Prova, Explicação e Intuição em Bernard Bolzano

Humberto de Assis Clímaco

Após o lançamento do Sputnik em 1957, e a conhecida decisão de os países ocidentais darem uma maior importância ao ensino de ciências, iniciou-se na década de 1960, em vários países do mundo, a chamada Reforma da Matemática Moderna. Tratava-se do reconhecimento no ensino escolar de algo que já era uma realidade para a matemática pura e para o ensino superior: com a aritmetização da análise, a álgebra passava a ocupar o lugar central na matemática.

A ênfase em prova e estrutura na álgebra é a componente fundamental da mudança no ensino trazida pela Reforma da Matemática Moderna, durante sobretudo as décadas de 60 e 70 no mundo todo. "Esta mudança é tão profunda e de alcance tão longo que somente pode ser descrita como uma revolução" (HANNA, 1983, p. 21).

Mas esta revolução continha um paradoxo não divulgado, que consistia em que "prova rigorosa formal" no sentido usado pelos reformadores não significava conhecimento demonstrável de explicação em termos de causa e efeito. E o rigor característico desta nova fase não se fundamenta na idéia de uma radical correspondência entre causa e efeito concretos, e sim na linguagem.

A partir de então, as demonstrações e conceitos matemáticos passaram a se basear na aritmética, o que implicou uma concepção de que a matemática teórica deveria se fundamentar em provas rigorosas, eliminando-se a idéia de que a matemática se resume a cálculos, ou a idéia representada pela geometria euclidiana de que a matemática trata de características de grandezas ou de figuras concretas. Expressão disso foi o “Fora Euclides!” de Bourbaki[1].

Assim, deixava de preponderar a concepção vinculada desde os gregos, e particularmente por Aristóteles (384-322 a. C.), de que fazer ciência é buscar causas dos fenômenos, ou a essência última das coisas (*Segundos Analíticos*, 78a 22), e que na matemática se expressava pela fundamentação na geometria, celebrizada em Euclides. O ponto de vista de Aristóteles, que foi o primeiro a formular uma teoria sobre a ciência, se manteve com muita força até por volta dos séculos XVII e XVIII, e foi duramente enfraquecida pela aritmetização da análise.

Talvez o primeiro exemplo desse novo estilo de fazer matemática se encontra no *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege2* de Bolzano, publicado em 1817, sobre o qual falaremos adiante.

Lakatos (1970, p. 130) afirma, a respeito da revolução ocorrida nos séculos XIX e XX sobre a noção de explicação, que “Durante séculos conhecimento significou conhecimento demonstrado [...]. A integridade e a sabedoria intelectuais exigiram que se desistisse de afirmações não demonstradas [...]”. No entanto, ainda segundo Lakatos (1970, 131), os resultados de Einstein (ou de Hilbert, conforme acrescenta OTTE, (2007, p. 247) mudaram o peso na balança, de forma que nos dias atuais muitos poucos filósofos ou cientistas ainda identificam conhecimento científico com conhecimento demonstrado. Mas adverte que

> isso não significa que toda a estrutura clássica de valores intelectuais cai por terra e tem que ser substituída: não se pode simplesmente apagar de uma vez o ideal de verdade

[1] Não sabemos se Bourbaki tinha conhecimento da obra de Bolzano, mas é curioso perceber que Bolzano escreveu um livro chamado “Anti-Euclides” (traduzido para o inglês e publicado em Russ (2004), no qual questiona a concepção de geometria de Euclides, em alguns aspectos de forma semelhante a que Bourbaki viria a fazê-lo anos mais tarde.

[2] Tradução: “Prova puramente analítica do teorema que afirma que entre dois valores de sinais opostos existe pelo menos uma raiz real da equação”. É o artigo que contém a demonstração do que hoje é conhecido como Teorema de Bolzano, que é um caso particular do Teorema do Valor Intermediário. Nas próximas ocasiões em que citarmos este artigo, ele será denominado *Prova Puramente Analítica*... quando citado no corpo do texto, e RB quando em citações (como é o padrão em alguns artigos em diferentes línguas, em referência às iniciais das duas primeiras palavras que aparecem em maiúsculo no título do artigo – Rein e Beweis). O Teorema do Bolzano em questão será sempre escrito em letras maiúsculas, pois é de grande importância para esta dissertação.

> demonstrada – como alguns empiristas lógicos [...] ou [...] alguns sociólogos do conhecimento fazem (Lakatos 1970, p. 170).

A partir de então,“verdade e prova se tornaram tão desconexos quanto matemática pura e matemática aplicada” (OTTE, 2007, p.251).

Então, o que a Reforma da Matemática Moderna fez foi levar esta nova noção de explicação e dedução para as escolas do segundo grau. E no início da década de 70, com a constatação de que a Reforma da Matemática Moderna, apesar de ser uma tentativa de escolarizar o conhecimento matemático abstrato, ter falhado ao não criar nenhum tipo de mediação entre o concreto e o abstrato, reduzindo a matemática apenas a uma linguagem, muitos educadores matemáticos passaram a questionar a noção de rigor matemático. Mas, muitos chegaram a considerar a abstração, o rigor e a linguagem algébrica verdadeiros vilões.

É neste contexto que surge, na Educação Matemática internacional, o debate que contrapõe provas e explicações, ou “provas que provam e provas que explicam” (STEINER 1978; HANNA 1989; MANCOSU 1999), do qual trata minha dissertação. A introdução desta distinção pode ser vista como uma tentativa de reassumir o modelo aristotélico de ciência, duramente questionado pelos resultados de Albert Einstein (1879 – 1955), David Hilbert (1862-1943), Hermann Grassmann (1809 – 1877), e que já vinha sendo preparado pelas noções axiomáticas de Giuseppe Peano (1831-1916), estes resultados, por sua vez, têm no trabalho de Bolzano um de seus antecessores.

