Universidad Nacional de Río Cuarto

Facultad de Ciencias Humanas

Departamento de Filosofía

Trabajo Final de Licenciatura

Autor: Eduardo D. Dib

Título: **El Infinito y el Continuo en el sistema numérico**

Sobre los principios lógicos y aplicaciones de la moderna teoría del infinito

Director: Dr. Horacio Faas

- 1994 -

ÍNDICE

Introducción

Primera Parte

El infinito en las distintas clases de números

Segunda Parte

Aplicación de la teoría del infinito a la caracterización de sistemas y lenguajes

Conclusión

INTRODUCCIÓN

"El Señor a quien pertenece el oráculo de Delfos no revela ni esconde, sino provee símbolos"

Heráclito

Introducción Positiva

Hay cosas que tienen la perturbadora propiedad de resultar evidentes y misteriosas a un mismo tiempo. Cosas como la sangre, el sexo, el rayo, el habla, el tiempo y el fuego son evidentes, en tanto se dan en la experiencia o el entendimiento de las personas (fortuna, desgracia o fatalidad mediante) y también son misteriosas, ya que su explicación rara vez llega a satisfacernos. La infinitud y la continuidad seguramente pertenecen a esta clase de cosas. Aunque se comprenda el significado de estos vocablos, probablemente quedaríamos desorientados si se nos pidiera definir dicho significado, y más aún si lo que se solicitara fuera justificar la definición dada.

En un principio, sin disponer de ningún instrumento o concepto adecuado a nuestro problema, quizás trataríamos de evitar complicaciones prematuras buscando un punto de partida simple y contundente que nos brinde alguna orientación intuitiva. Para eso convendría tomar el ejemplo de los griegos, en los albores de la filosofía.

No intentaremos una exposición histórica. En cambio, acudiremos a los orígenes de la filosofía en busca de unas primeras definiciones que valen por su máxima simplicidad y claridad. Veremos que estas nociones informales no van necesariamente unidas al uso del número. Veremos también cómo, al ser añadido este último (lo que significó un aumento de la precisión y riqueza de detalle con que se conoce a la infinitud y la continuidad), la caracterización de ambas propiedades se convierte en problema.

"Anaxágoras dice que *las cosas que hay en el mundo no están divididas ni separadas por un golpe de hacha*"[1] y también que "*los contrarios permanecen unidos y todas las cosas pueden transformarse en otras*"[2]. Podemos llamar continua a la transición entre el día y la noche: una cosa se transforma en su contraria gradualmente, sin que medie ningun corte abrupto en el que pueda decirse que una de ellas deja de existir y la otra comienza.

---

[1] RUSSELL,B., La Sabiduría de Occidente, Pag. 37
[2] Idem

Anaxágoras sostuvo también la noción de divisibilidad infinita[3], necesaria (aunque no suficiente, como veremos más adelante) para explicar la continuidad. Decimos, por ejemplo, que el movimiento de un proyectil es continuo porque observamos una transición en la cual el móvil pasa sin interrupción de una posición dada a otra que le sigue. Dicha transición no consiste en que el móvil deje de existir en la posición dada para pasar a existir en la posición siguiente: esto no es lo que concebimos por movimiento continuo, sino que el móvil ocupe todas las posiciones que medien entre dos puntos cualesquiera de su trayectoria. Entre dos posiciones, no importa cuán próximas entre sí sean dadas, debe haber otras posiciones intermedias, de lo que se sigue la divisibilidad infinita de todo trayecto.

Pitágoras pensaba que todas las cosas eran números, y que tales números se componen de la adición de unidades básicas, en sí mismas indivisibles. Por lo tanto, el tamaño de una cosa cualquiera debe resultar siempre expresable con exactitud por tales unidades.

"Se consideraba que los números estaban formados por unidades, y se admitía que las unidades, representadas por puntos, poseían dimensiones espaciales. Bajo este concepto, un punto es una unidad que tiene posición, es decir, que posee alguna clase de dimensiones"[4].

Zenón de Elea sacó a relucir un aspecto importante en el que la concepción pitagórica fallaba. "Los argumentos de Zenón son en lo fundamental un ataque contra la concepción pitagórica de unidad (...) Lo que es, sea lo que fuere, arguye Zenón, ha de poseer alguna magnitud. Si no tuviese magnitud, no existiría. Concedido esto, lo mismo puede decirse de cada parte: también tendrá que poseer alguna magnitud. Equivale a lo mismo decir esto una vez y decirlo siempre [en cada etapa del proceso de subdivisión], sigue afirmando Zenón. Esta es una tersa manera de introducir la divisibilidad infinita; no puede decirse que ninguna parte sea la más pequeña. (...) La divisibilidad infinita demuestra que el número de partes es infinito"[5]. Estas partes en que se podría subdividir

---

[3]Ob. cit., Pag. 36
[4]Ob. Cit., Pag. 38
[5]Ob. Cit., Pag. 36. La aclaración entre corchetes es nuestra

a las cosas o bien tienen algun tamaño o bien no lo tienen. Si tuvieran tamaño, entonces el tamaño de las cosas seria infinito, ya que cada cosa se compone de un número infinito de partes. Si las partes no tuvieran tamaño, entonces las cosas no tendrían tampoco ningún tamaño en absoluto.

"Este argumento es importante, pues demuestra que la teoria pitagórica del número falla en el dominio de la geometria. Si consideramos una línea, entonces, de acuerdo con Pitágoras, debemos ser capaces de decir cuántas unidades hay en ella. Claramente, si aceptamos la divisibilidad infinita, la teoria de las unidades falla inmediatamente. Al mismo tiempo, es importante comprender que esto no prueba que Pitágoras estuviese equivocado. Lo que prueba es que **no pueden sostenerse al mismo tiempo la teoría de las unidades y la de la divisibilidad infinita**, o, dicho con otras palabras, que **ambas son incompatibles.** Una de las dos ha de ser abandonada. Las matemáticas exigen la divisibilidad infinita y, por consiguiente, la unidad pitagórica ha de ser abandonada"[6].

Zenón también hacia el siguiente razonamiento sobre la infinitud:

"*Si el espacio existe, ha de estar contenido en algo, y este algo sólo puede ser más espacio, y así hasta el infinito* (...)

Una argumentación de esta índole, que puede repetirse una y otra vez, recibe el nombre de retrogradacion infinita. Esto no siempre conduce a una contradicción. En realidad, nadie haria hoy objeciones al criterio de que cualquier espacio es parte de un espacio mayor. Porque la contradicción de Zenón nace justamente del hecho de que él da por sentado que "lo que es" es finito (...) Los argumentos regresivos del tipo vicioso son realmente una forma de reducción al absurdo. Lo que prueban es que la base de la argumentación [en cursiva] es incompatible con alguna otra proposición que se supone verdadera [en este caso, la proposición de que "lo que es" es finito]"[7].

---

[6]Ob. Cit., Pags. 40-41. La negrita es nuestra
[7]Idem

Sin introducir aun el uso de los numeros, tenemos la idea de una serie infinita: la serie de espacios sucesivamente mayores en los que se halla contenido cualquier espacio dado.

Cuando trasladamos al conjunto de los numeros naturales esta simple pero perturbadora idea de repetir indefinidamente la adición de parte sobre parte, se presenta un problema relacionado más bien con el concepto de "número" que con creencias metafisicas o cosmológicas. Sabemos que dado un numero cualquiera n, por grande que fuera, siempre podria sumársele otra unidad. Una vez formado n+1 todavia se le puede adicionar otra unidad más, y asi sucesiva e interminablemente. La dificultad surge al comparar la totalidad de los números naturales con alguna de sus partes que constituya en sí misma una colección infinita, como seria, por ejemplo, el conjunto de todos los números pares.

"Escríbanse los números naturales 1, 2, 3, 4,... en la hilera superior, y en la inferior los numeros pares 2, 4, 6, 8,... de manera que cada numero de la primera tenga su doble en la inferior. El número de numeros en ambas hileras es el mismo, a pesar de que la segunda hilera se obtiene eliminando todos los números impares- un conjunto infinito - de la primera hilera. Este ejemplo es dado por Leibniz para probar que no puede haber números infinitos. El creia en los conjuntos infinitos, pero puesto que suponia que un numero debía siempre aumentar cuando se le sumaba otro o disminuir cuando se le sustraia otro, sostenia que los conjuntos infinitos no tienen numero.

El número de todos los números, dice, *implica una contradicción que yo demuestro así: para cada número hay un número correspondiente igual a su doble. Por lo tanto el número de todos los números no es mayor que el número de los números pares, es decir, el todo no es mayor que una de sus partes* (Phil. Werke, edic. Gerhardt, vol. I, pag. 338). Al tratar este argumento debemos decir "el número de todos los números finitos" en lugar de "el número de todos los números"; entonces tenemos exactamente lo ilustrado por nuestras hileras de números, una que contenia todos los numeros finitos y la otra que sólo contenia todos los números pares finitos. Se verá que Leibniz consideraba contradictorio sostener que el todo no es mayor que su parte. Pero "mayor" es palabra que admite muchas acepciones: para interpretar su propósito debemos cambiar la expresión "no es mayor que" por la frase menos ambigua "no contenga un número mayor de elementos [que]". En este sentido, el hecho de que el todo y la parte sean iguales no se contradice a sí mismo. Fue el reconocimiento de ese hecho lo que hizo posible formular la teoría moderna del infinito."[8]

[8]RUSSELL,B., Nuestro conocimiento del mundo externo, Pags. 189-190 (Ver comentario al diálogo de Galileo, Pags. 190-193)

Introducción Negativa

Dada la vastedad del tema que estamos introduciendo resulta evidente que no podemos ocuparnos de todos sus aspectos y detalles en este trabajo. Sería por lo tanto prudente establecer desde ya los límites del mismo. Asimismo serviría para aclarar nuestro punto de vista explicar el porqué de la exclusión de determinados aspectos del tema. Seguramente muchas personas asocian automáticamente dichos aspectos con el tema de la infinitud y, de no mediar alguna justificación, se sentirían extrañadas al no encontrarlos tratados aquí.

Reconsideraremos el análisis de la continuidad en el movimiento para indicar qué tipo de cuestiones serán excluidas. En la sección anterior nos referimos a la forma en que dicha continuidad se manifiesta a los sentidos. Esto constituye una ilustración, conveniente para presentar el tema y su problemática de una manera intuitiva e inmediatamente accesible. Tal ilustración, sin embargo, debe ser descartada en lo que sigue de nuestra exposición por dos motivos:

1) Seguiremos un razonamiento más estricto que requiere el abandono de esa ilustración un tanto vaga.

2) La aplicación de lo que descubramos como fruto del puro razonamiento lógico al mundo sensorial y físico está condicionada por una serie de factores que escapan al alcance de nuestra presente consideración. Dichos factores son los concernientes a la fisiología y psicología de la percepción, por un lado, y a la naturaleza del espacio y del tiempo por el otro.

Russell pensaba que Zenón, saliendo en defensa de su maestro Parménides, pretendía demostrar con sus argumentos la inexistencia del mundo sensible[9]. No vamos a tratar de retomar esta interpretación ni vamos a intentar ninguna contextualización

[9] Cf. RUSSELL.B. Nuestro conocimiento del mundo externo. Pag. 170

historica de estos antiguos pensamientos. Por un lado, el análisis que desarrollaremos sigue un método intrínsecamente ajeno a cualquier forma de historicismo. Por otro lado hoy en día, aunque la evidencia de los sentidos no satisfaga determinados esquemas que se tienen por racionales, nadie afirmaría por eso que se deba negar la existencia del mundo. Si un sistema numérico basado en unidades discretas resulta obtuso frente al continuo, entonces busquemos otro sistema, busquemos uno adecuado para penetrarlo.

Para esto debemos dejar a un lado el mundo sensible y concentrarnos en las propiedades que definen el concepto universal de continuidad. Si comprobamos que un conjunto de símbolos dado posee estas propiedades, entonces sabremos que es adecuado, y que sus símbolos revelan la propiedad que nos interesa.

