Georg J. W. Dorn: "Induktion und Wahrscheinlichkeit. Ein Gedankenaustausch mit Karl Popper".— In: Edgar Morscher (Hg.): Was wir Karl R. Popper und seiner Philosophie verdanken. Zu seinem 100. Geburtstag.— Sankt Augustin: Academia Verlag, 2002, 13–81.

Induktion und Wahrscheinlichkeit
Ein Gedankenaustausch mit Karl Popper

GEORG J. W. DORN

0. Vorbemerkungen

Zwischen 1987 und 1994 sandte ich 20 Briefe an Karl Popper. Die meisten betrafen Fragen bezüglich seiner Antiinduktionsbeweise und seiner Wahrscheinlichkeitstheorie, einige die organisatorische und inhaltliche Vorbereitung eines Fachgesprächs mit ihm in Kenly am 22. März 1989 (worauf hier nicht eingegangen werden soll), einige schließlich ganz oder in Teilen nicht-fachliche Angelegenheiten (die im vorliegenden Bericht ebenfalls unberücksichtigt bleiben). Von Karl Popper erhielt ich in diesem Zeitraum 10 Briefe. Der bedeutendste ist sein siebter, bestehend aus drei Teilen, geschrieben am 21., 22. und 23. Oktober 1992, in dem er eine Vorform jener Definition der probabilistischen Unabhängigkeit entwickelte, die er 1994 im neuen Anhang *XX der 10. Auflage seiner *Logik der Forschung* (LdF) der wissenschaftstheoretischen Forschergemeinde vorstellte. Der berührendste ist sein letzter, geschrieben am 26. Juli 1994, in dem er trotz Erschöpfung mit Humor schildert, wie mühselig der Druck des Anhangs *XX verlaufen ist.

Der folgende Bericht ist zugleich chronologisch und systematisch gegliedert: die ersten, vergleichsweise wenigen Briefe, großteils 1987 geschrieben, handeln von der Induktion; der große Rest, zeitlicher Schwerpunkt 1992, beschäftigt sich mit der Wahrscheinlichkeitstheorie. Das Kapitel 1 über Induktion ist in vier Abschnitte unterteilt:

1.1. Das Popper/Miller-Argument: eine Nachkonstruktion
1.2. Karl Poppers Brief vom 25.8.1987: Deduktive Stützung

1.3. Karl Poppers Brief vom 29.9.1987: Nochmals zur deduktiven Stützung
1.4. Echt induktive Stützung und Schwächung: zwei eigene Beweise

Das Kapitel 2 über Wahrscheinlichkeit ist ebenfalls in vier Abschnitte unterteilt:

2.1. Ein Mangel an Überschußgesetzen in der *Logic of Scientific Discovery* (LScD)
2.2. Probabilistische Unabhängigkeit
2.3. Wahrscheinlichkeitstheorie und Wahrscheinlichkeitssemantik
2.4. Die neue Unabhängigkeitsdefinition im Anhang *XX der LdF

Ich danke der Verwaltung des Nachlasses von Karl Popper für die Erlaubnis, aus seinen Briefen an mich ausführlich zu zitieren. Auf Wunsch der Nachlaßverwaltung wurden die (sehr wenigen) Schreibfehler Karl Poppers in den Zitaten stillschweigend korrigiert. Grammatische und stilistische Besonderheiten wurden belassen.

1. Induktion

1.1. Das Popper/Miller-Argument: eine Nachkonstruktion

Ende 1980, Anfang 1981 kam David Miller in Zusammenarbeit mit Karl Popper die Idee zu einem Beweis, daß probabilistische Stützung nicht "induktiv", sondern "deduktiv" ist; die erste Veröffentlichung beschränkte sich auf eine Fußnote in *Realism and the Aim of Science*, die unbeachtet blieb (siehe Popper 1983a, p. 326). Als aber am 21. April 1983 eine ausgearbeitete Version dieses Beweises in *Nature* erschien (siehe Popper/Miller 1983), war die

Aufmerksamkeit der Wissenschaftstheoretiker geweckt. Karl Popper bemühte sich sehr, das sogenannte Popper/Miller-Argument allgemein bekannt zu machen. Dies war einer der Gründe, warum er am 7. Internationalen Kongreß für Logik, Methodologie und Wissenschaftstheorie teilnahm, der vom 11. bis 16. Juli 1983 in Salzburg stattfand und in der Hauptsache von Paul Weingartner, mir und weiteren Institutskollegen vorbereitet worden war. Karl Popper trug in der Sektion 7 des Kongresses, die den Grundlagen der Wahrscheinlichkeit und Induktion gewidmet war, eine neue Version des Popper/Miller-Argumentes vor sowie einen weiteren Antiinduktionsbeweis (siehe Popper 1983b). Paul Weingartner und ich baten Karl Popper, seinen Vortrag zu einer Abhandlung auszuarbeiten, die in unserem Band *Foundations of Logic and Linguistics* erscheinen sollte, den wir aus thematisch einschlägigen Kongreßbeiträgen überdurchschnittlicher Qualität zusammenzustellen im Begriffe waren. Karl Popper sagte zu und sandte uns eine wesentlich verbesserte Fassung seines Vortrages, die unter dem Titel "The Non-existence of Probabilistic Inductive Support" in unserem Band erschien (siehe Popper 1985). Als ich Karl Poppers Beitrag redigierte, konnte ich mangels wahrscheinlichkeitstheoretischer Kenntnisse nicht gründlich folgen. Nachdem ich mir 1985/86 elementare Kenntnisse angeeignet hatte, kam ich auf den Beitrag zurück und versuchte, aus ihm ein logisch gültiges Argument mit einer exakt formulierten Konklusion herauszuschälen. Einen eher ungelenken Versuch stellte ich im Sommersemester 1987 im institutsinternen Forschungsseminar vor. Meine Zuhörer und ich selbst blieben unsicher, ob ich mit meinen Definitionsvorschlägen für die zentralen Ausdrücke 'völlig deduktive Stützung', 'deduktive Stützung' und 'induktive Stützung' das getroffen hatte, was Karl Popper damit gemeint haben könnte, zumal die Einsichtigkeit dieser Definitionen zu wünschen übrig ließ und sich somit das Popper/Miller-Argument in meiner Fassung als überraschend schwach herausstellte. Paul Weingartner machte den naheliegenden Vorschlag, Karl Popper selbst zu fragen. Als er am 28. Juli 1987 Karl Popper telephonisch zum 85. Geburtstag gratulierte, teilte er ihm mit, ich hätte kürzlich eine logische Nachkonstruktion des Popper/Miller-Argumentes versucht; ob er sich die Sache mal ansehen wolle? Karl Popper antwortete höflich mit Ja und so sandte ich ihm drei Tage später meine Nachkonstruktion. Sie lautete:

Poppers Theorie der induktiven Stützung Nr. 1

Die fünf spezifischen Axiome:
AXIOM 1. Für alle p und q gilt: Wenn $P(p) > 0$, dann: $s(q, p) = P(q|p) - P(q)$.
AXIOM 2. Für alle p und q gilt: Wenn $P(p) > 0$, dann: $s(q, p)$ ist genau dann eine Stützung, wenn $s(q, p) > 0$.
AXIOM 3. Für alle p und q gilt: Wenn $P(p) > 0$ und $P(q) < 1$, dann: $s(q, p)$ ist genau dann eine völlig deduktive Stützung, wenn q logisch aus p folgt.
AXIOM 4. Für alle p und q gilt: Wenn $P(p) > 0$, dann: $s(q, p)$ ist genau dann eine deduktive Stützung, wenn es mindestens ein r und ein t gibt, so daß die folgenden vier Bedingungen erfüllt sind:

(a) $s(q, p) = s(r, p) + s(t, p)$,
(b) $s(q, p)$ ist eine Stützung,
(c) $s(r, p)$ ist eine völlig deduktive Stützung,
(d) $s(t, p)$ ist keine Stützung.

