimos o experimento dividindo os dezenove (19) alunos presentes em equipes, obtendo assim, três grupos com cinco alunos e um grupo com quatro alunos. Em seguida propusemos aos alunos que manuseassem a massa de modelar sugerindo que construíssem com a mesma algumas formas de relevo que poderiam ser encontradas no percurso feito de suas casas até a escola e que se assemelhassem com algumas das formas apresentadas pela professora de Geografia.

Achamos melhor não interferir nessa etapa. Deixamos que utilizassem suas criatividades. A fim de que pudéssemos avaliar o conhecimento que havia sido adquirido até aquele momento, pedimos aos mesmos que explicassem qual tipo de Relevo estavam modelando.

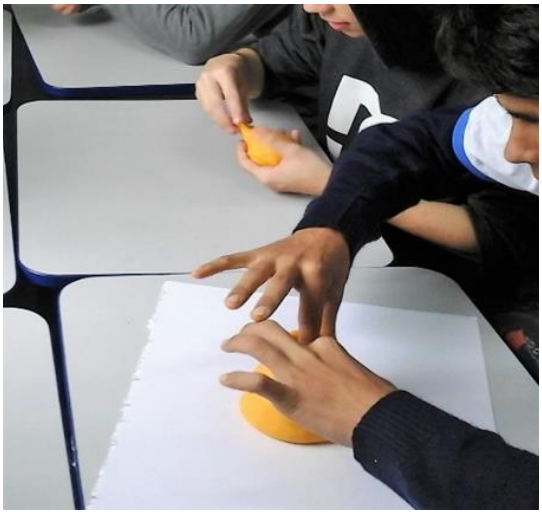
Quadro 6 - Alunos desenvolvendo a segunda etapa do experimento

(Continua)

	"Vamos modelar um vale aberto em formato U, como aquele que a professora mostrou. Achamos que será mais fácil de construir". (Explicação apresentada pelo grupo 01 para a forma modelada).
	"Nós fizemos as montanhas que estão em volta do nosso município." (Explicação apresentada pelo grupo 02 para a forma modelada).

Alunos desenvolvendo a segunda etapa do experimento

(continuação)

	"Estamos modelando uma lavoura de café, esse é o tipo de relevo que mais encontramos no percurso de nossas casa até a escola." (Explicação apresentada pelo grupo 03).
	"Estamos tentando fazer uma lavoura de café, mais não sabemos se vamos conseguir" (Explicação dada pelo grupo 04)

Fonte: Dados da pesquisa.

No desenvolvimento desse experimento, os modos de ser e agir de cada um se revelaram intimamente, permitindo que pudéssemos perceber, em diversos momentos, o nível de argumentação encontrado em sua forma de "pensar" e posicionar em relação ao conhecimento apresentado. Notamos que as possibilidades de aplicar àquilo que haviam aprendido, tanto na realização do experimento quanto em atividades práticas cotidianas tinham se expandido.

Prosseguimos o experimento, agora propondo aos alunos, que partindo da forma de relevo que haviam construído, apresentassem uma justificativa para seguinte situação proposta:

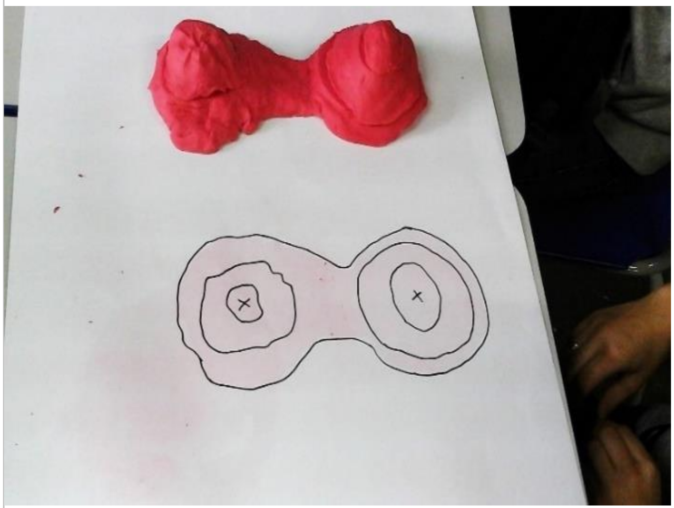
> *Façam cortes paralelos no relevo construído começando de baixo para cima e provem que as projeções desses cortes sobre um plano determinam as curvas de nível desse relevo.*

Nossa expectativa nessa etapa, era de que os alunos fossem capazes de identificar alguns termos geométricos utilizados na definição de "Curvas de Nível", principalmente o conceito de "Projeção Ortogonal".

Durante todo desenvolvimento do processo fomos analisando o comportamento dos alunos diante da situação proposta. Para cada questionamento que faziam procurávamos responder com uma nova questão, instigando-os a investigar o fato observado.

Ao discutirem sobre a situação proposta, observamos que alguns alunos dialogavam, utilizando alguns conceitos adquiridos a partir da experiência de conhecimento que tinham vivenciado naquela aula, como pudemos observar nos argumentos construídos pelo grupo durante o processo de desenvolvimento da situação proposta.

Figura 22 – Solução apresentada pelo grupo 03

	"...então, quando desenhamos no papel todos os cortes que fizemos no relevo encontramos a sua representação plana. Essa representação é uma projeção do corte e também é uma curva de nível". (Argumento construído pelo grupo 03).

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos no argumento construído, que a solução apresentada pelo grupo 03 aponta para um tipo de prova conhecido como "Exemplo Genérico". Para Balacheff (1988), esse tipo de argumentação caracteriza um período de transição entre as provas pragmáticas e as provas conceituais, pois consiste em assegurar a veracidade de uma afirmação, embasada em diversas características que representam um determinado grupo de objetos.

Para Lakatos (1978), essa forma de argumentar é entendida como um progresso necessário que permite que conceitos ingênuos sejam suplantados por conjecturas e conceitos teóricos. Para o pesquisador, "à medida que ideias e conceitos teóricos suplantam ideias e conceitos ingênuos, a linguagem teórica suplanta a linguagem ingênua" (LAKATOS, 1978, p.123-124).

No argumento construído pelo grupo 01 (figura 23), notamos que, apesar de não apresentar nenhum formalismo lógico, o mesmo partiu do desenvolvimento da concepção que os alunos tiveram a respeito da situação observada.

Figura 23 - Argumento construído pelo grupo 01

	"Nós entendemos que as Curvas de Nível são obtidas como se tivéssemos olhando o Relevo de cima para baixo, sob um ângulo reto. Como se estivéssemos em um avião, só que parado". (Justificativa apresentada pelo grupo 01)

Fonte: Dados da pesquisa.

Esse tipo de concepção, segundo Balacheff (1988), faz parte de uma experiência mental do aluno que pode ser denominada de "Empirismo Ingênuo". Observamos essa mesma característica no argumento construído pelo grupo 04.

Figura 24 - Argumento apresentado pelo grupo 04

	"Cortes paralelos são iguais retas paralelas, mais aqui temos que desenhar curvas. Quando terminarmos de fazer todos os desenhos (projeções) dos pedaços que cortamos, teremos as Curvas de Nível desse Relevo, como aquelas que a professora de Geografia mostrou para gente no mapa de Caiana". (Justificativa apresentada pelo grupo 04).

Fonte: Dados da pesquisa.

De acordo com Balacheff (2000), a dificuldade encontrada pelos alunos em produzir um tipo de prova formal (trabalho em grupo), está relacionada ao fato de que “os mesmos não conseguem entrar em comum acordo para produzi-la” (BALACHEFF, 2000, p. 28) existindo assim, um conflito de ideias entre os representantes de um mesmo grupo.

Ao final dessa etapa, propusemos aos alunos uma socialização dos argumentos construídos. Mesmo considerando que os níveis de compreensão da situação proposta não fossem o mesmo para todos, observamos que no momento de validar a solução, os alunos escolheram a argumentação que todos consideravam mais apropriada. Nesse caso, a justificativa apresentada pelo grupo 03:

> *Então, quando desenhamos no papel todos os cortes que fizemos no relevo encontramos a sua representação plana. Essa representação é uma projeção do corte, então também é uma curva de nível. (Argumento construído pelo grupo 03).*

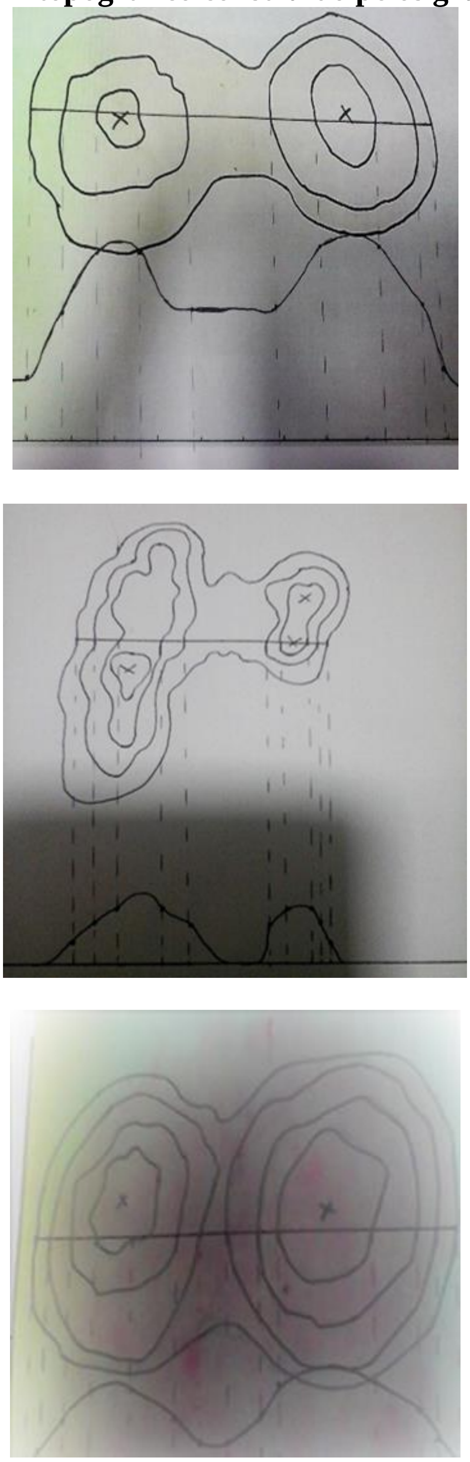
De acordo com Lakatos (1978), a dimensão social dessa dialética é muito importante. Para o pesquisador, os alunos devem aprender a matemática como um conhecimento social. “É preciso que aconteça o entendimento do problema e também do conteúdo matemático nele envolvido” (LAKATOS, 1978, p. 72). Assim, os significados construídos pelos alunos devem ser coerentes com os resultados que são socialmente reconhecidos.

Na etapa seguinte, como havíamos planejado, a professora de Geografia fez uma explanação com os alunos sobre as informações que uma curva de nível pode oferecer, como, por exemplo, obter uma linha conhecida por “Perfil Topográfico do Relevo[36]”. Sugerimos aos alunos que traçassem com base nas explicações dela, o Perfil Topográfico do relevo construído (figura 25).

Nessa etapa, apenas o grupo 01 não conseguiu realizar a situação proposta. Os alunos desse grupo tiveram que ir embora mais cedo, pois chovia muito, dificultando assim o acesso do transporte escolar até suas residências.

[36] Perfil topográfico - é uma representação ortográfica nos planos cartesianos de um corte vertical do terreno segundo uma direção de um corte previamente escolhido, de tal forma que seja possível representar intuitivamente os desníveis e a topografia do terreno, ou seja, é uma linha que representa as declividades e altitudes (cotas) de um terreno. (OLIVEIRA, 1988).

Figura 25 - Perfil topográfico construído pelos grupos 02, 03 e 04



Fonte: Dados da pesquisa.

Na perspectiva de construir significados para atividade geométrica, considerando a importância de desenvolver nos alunos a capacidade de estabelecer relações entre os conteúdos matemáticos e as demais áreas do conhecimento, o experimento realizado evidenciou que, apesar de utilizarem uma linguagem matemática pouco rigorosa, estes demonstraram-se capazes de construir argumentos com base nos referencias da leitura e da escrita que lhes foram apresentados.

Constata-se assim, que o conhecimento é o resultado de uma experiência pessoal com as informações e que a realização de atividades interdisciplinares possibilita o domínio de conceitos; a flexibilidade de raciocínio e a capacidade de análise e abstração do aluno, e que essas capacidades são necessárias em todas as áreas de estudo; principalmente na matemática.

4.5 Experimento V – Demonstrando o Teorema de Pitágoras

O experimento "Demonstrando o Teorema de Pitágoras" foi realizado com a turma do 9º ano "B" com intuito de dar continuidade ao trabalho iniciado, no terceiro bimestre do ano letivo de 2016, com as "Relações Métricas no Triângulo Retângulo".

Sabe-se que o Teorema de Pitágoras é uma das propriedades geométricas de maior aplicabilidade a situações de caráter prático que lidam com padrões abstratos utilizados nas mais diversas áreas do conhecimento. Partindo da importância de ter o aluno como centro da própria ação de aprendizagem, na perspectiva de oferecer-lhe a oportunidade de elaborar e criticar hipóteses, fazer testes, propor teses e verificá-las, a atividade desenvolvida teve como principal objetivo demonstrar experimentalmente esse "Teorema".

De acordo com Balacheff (2000):

> O estudo experimental cria um contexto que é favorável para o surgimento de processos que envolvem interações sociais, como àqueles descritos por Lakatos (1978), uma vez que favorecem o confronto de diferentes pontos de vista sobre a solução de um mesmo problema (BALACHEFF, 2000, p. 49)

No trabalho realizado com a turma do 9º ano B, inicialmente, buscamos verificar se os alunos compreendiam a necessidade de uma demonstração matemática. Em seguida tentamos identificar se a estratégia utilizada no experimento poderia auxiliar na aprendizagem conceitual do conteúdo abordado. Nesse contexto, desenvolvemos o experimento com base no texto *Mania de Pitágoras*[37], texto extraído do livro "Meu professor de matemática e outras histórias" (LIMA, 1991, p. 53-58).

Optamos por utilizar esse texto, porque além de conter alguns acontecimentos históricos relacionados à "descoberta" do Teorema, apresenta também quatro demonstrações para o

---

[37]Mania de Pitágoras - o texto fala sobre Elisha Scott Loomis, professor de matemática em Cleveland, Ohhio (Estados Unidos) que era realmente apaixonado pelo Teorema de Pitágoras. (LIMA, Elon Lages. Meu professor de Matemática e outras histórias. Rio de Janeiro: SBM, 1991. p. 53-58. (Coleção do Professor de Matemática)

mesmo, com diferentes pontos de vista, intitulados: *A mais bela Prova; A prova mais curta; A demonstração do presidente* e *A demonstração de Leonardo da Vinci*.

Acreditamos que esse tipo de abordagem potencializa a produção do conhecimento, pois permite que o aluno estabeleça conexão entre os saberes teóricos e práticos. Nesse caso, consideramos que o aluno aprende o conteúdo e encontrar seu sentido.

Com o objetivo de despertar a curiosidade da turma a respeito do assunto que iriamos abordar, introduzimos o experimento fazendo junto com a turma a leitura do texto. Durante essa etapa, percebemos que a maioria dos alunos demonstrava-se admirada com as informações apresentadas. Muitos disseram não ter conhecimento a respeito delas. Em vários momentos da leitura fazíamos uma pausa, para que eles pudessem fazer inferências ou manifestar suas dúvidas.

Entre as diversas colocações que fizeram, priorizamos as relacionadas ao fato de alguns alunos mencionarem o quanto "achavam interessante" os processos de provas matemáticas apresentados no texto. Percebemos, através das narrativas dos alunos, uma mudança na forma de conceber o conteúdo: "Mostravam-se mais interessados em compreender toda complexidade que envolve uma prova matemática".

Para Balacheff (2000), "o conceito de prova na sala de aula diz respeito ao desenvolvimento da compreensão que o aluno deve ter sobre um fato que lhe foi apresentado" (BALACHEFF, 2000, p. 201-203). Nesse sentido, nosso objetivo nessa etapa do experimento era identificar fatores utilizados nessa abordagem metodológica que pudessem contribuir de forma significativa com a produção desse conhecimento.

Inicialmente solicitamos que os alunos escrevessem o "Teorema de Pitágoras" apresentando-lhe uma tese e uma hipótese. Sucessivamente, solicitamos aos mesmos que "demonstrassem" o teorema proposto utilizando os procedimentos ou métodos que julgassem ser necessários para validar a afirmação apresentada.

> *Agora, vocês irão fazer como os "Matemáticos", pois irão provar o Teorema de Pitágoras. (Professora)*

Participaram desse processo de construção 21 (vinte e um alunos). Para fins de análises posteriores, optamos que os alunos realizassem individualmente o experimento. Como mostra a figura 26.

Figura 26 - alunos em processo de construção do experimento

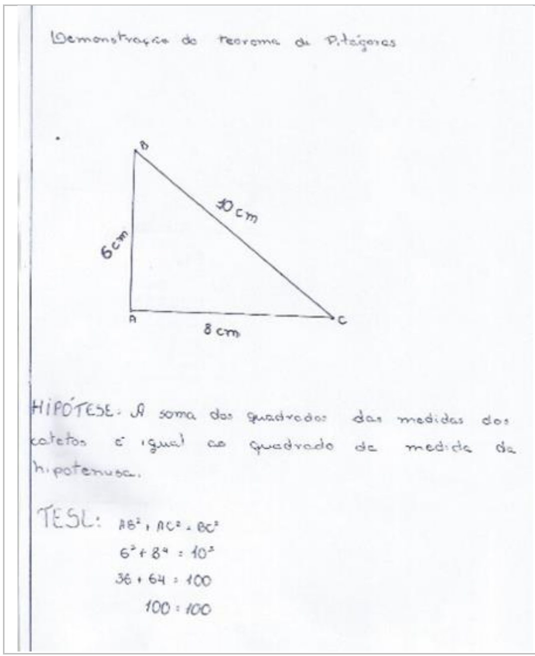
Fonte: Dados da pesquisa.

Diante do compromisso de produzir uma “prova matemática”, notamos que a maioria dos alunos adotou uma postura investigativa do objeto estudado. Observamos que os mesmos procuravam estabelecer relações entre os vários aspectos desse objeto para então atribuir significados a ele, chegando assim, a uma interpretação própria do fato observado.

Analisando os argumentos construídos, observamos que, em 12 (doze) dos vinte e um (21) casos, os alunos recorreram a um “exemplo” para validar a afirmação feita, conforme podemos observar no quadro a seguir.

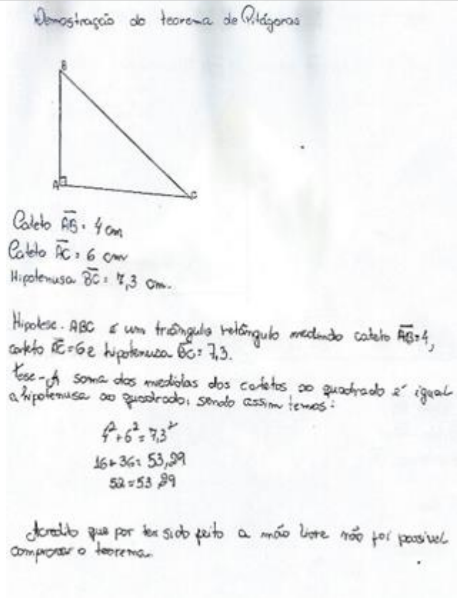
Quadro 7- Demonstrações apresentadas pelos alunos do 9º ano B

(Continua)

Demonstrações apresentadas pelos alunos do 9º ano B

(continuação)



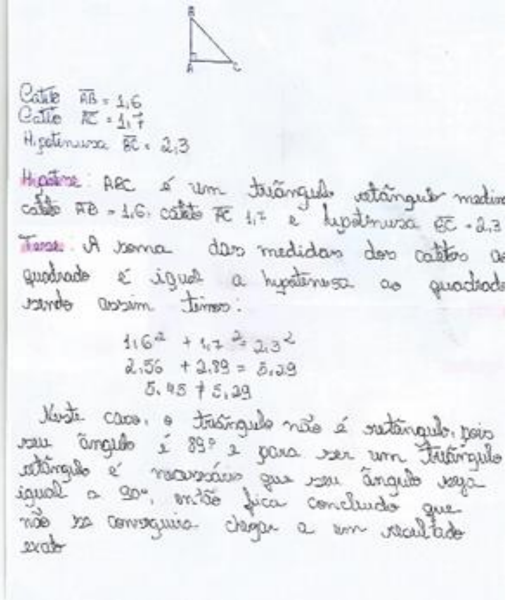
Demostração do teorema de Pitágoras

Cateto $\overline{AB}$: 4 cm
Cateto $\overline{AC}$: 6 cm
Hipotenusa $\overline{BC}$: 7,3 cm.

Hipotese - ABC é um triângulo retângulo medindo cateto $\overline{AB}$=4, cateto $\overline{AC}$=6 e hipotenusa $\overline{BC}$= 7,3.
Tese - A soma das medidas dos catetos ao quadrado é igual a hipotenusa ao quadrado, sendo assim temos:

$4^2+6^2=7,3^2$
$16+36= 53,29$
$52 = 53,29$

Acredito que por ter sido feito a mão livre não foi possível comprovar o teorema.

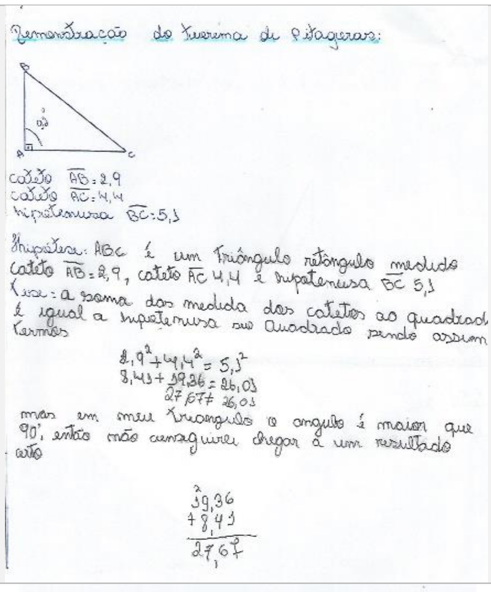


Cateto $\overline{AB}$ = 1,6
Cateto $\overline{AC}$ = 1,7
Hipotenusa $\overline{BC}$ = 2,3

Hipótese: ABC é um triângulo retângulo medindo cateto $\overline{AB}$ = 1,6, cateto $\overline{AC}$ 1,7 e hipotenusa $\overline{BC}$ = 2,3
Tese: A soma das medidas dos catetos ao quadrado é igual a hipotenusa ao quadrado sendo assim temos:

$1,6^2 + 1,7^2 = 2,3^2$
$2,56 + 2,89 = 5,29$
$5,45 \neq 5,29$

Neste caso, o triângulo não é retângulo, pois seu ângulo é 89° e para ser um triângulo retângulo é necessário que seu ângulo seja igual a 90°, então fica concluído que não se conseguiu chegar a um resultado exato



Demonstração do teorema de Pitágoras:

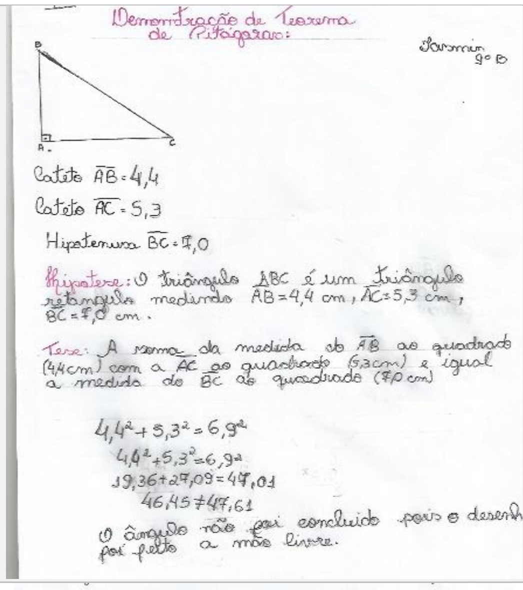
cateto $\overline{AB}$ = 2,9
cateto $\overline{AC}$ = 4,4
hipotenusa $\overline{BC}$ = 5,1

Hipótese: ABC é um triângulo retângulo medido cateto $\overline{AB}$ = 2,9, cateto $\overline{AC}$ 4,4 e hipotenusa $\overline{BC}$ 5,1
Tese: a soma das medida dos catetos ao quadrado é igual a hipotenusa ao quadrado sendo assim termos

$2,9^2+4,4^2= 5,1^2$
$8,41+19,36 = 26,01$
$27,67 \neq 26,01$

mas em meu triangulo o angulo é maior que 90°, então não conseguirei chegar à um resultado exato

$19,36 + 8,41 = 27,67$



Demonstração de Teorema de Pitágoras:

Jasmim 9° B

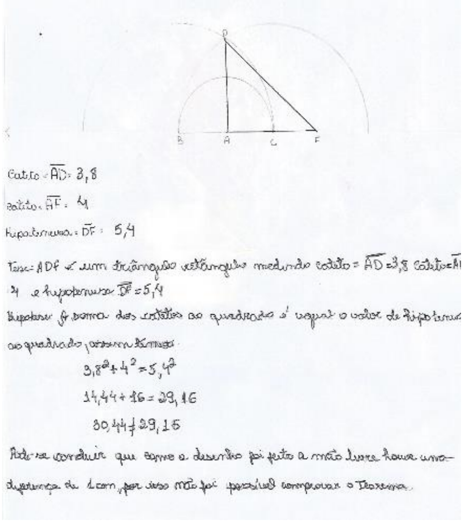
Cateto $\overline{AB}$ = 4,4
Cateto $\overline{AC}$ = 5,3
Hipotenusa $\overline{BC}$ = 7,0

Hipotese: O triângulo ABC é um triângulo retângulo medindo AB = 4,4 cm, AC = 5,3 cm, BC = 7,0 cm.

Tese: A soma da medida do $\overline{AB}$ ao quadrado (4,4cm) com a $\overline{AC}$ ao quadrado (5,3cm) é igual a medida do $\overline{BC}$ ao quadrado (7,0 cm)

$4,4^2 + 5,3^2 = 6,9^2$
$4,4^2+5,3^2=6,9^2$
$19,36+27,09=47,01$
$46,45 \neq 47,61$

O ângulo não foi concluído pois o desenho foi feito a mão livre.

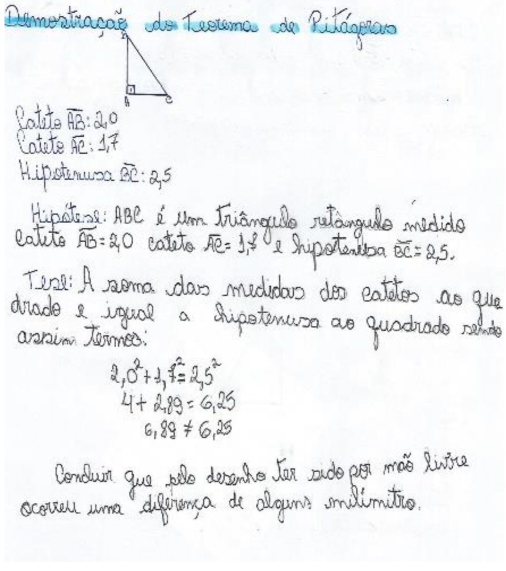


Cateto = $\overline{AD}$: 3,8
Cateto = $\overline{AF}$: 4
hipotenusa = $\overline{DF}$: 5,4

Tese: ADF é um triângulo retângulo medindo cateto = $\overline{AD}$ = 3,8 Cateto = $\overline{AF}$ = 4 e hipotenusa $\overline{DF}$ = 5,4
Hipotese: A soma dos catetos ao quadrado é igual o valor de hipotenusa ao quadrado, assim temos:

$3,8^2+4^2=5,4^2$
$14,44+16=29,16$
$30,44 \neq 29,16$

Pode-se concluir que como o desenho foi feito a mão livre houve uma diferença de 1cm, por isso não foi possível comprovar o Teorema.



