SOBRE A INTERFACE ENTRE CONCEITO E INTUIÇÃO NA NOÇÃO DE EXPLICAÇÃO MATEMÁTICA

Humberto de Assis Clímaco
E-mail: haclimaco@yahoo.com
Universidade Federal do Mato Grosso

Dentre os diversos temas que ocuparam a Educação Matemática e a Filosofia da Matemática, existe um que nas últimas décadas parece ter se destacado dentre os demais como comum às duas áreas do conhecimento, e também como um objeto privilegiado de análise devido à amplitude do tema e fertilidade de possíveis caminhos e reflexões. É o problema da explicação.

Particularmente, este assunto ganhou grande importância na Educação Matemática a partir da constatação de que a concepção formalista tradicional, que identifica explicação/demonstração com dedução lógica trouxe muitos problemas para a matemática na sala-de-aula, na medida em que esta concepção desvincula a matemática de qualquer forma de aplicação, significado ou tentativa de adaptar o conteúdo a ser ministrado aos estudantes.

A esta noção de que a concepção formalista não basta para que a Educação Matemática seja satisfatória, que parece consensual, surgem no entanto diferentes respostas. Na Educação Matemática, muitos autores têm colocado o problema em termos psicológicos, e isso pareceu ganhar força com a emergência dos softwares geométricos, no sentido de que pareceu possível dar um novo lugar à intuição. É o que vemos no artigo de HANNA, que comentaremos mais adiante.

Na Filosofia da Matemática, este tema está em foco por motivos que dizem respeito a uma importante mudança que vem ocorrendo nesta área no sentido de buscar uma abordagem descritiva da matemática, e não normativa. A concepção normativa é aquela que se identifica com as diferentes linhas fundamentistas, que pretendiam estabelecer normas que justificassem, fundamentassem e tornassem legítima a matemática já existente. O paradoxo de Russel, mas, mais fortemente, os resultados dos teoremas de Gödel que mostram que a demonstração da consistência de um sistema T só pode ser feita num sistema T' mais complexo do que T e portanto com menos confiança que T (ou seja, a demonstração da consistência de T estaria errada se T não fosse consistente) criou uma situação em que a Filsosofia da Matemática – salvo raras exceções – abdicou da idéia fundamentista de que a matemática precisa ser justificada, e que portanto o papel da filosofia seria promover fundamentos para ela e ditar o que pode ou não ser aceito, passando para uma fase em que a filosofia ajuda a fornecer à matemática elementos de descrição de sua prática, de critérios que fundamentam determinadas crenças, e a contribuir para melhorar esta prática. É a chamada concepção descritiva.

Este também é um assunto privilegiado porque é uma preocupação real dos matemáticos 'práticos' (ou seja, nem Filósofos nem Educadores) de diferentes concepções, pois parece ser um consenso que, se por um lado, toda dedução é válida e aceita, por outro, os matemáticos esperam um tipo de explicação que os permita compreender de que forma o novo teorema conhecido se encaixa no conhecimento que ele já tinha, de que forma se aplica e, em alguns casos, como o resultado foi descoberto.

Em 1978, na revista *Philosofical Studies,* Steiner abriu o debate internacionalmente dizendo que a questão da explicação tinha sido deixada de lado na matemática, e propondo que a tal noção passasse a ser considerada da mesma forma como ele considera que ela o é nas ciências naturais, ou seja, como relação de causa e efeito.

Na Educação matemática, Em 1983, HANNA escreveu seu primeiro livro sobre o problema da explicação e, em 2000, escreveu "Proof, Explanation and Exploration: An Overview", em que faz um balanço dos debates dos últimos anos e destaca o quanto o interesse sobre o assunto tem crescido, inclusive dentre público que não é pesquisador.

Nestes artigos, chama a atenção a diferenciação entre "provas que provam e provas que explicam", que lembra a distinção entre *oti* e *dioti* feita por ARISTÓTELES (2004, 78a 22) numa época em que a matemática tinha um papel muito diferente do atual nas ciências, e portanto a concepção de matemática era bem diferente.

MANCOSU (1999) retoma a distinção entre provas que provam e provas que explicam, recorrendo para isso à contribuição de Bernard Bolzano, matemático, filósofo e teólogo nascido em Praga (atual República Tcheca, na época antigo Império Austríaco) que foi um dos principais iniciadores e formuladores do programa da aritmetização da análise, considerado por muitos o pai da lógica moderna e um precursor da filosofia analítica.