AXIOM 5. Für alle p und q gilt: Wenn $P(p) > 0$, dann: $s(q, p)$ ist genau dann eine induktive Stützung, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(a) $s(q, p)$ ist eine Stützung,
(b) $s(q, p)$ ist keine deduktive Stützung.

POPPERS ANTIINDUKTIONSTHEOREM NR. 1. Für alle p und q gilt: Wenn $P(p) > 0$ und $P(q) < 1$, dann: Wenn $s(q, p)$ eine Stützung ist, dann ist $s(q, p)$ keine induktive Stützung.

BEWEIS

1.	$P(p) > 0$ und $P(q) < 1$.	Annahme
2.	$s(q, p)$ ist eine Stützung.	Annahme
3.	$s(q, p) = s[(q \vee p), p] + s[(p \rightarrow q), p]$	1; Th.1.16.1
4.	$s[(p \rightarrow q), p] \leq 0 \leq s[(q \vee p), p]$	1; Th.1.16.3
5.	$(q \vee p)$ folgt logisch aus p.	AL–Metatheorem
6.	$s[(q \vee p), p]$ ist eine völlig deduktive Stützung.	1, 5; Axiom 3
7.	$s[(p \rightarrow q), p]$ ist keine Stützung.	1, 4; Axiom 2
8.	$s(q, p)$ ist eine deduktive Stützung.	1, 3, 2, 6, 7; Axiom 4
9.	$s(q, p)$ ist keine induktive Stützung.	1, 8; Axiom 5
10.	Wenn $P(p) > 0$ und $P(q) < 1$, dann: Wenn $s(q, p)$ eine Stützung ist, dann ist $s(q, p)$ keine induktive Stützung.	1, 2, 9
11.	Poppers Antiinduktionstheorem Nr. 1	10

Soweit der originale Text meiner Nachkonstruktion aus dem Jahr 1987. Vier Anmerkungen zu seinem besseren Verständnis:

(1) Zu Axiom 1: '$s(\ldots,\ldots)$' ist als zweistellige Funktionskonstante gedacht und kann gelesen werden als 'die Stützung von ... durch ...'. '$P(\ldots)$' ist als einstellige Funktionskonstante gedacht und kann gelesen werden als 'die Wahrscheinlichkeit von ...'. '$P(\ldots|\ldots)$' ist als zweistellige Funktionskonstante gedacht und kann gelesen werden als 'die Wahrscheinlichkeit von ... unter der Annahme, daß ...'. 'p' und 'q' sind Variablen für beliebige Aussagesätze.

(2) Zu Axiom 2: $s(q, p)$ ist keine Stützungsfunktion, sondern der Wert der gemäß Axiom 1 bedingt definierten Stützungsfunktion s an der Stelle $\langle q, p\rangle$. (Hätte ich die Absicht gehabt, über beliebige Stützungsfunktionen zu reden, hätte ich eine Variable eingeführt.) Der Wert von s an der Stelle $\langle q, p\rangle$ ist stets eine reelle Zahl, die größer -1 und kleiner $+1$ ist. Ist die Zahl $s(q, p)$ größer 0, heißt sie 'eine Stützung' und man sagt, p stütze q. Ist sie kleiner 0, heißt sie 'eine Schwächung' und man sagt, p schwäche q. Hinter diesem Sprachgebrauch stehen näherhin zwei bedingte Definitionen: Wenn $P(p) > 0$, dann gilt: p stützt q gdw $s(q, p) > 0$; wenn $P(p) > 0$, dann gilt: p schwächt q gdw $s(q, p) < 0$. Mittels

der Stützungs*funktion* s lassen sich also nicht nur die Stützungs*beziehung*, sondern auch die *Schwächungsbeziehung* bedingt definieren. Das Wort 'Stützung' ('support') wird oft sowohl zur Bezeichnung der Stützungsfunktion, als auch zur Bezeichnung von positiven Werten der Stützungsfunktion, als auch zur Bezeichnung der Stützungsbeziehung verwendet. Diese Dreideutigkeit lädt zu Mißverständnissen beim Reden und Schreiben über Stützung ein (siehe Abschnitt 1.2).

(3) Zu Axiom 3: Der Wenn-Teil enthält die Bedingung, daß $P(q) < 1$, da $s(q, p)$ keine Stützung wäre, wäre die Wahrscheinlichkeit von q gleich 1. Wenn nämlich $P(p) > 0$ und $P(q) = 1$, dann $s(q, p) = 1-1 = 0$. Der Ausdruck 'völlig deduktive Stützung' ist meine Übersetzung von Karl Poppers 'purely deductive support' (Popper 1983b, p.250) und 'wholly deductive support' (Popper 1985, p.311).

(4) Zum Beweis von Poppers Antiinduktionstheorem Nr.1: Mit 'Th.1.16.1' beziehe ich mich auf das Theorem 1.16.1 in Popper (1985, p.308), das sogenannte Popper/Miller-Faktorisierungstheorem; in meiner Schreibweise:

Für alle p und q gilt: Wenn $P(p) > 0$, dann $s(q, p) = s[(q \vee p), p] + s[(p \rightarrow q), p]$.

Dieses Theorem ist natürlich, damit es seinen Namen verdient, in obiger axiomatischer Theorie herleitbar, und zwar ist es, wie Karl Popper in seinem Kommentar betonen wird, aus Axiom 1 ableitbar.

Mit 'Th.1.16.3' beziehe ich mich auf das Theorem 1.16.3 in Popper (1985, p.308), in meiner Schreibweise:

Für alle p und q gilt: Wenn $P(p) > 0$, dann $s[(p \rightarrow q), p] \leq 0 \leq s[(q \vee p), p]$.

Auch dieses Theorem ist aus Axiom 1 ableitbar. Da dieses Theorem historisch und systematisch wichtig ist, trage ich seinen Beweis nach:

1.	$P(p) > 0$	Annahme
2.	$s[(p \to q), p] = P((p \to q) \mid p) - P(p \to q)$	1; Axiom 1
3.	$P((p \to q) \mid p) = P((p \to q) \wedge p)/P(p) =$ $P(q \wedge p)/P(p) = P(q \mid p)$	Elementare Theoreme
4.	$P(q \mid p) \leq P(p \to q)$	Poppers Überschußgesetz
5.	$s[(p \to q), p] \leq 0$	2, 3, 4
6.	$s[(q \vee p), p] = P((q \vee p) \mid p) - P(q \vee p) = 1 - P(q \vee p)$	1; Axiom 1, El. Th.
7.	$P(q \vee p) \leq 1$	Elementares Theorem
8.	$s[(q \vee p), p] \geq 0$	6, 7
9.	$s[(p \to q), p] \leq 0 \leq s[(q \vee p), p]$	5, 8

Poppers Überschußgesetz (siehe Schritt 4) wird im Abschnitt 1.4 bewiesen werden. Weitere Überschußgesetze werden im Kapitel 2 dieses Berichts erörtert werden.

1.2. Karl Poppers Brief vom 25.8.1987: Deduktive Stützung

Karl Popper kommentierte meine Nachkonstruktion in seinem Brief vom 25. August 1987. Er schreibt:

> Lieber Dr Dorn, [...] Ihre Ableitung ist, natürlich, logisch korrekt; und sie ist – wenigstens beim ersten Durchlesen – sehr überzeugend. Aber bei weiterem Nachdenken ist Ihre Ableitung geradezu eine Kritik!
>
> I should like to continue in English so that David Miller can read a copy of my letter to you.
>
> Your derivations can be further simplified. I will continue to use your terminology (even though what you call "Axioms" I would describe as "explicit definitions"). I now restate your derivation, *simplifying* it so as to show that Th. 1.16.3 need not be used.