El espíritu entregado a la contemplación de lo infinito puede llegar a sentirse asombrado, aterrado, desbordado, confundido, inspirado, rebajado, etc. El contenido de este "sentimiento de lo infinito"[10] es intrínsecamente vago y autocontradictorio, ya que se desarrolla en el espectro de la emotividad, el cual no reconoce rango ni restricciones. Queda claro que nuestra senda no pasa por un análisis de este sentimiento, ya que trabajaremos a partir de definiciones, y definir un concepto conlleva restringir su rango de aplicación y su vaguedad.

Este uso de la definición también nos condiciona a apartar otros dos aspectos históricamente vinculados al concepto amplio y genérico de infinito:

1) El infinito considerado como absoluto, es decir, algo infinito no solamente en una determinada propiedad, como la cantidad (algo infinitamente numeroso) o el tamaño (algo infinitamente grande), sino algo infinito en todas las infinitas propiedades imaginables (poder, bondad, etc.). En la tradición cristiana prevaleció la opinión de que Dios era infinitamente infinito[11], lo cual por algún tiempo confirió a esta acepción del término "infinito" la fuerza de ser considerada como el "verdadero Infinito", el único digno de ser escrito con mayúsculas. Nosotros no vamos a hacer cuestión de mayúsculas o minusculas (la cuestión ya es de por sí mayúscula) sino que nos vamos a ocupar

[10] Cf. FERRATER MORA,J., Diccionario de Filosofía, Pag. 1692
[11] Ob. Cit., Pags. 1687-1689

derechamente del infinito común y pedestre que se predica respecto a una determinada propiedad. Es posible dar la definición de algo que posea este modesto grado de infinitud, pero, en cambio, no podemos definir algo que sea infinitamente infinito. Nunca podríamos completar la definición, ya que sólo podemos especificar una cantidad finita de propiedades.

2) La distinción entre infinito potencial e infinito actual - El infinito como algo negativo.

Esta distinción se remonta a Aristóteles, y se basa en la siguiente consideración: Un conjunto infinito se va formando, o bien por la adición sucesiva de partes con extensión finita, o bien por la sucesiva división de un objeto finito (una línea, por ejemplo) y de sus partes cada vez más pequeñas. Este proceso únicamente puede ser realizado por un "alma" o sujeto enumerante (una persona), el cual es un ser finito. Siendo esto así, el infinito nunca puede llegar a ser completado, no puede ser actualizado. Existe, en todo caso, como proceso, como potencia, como valor de una variable, que tiende a ser, o bien infinitamente grande, o bien infinitamente pequeño, pero que nunca alcanza dichas magnitudes. Así, el infinito es considerado negativamente, como algo que puede ser pero en ningún momento llega efectivamente a ser.

Sin embargo, si queremos aprehender el infinito en tanto concepto lógico, debemos dejar de pensar en términos de sujeto, de las operaciones que éste pueda realizar, y del tiempo que las mismas le demanden. Siguiendo a Bertrand Russell, consideraremos que una vez dada la definición de un conjunto infinito está dado el conjunto mismo.

Aquí concluye la explicación de los tópicos cuya exclusión creímos oportuno justificar. Sólo falta definir los límites formales de esta tesis.

Quedan excluidas las cuestiones matemáticas que excedan el tema de los sistemas numéricos (operaciones, teoría de límites, etc.). Cuando surja alguna conexión con estas cuestiones que resulte útil o necesaria para nuestra exposición, ésta será comentada y se remitirá a la bibliografía pertinente mediante notas a pie de página y citas al final de cada parte.

Excluimos asimismo todo intento de abarcar en su totalidad el pensamiento de los autores que vamos a considerar. Partiremos de la exposición hecha del mismo por B Russell en <u>Introducción a la Filosofía de las Matemáticas</u> y lo resumiremos de manera adecuada a nuestro tema y a la modalidad de nuestra exposición, sin que esto signifique deformarlo ni empobrecerlo.

Método y Articulación

La articulación de esta tesis obedecerá a dos perspectivas que se presentarán sucesivamente:

Primera parte. Mirando hacia los interrogantes planteados sobre el infinito y el continuo aún antes de existir la teoría moderna del infinito, trataremos de formular las respuestas desde dicha teoría. Los referidos interrogantes ya fueron esbozados en las Introducciones y los podemos sintetizar de la siguiente manera:

1) ¿Qué condiciones debería satisfacer un sistema numérico para poder dar cuenta del continuo?

2) ¿Qué método permitiría establecer, primero, si existen diferentes clases de infinito y luego, en caso afirmativo, distinguir efectivamente entre ellas?

Segunda parte. Mirando hacia el desarrollo moderno de la lógica y la metamatemática, esbozaremos la conexión y las afinidades que existen entre la teoría moderna del infinito y dicho desarrollo.

Nuestro método de exposición consistirá en presentar el razonamiento deductivo que conduce desde unas primeras definiciones hasta las conclusiones capaces de responder nuestros interrogantes.

Antes de comenzar la primera parte diremos unas palabras sobre el procedimiento de la definición. Hay más de una forma para dar la definición de un determinado conjunto: la más obvia es anotar la lista de sus elementos. Así, si se nos pide que demos el conjunto formado por los habitantes de Argentina, anotaremos la lista de sus nombres. Este tipo de definición se llama "definición por extensión", y puede resultar un poco arduo cuando se trata de definir conjuntos muy numerosos. En el caso de los conjuntos infinitos se presenta el problema (análogo al señalado por Aristóteles) de que la lista no puede ser completada.

La otra manera de definir un conjunto es dar el concepto de alguna propiedad que unicamente sus elementos comparten entre sí. Así, en principio, el rótulo "los habitantes de Argentina" constituye una definición, aunque bastante pobre, ya que, dada la vaguedad del término "habitante", no ofrece ningún criterio preciso que seleccione los elementos del conjunto. La siguiente definición resultaría más operativa, ya que sí ofrece un criterio efectivo: "todas las personas que residen permanentemente en territorio argentino". Este tipo de definición se llama "definición por intensión", y es el que más nos interesa para el desarrollo de nuestro tema. Veremos cómo se las arregla Russell para dar una definición intensiva de número que no resulte un mero rótulo vacío, sino que aporte un suplemento de información tal que determine de una sola vez el conjunto de los números naturales, sin necesidad de anotar uno por uno a sus elementos.

PRIMERA PARTE

El infinito en las distintas clases de números

"Me dijo que su libro se llamaba 'El Libro de Arena', porque ni el libro ni la arena tienen ni principio ni fin"

J. L. Borges

Propiedades de los números naturales: Inductividad y Reflexividad

¿Es acaso imprescindible dar una definición de la noción de "número" para poder usar dicha noción con propiedad? No todo el mundo piensa que la respuesta a esta pregunta sea "sí".

Según la postura del **formalismo**, no es sólo posible, sino también conveniente, desentenderse del aspecto semántico (es decir, del significado) de los axiomas que se elijan como fundamento de las matemáticas. Al considerar dichos axiomas deberíamos fijarnos exclusivamente en la sintaxis que los relaciona y los unifica en forma de sistema. Desde este punto de vista, establecer el significado intrínseco de los términos primitivos del sistema no sería parte de la tarea de fundamentación.

Al comienzo el formalismo debió su plausibilidad al trabajo de Giuseppe Peano. Él mostró cómo, en base a tres nociones básicas ("uno", "número" y "sucesivo") de las que no se daba ni pedía definición, era posible deducir todo el sistema numérico. Se llegó a pensar que las proposiciones en que los términos primitivos aparecen ligados establecen inequívocamente el significado de los mismos, ya que sólo la interpretación corriente de dichos términos satisfaría al sistema.

Sin embargo, al indagar sobre esta última concepción, se llegó a establecer su falsedad: el sistema de Peano, al igual que cualquier sistema formal, admite más de una interpretación en la cual resulta verdadero. Si interpretamos "número" como "número natural" obtenemos un modelo, es decir, una interpretación que hace verdadero al sistema. Pero lo mismo ocurre con toda progresión, no solamente con la de los números naturales. Cualquier progresión satisfaría al sistema.[12]

Un sistema axiomático, entonces, aunque necesario para el establecimiento riguroso de las matemáticas, no es suficiente para caracterizar con precision a los objetos matemáticos. Al hacer foco sobre el propio lenguaje matemático en busca de su

---

[12] RUSSELL, B, Introducción a la Filosofía Matemática. Pags. 18 a 23.
Ver Nota 1 al final de esta parte.

significado, se presenta la necesidad de un lenguaje lógico, que permita definir los términos matematicos en base a otros mas simples.

Para establecer el concepto universal que corresponde a la palabra "número" sería menester definirlo de manera que implique a todas sus instancias particulares sin confundirse con ellas.

"Numero" es un concepto universal, instancias particulares del cual son, por ejemplo, 1, 2, 5,...etc. Estos últimos, a su vez, son etiquetas, cada una de las cuales se aplica a la colección de todos los conjuntos de objetos que son coordinables entre sí. Que dos conjuntos sean coordinables significa que se puede encontrar una relación de uno-a-uno que tenga a uno de los conjuntos por dominio y al otro por dominio recíproco. Un conjunto de, digamos, tres manzanas constituye un ejemplo del número 3, pero no el numero 3 en sí mismo, el cual refiere a todos los conjuntos coordinables en un conjunto dado bajo la etiqueta "3".

Russell definió los otros dos términos primitivos de manera que los axiomas de Peano quedaran satisfechos: ellos exigen que cada número tenga un sucesivo que resulte a su vez un número y que haya un primer elemento en la serie numérica, el cual no es sucesivo de ningún otro número.

"Definición: Número, en general, es uno cualquiera de los conjuntos dentro de los cuales la coordinación reúne a las clases."

"Definición: Cero es la clase cuyo único elemento es la clase nula."

"Definición: Sucesivo del número de elementos de una clase dada es el número de elementos de la nueva clase que se forma agregando x a la clase primitiva, siendo x un elemento que no pertenece a esta última."

Estas definiciones nos permiten construir la serie de los números naturales hasta cualquier orden de magnitud arbitrariamente grande. Aún así, no podemos definir a la clase entera de los naturales, ya que no hay un último elemento en la misma donde podamos detenernos y dar por hecho el trabajo. Una definición por extensión, en la que iríamos listando el nombre de cada uno de los elementos pertenecientes a la clase, no es viable si ésta no tiene fin. Podemos, en cambio, dar una definición por intensión si establecemos alguna característica exclusiva de nuestra clase.

El **principio de inducción matemática** afirma que, si una propiedad pertenece a cero y al sucesivo de un número que tenga esa misma propiedad, entonces pertenecerá a todos los números naturales.

Las propiedades inductivas permiten definir clases hereditarias, tales que si n pertenece a una de ellas, también pertenecerá n+1.

"Definición: Posteridad de un número natural dado, respecto a la relación de un numero con el que le sigue, es el conjunto de los elementos que pertenecen a cada clase hereditaria de la que el número forma parte."

"Definición: Los números naturales son la posteridad de cero respecto a la relación de un numero con su siguiente inmediato."

Así definida la clase de los numeros naturales por Russell, podemos preguntar cuál es el número cardinal de la misma. La respuesta es: la clase de todas las clases coordinables con ella. Observemos que coordinar es una operación lógicamente más simple que la de contar. Podríamos decir que la operación de contar un conjunto empieza por el acto de señalar uno de sus elementos al tiempo que decimos un número del conjunto de los naturales, con lo que comenzamos a establecer la relación de uno-a-uno entre ambos conjuntos, luego repetimos este acto pasando de un objeto a otro y de cada numero al que le sigue. Damos por descontado que la operación será finita y que nos quedaremos con el último de los números que hayamos dicho como el cardinal de la colección. Esto último que damos por descontado no es en sí mismo esencial, y sólo tiene sentido cuando consideramos conjuntos finitos. ¿Qué ocurre al considerar conjuntos que no lo son? En tanto podamos ordenar los elementos en una lista en la cual cada lugar esté ocupado por un unico elemento y en la que cada elemento aparezca tarde o temprano en un lugar fijo determinado por la regla que genera el ordenamiento, sabremos que, si el conjunto entero no es finito, es coordinable con el de los números naturales.