Mas o debate a respeito de provas que provam e provas que explicam tem mais uma fonte importante: a filosofia da matemática. É bem conhecido o fato de que a filosofia da matemática foi durante muito tempo – e ainda é em grande medida, sobretudo nos departamentos de Lógica existentes no mundo todo – identificada com a Lógica Matemática. O programa conhecido como logicista, de Frege e Russell, representou uma tentativa de reduzir a filosofia da matemática à lógica. E foi a esta abordagem da filosofia em que se buscavam resultados definitivos e não relacionados aos processos e construção histórica, que Lakatos se referia ao parafrasear Kant dizendo que “A história da matemática, sem o guia da filosofia, é cega, enquanto a filosofia da matemática, voltando às costas para os mais intrigantes fenômenos da história da matemática, é vazia." (LAKATOS, 1970, p.135).

Com o fracasso nas tentativas de fundamentação última da matemática e mesmo a prova dessa impossibilidade pelos teoremas de Gödel (ver HEIJENOORT, 1967), esta identificação da filosofia da matemática com a lógica perdeu espaço, ou pelo menos deixou de ser vista como uma forma de obter respostas definitivas a determinados questionamentos históricos (ver BUTCHART, 1999); assim, ganharam espaço as reflexões sobre como nós temos acesso ao conhecimento matemático, e muitos filósofos da matemática se voltaram para a epistemologia, bem como para a busca de significados em relação com a cultura, a sociedade, a educação e a experiência.

No entanto, alguns filósofos foram além desta busca de significados e passaram a buscar uma noção de explicação matemática que retornasse, de alguma forma, ao ideal grego de identificação de conhecimento com conhecimento demonstrado, e com a identificação de demonstração com a visualização de causa e efeito dos resultados matemáticos.

O problema da explicação matemática ressurgiu no século XX, portanto, destas duas fontes. Nesta busca por uma noção de explicação, Philip Kitcher (1975) percebeu que o primeiro, e talvez o único, dentre os construtores da matemática pura a defender uma noção de explicação semelhante à busca de significados verdadeiros (e não apenas uma linguagem) foi Bernard Bolzano.

Ao artigo de Kitcher, seguiu um de Steiner (1978) e outro de Hanna (1983). Embora estes dois últimos não citem Bolzano, podemos perceber em suas obras objetivos muito semelhantes aos de Kitcher, ou seja, de buscar uma noção de explicação matemática que retome aspectos da busca aristotélica por "provas do porquê" (*Segundos Analíticos*, 71b 25). Em Mathematical explanation, Steiner defende uma noção de explicação que aproxime a matemática das ciências naturais, afirmando que é possível desenvolver também na matemática uma noção de explicação causal; afirma ainda a existência de diferenças entre provas que provam e provas que explicam. Mancosu (1999), como Kitcher, cita explicitamente Bolzano e afirma que busca em sua noção de explicação algo que se contraponha à noção de explicação matemática atual.

Então, Bolzano foi visto como um possível recuperador de uma matemática mais próxima das humanidades e das ciências empíricas, alguém que pudesse ajudar a retomar o diálogo entre o que Snow chamou de "duas culturas", desfazendo a ruptura de comunicação entre as ciências exatas e as ciências humanas (SNOW afirmou que esta ruptura era o maior obstáculo para resolver os problemas do mundo), em que as ciências exatas são vistas como o terreno da objetividade, em contraposição às ciências humanas, da subjetividade. Mas buscou-se em Bolzano algo mais, que talvez ele não pudesse ter oferecido. E isso se deve a que há uma certa ambigüidade no legado de Bolzano. Ambigüidade que tem uma conexão íntima com o paradoxo não anunciado da Reforma da Matemática Moderna.

Acreditamos que a compreensão da obra de Bolzano pode contribuir para a compreensão do problema maior da ruptura entre estas duas culturas; no entanto, é necessário analisar com cuidado seu legado. O estudo de sua obra e do período histórico em que ocorreu a aritmetização da análise pode trazer importantes elementos para a formulação dos conceitos e definições da educação matemática. Não porque se tenha a esperança, como Mancosu (1999), de resgatar a noção de Bolzano de explicação como uma noção viável de ser aceita por matemáticos da atualidade e assim superar o difícil quadro da filosofia da ciência mostrado por Newton e Smith (2000) de fornecer uma noção de explicação. Mas por compreender que a obra de Bolzano traz elementos fundamentais para os debates atuais sobre prova e explicação, intuição e conceito, concretude e abstração.

Mas, afinal, quem foi Bolzano, tão conhecido nos cursos de Cálculo pelo "Teorema de Bolzano" e "Teorema de Bolzano-Weierestrass", mas sobre o qual não se sabe que vários outros resultados famosos são de sua autoria, e menos ainda se conhece sua obra filosófica e teológica?

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano foi uma das poucas pessoas que, no início do século XIX, conhecia profundamente os conteúdos da matemáticos, da pedagógicos e filosóficos de sua época. Por isso, conseguiu fazer uma série de relações entre as diferentes áreas que seus contemporâneos não se estavam aptos Todas essas relações contribuíram muito para a riqueza de sua obra, e é visível que seu importante legado matemático era ao mesmo tempo um trabalho filosófico e de busca por justiça.

Foi o primeiro filósofo moderno a propor uma abordagem semântica da filosofia e influenciou muito filósofos de diferentes áreas, como Husserl (1859-1938), Peirce (1839-1914), Wittgenstein (1889-1951), dentre outros.

Sua obra é imensa, e existe hoje uma equipe de professores que está republicando todas suas obras, numa edição chamada de *Bernard-Bolzano-Gesamtausgabe (BGA)*, publicada por Friedrich Frommann Verlag–Günther Holzboog, de Stuttgart-Bad Cannstatt.