AXIOM 1. $(p)(q)(P(p) > 0 \rightarrow S(q,p) = P(q,p) - P(q))$
LEMMA 1. $S(p \vee q, p) + S(\bar{p} \vee q, p) = S(q,p)$

Karl Popper beweist Lemma 1 kurz und durchsichtig in fünf Zeilen, wobei er sich graphischer Hilfsmittel bedient, die hier aus drucktechnischen Gründen nicht wiedergegeben werden. Im folgenden sein Beweis ohne Graphik, stattdessen mit kleinen Ergänzungen:

Angenommen, $P(p) > 0$. Dann: $S(p \vee q, p) + S(\bar{p} \vee q, p) = P(p \vee q, p) - P(p \vee q) + P(\bar{p} \vee q, p) - P(\bar{p} \vee q) = 1 - P(p) - P(q) + P(pq) + P(q,p) - P(\bar{p}) - P(q) + P(\bar{p}q) = 1 - P(p) - P(q) + P(q,p) - 1 + P(p) - P(q) + P(pq) + P(\bar{p}q) = -P(q) + P(q,p) - P(q) + P(q) = P(q,p) - P(q) = S(q,p)$

"This proof of the Lemma 1", so fährt Karl Popper fort, "is obviously most trivial and follows immediately from the definition of $S(q, p)$; that is, from your Axiom 1."

Karl Popper schließt seinem Beweis des Lemmas 1 seine Version meines Axioms 2 an, in der das Zeichen 'S' offensichtlich noch als Konstante gebraucht wird:

AXIOM 2. $(p)(q)(P(p) > 0 \rightarrow$ [$S(q,p)$ is said to be a positive support, or p is said to support q positively $\leftrightarrow S(q,p) > 0$])

Mit seiner Version meines Axioms 3 ändert sich die Lage. Einerseits spaltet er mein Axiom 3 in zwei Teile auf, anderseits scheint nun 'S' als Variable zu fungieren:

AXIOM 3A. $(p)(q)(P(p) > 0$ & $P(q) < 1 \rightarrow$ [$S(q,p)$ is said to be a purely deductive S-function $\leftrightarrow p \vdash q$])
LEMMA 2. $(p)(q)(S(q,p)$ is a purely deductive S-function $\rightarrow S(q,p)$ is a positive support)
PROOF. $p \vdash q \rightarrow S(q,p) = P(\bar{q}) > 0$ (by Axiom 1)
AXIOM 3B. $(p)(q)(P(p) > 0$ & $P(q) < 1 \rightarrow$ [$S(q,p)$ is said to be a purely deductive (and positive) support $\leftrightarrow p \vdash q$ & $S(q,p) > 0$])
LEMMA 3. All purely deductive S-functions are purely deductive supports (by Lemma 2)

Nun wendet sich Karl Popper dem entscheidenden Axiom 4 zu. Ich zitiere ohne weitere Unterbrechungen den Brief bis zu seinem Ende:

> So far all has been plain sailing. But now we come to your Axiom 4, which is crucial for the persuasive power of your presentation of the argument. With Axiom 4, you introduce the term "deductive support"; and with it, you also introduce "non-deductive support" and thereby "inductive support".
>
> As you did it, it sounded very convincing. Why? Because it seemed that you introduced a number of *severe* conditions, and the conditions sounded reasonable, especially conditions (a) & (c). But now, with Lemma 1, it becomes clear that these conditions are trivially satisfied by Axiom 1, and no new conditions at all. Only (d) seems new; but this appearance is of course deceptive, as can be shown by Lemma 4:
>
> LEMMA 4. The second term of Lemma 1, $S(\overline{p} \vee q, p)$ which is equal to $P(\overline{p} \vee q, p) - P(\overline{p} \vee q) = P(q, p) - P(p \rightarrow q) = -P(\overline{q}, p)P(\overline{q})$ is never positive: $S(\overline{p} \vee q, p) \leq 0$. It reaches zero only if $p \vdash q$. So this term is never a positive support in the sense of Axiom 2.
> PROOF: in my paper. [Popper 1985]
> AXIOM 4. $(p)(q)(P(p) > 0 \rightarrow S(q, p)$ is a deductive (positive) support $\leftrightarrow$ $(\mathrm{E}r)(\mathrm{E}t)$ satisfying the following four conditions (a) to (d)
>
> (a) $S(q, p) = S(r, p) + S(t, p)$
> (b) $S(q, p) > 0$
> (c) $S(r, p)$ is a purely deductive (positive) support
> (d) $S(t, p) \leq 0$
>
> Anybody who has followed the argument so far will see at once that the *only* real condition here is (b), and that the following Theorem is therefore trivial and merely verbal.
>
> THEOREM. $(p)(q)(S(q, p) > 0 \rightarrow S(q, p)$ is a deductive positive support). Or in other words, there does not exist a positive support that is non-deductive. Indeed, the conditions (a) to (d) do not characterize "deductive", since they are satisfied by *all* positive S functions, and if (b) is dropped, by *all* S-functions.

So the problem is open:

perhaps what we mean by inductive support falls under the definition of "deductive", as established in Axiom 4? After all, Axiom 4 only introduces the *word* "deductive" in such a way that *all* S-functions become "deductive"!

Even if you now would introduce a condition (e) into your Axiom 4:

(e) $q = r.t$

which would indeed make your argument logically as strong as mine, it would no longer help. For its convincingness depended on (a) and (c); and once it is seen that (a) and (c) are not limiting conditions at all, the convincingness vanishes.

Where is the remedy?

It is insufficient to define "deductive" and then say that "inductive" support would be non-deductive. It is necessary to show first that the idea of inductive support is support that goes *beyond* what is entailed by the evidence; and then, that all support of that kind is essentially negative; that is, countersupport.

Many thanks for your paper.

Yours, Karl Popper

P.S. Since your derivation is logically correct, I have felt that it is, against your intention, a severe criticism of my and David Miller's theory.

Trivially, the definition of the S function – your Axiom 1 – leads to the insight that probability theory is, essentially, deductive, and not inductive. This is trivial, but few people realize it even now. But what I regard as a deeper insight is that every non-deductive "evidence" e splits the "hypothesis" h into two parts: $h \vee e$ and $h \vee \bar{e}$, and that the "influence" of e on $h \vee \bar{e}$ is *negative*, that is, anti-inductive. This was unexpected even for me: even though I knew, and cherished, 1.16.3 since 1938 (especially in the form $p(x, y)-p(x \leftarrow y) \leq 0$). Nevertheless, 42 years later I was *surprised* when I found that e undermines $h \vee \bar{e}$.

With all good wishes

Yours sincerely
K.R. Popper

Ich dankte Karl Popper in einem Brief vom 1. September 1987 für seinen ausführlichen Kommentar zu meiner Nachkonstruktion und versprach, ihn sorgfältig zu überdenken. Das tat ich in den folgenden Monaten unter Einbeziehung der wichtigsten Abhandlung zum Popper/Miller-Argument, dem 1987 erschienenen, von Karl Popper und David Miller verfaßten Aufsatz "Why Probabilistic Support Is Not Inductive", den ich bei Abfassung meiner Nachkonstruktion noch nicht gekannt hatte. Ich gelangte zu der folgenden Auffassung. Zuerst eine grundlegende Überlegung, dann komme ich Punkt für Punkt auf Karl Poppers Kommentar zu sprechen.