O fato de que STEINER e HANNA retomem a distinção aristotélica, e que MANCOSU retome BOLZANO com o intuito de defender uma noção que, como veremos, se opõe a importantes características da matemática moderna é extranho, pois parece pretender juntar movimentos históricos e concepções antagônicas.

HANNA (2000) retoma os conceitos defendidos no livro de 1983 sobre o papel das demonstrações para a compreensão da matemática. Já de início, faz uma distinção entre a demonstração na prática matemática e na sala-de-aula, dizendo que na prática matemática é secundária em importância a compreensão; mas que, na sala-de-aula, o papel da prova é promover compreensão matemática, e portanto "nosso mais importante desafio é encontrar formas mais efetivas de usar provas para este objetivo" (p. 6-7). E ainda que "uma prova, válida como ela deve ser em termos de derivação formal, se torna realmente convincente e legítima para um matemático somente quando ela lida com verdadeira compreensão matemática" (p. 7).

A autora discute a importância das demonstrações nos currículos escolares e o papel que os softwares podem ter na compreensão, por parte dos alunos, das demonstrações matemáticas e, assim, dos objetos matemáticos dos quais elas tratam. Destaca as novas abordagens que podem ser dadas a partir da utilização de softwares dinâmicos, tais como heurística, exploração e visualização.

Afirma que alguns matemáticos 'percebem' que uma prova é mais valorosa (*most valuabe*) quando ela lida com compreensão matemática, ajudando-os a pensar mais claramente e efetivamente sobre a mesma (HANNA, 2000, p. 7). E ainda que

"matemáticos claramente esperam mais de uma prova do que justificação. Isso significa que a melhor prova é aquela que também ajuda a compreender o significado do teorema que está sendo provado: a ver não somente que ele é verdadeiro, mas também por quê ele é verdadeiro. É claro que uma tal prova é mais convincente e mais apropriada para lidar com descobertas posteriores". (p. 8)

Destaca a explicação como sendo a principal função da prova matemática em sala de aula. E diz que concorda e cita, dizendo que concorda, a definição de Steiner de prova explicativa, que reproduzimos artigo de STEINER:

"Minha proposta é que chamemos de uma prova explicativa aquela que faz referência a uma propriedade característica de uma entidade ou de uma estrutura mencionada no teorema, de tal forma que da prova seja evidente que o resultado depende de tal propriedade. (sublinhado meu) Deve ser evidente (...) que se substituímos na prova um outro objeto do mesmo domínio, o teorema deixa de valer; mais ainda, nós poderemos estar aptos a ver que conforme variamos o objeto o teorema muda, em resposta. Em efeito, portanto, explicação não é simplesmente uma relação entre uma prova e um teorema; ao contrário, é uma relação entre uma variedade de provas e uma variedade de teoremas, onde as provas são obtidas de uma outra pela 'deformação' prescrita anteriormente." (p. 143)

Cita também outros educadores, que falam não apenas de raciocínio, mas também em justificação, e que acreditam que técnicas heurísticas são mais úteis do que provas em desenvolver pensamentos, até mesmo para justificação. Chegam a avaliar como tendo um papel mais significativo para a investigação, a exploração e a justificação informal, que por usar intuição seriam melhores do que a prova para engendrar compreensão matemática e até mesmo fluência técnica.

Analisando o aumento da utilização de computadores, HANNA afirma que a discussão sobre a contribuição das representações visuais para uma prova tem ganhado peso nos últimos anos, pois, se por um lado representações visuais ou intuitivas de objetos matemáticos (tais como gráficos, diagramas, etc.) são longamente utilizados como acompanhamento heurístico da prova, tanto em atividades de pesquisa como em sala-de-aula, estes, segundo ela, "nunca" foram "considerados substitutos da prova tradicional" (p. 15). Ela vê como uma questão chave até que ponto, e em quais casos, uma representação visual pode ser utilizada não somente como uma evidência para uma afirmação matemática, mas também como sua justificação. HANNA chega a falar em autores que sugerem que imagens poderiam substituir a linguagem matemática, mas não emite sua opinião e deixa esta possibilidade em aberto. E acrescenta que os educadores devem deixar claro para seus alunos a interface da dedução e experimentação e a relação entre a matemática e o mundo real, e que softwares geométricos dinâmicos como o Cabri Geometry ou Sketchpad permitem também um trabalho experimental parecido com aquele das físicas experimentais, e conclui colocando a questão que de seu ponto-de-vista é importante: como estas abordagens podem ser melhor integradas no currículo de matemática como um todo, e como elas podem ser melhor utilizadas para promover compreensão?