Demostração do Teorema de Pitágoras

Cateto $\overline{AB}$: 2,0
Cateto $\overline{AC}$: 1,7
Hipotenusa $\overline{BC}$: 2,5

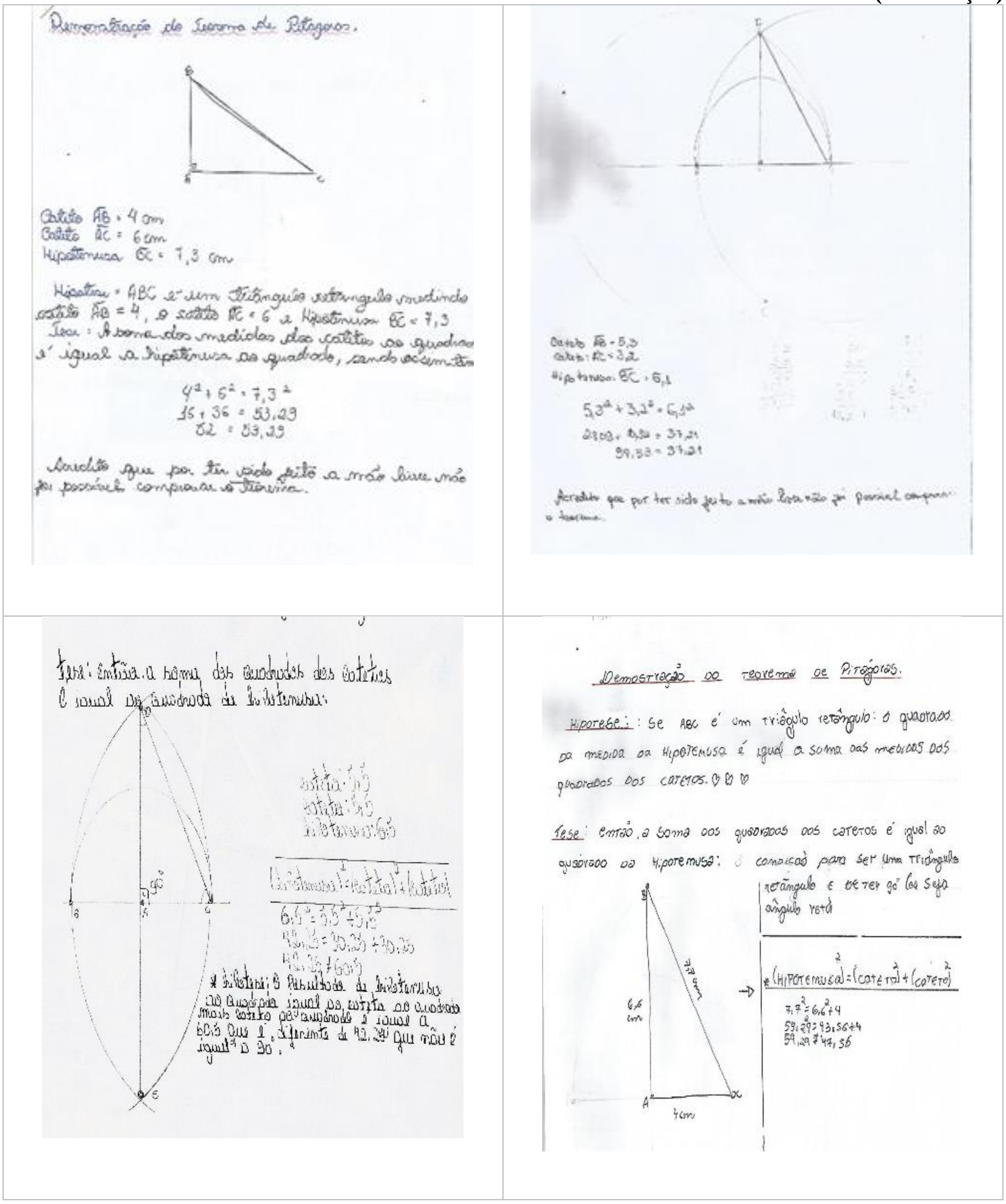
Hipótese: ABC é um triângulo retângulo medido cateto $\overline{AB}$ = 2,0 cateto $\overline{AC}$ = 1,7 e hipotenusa $\overline{BC}$ = 2,5.
Tese: A soma das medidas dos catetos ao quadrado é igual a hipotenusa ao quadrado sendo assim termos:

$2,0^2+1,7^2=2,5^2$
$4+2,89=6,25$
$6,89 \neq 6,25$

Concluir que pelo desenho ter sido por mão livre ocorreu uma diferença de alguns milímetros.

Demonstrações apresentadas pelos alunos do 9º ano B

(continuação)

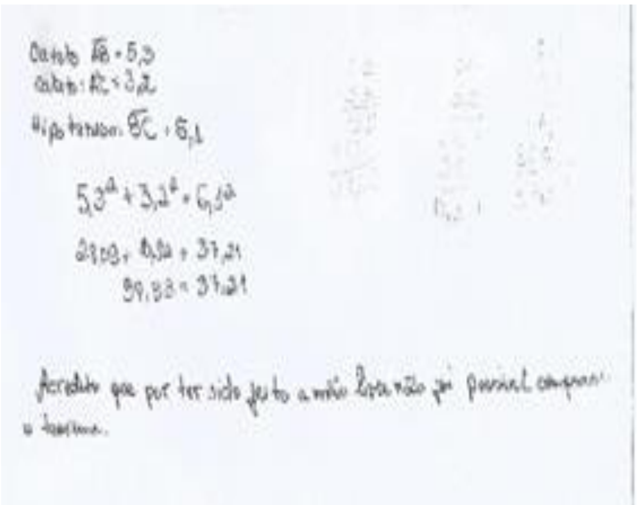
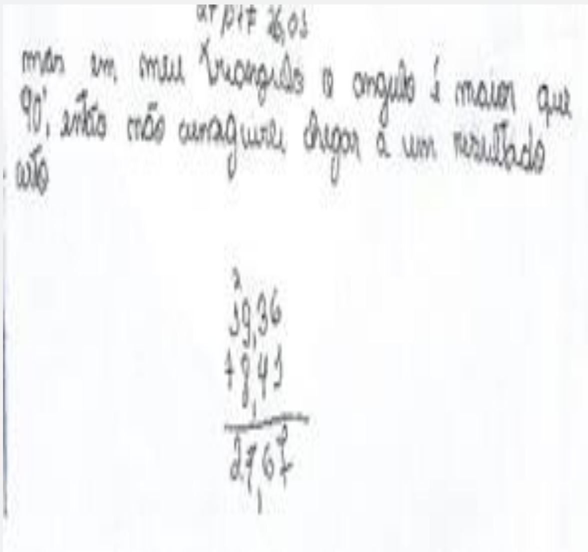


Fonte: Dados da pesquisa.

Para Balacheff (2000), a forma encontrada pelos alunos para provar esse Teorema corresponde a uma “maneira bastante elementar” de transmitir um conhecimento. Notamos nos argumentos construídos, que a “prova” apresentada tem como função central o “*Teorema em Ação de Vergnaud”* pois “consiste em usar algumas propriedades particulares, nesse caso dos triângulos, para chegar a solução de um problema que não existe na prática" (VERGNAUD apud BALACHEFF, 1988, p. 218).

Nos doze casos analisados, observamos que em vários, os alunos procuravam relacionar o erro obtido na "prova" à falta de utilização de procedimentos geométricos nas construções dos triângulos.

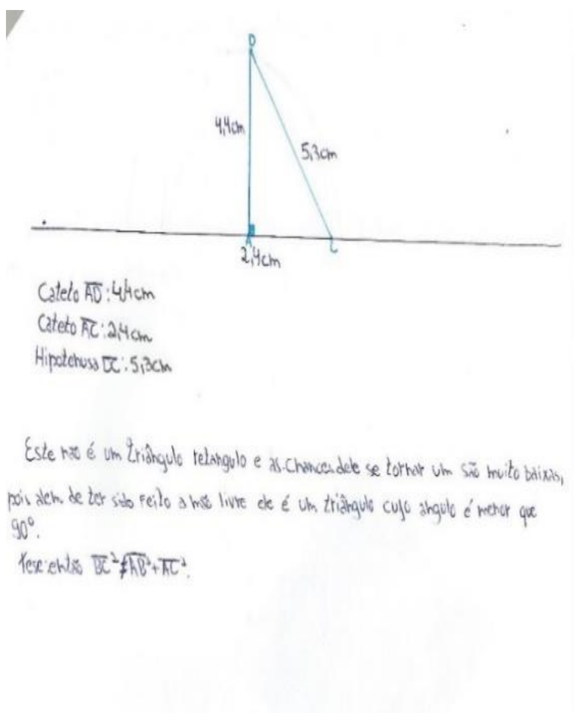
Figura 27– Justificativa apresentada para justificar o erro obtido na demonstração

	"Acredito que por ter sido feito a mão livre não foi possível comprovar o Teorema" (justificativa apresentada em sete dos doze casos analisados)
	[...] mas no meu triângulo o ângulo é maior que 90º, então não conseguirei chegar a um resultado certo. (Justificativa utilizada em dois dos doze casos analisados).

Fonte: Dados da pesquisa.

De acordo com Fetissov (1994), os alunos não conseguem compreender por que se faz necessária a "demonstração de uma verdade se a mesma apresenta-se suficientemente clara por si mesma" (FETISSOV, 1994, p. 16-17). Assim, eles acreditam que pelo "desenho" é possível "ver" claramente as características apresentadas, como podemos observar na justificativa apresentada pela aluna "D".

Figura 28 - Argumento construído pela aluna D



"Este não é um triângulo retângulo e as chances dele se tornar um são muito baixas, pois além de ter sido feito a mão livre ele é um triângulo cujo ângulo é menor que 90°". (Aluna D).

Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

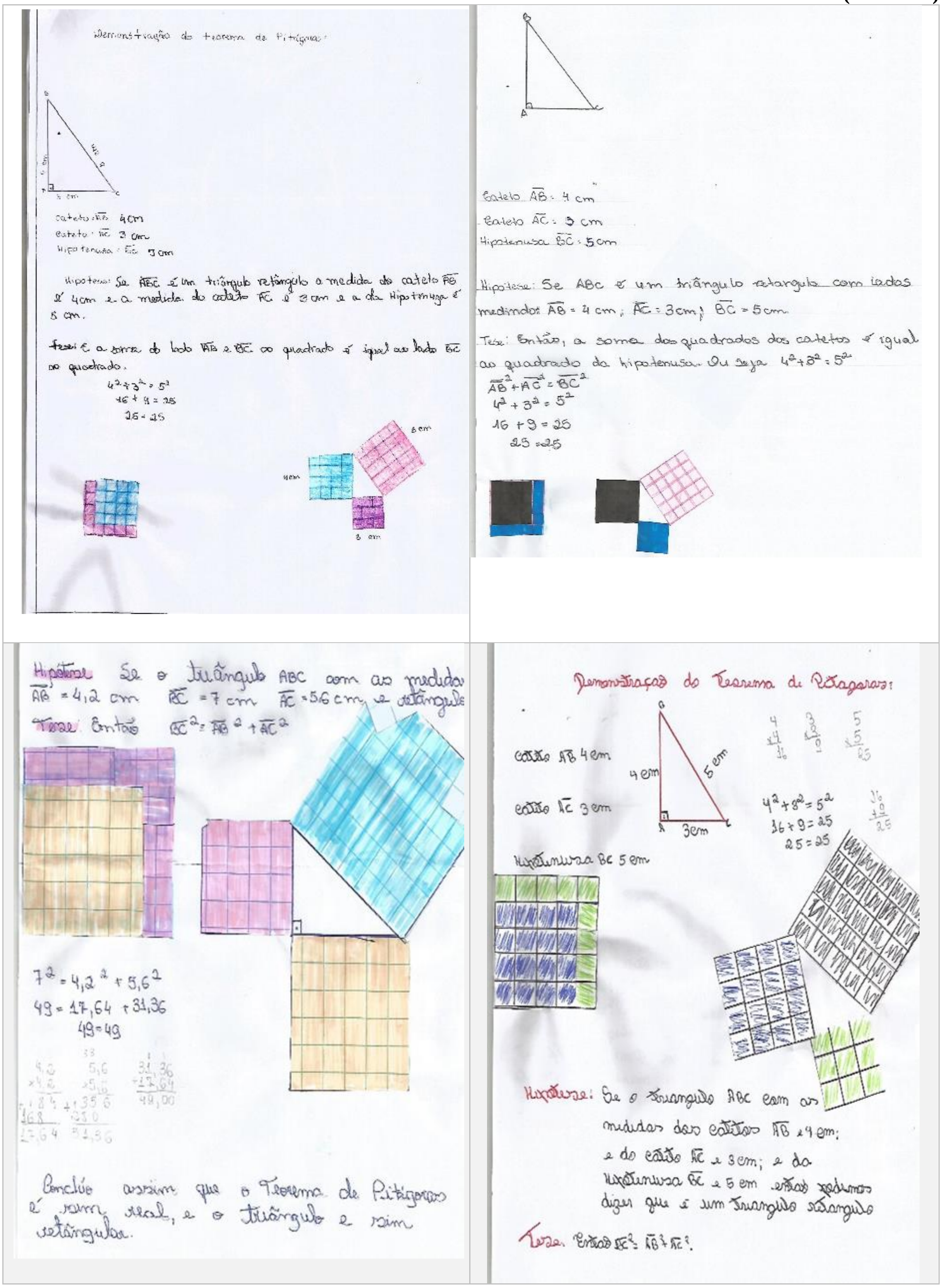
Percebe-se que nesse argumento, a aluna buscou provar o Teorema partindo de um contraexemplo. Essa característica, de acordo com Lakatos (1978) aponta a complexidade do tratamento de uma refutação por meio de uma abordagem experimental.

Embora a solução dada pela aluna apresente-se bastante simples, observamos que a mesma não pode ser compreendida como uma completa abstenção da linguagem conceitual, pois a conjectura da afirmação apresentada envolve uma decisão tomada a partir da verificação de uma proposição.

Em oito (08) dos vinte e um (21) argumentos analisados, além de utilizarem a representação gráfica do triângulo para validar a solução apresentada, os alunos recorreram a um exemplo do texto para “demonstrar” a validade da afirmação apresentada (quadro 08). Percebemos que os mesmos tentaram provar o Teorema com base na “comparação de áreas”.

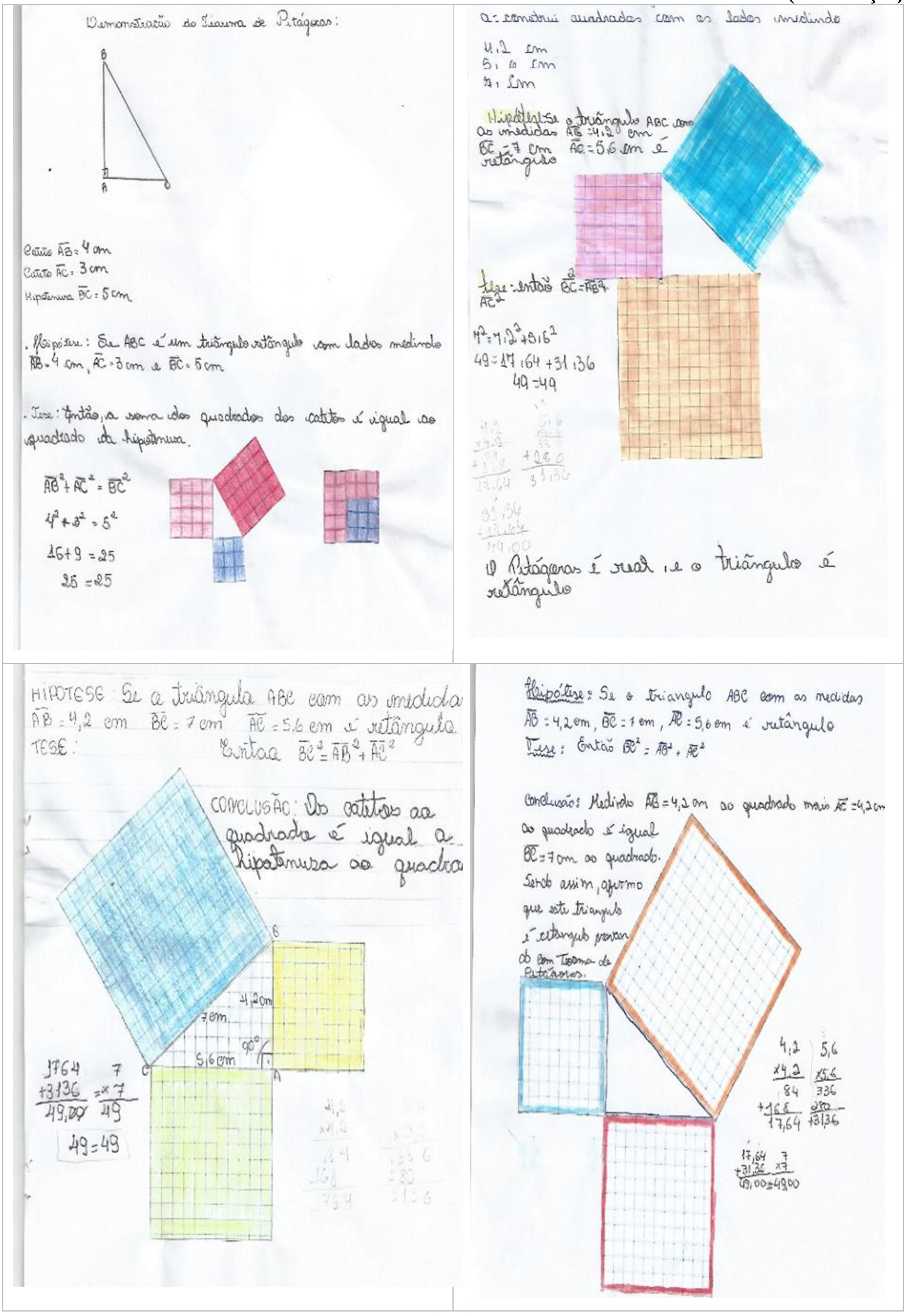
Quadro 8- Prova construída a partir da comparação de áreas

(Continua)



Prova construída a partir da comparação de áreas

(continuação)



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao utilizar um exemplo adotado pelo texto, os alunos buscaram mecanismos que possibilitassem a compreensão adequada do raciocínio que queriam apresentar. Observamos que os argumentos apresentados apontam para uma construção significativa do saber matemático.

Para Balacheff (1998), esse tipo de pensamento pode ser caracterizado como um nível de “Exemplo Genérico”, pois tomando como base o teste de um caso particular, procura-se a partir do mesmo, concluir a veracidade da afirmação feita.

Para o pesquisador essa forma de demonstrar uma propriedade pode ser considerada como um “recurso primitivo”. Fetissov (1994) classifica esse método de obtenção de conclusões gerais por meio do exame de alguns casos particulares, como o método da “indução”. De acordo com Fetissov (1994), “o raciocínio parte de conhecimentos ou verdades particulares, para por meio deles obter uma verdade mais geral” (FETISSOV, 1994, p. 20).

Não é difícil perceber que em todos os argumentos construídos os alunos procuraram demonstrar a veracidade da afirmação feita recorrendo à experiência e à observação dos fatos, ressaltando assim, a relevância de que a estratégia utilizada permite uma formação significativa da aprendizagem. Entendemos assim, que a utilização de atividades experimentais são importantes nas aulas de matemática, viabilizando caminhos para a investigação e desenvolvimento do raciocínio lógico.

Como é comum em todo o processo de aprendizagem, o resultado final é apenas uma parte de todo o caminho que deverá ser percorrido, assim, os questionamentos que surgem durante esse processo e as eventuais tentativas de respostas, tornam-se mais importantes que a resposta correta no final do procedimento.

4.6 Experimento VI – Descobrindo propriedades das Cônicas com o GEOGEBRA

Atualmente existe uma grande necessidade de integrar aspectos relativos ao uso da tecnologia na Educação, especialmente no que diz respeito ao ensino-aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos. As Diretrizes Curriculares Nacionais, para os Cursos de Matemática, referentes aos cursos de Licenciatura, afirmam que “os cursos de Licenciatura em Matemática têm como objetivo principal a formação de professores para a Educação Básica” (Brasil, 2001, p. 13).

Sabe-se que, de modo geral, grande parte dos alunos egressos nos cursos de Licenciatura de Matemática ao chegarem a Universidade, já passaram por um longo processo de aprendizagem escolar no qual construiu para si uma imagem dos conceitos matemáticos a que foi exposto durante todo o Ensino Básico.

Nesse sentido, torna-se imprescindível durante todo o processo de formação desses profissionais, mobilizar elementos que possam contribuir para uma (re) significação desses conceitos. Dessa forma, a tecnologia e os softwares educacionais, desenvolvidos para o ensino de matemática surgem como fonte propulsora nesse processo de atribuir novos significados àquilo que já foi validado.

Na concepção de que (re) aprender matemática na Licenciatura é uma possibilidade para o desenvolvimento potencial e reflexivo dos futuros professores que, o experimento "*Descobrindo propriedades das Cônicas com o GEOGEBRA*" foi aplicado à turma do terceiro período do curso de Licenciatura de Matemática da UEMG, unidade de Carangola.

Adaptado do "Caderno de Atividades de Geometria Analítica: aulas práticas no laboratório de computação[38]" (MIRANDA e LAUDARES, 2011, p. 10-12) o experimento foi construído com base nas atividades de construção e análise do comportamento gráfico das cônicas. Essas atividades seguem uma sequência em que, após cada construção feita, os alunos são levados a argumentar sobre o comportamento observado no gráfico.

A fim de que pudéssemos compreender o nível de prova encontrado nos argumentos construídos e quais as contribuições que esse processo mediado pelo uso da tecnologia poderia oferecer para a aquisição do conhecimento matemático, para cada etapa do experimento propúnhamos aos alunos que fizessem um registro das principais caraterísticas observadas durante o processo de construção. Ao final do experimento recolhemos todo material produzido.

Com objetivo principal de analisar o comportamento desses alunos diante de uma situação de "prova" matemática, aplicamos o experimento no segundo semestre do ano letivo de 2016, quando estávamos trabalhando com a turma a disciplina obrigatória de Geometria Analítica II.

Planejamos desenvolver o experimento no laboratório de informática da Universidade. Assim, na semana anterior da realização do experimento, pedimos ao técnico responsável pelo laboratório que instalasse o software GEOGEBRA nos computadores que iríamos utilizar.

No dia proposto para aplicação do experimento, como alguns alunos da turma manifestaram ter muita dificuldade em utilizar o computador, optamos por realizar a atividade

---

[38] O Caderno de Atividades de Geometria Analítica: aulas práticas no laboratório de computação com uso dos softwares Geogebra e Winplot. (Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda e Prof.º Dr. João Bosco Laudares – Belo Horizonte, FUMARC, 2011) apresenta diversas atividades de construção e análise de comportamento gráfico de retas e superfícies cônicas.

em duplas (seis duplas). Como a maioria não conhecia o software GEOGEBRA, buscamos inicialmente, explorar algumas de suas ferramentas propondo duas atividades básicas de construção de cônicas, encontradas no Caderno de Atividades de Geometria Analítica: uma relacionada ao "traçado de cônicas" desconhecendo suas equações e outra de "construção de cônicas" a partir de alguns pontos dados[39].

Observamos que nessa primeira etapa os alunos que tinham mais facilidade em utilizar o computador procuraram incentivar seu parceiro a manuseá-lo para realizar a atividade proposta.

Nesse momento, chamou-nos muita atenção uma aluna, que dizia ser atendente em uma farmácia e que estava muito preocupa, pois iria ser dispensada de seu trabalho por "não saber trabalhar com o computador". Percebemos então, o quão é importante a Licenciatura não atrelar-se apenas ao ensino de fórmulas, leis e teorias, pois os espaços sociais atuais exigem das pessoas uma questão mais ampla. Entendemos que estratégias de ensino como essas não podem ser excluídas da formação de docentes, uma vez que esses futuros professores irão se deparar com alunos que utilizam frequentemente esse e outros tipos de tecnologias.

Após essa socialização com material tecnológico, prosseguimos o experimento propondo a realização de uma atividade de traçado de cônicas conhecendo-se as suas equações.

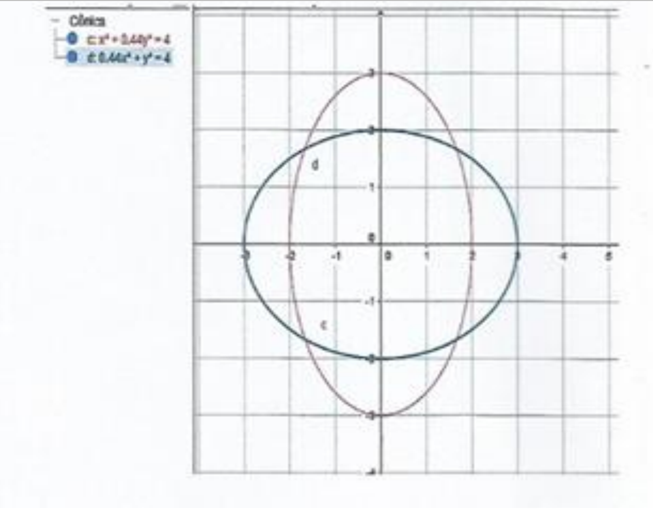
> *Digitar a dupla de equações* $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ *e* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ *num mesmo sistema de eixos. Analisar os gráficos e identificar suas principais características. Em seguida digite as duplas de equações:* $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ *e* $-\frac{x^2}{16}+y^2=1$ *analise seus gráficos e identifique suas principais características.* (Adaptado da atividade 03 "Caderno de Atividades de Geometria Analítica", Miranda e Laudares, 2011, p. 10)

Nosso objetivo nessa etapa do experimento foi analisar quais características conceituais das cônicas seriam evocadas e quais significados elas trariam para os alunos a partir de suas visualizações gráficas. Como os alunos não haviam recebido nenhuma sistematização do assunto abordado, esperávamos que os mesmos fossem capazes de reconhecer a partir da construção feita, algumas propriedades já conhecidas dessas cônicas.

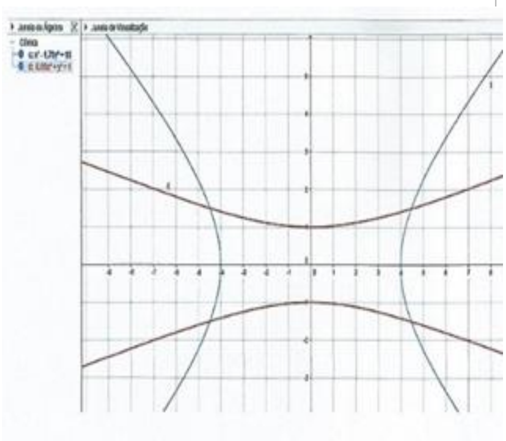
[39] Dentre as diversas funções disponíveis, os comandos do Geogebra 3D utilizados nessas construções são basicamente: ir ao menu "janela" ou em "comandos" e plotar as cônicas, como por exemplo: elipse por cinco pontos.