(1) Das Argument oder der sogenannte Beweis, daß es induktive Stützung nicht gibt, sieht im wesentlichen immer so aus (vgl. Popper/Miller 1983, Popper 1985, Popper/Miller 1987 und Karl Poppers Postskriptum im obigen Brief an mich):

Es sei e irgendein Beobachtungssatz mit Wahrscheinlichkeit größer 0 und h irgendeine Hypothese. Die drei Prämissen des Argumentes lauten:

(a) $S(h, e) = S(h \vee e, e) + S(e \rightarrow h, e)$ (Das Popper/Miller-Faktorisierungstheorem)
(b) $S(h \vee e, e) \geq 0$ (m.a.W.: e schwächt $h \vee e$ nicht)
(c) $S(e \rightarrow h, e) \leq 0$ (m.a.W.: e stützt $e \rightarrow h$ nicht)

Die Konklusionen lauten:

(C1) Es gibt keine probabilistische induktive Stützung (Popper 1985, p. 303); oder auch:
(C2) Probabilistische Stützung ist nicht induktiv (Popper/Miller 1983, p. 688); oder auch:
(C3) Jede probabilistische Stützung ist deduktiv (Popper/Miller 1983, p. 688); oder auch:
(C4) Es gibt keine rein induktive Abhängigkeit (Popper/Miller 1987, p. 574).

Niemand bestreitet die Prämissen (a), (b) und (c), die meisten Wissenschaftstheoretiker bestreiten die Konklusionen (C1), (C2), (C3), (C4). Ich halte hierzu sechs simple Punkte fest. *Erstens*: Keines der vier Argumente mit den Prämissen (a), (b), (c) und den Konklusionen (C1), (C2), (C3), (C4) ist logisch gültig. *Zweitens*: Wohlwollend betrachtet handelt es sich bei diesen Argumenten um Enthymeme. *Drittens*: Bevor man die Konklusionen bestreitet, sollte man sie verstehen. *Viertens*: Eine Möglichkeit hierfür ist, die zentralen Ausdrücke 'induktive Stützung' und 'deduktive Stützung' zu definieren. *Fünftens*: Mit etwas Glück, Verstand und gutem Willen fallen diese Definitionen so aus, daß die enthymematischen Argumente, nachdem man ihren Prämissen diese Definitionen hinzugefügt hat, logisch gültig werden. *Sechstens*: Dann kann man die Konklusionen bestreiten und wer sie bestreitet, kann im Wissen um die logische Gültigkeit der Argumente jene Prämissen zu suchen beginnen, die uneinsichtig oder falsch erscheinen. Einen Prozeß dieser Art nennt man 'rationale Diskussion'. Um ihn einzuleiten, habe ich meine Nachkonstruktion geschrieben. – Nun zu Karl Poppers Brief.

(2) Eine ernste technische Schwierigkeit ist, daß Karl Popper ab Axiom 3 über S-Funktionen zu sprechen beginnt, die so weder in meiner Nachkonstruktion noch in seinem Kommentar noch in der Standardliteratur definiert sind. Ich versuche deshalb zunächst, diese Definitionen nachzuholen, um die Gefahr des Aneinandervorbeiredens zu mindern. Es sei S eine beliebige Funktion und P eine beliebige ein- oder zweistellige Wahrscheinlichkeitsverteilung über beliebige Sätze p, q etc. Hilfsdefinition: S ist eine auf P basierende Stützungsfunktion gdw für alle p und q gilt: Wenn $P(p) > 0$, dann $S(q, p) = P(q, p) - P(q)$; und wenn $P(p) = 0$, dann $S(q, p) = 0$. Wir können nun die Axiome 1 bis 5 meiner 1987er Nachkonstruktion, die sich auf Stützungen bezogen, zu den Axiomen 1* bis 5* umformulieren, die sich auf Stützungsfunktionen beziehen:

AXIOM 1*. S ist eine Stützungsfunktion gdw für mindestens ein P und S' gilt: S' ist eine auf P basierende Stützungsfunktion und S ist eine nicht-leere Teilmenge von S'.
AXIOM 2*. S ist eine positive Stützungsfunktion gdw S eine Stützungsfunktion ist und für alle p und q gilt: wenn $\langle q, p\rangle$ aus dem Argumentbereich von S ist, dann $S(q, p) > 0$.
AXIOM 3*. S ist eine völlig deduktive Stützungsfunktion gdw S eine Stützungsfunktion ist und für alle p und q gilt: wenn $\langle q, p\rangle$ aus dem Argumentbereich von S ist, dann folgt q logisch aus p.
AXIOM 4*. S ist eine positive deduktive Stützungsfunktion gdw S eine Stützungsfunktion ist und für alle p und q gilt: wenn $\langle q, p\rangle$ aus dem Argumentbereich von S ist, dann gibt es mindestens einen Satz r und einen Satz t, so daß die folgenden vier Bedingungen erfüllt sind:

(a) $S(q, p) = S(r, p) + S(t, p)$,
(b) $S(q, p) > 0$,
(c) $S(r, p) > 0$ und r folgt logisch aus p,
(d) $S(t, p) \leq 0$.

AXIOM 5*. S ist eine positive induktive Stützungsfunktion gdw die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(a) S ist eine positive Stützungsfunktion,
(b) S ist keine positive deduktive Stützungsfunktion.

Weiters sind für die logische Analyse des Popper-Kommentars die folgenden Zusatzdefinitionen zweckdienlich:

(D1) $S(q, p)$ ist eine Stützung gdw S eine Stützungsfunktion ist und $S(q, p) > 0$.
(D2) $S(q, p)$ ist eine völlig deduktive Stützung gdw gilt: $S(q, p)$ ist eine Stützung und q folgt logisch aus p.
(D3) $S(q, p)$ ist eine Schwächung gdw S eine Stützungsfunktion ist und $S(q, p) < 0$.

(3) Zu Karl Poppers Axiom 3A und Lemma 2: Diese beiden Sätze lauteten:

AXIOM 3A. $(p)(q)(P(p) > 0$ & $P(q) < 1 \rightarrow [S(q, p)$ is said to be a purely deductive S-function $\leftrightarrow p \vdash q])$
LEMMA 2. $(p)(q)(S(q, p)$ is a purely deductive S-function $\rightarrow$ $S(q, p)$ is a positive support)

Reformulierung von AXIOM 3A. Für alle P, S, p und q: Wenn $P(p) > 0$ und $P(q) < 1$ und $\langle q, p\rangle$ aus dem Argumentbereich von S ist, dann: S ist eine völlig deduktive Stützungsfunktion gdw S eine Stützungsfunktion ist und q logisch aus p folgt.

Das reformulierte Axiom 3A ist aus Axiom 3* ableitbar, das Axiom 3* aus dem reformulierten Axiom 3A nicht.

Reformulierung von LEMMA 2. Für alle S: Wenn S eine völlig deduktive Stützungsfunktion ist, dann für alle p und q: $S(q, p)$ ist eine Stützung.

Das reformulierte Lemma 2 ist nicht aus Axiom 3* (und somit auch nicht aus dem reformulierten Axiom 3A) ableitbar, da es ja möglich ist, daß die Wahrscheinlichkeit von q gleich 1 und somit $S(q, p)$ gleich 0 ist. Folgende schwächere Variante ist aus dem reformulierten Axiom 3A (und somit aus dem Axiom 3*) ableitbar:

LEMMA 2*. Für alle S: Wenn S eine völlig deduktive Stützungsfunktion ist, dann für alle P, p und q: Wenn $P(p) > 0$ und $P(q) < 1$ und $\langle q, p\rangle$ aus dem Argumentbereich von S ist, dann ist $S(q, p)$ eine Stützung.

(4) Zu Karl Poppers Axiom 3B und Lemma 3: Diese beiden Sätze lauteten:

AXIOM 3B. $(p)(q)(P(p) > 0 \,\&\, P(q) < 1 \;\rightarrow\; [S(q, p)$ is said to be a purely deductive (and positive) support $\leftrightarrow p \vdash q \,\&\, S(q, p) > 0])$
LEMMA 3. All purely deductive S-functions are purely deductive supports. (By Lemma 2)

Axiom 3B läßt sich durchaus so auffassen, als wären 'P' und 'S' Konstanten. In dieser Lesart identifiziert man es wohl am besten einfach mit meinem Axiom 3 aus der Nachkonstruktion, das heißt mit:

Reformulierung 1 von AXIOM 3B. Für alle p und q gilt: Wenn $P(p) > 0$ und $P(q) < 1$, dann: $s(q, p)$ ist genau dann eine völlig deduktive Stützung, wenn q logisch aus p folgt.