Bolzano nasceu em 5 de outubro de 1781 em Praga, na Bohemia (que atualmente é parte da República Tcheca), durante o Império Austríaco. Faleceu em 1848.

Foi filho de família muito católica, o que influenciou profundamente sua obra, suas concepções filosóficas e seu código moral. Estudou filosofia e matemática na Faculdade de Filosofia da Universidade Carl-Ferdinand de Praga, e após terminar seus estudos em 1804, tornou-se padre; neste mesmo ano, obteve o título de professor de ciências da religião católica na Universidade de Praga. No mesmo ano, sob a acusação de 'kantiano', foi informado de que perderia seu emprego após o término do ano letivo, mas se justificou sem maiores dificuldades e se tornou efetivo em 1806.

Em 1811, obteve o direito de professar suas próprias doutrinas, mas em 1819 foi demitido por expressar seu nacionalismo tcheco abertamente e proibido de trabalhar em todo o território austríaco. Ao fim da década de 30 do século XIX essa proibição atingiu também suas publicações científicas (LAPOINTE, 2003).

Com a perda da carreira de professor, Bolzano passou a ser sustentado por amigos e ex alunos. Foi no mesmo ano de sua aposentadoria forçada (1919) que Bolzano começaria a escrever sua mais importante obra filosófica, "Doutrina da Ciência" (Wissenschaftslehre), que seria terminada e publicada somente em 1837. Esta monumental obra, com suas mais de 5.000 páginas, tem uma importância maior na obra de Bolzano, pois é nela que ele propõe toda uma reformulação da noção de ciência e justifica filosoficamente sua proposta de fundamentação da matemática.

Deu importantes contribuições para a matemática, revolucionando a concepção de infinito e infinitesimal com base em estudo rigoroso desses assuntos em *Paradoxos do Infinito* (1847), que lançou as bases para a construção da teoria dos conjuntos por Cantor. Sua mais célebre obra matemática, no entanto, foi o *Prova puramente analítica...*, que pode ser considerado um marco da aritmetização da análise; Bolzano foi chamado por Félix

Klein, pelos princípios formulados nesse artigo, de “o pai da aritmetização da análise”. Os mais importantes resultados dessa obra estão contidos na grande maioria dos livros elementares de análise matemática, particularmente os teoremas que ficaram conhecidos como *Teorema de Bolzano*, o *Critério de Convergência de Cauchy* e o Teorema do Valor Intermediário (nos abstemos nesse trabalho de nos pronunciar sobre a polêmica a respeito de se Cauchy teria publicado em seu nome resultados matemáticos que ele conhecera por intermédio da obra de Bolzano em periódicos desconhecidos, sem os devidos créditos; para quem se interessar, ver SEBESTIK, 1992, H. FREUDENTHAL, 1971); também está contida nessa obra o Teorema chamado por Sebestik de *Teorema de Bolzano-Gauss* (que conhecemos atualmente como o teorema do limite superior), e que deu origem ao conhecido *Teorema de Bolzano-Weierstrass* (SEBESTIK, 1992; RUSS, 1980).

Seu trabalho permaneceu muito pouco divulgado, em parte pela repressão austríaca decorrente do grande conservadorismo que predominava no país, em parte pelo fato de que suas doutrinas não eram bem aceitas num contexto institucional e intelectual dominado, na Alemanha, pelo idealismo de Fichte (1762-1814) e Hegel (1770-1831) e pelas interpretações psicológicas das doutrinas kantianas3. Além disso, seus discípulos não deram continuidade a sua obra. e é possível dizer que viveu em um quase anonimato até o fim do século XIX, até que fosse redescoberto por Hermann Hankel (1839-1873) e por Otto Stolz (1842-1905). Esse último republicou em 1881 vários de seus artigos.

Bolzano se dedicou a ajudar a empreender a ampla e rica reforma da representação, organização e descoberta do conhecimento, típica de sua época e que aflorava com especial força na região da Tchecoslováquia. Embora tenha sido proibido de lecionar, era considerado um bom educador e reformador cuidadoso e persistente1, que se guiava, nos aspectos desta reforma do conhecimento – como em todos os aspectos de sua vida – pela “mais alta lei moral”, que consistia em “sempre estar num caminho que promoverá o bem comum” (BOLZANO, 1981). O bem estar e o progresso da humanidade, vistos num sentido amplo, eram seu objetivo maior de vida. A noção da matemática de Bolzano está umbilicalmente ligada à busca de uma reforma do conhecimento, a problemas de ensino, e por isso a aspectos de comunicação e linguagem.

[3] É importante deixar claro que a referência aqui feita é a interpretações psicológicas; não se afirma que a doutrina kantiana seja psicológica.

Então, é no contexto da busca por justiça e pela reforma e expansão do conhecimento que Bolzano via sua teologia e sua matemática, assuntos que ele não encarava como separados em compartimentos estanques, mas como ligados de forma estreita. Sendo professor de religião Bolzano escreveu o *Prova Puramente Analítica...* em 1817 e o "Sobre a relação entre as duas raças na Boêmia" em 1816 (ver Bolzano, 1989), que trata do nacionalismo tcheco.

É neste contexto que deve ser compreendida a busca de Bolzano por provas puramente analíticas, que pudessem ser aceitas por qualquer pessoa, independentemente de sua capacidade ou percepção subjetivas, bem como a eliminação de fatores subjetivos como espaço e tempo da análise matemática, por meio da aritmetização (ou algebrização), e sabemos que o distanciamento da matemática formal da intuição e da concretude é visto como algo que dificulta a aprendizagem.

Já afirmamos que Bolzano criticava as tentativas de fundamentar a matemática na intuição. Mas, qual era a situação da matemática e de seus fundamentos, nos tempos de Bolzano?