Em minha opinião, o artigo de HANNA mistura coisas distintas, pois embora ela cite a definição de STEINER de prova explicativa, sua concepção se mostra um tanto quanto distinta da mesma. O que HANNA enfatiza com os exemplos e com a ênfase dada ao papel dos softwares geométricos é uma concepção empirista e psicologista, e um papel mais importante para a intuição nos currículos e até mesmo para a concepção de demonstração. O que me parece o traço distintivo de seu texto é a importância dada à intuição geométrica, à relação entre a matemática e as ciências experimentais, à relação com o mundo real.

Este não é, evidentemente, o terreno da definição de STEINER. Até porque em seu artigo citado, ao comentar o critério “habilidade para visualizar uma prova”, afirma claramente que “Além de possíveis contra-exemplos, este critério é subjetivo demais para estimular” sua possível adoção como critério para determinar quais provas são mais explicativas.

A definição de Steiner é muito mais uma platônica do que intuitiva. Ao invés de falar em essência, fala em “propriedades características” (aliás, Steiner assume que não utiliza a palavra ‘essência’ porque não se costuma usá-la em matemática). Neste sentido, a definição de Steiner se assemelha muito à de Bolzano, que aceitava como uma demonstração ‘puramente analítica’ ou como ‘método correto’ somente as demonstrações que mostrassem os ‘fundamentos objetivos’ da proposição que se pretendia provar.

E, por ironia, o legado de Bolzano foi exatamente o contrário do que Hanna parece pretender com seu artigo: Bolzano, se por um lado foi o primeiro autor a colocar o problema da explicação como central para a filosofia da matemática, e o único dentre os criadores da matemática pura como a conhecemos hoje que teve preocupações didáticas, ficou conhecido como o pai da aritmetização da análise, e foi quem primeiro demonstrou o TVI, em seu artigo *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*[1]. A reflexão sobre a história deste teorema que era extremamente óbvio de se visualizar, manipular, criar exemplos, relacionar com situações de outras ciências ou situações concretas do dia-a-dia das crianças (Bolzano chega a citar uma demonstração deste teorema que se referia ao movimento de um corpo que corria mais que outro e o ultrapassava) pode nos ensinar muito sobre o debate atual sobre conceito e intuição, e sobre a noção de explicação. Bolzano recusou todas estas demonstrações e, com isso, criou os fundamentos da análise moderna, em que princípios muito óbvios são demonstrados partindo de definições muito menos intuitivas.

De fato, não há sequer na filosofia da ciência uma noção consensual sobre a noção de explicação (ver SMITH, 2000). Alguns autores (OTTE, 2006) chegam a dizer que não é a noção de explicação adequada o que traz problemas para a explicação, mas a concepção que os professores carregam de que tudo tem uma causa – herança do modelo aristotélico e oposta ao raciocínio hipotético-dedutivo – o que é um verdadeiro problema para o ensino no sentido de que a interação entre conceito e a intuição e a relação entre conceitos ficam obscurecidas por uma concepção que está sempre em busca de causas, numa ciência em que a relação causal não é mais a base de tudo, como era na concepção aristotélica.

Ao mesmo tempo, a formulação ontológica de Bolzano parece sem sentido para a matemática moderna, pois sua idéia de fundamento e conseqüência (*Abfolge*) inclui o exemplo de que

---

[1] Tradução: Prova Puramente Analítica do Teorema que afirma que entre dois valores de sinais opostos existe ao menos uma raiz real da equação

> a soma dos três ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos" e que todo quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos, com seus ângulos tomados juntos formando os ângulos do quadrilátero, são o fundamento da verdade de que quatro ângulos de todo quadrilátero juntos somam quatro ângulos retos. (BOLZANO, 1837/1981, §162)

mas não aceita a recíproca, ou seja, que possamos fundamentar o fato de que um triângulo tem soma dos seus ângulos internos igual a dois retos no fato de que no quadrilátero esta soma é quatro retos e que podemos decompor um quadrilátero em dois triângulos. Mancosu, que tenta encontrar na obra de Bolzano possibilidades de fundar uma noção adequada de explicação, reconhece que este exemplo "falha na tentativa de provar a suficiente evidência intuitiva para distinguir fundamento de conseqüência" (MANCOSU, 1999, p. 451). De fato, tentar encontrar uma noção de explicação matemática parecida com a noção de ciências experimentais corre este risco.