Der Zusatz im Axiom 3B '& $S(q, p) > 0$' ist überflüssig, da ja gilt: Wenn $P(p) > 0$ und $P(q) < 1$ und q folgt logisch aus p, dann $S(q, p) > 0$.

Lemma 3 erzwingt jedoch, auch eine solche Reformulierung von Axiom 3B zu versuchen, in der 'P' und 'S' als Variablen betrachtet werden:

Reformulierung 2 von AXIOM 3B. Für alle P, S, p und q: Wenn $P(p) > 0$ und $P(q) < 1$ und S eine Stützungsfunktion ist und $\langle q, p \rangle$ aus dem Argumentbereich von S ist, dann: $S(q, p)$ eine völlig deduktive Stützung gdw q logisch aus p folgt.

Die zweite Reformulierung von Axiom 3B ist ableitbar aus Axiom 3* und den Zusatzdefinitionen (D1) und (D2).

Lemma 3 vermischt Funktionen mit ihren Werten und ist daher, wörtlich genommen, falsch. S-Funktionen sind ja Funktionen, die geordneten Paaren von Sätzen reelle Zahlen zuordnen, die größer

-1 und kleiner $+1$ sind, während völlig deduktive Stützungen Werte von S-Funktionen sind, und diese Werte sind nicht selber wieder S-Funktionen, sondern reelle Zahlen, die größer 0 und kleiner 1 sind. Deshalb schlage ich auch hier eine Reformulierung vor:

> Reformulierung von LEMMA 3. Für alle P, S, p und q: Wenn $P(p) > 0$ und $P(q) < 1$ und S eine völlig deduktive Stützungsfunktion ist und $\langle q, p \rangle$ aus dem Argumentbereich von S ist, dann ist $S(q, p)$ eine völlig deduktive Stützung.

Das reformulierte Lemma 3 ist über die Zusatzdefinitionen aus Axiom 2* und der Reformulierung 2 des Axioms 3B ableitbar.

(5) Zur Einsichtigkeit der Axiome 3 bzw. 3*: In diesen Axiomen wird gemäß einem Popperschen Sprachgebrauch (vgl. Popper 1983b, p.250; 1985, p.311) von völlig deduktiven Stützungen bzw. von völlig deduktiven Stützungsfunktionen gesprochen. Für Karl Popper ist insbesondere die Stützung, die $q \vee p$ durch p erfährt, völlig deduktiv. Eine vage Intuition dahinter ist wohl, daß die Beziehung der logischen Implikation etwas Deduktives, nichts Induktives ist, und diese Beziehung besteht ja zwischen p und $q \vee p$. Man sagt in der Tat auch oft, daß ein Argument dann und nur dann deduktiv (oder besser: logisch gültig) ist, wenn seine Konklusion durch die Konjunktion seiner Prämissen logisch impliziert wird; während ein induktives Argument, was immer es sonst noch sein mag, nicht deduktiv ist. Doch Karl Poppers Wortwahl scheint mir (und anderen Wissenschaftstheoretikern) irreführend zu sein, denn sie suggeriert, das Ausmaß der Stützung, die $q \vee p$ durch p erfährt, sei völlig dadurch bestimmt, daß p $q \vee p$ logisch impliziert. Aber der suggerierte Eindruck ist falsch. Es gilt ja, wenn $P(p) > 0$, kraft Definition: $S(q \vee p, p) = P(q \vee p, p) - P(q \vee p)$. Nun ist $P(q \vee p, p)$ stets gleich 1. Somit: $S(q \vee p, p) = 1 - P(q \vee p) = P(\neg(q \vee p)) = P(\neg q \wedge \neg p)$. Mit anderen Worten: $S(q \vee p, p)$ ist umso größer, je kleiner $P(q \vee p)$ ist bzw. je größer $P(\neg q \wedge \neg p)$ ist. Entscheidend für die Höhe von $S(q \vee p, p)$ ist die Wahrscheinlichkeit von $\neg q \wedge \neg p$, die hier zwischen 0 und 1 (mit

Ausschluß der 1) variieren kann, und nicht $P(q \vee p, p)$, die für alle p und q konstant 1 ist!

(6) Zu Axiom 4 und 4*: Axiom 4, nämlich:

Für all p und q gilt: Wenn $P(p) > 0$, dann: $s(q, p)$ ist genau dann eine deduktive Stützung, wenn es mindestens ein r und ein t gibt, so daß die folgenden vier Bedingungen erfüllt sind:

(a) $s(q, p) = s(r, p) + s(t, p)$,
(b) $s(q, p)$ ist eine Stützung,
(c) $s(r, p)$ ist eine völlig deduktive Stützung,
(d) $s(t, p)$ ist keine Stützung.

war natürlich dafür gedacht, die drei expliziten Prämissen des Popper/Miller-Argumentes, nämlich:

(a) $s(q, p) = s(q \vee p, p) + s(p \rightarrow q, p)$
(b) $s(q \vee p, p) \geq 0$
(c) $s(p \rightarrow q, p) \leq 0$

im Beweis der Zwischenkonklusion, daß jede Stützung (unter Normalbedingungen) deduktiv ist, verwenden zu können. Ein Blick auf die drei expliziten Prämissen macht klar: Wenn $s(q, p)$ positiv ist, wenn also p q stützt, dann nur, weil $s(q \vee p, p)$ positiv ist, und $s(q \vee p, p)$ ist nur deshalb positiv, weil $q \vee p$ logisch (oder deduktiv) aus p folgt; das erlaubt vielleicht in einem übertragenen Sinn zu sagen, daß $s(q, p)$ selber deduktiv ist. Ungefähr diese Überlegungen habe ich Karl Popper unterstellt und dementsprechend Axiom 4 formuliert. Ich stimme Karl Poppers Kritik ganz zu, daß Axiom 4 nicht überzeugend ist und daß es auch nicht überzeugender würde, wenn man ihm die Bedingung (e), nämlich:

(e) q ist logisch äquivalent mit $r \wedge t$

hinzufügte.

Karl Popper schreibt auch, daß die Bedingungen (a) bis (d) die Bedeutung von 'deduktiv' im Zusammenhang mit Stützungsfunktionen nicht charakterisieren, denn diese Bedingungen würden durch alle positiven S-Funktionen erfüllt, und, wenn man Bedingung (b) fallen läßt, durch alle S-Funktionen überhaupt. Diese Kritik bezieht sich inhaltlich nicht auf Axiom 4, sondern auf Axiom 4*, nämlich:

S ist eine positive deduktive Stützungsfunktion gdw S eine Stützungsfunktion ist und für alle p und q gilt: wenn $\langle q, p\rangle$ aus dem Argumentbereich von S ist, dann gibt es mindestens einen Satz r und einen Satz t, so daß die folgenden vier Bedingungen erfüllt sind:

(a) $S(q, p) = S(r, p)+S(t, p)$,
(b) $S(q, p) > 0$,
(c) $S(r, p) > 0$ und r folgt logisch aus p,
(d) $S(t, p) \leq 0$.