Poder "ordenar un conjunto" significa poder dar instrucciones que, repetidas mecánicamente, vayan generando la lista, o encontrar una relación entre elementos que permita ordenarlos de acuerdo a lo dicho. La relación "de un numero con el que le sigue" cumple, en la definición de Russell, la función de establecer un ordenamiento adecuado.

Durante largo tiempo se consideró paradójico que un conjunto incluyera a otro y al mismo tiempo resultara que ambos tuvieran la misma cardinalidad. Notemos que, por ejemplo, el conjunto de los números pares resulta coordinable, y por lo tanto igual, al de los números naturales. Efectivamente, anotemos la lista de los números p, tales que $p_n=2n$. Estaremos ordenando una subclase de los números naturales que por definición es la de los números pares. También por definición hay exactamente un número par por cada número natural, por lo tanto, ambas clases tienen la misma cardinalidad.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{n} & & \mathbf{2n} \\
\mathbf{1} & \leftrightarrow & \mathbf{2} \\
\mathbf{2} & \leftrightarrow & \mathbf{4} \\
\mathbf{3} & \leftrightarrow & \mathbf{6} \\
\mathbf{4} & \leftrightarrow & \mathbf{8} \\
\mathbf{5} & \leftrightarrow & \mathbf{10} \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Esta propiedad de un conjunto, consistente en ser coordinable con algunos de sus subconjuntos, se llama **reflexividad** y permite caracterizar al número de la clase de los números naturales como no perteneciente a dicha clase. Efectivamente, todo cardinal natural, por definición, es finito, y un conjunto finito no puede ser reflexivo, ya que todo subconjunto formado a partir de él excluiría a, por lo menos, uno de sus elementos y ya no se cumpliría la relación de uno-a-uno entre ambos, pues el elemento sobrante en el conjunto dado, si tomamos a éste como dominio de la relación, no tendría imagen en el dominio recíproco constituido por el subconjunto.

Un número que no es finito tampoco puede ser inductivo, ya que no podría ser el sucesivo de ningún número inductivo, ni tener por sucesivo a ninguno de tales números.

Efectivamente, añadiendo un elemento a una clase finita dada obtenemos otra clase mayor, pero siempre finita, no importa cuan grande sea la clase que consideremos. Por el contrario ~~Asimismo~~, si añadimos un elemento a una clase infinita, su número no variará en absoluto, ya que éste depende de la posibilidad de ordenar a los elementos en una lista interminable, dicha posibilidad existe (o no) para todos los elementos de un conjunto dado, y no cambia por la adición o sustracción de algunos de estos elementos.

El número de los números inductivos no es a su vez inductivo. Como hemos visto, se trata de distintas clases de número caracterizadas por propiedades distintas. Así, se puede establecer una distinción de niveles dentro del lenguaje matemático, pues el descubrimiento de un número diferente a los demás comporta la introducción de un símbolo que lo distinga y de nuevas relaciones entre el mismo y lo otros símbolos. Este lenguaje así enriquecido permite superar paradojas tradicionales, como la de los números pares, separando dos clases de número que erróneamente se habían supuesto iguales.

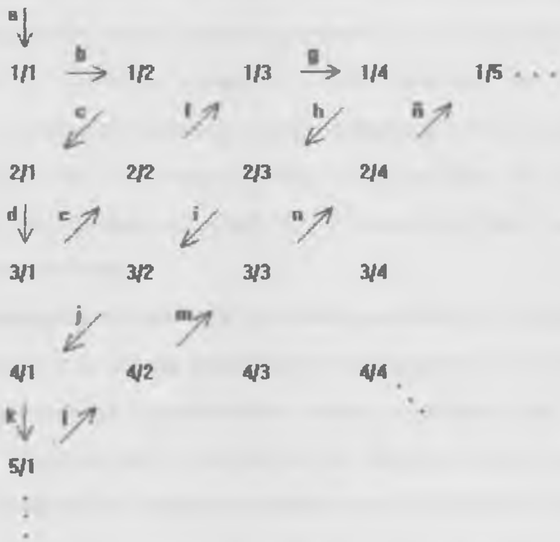
El nivel transfinito contiene al nivel finito y permite referirse a él sin incurrir en contradicción.

Propiedades de los números reales: Densidad y Continuidad

Una razón es un número expresado como el cociente entre dos números naturales, m y n. Una propiedad importante de las razones es la **densidad**. Que un conjunto ordenado sea denso significa que entre dos elementos cualesquiera del conjunto siempre podremos encontrar otros elementos que también pertenecen al mismo. Una forma segura de obtener tales elementos mediadores en el conjunto de las razones es obtener el promedio entre las dos razones dadas: sean a y b razones tales que $a<b$, entonces podemos calcular $c=(a+b)/2$ de modo que siempre resultará $a<c<b$. Asimismo resultara c una razón, ya que 2, como todo número natural, puede ser expresado también como razón, y las operaciones de suma y cociente entre razones siempre arrojan como resultado otra razón. Vemos entonces que, siguiendo un procedimiento como éste, podemos hacer que la diferencia entre las razones que vamos obteniendo llegue a ser menor que cualquier cantidad dada. Puesto que el procedimiento de subdivisión no tiene límite en cuanto a la cantidad de veces que se puede aplicar, sino que ésta es potencialmente infinita, se desprende de lo dicho que entre dos razones cualesquiera existe una cantidad infinita de otras razones.

La densidad diferencia al conjunto de las razones del conjunto de los números naturales. En efecto, la diferencia entre dos naturales nunca puede resultar menor que 1, y entre dos naturales consecutivos n y $n+1$ no se encuentran otros naturales.

A semejanza de aquel Libro de Arena imaginado por Borges, entre cuyas hojas siempre se interponía una cantidad interminable de otras hojas, se puede decir que en el conjunto de las razones no hay elementos consecutivos en orden de magnitud: veremos que la densidad depende de este tipo de ordenamiento. En efecto, si encontráramos una lista que enumere a las razones según otro criterio de ordenamiento que sí resultara exhaustivo, resultaría que el conjunto de las razones tiene la misma cardinalidad que el de los numeros naturales. El número cardinal de un conjunto no depende de un tipo de ordenamiento particular. Como todo conjunto de pares ordenados, las razones pueden ser anotadas en una tabla o matriz de dos entradas, la cual a su vez es reductible a una lista o matriz de una sola entrada, ya que podemos dar una regla que, aplicada mecánicamente, permita recorrer la tabla original de a un lugar por vez, generando así una lista única en la cual cada razón tendría un lugar determinado ubicado entre la compañera que le precede y la que le sigue inmediatamente. Surge entonces que el conjunto de las razones y el de los números naturales son coordinables, y, por lo tanto su cardinalidad resulta equivalente.



Hay numeros tales que no pueden ser expresados como razones: son los llamados irracionales. Un ejemplo de los mismos lo constituyen la raiz cuadrada de 2 y toda una serie de raices de números naturales: de ellas se puede mostrar que no equivalen a ninguna razón[13]. Los irracionales aparecen como valores de ciertas funciones para determinados argumentos naturales. No se los buscó, sino más bien aparecieron imprevistamente y durante mucho tiempo fueron huéspedes indeseables que desordenaban el prolijo cuarto de las matemáticas.

Si tratamos de calcular la expresión decimal de un irracional mediante el algoritmo correspondiente, nunca podremos completarla, ya que la misma se extiende indefinidamente, de modo que siempre es posible determinar una nueva cifra significativa en su cadena, sin importar la longitud alcanzada por ésta. Los decimales de extensión finita y los de extensión infinita pero periódica se corresponden biunívocamente con las razones, en cambio los de extensión infinita y no periódica corresponden a los irracionales.

¿Será enumerable el conjunto de los números que admiten la notación decimal?

La respuesta es no, a causa precisamente de los irracionales. Cantor lo demostró mediante el argumento de diagonalización. Empezó suponiendo que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los decimales y el de los números naturales. El razonamiento se simplifica atendiendo sólo a los decimales comprendidos entre cero y uno, luego la conclusión puede ser generalizada por inducción. Dada cualquier lista posible de tales numeros siempre es posible construir un nuevo decimal no incluido en la misma. Fijémonos en la primera cifra del primer decimal de nuestra lista, y anotemos un dígito diferente como primera cifra del número que vamos a construir. Continuamos la construcción agregando un segundo dígito que difiera de la segunda cifra en el segundo decimal, un tercero que difiera de la tercera cifra del tercer decimal, y así sucesiva e indefinidamente. El número así construido difiere al menos en una cifra de

---

[13] RUSSELL, B., Introducción a la Filosofía Matemática. Pags. 99-100
Ver Nota 2 al final de esta parte

cada uno de los numeros que componen la lista dada, y se encuentra comprendido también en el intervalo 0,1.

$1 \leftrightarrow ,1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ldots$

$2 \leftrightarrow ,3\ 0\ 1\ 0\ 1$

$3 \leftrightarrow ,4\ 7\ 7\ 1\ 2$

$4 \leftrightarrow ,6\ 0\ 2\ 0\ 5$

$5 \leftrightarrow ,6\ 9\ 8\ 9\ 7$

$\vdots \qquad \ddots$

$,9\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ldots$

Vemos que es imposible confeccionar una lista donde aparezcan todas las expresiones decimales. Como la suposición hecha al comienzo implica la existencia de la lista, podemos negar lo supuesto aplicando la regla de Modus Tollens. La respuesta a la pregunta anteriormente planteada resulta, por lo tanto, negativa.

Cantor introdujo un nuevo símbolo para designar la cardinalidad transfinita: el alef ($\aleph$) y, dado que no todos los conjuntos transfinitos son iguales, distinguió con un subíndice a los distintos cardinales. llamó $\aleph_0$ al cardinal del conjunto de los números naturales y $\aleph_1$ al cardinal del conjunto de los numeros reales.

Dedekind formuló el método de las cortaduras a fin de poder caracterizar a los irracionales y a una importante propiedad relacionada con ellos: la **continuidad**. Dicho método consiste en desagregar el conjunto de las razones en dos subconjuntos, de modo que todos los elementos de uno de ellos precedan, en orden de magnitud, a todos los elementos del otro.

Podemos distinguir cuatro tipos de cortadura, según la forma en que se defina la separación entre los subconjuntos o secciones. A fin de establecer dicha distinción, diremos, en primer lugar, que un conjunto bien ordenado, y, por estar comprendida en dicho concepto, una sección del conjunto de las razones tiene *máximum* (*minimum*) cuando incluye algun elemento tal que todo elemento de la sección lo precede (sucede) en magnitud.

Primer Caso: La sección superior tiene *minimum* y la inferior tiene *máximum*.

Cualquier ordenamiento que contenga elementos consecutivos ejemplifica este caso, por ejemplo, en la sucesión de los números naturales la sección inferior terminara con algún elemento n, mientras la superior comenzará con $n+1$.

Para los otros casos necesitaremos el conjunto de las razones, que no contiene elementos consecutivos.

Segundo Caso: Existe un *máximum* para la sección inferior, pero no hay *minimum* para la superior.

Por ejemplo, la sección inferior contiene todas las razones menores o iguales que 1, y la superior todas las razones estrictamente mayores que 1.

Tercer Caso: No existe *máximum* para la sección inferior, pero sí hay un *minimum* para la superior.

Por ejemplo, la sección inferior contiene todas las razones estrictamente menores que 1, y la superior todas las mayores o iguales que 1.