Procuramos não intervir nesse processo de construção. Apenas respondemos às dúvidas relacionadas ao uso das ferramentas do software. A figura a seguir mostra os gráficos obtidos, com o auxílio do GEOGEBRA, a partir das equações dadas na primeira etapa do experimento.

Figura 29- Gráficos obtidos com o auxílio do software GEOGEBRA



$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \; e \; \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$



$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \; e \; -\frac{x^2}{16}+y^2=1$$

Fonte: elaborado pela autora.

Notamos nessa etapa do experimento, que de maneira geral alunos limitaram-se apenas em identificar os tipos de cônicas e os eixos correspondentes a elas, embora esperássemos possíveis manifestações de expressões conceituais relacionadas às suas propriedades.

> *“As duas primeiras equações são de uma elipse, sendo que uma tem eixo maior na horizontal e eixo menor na vertical e a outra é o contrário dessa. As outras equações são de hipérboles”.* (Análise apresentada por todas as duplas de estudantes).

Para Gazire (2000), esse tipo de comportamento está relacionado ao fato do aluno está acostumado com um modelo de aula de “transmissão e recepção de conhecimento no qual quem raciocina e quem faz é o professor não o aluno” (GAZIRE, 2000, p.184).

Percebemos ser fundamental uma mudança na abordagem feita pelo professor em sala de aula, pois além da intencionalidade do planejamento mais adequado a ser utilizado ele precisa ter uma postura que favoreça a mobilização do aluno para a aprendizagem. Faz-se necessário criar um ambiente em que a aprendizagem matemática rompa com o paradigma da resolução de “listas e mais listas de exercícios”.

Na etapa seguinte propusemos aos alunos uma atividade de reconhecimento de “famílias de cônicas”.

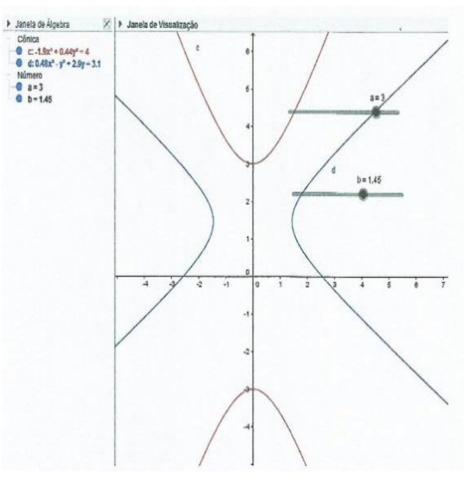
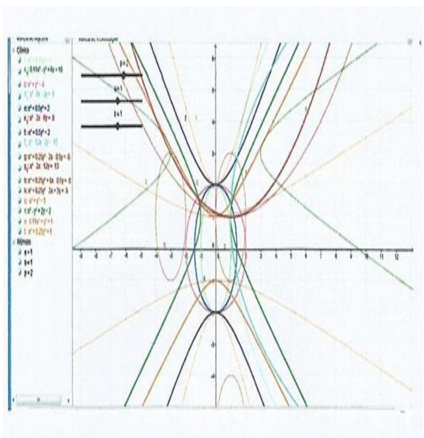
> *Declare dois parâmetros “a” e “b”, crie um cursor para os mesmos; digite as equações:* $-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ *e* $\frac{x^2}{b^2}-(y-b)^2=1$ *e varie o valor de “a” e “b” separadamente pelo cursor. Faça uma análise das alterações obtidas e justifique sua resposta.* (Adaptado da atividade 04 “Caderno de Atividades de Geometria Analítica”, Miranda e Laudares, 2011, p. 11).

O objetivo dessa etapa foi analisar quais definições conceituais seriam evocadas e qual nível de compreensão matemático seria alcançado pelos alunos durante a realização da atividade proposta. Mas uma vez esperávamos que os alunos fossem capazes de expressar em palavras ou através de formulações matemáticas algumas propriedades das cônicas obtidas dessas equações.

Ao fazermos a análise dessa etapa, procuramos evidenciar a qualidade de comunicação matemática nos argumentos construídos. Assim, notamos, mais uma vez, que metade dos alunos buscou apenas descrever o movimento feito pelas hipérboles durante as alterações dos parâmetros “a” e “b”.

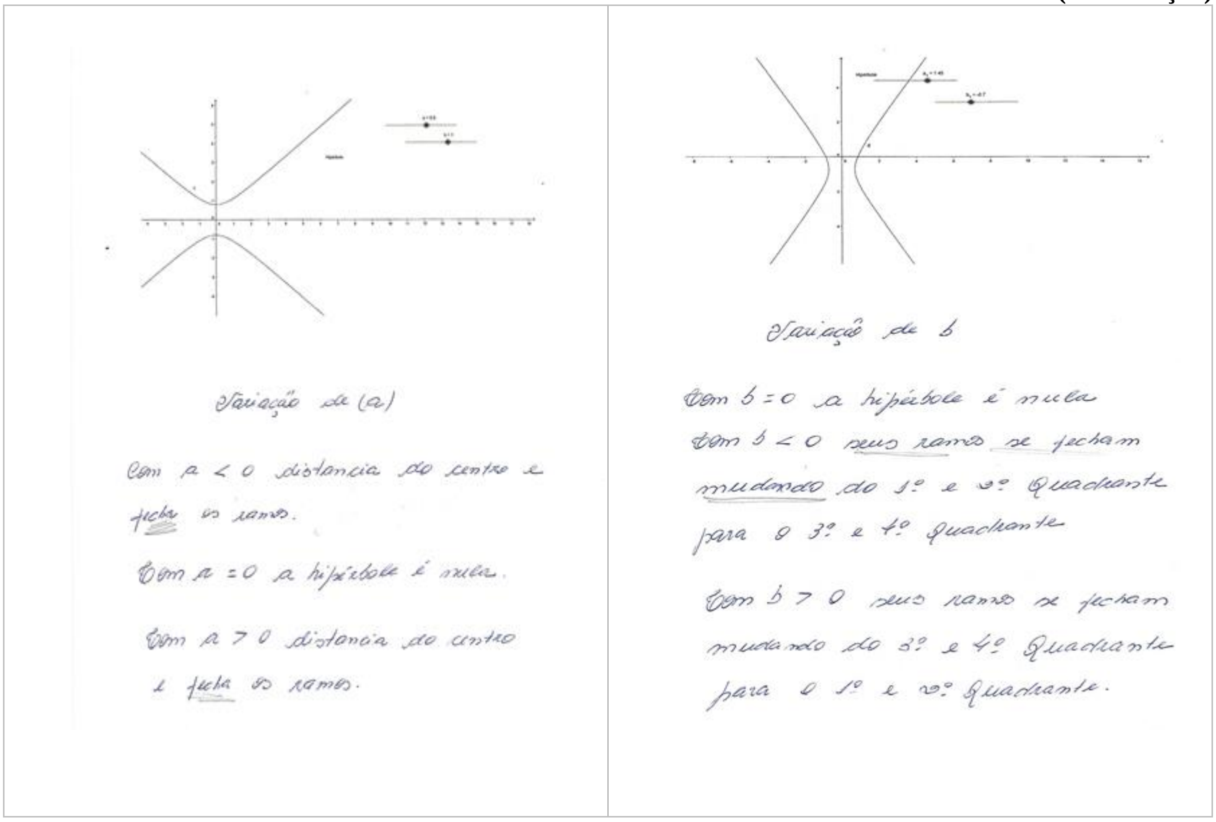
Quadro 9- Justificativa apresentada por três da seis duplas de estudantes do curso de Licenciatura

(Continua)

 P(8): Quando se move o cursor a, a Hipérbole se move sobre o eixo das ordenadas y, ate 5 e -5 . E quando se move o cursor b, as hipérboles de a quanto a de b se movimentam juntas, a se movimenta no eixo das ordenadas e b no eixo das abscissas, ambas fazem movimentos.	 P(8). a=2, quando alternamos o valor de a a abertura da hipérbole diminui e seu vértice é alternado em uma unidade para cima e para baixo. b=3, quando alteramos o valor de b a abertura da hipérbole aumenta mais o vértice continua o mesmo.

Justificativa apresentada por três da seis duplas de estudantes do curso de Licenciatura

(continuação)



Fonte: Dados da pesquisa.

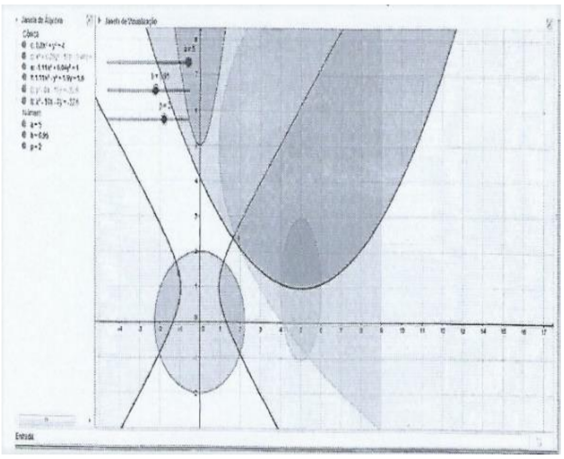
Percebemos que a forma como esses argumentos são apresentados estabelecem um estágio primitivo de desenvolvimento cognitivo, pois os alunos utilizam apenas imagem visual para validar o resultado apresentado. Observamos nos argumentos construídos um nível rudimentar de prova e também insuficiente.

Segundo Balacheff (2000), para que o aluno alcance um nível de prova conceitual, o mesmo deve "distanciar-se da ação e aproximar-se dos processos de solução do problema". A elaboração dessa linguagem funcional, para o pesquisador exige uma "descontextualização" do objeto real para uma classificação de objetos independente de uma circunstância particular; uma "despersonalização" e uma "destemporalização", ou seja, uma transformação das ações do mundo real para assim relacioná-las com as operações (BALACHEFF, 2000, p. 144).

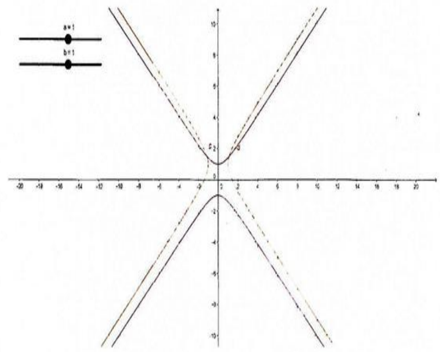
Para Gazire (2000), a sistematização somente acontece quando a mente humana está de posse de muitos dados empíricos e não mais aceita que "basta ver para crer" (GAZIRE, 2000, p. 191).

Nos demais argumentos analisados, percebemos que, embora os alunos também não tenham conseguido alcançar um nível de prova conceitual mais elevado, os mesmos buscaram construir suas conclusões com base na experiência que tinham a respeito do assunto.

Quadro 10- Justificativa apresentada por três duplas de estudantes do curso de Licenciatura

<table>
<tr>
<td>


Letra a : (P7 e P8)-Quando o valor do parâmetro a é alterado a hipérbole se movimenta sobre o eixo y, e observa-se que o valor da excentricidade é alterado (devido a alteração do valor das assíntotas), e quando o valor do parâmetro b é alterado, ela não se movimenta no sobre o eixo y, mas também tem o valor de sua excentricidade alterado.

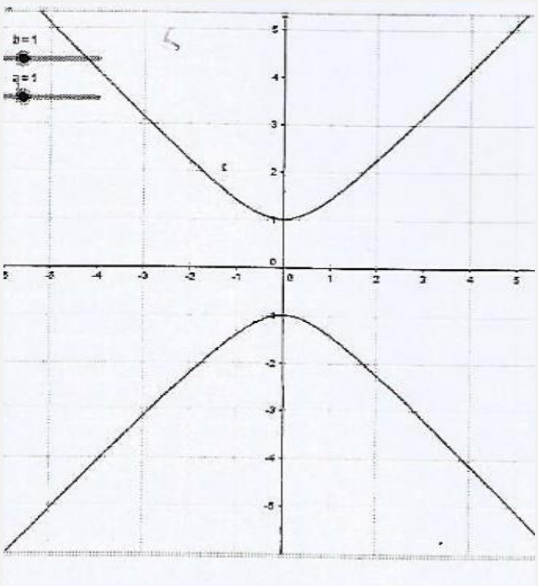
Letra b: (P7 e P8)- Quando o valor do parâmetro a é alterado a hipérbole não sofre alterações, mas quando o valor do parâmetro b é alterado, a hipérbole se movimenta pelo plano e tem o valor de sua excentricidade e de suas assíntotas alterado, fazendo com que seus ramos fiquem mais próximos ou mais distantes uns dos outros.
</td>
<td>


Variando A:

Quanto maior a distância entre A e zero maior a distância entre os ramos da primeira hipérbole. Quanto menor a distância entre A e zero menor a distância entre os ramos da primeira hipérbole. Quando A = 0 a primeira hipérbole deixa de existir. A variação do parâmetro A não influi na segunda hipérbole.

Variando B:

Variações na primeira hipérbole: quanto maior a distância entre B e zero maior abertura das concavidades. Quanto menor a distância entre B e zero menor a abertura das concavidades.

Variações na segunda hipérbole: quanto maior a distância entre B e zero maior a distância entre os ramos da hipérbole e menor a abertura das concavidades. Quanto menor a distância entre B e zero menor a distância entre os ramos da hipérbole e maior a abertura das concavidades. Quanto maior o valor de B maior o deslocamento em direção ao semieixo positivo de y. Quanto menor o valor de B maior o deslocamento em direção ao semieixo negativo de y. Quando B = 0 as hipérboles deixam de existir
</td>
</tr>
<tr>
<td>

</td>
<td>
4.P(8) Variações do parâmetro A com B fixo em 1, quanto mais longe de zero mais distante da origem ficará as ramificações da hipérbole tendendo tanto para o eixo positivo como para o eixo negativo das ordenadas.
Variação do parâmetro B com A fixo, as origens dos ramos permanecem fixos nos seus pontos de origem coordenados (0,1) e (0,-1), e quanto mais distan de zero tanto nos eixos positivos quanto negativos mais aberta será as folhas da hipérbole.
Obs: Tanto A=0 como B=0 os ramos da hipérbole permanecem nulos.

Variação parâmetros A com B fixo em 1, não há modificação alguma em relação as coordenadas permanecem inertes. Variação parâmetro de B com a fixo em 1, quanto b=0 os pontos são nulos, com B for menor que zero as coordenadas se distanciam da origem. Sendo localização das coordenadas no 3° e 4° quadrante.
Quando B for > 0, os ramos da hipérbole se localizam no 1° 2° quadrante junto com as ordenadas de sua origem.
</td>
</tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa.

Fato que consideramos um avanço importante na construção significativa desse conhecimento, uma vez que os alunos demonstraram uma boa compreensão das propriedades observadas. Notamos que os mesmos refletiram sobre a experiência matemática, desenvolvendo assim um tipo de linguagem mais apropriada para descrever suas percepções.

Para Balacheff (1998), essa forma de argumentar pode ser considerada como um nível de "coabitação operacional" entre pragmatismo empírico e racionalismo lógico, ou seja o envolvimento de dois tipos de racionalidade. Nesse caso, o aluno constrói seu argumento com base em dados empíricos e reconstrói seu sentido com base em conceitos sistematicamente adquiridos.

Na última etapa do experimento apresentamos aos alunos uma proposta de atividade de "análise da excentricidade de elipses e hipérboles" (atividade 05 do caderno de atividades de Geometria Analítica).

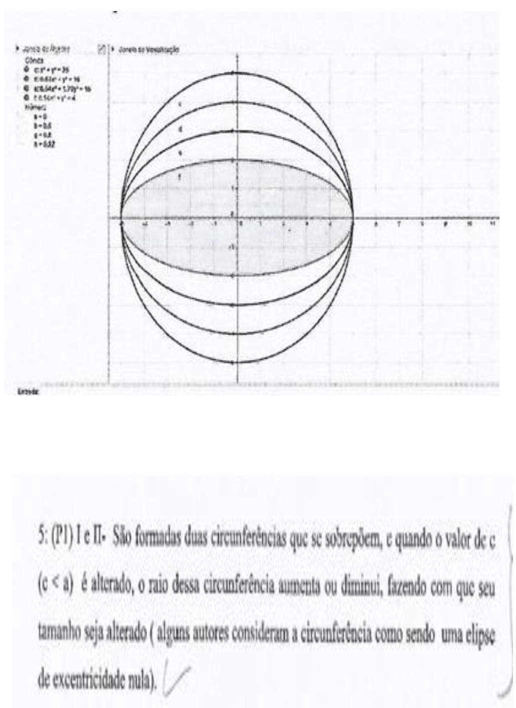
> *Plote as equações das elipses:* $x^2 + y^2 = 25$; $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ *e* $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ *faça uma análise de suas excentricidades e justifique sua resposta. Em seguida, em outro sistemas de coordenadas plote as equações das hipérboles:* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$ *e* $\frac{x^2}{c^2 - a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ *varie o parâmetro* ***c*** *em cada equação com* ***a*** *constante, faça uma análise da excentricidade e justifique sua resposta.* (Adaptado da atividade 05 "Caderno de Atividades de Geometria Analítica", Miranda e Laudares, 2011, p.11-12).

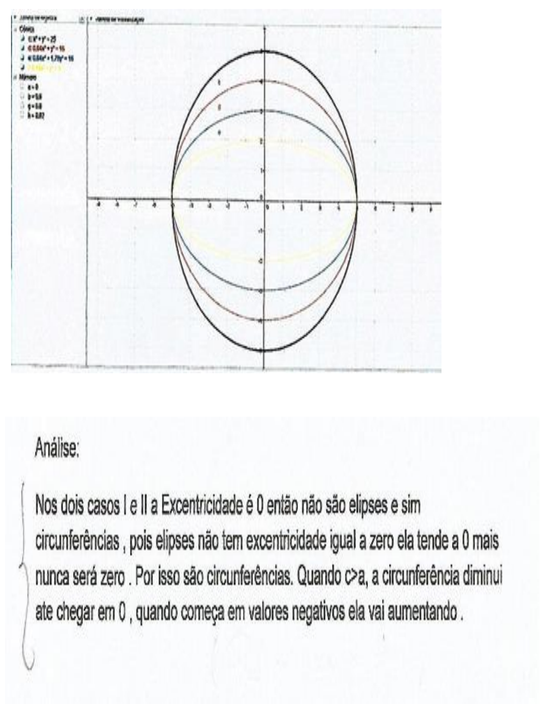
O objetivo dessa etapa era investigar a habilidade de uma demonstração matemática com base na interpretação geométrica do conceito de excentricidade. Esperávamos que os alunos fossem capazes consolidar formalmente uma definição. Evidentemente, esse não é um trabalho simples, pois exige do aluno um compromisso com a resolução do problema não só na sua eficácia prática, mas também com seu rigor teórico.

Assim, buscamos inicialmente, analisar nos argumentos construídos características que estabelecessem relações entre a comunicação dos significados compartilhados e a linguagem operacional utilizada. Nesse sentido, observamos que em geral os raciocínios apresentados evidenciaram uma boa compreensão do conceito de excentricidade.

Notamos, que ao analisarem o comportamento das elipses no plano, os alunos conseguiram reconhecer a equação $x^2 + y^2 = 25$ como uma circunferência e relacionar essa característica ao fato de sua excentricidade ser nula. Porém, na tentativa de justificar a afirmação feita, de acordo com Nasser e Tinoco (2003), eles recorreram a um argumento de *Autoridade*: "alguns autores consideram a circunferência como sendo uma elipse de excentricidade nula" (justificativa apresentada por um grupo de alunos).

Figura 30- Argumentos construídos com base nas equações das elipses



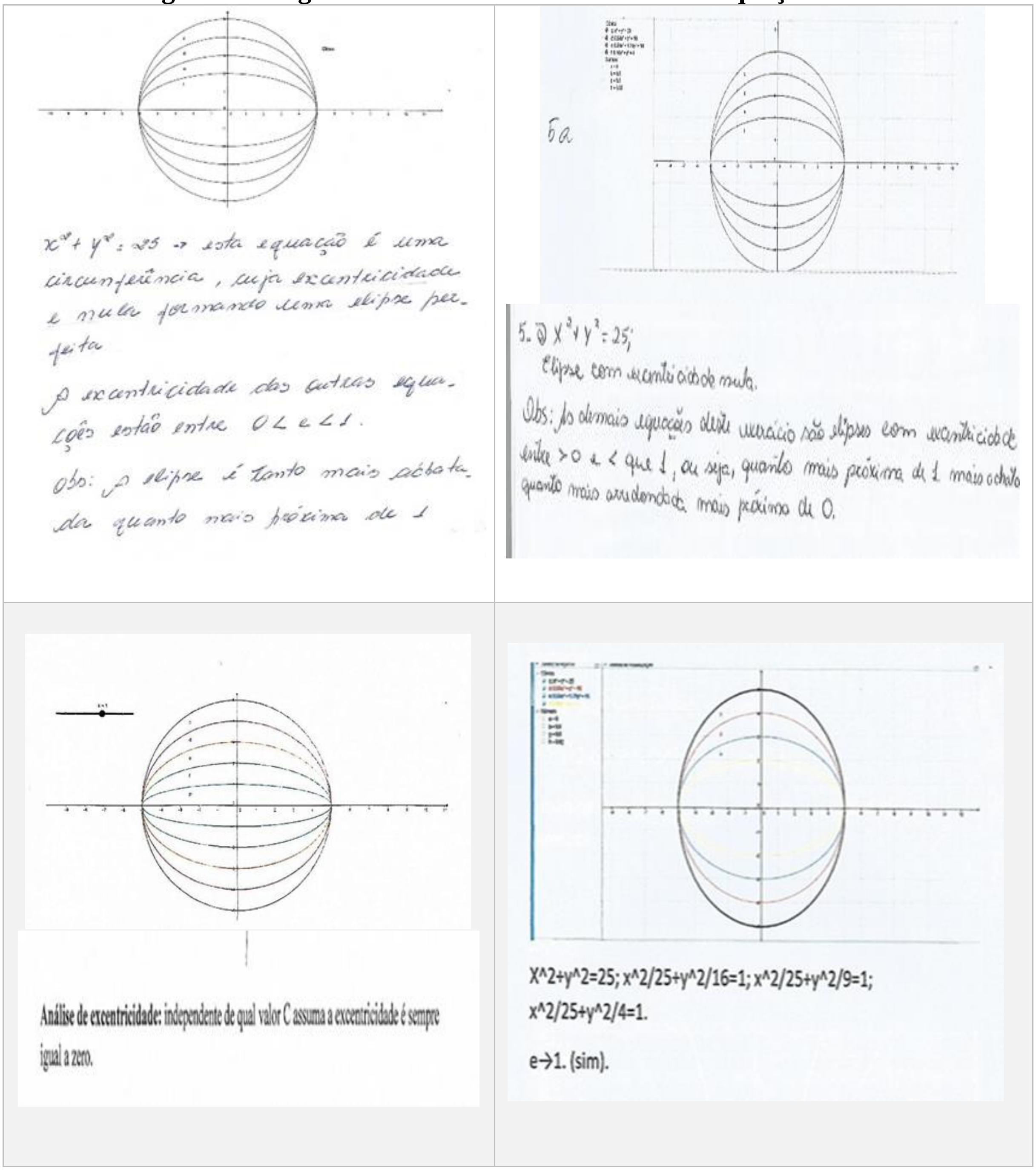


Fonte: Dados da pesquisa.

Mais uma vez, esse fato nos remete à ideia defendida por Gazire (2000) de que o processo mais usado pelo ser humano em sua própria aprendizagem é a "**imitação**". Para a pesquisadora, os alunos estão acostumados a um tipo de ensino em que os conteúdos são apresentados pelo "livro-texto" e a eles "cabe apenas decorar fórmulas e algoritmos para então aplicá-los em exercícios padronizados" (GAZIRE, 2000, p. 179-180).

Daí resulta a falta de compreensão dos alunos, como pudemos observar nos demais argumentos construídos, de que a demonstração de uma verdade geométrica não depende apenas de apresentar um aspecto particular ou circunstancial de uma determinada figura e sim, que é necessário separar do desenho dado as propriedades gerais e permanentes daquelas particularidades.

Figura 31- Argumentos construídos com base nas equações dadas

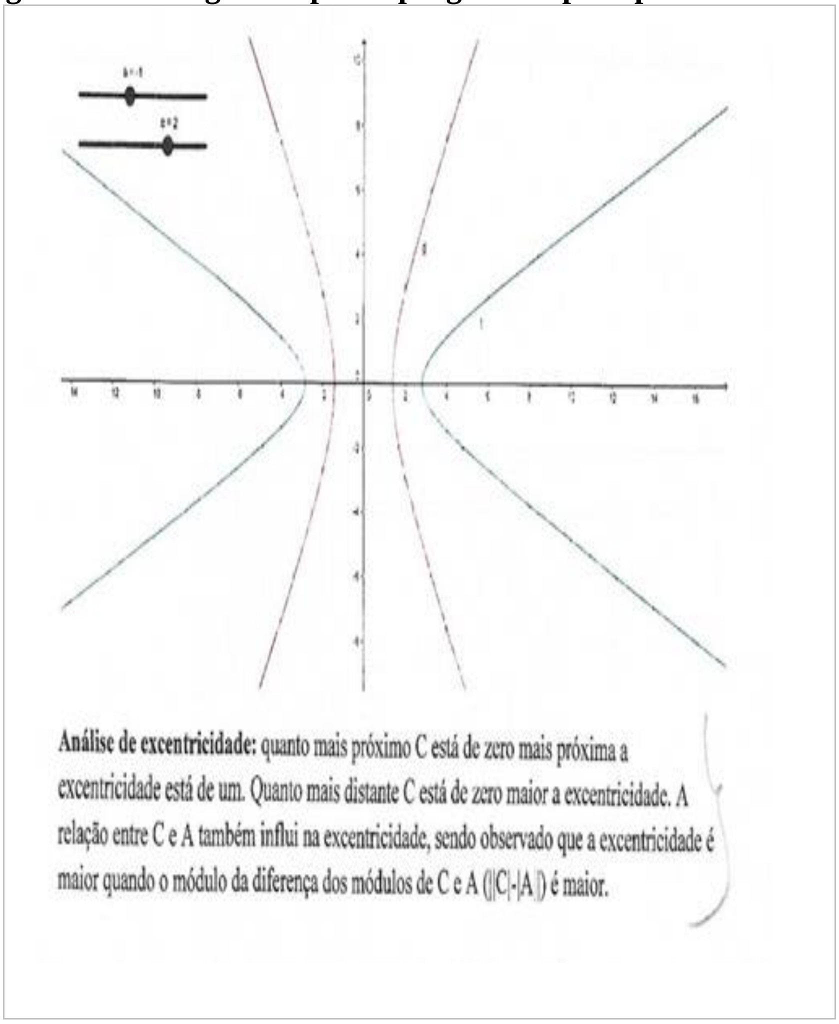


Fonte: Dados da pesquisa.

Segundo Balacheff (1988), para que o aluno chegue a um nível de “prova conceitual”, existe um longo caminho, que deve inicialmente passar por uma mudança radical na forma de conceber a prova: “é necessário que a justificativa que constitui a base da validação da proposição apoie-se sobre a análise de suas propriedades e essas não devem mais ser formuladas de maneira particular, mas sim de forma generalizada” (BALACHEFF, 1988, p. 227).

Quando analisamos os argumentos construídos em relação à excentricidade das hipérboles, notamos que em apenas um dos casos, ocorreu uma tentativa de se apresentar uma prova mais conceitual (figura 32). Observamos no argumento construído que as alunas buscaram explicitar a justificativa apresentada de forma mais generalizada, embora a conclusão inferida tenha partido de um caso particular.