Es ist richtig, daß alle positiven S-Funktionen die Bedingungen (a) bis (d) des Axioms 4* erfüllen. Genauer (Antiinduktionstheorem für Stützungsfunktionen): Es gilt für alle S : Wenn S eine positive Stützungsfunktion ist, dann ist S eine positive deduktive (und damit keine positive induktive) Stützungsfunktion. Es ist auch richtig, daß alle S-Funktionen die Bedingungen (a), (c) und (d) erfüllen. Es ist aber nicht richtig, daß alle S-Funktionen positive deduktive Stützungsfunktionen sind; noch folgt, daß alle S-Funktionen deduktiv sind. Es wurde bisher schlicht und einfach nirgends definiert, was es heißen könnte, eine S-Funktion sei deduktiv. Eine solche Definition würde sicher nicht, wie Karl Popper mir vielleicht stillschweigend unterstellt hat, so aussehen:

(Dd) S ist eine deduktive Stützungsfunktion gdw S eine Stützungsfunktion ist und für alle p und q gilt: wenn $\langle q, p\rangle$ aus dem Argumentbereich von S ist, dann gibt es mindestens einen Satz r

und einen Satz t, so daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(a) $S(q, p) = S(r, p)+S(t, p)$,
(b) $S(r, p) \geq 0$ und r folgt logisch aus p,
(c) $S(t, p) \leq 0$.

(Dd) erschien mir damals nicht nur nicht überzeugend, sondern auch absurd. Denn aus (Dd) würde folgen, daß sogar alle negativen S-Funktionen deduktiv sind, wobei gelte:

(Dn) S ist eine negative Stützungsfunktion gdw S eine Stützungsfunktion ist und für alle p und q gilt: wenn $\langle q, p\rangle$ aus dem Argumentbereich von S ist, dann $S(q, p) < 0$.

Ein Blick auf die drei Bedingungen in (Dd) macht klar: Wenn $S(q, p)$ negativ ist, dann nicht, weil die "völlig deduktive" Stützung $S(r, p)$ positiv ist, sondern obwohl sie es ist. Die Negativität von $S(q,p)$ verdankt sich ausschließlich der Negativität von $S(t, p)$. Das verbietet intuitiv, so schien mir damals, in irgendeinem noch so weit hergeholten Sinn des Wortes 'deduktiv' zu sagen, $S(q,p)$ sei selber deduktiv und in weiterer Folge auch die Stützungsfunktion S.

Intuitionen pflegen allerdings vage zu sein und einander zuwiderzulaufen, sobald man sie bewußtmacht. Drei, vier Jahre später stellte ich ein anderes, vag-intuitiv gestütztes Gedankenexperiment an. Angenommen, $S(q, p)$ ist positiv und somit eine Stützung. Wie wir von Karl Popper und David Miller wissen, ist $S(q, p)$ nur deswegen eine Stützung, weil $S(q \vee p, p)$ nie negativ ist, und $S(q \vee p, p)$ ist beweisbarerweise deshalb nie negativ, weil $q \vee p$ aus p logisch folgt. Daß $S(q, p)$ eine Stützung ist, beruht also auf dem Vorhandensein einer logischen oder deduktiven Beziehung zwischen p und einer Folgerung aus q; auch $S(q, p)$ dürfe man daher (so zumindest meine Lesart der einschlägigen Textstellen) in einem übertragenen Sinne 'deduktiv', jedenfalls gemäß

Karl Popper nicht 'induktiv' nennen. Nun aber angenommen, $S(q, p)$ ist negativ und somit eine Schwächung. Wie wir von Karl Popper und David Miller ebenfalls wissen, ist $S(q, p)$ nur deswegen eine Schwächung, weil $S(p \rightarrow q, p)$ nie positiv ist, und $S(p \rightarrow q, p)$ ist beweisbarerweise deshalb nie positiv, weil $p \rightarrow q$ aus $\neg p$ logisch folgt. In einem älteren logischen Sprachgebrauch würde man sagen, daß p im subkonträren Widerspruch zu $p \rightarrow q$ steht, in einem neueren Sprachgebrauch, dem sich Karl Popper und David Miller angeschlossen haben, sagt man, daß p und $p \rightarrow q$ voneinander (maximal) deduktiv unabhängig sind, denn p und $p \rightarrow q$ haben außer Tautologien keine gemeinsamen logischen Folgerungen. Daß $S(q, p)$ eine Schwächung ist, beruht also auf dem Vorhandensein einer logischen oder deduktiven Beziehung zwischen p und einer Folgerung aus q; warum sollte man daher $S(q, p)$, obwohl negativ, nicht auch in einem übertragenen Sinne 'deduktiv' nennen? Täten wir's, dann würde gelten: Gleichgültig ob $S(q, p)$ eine Stützung oder Schwächung ist, stets wäre $S(q, p)$ nun deduktiv, denn in beiden Fällen bestimmen deduktive Beziehungen zwischen p und Folgerungen aus q, ob Stützung oder Schwächung vorliegt, im ersten Fall ist es die Beziehung der logischen Folge zwischen $q \vee p$ und p, im zweiten Fall ist es die Beziehung der deduktiven Unabhängigkeit zwischen $p \rightarrow q$ und p. Man könnte die Konklusion (C4) des Popper/Miller-Argumentes 'Es gibt keine rein induktive Abhängigkeit' auf diese billige Weise als etabliert betrachten (diese Weise ist nicht jene in Popper/ Miller 1987). Damit stellten sich nicht nur alle Stützungen und Schwächungen, sondern auch alle probabilistischen Stützungsfunktionen und probabilistischen Stützungs- und Schwächungsbeziehungen als deduktiv heraus und der Deduktivismus in der Wissenschaftstheorie hätte anscheinend (oder doch eher scheinbar?) voll triumphiert. – Diese wortklauberischen Überlegungen verstärkten in mir den Verdacht, den ich bis heute hege, daß der wahre Wert des Popper/Miller-Argumentes in seinen drei expliziten Prämissen, also in drei präzisen Theoremen über Stützungen bzw. Stützungsfunktionen liegt und nicht in der antiinduktionistischen Auslegung dieser Theoreme. Mir scheint nach wie vor, es sind die *Prämissen* des Popper/Miller-Argumentes, nicht seine Konklusionen, die von Karl Popper und David Miller in den Antiinduktionsbeweisen bewiesen werden.

(7) Zu *Where is the remedy?*: Ich habe Karl Poppers Ausführungen damals so verstanden: Definiere, was es heißen soll, daß ein Belegmaterial e zu einer Hypothese h in einer echt induktiven Stützungsbeziehung steht. Bedenke dabei, daß e nur dann zu h in einer echt induktiven Stützungsbeziehung steht, wenn e auch solche Folgerungen aus h stützt, die über das, was e einschließt, hinausgehen. Die Folgerungen, die über das, was e einschließt, hinausgehen, sind nun aber genau die Folgerungen aus $e \rightarrow h$. Da ja gilt, daß $S(e \rightarrow h, e) \leq 0$, heißt dies, daß alle diese Folgerungen von e normalerweise geschwächt statt gestützt werden. Somit ist die Stützungsbeziehung nicht echt induktiv. – Ich habe die Frage, ob die Stützungsbeziehung wirklich nicht echt induktiv ist, im Sinne dieser Ausführungen innerhalb der Wahrscheinlichkeitssemantik streng axiomatisch zu beantworten versucht. Weiters habe ich auf gleiche Weise die in der Diskussion der Antiinduktionsbeweise vernachlässigte Frage untersucht, ob die Schwächungsbeziehung echt induktiv ist. Daß kein Belegmaterial e irgendeine Hypothese h echt induktiv stützen kann, bedeutet ja noch keineswegs von vornherein, daß kein Belegmaterial e irgendeine Hypothese h nicht echt induktiv schwächen kann. Wie Karl Popper 50 Jahre früher in einem parallelen Fall vorgezeigt hat, ist keine strikt universelle Hypothese h mit empirischem Gehalt durch e verifizierbar, aber das bedeutete keineswegs, daß keine solche Hypothese h unter Normalbedingungen durch geeignetes Belegmaterial e falsifizierbar ist. Es könnte sich die Wissenschaftstheoriegeschichte wiederholen und sich herausstellen, daß zwar keine Hypothese h durch irgendein Belegmaterial e echt induktiv gestützt werden kann, aber jede Hypothese h unter Normalbedingungen durch geeignetes Belegmaterial e echt induktiv geschwächt werden kann. Über meine damaligen Ergebnisse und ihre Beweise werde ich kurz zusammenfassend im Abschnitt 1.4 berichten.