Como nos explica CARAÇA (2000), o surgimento de uma nova classe social nos séculos XVII e XVIII trouxe novas necessidades científicas, e uma mudança fundamental ocorreu nas ciências, passando de uma concepção ontológica e especulativa para uma descritiva e aplicável. Isso se exprimiu principalmente na mudança de abordagem qualitativa para a quantitativa das ciências, e na construção do sistema hipotético-dedutivo, abandonando o ideal aristotélico de ciência, sobretudo sua exigência de que os primeiros princípios fossem mais intuitivos do que as premissas a serem demonstradas. Isso impacta sobremaneira a noção de explicação. As perguntas "por quê?" e "o quê é?" são substituídas por "como funciona?", e as conseqüências e frutilidade da adoção de determinadas medidas passa a ser um importante critério de verdade para as mesmas.

Afinal, deduzir coisas mais óbvias utilizando menos óbvias é explicar alguma coisa? Bolzano estava errado ao defender que devemos explicar uma verdade extremamente óbvia – que uma reta contínua que passa do eixo negativo para o positivo necessariamente interecepta o eixo x – utilizando definições nem um pouco óbvias, ou até mesmo conceitos que nem mesmo Bolzano conseguiu definir, como é o caso da construção dos números reais[2]? A história da matemática teria tomado o rumo errado? Qualquer um tem o direito de colocar estas questões. Afinal, nada parece mais distante da noção de explicação que usamos em nosso dia-a-dia do que demonstrar princípios mais visualizáveis utilizando os menos visualizáveis.

E mais: Em quê medida a intuição pode ser 'transmitida', e portanto ser legítima como instrumento de transmissão do conhecimento? Qual relação entre intuição e conceito nos mostram que existe a história e a filosofia da matemática?

Estas perguntas não podem de forma alguma serem respondidas de forma definitiva e taxativa, sob pena de simplificarmos algo extremamente complexo. Mais do que procurar uma 'resposta' a estas perguntas, pesquisar sobre o assunto pode servir para compreendermos esta complexa e difícil relação, para podermos discutir de forma mais adequada uma concepção de explicação e de educação.

Utilizar o exemplo dos axiomas de Peano pode nos ajudar a discutir as questões levantadas. Estes axiomas são certamente menos intuitivos do que o fato de que 2+2=4; no entanto, provamos que 2+2=4 utilizando tais axiomas, e não o contrário. Os axiomas de Peano são aceitos porque provam algo que sabemos ser verdadeiro. Da mesma forma podemos ver as verdades propostas por Bolzano para demonstrar o TVI.

Bolzano, Cauchy e Gauss criaram axiomas para a análise que provavam coisas óbvias, mas que permitiram e foram necessários para enormes avanços; foi esta formulação e sistematização da teoria que permitiram novas descobertas. A partir deles, a preocupação dos matemáticos passou a ser organizar a matemática de forma que fosse possível conciliar os resultados existentes até então e encontrar novos com bases sólidas. E, não, uma espécie de 'intuição da intuição', que não resolveria os erros cometidos pelos matemáticos de então.

A história da matemática mostra que ela não é um jogo sem significados, e que os axiomas não são escolhidos de forma aleatória, como pretendem os formalistas. Os axiomas de Peano, por exemplo, também funcionam para construções de sistemas numéricos distintos dos números naturais (por exemplo, para a seqüência 1, 10, 100, ...),

---

[2] No "Prova Puramente Analítica...", ao tentar demonstrar que o chamado "critério de Cauchy" era suficiente para demonstrar a convergência de uma série, Bolzano o faz supondo sem demonstrar a existência dos irracionais e a continuidade da reta. E, ao contrário do que alguns comentadores de Bolzano afirmam, ele de forma alguma nega o fato de que o teorema em questão era verdadeiro e óbvio; para ele, demonstrar este teorema de forma aritmética era uma tarefa para estabelecer um método correto de se fazer ciência, que para ele consistia em eliminar a intuição (daí a expressão 'puramente analítica').