A utilização indiscriminada das noções de espaço e tempo na análise matemática, e a falta de fundamentação em geral, estava levando a resultados contraditórios de matemáticos do calibre de Euler (RUSNOCK, 1997).

Pascal (1623-1662) afirmou que as demonstrações e explicações matemáticas deveriam ser feitas mostrando como proposições complexas e conceituais derivavam de proposições simples e visualizáveis. Leibniz (1646-1716) criticou a concepção de Pascal ao afirmar que o que ele considerava 'simples' poderia ainda ser dividido em partes e ser demonstrado em termos de outros conceitos, mas não rompeu completamente com a idéia de demonstrar tendo como referência a intuição.

Na época de Bolzano, Kant (1724-1804) era um dos pensadores mais em voga . Ele buscou certeza intuitiva e considerou como conhecimento verdadeiro apenas o que pudesse ser percebido como correto pelo sujeito cognoscente. Para Kant, os conceitos matemáticos seriam provenientes da intuição, e os matemáticos deveriam decidir os fundamentos da matemática de maneira *a priori*, ou seja: eles não seriam, nem decididos a partir de seu uso (a posteriori), nem definidos de forma analítica (conceitualmente): a matemática seria, deste ponto de vista, o exemplo de um tipo de conhecimento chamado ‘sintético *a priori*’, expressão criada por Kant e que viria revolucionar a filosofia.

A posição expressa por Kant correspondia no plano da matemática, a manter os fundamentos tais como estavam formulados por Pascal e Leibniz e em nada avançar nas questões fundamentais que eram necessárias para o desenvolvimento do cálculo, particularmente sobre as noções de infinito e infinitesimal.

Bolzano, diferente dos seus predecessores que tentaram fundamentar a matemática, não se preocupava com epistemologia – ou seja, com a busca de certeza subjetiva, visualizável e com o modo sobre como nós temos acesso ao conhecimento.Bolzano criticou Kant e avaliou que, para fundamentar de forma adquada a ciência e a matemática, era preferível e necessário abrir mão da certeza intuitiva e visualizável para buscar verdade comunicável e objetiva.

Bolzano aceitava que num primeiro momento se tenham concentrado esforços para alargar a matemática ao invés de se preocupar com seus fundamentos; mas compreendia que, uma vez amadurecida, requeria-se, para a continuidade do progresso da matemática, a análise filosófica de seus conceitos fundamentais. O fato de que os matemáticos dos séculos XVII e XVIII tenham acumulado muito conhecimento, foi uma base importante para os matemáticos dos séculos posteriores. Pois, muito do progresso feito no século XIX, e mesmo no início do século XX com os trabalhos de Richard Dedekind (1831-1916), foi realizado apenas por meio da explicitação e representação daquilo que já se conhecia intuitivamente, causando uma generalização impensável no período ‘intuitivo’.

O debate sobre intuição e conceito, bem como a crítica ao excesso de formalização na matemática, não pode ser visto como algo emergente com os softwares educacionais no século XX, como Hanna (1983) parece acreditar. mas algo existente há muitos anos, e que Kant colocou de forma bem clara. E o rigor tampouco foi introduzido sem motivos ou por mera questão de gosto, mas sim como uma necessidade para a resolução dos problemas de fundamentos, que levavam a resultados contraditórios e pouco férteis e práticos. Neste sentido, o debate de Bolzano com as concepções de Kant, que acreditava que a matemática se fundamentava na intuição; com as concepções de Euclides, que utilizava demonstrações por construção por régua e compasso; e com as de Aristóteles, que acreditava numa noção de explicação que se baseasse na noção de causa e efeito, podem contribuir em muito para a compreensão do que está em jogo no debate atual sobre provas e explicações.

Vamos refletir sobre o processo de definição da continuidade de uma função. Esta reflexão pode trazer importantes elementos para compreendermos o processo de construção e formalização da matemática, e assim jogar luz na discussão sobre o papel da intuição e da explicação na matemática.

Bolzano foi o primeiro a indicar claramente que a idéia básica da continuidade deveria ser encontrada no conceito de limite, de forma a articular o método discreto (numérico) com o contínuo (geométrico), num processo em que o discreto 'explica' o contínuo[4].

Como podemos analisar o debate sobre provas e explicações no processo de definição de continuidade? Bolzano pretendia criar uma definição de função contínua que permitisse derivar dela todas as propriedades 'conhecidas', ou aceitas 'intuitivamente' pela comunidade matemática como sendo próprias destas funções: elas não deveriam ter saltos, furos, etc. Mas, uma função assim definida aparentemente deverá ser derivável em todo seu domínio, exceto num conjunto isolado de pontos. Foi isso que vários matemáticos assumiram, inclusive Bolzano, em suas primeiras obras. É algo aparentemente óbvio, e sua negação vai contra nossa intuição física e geométrica.

No entanto, a definição de continuidade de Bolzano foi a mesma que permitiu construir uma função que fosse contínua em todos os pontos, mas não derivável em nenhum, por meio de um raciocínio que envolvia subdivisões infinitas de intervalos, até infinitésimos[5].

Ou seja: a definição conceitual de continuidade, criada para abranger as principais características que a comunidade matemática acreditava que correspondiam à idéia intuitiva, foi a mesma que permitiu a criação de tal função, que contraria nossa idéia intuitiva de continuidade.

---

4 Bolzano afirma que "De acordo com uma definição correta, a expressão de que uma função fx varia de acordo com a lei da continuidade para todos os valores de x dentre ou fora de determinados limites significa apenas isso: se x é um tal valor, a diferença f(x+w) – fx pode se tornar menor do que qualquer quantidade dada, pressupondo apenas que w pode ser tomado tão pequeno quanto se queira". Como se vê, tal definição é muito semelhante à utilizada nos dias de hoje, que envolve épsilons e deltas

5 No entanto, esse trabalho ficou desconhecido, e tal exemplo seria mostrado por Weierstrass (1815-1897) entre 30 e 40 anos depois.