Figura 32- Passagem de prova pragmática para prova conceitual

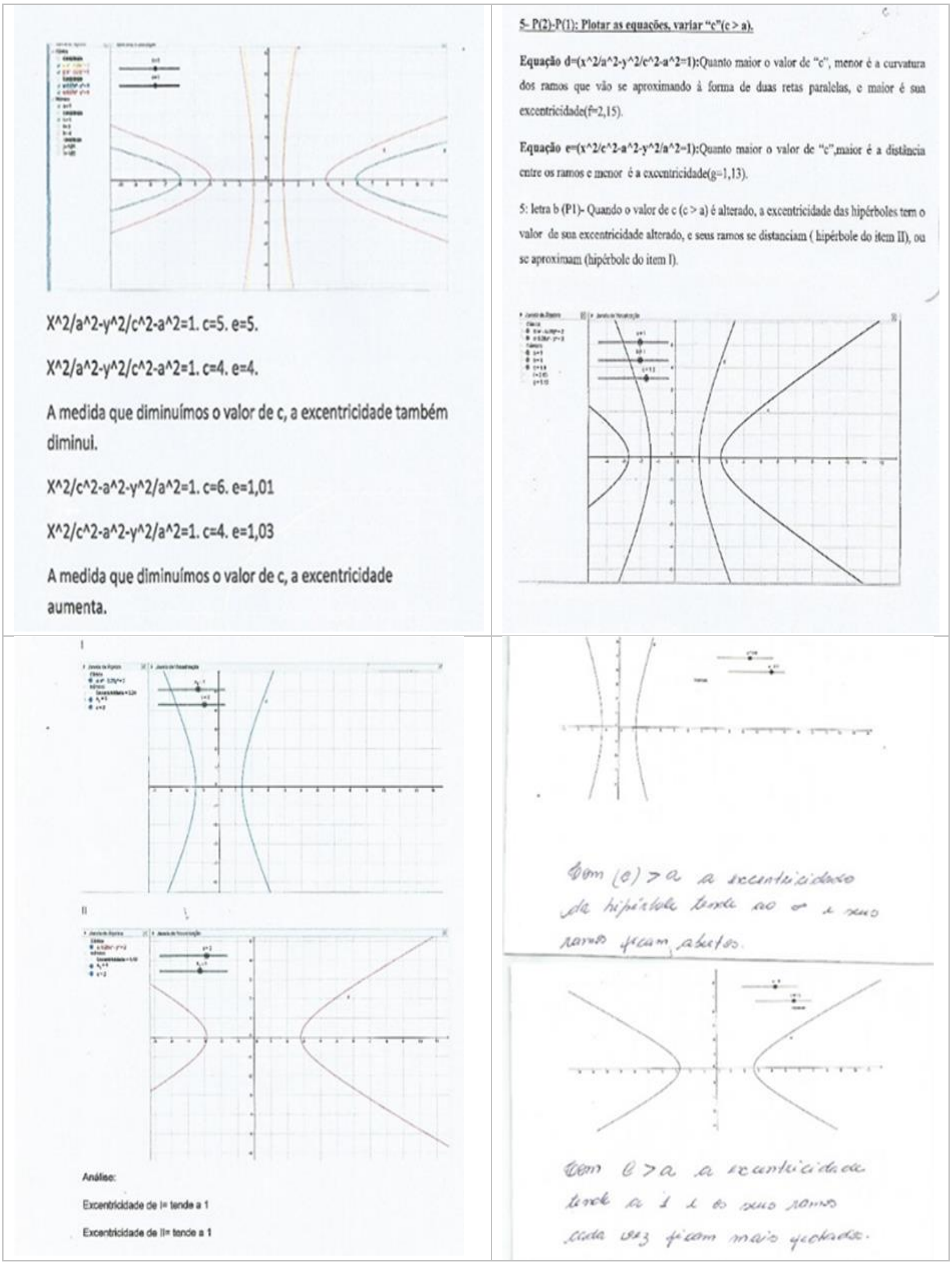


Fonte: Dados da pesquisa.

Balacheff (1988) classifica esse tipo de argumento como um nível de prova denominado de “Exemplo Genérico”. Para o pesquisador as tentativas de alguns alunos em estabelecer uma prova matemática por meios de uma argumentação lógica esbarra na dificuldade de proporcionar ao problema apresentado uma configuração mais especifica: “a prática da prova exige raciocínio e ao mesmo tempo um estado específico de conhecimento” (BALACHEFF, 1988, p. 228).

Nos demais casos analisados, percebemos novamente, que os argumentos foram construídos de forma bastante rudimentar, apresentando um nível de prova classificado de acordo com Balacheff (1988), como “Empirismo Ingênuo”.

Figura 33 - Nível de prova: "Empirismo Ingênuo"



Fonte: Dados da pesquisa.

Nesses argumentos, as características das expressões linguísticas são insuficientes para tornar claro o nível de compreensão matemática envolvido na construção do raciocínio.

Entendemos que os argumentos aqui apresentados fazem parte de uma concepção mental dos alunos que os impede de expressar claramente as propriedades de um determinado objeto e suas consequências o que implica na impossibilidade de construir linguagens conceituais mais avançadas.

O que se observa, é que de maneira geral, os discentes dessa turma estão passando por um processo de transição que constitui sua identidade profissional. Percebemos que muitos alunos ao chegarem à Universidade não estão conscientes ou convencidos que o objetivo principal desse curso é a formação de professores, e que seu papel social de educador é ter uma visão ampla de que a aprendizagem matemática deve oferecer à formação dos indivíduos a competência para o exercício de sua cidadania.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Porque eles tinham "CURIOSIDADE"! (Aluna do terceiro ano A, 2016)

A ideia de seguir o paradigma de uma aprendizagem centrada em conteúdos e premida pela necessidade de medir de forma objetiva o "sucesso" ou "fracasso" da matemática escolar é deixar de lado aspectos importantes que envolvem todo esse processo educacional. A aprendizagem é condição necessária e essencial do desenvolvimento potencial do sujeito e tem influência direta no processo de construção do seu conhecimento.

Ao iniciarmos essa pesquisa investigando o processo de construção do pensamento Geométrico, chegamos à reflexão de que as diversas mudanças ocorridas na estruturação desse conhecimento, em um espaço de tempo tão curto acarretou uma inesperada rebelião intelectual, mudando de maneira significativa a forma do indivíduo ver o mundo.

A visão de mundo que relacionava determinados fatos ou acontecimentos à intuição humana, variando de acordo com as condições vivenciadas por um indivíduo ou por grupos de indivíduos, deu lugar a um conhecimento estruturado na conceitualização do espaço processada e organizada de forma lógica e sistematizada.

Encontramos nas civilizações antigas indícios de que a Geometria não reside apenas no espaço físico, mas que essa possui também um enorme caráter abstrato, ou seja, de uma ciência que demonstra que a precisão de suas previsões é bem maior que os seus resultados observacionais.

Com um pensar reflexivo e sistemático sobre a construção do conhecimento Geométrico, percebemos, que ao longo dos séculos, a natureza desse pensamento procurou apoiar-se na solidez de seus argumentos. De fato, desde os Elementos de Euclides uma verdade geométrica é consistente quando garante que todo seu processo é fundamentado em um sistema formal.

Elevando o pensamento Geométrico ao conhecimento racional, verificamos que, qualquer fato ou enunciado deve ter uma "razão" ou uma causa determinante para existir. Nessa perspectiva, ao contrário da intuição, o conhecimento geométrico racional é um tipo de conhecimento que exige "provas e demonstrações" para verdades conhecidas ou investigadas: não parte apenas de um ato intelectual, mas sim de vários atos intelectuais.

O conhecimento geométrico racional procura ir além do fato observado, pois, busca na razão um caminho para explicar e demonstrar a ocorrência de diversos fenômenos.

O que aprendemos então com essa história concisa? Que não há dúvida de que a Geometria é uma obra genial do pensamento humano.

Pensando na evolução histórica da humanidade, considerando que o nosso conhecimento começa com as experiências vividas e que nossa percepção acerca do universo está relacionada à maneira pela qual associamos o mundo percebido às nossas ideias, entendemos que a grandeza da Geometria revela-se na sua singular habilidade de juntar tudo na forma de uma teoria e na insistência de fornecer uma demonstração para as consequências dela.

Ao direcionarmos nossos estudos aos resultados dos inúmeros experimentos realizados pelas ciências cognitivas na busca por uma caracterização para a construção do pensamento lógico geométrico, com um olhar nas conclusões de alguns cientistas cognitivos (Gardner, 1994; Piaget, 1986; Vygotsky, 1998), verificamos que para um indivíduo avançar seu conhecimento geométrico além das habilidades inatas, faz-se necessária a construção de processos de pensamento mentais que traduzam conceitos abstratos em outros mais concretos.

Nessa concepção, a aquisição de conceitos geométricos e das relações existentes entre eles independem das definições operacionais desse conhecimento. De acordo com a ciência cognitiva, o desenvolvimento de competências e habilidades geométricas acontecem a partir da leitura daquilo que produz significado.

Em se tratando de habilidades e competências, entendemos que a relação estabelecida entre os objetivos para a aprendizagem geométrica e aquilo que os alunos demonstram como conhecimento efetivamente construído nem sempre são os mesmos. Quando visto dessa forma, compreender em que nível encontra-se um pensamento argumentativo geométrico de um indivíduo, significa saber em que ponto se está e o que é preciso fazer para se chegar aonde se pretende.

Com um pensar reflexivo e sistemático concernente à prática Geométrica demonstrativa, direcionamos nossa pesquisa ao âmbito sócio educacional, onde ocorrem as diversas situações de ensino e aprendizagem. Eis que surge a questão: “por que o formalismo lógico é tão necessário na matemática escolar?

Na busca por respostas para esse questionamento, encontramos na Educação Matemática (Hanna, 2000; Balacheff, 1988; Lakatos, 1978 e Pogorélov, 1974) alguns aspectos interessantes que relacionam a prática demonstrativa à construção de processos mentais, por meio dos quais os alunos experimentam a realidade, criam hipóteses sobre o seu objeto de estudo e confrontam-nas com as hipóteses de seus pares.

Quando utilizado de forma argumentativa, o formalismo lógico torna-se acessível a um número maior de estudantes, pois possui um maior valor educativo, oportunizando os alunos a perceberem detalhes, conjecturar e cometer erros; para refletir e interpretar as relações entre objetos e oferecer-lhes explicações matemáticas.

Mais do que permitir que as hipóteses confirmem veracidade aos teoremas, as provas têm o efeito de questionar essas condições e promover o entendimento matemático. Essa linha de raciocínio é bem similar às soluções propostas pelos cientistas cognitivos, pois baseia-se numa perspectiva geométrica que parte da “investigação”, contemplando seu desenvolvimento tanto numa dimensão teórica como experimental.

Entretanto, a realidade nas escolas não reflete essa concepção, visto que, apesar dos esforços feitos nos últimos tempos para aperfeiçoar o ensino-aprendizagem dos conteúdos Geométricos na Educação Básica, cada vez mais grande parte dos alunos chega ao curso de Licenciatura com uma grande defasagem no que diz respeito à aprendizagem dessa disciplina.

“Por que a maioria dos alunos continuam fracassando na aprendizagem geométrica? E a maioria dos professores continuam fracassando em seu ensino?”

A resposta mais simples que encontramos para essas questões é que a ausência da Geometria nas escolas pode estar relacionada ao fato dos professores não possuírem os conhecimentos geométricos necessários para a realização de tal prática. Alguns especialistas da área (Gazire, 2000; Nasser e Tinoco, 2003; Nasser e Aguilar Junior, 2012) apontam que o ‘não resgate’ da Geometria em sala de aula está relacionado a um círculo vicioso: “se um professor sistematicamente não ensina geometria, o provável será que seu aluno (futuro professor) também não o faça” (GAZIRE, 2000).

Na verdade, além da importância de dominar os conteúdos a serem ensinados, faz-se necessário que o professor tenha conhecimento didático deles, para que então possa encontrar a maneira mais adequada de apresentá-los aos alunos.

Chegando então ao elemento fundamental, que reflete toda nossa capacidade de construir o grande “quebra-cabeça” que é o processo de ensino e aprendizagem geométrica, onde a mais diminuta alteração nas condições iniciais pode produzir resultados finais inteiramente diferentes.

Nesse sentido, ao analisarmos os dados obtidos na pesquisa, não nos objetivamos apenas em obter uma resposta única para as questões aqui apresentadas, mas sim, em investigar criteriosamente qual contribuição esse processo de “Prova Experimental” traz para a Educação Matemática.

Sabemos que existem muitos exemplos de recursos didáticos que favorecem a construção de conceitos e propriedades geométricas, contudo, optamos por propor “Provas

Experimentais” por considerarmos que essa estratégia de ensino contempla um olhar reflexivo sobre a ação pedagógica, tanto em seus aspectos cognitivos como didáticos.

Buscamos, na construção dessas “Provas Experimentais”, mostrar que é possível produzir atividades investigativas com recursos que estão ao alcance do professor na sala de aula.

Existe, sem dúvida, um fato crucial a ser considerado: o “espírito investigativo” que delineia os limites da capacidade do aluno de resolver problemas. Por isso, as atividades experimentais precisam ser continuamente utilizadas, principalmente ao lidar com aquelas áreas nas quais não se tem uma teoria que produza muito mais do que o que já foi investigado.

Ao analisarmos, de forma geral, os argumentos construídos pelos sujeitos envolvidos na pesquisa, verificamos que as construções de pensamento apresentadas, tanto no que se referem aos alunos da Educação Básica, como do curso de Licenciatura, concentram-se apenas no nível de “Prova Pragmática”, variando entre os tipos: “Empirismo Ingênuo” e “Exemplo Genérico”.

Naqueles poucos casos em que uma precisão superior é obtida, percebe-se que os alunos recorrem a um “argumento de autoridade”, ou seja, definições apresentadas no livro didático ou explicações dadas pelo professor e que mesmo assim, estão longe de alcançar um nível de “Prova Conceitual”.

Percebemos, na maioria das vezes, que as justificativas sobre o fato observado são construídas com base na apresentação de um caso particular ou por meio de imagens. Realidade essa, verificada nos resultados obtidos com os experimentos realizados nas três turmas (9º ano do Ensino Fundamental, 3º ano do Ensino Médio e 3º período do curso de Licenciatura) que apesar de encontrarem-se em diferentes graus de escolaridade, apresentam a mesma maturidade matemática.

Isso não quer dizer que os argumentos construídos não desenvolveram experiências de pensamento construtivas. Em vários deles notamos estratégias “engenhosas”, capazes de abordar diversos aspectos importantes do problema apresentado. Por esse motivo, entendemos que as “Provas Experimentais” são capazes de auxiliar na construção de um pensamento matemático mais avançado.

Acreditamos que esse trabalho confirma muito acerca do que já se assinalara sobre o Ensino de Geometria, como atestam vários estudos aqui referenciados. Todavia, está longe de ser conclusivo, muitos outros aspectos em relação ao tema devem ser considerados, tais como:

- Analisar o nível de prova encontrado nos argumentos construídos por professores da Educação Básica, de acordo com o modelo proposto por Balacheff (1988; 2000).

- Confrontar o nível de prova encontrado nos argumentos dos alunos da Educação Básica nos anos iniciais do Ensino Fundamental com os dos alunos que estão nos anos finais do Ensino Médio afim de verificar o desenvolvimento cognitivo desses alunos com o passar dos anos escolares.
- Investigar qual a relação existente entre o pensamento argumentativo geométrico e sua construção filosófica no sistema formal.
- Seria também interessante, propor um estudo fenomenológico da aquisição do conhecimento geométrico de um indivíduo ou de um determinado grupo.

Entendemos que o estudo desses e de outros aspectos possam contribuir de forma significativa para o desenvolvimento do Ensino de Geometria e para que possamos compreender de fato sua importância na formação de seres pensantes, capazes de agir e posicionar-se de forma crítica diante dos desafios impostos pela convivência social despertando assim, sua CURIOSIDADE.

REFERÊNCIAS

AGUILAR JÚNIOR, Carlos Augusto. **Postura de docentes quanto aos tipos de argumentação e prova apresentados por alunos do ensino fundamental.** 2012. 144 f. Dissertação (Mestrado) - Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

ALMOULOUD, Sado A. Prova e demonstração matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. In: 30ª Reunião Anual da Anped, v. 1, 2007, Caxambu. **Anais ...** Minas Gerais: Anped, p. 1-18, 2007.

ALVES, José Pinho. Atividade experimental: uma alternativa na concepção construtivista. In: Encontro de Pesquisa e Ensino de Física, 8. 2002, Águas de Lindóia. **Anais** ... São Paulo: SBF, p. 1-20, 2002.

ARISTÓTELES. **Segundos Analíticos**, livro II. Tradução de Lucas Angioni. Col. Clássicos da Filosofia: Cadernos de Tradução nº. 4, Campinas: Instituto de Filosofia e Ciências Humanas/ Unicamp, 2004.

A.V. POGORÉLOV. **Geometria Elementar**. Tradução de Carlos Veja. Moscou: Editora Mir, 1974.

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BALACHEFF, Nicolas. Aspects of proof in pupils’ practice of school mathematics. En: PIMM, David. **Mathematics, teachers and children**. Londres: Hodder & Stoughton, p. 216-235, 1988.

____________, Nicolas. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas**. Tradução: Pedro Gómes. Bogotá: Centro de Impresión Digital Cargraphics S.A., 2000.

______________, Nicolas. Processus de preuve et situations de validation**. Educational Studies In Mathematics: An International Journal.** v. 2, n. 18, p.147-176, maio 1987.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Filosofia e epistemologia na educação matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções & perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

_________, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Filosofia da educação matemática:** fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. São Paulo: UNESP, 2010.

_________, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa em educação matemática. **Pró-posições**, São Paulo, v. 04, p.18-23, 1993.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. 2. ed. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola. **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. Parecer CES/CNE 1.302/ 2001, homologação publicada no DOU 05/03/2002, Seção 1, p. 15. Resolução CES/CNE 03/2003, publicada no DOU 25/02/2003, Seção 1, p. 13.

________. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (Ensino Fundamental). v. 3. Brasília: MEC, 1997.

_________. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**. MEC, 1999.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008

BURNET, John. **A aurora da filosofia grega**. Tradução de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Contraponto, 2010.

CARVALHO, Maria Cecilia M de. **Construindo o saber:** Metodologia Científica Fundamentos e Técnicas. Campinas: Papirus, 1995.

CHARLOT, Bernad. **Da Relação com o saber**: elementos para uma teoria. 2. ed. Porto Alegre: Artmed Editora, 2000.

CHAUÍ, Marilena. **Convite à filosofia**. São Paulo: Atica, 2000.

______, Marilena. A Filosofia: ética ou filosofia moral. In: CHAUI, Marilena. **Convite à filosofia**. São Paulo: Ática, 1995. Cap. 5, p. 339-356.

CÔNICAS, noções: intuições e aplicações, 2016. Disponível em: <http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2013/04/conicas-nocoes-intuitivas-e-aplicacoes.html> Acesso em: 18 mar. 2016.

COSTA, Gustavo A. T. F. da. O cone e as cônicas. **Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina** n.4, p. 77-89, 2007.

DESCARTES, René. **Discurso sobre o método**. Tradução: Maria Hermantina Galvão. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

EUCLIDES. **Os Elementos/Euclides**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Referência. In: FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **O mini dicionário da língua portuguesa**. 8 ed. rev. e ampl. Rio de Janeiro: Saraiva, 2010.

FETISSOV, A. I. **A demonstração em geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3.ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

FIORENTINI, Dario. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, Marcelo de Carvalho. **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, p.47-76, 2004.

FRAGOSO. Uma introdução à ética de Benedictus de Spinoza. **Kalagatos – Revista de Filosofia.** Fortaleza, v. 9, n. 17, p.10-17, jan. 2012.

GASPAR, Alberto. **Experiências de Ciências**: para o ensino fundamental. São Paulo: Ática, 2005.

GARNICA, Antônio Vicente M. É necessário ser preciso? É preciso ser exato? um estudo sobre argumentação matemática ou uma investigação sobre a possibilidade de investigação In: CURY, H. N. **Formação de Professores de Matemática**: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, p. 49-87, 2001.

GARDNER, Howard. **Estruturas da mente**: a teoria das múltiplas inteligências. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

GAZIRE, Eliane Scheid. **O não resgate das geometrias**. 2000. 217 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

HANNA, Gila. Proof, explanation and exploration: an overview. **Educational studies in mathematics**, Canadá, v. 44, n. 1, p.5-23, 2000.

HANNA, Gila. Some pedagogical aspects of proof. Interchange. **The Ontario Institute or Studies in Education,** v. 21, n. 1, p 6-13. Ontario, Canadá, 1990.

HUME, David. **Coleção Pensadores**. São Paulo: Abril Cultural, 1973.

IEZZI, Gelson; DOLCE Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: ciências e aplicações.** v. 3. Ensino Médio, 8 ed. São Paulo: Atual, 2014.

ILUMINURA do século XVII em uma tradução latina dos Elementos de Euclides atribuída a Abelardo de Bath personificação da geometria, 2016. Disponível em: <http://explore.bl.uk/primo_library/libweb/action/search>. Acesso em: 10 agost. 2016.

IMENES, Luiz Marcio. A Geometria no primeiro grau: experimental ou dedutiva? **Revista de Ensino de Ciências** (USP), São Paulo, n. 19, p. 55-61, 1987.

INFOESCOLA. **Jardins suspensos da Babilônia**. Disponível em: <http://www.infoescola.com/história/jardins-suspensos>. Acesso em: 20 fev. 2016.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Censo demográfico 2016.** População, trabalho e rendimento. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/estimativa2016/estimativa>. Acesso em: 06 jun. 2016.

KANT, Imannuel. **Crítica da razão pura**. 5. ed. Tradução de J. Rodrigues de Merege. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

KLEENE, Stephen Cole. **Mathematical logic**. Courier Corporation, 2002.

LAKATOS, Imre. **A lógica do descobrimento matemático**: provas e refutações. Tradução de Nathanael C. Caixeiro. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONE, Marina de Andrade. **Fundamentos da metodologia científica**. 2.ed. São Paulo: Atlas, 1991.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de matemática:** e outras histórias. Rio de Janeiro: IMPA/VITAE, 1991.

LIMOEIRO, Miriam Cardoso. **Ideologia do desenvolvimento**. 2.ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1978.

LÍVIO, Mario. **Deus é matemático?** Tradução de Jesus de Paula Assis, 2.ed. Rio de Janeiro: Record, 2011.

LORENZATO, Sérgio. **Coleção Formação de Professores:** O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de Professores. São Paulo: Autores Associados, 2006.

MARK, Julian Cass. **A Teoria da Prova em Leibniz**. v. 11, n. 2, São Paulo: Scientia e studia, p. 79-267, 2013.

MIRANDA, Dimas Felipe de; LAUDARES, João Bosco. **Caderno de atividades de geometria analítica**: aulas práticas no laboratório de computação: uso dos softwares Geogebra e Winplot (Caderno 05). Belo Horizonte: FUMARC, 2011.

NASSER, Lilian; A TINOCO, Lucia A de. **Argumentação e provas no ensino de matemática**. Rio de Janeiro: Ufrj/projeto Fundão, 2003. 109 p.

OLIVEIRA, Cêurio de. **Curso de Cartografia Moderna**. Rio de Janeiro: Fundação IBGE, 1988.

PAPALIA, Daiane E; OLDS, Sally Wendkos; FELDMAN, Ruth Duskin. **O mundo da criança:** da infância à adolescência. 11ed, São Paulo: Saraiva, 2001.

PIAGET, Jean. **O desenvolvimento do pensamento**: equilibração das estruturas cognitivas. Lisboa: Dom Quixote, 1977.

________, Jean. **O nascimento da inteligência da criança**. São Paulo: Editora Crítica, 1986.

PLATÃO. **A República**. Tradução de Enrico Corvisiere. São Paulo: Nova Cultura, 2000.

POINCARÉ, Henri. **The value of science.** Tradução de George Bruce Halsted. New York: The Science Press. 2012.

PORTAL MATEMÁTICA E MULTIMÍDIA. As mídias. Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br>. Acesso em: 12 dez. 2015.

PROGRAMA DAS NAÇÕES UNIDAS PARA O DESENNVOLVIMENTO (PNUD). **Atlas do desenvolvimento humano no Brasil.** 2013. Disponível em: <http://www.atlasbrasil.org.br/2013/>. Acesso em: jun. 2016.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática**. Brasil: M Books, 2012.

RUSSELL, Bertrand. **Introdução à filosofia da matemática.** Edição e tradução: Augusto J. Franco de Oliveira. 1 ed. Lisboa: CEHFCI, 2006.

SCARPIN, R. R. Começos...tropeços...recomeços. In: GRINSPUN. Mirian Paula S. Z. (Org.). **Supervisão e orientação educacional**: perspectivas de integração na escola. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

SHOENFIELD, Joseph Robert. **Mathematical logic**. Canadá: Addison-Wesley Pub. Co. 1967.

SILVA, A. e RÊGO, R. Matemática e literatura infantil: um estudo sobre a formação do conceito de multiplicação. In BRITO, M.R.F (Org.) **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas: Alínea, p. 207-236, 2006.

TAHAN, Malba. **O Homem que calculava.** 63. ed. São Paulo: Record, 2003.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **Pensamento e linguagem**. Rio de Janeiro: Martins Fontes, 1998.

APÊNDICE A - Produto desenvolvido a partir da pesquisa realizada

“Construindo Práticas Investigativas em Geometria: caderno de provas experimentais”

CONSTRUINDO PRÁTICAS INVESTIGATIVAS GEOMÉTRICAS

01/01/2007

Caderno de Provas Experimentais

ORGANIZAÇÃO: Sabrina Alves Boldrini Cabral

ORIENTAÇÃO: Dra. Eliane Scheid Gazire

CONSTRUINDO PRÁTICAS INVESTIGATIVAS Geométricas

CADERNO DE PROVAS EXPERIMENTAIS

APRESENTAÇÃO:

"O que chamamos de aprendizado é só um processo de reminiscência." (Platão)

Entender como os alunos compreendem um processo de prova matemática é buscar elementos que possam auxiliar na estruturação do conhecimento que decorre da prática escolar cotidiana. Compreender as relações que definem o conhecimento dos objetos matemáticos e a realidade que circunscreve seu saber fazem com que a ação pedagógica do professor incorpore diferentes concepções, tornando-a capaz de elevar os estudantes a um nível de compreensão que transcenda o conhecimento de determinadas propriedades matemáticas.

Encontrar situações de diferenciação entre 'o que' se estuda e 'por quê' se estuda, constitui um dos principais objetos de pesquisa relacionadas à didática da Matemática que não se preocupa apenas em fazer com que os alunos sejam capazes de resolver o problema mais difícil, mas sim com que esses sejam capazes de ampliar os horizontes da própria Matemática.

Na tentativa de elucidar alguns aspectos da aprendizagem matemática, principalmente no que diz respeito à construção do pensamento geométrico, o "**Caderno de Provas Experimentais**" apresenta uma proposta de trabalho que busca tornar mais significativo o ensino de geometria. Partindo da investigação e da experimentação, os alunos são levados a construir modelos explicativos para uma determinada situação proposta.

Desenvolver a capacidade investigativa e a construção do conhecimento científico com base na experimentação compõe um dos principais objetivos desse "Caderno". Acreditamos que a utilização de provas experimentais em sala de aula, pode proporcionar situações específicas e momentos de aprendizagem que dificilmente aparecerão em aulas tradicionais.