Vamos a decir que un elemento x es un límite superior (inferior) de un conjunto ß si se verifican las siguientes condiciones:

_ que ß no tenga *máximum* (*minimum*)

_ que cada elemento de ß preceda (suceda) en magnitud a x

_ que todo elemento anterior (posterior) a x en orden de magnitud preceda (suceda) también a algún elemento de ß.

En el segundo caso el *máximum* de la sección inferior constituye el límite inferior para la sección superior.

En el tercer caso, el *minimum* de la sección superior constituye el límite superior para la sección inferior.

Diremos que una sección tiene frontera superior (inferior) cuando tenga límite superior (inferior) o *máximum* (*minimum*). De esta forma, la frontera superior (inferior) es el último (primer) elemento del ordenamiento, si lo hubiera. Si no lo hay, la frontera en cuestión es el primer elemento que sigue (precede) inmediatamente a todos los elementos de la sección dada. Cuando no hay *máximum (minimum)* ni límite no hay frontera.

Llamaremos "dedekindiano" a un conjunto ordenado sólo cuando cada sección suya tenga frontera. En seguida veremos que el cuarto caso delata al conjunto de las razones como no dedekindiano.

Cuarto Caso: No existe *máximum* ni *minimum* para ninguna de las dos secciones. Por lo tanto tampoco hay límite, es decir, no hay ningún elemento que se ubique inmediatamente a continuación de todos los elementos de ninguna de las secciones.

Por ejemplo, la sección inferior contiene todas las razones cuyo cuadrado es menor que 2, y la superior todas aquellas cuyo cuadrado es mayor que 2.

En este caso tenemos una laguna: ninguna de las dos secciones tiene frontera y la razón cuyo cuadrado es exactamente 2 no aparece, aunque creíamos tenerla atrapada en el cerco de las razones que se le aproximan por exceso o por defecto. Tal exceso o defecto puede ser disminuido por debajo de cualquier valor arbitrariamente escogido, pero ni soñar con echarle el guante al valor exacto de la raíz cuadrada de 2.

Según la narración de Borges, si uno abre el Libro de Arena, se fija en el número de página, vuelve a cerrarlo y luego trata de encontrar dicha página siguiendo la numeración del Libro, la página exacta nunca volverá a aparecer, sin importar cuántas páginas recorra uno. Este exasperante comportamiento guarda cierta semejanza con el de los números irracionales.

Russell recomienda el siguiente "método para rellenar lagunas":

Llamemos "segmento" a la sección inferior, entonces diremos que:

- Un número real es un segmento del conjunto de las razones.

- Un número real racional es un segmento del conjunto de las razones que tiene frontera.

- Un número real irracional es un segmento del conjunto de las razones que no tiene frontera.

Un ordenamiento con lagunas de Dedekind da origen a más segmentos que los elementos que tiene, pues cada elemento determina un segmento que tiene a ese elemento por frontera y además hay segmentos sin frontera.

Como estos segmentos irracionales pueden ser representados por progresiones de razones que no admiten ninguna notación finita, se les puede aplicar el método de diagonalización, del mismo modo que lo hicimos con los decimales con lo que se demuestra que los números reales en conjunto no son enumerables.

Las cortaduras mostraron que la propiedad de ser denso no basta por si sola para garantizar que un conjunto como el de las razones pueda representar, por ejemplo, la longitud de cualquier segmento de recta dado, ya que si tal longitud estuviera determinada por una expresión irracional, no encontraríamos en dicho conjunto más que una aproximación al valor real.

La propiedad de un conjunto de ser coordinable con el conjunto de los numeros reales se llama **continuidad**

Dedekind la definió así: un conjunto es continuo si es dedekindiano y denso. En realidad estas dos cláusulas son condición necesaria pero no suficiente para caracterizar la continuidad. Efectivamente, estamos seguros de poder representar todos los irracionales como segmentos del conjunto de las razones porque sabemos que este último es infinito y enumerable. Pero no sabemos si todos los conjuntos que tienen continuidad dedekindiana contienen a su vez una clase densa y enumerable como la de los racionales.

"Definición - Un conjunto ordenado tiene "continuidad dedekindiana" cuando es dedekindiano y compacto.

Pero esta definición todavía es demasiado amplia para muchos casos. Supongamos, por ejemplo, que deseamos asignar al espacio geométrico propiedades tales que permitan tener la certidumbre de que cada uno de sus puntos podrá ser determinado por medio de coordenadas que son números reales: pues bien, la continuidad dedekindiana por sí sola no basta para asegurarlo. Queremos estar seguros de que todo punto que no puede ser determinado por coordenadas *racionales* puede serlo como el límite de una *progresión* de puntos cuyas coordenadas son racionales, y ésta es una nueva propiedad que nuestra definición no nos permite deducir.

Tenemos así que completar el examen de esos conjuntos en lo concerniente a sus límites. Esta investigación fue hecha por Cantor y constituyó la base de su definición de continuidad, aunque, en su forma más simple, esta definición oculta algo las consideraciones que le han dado origen. Por esta razón revisaremos primero algunas de las concepciones de Cantor a este respecto, antes de dar su definición de continuidad.

Cantor define a un conjunto ordenado como "perfecto" cuando todos sus puntos son puntos-límites y todos sus puntos-límites pertenecen al conjunto, pero esta definición no expresa suficientemente lo que él quiere decir. No existe la debida corrección en lo referente a esta propiedad de que todos sus puntos son puntos-límites. Ésta es una propiedad que pertenece a los conjuntos compactos y no a otros, si todos los puntos deben ser puntos-límites superiores o puntos-límites inferiores. Pero si sólo se admite que ellos son puntos-límites de una sola especie sin especificar cuál, habrá otros conjuntos ordenados que tendrán la propiedad en cuestión, por ejemplo, el conjunto ordenado de los numeros decimales (comunes y periodicos), en el cual un decimal que termine en un período 9 se considere distinto del correspondiente decimal común cuya última cifra sea la anterior al período aumentada en 1. Este conjunto es casi compacto, pero tiene elementos excepcionales que son consecutivos, y de los cuales el primero no tiene predecesor inmediato. Puestos aparte estos conjuntos, todos los ordenamientos en los cuales cada punto es un punto-límite es compacto. Esto se verifica sin excepción si se especifica que cada punto es un punto-límite superior (o un punto-límite inferior).

Aunque Cantor no considera explícitamente el tema debemos distinguir diferentes especies de punto-límite según la naturaleza de los subconjuntos menores con ayuda de los cuales se los puede definir. Cantor admite que se los debe determinar por medio de progresiones o de regresiones (que son las recíprocas de las progresiones). Cuando cada elemento de nuestro conjunto es el límite de una progresión o regresión, Cantor lo denomina "condensado en sí mismo" (insichdicht).

Ahora llegamos a la segunda propiedad que sirvió de base para definir la perfección, es decir, la propiedad del conjunto que segun Cantor le da el carácter de "cerrado" (abgeschlossen). Esta propiedad, como vimos, primero fue definida como consistente en que todos los puntos-límite del conjunto pertenecen a él. Pero esto sólo tiene una significación efectiva cuando el conjunto está dado como contenido en otro más extenso, (por ejemplo, una selección de números reales), y los puntos-límite están tomados en relación con el conjunto mas extenso. Por otra parte, si un conjunto ordenado es considerado en sí mismo, no puede dejar de contener sus puntos-límite. Lo que Cantor quiere decir no es exactamente lo que él dice; en verdad, en otras ocasiones se expresa de una manera distinta y dice entonces lo que piensa. Lo que realmente quiere expresar es que cada conjunto subordinado perteneciente a una especie que puede tener un límite, encuentra este límite dentro del conjunto primitivo; es decir, cada ordenamiento subordinado que no tiene *máximum* tiene un límite, o sea, que cada conjunto subordinado tiene una frontera. Pero Cantor no establece esto para todo conjunto subordinado, sino sólo para progresiones y regresiones. (No está tan claro como para reconocer hasta qué punto él advirtió que esto es una limitación). Así, finalmente, encontramos que la definición deseada es la siguiente:

Se dice que un conjunto ordenado es "cerrado" (abgeschlossen) cuando cada progresión o regresión contenida en el conjunto tiene un límite en el interior del mismo.

Tenemos, además, esta definición:

Se dice que un conjunto es "perfecto" cuando es condensado en sí mismo y cerrado, es decir, cuando cada elemento es límite de una progresión o de una regresión, y cada progresión o regresión contenida en el conjunto tiene un límite en el interior del mismo.

Buscando una definición de continuidad, lo que Cantor procura es una definición que sea aplicable al conjunto de los numeros reales y a todo conjunto coordinable con aquél, pero no con otros. Para este fin tenemos que agregar una propiedad más. Entre los números reales, algunos son racionales y otros irracionales. Aunque el número de estos últimos es mayor que el de los racionales, sin embargo existen racionales entre dos números reales cualesquiera, por pequeña que sea la diferencia entre ellos. El número de los racionales es (...) $\aleph_0$. Esto proporciona una propiedad adicional que basta para caracterizar completamente a la continuidad, es la propiedad de encerrar una clase de $\aleph_0$ elementos, tal que algunos elementos de esta clase siempre se presenten entre dos elementos cualesquiera de nuestro conjunto, por próximos que estos se encuentren entre sí. Esta propiedad, agregada a la de perfección, basta para definir una clase de conjuntos, todos coordinables entre sí y que tienen, por lo tanto, un mismo número serial. Cantor llama a esta clase, la de los conjuntos continuos.

Podemos simplificar ligeramente su definición. Diremos para comenzar: una "clase mediana" de un conjunto ordenado es una subclase del campo, tal que sus elementos se encuentren entre dos elementos cualesquiera del conjunto.

Así, los números racionales forman una clase mediana del conjunto de los números reales. Es claro que las clases medianas sólo pueden existir en los conjuntos compactos.

Encontramos entonces que la definición de Cantor es equivalente a la siguiente:

Un conjunto es continuo cuando reúne las siguientes condiciones: a) es dedekindiano; b) contiene una clase mediana que tiene $\aleph_0$ elementos.

Para evitar confusión llamaremos a esta continuidad la "continuidad cantoriana". Se verá que ella implica continuidad dedekindiana, pero la recíproca no es verdadera. Todos los conjuntos que tienen continuidad cantoriana son coordinables, pero no lo son todos los que tienen continuidad dedekindiana."[14]

---

[14] RUSSELL, B., Introducción a la Filosofía Matemática. Pags. 148-151

Continuidad y Discreción

Para explicar la continuidad existían dos caminos:

1_ Admitir que el continuo es inconmensurable desde cualquier unidad, con lo cual resultaba inabordable para la aritmética: esto hacía dicha solución inaceptable.

2_ Admitir que el continuo es mensurable según unidades infinitamente pequeñas, los "infinitésimos". Aparte de evitar la consecuencia indeseable que ya mencionamos, esta concepción tiene la ventaja siguiente: si uno supone que el continuo está compuesto de unidades de tamaño finito, supone que tales unidades tienen límites, y que esos límites son interiores al objeto continuo. Pero entonces, el objeto en cuestión ya no tendría una propiedad consecuente con la continuidad, cual es la de no poseer límites en su interior.

Retomemos la ilustración de nuestra Introducción en base al movimiento, tomada de Zenón de Elea.

Decir que las unidades del continuo tienen algún tamaño equivale a decir que los puntos del espacio y los instantes del tiempo tienen tamaño. Imaginemos un punto en movimiento: Éste se encontraría en un instante dado dentro de los límites de una posición determinada y al instante siguiente estaría en la misma posición o en la que le siga inmediatamente. Admitiendo que nuestro móvil posea la máxima velocidad imaginable, ésta resultará ser exactamente de un punto por cada instante transcurrido. Efectivamente, la velocidad no podría ser mayor, ya que de ser así habría puntos intermedios en la trayectoria del móvil que nunca serían ocupados por éste, lo que destruiría nuestra afirmación de la continuidad del movimiento. Así, a la velocidad máxima imaginable, nuestro móvil a cada instante dejaría de estar dentro de los límites de un punto dado para estar dentro de los límite del punto siguiente, pero aparentemente sin atravesar jamás el límite entre ambos, ya que esto supondría ocupar posiciones intermedias, y esta suposicion destruye la noción de "límite bien definido entre unidades mínimas de tamaño finito".