mas foram criados para fundamentar o funcionamento dos números naturais. Uma vez definidos e os princípios fundamentais de uma teoria é que surgem novas propriedades derivadas dela. Se eles não servissem para mostrar que 2+2=4, eles não teriam sido criados. Pois somente com o fato de que 2 + 2 = 4 não posso provar o princípio da indução, nem que 135664 + 37863 = 173527, para retomar o exemplo de Kant (1965). Já com os axiomas de Peano, sim. Ou seja, é só a partir do estabelecimento de fundamentos conceituais mesmo que estes não sejam únicos e imutáveis, que conseguimos generalizar e organizar. E o melhor axioma é aquele que melhor permite generalizar e obter novos resultados, quer dizer: que, de um lado, seja compatível com o maior número possível de intuições e resultados estabelecidos por nossa teoria; e, por outro, que possibilitem novas descobertas. Entre outros motivos, porque a intuição às vezes nos falha. Nos casos que citamos (2 + 2 = 4, TVI) isso não ocorre; mas há exemplos em que, uma vez definidos certos conceitos, algo que aparentemente seria verdadeiro pela intuição passa a ser considerado falso. É o caso da função que é contínua em todos os pontos, mas que não é derivável para nenhum; é também o caso dos conjuntos infinitos, em que a parte não é 'menor' do que o todo.

BUTCHART (2001), discutindo o programa de Frege, e porque não foi possível que o mesmo obtivesse o sucesso desejado, discute a relação entre lógica, conceito e intuição de uma forma que pode ser bastante útil para o assunto aqui em questão. Creio que o que Butchart afirma sobre a relação entre a construção da lógica e intuição pode realmente valer para a construção da matemática e a relação entre conceitualização matemática e intuição.

> A faculdade lógica de Frege pode tê-lo feito se convencer da verdade de seu Axioma 5; a inconsitência deste axioma é um testamento para o fato de que o que parece intuitivamente e auto-evidentemente lógico pode ser falso (...). Frege e Kant estavam realmente errados ao supor que as leis lógicas fornecem um mecanismo de formar crenças absolutamente confiáveis.
>
> Mais ainda, nossas intuições lógicas são não somente às vezes erradas, elas freqüentemente simplesmente sequer dão um veredicto. Onde a intuição falha, a teoria examina. (p. 52)

> (...)
>
> Intuições, mesmo lidando com axiomas fundamentais, podem ser modificadas à luz de melhoras em teorias lógicas... Uma teoria lógica pode contribuir para alguns de nossos julgamentos pré-teóricos ou intuições e estar em conflito com outros. Onde uma teoria lógica conflita com a intuição, nós podemos abandonar a intuição e aceitar o que pareceu ser uma conseqüência contra-intuitiva da teoria. Nós temos o direito de fazê-lo na medida em que a teoria fornece uma contribuição plausível e *sistemática* das leis da lógica... (p. 54)

Justifica o fato de que aceitamos algumas concepções que contrariam nossas idéias intuitivas; e continua:

> porque são conseqüências de uma teoria sistemática que nós temos bons fundamentos para aceitar. Em outros casos, as conseqüências contra-intuitivas de uma teoria lógica pode nos levar a rejeitar a teoria e adotar outra... Mas o fato de que uma teoria conflita algumas de nossas intuições não é, em si, uma evidência conclusiva de que a teoria seja incorreta. De fato, há muito poucas intuições que são tão indubitáveis que nenhum lógico não a tenha negado em algum momento. (p. 54)

E dá o exemplo da lei da não contradição – aparentemente inquestionável – que a lógica para-consistente rejeita.

> Não acontece que tenhamos certeza tão grande dos axiomas lógicos fundamentais e todo o resto de nosso conhecimento seja deduzido deles. Ao contrário, <u>nós aceitamos axiomas na medida em que eles nos fornecem uma contribuição sistemática de uma inferência dedutiva</u> (grifo meu); uma contribuição que pode justificar alguns de nossos julgamentos pré-teóricos, mas que também nos mostram que alguns deles são falsos. <u>Existe uma *interplay* (influência recíproca, nota minha) complicada entre julgamentos</u>

> teóricos e pré-teóricos. Intuições não são sacro-santas, nem as teorias lógicas. Ambas são revisáveis; intuições são revisáveis à luz de princípios teóricos e estes princípios teóricos em si são revisáveis, não somente à luz de intuições incertas, mas também à luz dos fundamentos de uma contribuição alternativa que fornece uma teoria de inferência dedutiva mais sistemática e poderosa. (p. 54, sublinhado meu)

Nesta reflexão sobre o processo de construção do conhecimento matemático, cabe observar algumas coisas sobre a criação e ruptura de regras.