Agora, o paradoxo do legado de Bolzano consiste em que, de um lado ele pretendia fundamentos objetivos e, por outro, a fundamentação que ele pretendeu fazer deixou em aberto a possibilidade de haver diferentes formas de representar um conceito. Pois, conceituar na linguagem coloca diretamente a questão: como fazê-lo? É natural que se procure conceituar da forma mais conveniente possível para o uso que fazermos do conceito, e, portanto existe uma certa liberdade na escolha dos primeiros princípios, quando eles residem na linguagem, Por exemplo, alguém poderia querer uma nova definição de continuidade que evitasse o choque à nossa intuição representado por este exemplo; e se tal definição se mostrasse mais útil do que a de Bolzano, a anterior poderia ser abandonada.

Então, algo que o próprio Bolzano notou, embora não tenha extraído daí as conseqüências que Peano, Dedekind e outros tirariam alguns anos mais tarde, é que um dos efeitos do trabalho fundacional é nos confrontar com novos teoremas que previamente não eram alcançáveis, algo que pode nos posicionar de maneira a colocar questões de forma diferente (ver RUSNOCK, 1997).

Pois, sempre que haja algo que contrarie, ou a intuição, ou outra teoria cuja coerência interna seja conhecida e aceita (tal como a geometria euclidiana, por exemplo) está-se apto a perguntar se é possível ou se vale a pena tentar definir o conceito de forma diferente, para, por exemplo, obter uma classe mais ampla de funções contínuas, melhores propriedades de derivação, etc. Este processo de fundamentação na linguagem não fornece, portanto, os fundamentos objetivos no sentido que Bolzano procurava.

A objetividade buscada por Bolzano levou a seu erro com relação aos fundamentos dos números reais e sua incompreensão do fato de que a matemática não contém afirmações categóricas, mas sim hipotético-dedutivas (OTTE, 2006, p. 32).

Poderia alguém afirmar, a esta altura, que se não tivesse havido formalização, poderíamos nos manter fiéis à nossa idéia intuitiva de função contínua, sem ter que aceitar conseqüências anti-intuitivas como a função não derivável em nenhum ponto? E que de quebra poder-se-ia evitar todos os problemas atuais com a linguagem matemática que os estudantes têm, nas escolas e nas Universidades?

Creio que muitos poucos estariam dispostos a afirmar isso, e menos ainda a levar esta concepção até suas últimas conseqüências. Afinal, todos os resultados do cálculo – limites, derivadas, integrais – se fundamentam na definição rigorosa de continuidade, e além disso, sequer o Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga – que colocou em xeque a concepção pitagórica de matemática, bem como a própria escola pitagórica – poderia ser resolvido sem esta formalização. Além disso, e não menos importante, é o fato de que todos os problemas que envolvem o estudo das transformações e do movimento, típico do século XIX, e todas suas aplicações na ciências (física, química, biologia, economia, engenharias), e nas e tecnologias em geral, envolvem a noção de continuidade rigorosa.

Assim, pouca gente parece estar disposta a criticar a *existência* de um rigor abstrato na matemática. No entanto, muitos parecem insatisfeitos com o raciocínio envolvido na matemática, bem como com sua linguagem formal e abstrata; alguns parecem dispostos a criticar este rigor na educação, e apresentam o concreto em oposição ao abstrato, ao invés de encararem o concreto e o abstrato – ou o numérico e o geométrico, a quantidade e a qualidade – como complementares, como uma análise histórica mostra que seria mais apropriado (ver OTTE 1990 e 2003, ARRUDA 2007).

Então, mesmo que Bolzano pretendesse fundamentação definitiva por meio da eliminação da intuição, o que de fato ocorreu foi que a partir do momento histórico em que os conceitos enunciados por Bolzano de um ideal analítico do conhecimento matemático passaram a ser aceitos pela comunidade matemática, a matemática e os matemáticos passaram a se colocar, em primeiro lugar, não a questão da natureza íntima da verdade ou da correspondência da teoria com a realidade. Ao contrário, antes da construção das relações matemáticas, passaram se perguntar quando uma relação (matemática) é possível. Assim, como confirma Otte (2006, p. 29),

> matemática (...) tornou-se metamatemática ou a análise dos significados dos conceitos e proposições matemáticos. A matemática não conteria, por esta maneira de encará-la, explicações, mas afirmações apodíticas, exemplos de “conhecer isso” ao invés de “conhecer por quê” (.).

Voltando à questão do papel da intuição. O Teorema de Bolzano, redigido em 1817, apresentado como a “Prova puramente analítica do teorema que afirma que entre dois valores de sinais opostos existe pelo menos uma raiz real da equação”, conforme o título do artigo de Bolzano, é um excelento exemplo para refletirmos sobre a mudança de ênfase nos fundamentos da matemática aritmetizada, base para compreendermos a relação da matemática atual com a intuição. O teorema, como aparece nos livros de Cálculo e Análise atuais, afirma que, dada uma função *f(x)* contínua em um intervalo [*a*,*b*], tal que, *f(a).f(b)*<0, esta função *f(x)* possui pelo menos uma raiz no intervalo [*a*,*b*]. Bolzano o demonstrou apenas para polinômios, e não usava a terminologia *f(a).f(b)*<0 para denotar que os valores de *f(a) e de f(b)* têm sinais opostos. Em outras palavras: dada uma função contínua que assume valores positivos e negativos, em algum ponto ela deverá necessariamente assumir o valor zero.