Entonces el movimiento consistiria en una sucesión de inmovilidades, en una apariencia enmascarada por nuestra insuficiente capacidad perceptiva, así como una película con movimiento es en realidad una sucesión de imágenes fijas proyectadas con la velocidad suficiente para producir la animación. Este "seccionamiento" en unidades de tamaño fijo es la característica que llamamos **discreción**, y deseamos oponer a la idea de continuidad. Nuestro problema, sin embargo, es que el sistema numérico se ha desarrollado en base a unidades de características discretas, y aún así se insiste en reducir, en última instancia, la explicación del continuo al sistema mencionado.

Los infinitésimos no tendrían extensión, y por lo tanto, tampoco tendrían límites. Se podría formar el continuo con ellos sin introducir fastidiosos límites en su interior. A pesar de sus ventajas, no existía fundamento lógico para tales unidades, así como tampoco era fácil aprehenderlas intuitivamente. Sin embargo, su uso se mantuvo por necesidad de alguna explicación del continuo, aunque no fuera todo lo sólida y convincente que uno desearía.

Los números reales en la caracterizacion inaugurada por Dedekind y Cantor no presentan el problema de tener que forzar a la imaginación a concebir magnitudes sin tamaño o evanescentemente pequeñas. Los números reales están perfectamente diferenciados y separados uno de otro por límites claramente definidos, tienen una magnitud específica y al sumarlos el resultado no se esfuma ni se escurre entre los dedos. Sin embargo, al no estar formados por la adición de unidades indivisibles, no poseen límites internos. Ningún tipo de unidad serviría para construir la raíz cuadrada de 2. Hay límites que separan un número real de otro, lo que no existe son límites que separen las unidades reales, ya que no hay tales unidades.

Los infinitésimos ya no resultan necesarios para explicar la continuidad. Lo que debemos hacer, en cambio, es admitir que, dada una cantidad tan pequeña como se desee, siempre es posible obtener otra aún mas pequeña sin que haya un "piso", o término final para este proceso. El error consistía en suponer que existían determinados elementos como resultado final del proceso de subdivisión. Admitiendo esto se seguía que estos elementos debían resultar infinitamente pequeños para evitar la conclusión absurda de que el movimiento es imposible. Pero no hay necesidad de suponer la existencia de tales elementos, y obviamente no puede existir un resultado final del proceso de subdivisión si definimos a éste como interminable.

Notas

Nota 1: "...expondremos algunas de las razones que demuestran por qué los procedimientos de Peano son menos absolutos de lo que parecen.

En primer lugar, las tres ideas primitivas de Peano - es decir, 'cero', 'número' y 'sucesivo' - son susceptibles de recibir un número infinito de interpretaciones diferentes, que satisfacen a las cinco proposiciones primitivas. Daremos algunos ejemplos.

INTERPRETACIÓN I. - Supongamos que 'cero' signifique 100 y que por 'número' se entienda todo elemento de la sucesión de los números naturales a partir de 100. Entonces, todas nuestras proposiciones primitivas quedarán satisfechas, aún la cuarta ["Cero no es el sucesivo de ningún número"], porque, si bien es cierto que 100 es el sucesivo de 99, debe tenerse presente que 99 no es un 'número' en el sentido que hemos dado ahora a la palabra 'número'. Es evidente que cualquier número puede reemplazar a 100 en este ejemplo, para significar el cero.

INTERPRETACIÓN II - Supongamos a 'cero' con su significado usual, pero a 'número' como lo que corrientemente llamamos 'número par', y convengamos que el 'sucesivo' de un número sea el que resulta de sumarle dos.

Entonces, '1' estará representado por el número 2, '2' por el número 4, y así siguiendo, ahora la sucesión de los 'números', será:

$$0, 2, 4, 6, 8, \ldots$$

Las cinco premisas de Peano todavía se cumplen.

INTERPRETACIÓN III - Supongamos que 'cero' significa 1, y que 'número' significa todo elemento de la sucesión

$$1, \, {}^{1}/_{2}, \, {}^{1}/_{4}, \, {}^{1}/_{8}, \, {}^{1}/_{16}, \ldots$$

y convengamos que 'sucesivo' significa 'mitad'. Entonces los cinco axiomas de Peano serán verdaderos en esta sucesión.

INTERPRETACIÓN GENERAL.- Es claro que tales ejemplos pueden multiplicarse indefinidamente. En efecto, dada una sucesión ilimitada:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$$

que no contenga repeticiones, que tenga un comienzo, y en la que cada elemento pueda obtenerse a partir del origen mediante un número finito de operaciones, tendremos una sucesión de elementos que verifican los axiomas de Peano. Esto se nota fácilmente, aunque la prueba formal es un poco extensa. Supongamos que '0' significa x_0, que por 'número' se considere cualquier elemento de la sucesión, que el 'sucesivo' de x_n sea x_{n+1}. Entonces:

a) 'Cero es un número', pues x_0 es un elemento de esta sucesión.

b) 'El sucesivo de todo número es un número', pues, tomando cualquier elemento x_n en la sucesión, x_{n+1} está también en la sucesión.

c) 'Dos números no tienen el mismo sucesivo', o sea, si x_m y x_n son dos elementos diferentes de la sucesión, x_{m+1} y x_{n+1} son diferentes: esto resulta de que (por hipótesis) no hay elementos repetidos en la sucesión.

d) 'Cero no es el sucesivo de ningún número' puesto que ningún elemento de la sucesión está antes que x_0.

e) Resulta que: cualquier propiedad que pertenezca a x_0, y a x_{n+1}, con tal que pertenezca a x_n, pertenece a todas las x. Esto proviene de la propiedad correspondiente de los números.

Una sucesión de la forma:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$$

en la que hay un primer elemento, un sucesivo para cada elemento (de modo que no hay último elemento), no hay repeticiones y cada elemento puede ser obtenido a partir del inicial mediante un número finito operaciones, se llama una **progresión**. Las progresiones tienen una gran importancia en los principios de la matemática. Como justamente hemos visto, toda progresión verifica los cinco axiomas de Peano. Puede demostrarse recíprocamente que toda sucesión que verifica los cinco axiomas de Peano es una progresión. De aquí que estos cinco axiomas puedan ser empleados para definir la clase de las progresiones: las 'progresiones' son las sucesiones que verifican estos cinco axiomas. Cualquier progresión puede ser tomada como base de la matemática pura:

podemos dar el nombre de 'cero' a su primer elemento, el de 'numero' a todo elemento de ella y el de 'sucesivo' al siguiente en la progresión. La progresión no necesita estar formada de numeros, puede estar compuesta de puntos en el espacio, momentos en el tiempo u otros elementos cualesquiera de los que haya una variedad infinita. Cada progresión diferente dará origen a una interpretación distinta de todas las proposiciones de la matemática pura clásica; todas estas interpretaciones posibles serán igualmente verdaderas. En el sistema de Peano no hay nada que permita distinguir una entre estas diferentes interpretaciones de sus ideas primitivas. Se admite que sabemos lo que significa 'cero' y que no supondremos que este símbolo significa 100, la Aguja de Cleopatra o cualquier otra cosa que se piense.

Es un hecho importante reconocer que, 'cero', 'número' y 'sucesivo', no pueden ser definidos por medio de los cinco axiomas de Peano, y que a dichos términos se los debe entender independientemente. Necesitamos los numeros no sólo para verificar las fórmulas matemáticas, sino también para aplicarlos adecuadamente a los objetos comunes. Debemos tener diez dedos, dos ojos y una nariz. Un sistema en el cual '1' signifique 100, '2' represente a 101 y así sucesivamente; puede ser completamente adecuado para la matemática pura pero no se aplicaría a los hechos de la vida diaria.

Es menester que 'cero', 'número' y 'sucesivo', tengan un significado tal que nos den un cómputo exacto de los dedos, ojos y narices.

Ya tenemos algún conocimiento (aunque no suficientemente establecido y analizado) de lo que significan '1', '2', etc., y el empleo de los números en aritmética debe corresponder a este conocimiento. No podemos asegurar que este sea el caso con el método de Peano; todo lo que podemos hacer , si adoptamos su método es decir: sabemos lo que significan 'cero', 'número' y 'sucesivo', aunque no podemos explicar un significado mediante otros conceptos más simples. Es completamente legítimo expresarse así cuando estamos obligados a hacerlo, y, en alguna manera, todos lo estamos; pero el objeto de la filosofía matemática es alejar esta confusión tanto como nos sea posible. Gracias a la teoría lógica de la aritmética podemos diferir esta obligación por mucho tiempo.

Se puede sugerir que, en lugar de concebir a 'cero', 'numero' y 'sucesivo' como vocablos de los cuales conocemos su significado, aunque no podamos definirlos, los consideremos simplemente como tres términos cualesquiera que verifiquen los cinco axiomas de Peano. Entonces no tendrían más ese carácter de significación determinada aunque indefinible; serían 'variables', términos respecto de los cuales se formularían ciertas hipótesis procedentes del grupo de los cinco axiomas, pero que por consiguiente quedarían indeterminados. Si adoptamos este plan, nuestros teoremas no serán demostrados para una determinada sucesión de elementos llamados 'números naturales', sino para todas las sucesiones de elementos vinculados por ciertas propiedades.

Tal procedimiento no es ilusorio y en verdad, en ciertos casos permite una valiosa generalización. Pero por dos razones es incapaz de dar una base adecuada para la aritmética. En primer lugar, no nos hace conocer si hay una sucesión de términos que verifican los axiomas de Peano; igualmente no nos da ninguna sugestión para descubrir si existe tal sucesión. En segundo lugar, como ya hemos notado, necesitamos números que podamos emplear para contar los objetos comunes y esto requiere que los números tengan un significado preciso, y no sólo que tengan algunas propiedades formales. Esta significación precisa está definida gracias a la teoría lógica de la aritmética."

(RUSSELL, B., Introducción a la Filosofía Matemática, Pags. 18-23)

Nota 2: "... no hay ninguna fracción cuyo cuadrado sea dos. (...) La prueba es extraordinariamente simple. Supongamos por un momento que m/n sea la raiz de 2, en tal caso $m^2/n^2 = 2$, o también $m^2=2n^2$. De esta manera m^2 es un número par, o sea igual a un múltiplo de 2, y por consiguiente m debe ser un numero par, porque en caso contrario el cuadrado de un número impar resultaría también impar. Entonces, si m es par, m^2 debe ser divisible por 4, puesto que si $m=2p$, es $m^2=4p^2$. En esta forma tendremos $4p^2=2n^2$, donde p es la mitad de m. Por esto $2p^2=n^2$ y entonces la razón n/p sería también la raíz cuadrada de 2.

Pero entonces podemos repetir el argumento: si $n=2q$, p/q también sera la raíz cuadrada de 2, y así a lo largo de una sucesión indefinida de números que son cada uno la mitad del precedente. Pero esto es imposible, porque si dividimos un número por 2, y luego también su mitad y continuamos de esta manera, debemos hallar necesariamente un número impar después de un número finito de operaciones. Podemos demostrar más simplemente esta propiedad admitiendo que la fracción m/n de la cual partimos haya sido reducida a su más simple expresión, en cuyo caso m y n son primos entre sí; en ese caso, m y n no pueden ser pares a la vez y hemos visto que, si $m^2/n^2=2$, m y n deben serlo. Por lo tanto, no puede haber ninguna fracción m/n cuyo cuadrado sea igual a 2."