O processo de construção da matemática é tão rico e seus limites tão imprevisíveis que a matemática pode chegar a alcançar uma autonomia tão grande com relação à realidade, que as certezas estabelecidas pela intuição não podem ser um limite; ao contrário, pode-se desenvolver áreas e teorias matemáticas importantes baseadas neste tipo de quebra de relação com a intuição, ou com a realidade. Deste ponto-de-vista, obrigar a vincular uma demonstração sempre com algo real ou intuitivo não me parece que seja instrutivo.

É o caso do exemplo que revolucionou a filosofia da matemática no sentido de que tirou o lugar da mesma como a ciência modelo de estabelecer certezas: a construção de geometrias não euclidianas. Ao retirar da lista dos axiomas de Euclides o 5º Postulado, e ao encontrar um tipo de geometria (ou tipos de geometria) que abria a possibilidade para espaços totalmente distintos do espaço tri-dimensional euclidiano, o que se construiu foi uma forma de fazer matemática que implicava numa abstração de todo tipo de aplicação à realidade do espaço como se concebia (o que não impediu, evidentemente, que se encontrassem aplicações também para estes tipos de geometria), e que reforçava o caráter hipotético-dedutivo da matemática.

No entanto, sem a consolidação da geometria euclidiana, não seria possível falar em construir uma geometria não-euclidiana. Ou seja: sem a preocupação com estabelecer conceitos claros e limites rigorosos, não seria possível construir posteriormente várias teorias a partir da ruptura com um dos postulados da teoria. Talvez seja esse o sentido que OTTE (2006, p. 3) dá à afirmação de que “quando Euclides axiomatizou a geometria o que ele realmente conseguiu foi exibir a possibilidade de geometrias não-euclidianas e portanto a generalização matemática", no sentido de que, quando se estabelecem limites, o que se mostra são as fronteiras e possibilidades de romper este limite. Mas sem estabelecer estes limites e construir suas regras, não é possível organizar qualquer teoria matemática. OTTE (p. 3) continua:

> A tendência comum a considerar a incompletude como o suporte àqueles que enfatizaram a primazia da intuição, como oposta àqueles que enfatizaram como Hilbert, Gödel ou Kolmogorov a importância do formalismo, mostra-se superficial, porque ignora "que o próprio significado da incompletude do formalismo é que ele pode ser efetivamente utilizado para descobrir novas verdades inacessíveis para seu mecanismo de prova, mas estas novas verdades eram presumivelmente indescobríveis por qualquer outro método... Temos aqui não somente a descoberta de uma nova forma de usar o formalismo, mas uma prova da eterna indispensabilidade do formalismo para a descoberta de novas verdades matemáticas" (WEBB 1980, p. 126-127).

Creio que a importância da citação de Webb consiste, não na defesa da concepção formalista da matemática como um jogo sem significados, mas na defesa do direito da matemática utilizar seus resultados, mesmo que estes não tenham fundamentos sólidos no sentido que buscaram Frege e Hilbert. OTTE continua:

> Axiomática e prova formal têm pouco a ver com o objetivo de justificar uma disciplina, embora isso pudesse ter sido a motivação de estabelecê-las. Elas são simplesmente meios de organizar alguns campos e assim fazer suas fronteiras e alternativas ou possíveis generalizações mais claras. A essência do conhecimento é seu crescimento e a compreensão começa nas fronteiras do conhecimento. A Matemática e a ciência surpreendem as explicações estabelecidas mais freqüentemente do que as confirmam. No entanto, tais "insights" nem sempre são bem-vindos, nem mesmo entre matemáticos. (p. 3)

OTTE conclui dizendo que:

> notamos que as premissas dos argumentos matemáticos têm que ser apresentadas de uma forma tal que as tornem intuitivamente aceitáveis e claras, assim como, metodologicamente produtivas. Isto pode soar algo paradoxal, já que requer convencimento da intuição e simultaneamente um significado como instrumento e como objeto de cognição. Os significados e objetos se tornam quase indistinguíveis quando considera-se o processo de generalização em sua dinâmica completa. (p.4)

Ou seja, a vinculação da matemática à intuição ou à aplicação à realidade não é nem podem ser uma camisa-de-força, sob pena de limitar a criação e construção matemáticos. Talvez seja dessa camisa-de-força que Hilbert queria libertar a matemática, ao tentar construir seu programa contra o objetivo dos intuicionistas de somente aceitar métodos finitos e, portanto, rejeitar grande parte dos resultados da matemática atual. Dar toda liberdade aos matemáticos na construção dos objetos e na abstração, daí a necessidade de "salvar o paraíso" fornecido por Cantor. (HILBERT, 1967).