1.3. Karl Poppers Brief vom 29.9.1987: Nochmals zur deduktiven Stützung

Anfang Oktober 1987 erhielt ich unerwarteterweise Post von Karl Popper. Sie enthielt einen weiteren Erklärungsversuch, warum die Stützung, die eine Hypothese h durch einen Beobachtungssatz e erfährt, immer deduktiv ist. Karl Popper schreibt in seinem Brief vom 29. September 1987:

> Lieber Dr Dorn,
>
> Soeben bin ich auf eine neue Weise gekommen, unser Resultat auszudrücken. h sei eine beliebige Hypothese, e ein beliebiger Satz ("evidence") und b irgendein Hintergrundswissen. Dann gilt folgendes:
>
> Wenn $p(h, eb) > p(h, b)$, dann gibt es immer einen Satz x, der nicht aus b folgt, der aber sowohl aus h folgt wie auch aus e. (Also: $(\mathrm{E}x)(\sim(b \vdash x) \;\&\; h \vdash x \;\&\; e \vdash x)$.)
>
> Man könnte auch schreiben
>
> $(\mathrm{E}x)(ct(bx) > ct(b) \;\&\; ct(hx) = ct(h) \;\&\; ct(ex) = ct(e))$
> und mit wachsendem Support wächst $ct(x)$
> oder
> $(\mathrm{E}x)(p(bx) < p(b) \;\&\; p(hx) = p(h) \;\&\; p(ex) = p(e))$.
>
> Also: für jeden noch so kleinen Support durch e gibt es einen nicht aus b folgenden (und daher nicht-tautologischen) Satz, der eine *Teilaussage* aus h ist und *deduktiv* aus e folgt. Daher ist der Support durch e immer deduktiv.
> Schöne Grüße an Ihren Professor!
>
> Ihr Karl Popper
>
> [...] Wir haben auch:
> $s(h, e, b) > s(h, f, b) \rightarrow$
> $(\mathrm{E}x)(\mathrm{E}y)(((ct(x)) > ct(y)) \;\&\; h \vdash x \;\&\; h \vdash y \;\&\; e \vdash x \;\&\; f \vdash y)$
> oder: Je größer der Support, umso größer der Content jenes (größten) Teilsatzes von h, der aus dem unterstützenden Satz (e oder f) rein deduktiv folgt.

Ich konnte damals aus diesem Brief kein besseres Verständnis dessen gewinnen, was Karl Popper mit 'deduktiver Stützung' meint. Da ich die Schuld hierfür ganz bei mir suchte, sah ich davon ab, Karl Popper mit Bitten um zusätzliche Erläuterungen zu belästigen. Ich muß zugeben, daß ich auch heute noch den Brief in bezug auf deduktive Stützung nicht erhellend finde. Ich möchte dies begründen, indem ich die in ihm vorgetragene Argumentation in etwas ausführlicherer Weise nachzuvollziehen trachte. Zuvor eine terminologische Bemerkung. Karl Popper unterscheidet drei Arten von Gehalt: logischer Gehalt, empirischer Gehalt, wahrscheinlichkeitstheoretischer Gehalt. Der logische Gehalt eines Satzes ist (in unserem Kontext) identisch mit der Menge der nicht logisch wahren Sätze, die er logisch impliziert (in anderen Kontexten ist er wie üblich einfach seine Folgerungsmenge); der empirische Gehalt eines Satzes ist identisch mit der Menge der Basissätze, die er logisch ausschließt; der wahrscheinlichkeitstheoretische Gehalt eines Satzes (oder kurz: der Gehalt eines Satzes) ist die Wahrscheinlichkeit seiner Negation: $ct(p) = P(\neg p)$; der Gehalt eines Satzes im Lichte eines anderen Satzes ist die Wahrscheinlichkeit, daß er falsch ist unter der Annahme, daß der andere wahr ist: $ct(q, p) = P(\neg q, p)$. Der logische Gehalt eines Satzes ist also, wie auch sein empirischer Gehalt, entweder eine leere oder eine unendliche Menge von Sätzen, der wahrscheinlichkeitstheoretische Gehalt eines Satzes eine reelle Zahl zwischen 0 und 1. Logisch wahre Sätze haben leeren logischen, leeren empirischen und 0 wahrscheinlichkeitstheoretischen Gehalt. – Im folgenden mein versuchsweiser Nachvollzug der Argumentation in Karl Poppers Brief.

Es sei h eine Hypothese, e ein Beobachtungssatz, b eine Konjunktion von Hintergrundannahmen, und es gelte, daß $p(e \wedge b) > 0$ und $p(h, e \wedge b) > p(h, b)$. Gemäß dem erweiterten Popper/Miller-Faktorisierungstheorem gilt: $s(h, e, b) = s(h \vee e, e, b) + s(e \rightarrow h, e, b)$, wobei $s(h, e, b) = p(h, e \wedge b) - p(h, b)$, $s(h \vee e, e, b) = p(h \vee e, e \wedge b) - p(h \vee e, b)$ und $s(e \rightarrow h, e, b) = p(e \rightarrow h, e \wedge b) - p(e \rightarrow h, b)$. Da

$p(h, e \wedge b) > p(h, b)$, gilt: $s(h, e, b) > 0$. Und da ja $s(e \rightarrow h, e, b) \leq 0$, gilt somit: $s(h \vee e, e, b) > 0$; und somit: $[p(h \vee e, e \wedge b) - p(h \vee e, b)] > 0$. Da $h \vee e$ aus $e \wedge b$ logisch folgt, gilt: $p(h \vee e, e \wedge b) = 1$. Somit: $p(h \vee e, b) < 1$. Somit: $h \vee e$ folgt nicht logisch aus b. Da $h \vee e$ sowohl aus h als auch aus e, aber nicht aus b logisch folgt, gibt es also, wie Karl Popper schreibt, immer einen Satz x, der nicht aus b, aber sowohl aus h wie auch aus e logisch folgt. Da ja $h \vee e$ aus h und aus e logisch folgt, ist h mit $h \wedge (h \vee e)$ und ist e mit $e \wedge (h \vee e)$ logisch äquivalent. Somit: $p(h \wedge (h \vee e)) = p(h)$ und $p(e \wedge (h \vee e)) = p(e)$. Und da für beliebige x gilt: $ct(x) = 1-p(x)$, gilt auch: $ct(h \wedge (h \vee e)) = ct(h)$ und $ct(e \wedge (h \vee e)) = ct(e)$. Wegen $p(h \vee e, b) < 1$ gilt: $p((h \vee e) \wedge b)/p(b) < 1$; und somit: $p(b \wedge (h \vee e)) < p(b)$. Also gibt es, wie Karl Popper schreibt, immer einen Satz x derart, daß $p(b \wedge x) < p(b)$ und $p(h \wedge x) = p(h)$ und $p(e \wedge x) = p(e)$; sowie immer einen Satz x derart, daß $ct(b \wedge x) > ct(b)$ und $ct(h \wedge x) = ct(h)$ und $ct(e \wedge x) = ct(e)$. Dies kommentiert Karl Popper so: "Also: für jeden noch so kleinen Support durch e gibt es einen nicht aus b folgenden (und daher nicht-tautologischen) Satz, der eine *Teilaussage* aus h ist und *deduktiv* aus e folgt." In diesem Kommentar vollzieht sich offenbar ein stillschweigender Kategorienwechsel von Sätzen zu ihren Folgerungsmengen; vermutlich ist folgendes gemeint: Wenn $s(h, e, b)$ eine Stützung ist, dann gibt es mindestens einen Satz x derart, daß x aus e, aber nicht aus b logisch folgt und die Folgerungsmenge von x eine Teilmenge der Folgerungsmenge von h ist. Das ist als wahr bewiesen. Karl Popper schließt sein Argument mit "Daher ist der Support durch e immer deduktiv". Ist diese Konklusion auch als wahr bewiesen? Ich weiß das nicht, solange ich nicht weiß, was es heißt, daß die Stützung, die h durch e auf der Basis von b erfährt, deduktiv ist. Ich kann nur vermuten, daß Karl Popper nun folgendes unter 'deduktiver Stützung' versteht: wenn $p(e \wedge b) > 0$, dann: $s(h, e, b)$ ist eine deduktive Stützung, wenn (vielleicht auch: und nur wenn) gilt: $s(h, e, b)$ ist eine Stützung und es gibt mindestens einen Satz x derart, daß x aus e, aber nicht aus b logisch folgt und die Folgerungsmenge von x eine Teilmenge der Folgerungsmenge von h ist.