(RUSSELL, B., Introducción a la Filosofía Matemática, Pags. 99-100)

SEGUNDA PARTE

Aplicación de la teoría del infinito a la caracterización de sistemas y lenguajes

"Vivimos en el tiempo, que es sucesivo, pero tratamos de vivir sub specie aeternitatis*"*

J. L. Borges

Diagonalización

Hemos visto que el cardinal del conjunto de los números reales (R) es mayor que el cardinal del conjunto de los números naturales (N)

Podemos plantear ahora dos preguntas de gran interés teórico:

1) ¿Existirán otros conjuntos aún mayores que N y que R?

2) ¿Existirán conjuntos tales que resulten mayores que N pero menores que R?

La respuesta a la pregunta 1 es sí. Dado un conjunto cualquiera, el conjunto de todos sus subconjuntos (que se forman combinando los elementos del conjunto de todas las maneras posibles) es necesariamente mayor que el conjunto dado.

A continuación ofrecemos una adaptación de la demostración de esta afirmación dada por Boolos y Jeffrey en el capítulo 2 de su libro <u>Computability and Logic</u>. En la misma veremos cómo la aplicación del método de diagonalización es generalizada y extendida a todo tipo de conjuntos, no sólo los numéricos. Esta extensión nos permitirá luego referirnos a aplicaciones de los cardinales transfinitos en la comparación de conjuntos formados por otro tipo de objetos.

"No todos los conjuntos son enumerables: algunos son demasiado grandes. Un ejemplo es el conjunto de todos los conjuntos de enteros positivos. Este conjunto (llamémoslo 'p*') contiene, como miembro, a cada conjunto finito y a cada conjunto infinito de enteros positivos: el conjunto vacío ∅, el conjunto p de todos los enteros positivos, y todo conjunto entre esos dos extremos.

Para mostrar (siguiendo a Georg Cantor) que p* no es enumerable, damos un método, el cual puede ser aplicado a cualquier lista L de conjuntos de enteros positivos a fin de descubrir un conjunto $\overline{D}(L)$ de enteros positivos que no esté nombrado en la lista. Si usted tratara entonces de reparar el defecto añadiendo $\overline{D}(L)$ a la lista como nuevo miembro, el mismo método, aplicado a la lista aumentada L', producirá un conjunto diferente $\overline{D}(L')$ el cual no está en la lista aumentada.

El método es éste. Dada cualquier lista infinita

$$S_1, S_2, S_3, \ldots$$

de conjuntos de enteros positivos, definimos un conjunto $\bar{D}(L)$ como sigue:

para cada entero positivo n, n está en $\bar{D}(L)$ si y sólo si n no está en S_n (*).

Como indica la notación '$\bar{D}(L)$', la composición del conjunto $\bar{D}(L)$ depende de la composición de la lista L, así que diferentes listas L pueden producir diferentes conjuntos $\bar{D}(L)$. Quede claro que el enunciado (*) define un conjunto $\bar{D}(L)$ para el cual, dado cualquier entero positivo n, podemos decir si n está en $\bar{D}(L)$ en tanto podamos decir si n está en el n-ésimo conjunto de la lista L. Por lo tanto, si S_3 resultara ser el conjunto E de todos los enteros positivos pares, el número 3 no estaría en S_3 y, en consecuencia estaría en $\bar{D}(L)$.

Para mostrar que el conjunto $\bar{D}(L)$ que este método produce nunca está en la lista L dada argüiremos por reductio ad absurdum: supongamos que $\bar{D}(L)$ aparezca en algún lugar de la lista L, digamos como la entrada número m, y deduciremos una contradicción, mostrando por lo tanto que la suposición debe ser falsa. Aquí vamos.

Suposición: para algún entero positivo m,

$$S_m = \bar{D}(L).$$

(Por lo tanto, si 127 fuera el tal m, estaríamos suponiendo que "$\bar{D}(L)$" y "S_{127}" son dos nombres del mismo conjunto: estaríamos suponiendo que un entero positivo pertenece a $\bar{D}(L)$ si y sólo si pertenece al conjunto número 127 de la lista L).

Para deducir una contradicción de esta suposición aplicamos la definición (*) al entero positivo m en particular: con n=m. (*) nos dice que m está en $\bar{D}(L)$ si y sólo si m no está en S_m.

Ahora una contradicción se sigue de nuestra suposición: si S_m y $\bar{D}(L)$ son uno y el mismo conjunto tenemos que m está en $\bar{D}(L)$ si y sólo si m no está en $\bar{D}(L)$.

Ya que esta es una categórica autocontradicción nuestra suposición debe ser falsa.

No hay entero positivo m para el cual se verifique la igualdad $S_m = D(L)$.

En otras palabras el conjunto $\bar{D}(L)$ no aparece en ningún lugar de la lista L.

Entonces el método funciona. Aplicado a cualquier lista de conjuntos de enteros positivos produce un conjunto de enteros positivos que no estaba en la lista. Entonces ninguna lista enumera todos los conjuntos de enteros positivos: el conjunto P de todos esos conjuntos no es enumerable.

El método ("diagonalización") es tan importante que conviene considerarlo nuevamente desde un punto de vista ligeramente diferente, el cual permite que las entradas en la lista L sean visualizadas más fácilmente.

Pensemos en los conjuntos S_1, S_2, S_3,...como representados por las funciones s_1, s_2, s_3,...de enteros positivos las cuales toman a los números 0 y 1 como valores. La relación entre el conjunto S_n y la correspondiente función s_n es simplemente ésta: por cada entero positivo p tenemos

$$s_n(p) = \begin{cases} 1 \text{ si } p \text{ está en } S_n \\ 0 \text{ si } p \text{ no está en } S_n \end{cases}$$

Entonces la lista L puede ser visualizada como un arreglo rectangular infinito de ceros y unos, como en la siguiente tabla

	1	2	3	4 ...
s_1	$s_1(1)$	$s_1(2)$	$s_1(3)$	$s_1(4)$
s_2	$s_2(1)$	$s_2(2)$	$s_2(3)$	$s_2(4)$
s_3	$s_3(1)$	$s_3(2)$	$s_3(3)$	$s_3(4)$
s_4	$s_4(1)$	$s_4(2)$	$s_4(3)$	$s_4(4)$
$\vdots$				$\ddots$

La enésima fila de este arreglo representa a la función s_n y, por lo tanto, representa al conjunto S_n: esa fila

$$s_n(1)\ s_n(2)\ s_n(3)...$$

es una secuencia de ceros y unos en la cual la p-ésima entrada, $s_n(p)$, es uno o cero según que el número p esté o no esté en el conjunto S_n.

Las entradas en la diagonal del arreglo (desde la esquina superior izquierda hacia la inferior derecha) forman una secuencia de ceros y unos:

$$s_1(1)\ s_2(2)\ s_3(3)...$$

Esta secuencia de ceros y unos ("la secuencia diagonal"), determina un conjunto de enteros positivos ("el conjunto diagonal"), el cual bien puede estar entre aquellos listados en L. En otras palabras, bien puede haber un entero positivo d tal que el conjunto S_d no sea otro que nuestro conjunto diagonal. La secuencia de ceros y unos en la d-ésima fila de la tabla coincidiría entonces con la secuencia diagonal, entrada por entrada:

$s_d(1)=s_1(1);\ s_d(2)=s_2(2),\ s_d(3)=s_3(3)...$

El conjunto diagonal puede aparecer o no en la lista L, dependiendo de la configuración particular de dicha lista. Lo que queremos es un conjunto que con seguridad no aparezca en L, sin importar cómo esté compuesta L.

Tenemos tal conjunto al alcance de la mano: es el conjunto antidiagonal, formado por los enteros positivos que no están en el conjunto diagonal. La correspondiente secuencia antidiagonal se obtiene cambiando ceros por unos y unos por ceros en la secuencia diagonal. Podemos pensar esta transformación como la operación de tomar cada miembro perteneciente a la secuencia diagonal y sustraerlo de 1: escribimos la secuencia antidiagonal como

$$1\text{-}s_1(1);\ 1\text{-}s_2(2);\ 1\text{-}s_3(3)...$$

De esta secuencia podemos estar seguros que no aparece como una fila de la tabla, ya que si apareciera- digamos como la m-ésima fila -deberíamos tener

$$s_m(1)=1\text{-}s_1(1);\ s_m(2)=1\text{-}s_2(2);\ s_m(3)=1\text{-}s_3(3);...s_m(m)=1\text{-}s_m(m)$$

Pero la m-ésima de estas ecuaciones no puede ser sostenida. (Prueba: $s_m(m)$ debe ser cero o uno. Si es cero, la m-ésima ecuación dice que 0=1. Si es uno la m-ésima ecuación dice que 1=0).

Entonces la secuencia antidiagonal difiere de cada conjunto en nuestra lista L.

Como el conjunto antidiagonal es igual al conjunto D(L), hemos repetido con la ayuda de nuestra tabla la prueba de que D(L) no aparece en ningún lugar de la lista L."[15]

Hasta aquí expusimos la demostración de Boolos y Jeffrey que contesta afirmativamente la pregunta 1).

Retomemos ahora la pregunta 2): ¿Existen cardinales tales que resulten mayores que el del conjunto de los números naturales, pero menores que el de los números reales?

En 1900, David Hilbert propuso 23 problemas en el Congreso Internacional de Matemáticas de París. El problema número 1 de la lista era el de la "hipótesis especial del continuo". Hilbert lanzó la hipótesis (juntamente con el desafío a demostrarla o refutarla) de que no era posible hallar ningún conjunto con más elementos que N pero con menos elementos que R.

El valor de verdad que le corresponde a la hipótesis de Hilbert no resulta para nada evidente o intuitivo. Puesto que tampoco era posible demostrar ni la hipótesis ni su negación como teorema de la teoría de conjuntos, lo que quedaba por hacer era adoptarlas, cada una a su turno, como axiomas y ver qué pasaba. Así, Kurt Godel, en 1938, demostró que si los axiomas de la teoría de conjuntos más la hipótesis del continuo fueran inconsistentes, la teoría de conjuntos sola también lo sería.

---

[15] BOOLOS & JEFFREY, Computability and Logic, Cap. 2, Pags. 11-13

En 1963 Paul Cohen probó que, si se suponía falsa la hipótesis del continuo y se añadía su negación a los axiomas de la teoría de conjuntos, tampoco se llegaba a ninguna contradicción.

Por lo tanto, no puede probarse que la hipótesis del continuo sea ni verdadera ni falsa. Uno puede elegir razonar con ella, o sin ella, o inclusive contra ella.

Nuestra pregunta 2) no puede ser contestada entonces de la manera concluyente en que se respondió a la pregunta 1).

Sin embargo -dado que el matemático debe decidir si va a afirmar la hipótesis, si la va a negar o si va a prescindir de ella dentro del conjunto de axiomas que él elija para trabajar- señalaremos que Cantor pensaba que la hipótesis era verdadera, es decir, pensaba que el cardinal de los números naturales ($\aleph_0$) era el primer número cardinal transfinito y que el cardinal de los números reales ($\aleph_1$, al que también llamaba "potencia del continuo") era el que le seguía inmediatamente. Esta elección es, sin duda, la que da una perspectiva más clara y despejada de incertidumbre respecto al ordenamiento de los números infinitos.

La diagonalización que habíamos aplicado a los decimales tiene una limitación en su poder demostrativo: el conjunto de los numeros decimales no es estrictamente equivalente al conjunto de los números reales. Hay entre los decimales pares de elementos excepcionales que son consecutivos entre sí, tales como el decimal periódico 0,999... y el 1,000... El conjunto de los reales, en cambio, no posee elementos consecutivos en absoluto.

Ahora podemos precisar nuestra afirmación de que el conjunto de los reales no es enumerable. Definimos a cada número real como un segmento (un subconjunto) del conjunto enumerable de las razones. Pues bien, acabamos de comprobar que el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado (aunque éste sea enumerable) resulta necesariamente no enumerable.

También habíamos dicho que podíamos distinguir distintos niveles dentro del sistema numérico, dada la diversidad de características que aparta a los números finitos de los infinitos. Ahora podemos agregar que es posible diferenciar niveles aún dentro de los números infinitos. En efecto, la enumerabilidad es una propiedad que hace posible tal distinción.