Além de construir uma ferramenta significativa para o ensino das propriedades geométricas, o impacto que essas atividades provocam na construção do conhecimento do aluno, tanto do ponto de vista cognitivo quanto da aprendizagem de conceitos, confirma que a experimentação auxilia o aluno a agir com autonomia e desenvoltura diante dos problemas propostos em sala de aula.

Esse "Caderno" é produto de uma pesquisa de mestrado e foi construído com base nos experimentos realizados durante o ano de 2016 (dois mil de dezesseis), com três turmas da rede pública de ensino, que se encontravam em diferentes níveis de aprendizagem: **nono ano do Ensino Fundamental; terceiro ano do Ensino Médio e terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática**.

As "Provas Experimentais" aqui apresentadas foram elaboradas com base na proposta curricular de ensino para essas turmas e com o auxílio do material didático adotado pela escola. É importante destacarmos que o livro didático de Matemática torna-se uma ferramenta poderosa de ensino quando aliado à ações planejadas.

Nessa perspectiva, faz-se necessário que o professor leve em consideração que, para ensinar estudantes a desenvolverem métodos de argumentação e prova, é preciso estar atento ao seu nível de desenvolvimento cognitivo e ao caminho pelo qual suas experiências prévias construirão estruturas conceituais que poderão ajudar ou impedir esse desenvolvimento.

Nós objetivamos, aqui, mostrar que a utilização de Provas Experimentais é importante nas aulas de Matemática, pois abrem caminhos para a investigação e desenvolvimento do raciocínio lógico. Entendemos que os conceitos matemáticos são formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão às formulações que enunciam e às verificações que realizam, ressaltando, assim, a relevância de que a estratégia utilizada permite uma formação significativa da aprendizagem.

Espera-se que esse "Caderno" contribua com o desenvolvimento de competências cognitivas, práticas e sociais que todo aluno tem direito e que essas se traduzam na capacidade de descrever e interpretar a realidade, de planejar ações e agir sobre o mundo real.

■ SUMÁRIO

O PAPEL DAS PROVAS E DEMONSTRAÇÕES NO ENSINO

Muito se discutiu e ainda se discute sobre a função das “provas e das demonstrações” no ensino de Matemática. Explicações fundamentadas no senso comum apontam que o uso de demonstrações no ensino não passa da apresentação de uma linguagem formal cujo objetivo principal é buscar padrões e relações de uma ciência que possui caráter exato e dedutivo. Porém, não há dúvida que, ao contrapor e avaliar diferentes interpretações sobre sua função no ensino, as “provas e as demonstrações” favorecem atitudes críticas e investigativas.

Durante séculos, observou-se uma crescente busca nas ciências cognitivas por uma justificativa para a compreensão dos fundamentos da Matemática na cognição humana. Muitos estudiosos empenharam-se em encontrar subsídios teóricos da ‘Ciência Cognitiva’ que apontassem a dinâmica estabelecida entre funcionamento cognitivo e a construção intelectual desse saber.

Nos últimos anos, estudiosos em Educação Matemática têm se ocupado em estudar formas de aprimorar o conhecimento matemático e desenvolver estratégias de ensino que aproximem essa disciplina às situações vivenciadas no cotidiano.

Atualmente, uma das maiores preocupações quanto ao ensino de Matemática é desenvolver no educando, diversas habilidades, como aquelas concernentes aos procedimentos, e especialmente, as exigidas na elaboração de argumentação, na validação de soluções, na apresentação de conclusões que levam a estruturação do raciocínio lógico.

Nesse sentido, pensar no ensino de Matemática, por meio de provas e demonstrações, é propor um confronto entre o modelo cognitivo do aluno com o de outros alunos ou até mesmo com o do professor, é percorrer um caminho marcado por continuidades e rupturas.

A questão fundamental é que as provas e as demonstrações devem ser vistas como uma forma de argumentação, que tem valiosos benefícios para o desenvolvimento de competências e habilidades como: explorar situações-problemas, observar implicações da utilização de distintas definições, formular conjecturas e contribuir para a comunicação de resultados ou para a formalização de um corpo de conhecimento matemático.

Segundo Bachelard (1996), as construções de processos de pensamentos que as provas produzem tornam-se ferramentas importantes para auxiliar os alunos a avançarem além das habilidades matemáticas inatas. Para o pesquisador, “os alunos precisam ser encorajados a fazer perguntas, analisar erros e propor soluções diferentes” (BACHELARD, 1996, p.21).

Compreender um processo de prova é compreender que o fato de uma afirmação ser verdadeira está relacionado com a consistência da argumentação utilizada nesse processo. Ao considerarem a prova um meio de comunicação de ideias matemáticas que envolvem todo um processo de buscar regularidades, propor conjecturas e pensar logicamente, os alunos alcançam novas dimensões na estruturação desse saber.

Para Hanna (2000), a prova matemática é útil somente quando o professor é capaz de usá-la de forma que transmita entendimento. Para a pesquisadora, mais do que permitir que as hipóteses confirmem veracidade aos teoremas, as provas têm o efeito de questionar essas condições e promover a percepção dos limites de diversos modelos.

> "[...] a melhor prova é que ajuda compreender melhor o significado do teorema a ser provado: não só para ver que é verdade, mas também, porque é verdade. É claro que tal prova é também mais convincente e mais propensa a levar a novas descobertas". (HANNA, 2000, p. 03).

Pogorélov (1974), no prefácio de seu livro "Geometria Elementar", aponta que a prova deve ser compreendida como um instrumento que leva à construção racional do pensamento. Nesse aspecto, a prova é entendida como uma forma de comunicação de ideias sobre objetos e processos matemáticos constituídos, não somente por termos técnicos, mas por uma forma de argumentação que contribui diretamente com a formação do conhecimento.

O ato de ensinar uma propriedade por meio de uma prova deve incluir a possibilidade de diferenciar uma 'prova rigorosa', que enfatize somente o raciocínio lógico formal de uma 'prova argumentativa', que envolve investigações e explicações de "por que" determinado resultado é válido. Para os alunos, o primeiro tipo de prova, na maioria das vezes, não produz significado algum, pois não tem conexão existente com sua estrutura mental.

Quando utilizada como forma de argumentação, a prova torna-se acessível a um número maior de estudantes, pois possui um maior valor educativo, oportunizando os alunos a perceberem detalhes, conjecturar e cometer erros; refletir e interpretar as relações existentes entre os objetos e oferecer-lhes explicações matemáticas.

Nessa perspectiva, entende-se que a função das "provas" no ensino de Matemática é de estabelecer conexões entre o conhecimento empírico e o conhecimento científico, não para transformar o empírico em científico, mas para explorar as contradições e limitações de um de outro, contrapondo, assim, diferentes interpretações que favorecem atitudes reflexivas, críticas e investigativas.

O desafio, então, é construir uma prática pedagógica que torne as provas acessíveis, de fácil compreensão, para que o aluno se torne capaz de as reproduzir e, após um período mais longo de estudo, de criá-las, criticá-las, analisá-las e aprender com elas.

COMPREENDENDO OS ASPECTOS COGNITIVOS E DIDÁTICOS DAS PROVAS E DEMONSTRAÇÕES

> *"Só aprende a dominar linguagens quem faz uso delas, a compreender processos e fenômenos quem os investiga, a enfrentar situações problemas quem é desafiado a isto, a construir argumentações quem as constrói e a elaborar proposições quem as elabora"* (PNC, 1999, p. 46)

A aprendizagem é um processo derivado de diferentes perspectivas sociais e culturais. Entender os diferentes posicionamentos pessoais de cada sujeito envolvido nesse processo faz com que a ação educativa se relacione com as vivências e atividades de cada indivíduo.

Aprender implica a existência de um contexto sociocultural que funciona como uma fonte propulsora para todo o conhecimento que será produzido. Fora desse contexto, o conhecimento não adquire sentido e o processo de aprendizagem não acontece: aprender é dar significado.

Nossos conhecimentos começam com as experiências vividas e nossas percepções acerca do universo estão relacionadas à maneira pela qual associamos o mundo percebido às nossas ideias.

No processo de construção do saber matemático, sustentar uma aprendizagem significativa implica em uma postura pedagógica capaz de considerar que um fato matemático está relacionado à capacidade de utilizar diferentes formas de linguagens e que, para aprender significados, transformá-los e combiná-los de forma a construir novas aprendizagens, é preciso que o professor configure diferentes formas de expressões e questionamentos sobre os mesmos significados.

Quando analisado como os alunos se comportam diante de uma situação-problema e como fazem para validar seus resultados, percebe-se que estes não possuem experiências de pensamentos que envolvam construções cognitivas complexas. As operações ou os conceitos desenvolvidos por eles são ações que nem sempre utilizam diferenciações ou articulações referentes ao que se pretende provar.

Para Nasser e Tinoco (2003), é possível que essa dificuldade de "provar", esteja relacionada, ao fato de que a maioria dos alunos não estão aprendendo a pensar e raciocinar quando estudam diversos conteúdos matemáticos.

"[...]os jovens não estão habituados a pensar e comunicar suas ideias. Isto é, na maioria das escolas, o aluno ainda é levado a resolver uma lista enorme de exercícios repetitivos, que para ele não tem significado algum. Não vendo uma ligação **significativa** do conteúdo com sua vida, o aluno apenas repete os modelos dados pelo professor ou aplica fórmulas e em nenhum momento é questionado ou levado a pensar por que a resposta é aquela, ou mesmo se a resposta é coerente, plausível com a pergunta do problema". (NASSER; TINOCO, 2003, p. 02).

Considerando que a admissão de diferentes níveis de argumentação exige uma reconsideração dos critérios de julgamento acerca da validade formal da prova, que o nível de aprendizagem do aluno e de exigência quanto ao valor do argumento por ele produzido devem estar relacionadas ao tipo de habilidade que se deseja construir, acredita-se que as dificuldades encontradas por alunos em formular uma prova estão diretamente relacionadas à sua falta de experiência e maturidade matemática.

Estudos realizados por Balacheff (1987) trazem uma noção de prova sobre o ponto de vista da Matemática praticada pelos alunos. Em suas pesquisas, Balacheff[40] utiliza uma abordagem experimental da análise dos processos de prova utilizados por alunos da Educação Básica, verificando como eles comportam-se diante da solução de um problema e como fazem para validar seus resultados.

Nesse processo, Balacheff (1987) identifica dois tipos básicos de provas, um denominado pelo pesquisador de "**Prova Pragmática"** e outro de "**Prova Conceitual**".

Uma **Prova Pragmática** seria aquela que recorre a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar um determinado resultado chamados pelo autor de "Recursos de Ação", ou seja, sem formalismo lógico, apresentados por meio de exemplo.

A **Prova Conceitual** caracteriza-se por formulações de propriedades e conexões existentes entre elas. As demonstrações matemáticas são exemplos desse tipo de prova, ou seja, não recorrem aos recursos utilizados pelas Provas Pragmáticas no momento de formular propriedades e possíveis relações entre elas e um determinado objeto.

Entre os vários níveis de provas Conceituais e Pragmáticas, Balacheff (1987) aponta para quatro tipos principais, que possuem uma posição privilegiada no desenvolvimento cognitivo do aluno, sendo eles: o Empirismo Puro, o Experimento Crucial, o Exemplo Genérico

---

[40] Nicolas Balacheff é diretor de pesquisa do CNRS. Depois de uma formação matemática pura e ciência da computação teórica, ele sustenta uma tese de pós-graduação de ciência da computação em 1978 (usando os gráficos para modelar e estudo de raciocínio) e uma tese de didática da matemática do estado em 1988 (aprendizagem da prova matemática). Desde 1988, dedica suas questões de pesquisa na virada do ensino de matemática e ciência da computação. Em 1995 ele fundou a equipe de ambientes de computador no laboratório Humana Aprendizagem Leibniz Grenoble É neste quadro que leva o seu trabalho sobre TELS, com especial ênfase nos aspectos epistemológicos e aluno de modelagem. Ele é atualmente um membro dos Modelos da equipe e Tecnologias para Humano Aprendizagem (MetaH) Laboratório de Informática de Grenoble (LIG). (Fonte: http://spaces.telearn.org/balacheff/Publications/)

e a Experiência de Pensamento. De acordo com o pesquisador, os dois primeiros tipos não estabelecem a prova de uma afirmação, todavia, para o Exemplo Comum e a Experiência de Pensamento, existe um longo caminho para provar a veracidade de um resultado, pois esse nível de prova exige do aluno uma mudança radical na forma de conceber um argumento.

Para Balacheff (1987), a passagem do aluno de um tipo de Prova Pragmática para um tipo de Prova Conceitual requer, uma certa distância do modo como a ação pode ser descrita e explicitada: "o conhecimento que até agora, agiu para fora, torna-se objeto de reflexão, de discurso e de divergências" (BALACHEFF, 1987, p. 149). O caminho para Provas Conceituais está essencialmente na qualidade daquelas situações genéricas vistas pelo aluno anteriormente, ou seja, seu conhecimento adquirido.

Investigar um problema e provar seu resultado, construído de uma forma mais geral, analisando modos de aplicação de uma teoria é um processo de construção da prática argumentativa. Esse processo pode caminhar para novas descobertas, gerar debates e, certamente ajudar na formação de um pensamento matemático mais avançado.

Nesse sentido, compreende-se que, identificar fatores, evidenciar e descrever características do ensino que aceleram ou inibem o desenvolvimento dessa prática, exige do professor, um compromisso com uma abordagem de resolução de problemas não só na sua eficácia (uma exigência prática), mas também com seu rigor (a exigência teórica).

Na construção do saber matemático, mesmo que o formalismo necessário para provar certos resultados possa ser mudado, os resultados matemáticos por si só não se alteram. A Matemática é parte natural do ser humano, originando-se de suas experiências diárias com o mundo, e nesse contato, o homem tem necessidades que, sempre que supridas, geram novas necessidades. Assim também acontece com o conhecimento matemático: 'o aluno precisa conhecer cada vez mais para, cada vez mais, poder questionar de maneira melhor'.

CONSTRUINDO PROVAS EXPERIMENTAIS

> *[...] Pesquisar é: ter uma interrogação, e andar em torno dela em todos os sentidos, sempre buscando todas as suas dimensões e andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentidos, mais dimensões e outra vez... (notas de aulas do Prof. Joel Martins, PUC-SP, citado por Bicudo, 1993, p. 18-23).*

Construir modelos de objetos, com base na investigação e experimentação são, de acordo com Imri Lakatos (1978), características de uma visão construtivista, que considera como ciência a utilização de modelos explicativos para inferir dados da realidade e não uma representação da própria realidade. Com esses modelos, não se espera apresentar uma verdade absoluta e, sim, uma verdade aproximada que pode ser corrigida, modificada, abandonada por uma mais adequada aos fenômenos.

O seis modelos de Provas Experimentos que constituem esse caderno foram desenvolvidos com intuito de auxiliar o professor a compreender o nível de prova encontrado nas argumentações dos alunos, bem como propor uma alternativa para o ensino de algumas propriedades geométricas partindo da experimentação e investigação. Os experimentos aqui propostos foram estruturados em etapas, que, em linhas gerais, apresentaram-se organizados da seguinte forma: I**ntrodução**, **Desenvolvimento** e **Socialização** dos conceitos ou propriedades construídos pelos alunos.

Na **Introdução**, buscamos, inicialmente, fazer uma abordagem geral sobre o assunto que será tratado durante a realização da Prova Experimental. Acreditamos ser importante que o professor explique para os alunos em que sentido a aula será desenvolvida, pois essa prática possibilita a produção de significados que serão compartilhados entre os alunos e o professor no contexto da atividade proposta.

Na perspectiva contextualizar o conceito ou a propriedade geométrica a ser demonstrada, na maioria das Provas Experimentais, introduzimos o assunto com o auxílio de um texto-base. Entendemos que o processo de leitura, de acordo com Silva e Rêgo (2006), possibilita meios para que o aluno se torne um agente "ativo e interativo" na formação de seu próprio conhecimento (SILVA; RÊGO, 2006, p. 229).

No **Desenvolvimento**, os alunos são desafiados, com base na observação e na manipulação de objetos, a formularem estratégias de soluções para o fato observado. Nessa etapa, é importante que os alunos anotem todas as estratégias construídas e todas as características observadas. Acreditamos que os registros são fundamentais na atividade desenvolvida, tanto para "guardar" um resultado, como para refletir sobre uma "ação" executada.

A elaboração de estratégias de resolução de uma situação proposta dá oportunidade ao aluno de aprimorar o pensamento matemático.

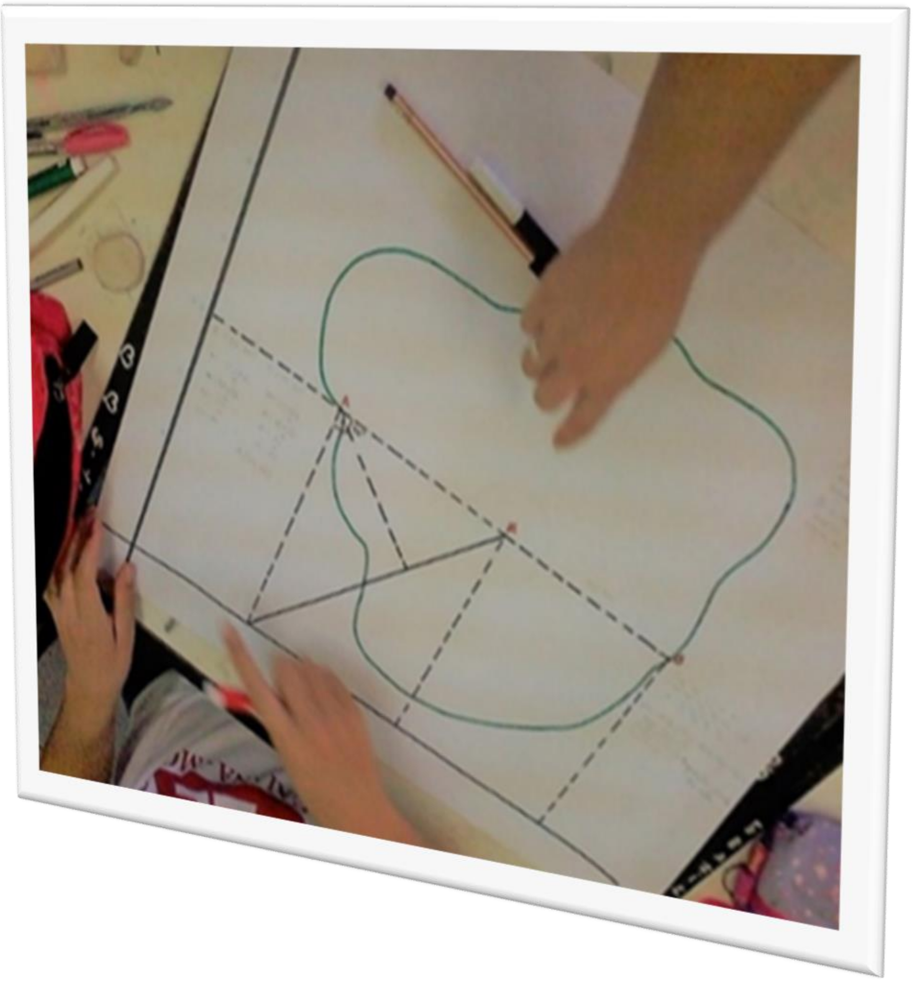
Na etapa final das Provas Experimentais, propõe-se a **Socialização** dos resultados obtidos, e, com base nos argumentos construídos pelos alunos, o professor deverá fazer uma sistematização das propriedades por elas abordadas com intuito de acrescentar elementos importantes ao pensamento matemático desenvolvido. Para Lorenzato (2006), esse tipo de metodologia é um processo que permite ao aluno se envolver com o assunto em estudo, participar das descobertas e aprender com os colegas (LORENZATO, 2006, p.72).

Para Lakatos (1978), essa abordagem possibilita que aluno reconheça a Matemática como um conhecimento "social" e que seus significados não devem apenas ser eficientes na resolução de uma determinada situação-problema, mas que eles devem ser coerentes com os resultados socialmente reconhecidos.

Nesse sentido, apresentamos, a seguir, as Provas Experimentais: **Engenharia de Grego,** adaptada do portal *M³ Matemática Multimídia da UNICAMP*; **A excentricidade dos Planetas e a Primeira Lei de Kepler**, elaborada com base no texto "As órbitas dos Planetas", texto extraído do livro didático *Matemática: ciência e aplicações* (IEZZI et al, 2014, p. 96); **Curvas, Superfícies e Arquitetura,** que foram desenvolvidas para trabalhar com alunos do terceiro ano do Ensino Médio.

Encontram-se, também, nesse Caderno, as Provas Experimentais: **Curvas de Nível** (adaptado do portal M³) e **Demonstrando o Teorema de Pitágoras,** que foram construídas para serem desenvolvidas com os alunos do nono ano do Ensino Fundamental; e a Prova Experimental **"Descobrindo propriedades das Cônicas com o Geogebra: Elipses e Hipérboles",** adaptada do *Caderno de Atividades de Geometria Analítica: aulas práticas no Laboratório de Informática* (MIRANDA E LAUDARES, 2011, p. 10-12), para ser desenvolvido com alunos do terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática.

Engenharia de Grego



Tinha uma montanha no meio do caminho ...

ENGENHARIA DE GREGO

Material necessário:

- Cartolina branca
- Régua
- Lápis
- Caneta
- Borracha

Objetivos:

Desenvolver a capacidade de planejar, construir e avaliar um projeto; bem como aplicar conceitos básicos de geometria analítica, como: cálculo da distância entre dois pontos e as coordenadas do ponto médio de um segmento na solução de um problema de construção civil.

Organização da turma/tempo estimado:

Grupos com, no mínimo, três alunos e, no máximo, cinco.

Tempo estimado de duas horas aulas (1:40).

Ano de escolaridade:

Terceiro ano do Ensino Médio.

Conteúdo abordado:

Geometria analítica – estudo analítico do ponto e da reta.

Situação proposta:

Encontrar uma maneira de projetar um túnel que será construído partindo, ao mesmo tempo, de dois pontos fixados no contorno de uma montanha. (Adaptado do experimento Engenharia de grego do portal M³ - Matemática Multimídia da UNICAMP).

Desenvolvimento:

O professor inicia a aula fazendo uma breve explanação sobre os problemas enfrentados atualmente na execução de projetos desenvolvidos na Construção Civil. Em seguida, sugerimos que o mesmo apresente o problema enfrentado pelos Gregos no século VI a. C, na construção de um túnel, na cidade de Samos, que deveria passar por debaixo de uma montanha, texto encontrado no livro: *Meu Professor de Matemática e outras histórias* (LIMA,1991) (Anexo 01). Após essa apresentação inicial, o professor organiza a turma em grupos (com, no máximo, cinco alunos) distribuindo o material que será utilizado no experimento. Prosseguindo a Prova

Experimental, o professor propõe aos alunos a construção de um modelo gráfico para representar a situação proposta, seguindo os seguinte procedimentos:

- Coloque uma cartolina em um local plano.
- Sobre ela, coloque uma mochila que irá simular a montanha.
- Faça o contorno da montanha e marque nesse contorno dois pontos que serão as extremidades do túnel.
- Anote todas as estratégias que irão utilizar para realizar a tarefa.

Nessa etapa, o professor deverá deixar bem claro para os alunos que eles deverão utilizar as estratégias que julgarem necessárias para resolução do problema proposto. Assim, faz-se necessário que o mesmo não interfira nesse processo, respondendo apenas as dúvidas que forem levantadas pelos grupos com relação à construção do modelo gráfico.

OBSERVAÇÃO:

Em uma "Prova Experimental", é importante que o professor compreenda que: investigar um problema a partir da Geometria e demonstrar seu resultado construído de uma forma mais geral faz parte do processo de construção do conhecimento Geométrico, e que esse processo pode caminhar para novas descobertas; gerar debates; e, certamente, ajudar na formação de um pensamento matemático mais avançado.

Sugestões:

Por se tratar de uma atividade investigativa, que possui, como caráter principal, compreender o nível de prova geométrica encontrada na argumentação construída pelos alunos, sugerimos que, no final desse processo, o professor não se preocupe em apresentar uma solução "correta" para o problema apresentado, mas que, diante dos resultados obtidos, busque fazer uma sistematização das propriedades utilizadas nas estratégias apresentadas pelos alunos com intuito de desenvolver um conhecimento matemático mais avançado.

A Excentricidade dos Planetas e a Primeira Lei de Kepler

...Cada planeta gira em torno do Sol...

A EXCENTRICIDADE DOS PLANETAS E A PRIMEIRA LEI DE KEPLER

Material necessário:

- Barbante.
- Folha A4.
- Fita adesiva.
- Caneta.
- Régua.
- Texto de apoio (em anexo 02).

Objetivos:

Desenvolver o conceito de elipse bem como fazer a análise de sua excentricidade partindo da construção geométrica.

Organização da turma /tempo estimado:

Individual.

Tempo estimado é de duas horas aula (1:40).

Ano de escolaridade:

Terceiro ano do Ensino Médio.

Conteúdo abordado:

Geometria analítica – Elipses: elementos, definição e excentricidade.

Situação proposta:

"Exceto por pequenas perturbações devido às influências de outros planetas, no Sistema Solar, cada planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica, tendo o Sol em um dos focos (Primeira Lei de Kepler). Dessa forma, as excentricidades das órbitas dos planetas são bem próximas de zero, configurando então órbitas aproximadamente circulares". Por que isso acontece?

Expectativa:

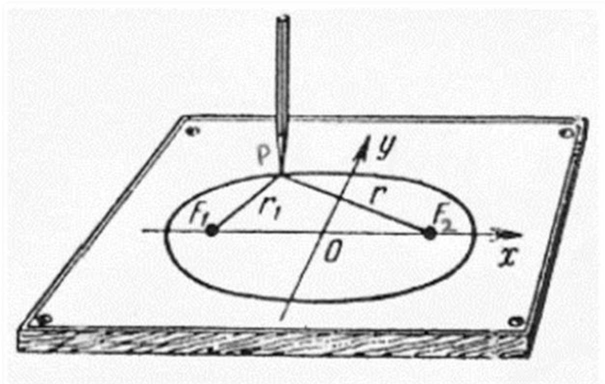
Espera-se que os alunos sejam capazes de identificar que esse fenômeno ocorre devido ao fato de que, quanto mais próximo de zero estiver o foco, os comprimentos dos eixos maior e menor da elipse tendem a igualar-se.

Desenvolvimento:

Com o objetivo de despertar o interesse da turma a respeito do assunto que será abordado, o professor introduz o experimento propondo a leitura do texto: “**As órbitas dos Planetas**” (IEZZI, 2014, p. 96 - Anexo 02). O texto descreve o modelo **Heliocêntrico**, que foi proposto, inicialmente, pelo astrônomo austríaco Aristarco de Samos (310a.C – 230 a.C.) e retomado, posteriormente, pelo astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1473-1543). Apresenta, também, informações sobre como esses cientistas estudaram e descobriram as Órbitas Elípticas dos Planetas, culminando, assim, na conhecida lei da física: “Primeira Lei de Kepler”. Nesse momento inicial, é importante que o professor faça a leitura junto com os alunos, propondo questionamentos e reflexões a respeito das informações apresentadas. De acordo com Bicudo (2010), os saberes manifestos na ação reflexiva geram uma aprendizagem significativa e diferentes perspectivas são alcançadas, dando ao aluno oportunidade de relacionar o que já sabe ao conhecimento que está sendo construído. Na etapa seguinte, realiza-se a construção geométrica da elipse pelo método do jardineiro, seguindo os seguintes procedimentos (adaptados do modelo proposto por Costa, 2007, p. 85):

- Sobre a folha de papel A4, trace uma reta com comprimento x;
- Sobre essa reta, destaque dois pontos F1 e F2;
- Fixe sobre esses pontos, com auxílio de uma de fita adesiva, um pedaço de barbante com comprimento maior que a distância entre eles;
- Estique o barbante com a ponta de um lápis, e deslizando o lápis, mantendo o barbante bem estucado, trace uma curva fechada (conforme mostra a figura):

Figura 01 – Construção Geométrica da Elipse



Fonte: COSTA, 2007, p. 85.