O Teorema de Bolzano já era utilizado desde a Antigüidade. Alguns matemáticos contemporâneos de Bolzano e anteriores haviam tentado justificar ou mesmo demonstrar esse resultado, mas nenhum deixou de utilizar noções como espaço, tempo ou geometria6. O artigo foi um marco na aritmetização da análise, não apenas porque contém a definição de continuidade, mas também porque na demonstração do resultado, até então tido pela maioria dos matemáticos como óbvio, Bolzano desenvolveu os principais fundamentos da moderna análise matemática, a análise aritmetizada, mesmo sem contrariar a idéia intuitiva da validade do teorema.

Num contexto em que demonstrar era reduzir ao intuitivamente óbvio, é compreensível que ninguém pretendesse demonstrar o Teorema do Bolzano, em razão de sua obviedade intuitiva. Mas essa intuição geométrica não faz parte da matemática pura como ela é entendida nos dias atuais, e como já a entendia Bolzano, por isso Bolzano pretendeu fundamentar algo tão óbvio em conceitos tão complexos.

No prefácio de seu artigo, Bolzano analisa algumas das tentativas de demonstração feitas por outros matemáticos, e critica particularmente a utilização de elementos exteriores à matemática pura, como a tríade espaço-tempo-geometria já referida. Bolzano inicia fazendo um pequeno tratado de séries, preparando o anúncio do que ficou conhecido como o "critério de convergência de Cauchy". Depois, enuncia o Teorema chamado por SEBESTIK (1992) de Bolzano-Gauss, semelhante ao que hoje conhecemos como "Teorema de Bolzano-Weierstrass"; e, por fim, por meio dele e utilizando as noções enunciadas sobre séries convergentes, Bolzano constrói uma sequencia semelhante à utilizada nos livros atuais e chamada de método da disseção, e assim demonstra então nosso

---

[6] Bolzano cita: "Kästner, Clairaut, Lacroix, Metternich, Klügel, Lagrange, Rösling, e vários outros" (p. 159-160)

atual “Teorema de Bolzano”, que ele chama de “teorema que afirma que entre dois valores de sinais opostos existe pelo menos uma raiz real da equação” (do título). Assim, muito mais do que demonstrar algo conhecido há muitos séculos, Bolzano cria uma revolução nos fundamentos.

Ao contrário do que afirmam alguns autores (BROWN, 1997, dentre outros), Bolzano pretendia demonstrar o Teorema do Valor Intermediário, não por acreditar que ele não fosse um resultado óbvio, ou que sua obviedade não implicasse sua veracidade. Ele afirma claramente que

> certamente, não há nenhum questionamento referente à *correção*, nem certamente à *obviedade*, desta proposição geométrica. Mas é claro que é uma ofensa intolerável contra o método correto derivar verdades da matemática pura (ou geral) (i.e., aritmética, álgebra, análise) de considerações que valem para uma parte meramente aplicada, particularmente, a geometria[7]. (RB, p. 170, itálicos do autor)

E aqui reside a importância da aritmetização: o método de fundamentar o concreto por meio do abstrato não nega a intuição, nem foi criado por pessoas que acreditavam que a intuição não fosse confiável; mas, sim, devido à compreensão de que a intuição diz respeito a uma subjetividade que não pode servir de fundamento, por se referir ao concreto e ao particular e, por isso, ser incapaz de servir para provar o abstrato. Esta tendência se acentuaria com a criação da axiomática moderna: usam-se os axiomas de Peano para provar que 2 + 2 = 4, embora os axiomas de Peano sejam abstratos e 2 + 2 = 4 seja visualizável, concreto, etc.[8]” (uma discussão mais aprofundada sobre isso é feita em OTTE, 1997).

Alguns alegam que o retorno à intuição seria a solução pelo menos para o ensino da matemática. A Reforma da Matemática Moderna, porém, trouxe uma importante lição também a este respeito. Dentre os elaboradores desta reforma houve, como G. Papy, (1968), quem encarasse a abordagem da teoria dos conjuntos como a forma de retomar a

---

7 There is certainly no question concerning the *correctness*, nor indeed the *obviousness*, of this geometrical proposition. But it is clear that it is an intolerable offense against *correct method* to derive truths of *pure* (or general) mathematics (i.e., arithmetic, algebra, analysis) from considerations which belong to a merely *applied* (or special) part, namely, *geometry*.

8 Os axiomas são: “1) 0 um número; 2) O sucessor de qualquer número é um número; 3) Não há dois números com um mesmo sucessor; 4) 0 não é o sucessor de número algum; 5) Qualquer propriedade que pertença a 0, e também ao sucessor de todo número que tenha essa propriedade, pertence a todos os números”

ligação entre intuição e conceito, noção que prevaleceu na geometria euclidiana. O resultado foi que se criou uma dependência dos alunos em relação aos conjuntos, e de repente se percebeu que as crianças não sabiam somar, multiplicar, subtrair e dividir, enquanto se ocupavam com complexas operações entre os conjuntos.

Assim, vincular o conhecimento matemático à intuição leva muitas vezes a aumentar a dificuldade dos alunos em compreender a matemática em termos de leis e de generalização, pois, na percepção, há muitos aspectos irrelevantes que se transformam em distrações e obstáculos para generalizar. O pensamento intuitivo é aberto à complexidade de uma situação particular, da qual decorre seu lado forte e também suas limitações.

Além disso, não é possível transmitir a intuição de uma pessoa para outra. O máximo que se pode fazer é apontar e dizer: "Olhe". Mas como a existência de objetos matemáticos é uma questão muito complexa, deduz-se que apontar e falar não ajuda muito o ensino da matemática.