Pero hay más todavía: La diagonalización demuestra que recombinando los elementos de un conjunto dado podemos construir otro de cardinalidad superior. Si además afirmamos la hipótesis del continuo, tendremos que un conjunto formado con todos los subconjuntos de otro conjunto tendrá el cardinal inmediatamente superior al de este último.

Este procedimiento de construccion puede ser recursado una y otra vez, por lo que se pueden añadir tantos niveles como se desee, sin que exista un nivel máximo. La hipótesis del continuo asegura que vamos recorriendo exhaustivamente todos los niveles y que entre los estratos que hayamos construido no quedan "ocultos" otros niveles intermedios.

Incomputabilidad

Tanto en matemática como en lógica es importante saber si un determinado problema a resolver es de tal naturaleza que, dado un conjunto de datos iniciales, a éstos les corresponde, por definición, una sola y determinada solución. Así, puede ser enunciado el concepto de función, diciendo que habremos definido una función $y=f(x)$ si construimos una definición de carácter lógico o matemático tal que a cada argumento x dado arbitrariamente haga corresponder un único valor y. Por ejemplo, nuestros argumentos y valores podrían ser números enteros, y nuestra función, una operación elemental de la aritmética, como la suma.

Poseer un método mecánico para determinar el valor de una función nos da la seguridad de poseer un conocimiento realmente completo de la clase de problemas a que se aplica dicho método, y de estar a salvo de las burlas que el azar nos podría jugar si tuviéramos que lanzarnos a buscar el resultado que nos interesa por tanteo.

Que podamos definir con absoluta precisión una función no implica que exista un método efectivo para calcular su valor. ¿Podríamos saber a priori si efectivamente existen funciones incomputables? ¿Cómo saber, frente a un problema que no podemos resolver, si vale la pena seguir buscando la solución o si ésta simplemente no existe?

Decimos que disponemos de un método efectivo para computar una función si podemos describir una secuencia de instrucciones para determinar, dado un argumento arbitrario, el valor que unívocamente le corresponde de modo que se llegue a tal resultado tras un numero finito de operaciones.

Supongamos que disponemos de un método efectivo para computar el conjunto de todas las funciones computables. Si fuera así, una función computable por otro método cualquiera debería serlo también por el nuestro. Ésta sería la prueba de su generalidad. Ahora bien, como las posibles variantes en las características específicas de los métodos de computación no tienen fin, el procedimiento de contrastación o búsqueda de contraejemplos a nuestra presunción de generalidad no cuenta como un test completo para establecer su verdad. Podría, en cambio, establecer su falsedad, de aparecer efectivamente un contraejemplo, es decir, si alguien mostrase una función que, no siendo computable por nuestro método, fuese acompañada, sin embargo, por algún método que sí permitiese calcular su valor.

Finalmente uno debe aceptar o rechazar la tesis (que no admite prueba concluyente) de que el conjunto de las funciones computables en nuestro sentido es idéntico al conjunto de las funciones que hombres o máquinas serían capaces de computar por cualquier método efectivo si las limitaciones de tiempo, velocidad y material empleados en el cómputo fueran superadas. Esta es la afirmación conocida como **Tesis de Church**.

Vayamos ahora a la descripción de un método para computar funciones que, por su extraordinaria simplicidad y ductilidad, se presta para este papel de paradigma de la computabilidad.

Este método, desarrollado por el matemático ingles Alan Mathison Turing, es un modelo detallado del proceso de computación en el cual un algoritmo cualquiera es descompuesto en una secuencia de pasos simples. Este modelo, conocido como **Máquina de Turing**, no va unido necesariamente a dispositivo mecánico o eléctrico alguno. Es un autómata abstracto, una construcción lógica que consta de una secuencia finita de instrucciones sobre manipulación de símbolos, que permite resolver en forma mecánica un problema o función dados. Al seguir el proceso completo de la computación, resulta útil suponer cierto dispositivo automático que va ejecutando las instrucciones a fin de imaginar más fácilmente dicho proceso.

Digamos que nuestra máquina consta de una cinta dividida en cuadros, a semejanza de una película cinematográfica, la cual se extiende indefinidamente en ambas direcciones, y de un cabezal que toma posición siempre sobre un único y determinado cuadro de la cinta y puede ejecutar las siguientes operaciones sobre la misma: leer el símbolo escrito sobre el cuadro, escribir otro símbolo en el cuadro (lo que supone borrar el que ya estaba), y moverse un solo cuadro por vez hacia la derecha o hacia la izquierda de la cinta.

Consideramos que al comenzar la computación todos los cuadros se encuentran en blanco, excepto por una o más cadenas finitas de símbolos que constituyen la entrada y representan a los argumentos de la función a computar. Conviene considerar al blanco como un símbolo más, ya que de lo contrario no podríamos definir instrucciones a ejecutar frente a un cuadro en blanco y por ello, si el cabezal se topara con uno, la máquina, autómata al fin, se detendría interrumpiendo el proceso.

Supongamos, para simplificar el razonamiento, que adoptamos la notación monádica para nuestro cómputo, entonces en la cinta solo aparecerían dos tipos de símbolos: blancos y unos. Las instrucciones que damos a la máquina especifican que frente a determinado signo leído escriba un signo (el mismo u otro) o se mueva un cuadro, ya sea a derecha o a izquierda. Esto limita nuestras posibilidades excesivamente, ya que sólo podríamos dar dos instrucciones a la máquina, si especificamos que ésta sólo acepte notación monádica: una a ejecutar frente al blanco y otra frente al uno, de otra manera, el autómata dispondría de opciones, cosa que no está preparado para enfrentar. Para salvar esta limitación, que reduciría a la trivialidad las operaciones de nuestro dispositivo, digamos que dispondremos de *n* pares de instrucciones y que la máquina se encuentra en el estado *n* cuando está dispuesta a ejecutar solamente el par *n* de instrucciones. Digamos también que estamos hablando del estado interno de la máquina, y que las instrucciones incluirán siempre dos indicaciones: primero el estado inicial en que se encuentra la máquina, y segundo el estado final, que puede ser el mismo u otro según el símbolo leído, ya que no tendría sentido disponer de varios estados si no proveyéramos instrucciones para que la máquina cambie de uno a otro. El aspecto de una instrucción sería el de un cuádruplo de símbolos, como el siguiente:

$q_1\ s_0\ s_1\ q_2$, que se lee:

"en el estado q_1, frente al símbolo s_0 escriba el símbolo s_1 y pase al estado q_2"

$q_2\ s_1\ L\ q_2$, que se lee: "en el estado q_2, frente al símbolo s_1 muévase un cuadro a la izquierda (LEFT) y permanezca en el estado q_2".

Es claro que el conjunto de las tablas de instrucciones (o, lo que es igual, el conjunto de las Máquinas de Turing), aunque infinito, es enumerable, es decir que, con tal que especifiquemos unas pocas reglas sobre el orden para introducir los símbolos y para combinarlos, podremos construir una lista que, aunque inacabable, especificará siempre para su enésima entrada una sola y determinada tabla de instrucciones. Sin embargo, veremos por el método de diagonalizacion que el conjunto de las funciones, también infinito, no es enumerable y por lo tanto ambos conjuntos, el de todas las Máquinas de Turing y el de todas las funciones, no pueden ser iguales y, de hecho, el segundo es mayor que el primero. Del conjunto de todas las Máquinas de Turing debemos desechar aquellas que no computan ninguna función, y nos habremos quedado con un subconjunto suyo, que caracteriza (si aceptamos la Tesis de Church) a todas las funciones computables.

"Podemos enumerar las funciones computables por Turing enumerando las máquinas que las computan. [Una lista de máquinas determina una lista f_1, f_2, f_3,... de todas las funciones computables por Turing donde, siendo n un numero natural y el índice de la lista, f_n es la función que computa la máquina M_n.] El hecho de que tal enumeracion sea posible muestra que deben existir funciones incomputables. Una vez especificada dicha enumeración, será posible obtener los valores de la función u, definida como sigue [Definición (1)]

$$u(n)=\begin{cases} 1 & \text{si } f_n(n) \text{ está indefinida} \\ f_n(n)+1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora u es una función total de un argumento perfectamente genuina, pero no es computable por Turing, es decir, u no es f_1, ni f_2, ni f_3, etc.

Prueba: Supóngase que u es una de las funciones computables por Turing, digamos la m-esima. Entonces, para cada entero positivo n, hay dos casos posibles: que u(n) y $f_m(n)$ sean ambas definidas e iguales, o que ninguna de ellas esté definida. Pero consideremos el caso n=m [Definición (2)]:

$$u(m)=f_m(m)=\begin{cases} 1 & \text{si } f_m(m) \text{ está indefinida} \\ f_m(m)+1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces, ya sea que f_m esté o no esté definida para el argumento m, tenemos una contradicción: sea que $f_m(m)$ esté indefinida, en cuyo caso (2) nos dice que tiene el valor 1 (y está, por lo tanto, definida e indefinida a la vez) o que $f_m(m)$ sea definida e igual a su propio sucesor (de lo cual deducimos que 0=1). Puesto que hemos derivado una contradicción de la suposición de que u aparece en algún lugar de la lista

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m, \ldots$$

podemos concluir que dicha suposición es falsa: concluimos que la función u no es computable por Turing."[16]

Por lo tanto, si el conjunto de todas las funciones es mayor que el conjunto de todas las Máquinas de Turing y éste es a su vez, mayor que el conjunto de todas las funciones efectivamente computables, podemos afirmar, por transitividad, que el primero es mayor que el tercero y que, por lo tanto, existe una infinidad de funciones incomputables.

Podemos ver que construir una Máquina de Turing no significa montar algún dispositivo o artilugio tecnológico, sino dar una tabla de instrucciones que especifique la actuación del autómata frente a cada posible par formado por un estado de la máquina y un símbolo de la cinta. El comportamiento de esta "máquina" puede ser seguido con la simple ayuda de papel, lápiz y una buena dosis de paciencia.

En la práctica, la construcción de una máquina conlleva la necesidad de dotarla con una cantidad suficiente de estados y de suministrar la notación adecuada para

[16] BOOLOS & JEFFREY, Computability and Logic, Cap. 5, Pag. 47

realizar la tarea que se le encomienda. De hecho, por sencillo que parezca en principio, este tipo de dispositivo sería capaz de procesar todo tipo de símbolos y funciones. Si se le da el tiempo suficiente, que podrá ser mucho pero siempre finito, podrá llevar a cabo cualquier tipo de cómputo, inclusive los cálculos más complejos ejecutados por ordenadores digitales. Esta capacidad universal de la Máquina de Turing no significa que pueda servir en la práctica como ordenador. Recordemos que desechamos a priori las limitaciones del tiempo, velocidad y material disponible para la computación, pero en cualquier maquina de complejidad suficiente para ejecutar alguna tarea interesante, estos factores colocarían fuera de competencia a nuestro singular dispositivo frente a la rapidez de los ordenadores digitales. No obstante, la utilidad de la Máquina de Turing se comprueba en la teoría, al permitirnos establecer un paradigma de computabilidad, y con ello estudiar los límites y capacidades últimas para resolver problemas que pueden llegar a alcanzar los métodos de cómputo.

En efecto, todas las limitaciones que podamos probar para el sistema de Turing podremos considerarlas extensivas a la generalidad de tales métodos, mientras aceptemos la Tesis de Church.

La lista de hallazgos que robustecen la credibilidad de la Tesis incluye, por ejemplo, la demostración de que todas las funciones recursivas son computables por Máquina de Turing[17], y en general la búsqueda de ejemplos favorables alienta la extensión progresiva del conocimiento en el campo de la computabilidad, lo que prueba el interés epistemológico de la tesis.

Obviamente el hallazgo de un contraejemplo a la Tesis, que aún no se ha producido sería aún más extraordinario, ya que significaría la explosión de los límites actualmente aceptados para la computabilidad y, por extensión, para el conocimiento de áreas importantes dentro de la lógica, la matemática y la lingüística.