A cada passo da construção, procure interagir com os alunos, a fim de verificar possíveis dificuldades encontradas por eles nesse processo. Proceda o experimento, orientando-os a observarem a construção realizada e identificarem alguns pontos que considerem importante na curva obtida. Partindo dessa observação, proponha a resolução da situação-problema. No final dessa etapa, faz-se a socialização dos resultados apresentados pelos alunos, a fim de que os mesmos possam identificar possíveis contradições entre suas justificativas e as dos seus colegas. Para Lakatos (1978), essas contradições apresentadas são favoráveis para o crescimento do conhecimento matemático do aluno. Segundo o pesquisador, "o ponto de partida para todo processo de desenvolvimento matemático é encontrado na experiência que uma contradição pode proporcionar" (LAKATOS, 1978, p.45).

Sugestões:

A ideia aqui apresentada é mostrar a possibilidade de focalizar aplicações interessantes ao ensino de Matemática sem eliminar tópicos importantes dessa disciplina. Os conhecimentos desenvolvidos nesse experimento são "tradicionais", porém, a abordagem de ensino é que determina o processo de produção de significados que serão construídos pelos alunos. Dessa forma, caso julgue necessário, o professor poderá fazer uma sistematização dos conceitos apresentados.

Curvas, Superfícies e Arquitetura

Hipérboles...

CURVAS, SUPERFÍCIES E ARQUITETURA

Material necessário:

- Barbante.
- Folha oficio A4.
- Fita adesiva.
- Caneta.
- Tesoura.
- Régua.

Objetivos:

Definir hipérbole, bem como identificar seus principais elementos partindo de sua construção geométrica.

Organização da turma / tempo estimado:

Os alunos deverão realizar essa prova experimental individualmente.

O tempo estimado para realização de todo o processo é de duas horas aula (1:40).

Ano de escolaridade:

Terceiro ano do Ensino Médio.

Conteúdo abordado:

Geometria analítica – Hipérboles: elementos e definição.

Situação proposta:

Comparar os valores obtidos entre as distâncias de um ponto P aos focos da hipérbole e verificar o que essa diferença pode corresponder na hipérbole.

Expectativa:

Espera-se, com esse experimento, que o aluno seja capaz de interpretar as informações observadas e adicionar a elas conhecimentos matemáticos anteriormente adquiridos, a fim de construir argumentos que definam essa curva.

Desenvolvimento (primeira etapa):

Sabemos que, muitas vezes, falta tempo para o estudo completo das cônicas no Ensino Médio. Entretanto, é necessário que algumas ideias centrais sejam construídas. Dessa forma, essa prova experimental busca trabalhar a definição de "hipérbole" como forma de levar o aluno a perceber a importância de um conhecimento elementar como um meio de um desenvolvimento pessoal e social. Inicia-se o experimento fazendo a apresentação de algumas obras arquitetônicas em que suas estruturas assemelham-se com os ramos de uma hipérbole. Sugere-se que o professor faça uma pesquisa na **internet** para coletar o maior número possível de imagens. É importante, também, que o mesmo pesquise um pouco sobre essas construções. Pode-se considerar, ainda, a hipótese de o professor realizar essa pesquisa junto com a turma. Após essa interação, prossegue-se o experimento com a construção geométrica do Ramo da Hipérbole, conforme modelo proposto por Costa (2007):

- Trace uma reta x sobre um plano.
- Marque sobre x os pontos $F1$ e $F2$.
- Em seguida, prenda uma das extremidades de uma régua a $F1$ de modo que ela possa girar ao redor deste ponto.
- Na outra extremidade da régua, N, fixe a ponta de um barbante.
- A outra ponta, fixe-a no ponto $F2$.
- O comprimento do barbante deve ser tal que a diferença entre o comprimento da régua e a do barbante seja igual à distância entre $F1$ e $F2$.
- Inicialmente, posicione a régua sobre a reta x.
- A ponta do lápis deverá estar sobre o ponto A, que é determinado pela intersecção da reta x com a curva que está sendo traçada.
- Em seguida, com o fio sempre esticado e a ponta do lápis encostada à régua, gira-se a régua ao redor do ponto $F1$, para cima ou para baixo, enquanto desliza-se o lápis ao longo da borda da régua.
- A curva que se obtém é um ramo de hipérbole.

OBSERVAÇÃO:

É possível que alguns alunos apresentem algumas dificuldades durante essa etapa do experimento, por isso, sugere-se que o professor faça a construção no quadro junto com eles.

Desenvolvimento (segunda etapa):

Terminada a Construção Geométrica dos Ramos da Hipérbole, na etapa seguinte, para que os alunos possam compreender a condição que a define, seguem-se as orientações:

- Escolha um ponto qualquer no Ramo construído;
- Meça, com o auxílio de um pedaço de barbante, a distância desse ponto a cada um de seus focos, anotando os valores obtidos.
- Compare os valores obtidos entre as distâncias do ponto P aos focos da hipérbole, sobrepondo os barbantes, e verifique o que essa diferença pode corresponder na hipérbole.

Na etapa final, faz-se a socialização dos resultados obtidos. Nesse momento, é importante que o professor faça alguns questionamentos a respeito das diferenças encontradas nas medições realizadas. Acreditamos que, para assumir o papel principal no processo de aprendizado, o aluno precisa de momentos para tomar iniciativas e decisões e, com isso, valorizar e desenvolver a autonomia e a criatividade.

Sugestões:

Sugerimos que, após a socialização dos resultados, o professor apresente a sistematização do conceito de hipérbole.

Curvas de Nível

...essas curvas projetadas ortogonalmente sobre o plano...

CURVAS DE NÍVEL

Material necessário:

- 200 gramas de massa de modelar (para cada equipe).
- Cartolina branca.
- Parte de um mapa topográfico (de preferência do Município onde a escola fica localizada).
- Régua.
- Pincel.
- Fio de nylon ou linha de costura.
- Dois palitos de picolé (por equipe).

Objetivos:

Desenvolver, experimentalmente, o conceito geométrico de "Projeção Ortogonal"; aprimorar a capacidade de visualização e associação de figuras tridimensionais a uma representação plana e aplicar conhecimentos geométricos a situações de caráter prático.

Organização da turma / tempo estimado:

Grupos com quatro ou cinco alunos.

Tempo estimado para realização do experimento quatro horas aulas (3:20).

Ano de escolaridade:

Nono ano do Ensino Fundamental.

Conteúdo abordado:

Por se tratar de uma atividade interdisciplinar, os conteúdos abordados nesse experimento referem-se ao ensino de Geografia e Matemática, sendo eles: noções sobre relevo; análise das aplicações das curvas de nível; projeção ortogonal de um ponto sobre o plano e projeção ortogonal de uma figura sobre o plano.

Situação proposta:

"Façam cortes paralelos no relevo construído começando de baixo para cima e provem que as projeções desses cortes sobre um plano determinam as curvas de nível desse relevo". (Situação proposta adaptada do experimento original Curva de Nível, do M³ Matemática Multimídia da UNICAMP).

Expectativa:

Espera-se que os alunos sejam capazes de identificar alguns termos geométricos utilizados na definição de “Curvas de Nível”, principalmente o conceito de “Projeção Ortogonal”.

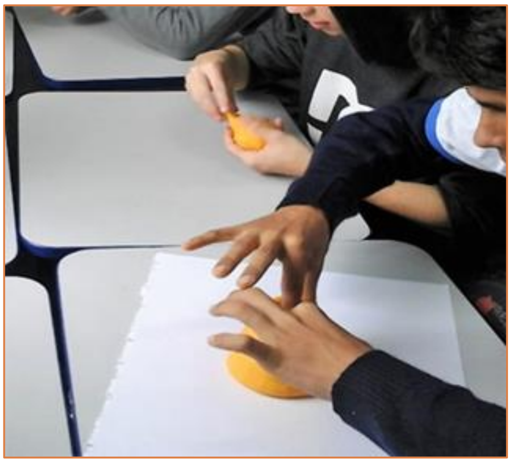
Justificativa:

Desenvolver um conceito geométrico envolve todo um contexto e situações que sejam capazes de produzir significado ao que se deseja construir. Para que o aluno seja levado a pensar de forma lógica a respeito de uma determinada situação, faz-se necessário que o mesmo encontre significados nas atividades matemáticas desenvolvidas em sala de aula e, para que isso aconteça, é preciso propor situações que estabeleçam conexões entre os diferentes temas matemáticos e as demais áreas do conhecimento. Por se tratar de uma atividade interdisciplinar, julgamos ser interessante ter a parceria de um profissional da área de Geografia no desenvolvimento dessa prova experimental. Para Bicudo (2010), o envolvimento de duas disciplinas distintas em um trabalho busca “explorar possibilidades que se abrem para o ensino e a aprendizagem”, assumindo, dessa forma, a dimensão social de um trabalho que busca caminhar na direção da produção de um determinado conhecimento.

Desenvolvimento (primeira etapa):

O experimento inicia-se com uma explanação feita pelo professor(a) de Geografia sobre os principais tipos de relevos encontrados na região. Em seguida, para despertar o interesse dos alunos, sugere-se que seja feita uma apresentação do Mapa Topográfico do Município no qual a escola fica localizada, explicando as principais funções de um Mapa Topográfico e como feita a representação gráfica de uma Curva de Nível. Na etapa seguinte, divide-se a turma em equipes. Após essa divisão, o professor entrega aos alunos todo material que será utilizado no experimento, sugerindo aos mesmos que, com o auxílio da massa de modelar, construam uma das formas de relevo apresentadas no início da aula. (Conforme figura).

Figura 02 – Alunos manuseando a massa de modelar



Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

OBSERVAÇÃO:

Esse contato com o material é muito importante, pois permite ao aluno expressar sua forma de pensar e posicionar-se em relação ao conhecimento apresentado.

Desenvolvimento (segunda etapa):

Após a primeira etapa, propõe-se aos alunos que, partindo da forma de relevo construída por eles, apresentem uma justificativa para a situação proposta:

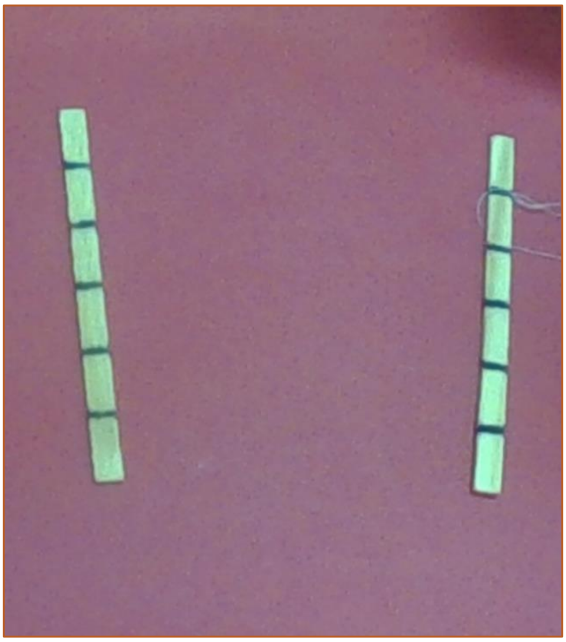
"Façam cortes paralelos no relevo construído começando de baixo para cima e provem que as projeções desses cortes sobre um plano determinam as curvas de nível desse relevo". (Situação adaptada do experimento original "Curva de Nível do M³ Matemática Multimídia da UNICAMP).

OBSERVAÇÃO:

Para realização dos cortes no Relevo, o professor deve orientar aos alunos a seguirem os procedimentos:

- Com a auxilio da régua, façam marcações de 2,0cm em 2,0cm nos palitos de picolé (conforme figura).

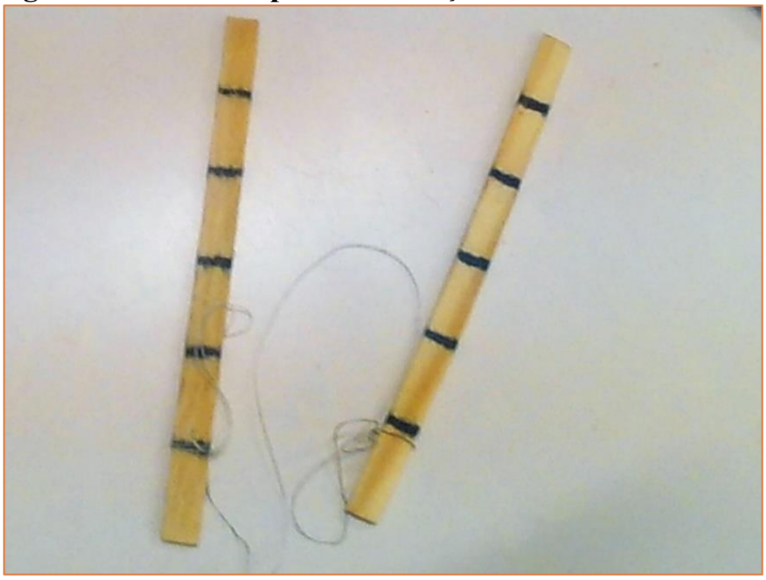
Figura 03 – Modelo utilizado para fazer as marcações nos palitos de picolé



Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

- Amarre a linha de costura nos dois palitos, de forma que ela possa deslizar sobre os mesmos (conforme figura).

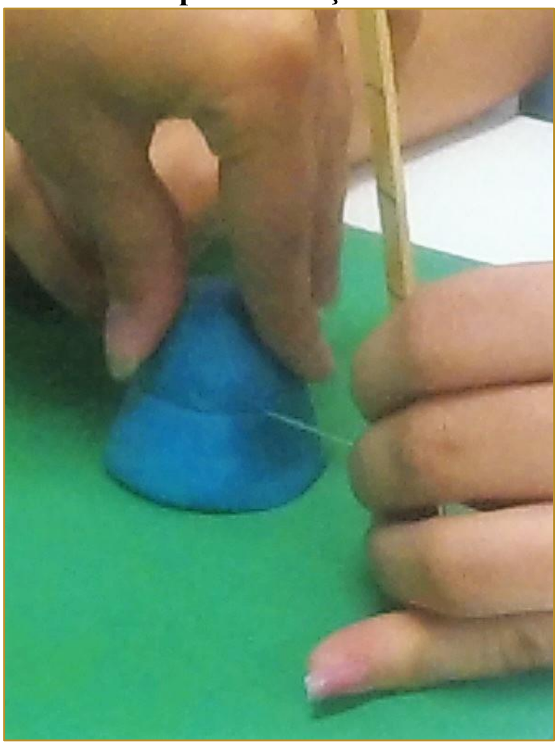
Figura 04 – Modelo para construção das Curvas de Nível



Fonte: Dados obtidos na pesquisa

- Façam os cortes no relevo construído começando de baixo para cima (conforme figura).

Figura 05 – Modelo para obtenção das Curvas de Nível



Fonte: Dados obtidos na pesquisa

- Faça o contorno das partes obtidos com o corte do Relevo, começando de baixo para cima (conforme figuras 06 e 07).

Figura 06 – Cortes obtidos a partir do Relevo construído

Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

Figura 07 – Cortes obtidos a partir do Relevo construído

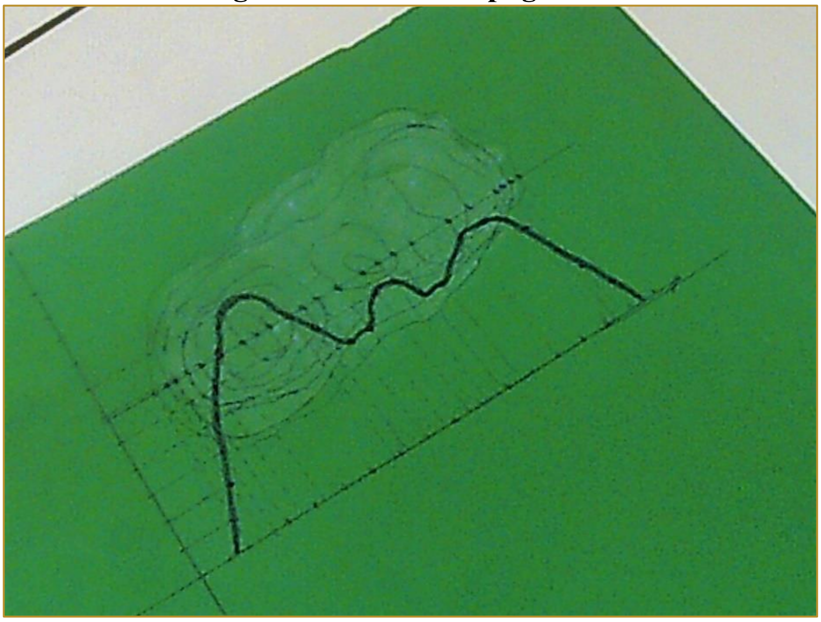
Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

Após a realização dessa etapa, o professor sugere a socialização dos argumentos construídos pelas equipes. Mesmo considerando que os níveis de compreensão da situação proposta não sejam os mesmo para todos, de acordo com Lakatos (1978), a dimensão social dessa dialética é muito importante. Segundo o pesquisador, a socialização permite que os alunos aprendam a Matemática como um conhecimento social. Assim, os significados construídos pelos alunos devem ser coerentes com os resultados que são socialmente reconhecidos.

Sugestões:

Sugere-se que, após a socialização dos argumentos construídos, o professor faça uma explanação sobre as informações que uma curva de nível pode oferecer, como, por exemplo, o **Perfil Topográfico de um Relevo** (conforme figura). Assim, o mesmo pode orientar os alunos a traçarem essa curva.

Figura 06 – Perfil Topográfico



Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

Demonstrando o Teorema de Pitágoras

O quadrado da hipotenusa ...

DEMONSTRANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS

Material necessário:

- Lápis de colorir.
- Papel quadriculado.
- Tesoura.
- Cola.

Objetivos:

Provar experimentalmente o Teorema de Pitágoras.

Organização da turma/tempo estimado:

Os alunos deverão desenvolver a prova experimental individualmente.

O tempo estimado de duração é de duas horas aulas (1:40).

Ano de escolaridade:

Nono ano do Ensino Fundamental.

Conteúdo abordado:

Relações métricas no triângulo retângulo – Teorema de Pitágoras.

Situação proposta:

Provar experimentalmente o Teorema de Pitágoras.

Desenvolvimento (primeira etapa):

O professor inicia o experimento verificando se os alunos compreendem a necessidade de uma demonstração matemática. Em seguida, faz-se a leitura do texto "**Mania de Pitágoras**" (em anexo 05) extraído do livro "**Meu professor de matemática e outras histórias**" (LIMA, 1991, p.53-58). O texto, além de descrever alguns acontecimentos históricos relacionados à "descoberta" do Teorema de Pitágoras, apresenta quatro demonstrações para o mesmo sobre diferentes pontos de vista, intituladas de: "*A mais Bela Prova*"; "*A Prova mais Curta*"; "*A Demonstração do Presidente" e "A Demonstração de Leonardo da Vinci".*

OBSERVAÇÃO:

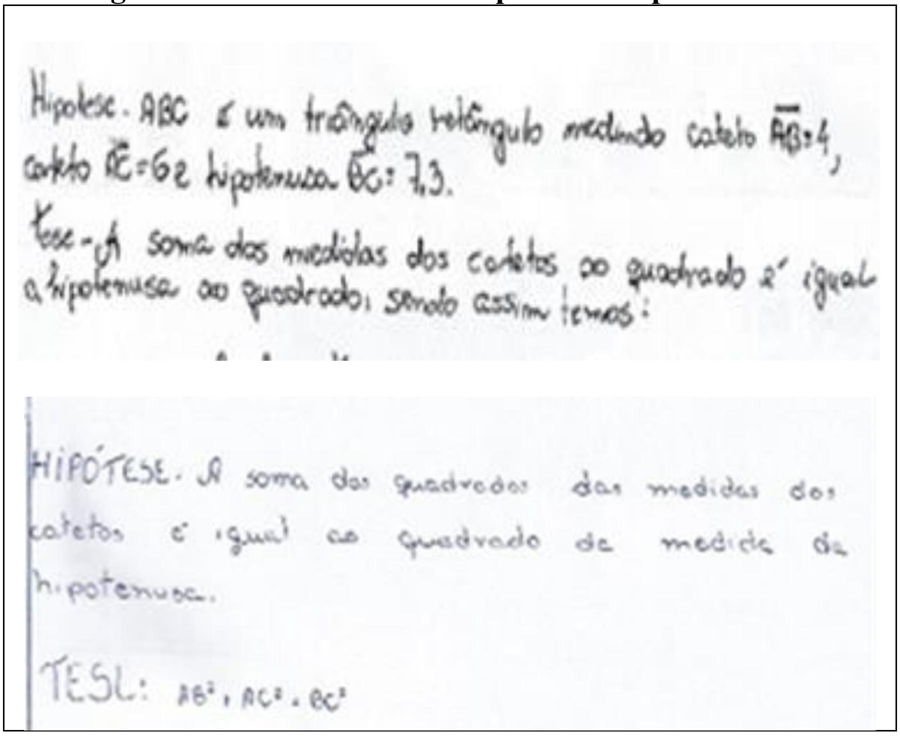
É importante que, em vários momentos da leitura, o professor faça uma pausa para que os alunos possam manifestar suas interpretações ou dúvidas. Esse tipo de abordagem

potencializa a produção do conhecimento, pois permite que o aluno estabeleça conexão entre os saberes teóricos e práticos.

Desenvolvimento (segunda etapa)

Na etapa seguinte, partindo da importância de ter o aluno como centro da própria ação de aprendizagem, o professor solicita aos alunos que escrevam, com suas palavras, o "Teorema de Pitágoras", por meio de uma hipótese seguida de uma tese (como na figura).

Figura 08 – Teorema escrito a partir de hipótese e tese



Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

Na sequência, propõe-se ao alunos que, com base no texto **Mania de Pitágoras,** construam argumentos que "provem" a veracidade da afirmação apresentada. Por se tratar de uma prática investigativa, é importante que o professor não interfira no desenvolvimento desse processo. Nesse momento, ele deve agir como mediador do conhecimento que está sendo construído.

Justificativa:

A Prova Experimental "**Demonstrando o Teorema de Pitágoras**" possibilita o desenvolvimento de habilidades relacionadas à elaboração de hipóteses, à construção de teses e à verificação desses por meio de testes. De acordo com Balacheff (2000), o estudo experimental cria um contexto que é favorável para o surgimento de processos que envolvam interações sociais, pois favorecem o confronto de diferentes pontos de vista sobre a solução de um mesmo problema. Dessa forma, no final do experimento, com intuito de identificar fatores utilizados nessa abordagem metodológica, que contribuem de forma significativa com a produção desse conhecimento, faz-se a socialização dos argumentos construídos pelos alunos.

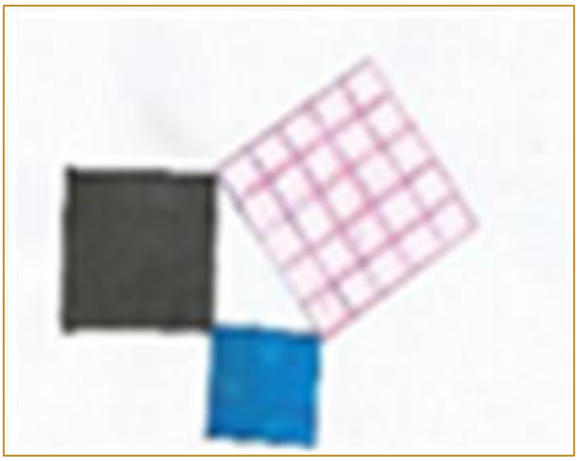
Sugestões:

Caso os alunos apresentem muita dificuldade em "construir" um processo de "demonstração", com base no texto "**Mania de Pitágoras"**, o professor pode sugerir que os mesmos utilizem o método de "Comparação de Áreas" para construir o argumento de "prova", seguindo os procedimentos:

- Com o auxílio do papel quadriculado, tomando cada quadradinho como unidade de medida, construa três quadrados com áreas respectivamente iguais 9u.a, 16u.a e 25 u.a.

- Verifique se esses quadrados se encaixam formando um triângulo retângulo (como mostra a figura 09).

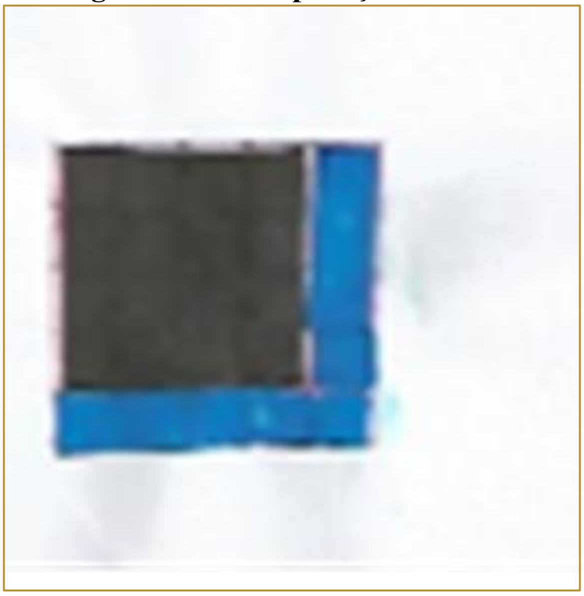
Figura 09 – Obtendo um triângulo retângulo utilizando o método da comparação de áreas



Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

- Agora, verifique se é possível sobrepor os quadrados menores no quadrado maior de forma que não sobre espaços em branco (como mostra a figura 10).

Figura 10 – Comparação de áreas

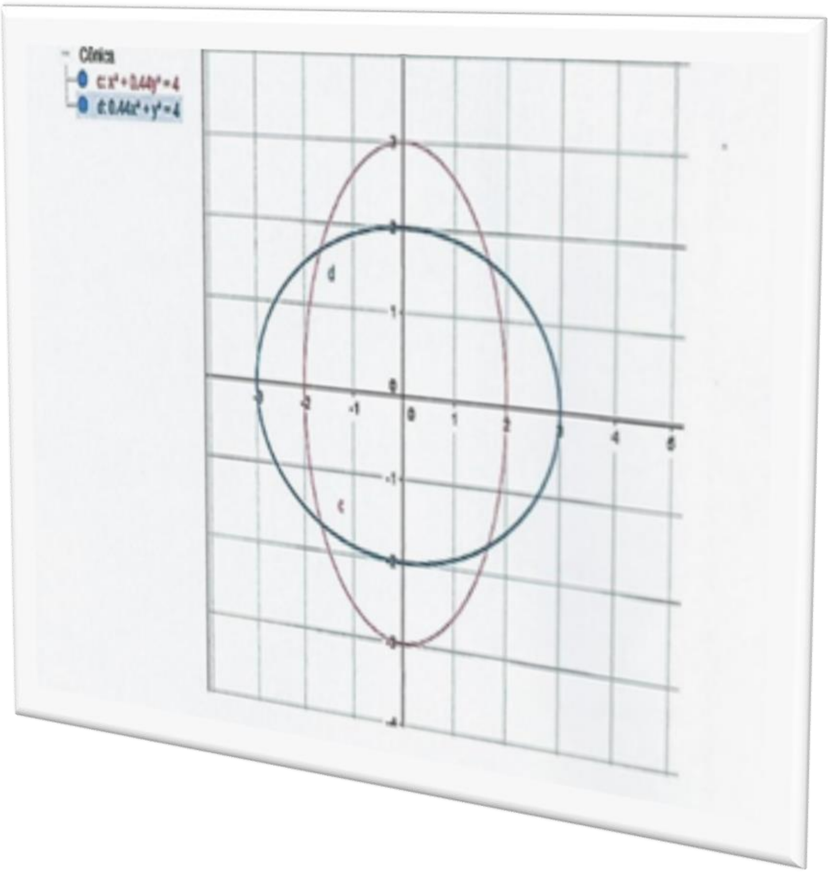


Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

- Com base na experimentação feita, enuncie o "Teorema de Pitágoras".