Aliás, mostrar exemplos e não conceitualizar ou abstrair as propriedades gerais expressas no caso concreto do exemplo dado, leva ao vício do exemplo, pois o professor que trabalha com exemplos sem buscar a generalização faz com que o aluno, ao se deparar com um outro caso semelhante, tenda a repetir mecanicamente, e portanto os resultados obtidos por este professor não se diferenciarão daqueles obtidos pelo professor que simplesmente dá uma fórmula e pede que seus alunos apliquem sem compreender os conceitos envolvidos.

Conclui-se, portanto, que a relação da matemática com o senso comum é bastante complicada e tem implicações nas questões epistemológicas e de ensino: se de um lado o nosso acesso ao contínuo se dá por meio da nossa sensibilidade e percepção (que é relacional e relativa, pois os cinco sentidos trabalham em termos de relações), por outro, foi a conceitualização desse contínuo em termos do discreto que possibilitou o pensamento relacional característico da matemática moderna, e as capacidades da ciência moderna e das tecnologias, de medir, prever dados e manipular.

Poderíamos nos perguntar se os fundamentos da análise poderiam ser, ao invés da aritmética, a noção intuitiva da continuidade, ou se a aritmética poderia se basear na noção intuitiva de que $2 + 2 = 4$. No entanto, manter os princípios da análise baseados na geometria corresponderia a não resolver os problemas essenciais colocados pelo Cálculo de sua época. Concluímos que os fundamentos são escolhidos de forma que permitam generalizar, e que "principalmente as razões pragmáticas... são responsáveis pela escolha de axiomas, razões que são relacionadas com o desenvolvimento do conhecimento matemático e a construção de teorias" (OTTE, 2006, p. 30). Assim, cabe falar em busca de causas e 'por quês' na matemática moderna? Onde se encontram os fundamentos de uma ciência que utiliza o abstrato para provar o concreto? Sobre isso, acreditamos que não cabem 'por quês' na matemática moderna; não os 'por quês' de Aristóteles ou de Bolzano, e que talvez os fundamentos da matemática se encontrem nas suas aplicações, no uso das proposições matemáticas, que muitas vezes sequer podem ser encontradas no momento em que se cria o conceito; desse ponto de vista, para 'explicar' algo devemos exigir de uma prova matemática que seja generalizadora e possível de ser aplicada (ver OTTE, 1997 e 2006).

A forma de raciocínio que envolve a tendência de explicar fatos particulares em termos de leis gerais é muito importante para a matemática moderna, porque possibilita a unificação entre as diferentes áreas da matemática e da ciência. O rigor na matemática moderna não se deve a que as provas infalíveis sejam essenciais, mas a que produzem resultados práticos e necessários para a ciência, a tecnologia e para a vida das pessoas. A intuição geométrica não pode cumprir o papel fundamental porque é relativa a objetos particulares e, por ser sempre relativa a um objeto, a intuição não tem como se referir a universos, portanto não é possível, por estar o objeto preso à intuição, haver generalizações e abstrações partindo da intuição.

Voltando à noção de explicação, se de fato se leva em conta a história da matemática, não se pode aceitar definições simplistas que pretendam reduzir as demonstrações e toda a matemática à intuição, já que, como visto, se de um lado a noção de intuição nunca foi abandonada, por outro, ela não pode substituir a necessidade de conceitos e da formalização de teorias.

Assim, a Reforma da Matemática Moderna não foi a criação de uma nova matemática, nem uma transposição artificial de conceitos que não fazem parte da matemática atual.

Acreditamos que a vinculação da matemática à intuição ou à aplicação à realidade não são nem podem ser uma camisa-de-força;,quando se fala em intuição matemática deve-se levar em consideração a idéia de símbolos, que são a mediação entre a intuição, o concreto e a criatividade, de um lado; e a abstração, do outro. A criatividade na matemática não pode ser desvinculada da linguagem em que esta criatividade se expressa. Assim, uma prova pode ser intuitiva por lidar com conceitos familiares aos símbolos e abstrações matemáticas, mesmo que não diga respeito diretamente a capacidades da percepção sensível.

No entanto, a maior parte dos matemáticos – e o Programa formalista de Hilbert expressava esta tendência – aderiram a uma espécie de "fetiche da forma[9]", e ver a matemática como um jogo de xadrez em que qualquer aplicação é vista como algo extramatemático e que a matemática não seria mais do que uma linguagem sem significado algum, não resolve nenhum problema. Tampouco se pode acreditar que as premissas matemáticas sejam escolhidas aleatoriamente. Este ponto de vista, Além de não explicar a importância e o papel da matemática para as ciências e tecnologias, nos faz colocar imediatamente a questão: para que ter a matemática como ensino obrigatório, como acontece no mundo todo; por quê todos deveriam ser obrigados a jogar xadrez, se hoje existem computadores que jogam melhor do que qualquer ser humano? (ver OTTE, 2007b). Afinal, buscou-se, durante toda a história da matemática, que a matemática fosse fiel à intuição até que essa fidelidade resultou em contradições com outras verdades aceitas.

Assim, as premissas dos argumentos matemáticos devem ser apresentadas não de forma arbitrária, mas de forma que sejam "intuitivamente aceitáveis e claras e, ao mesmo tempo, metodologicamente produtivas" (OTTE, 2006, p. 31).

Quando não estamos lidando com infinitos, infinitésimos, e dimensões maiores do que 3, freqüentemente nossa intuição é plenamente confirmada. Além disso, como já afirmamos, a matemática não tem significados definitivos, e seus símbolos e significados são processos, não cabendo portanto um questionamento causal das demonstrações matemáticas, pois a justificativa das mesmas muitas vezes se encontra em possíveis novas aplicações ou generalizações, e as premissas são escolhidas de forma que confirme até onde for possível nossa intuição e sirva como instrumento para novas descobertas.