Hay dos tipos de ejemplo favorable a la Tesis: funciones computables por algún otro método (tales como las operaciones aritméticas) que se muestran también

---

[17] BOOLOS & JEFFREY, Computability and Logic, Caps. 6, 7 y 8

computables por Turing; y funciones incomputables por Turing que se muestran incomputables por cualquier otro método **conocido**

En cambio, sólo resultaría admisible un tipo de contraejemplo: una función que, siendo efectivamente computable por otro método, se muestre incomputable por el de Turing.

Podríamos escribir la siguiente fórmula representando el enunciado de la Tesis, a fin de comparar las condiciones que la harían verdaderas con las que la harían falsa:

$I \rightarrow T$; donde I significa "computable por cualquier método efectivo" y T significa "computable por Turing".

Como vemos, con sólo afirmar o bien T o bien la negación de I, por la tabla de verdad del condicional, la fórmula se haría verdadera:

$(\neg I \vee T) \leftrightarrow (I \rightarrow T)$ (1).

En cambio, solamente resultaría falsa si pudiéramos afirmar tanto a I como a la negación de T:

$(I \wedge \neg T) \leftrightarrow \neg(I \rightarrow T)$ (2).

Podemos ver que las condiciones de verificación para un contraejemplo de la Tesis son mucho más estrictas, y por ende difíciles de reunir, que las requeridas por un ejemplo favorable. En efecto, sobre cuatro combinaciones posibles de valores en las tablas de verdad del condicional y de la disyunción en la fórmula (1), tres de ellas hacen verdaderas a las respectivas funciones. En cambio, en las tablas de la conjunción y de la negación del condicional en la fórmula (2) sólo una de las cuatro combinaciones hace verdaderas a las funciones.

(1)	(2)
$\neg$ I $\vee$ T	I $\wedge$ $-$ T
f v v v	v f f v
f v f f	v v v f
v f v v	f f f v
v f v f	f f v f

El papel de paradigma que la Máquina de Turing juega en lógica y matemática le ha sido asignado también en el campo de la lingüística por Noam Chomsky, al denominar gramáticas de tipo 0 a los modelos lingüísticos basados en los principios de esta máquina, con lo que la constituye, debido a su primordial simplicidad y claridad de funcionamiento, en una base para la comparación de tales modelos.

El propio Chomsky, al precisar la noción de gramática, sostiene que la lengua debe representarse como un proceso generativo basado en reglas recursivas.

Para comprender el papel del sistema de Turing en los fundamentos de la lingüística deberíamos hacer más flexible nuestra noción de función. En lugar de pensar en los argumentos y los valores como exclusivamente numéricos, pensémoslos como alfanuméricos, es decir, como formados también por cadenas de letras, por ejemplo, el alfabeto de una lengua natural y los signos de puntuación auxiliares. Esto es posible sin contradecir nuestra definición de función, la cual, para mantenerse con todo su rigor, no precisa especificar su carácter como numérico.

Una gramática generativa consiste en un conjunto finito de reglas, cuya aplicación es capaz de engendrar todas las frases válidas de la lengua que describe y que pueden formar una secuencia de instrucciones para una Máquina de Turing.

Hemos dicho que estas reglas son específicamente recursivas, que pueden ser expresadas en forma de funciones, y que toda función recursiva es computable por el sistema de Turing.

Una máquina convenientemente diseñada para procesar cadenas alfabéticas (digamos que se le dé como entrada el vocabulario completo de una lengua e incorpore su gramática generativa en forma de tabla de instrucciones), produciría como salida una lista de las expresiones válidas en esa lengua. En general, frente a una entrada dada, una Máquina de Turing alfabética produciría, al igual que su homónima numérica, una y sólo una salida determinada.

Chomsky establece una distincion entre la competencia teórica en una lengua, que es lo descripto por su gramática generativa, y el desempeño real del hombre que habla. El trabajo del lingüista se centra en la construcción de una teoria que dé cuenta de esta competencia subyacente en un hablante-oyente. En una lengua L, concebida como un conjunto infinito de oraciones, la gramática de L tendrá que representar el conocimiento que un hablante necesitaria para formar todas las frases posibles (y solamente las posibles) en L.

En teoria todas las frases construidas por el hablante de acuerdo con las reglas son gramaticales y pueden existir, en la práctica habrá una cantidad muy elevada de frases que no se emitirán nunca, puesto que no suele haber frases que contengan, por ejemplo, doscientas o trescientas palabras.

Estas frases monstruosas serian tanto más dificiles de emitir para el hablante y de comprender para el oyente cuanto más palabras contengan y más se complejice su estructura. Sin embargo, sobre papel y a los efectos del análisis, siempre es posible construir y desmenuzar frases tan extensas y complejas como se desee. El mecanismo recursivo, que consiste en insertar nuevas unidades significativas dentro de la estructura de una frase dada, puede, por definición, ser repetido *ad infinitum*: nunca existirá una frase de longitud n que no pueda convertirse en $n+1$, por esta propiedad especifica que poseen las lenguas naturales.

Como podemos ver desde esta perspectiva, las nociones de "enumerabilidad" y de "conjunto infinito" resultan aplicables al estudio de los lenguajes naturales.

La Máquina de Turing ha puesto en evidencia que, asi como aún en lo relativo a los lenguajes formales existen problemas que no son solubles algoritmicamente, también es cierto que, en tanto los lenguajes naturales poseen un considerable grado de articulación mecánica, es posible expresar dicha articulación en forma de reglas algoritmicas.

Paradojas y Niveles del lenguaje

¿Es legitimo hablar de la "clase de todas las clases"?

Russell descubrió una paradoja, que significo una dificultad en el uso de expresiones como ésa.

Hizo la siguiente pregunta: la clase de todas las clases que no son miembros de si mismas, ¿es o no es miembro de si misma? Algo es miembro de una clase si ese algo está comprendido en el concepto cuya extensión es la clase. Entonces, para que nuestra clase sea miembro de sí misma debería estar comprendida en el concepto de ser una clase que no es miembro de sí misma. La suposición de que la respuesta a la pregunta de Russell es "sí" conduce pues a una contradicción.

Para que nuestra clase no sea miembro de sí misma, ella debería estar comprendida en el concepto de ser una clase que es miembro de si misma. La suposicion de que la respuesta es "no" conduce también a contradicción, por lo que aparentemente deberíamos rechazar la noción de clase como autocontradictoria. Sin embargo, como vimos en la primera parte, dicha noción resulta tan valiosa para la definición de "número" que importa conservarla de alguna manera. A fin de evitar su paradoja, el mismo Russell propuso una división del universo del discurso en "tipos lógicos": individuos, clases de individuos, clases de clases de individuos, etc. Los tipos se simbolizan de manera que sea posible distinguirlos y se introducen restricciones a la sustitución de un sustantivo que pertenece a un tipo determinado por otro de un tipo distinto. Así, ya no resulta legitimo referirse a la clase de todas las clases con el nombre "clase" a secas, pues esto constituye una sustitución prohibida.

Recordemos que los lenguajes formales fueron introducidos con la fe de que evitarían las paradojas que abundan en el lenguaje natural. Aunque comportaban severas restricciones a la potencia significativa del discurso que podían producir, fueron aceptados por ese supuesto poder curativo. Sin embargo, aún resultó necesario introducir restricciones adicionales para sostener aquel lenguaje creado para ser autosuficiente.

Luego de intentar resolver, también mediante el principio de la teoría de los tipos, las paradojas del lenguaje natural, se comprendió que éstas pertenecían a una especie distinta y se enfocó la atención sobre la jerarquía de los lenguajes y las consecuencias que había traído ignorarla. En el lenguaje ordinario, que es de carácter universal (es decir, comprende toda expresión posible), la confusión consistente en identificar objetos de naturaleza distinta se extiende no sólo a expresiones pertenecientes a tipos lógicos diferentes sino también a estratos o niveles lingüísticos que tienen órdenes jerárquicos distintos. Una correcta distinción entre metalenguaje y lenguaje objeto (donde el primero contiene al segundo y es más rico que él en signos y expresiones) brinda una solución general para el problema de las paradojas, permitiendo usar el metalenguaje para referirse con consistencia al lenguaje objeto.

Conclusión

Un sistema formal debe ser limitado en contenido, esta es una condición necesaria para la consistencia. Un sistema excesivamente rico no puede estar libre de la posibilidad de autocontradecirse. En particular se debe excluir a las proposiciones que se refieran al sistema en sí mismo. Como ya dijimos, existe un procedimiento (la estratificación de los sistemas) que permite sostener algunas proposiciones de este tipo que, aunque "dañinas", resultan sin embargo interesantes. La estratificación permite interconectar elementos que, aunque están evidentemente relacionados, "harían cortocircuito" si se los pusiera en el mismo nivel, es decir, volverían inconsistente al sistema entero.

1) El "número de todos los números" pasa a ser el "número infinito de todos los números finitos", y se integra en un nivel distinto. Se separan, por una parte, los números finitos, y por otra parte, distinta pero conectada y referida a la anterior, los números infinitos. Esto ejemplifica la estratificación de los sistemas numéricos.

2) Las "clases de clases" son reconocidas como un tipo lógico diferente de las meras "clases". Ambos tipos son apartados e interconectados, de manera que el primero se refiera al segundo. Esto es un ejemplo de estratificación en la lógica de clases.

3) Las oraciones de una lengua que se refieran a frases en la misma lengua son apartadas y llevadas a una "metalengua", que sistemáticamente se opone y se refiere a la "lengua objeto". Esto da un ejemplo de estratificación en los lenguajes naturales.

Usamos en los tres casos la palabra "estratificacion" deliberadamente, para resaltar la analogia entre los procedimientos aplicados en cada uno de ellos. Decimos "analogia" y no "identidad" porque no se trata del mismo procedimiento aplicado a tres casos distintos. Al tratar dichos casos vimos que los problemas de cada uno de ellos presentan caracteristicas propias, y que las soluciones se adecuaban especificamente a esas caracteristicas, por lo cual dichas soluciones no pueden ser extrapoladas sin más a otro campo de aplicación. Hemos querido, sin embargo, señalar una semejanza en el hacer, en el enfoque, en la heuristica general con que informaron su trabajo estos hombres. Tratamos de asomarnos entre bastidores para entrever su tarea y la mentalidad científica actual en tanto determinada por dicha tarea. Para esta mentalidad, los sistemas formales se encuentran en permanente proceso de expansión y reconstrucción, se trata así de ir incorporando la expresión de los descubrimientos que se producen en las respectivas disciplinas sin sacrificar el requisito de la consistencia.

Nuestra exposición se refirió a resultados lógicos firmemente establecidos. Sin embargo, no queremos causar la ilusión de que el conocimiento en esta materia ha alcanzado alguna especie de perfección o de carácter absoluto e inamovible. Las nociones del Infinito y el Continuo, aunque de mucho valor intrínseco, son apenas fragmentos de la vasta tarea cognoscitiva del hombre.

Bibliografía

BOOLOS, G., and JEFFREY R., Computability and Logic. Cambridge University Press. 1980..

BORGES, J.L., El Libro de Arena, Ed. Emecé, Buenos Aires, 1993.

DAUBEN, J. W., "Georg Cantor y la teoría de conjuntos transfinitos", en: Investigacióon y Ciencia, Número 83, Ed. Prensa Científica S.A., Barcelona, Agosto de 1983, pags. 82-93.

FERRATER MORA, J., Diccionario de Filosofía. Ed. Alianza, Madrid, 1982.

RUSSELL, B., La Sabiduría de Occidente, Ed. Aguilar, Madrid, 1964.

RUSSELL, B., Nuestro Conocimiento del Mundo Externo, Ed. Losada, Buenos Aires, 1946.

RUSSELL, B., Introducción a la Filosofía Matemática, Ed. Losada, Buenos Aires, 1945.