É importante que o professor entenda que a utilização de atividades experimentais são importantes nas aulas de Matemática, pois abrem caminhos para a investigação e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Assim como é comum em todo o processo de aprendizagem, o resultado final é apenas uma parte de todo o caminho que deverá ser percorrido. Os questionamentos que surgem durante esse processo e as eventuais tentativas de respostas tornam-se mais importantes do que a resposta correta no final do procedimento.

Descobrindo propriedades das Cônicas com o GEOGEBRA



Elipses e Hipérboles...

DESCOBRINDO PROPRIEDADES DAS CÔNICAS COM O GEOGEBRA

Material:

- Software GEOGEBRA.
- Atividade para ser desenvolvida no laboratório de informática.
- Sequência de atividades para construção de cônicas.

Objetivos:

Identificar algumas propriedades das elipses e das hipérboles, partindo de suas representações gráficas.

Organização da turma/tempo estimado:

Essa prova experimental pode ser desenvolvida em duplas ou individualmente, dependendo da quantidade de computadores disponíveis no laboratório de informática.

O tempo estimado para o desenvolvimento dessa prova experimental é de três horas aulas (2:30).

Ano de escolaridade:

Essa prova experimental foi desenvolvida com terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática, porém, também pode ser trabalhada com turmas de terceiro ano do Ensino Médio.

Conteúdo abordado:

Geometria analítica – Análise do comportamento gráfico das propriedades das elipses e das hipérboles.

Justificativa:

Esse experimento busca mostrar o quão é importante o curso de Licenciatura não atrelar-se apenas ao ensino de fórmulas, leis e teorias, pois os espaços sociais atuais exigem das pessoas uma questão mais ampla. Entende-se que estratégias de ensino como essas não podem ser excluídas da formação de docentes, uma vez que esses futuros professores irão se deparar com alunos que utilizam frequentemente esse e outros tipos de tecnologias. Na concepção de que (re)aprender Matemática na Licenciatura é uma possibilidade para o desenvolvimento potencial e reflexivo dos futuros professores, o experimento *"Descobrindo propriedades das Cônicas com o GEOGEBRA"* foi construído com base em cinco atividades de construção de cônicas adaptadas do "**Caderno de Atividades de Geometria Analítica: aulas práticas no laboratório de computação**" - Prof. Dimas Felipe de Miranda e prof. João Bosco Laudares. Nesse sentido, essas atividades seguem uma sequência em que, após cada construção feita, os alunos são levados a argumentar sobre o comportamento observado no gráfico. Dessa forma, o experimento é desenvolvido em cinco etapas.

Desenvolvimento (primeira etapa) - Traçado de cônicas desconhecendo suas equações

A fim de explorar algumas ferramentas do *software* GEOGEBRA, o professor inicia o experimento propondo a atividade de construção de cônicas quando suas equações são desconhecidas.

- Na tela inicial do GEOGEBRA, clique no ícone (plotar cônicas), execute o comando: “plotar elipse por dois pontos dados”.
- Em seguida, escolha outros dois pontos e plote outras elipses;
- Repita o mesmo procedimento, executando o comando “plotar hipérboles” e construa alguns gráficos para essa curva.
- Anote as observações feitas a respeito dessas curvas.

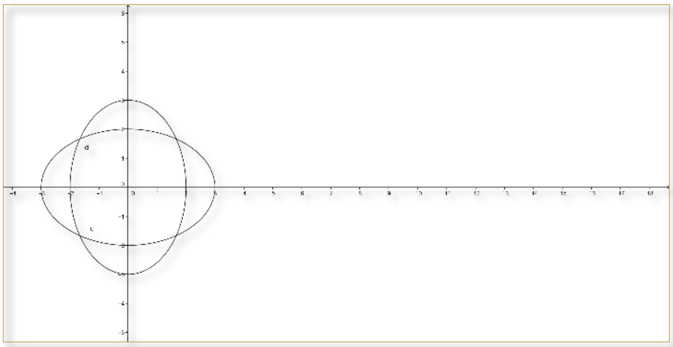
Desenvolvimento (segunda etapa) – Traçado de cônicas conhecendo-se as suas equações

Com o objetivo de analisar quais características conceituais das cônicas podem ser evocadas e quais significados elas trazem para os alunos a partir de suas visualizações gráficas, nessa etapa, o professor propõe aos alunos o reconhecimento de algumas cônicas a partir de algumas equações dadas. As equações utilizadas foram retiradas do “Caderno de Atividades de Geometria Analítica: aulas práticas no Laboratório de Computação – série Ensino de Ciências e matemática 1ª edição”.

- Na tela inicial do GEOGEBRA, no campo entrada 

, digite as equações $x^2/4 + y^2/9=1$ e $x^2/9 + y^2/4=$,1 num mesmo sistema de eixos (figura 11).

Figura 11 – Elipse a partir de equação dada

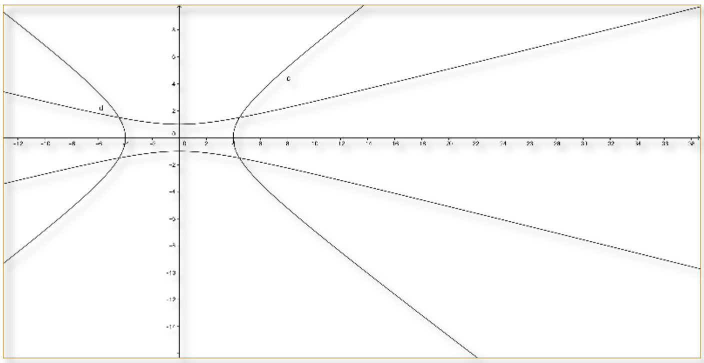


Fonte: Elaborada pela autora.

- Analise os gráficos e identifique suas principais características.

- Em seguida, digite as duplas de equações $x^2/16 - y^2/9 = 1$ e $-x^2/16 + y^2 = 1$ num mesmo sistema de eixos (figura 12).

Figura 12 – Hipérbole a partir de equação dada

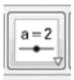


Fonte: Elaborada pela autora.

- Analise seus gráficos e identifique suas principais características. (Adaptado da atividade 03 "Caderno de Atividades de Geometria Analítica", MIRANDA e LAUDARES, 2011 p. 10).

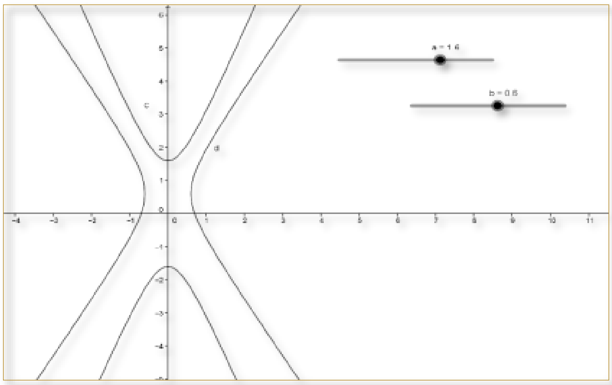
Desenvolvimento (terceira etapa) – Reconhecimento de famílias de cônicas

O objetivo dessa etapa é analisar quais definições conceituais serão evocadas pelos discentes e qual o nível de compreensão matemático será alcançado. Nesse sentido, espera-se que os mesmos sejam capazes de expressar em palavras ou através de formulações matemáticas algumas propriedades das cônicas obtidas a partir de suas equações. É importante que, ao fazer a análise dessa etapa, o professor procure evidenciar a qualidade de comunicação matemática dos argumentos construídos pelos discentes.

- Na tela inicial do GEOGEBRA, clique no ícone 

;
- Declare dois parâmetros "a" e "b", criando um cursor para os mesmos;
- Num mesmo sistema de eixos, digite as equações $-x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$ e $x^2/b^2 - (y-b)^2 = 1$ conforme figura 13;

Figura 13 – Reconhecimento de famílias de cônicas



Fonte: Elaborada pela autora.

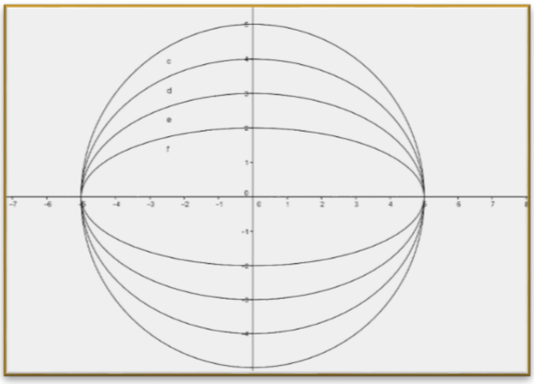
- Varie o valor de “a” e “b” separadamente no cursor;
- Faça uma análise das alterações obtidas no gráfico e justifique sua resposta.

Desenvolvimento (quarta etapa) – Análise da excentricidade das Elipses de das Hipérboles

O objetivo dessa etapa é investigar a habilidade de uma demonstração matemática, com base na interpretação geométrica de um conceito. Espera-se que, nesse momento, os alunos sejam capazes de consolidar formalmente uma definição. Sabe-se que esse não é um trabalho simples, pois exige do aluno um compromisso com a resolução do problema, não só na sua eficácia prática, mas, também, com seu rigor teórico. Assim, inicialmente, o professor deverá apontar as principais características que estabelecem as relações entre a comunicação dos significados de excentricidade e a linguagem operacional utilizada.

- Num mesmo sistemas de eixos, plote as equações das elipses $x^2 + y^2 = 25$, $x^2/25 + y^2/16 = 1$; $x^2/25 + y^2/9 = 1$ e $x^2/25 + y^2/4 = 1$ (conforme figura 14);

Figura 14 – Análise da excentricidade das elipses

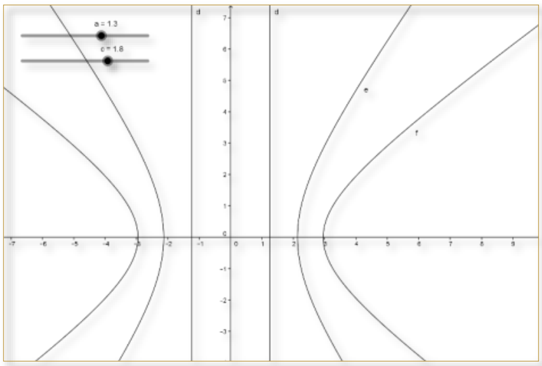


Fonte: Elaborada pela autora.

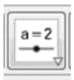
- Faça uma análise de suas excentricidades e justifique sua resposta.

- Em outro sistemas de coordenadas, plote as equações das hipérboles $x^2/a^2 - y^2/c^2-a^2=1$ e $x^2/c^2- a^2 - y^2/a^2 = 1$ (conforme figura 15).

Figura 15 – Análise da excentricidade das hipérboles



Fonte: Elaborada pela autora.

- Em seguida, na tela inicial do GEOGEBRA, clique no ícone 

 .
- Declare um parâmetro "c" e crie um cursor para o mesmo.
- Varie o parâmetro c em cada equação com a constante;
- Faça uma análise da excentricidade das curvas obtidas e justifique sua resposta. (Adaptado do "Caderno de Atividades de Geometria Analítica" atividade: 05, MIRANDA e LAUDARES, 2011, p.11-12).

Desenvolvimento (quinta etapa) – Socialização dos argumentos construídos

Nessa etapa, com intuito de verificar o nível de "prova" encontrado nos argumentos construídos pelos discentes, o professor propõe uma socialização dos resultados obtidos.

OBSERVAÇÃO:

Segundo Balacheff (1988, p.227), para que o aluno chegue a um nível de "prova conceitual", existe um longo caminho, que deve, inicialmente, passar por uma mudança radical na forma de conceber a prova: "é necessário que a justificativa que constitui a base da validação da proposição apoie-se sobre a análise de suas propriedades e essas não devem mais ser formuladas de maneira particular, mas sim de forma generalizada".

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro, RJ: Contraponto, 1996.

BALACHEFF, Nicolas. Processus de preuve et situations de validation**. Educational Studies In Mathematics:** An International Journal,v. 2, n. 18, p.147-176, maio 1987.

BALACHEFF, Nicolas. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas**. Tradução de: Pedro Gómes. Bogotá: Centro de Impresión Digital Cargraphics S.A., 2000. 200 p.

BALACHEFF, Nicolas. Une etude des processus de preuve en mathématiques chez des éléves de Collége. En: PIMM, David. **Mathematics, teachers and children**. Londres: Hodder & Stoughton, p. 216-235, 1988.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. São Paulo: **Pró-posições**, v. 04, 1993, p.18-23.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Filosofia da educação matemática**: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. São Paulo: Unesp, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**. MEC, 1999.

COSTA, Gustavo A. T. F. da. O cone e as cônicas. **Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina** n.4, 2007, p.77-89.

HANNA, Gila. Proof, Explanation and Exploration: An Overview. **Educational Studies In Mathematics**, [s.l.], v. 44, n. 1/2, p.5-23, 2000. Springer Science - Business Media. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1023/a:1012737223465. Acesso em 5 abr. 2016.

IEZZI G.; DOLCE O.; DEGENSZAJN D.; PÉRIGO R.; ALMEIDA N. **Matemática:** ciências e aplicações. v.3 - Ensino Médio, 8.ed. São Paulo: Atual, 2014.

LAKATOS, Imre. **A lógica do descobrimento matemático**: Provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar, 1978. .

LIMA, Elon. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: IMPA/VITAE, 1991.

LORENZATO, Sérgio. **Coleção Formação de Professores**: O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de Professores. São Paulo: Autores Associados, 2006.

MIRANDA, Dimas Felipe de; LAUDARES, João Bosco. **Caderno de atividades de geometria analítica**: aulas práticas no laboratório de computação: uso dos softwares Geogebra e Winplot. Belo Horizonte: FUMARC, 2011. (Caderno 05).

NASSER, Lilian; TINOCO, Lucia A de. **Argumentação e provas no ensino de matemática**. Rio de Janeiro: UFRJ/projeto Fundão, 2003.

POGORÉLOV, A.V. **Geometria Elementar.** Tradução de Carlos Veja. Moscou: Editora Mir, 1974.

PORTAL MATEMÁTICA E MULTIMÍDIA. **As mídias.** Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br. Acesso em: 12 dez. 2015.

SILVA, A.; RÊGO, R. Matemática e literatura infantil: um estudo sobre a formação do conceito de multiplicação. In: BRITO, M.R.F (Org.) **Solução de problemas e a matemática escolar.** Campinas: Alínea, 2006. p. 207-236.

ANEXOS

Anexo 01 - Texto base para o desenvolvimento da Prova Experimental "Engenharia de Grego"

Como Abrir um Túnel, se Você Sabe Geometria

A ilha de Samos, que ainda pertence à Grécia, fica a menos de 2 quilômetros da costa da Turquia. Há 2 500 anos, toda aquela região era habitada por gregos. Samos passou à História por ser a terra natal de Pitágoras, mas não é dele que vamos falar.

O herói do nosso episódio nem ao menos era matemático. Seu nome era Eupalinos e, nos dias atuais, seria chamado de engenheiro. Ele será focalizado aqui por ter sabido usar, com bastante sucesso, um fato elementar de Geometria Plana para resolver um problema de Engenharia e assim contribuir para o bem-estar de uma comunidade.

O exemplo de Eupalinos merece ser conhecido por dois motivos: fornece um tópico interessante para ilustrar nossas aulas e mostra como o conhecimento matemático, mesmo quando de natureza teórica, pode ter influência decisiva no progresso tecnológico.

O teorema de Geometria usado por Eupalinos foi o seguinte: *Se dois triângulos retângulos têm catetos proporcionais, seus ângulos agudos são iguais.*

Na figura a seguir, se $b/c = b'/c'$ então $\angle ab = \angle a'b'$ e $\angle ac = \angle a'c'$.

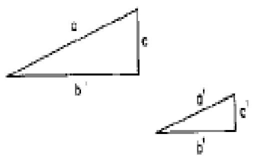


Figura 1.

Como se sabe, este é um caso particular de semelhança de triângulos. (Os triângulos dados têm um ângulo (reto) igual, compreendido entre lados proporcionais.)

Para sermos exatos, Eupalinos não usou precisamente o teorema acima e sim uma sua conseqüência imediata, que enunciaremos agora:

Sejam abc a'b'c' triângulos retângulos com um vértice comum. Se os catetos b e c' são perpendiculares e, além disso, tem-se $b/c = b'/c'$ *então as hipotenusas a e a' estão em linha reta.*

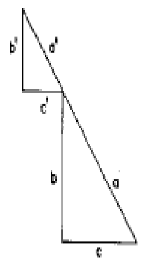


Figura 2.

A afirmação acima decorre imediatamente da anterior pois a soma dos ângulos em torno do vértice comum aos dois triângulos é igual a dois ângulos retos.

Retomemos nossa história. Ela se passa em Samos, ano 530 a.C. O poderoso tirano Polícrates se preocupava com o abastecimento de água da cidade. Havia fontes abundantes na ilha, mas ficavam do outro lado do monte Castro; o acesso a elas era muito difícil para os habitantes da cidade.

Decidiu-se abrir um túnel.

A melhor entrada e a mais conveniente saída do túnel foram escolhidas pelos assessores de Polícrates. Eram dois pontos, que chamaremos de A e B respectivamente.

Cavar a montanha não seria árduo, pois a rocha era calcárea e não faltavam operários experientes. O problema era achar um modo de sair do ponto A e, cavando, chegar ao ponto B sem se perder no caminho.

Eupalinos, encarregado de estudar a questão, surpreendeu a todos com uma solução simples e prática.

Além disso, anunciou que reduziria o tempo de trabalho à metade propondo que se iniciasse a obra em duas frentes, começando a cavar simultaneamente nos pontos A e B, encontrando-se as duas turmas no meio do túnel!

Disse e fez. O túnel, construído há 25 séculos, é mencionado pelo historiador grego Herodoto.

Em 1882, arqueólogos alemães, escavando na ilha de Samos, o encontraram. Ele tem um quilômetro de extensão, sua seção transversal é um quadrado com 2 metros de lado, com uma vala funda para os canos d'água e aberturas no teto para renovação do ar e limpeza de detritos.

Mas como Eupalinos conseguiu, partindo simultaneamente de A e B, traçar uma reta ligando esses pontos, através da montanha?

Na figura a seguir, o contorno curvilíneo representa o monte, A é o ponto de entrada e B é a saída do túnel.

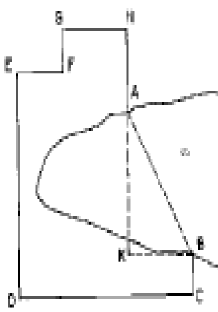


Figura 3.

A partir do ponto B fixa-se uma direção arbitrária BC e, caminhando ao longo de uma poligonal $BCDEFGHA$, na qual cada lado forma um ângulo reto com o seguinte, atinge-se o ponto A, tendo evitado assim as áreas mais escarpadas da montanha. (Não é difícil imaginar um instrumento ótico rudimentar que permita dar com precisão esses giros de 90 graus.)

Anotando-se o comprimento de cada um dos lados da poligonal, determinam-se facilmente os comprimentos dos catetos AK e KB do triângulo retângulo AKB no qual AB é a hipotenusa e os catetos têm as direções dos lados da poligonal considerada.

Calcula-se então a razão $r = AK/KB$. A partir dos pontos A e

B, constróem-se dois pequenos triângulos retângulos cujos catetos ainda tenham as direções dos lados da poligonal e, além disso, em cada um desses triângulos, a razão entre os catetos seja igual à razão r entre os catetos do triângulo AKB:

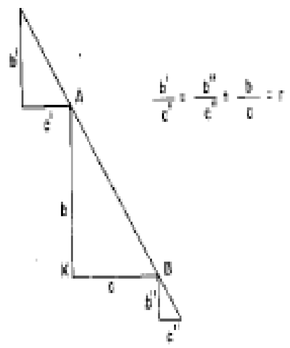


Figura 4.

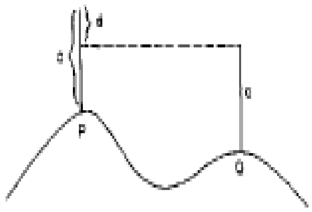
Agora é só cavar o morro, a partir dos pontos A e B, na direção das hipotenusas dos triângulos pequenos.

Isto resolve o problema se os pontos A e B estiverem no mesmo nível: cava-se sempre na horizontal e o plano horizontal é fácil de determinar, por meio de vasos comunicantes ou por outros processos.

Em geral, A e B não estão no mesmo nível. No caso em questão, é obviamente desejável que B seja mais baixo e sem dúvida levou-se isto em conta na sua escolha como ponto de saída. Mas é fácil calcular d = diferença de nível entre A e B. Basta ir registrando, à medida que se percorre a poligonal $BCDEFGHA$, a diferença de nível entre cada vértice e o seguinte.

Tendo d, consideramos o triângulo retângulo AMB, no qual o cateto AM é vertical e tem comprimento d. O comprimento da hipotenusa AB se determina pelo teorema de Pitágoras (a partir dos catetos do triângulo AKB).

A razão $AM/AB = s$ diz como se deve controlar a inclinação da escavação: cada vez que andarmos uma unidade de comprimento ao longo do túnel, o nível deve baixar a unidades.



d = diferença de nível entre os pontos P e Q

Figura 5.

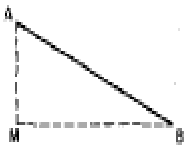


Figura 6.

O mais notável desse raciocínio teórico é que ele foi posto em prática e funcionou. O túnel sob o monte Castro lá está, para quem quiser ver, na majestade dos seus dois mil e quinhentos anos de idade.

Honestamente, devemos esclarecer que as duas extremidades das escavações não se encontraram exatamente no mesmo ponto. Isto seria esperar demais da precisão dos instrumentos então existentes.

Houve um erro de uns 9 metros na horizontal e 3 metros na vertical. Desvio insignificante, convenhamos. Além disso, esse erro tem dois aspectos interessantes.

Em primeiro lugar, constitui uma prova de que o túnel foi realmente cavado em duas frentes.

Em segundo lugar, a ponta que começou em B chegou mais baixa do que a que começou em A, o que permitiu formar uma pequena cachoeira, sem interromper o fluxo de água de A para B.

Isto nos deixa quase certos de que esse erro na vertical está ligado ao cuidado dos construtores em não deixar as pontas se encontrarem com a saída mais alta do que a entrada, o que causaria um problema desagradável.

Para encerrar, uma pergunta: como sabemos destas coisas? Eupalinos não deixou obras escritas. Mas Heron de Alexandria publicou muitos livros, alguns deles ainda hoje existentes. Um desses livros é sobre um instrumento de agrimensura chamado dioptra. Nele, Heron descreve o processo que expusemos acima.

Em seu todo, os livros escritos por Heron formam uma enciclopédia de métodos e técnicas de Matemática Aplicada, sintetizando o conhecimento da época.

Outros livros, talvez menos completos, certamente foram publicados antes com propósitos semelhantes e não se pode deixar de supor que a construção de Eupalinos tenha figurado entre essas técnicas.

Referências

1. Fernando Trotta, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic, "Matemática Aplicada".

Uma discussão do problema do túnel usando Trigonometria, bem como uma breve apresentação do método por nós exposto. De um modo geral, os 3 volumes de Trotta, Imenes e Jakubovic são altamente recomendáveis pela abundância de exemplos e aplicações de Matemática a nível de estudantes do segundo grau, Editora Moderna, S. Paulo, 1979, pp. 193–196.

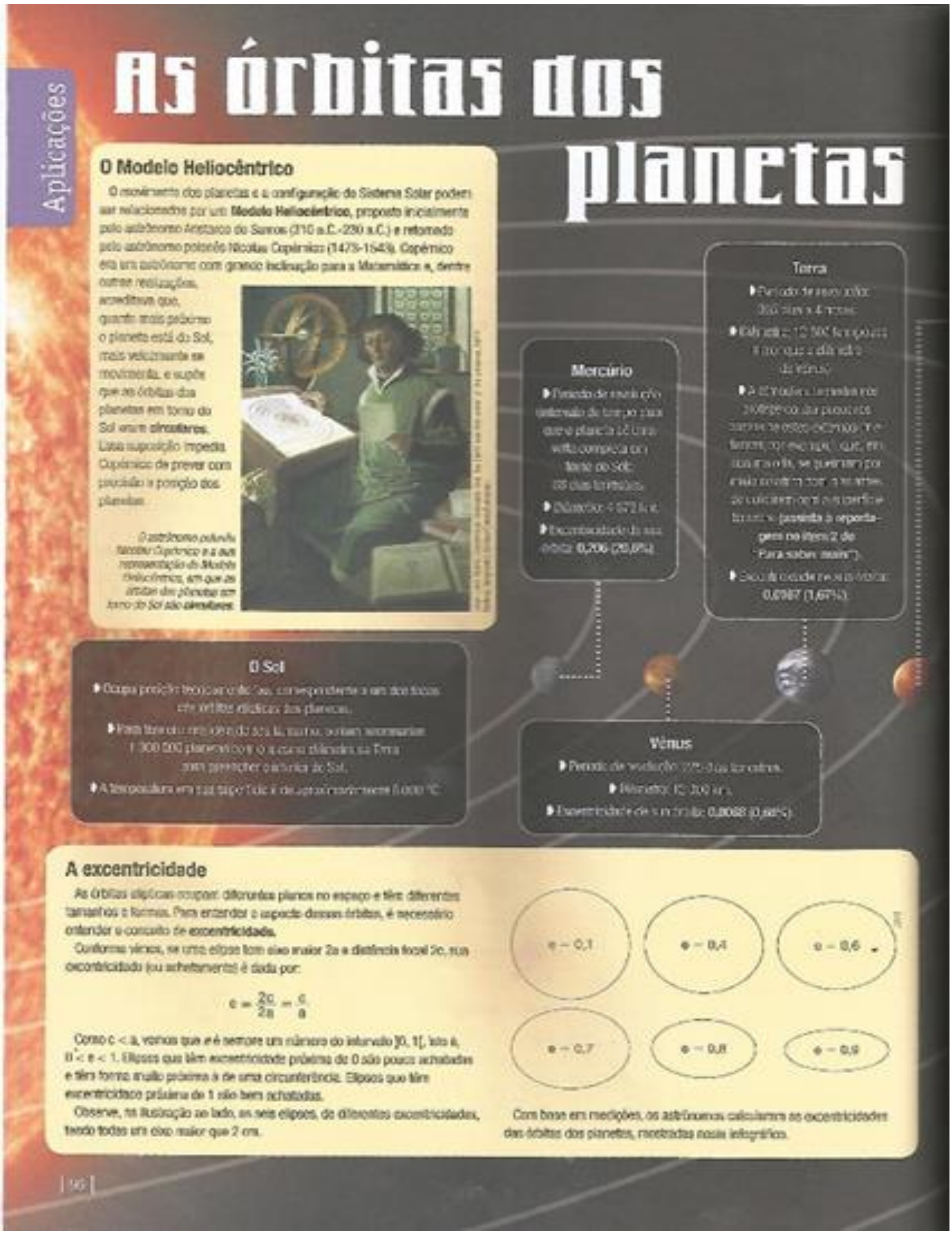
2. Hans Freudenthal, "Perspectivas da Matemática".