Creio que as verdades demonstradas no "Prova Puramente Analítica..." de Bolzano foram amplamente aceitas na história da matemática, e são até hoje divulgadas nos livros de análise porque eram coerentes com o TVI. Nesse sentido, Bolzano tinha razão. Mas, como mostrou RUSNOCK, o estabelecimento de fundamentos objetivos – que era o objetivo de Bolzano – dá lugar a uma certa liberdade inerente à escolha das definições e axiomas mais adequados, o que mostraria que os matemáticos fazem escolhas subjetivas de seus axiomas. Mas, sem buscar estes fundamentos e estabelecê-los, até mesmo para colocar em teste sua correção ou adequação com outras verdades intuitivas e conceituais, não é possível construir matemática. Os erros graves cometidos por matemáticos tão importantes quanto Euler mostram que os princípios que Bolzano estabeleceu de fato serviram de importante fonte de certidão e clareza. Embora o próprio Bolzano reconhecesse a importância de um período em que matemáticos fizeram importantes descobertas/criações devido à busca de novos instrumentos sem maiores preocupações com o rigor.

Voltando à noção de explicação: na minha opinião, o que a história da matemática nos mostra é que não podemos aceitar definições que pretendam reduzir a matemática ou as demonstrações à intuição, já que, como vimos, se por um lado a noção de intuição nunca foi deixada de ser levada em consideração sequer pelos construtores da matemática pura, por outro, ela não pode substituir a necessidade de conceitos e formalização.

A idéia de que as demonstrações poderiam ser melhor compreendidas se aplicadas ou vinculadas à realidade, ou ao mundo, tampouco mostra ser uma solução absoluta ou aplicável a todos os casos, visto que a evolução da matemática mostrou-se ser também uma complicada relação entre realidade e formalização, e que o método hipotético-dedutivo triunfou na ciência moderna em detrimento da noção de explicação aristotélica exatamente por sua fertilidade dedutiva e ampla gama de aplicações, num momento em que a ciência moderna passou a considerar a possibilidade de previsão e aplicação um melhor critério de verdade do que a evidência.

A idéia aristotélica de essência está diretamente ligada à concepção de que existem objetos com características definidoras únicas, o que contraria o método hipotético-dedutivo, em que os objetos matemáticos podem ser definidos de diferentes formas.

Mas, se o método hipotético-dedutivo não foi um “erro histórico” e, ao contrário, revelou-se um importante fator de evolução da matemática, das ciências e do conjunto da humanidade; e se, neste método, duas deduções são igualmente válidas, então, que sentido faz falarmos em explicação?

Creio que é isso o que OTTE (2006) questiona ao afirmar que a noção de explicação não é central para os problemas de ensino e aprendizado devido a que “a ciência moderna e a matemática não fornecem explicações de nada no sentido desejado. Ambas são muito hipotéticas e abstratas ou muito instrumentais e técnicas” (p.1). Professores permanecem com a noção aristotélica de explicar tudo através da relação causa e efeito, esperando da ciência algo que ela não pode mais responder.

O ponto-de-vista semiótico, que afirma que o critério de adoção de uma determinada hipótese como verdadeira se baseia nas suas possíveis aplicações e capacidade de construir ou descobrir novos resultados, em minha opinião explica muito sobre o desenvolvimento da matemática. Como acreditamos ter mostrado, esse foi o sentido da aceitação de proposições muito pouco óbvias como fundamentos matemáticos que serviriam para explicar proposições óbvias.

RESNICK e KUSHNER (1987), ao avaliar a definição de STEINER, mostram uma demonstração do TVI que não satisfaz nenhuma das condições listadas por STEINER como explicativas, mas que seriam consideradas por muitos como uma demonstração satisfatória, pois mostra as relações entre os diversos conceitos envolvidos no teorema.

Assim, se faz sentido falar em explicação e essência, estas se localizam talvez nas aplicações e na fertilidade que a assunção de determinadas hipóteses tem para demonstrar um teorema podem fornecer. A demonstração que Bolzano deu do TVI (que de agora em diante chamaremos de TVI) foi considerada uma boa explicação exatamente por utilizar estes critérios. Os fundamentos que Bolzano lançou para prová-lo (Critério de Cauchy, Teorema de Bolzano-Gauss, etc.) foram adotados por todos exatamente por terem permitido lançarem as bases para um novo desenvolvimento matemático.