Por fim, algumas questões que gostaríamos de deixar em aberto, e que nos parecem importantes como objeto de análise e estudos posteriores: como analisar o legado de Kant

9 Kolman dirá que o fetiche da quantidade é característico da burguesia

para a filosofia em geral, e para as ciências exatas em particular? Afirmamos que muitas das afirmações que Kant fez sobre a matemática não ajudavam a resolver as crises de fundamento que ela enfrentava. Como é possível que Kant seja tão aceito e tenha tanta influência sobre a filosofia posterior a ele, e seja tão criticado na matemática e na filosofia analítica?

E o legado de Bolzano? Como compreender que ele ajudasse a esclarecer tanto os fundamentos da matemática, e tenha contribuído tanto para a fundamentação da mesma, apesar de acreditar em noções tão pouco aceitas contemporaneamente, tanto na matemática quanto na filosofia, como a de “verdades em si”, “proposições em si”, “idéias em si”?

Por fim, acredito que esta dissertação possibilita apontar para duas perspectivas diferentes e complementares para estudos posteriores: de um lado, o início do estudo no Brasil das obras de Bolzano, bem como da tradução de sua obra para o português; e a continuidade da reflexão com base em estudos históricos e filosóficos sobre a relação entre intuição e conceito, e assim ajudar numa questão muito importante para a Educação Matemática: compreender a complexa relação entre ciências humanas e ciências exatas.

Referências bibliográficas:

ARISTÓTELES. *Segundos analíticos.* Campinas: Unicamp/Departamento de Filosofia (IFCH). Tradução de Lucas Angioni, 2004, livro 1.

______. *Ultimos analíticos.* Madrid: Nueva Biblioteca Filosófica, 1931, libro 1.

ARRUDA, E. J. O Número De Euler e. 2007. Dissertação (mestrado) – Faculdade de Educação da Universidade Federal do Mato Grosso.

BOLZANO, B.. *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.* Tradução inglesa por S. Russ, *Historia Mathematica*, *Historia Mathematica*, n. 7, p. 156-185, 1980.

BOLZANO, B. Über das Verhältnis der beiden Volksstämme in Böhmen inauthor:bolzano. In: Bernard-Bolzano-Gesamtausgabe : (Reihe 2 : Nachlass - B. Wissenschaftliche Tagebücher. Bd. 10, Teil 1, Miscellanea mathematica 17)

BOLZANO, B. *Bernard Bolzano-Gesamtausgabe* . Reihe 1. Schriften. Band 18. Mathematisch-physikalische und phylosophische Schriften, Winter E., Berg, J., Kambartel, F.... [et al.]]; Stuttgart : F. Frommann, 1989.

______. *Wissenschaftslehre*, 4 vol. (Sulzbach). Sulzbach: Wolfgan Schultz. Reprint Scientia Verlag Aalen, 1981.

______. *Theory of science*. TERRELL, B. Boston and Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

BUTCHART, S.J. *Evidence and explanation in mathematics*. 2001. Tese (Doutorado) – Departamento de Filosofia da Monash University, Ottawa.

FREUDENTHAL, H. *Did Cauchy plagiarize Bolzano?* In: aRCHIVE FOR hISTORY OF eXACT sCIENCES. Vol. 7, n. 4. Heidelberg: Springer Berlin, 1971.

HANNA, G. *Rigorous Proof in Mathematics Education*. Toronto: OISE Press, 1983.

HEIJENOORT, J. V. *From Frege to Gödel*: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931. Harvard: Harvard University Press, 1967.

KITCHER, P. (1975). Bolzano’s ideal of algebraic analysis. *Studies in the History and Philosophy of Science*, v. 6, n. , p. 229-267, 1975.

KLEIN, F. (1887). The arithmetizing of mathematics. 965-71. *In*: EWALD, W. B. *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 1996, v. 1.

LAKATOS, I. (1970). Falsification and the methodology of science, research programmes. In LAKATOS/MUSGRAVE (Eds.) *Criticism and the Growth of Knowledge* (pp. 91-196). Cambridge UP.

MANCOSU, P. Bolzano and Cournot on mathematical explanation. In: *Revue d’Histoire des Sciences*, n. 52, p. 429-455, 1999.

OTTE, M. 'Arithmetic and geometry: Some remarks on the concept of complementarity', *Studies in Philosophy and Education* 10, 37-62, 1990.

________. *Complementarity*, Sets and Numbers, Educational Studies in Mathematics, *53*, 203-228, 2003.

______. Dificuldades de aprendizagem resultantes da natureza da Matemática Moderna: o problema da explicação. In: Revista de Educação Pública, Cuiabá, v. 16, n. 32, p. 51-72, set.-dez. 2007b.

______. Mathematical History, Philosophy and Education. In: *Studies in Mathematics*. Editora Springer Netherlands: n. 2, p. 243-255, 2007.

OTTE, M. & PANZA, O. *Analysis and Sythesis in Mathematics*. Kluver Dordrecht. BSPS Vol. 196, 1997.

RUSNOCK, P: Bolzano and the traditions of analysis. In: KÜNNE, W.; SIEBEL, M.; TEXTOR, M. Grazer Philosophische Studien. Internationale Zeitschrift für Analytische Philosophie. n. 53, p. 61-85, 1997.

RUSS, S. *The mathematical works of Bernard Bolzano.* Oxford: Oxford University Press, 2004.

SEBESTIK, J. *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano*. Paris: Librarie Philosophique J. Vrion, 1992.

SNOW, C.P. (1993). *The Two Cultures*. Harvard UP, Cambridge/USA.

STEINER, M. Mathematical explanation, *Philosophical Studies*, D. Reidel Publishing Company, n. 34, p. 135-151, 1978.

THOM, R. (1973). *Modern Mathematics*: Does it Exist? In: A.G. Howson(ed.), *Developments in Mathematical Education*, Cambridge UP, 194-212.