Uma série de tópicos independentes, que podem servir de inspiração e fonte de informação aos interessados por Matemática. O problema do túnel é um dos primeiros abordados nesse livro, Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1985.

3. B.L. van der Waerden, "Science Awakening".

Uma exposição clara e acessível dos primórdios da Ciência no mundo ocidental, começando com sumérios e babilônios, indo até os gregos. O primeiro texto moderno a contar a história de Eupalinos, Noordhoff, 1954.

Anexo 02 – Texto base para o desenvolvimento da Prova Experimental – Excentricidade dos Planetas e a Primeira Lei de Kepler



Aplicações

As órbitas dos planetas

O Modelo Heliocêntrico

O movimento dos planetas e a configuração do Sistema Solar podem ser relacionados por um **Modelo Heliocêntrico**, proposto inicialmente pelo astrônomo Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.) e retomado pelo astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1473-1543). Copérnico era um astrônomo com grande inclinação para a Matemática e, dentre outras realizações, acreditava que, quanto mais próximo o planeta está do Sol, mais velozmente se movimenta, e supôs que as órbitas dos planetas em torno do Sol eram **circulares**. Essa suposição impedia Copérnico de prever com precisão a posição dos planetas.

O astrônomo polonês Nicolau Copérnico e a sua representação do Modelo Heliocêntrico, em que as órbitas dos planetas em torno do Sol são ***circulares***.

O Sol

Mercúrio

Excentricidade da sua órbita: **0,206 (20,6%)**

Terra

0,0167 (1,67%)

Vênus

Excentricidade de sua órbita: **0,0068 (0,68%)**

A excentricidade

As órbitas elípticas ocupam diferentes planos no espaço e têm diferentes tamanhos e formas. Para entender o aspecto dessas órbitas, é necessário entender o conceito de **excentricidade**.

Conforme vimos, se uma elipse tem eixo maior 2a e distância focal 2c, sua excentricidade (ou achatamento) é dada por:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

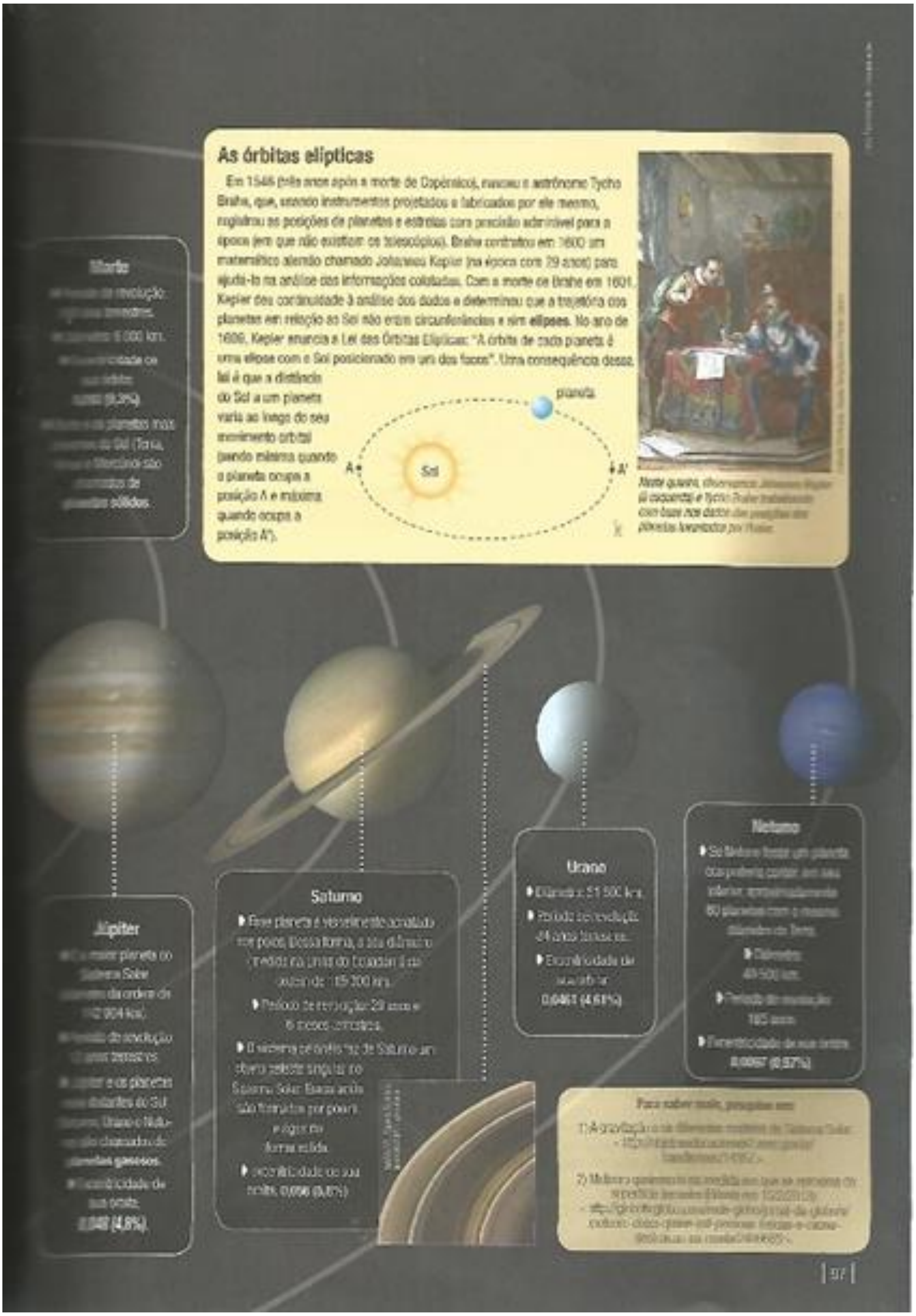
Como $c < a$, vemos que e é sempre um número do intervalo $]0, 1[$, isto é, $0 < e < 1$. Elipses que têm excentricidade próxima de 0 são pouco achatadas e têm forma muito próxima à de uma circunferência. Elipses que têm excentricidade próxima de 1 são bem achatadas.

Observe, na ilustração ao lado, as seis elipses, de diferentes excentricidades, tendo todas um eixo maior que 2 cm.

e = 0,1
e = 0,4
e = 0,6
e = 0,7
e = 0,8
e = 0,9

Com base em medições, os astrônomos calcularam as excentricidades das órbitas dos planetas, mostradas neste infográfico.

96



As órbitas elípticas

Em 1546 (três anos após a morte de Copérnico), nasceu o astrônomo Tycho Brahe, que, usando instrumentos projetados e fabricados por ele mesmo, registrou as posições de planetas e estrelas com precisão admirável para a época (em que não existiam os telescópios). Brahe contratou em 1600 um matemático alemão chamado Johannes Kepler (na época com 29 anos) para ajudá-lo na análise das informações coletadas. Com a morte de Brahe em 1601, Kepler deu continuidade à análise dos dados e determinou que a trajetória dos planetas em relação ao Sol não eram circunferências e sim **elipses**. No ano de 1609, Kepler enuncia a Lei das Órbitas Elípticas: "A órbita de cada planeta é uma elipse com o Sol posicionado em um dos focos". Uma consequência dessa lei é que a distância do Sol a um planeta varia ao longo do seu movimento orbital (sendo mínima quando o planeta ocupa a posição A e máxima quando ocupa a posição A').

Saturno

- Esse planeta é visivelmente achatado nos polos. Dessa forma, o seu diâmetro medido na linha do Equador é da ordem de 120 200 km.
- Período de revolução: 29 anos e 6 meses terrestres.
- O sistema de anéis faz de Saturno um objeto celeste singular no Sistema Solar. Esses anéis são formados por poeira e água na forma sólida.
- Excentricidade de sua órbita: 0,056 (5,6%)

Urano

- Diâmetro: 51 800 km.
- Período de revolução: 84 anos terrestres.
- Excentricidade de sua órbita: 0,0461 (4,61%)

Júpiter

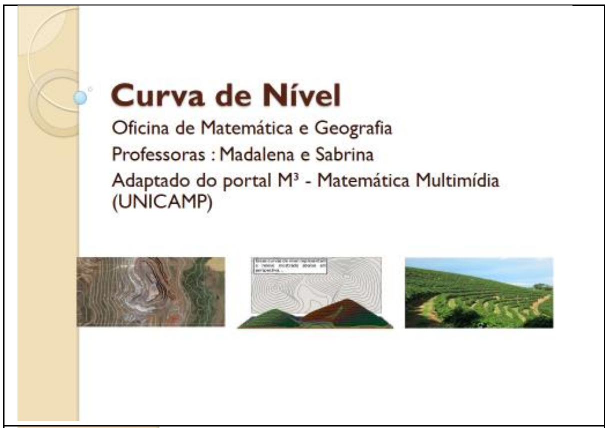
Excentricidade de sua órbita: 0,048 (4,8%)

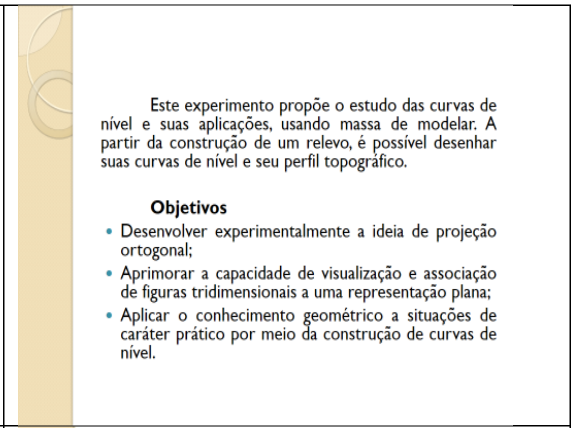
Netuno

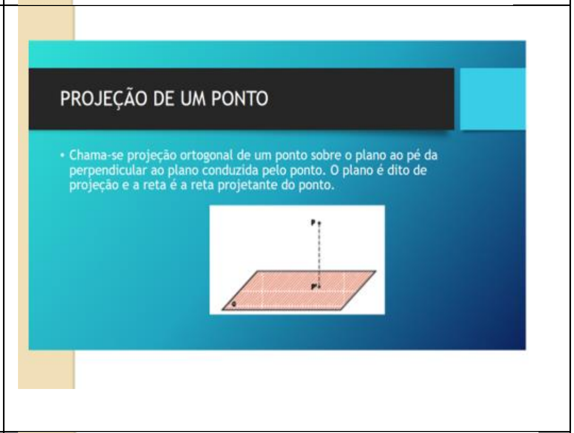
Excentricidade de sua órbita: 0,0097 (0,97%)

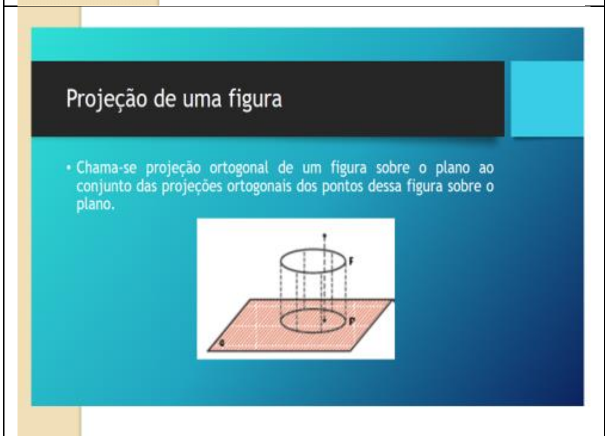
Para saber mais, pesquise em:

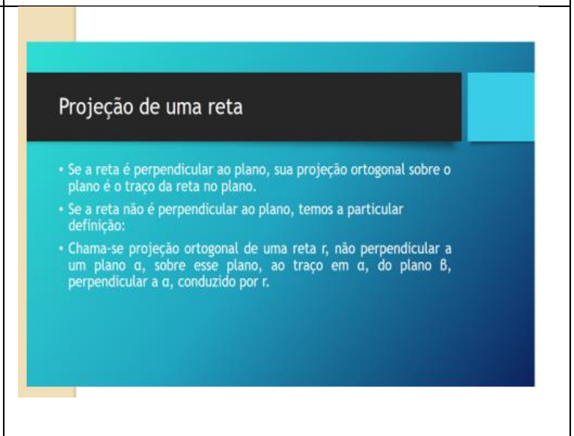
Anexo 03 – Sugestão de Material (áudio – visual) a ser utilizado no desenvolvimento do Experimento “Curva de Nível”

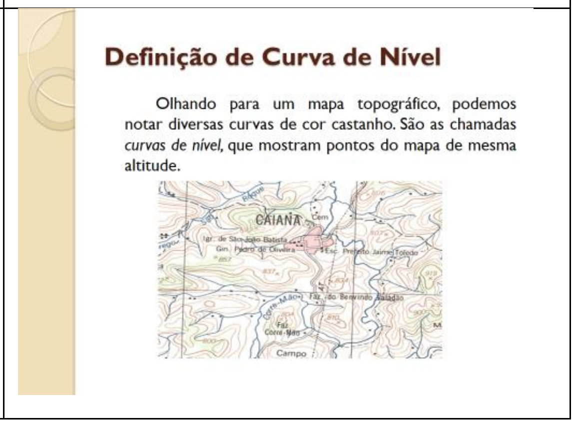


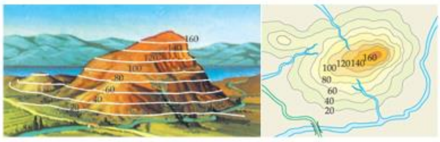












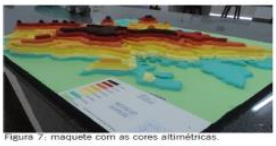
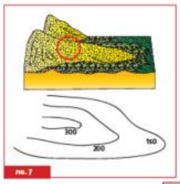
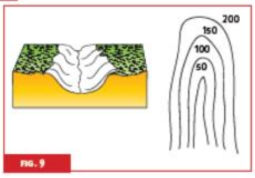
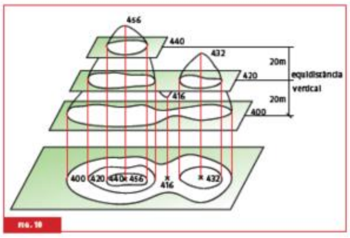


Figura 7: maquete com as cores altimétricas.





Observe que as curvas de nível são obtidas pela intersecção do relevo com planos paralelos que mantêm a mesma distância entre si. Essas intersecções, projetadas ortogonalmente sobre um plano, determinam as curvas de nível, conforme indicado na figura abaixo.



Os números mostrados nas linhas se referem à altura do plano que contêm aquela linha. O x indica o local do pico de um morro e o ponto mais baixo de um vale. Também

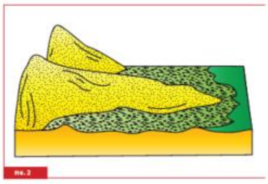
As curvas de nível são usadas por vários tipos de profissionais:

Geólogos;
Engenheiros;
Cartógrafos;
Agrônomos; etc

Na matemática também são usadas no estudo de funções, quando queremos transformar gráficos com 3 dimensões em figuras planas.

TIPOS DE RELEVO

Espigões
Este tipo de relevo tem como principal característica a presença de um sequência de morros com formas topográficas convexas.



Vales em formato "V"

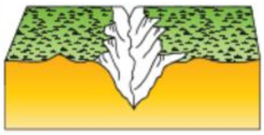


FIG. 3

Vales abertos em formato "U"

FIG. 4

Selas

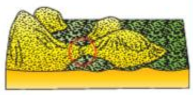


FIG. 5

★ *O círculo vermelho na figura indica o relevo em questão.*

Morros Redondos

FIG. 6

EXPERIMENTO

Material

- Massa de modelar;
- Palitos de sorvete;
- Linha de costura (*ou linha de anzol);*
- Régua

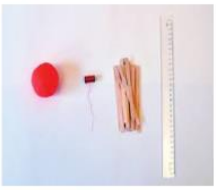


FIG. 12

FIG. 13

FIG. 14 *Corte próximo da base.*

FIG. 15 *Corte próximo do topo.*

FIG. 16

Anexo 04 – Receita caseira de massa de modelar para ser utilizada no experimento “Curva de Nível”

Material

4 xícaras de farinha de trigo

1 xícara de sal

1 e 1/2 xícara de água

1 colher de chá de óleo

Modo de Fazer

Numa tigela grande, misturar todos os ingredientes e amassar bem até ficar boa para modelar. Guardar em saco plástico ou vidro bem tampado. Para dar cor a massa, pingue algumas gotas de corante para alimento.

Anexo 05 – Texto base para o desenvolvimento da prova Experimental “Demonstrando o Teorema de Pitágoras”

Mania de Pitágoras

Elisha Scott Loomis, professor de Matemática em Cleveland, Ohio (Estados Unidos) era realmente um apaixonado pelo Teorema de Pitágoras. Durante 20 anos, de 1907 a 1927, colecionou demonstrações desse teorema, agrupou-as e as organizou num livro, ao qual chamou "The Pythagorean Proposition". (A Proposição de Pitágoras.) A primeira edição, em 1927, continha 230 demonstrações. Na segunda edição, publicada em 1940, este número foi aumentado para 370 demonstrações. Depois do falecimento do autor, o livro foi reimpresso, em 1968 e 1972, pelo "National Council of Teachers of Mathematics" daquele país.

O Professor Loomis classifica as demonstrações do Teorema de Pitágoras em basicamente dois tipos: provas "algébricas" (baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos) e provas "geométricas" (baseadas em comparações de áreas). Ele se dá ao trabalho de observar que não é possível provar o Teorema de Pitágoras com argumentos trigonométricos porque a igualdade fundamental da Trigonometria, $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, já é um caso particular daquele teorema.

Como sabemos, o enunciado do Teorema de Pitágoras é o seguinte: "A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos".

Se a, b são as medidas dos catetos e c é a medida da hipotenusa, o enunciado acima equivale a afirmar que $a^2 + b^2 = c^2$.

Documentos históricos mostram que os egípcios e os babilônios, muito antes dos gregos, conheciam casos particulares desse teorema, expressos em relações como

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

e

$$1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(1\frac{1}{4}\right)^2.$$

O fato de que o triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo era (e ainda é) útil aos agrimensores. Há também um manuscrito chinês, datando de mais de mil anos antes de Cristo, onde se encontra a seguinte afirmação: "Tome o quadrado do primeiro lado e o quadrado do segundo e os some; a raiz quadrada dessa soma é a hipotenusa". Outros documentos antigos mostram que na Índia, bem antes da era Cristã, sabia-se que os triângulos de lados 3, 4, 5 ou 5, 12, 13, ou 12, 35, 37 são retângulos.

O que parece certo, todavia, é que nenhum desses povos sabia demonstrar o teorema. Tudo indica que Pitágoras foi o primeiro a prová-lo. (Ou alguém da sua Escola o fez, o que dá no mesmo, pois o conhecimento científico naquele grupo era propriedade comum.)

1. A mais bela prova

Qual foi a demonstração dada por Pitágoras? Não se sabe ao certo, pois ele não deixou trabalhos escritos. A maioria dos historiadores acredita que foi uma demonstração do tipo "geométrico", isto é, baseada na comparação de áreas. Não foi a que se encontra nos "Elementos" de Euclides, e que é ainda hoje muito encontrada nos livros de Geometria, pois tal demonstração parece ter sido concebida pelo próprio Euclides. A demonstração de Pitágoras pode muito bem ter sido a que decorre das figuras abaixo.

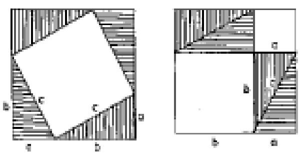


Figura 1.

Do quadrado que tem $a + b$ como lado, retiremos 4 triângulos iguais ao dado. Se fizermos isto como na figura à esquerda, obteremos um quadrado de lado c. Mas se a mesma operação for feita como na figura à direita, restarão dois quadrados, de lados a e b respectivamente. Logo, a área do quadrado de lado c é a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem a e b.

Esta é, provavelmente, a mais bela demonstração do Teorema de Pitágoras. Entretanto, no livro de Loomis ela aparece sem maior destaque, como variante de uma das provas dadas, não sendo sequer contada entre as 370 numeradas.

Apresentamos a seguir algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, que têm algum interesse especial, por um motivo ou por outro. As quatro primeiras constam da lista do Professor Loomis.

2. A prova mais curta

É também a mais conhecida. Baseia-se na seguinte conseqüência da semelhança de triângulos retângulos: "Num triângulo retângulo, cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela". Assim, se m e n são respectivamente as projeções dos catetos a e b sobre a hipotenusa c, temos $a^2 = mc, b^2 = nc$, enquanto $m+n = c$. Somando, vem $a^2 + b^2 = c^2$.

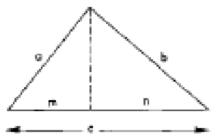


Figura 2.

3. A demonstração do presidente

James Abram Garfield, presidente dos Estados Unidos durante apenas 4 meses (pois foi assassinado em 1881) era também general e também gostava de Matemática. Ele deu uma prova do Teorema de Pitágoras baseada na figura 3.

A área do trapézio com bases a, b e altura $a+b$ é igual à semi-soma das bases vezes a altura. Por outro lado, a mesma área é também igual à soma das áreas de 3 triângulos retângulos. Portanto

$$\frac{a+b}{2} \times (a+b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}.$$

Simplificando, obtemos $a^2 + b^2 = c^2$.

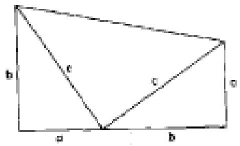


Figura 3.

4. A demonstração de Leonardo da Vinci

O grande gênio criador da Mona Lisa também concebeu uma demonstração do Teorema de Pitágoras, que se baseia na figura 4.

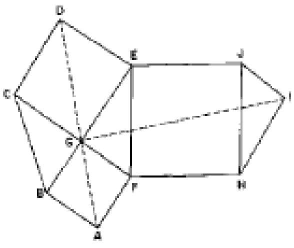


Figura 4.

Os quadriláteros $ABCD, DEFA, GFHI$ e $GEJI$ são congruentes. Logo os hexágonos $ABCDEF$ e $GEJIHF$ têm a mesma área. Daí resulta que a área do quadrado $FEJH$ é a soma das áreas dos quadrados $ABGF$ e $CDEG$.

5. A demonstração de Papus

Na realidade, não se trata apenas de uma nova demonstração mas de uma generalização bastante interessante do Teorema de Pitágoras. Em vez de um triângulo retângulo, toma-se um triângulo arbitrário ABC; em vez de quadrados sobre os lados, tomam-se paralelogramos, sendo dois deles quaisquer, exigindo-se que o terceiro cumpra a condição de CD ser paralelo a HA, e com o mesmo comprimento.

O teorema de Papus afirma que a área do paralelogramo $BCDE$ é a soma das áreas de $ABFG$ e $AIJC$. A demonstração se baseia na simples observação de que dois paralelogramos com bases e alturas de mesmo comprimento têm a mesma área.

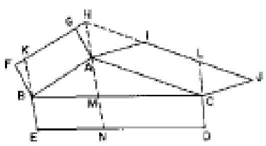


Figura 5.

Assim, por um lado, $AHKB$ tem a mesma área que $ABFG$ e por outro lado, a mesma área que $BMNE$. Segue-se que as áreas de $BMNE$ e $ABFG$ são iguais. Analogamente, são iguais as áreas de $CDNM$ e $CAIJ$. Portanto, a área de $BCDE$ é a soma das áreas de $ABFG$ e $CAIJ$.

O Teorema de Pitágoras é caso particular do de Papus. Basta tomar o triângulo ABC retângulo e três quadrados em lugar dos três paralelogramos.

6. O argumento de Polya

No meu entender, entretanto, a demonstração mais inteligente do Teorema de Pitágoras não está incluída entre as 370 colecionadas pelo Professor Loomis. Ela se acha no livro "Induction and Analogy in Mathematics", de autoria do matemático húngaro George Polya.

O raciocínio de Polya se baseia na conhecida proposição, segundo a qual "as áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança".

Lembremos que duas figuras F e F' dizem-se *semelhantes* quando a cada ponto A da figura F corresponde um ponto A' em F', chamado o seu *homólogo*, de tal maneira que se A, B são pontos quaisquer de F e A', B' são seus homólogos em F' então a razão $A'B'/AB$ é uma constante k, chamada a *razão de semelhança* de F para F'. Por exemplo, dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os ângulos de um deles são congruentes aos ângulos do outro. Por outro lado, dois quadrados quaisquer, um de lado ℓ e outro de lado ℓ', são semelhantes e a razão de semelhança do primeiro para o segundo é $k = \ell'/\ell$.

Em vez do Teorema de Pitágoras, Polya procura provar a seguinte proposição mais geral (que, diga-se de passagem, já se acha nos "Elementos" de Euclides):

Se F, F' e F'' são figuras semelhantes, construídas respectivamente sobre a hipotenusa c e sobre os catetos a, b de um triângulo retângulo então a área de F é igual à soma das áreas de F' e F''.

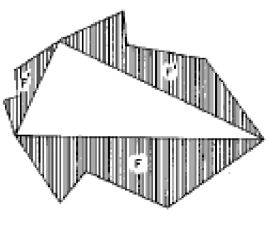


Figura 6.

O enunciado acima implica que a razão de semelhança de F' para F'' é b/a, de F' para F é c/a e de F'' para F é c/b.

Por simplicidade, escrevamos F em vez de "área de F", G em vez de "área de G", etc.

Se G, G', G'' são outras figuras semelhantes construídas sobre a hipotenusa e os catetos, respectivamente, em virtude da proposição acima enunciada, teremos:

$$\frac{G'}{G''} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{F'}{F''},$$

logo

$$\frac{G'}{F'} = \frac{G''}{F''}.$$

De modo análogo teremos

$$\frac{G'}{F'} = \frac{G}{F}.$$

Portanto $G/F = G'/F' = G''/F'' = \alpha$, digamos. Escrevendo de outro modo: $G = \alpha \cdot F, G' = \alpha \cdot F'$ e $G'' = \alpha \cdot F''$.

Que significam estas 3 últimas igualdades? Elas querem dizer que, se conseguirmos achar 3 figuras semelhantes especiais F, F' e F'', construídas sobre a hipotenusa e os catetos do nosso triângulo, de tal maneira que se tenha $F = F' + F''$ então teremos também $G = G' + G''$ *sejam quais forem* as figuras semelhantes G, G' e G'' construídas do mesmo modo. Com efeito, teremos $G = \alpha \cdot F, G' = \alpha \cdot F'$ e $G'' = \alpha \cdot F''$, logo $G' + G'' = \alpha \cdot F' + \alpha \cdot F'' = \alpha(F' + F'') = \alpha \cdot F = G$.

Agora é só procurar as figuras especiais. Mas elas estão facilmente ao nosso alcance. Dado o triângulo retângulo ABC, tracemos a altura CD, baixada do vértice do ângulo reto C sobre a hipotenusa AB.

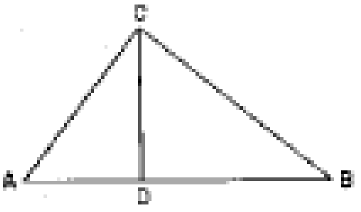


Figura 7.

A figura F será o próprio triângulo ABC. Para F' escolheremos ADC e faremos $F'' = BCD$. Evidentemente, F, F' e F'' são figuras semelhantes. Mais evidentemente ainda, temos $F = F' + F''$.