Na minha opinião, nós educadores matemáticos devemos encarar o fato de que a abstração, o rigor e a generalização matemáticos não são obra do acaso ou de mentes muito rigorosas. Portanto, creio que qualquer proposta de mudança no ensino das demonstrações não pode deixar de levar em conta esta complexa relação. Num momento em que o diálogo entre pesquisa empírica ou bibliográfica deve servir para fundamentar e contribuir para a prática da sala-de-aula, é de importância fundamental a compreensão de que a formalização de conceitos (que nada tem em comum com o chamado formalismo matemático), como creio ter mostrado, não diz respeito a um tipo de matemática muito avançada que nenhum estudante que não queira ser matemático profissional possa ter interesse. Ao contrário, abstração, generalização e formalização de conceitos – assim como intuição geométrica, espacial, aplicação à realidade – são aspectos inerentes à matemática. Ensinar matemática inclui, em minha opinião, apresentar também esse seu caráter abstrato e generalizador. A linguagem matemática foi criada para resolver problemas e lidar com situações que a linguagem comum não tinha condições de resolver, num processo de impregnação mútua (para retomar a expressão utilizada por MACHADO (1998), embora ele se refira mais exatamente à língua materna, e não à linguagem em geral). Assim, pretender a todo custo 'transformar' ou 'traduzir' a linguagem matemática para a linguagem comum seria, em minha opinião, um reducionismo que em nada ajudaria os estudantes a compreenderem os significados da matemática e toda sua riqueza.

BIBLIOGRAFIA:

ARISTÓTELES. *Segundos Analíticos*, livro 1. Campinas: Departamento de Filosofia – IFCH – Unicamp, Lucas Angioni, 2004.

BOLZANO, B. (1817/1980). Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, traduzido para o inglês por S. Russ, *Historia Mathematica*, 7, 156-185.

BOLZANO, B. (1837/1981) Wissenschaftslehre, 4 vol. (Sulzbach). Editado por Wolfgan Schultz. Reprint Scientia Verlag Aalen.

BUTCHART, S.J. 2001. *Evidence and Explanation in Mathematics.* Tese de doutorado. Departamento de Filosofia da Monash University, Canadá

CARAÇA, Bento de Jesus. Conceitos fundamentais da matemática. 3ª edição. Lisboa: Gradiva publicações LTDA, 2000.

FREGE, J. G. *Os fundamentos científicos da Aritmética*. Coleção Os Pensadores. Tradução de Luís Henrique dos Santos. 1ª Edição. São Paulo, 1974.

HANNA, G. *Proof, Explanation and Exploration*: an Overview**.** *Educational Studies in Mathematics* (EMS), vol. 44. Dordrecht: Kluwer: Academic Publishers, 2001.

HILBERT, D. On the Infinite, 1925. Em VAN HEIJENOORT. *From Frege to Gödel,* 1967. P. 376.

KANT, I.: *Critique of Pure Reason*. N. Kemp Smith. Nova York. 1965

MACHADO, N. J. *Matemática e Língua Materna*: Análise de uma impregnação mútua. 4ª edição. São Paulo: Cortez, 1998.

MANCOSU, P. Bolzano and Cournot on Mathematical Explanation. *Revue d'Histoire des Sciences*, 52, pp.429-455, 1999.

OTTE, M. Learning Difficulties resulting from the Nature of modern Mathematics: the Problem of Explanation. In: MAASZ, J. SCHLOEGLMANN,W. *New Mathematics Education Research and Practice.* Sense Publishers, 2006.

RESNICK, M./D. KUSHNER (1987) *Explanation, Independence and Realism in Mathematics*, British Journal for the Philosophy of Science, 38, 141-158.

RUSNOCK, P: Bolzano and the Traditions of Analysis. In KÜNNE, W., SIEBEL,M. e TEXTOR, M.: *Grazer Philosophische Studien* - Internationale Zeitschrift für Analytische Philosophie 53, p. 61-85, 1997.

STEINER, M. Mathematical Explanation, *Philosophical Studies,* 1978, nº 34: pg. 135-151.

WEBB, J. C. (1980), *Mechanism, Mentalism and Metamathematics*. Dordrecht: Reidel, 1980.