Mittels dieser Definition ließe sich beweisen, daß jede Stützung deduktiv ist. Aber im Lichte von Karl Poppers früheren Brief zur deduktiven Stützung vermute ich zusätzlich ein zweites: er würde auch diesen Beweis der Behauptung, daß jede Stützung deduktiv ist, ablehnen, weil auch dieser Beweis eine Definition des Wortes 'deduktive Stützung' enthält.

Karl Popper schreibt auch: "mit wachsendem Support wächst $ct(x)$" und er betont das in ausführlicher Umschreibung im Nachtrag zu seinem Brief. Das heißt, wenn ich Karl Popper richtig verstanden habe und er mit 'x' auf die Einsetzung '$h \vee e$' anspielt: Wenn $s(h, e) > s(h, f)$, dann $ct(h \vee e) > ct(h \vee f)$. Für den Beweis scheint mir eine sehr starke Zusatzannahme nötig, von der ich keineswegs sicher bin, ob Karl Popper sie stillschweigend gemacht hat, nämlich: $s(e \rightarrow h, e) = s(f \rightarrow h, e)$. Unter dieser Annahme gilt in der Tat: Wenn $s(h, e) > s(h, f)$, dann $s(h \vee e, e) > s(h \vee f, f)$; somit: $[p(h \vee e, e) - p(h \vee e)] > [p(h \vee f, e) - p(h \vee f)]$; somit: $[1 - p(h \vee e)] > [1 - p(h \vee f)]$; somit: $ct(h \vee e) > ct(h \vee f)$. Nimmt man an, daß $s(e \rightarrow h, e, b) = s(f \rightarrow h, e, b)$, erhält man auf gleiche Weise: Wenn $s(h, e, b) > s(h, e, b)$, dann $ct(h \vee e, b) > ct(h \vee f, b)$. Aber diese Einsicht scheint mir leider nichts für ein besseres Verständnis des Ausdrucks 'deduktive Stützung' zu bringen.

1.4. Echt induktive Stützung und Schwächung: zwei eigene Beweise

In meinen späteren eigenen Beweisen (Dorn 1991, 1995, 1997) habe ich das Popper/Miller-Faktorisierungstheorem für Stützungsfunktionen nicht mehr verwendet, sondern bin jener Grundidee gefolgt, die Karl Popper unter anderem auch gegen Ende seines Briefes vom 25. August 1987 betont hat: man kann dann und nur dann berechtigterweise sagen, ein Belegmaterial e stütze eine Hypothese h induktiv, wenn man nachweisen kann, daß e auch solche Folgerungen aus h stützt, die über e hinausgehen. Mit anderen Worten, es muß gelten: wenn e h echt induktiv stützt, dann und nur dann stützt e auch solche Folgerungen aus h, die über e

hinausgehen. Es sei q eine Folgerung aus h. Wie ist die Wendung 'q geht über e hinaus' zu verstehen? Gemäß Karl Popper und David Miller so: q geht genau dann über e hinaus, wenn q deduktiv unabhängig von e ist, das heißt, wenn der logische Gehalt von q sich nicht mit dem logischen Gehalt von e überschneidet, das heißt, mit anderen Worten, wenn jeder Satz, der sowohl aus e als auch aus q logisch folgt, logisch wahr ist. Die Grundidee präsentiert sich nun so: e stützt h dann und nur dann echt induktiv, wenn e Folgerungen aus h stützt, die von e deduktiv unabhängig sind. Die Forderung der deduktiven Unabhängigkeit ist in diesem Kontext so stark, daß sie zu dem gewünschten Ergebnis führt: kein Satz stützt irgendeinen Satz (bei irgendeiner Wahrscheinlichkeitsverteilung) echt induktiv. Im folgenden ein, wie ich hoffe, völlig durchsichtiger Beweis dieses Satzes im Rahmen einer probabilistischen Standardsemantik:

DEFINITION 1 (deduktive Unabhängigkeit)
A ist deduktiv unabhängig von B gdw der logische Gehalt von A sich nicht mit dem logischen Gehalt von B überschneidet.

KOROLLAR zu Definition 1
A ist deduktiv unabhängig von B gdw $A \vee B$ logisch wahr ist.

DEFINITION 2 (stützen)
A stützt B bei (der Wahrscheinlichkeitsverteilung) p gdw
$p(B \wedge A) > p(B) \cdot p(A)$.

KOROLLAR zu Definition 2
Wenn $p(A) \neq 0$, dann: A stützt B bei p gdw $p(B, A) > p(B)$.

DEFINITION 3 (echt induktiv stützen)
A stützt B echt induktiv bei p gdw gilt: (1) A stützt B bei p und (2) es gibt mindestens eine logische Folgerung C von B derart, daß C deduktiv unabhängig von A ist und A trotzdem C bei p stützt.

LEMMA 1

Die Wahrscheinlichkeit des Konditionals ist nie kleiner als die entsprechende konditionale Wahrscheinlichkeit, Version 1 des Popperschen Überschußgesetzes (bewiesen von Karl Popper im Jahr 1938; vgl. Dorn 1992/93):

Wenn $p(A) > 0$, dann $p(A \rightarrow B) \geq p(B, A)$.

BEWEIS

1. $p(A) > 0$ — Annahme
2. $p(A \rightarrow B) - p(B, A) = p(\neg A) + p(A \wedge B) - p(B, A) =$
   $= 1 - p(A) + p(B, A) \cdot p(A) - p(B, A) =$
   $= (1 - p(A)) \cdot (1 - p(B, A))$ — 1; elementare Theoreme
3. $[(1 - p(A)) \cdot (1 - p(B, A))] \geq 0$ — da ja $p(A) \leq 1$ und $p(B, A) \leq 1$
4. $p(A \rightarrow B) \geq p(B, A)$ — 2, 3

LEMMA 2

Gesetz der Unverträglichkeit von deduktiver Unabhängigkeitsbeziehung und Stützungsbeziehung (bewiesen von David Miller Ende 1980, Anfang 1981; vgl. Popper 1983a, p. 326; der folgende Beweis ist nicht der David Millers):

Wenn B deduktiv unabhängig von A ist, dann stützt A B bei keiner Wahrscheinlichkeitsverteilung p.

BEWEIS

1. B ist deduktiv unabhängig von A. — Annahme
2. $A \vee B$ ist logisch wahr. — 1; Korollar zu Def. 1
3. B ist logisch äquivalent mit $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$.
   — Semantisches Theorem
4. $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$ ist logisch äquivalent mit $\neg A \vee B$. — 2, 3
5. $\neg A \vee B$ ist logisch äquivalent mit $A \rightarrow B$.
   — Semantisches Theorem
6. B ist logisch äquivalent mit $A \rightarrow B$. — 3, 4, 5

7. $p(B) = p(A \to B)$ 6

8. Wenn $p(A) = 0$, dann $p(B \wedge A) = p(B) \cdot p(A) = 0$.
Elementares Theorem

9. Wenn $p(A) \neq 0$, dann $p(B, A) \leq p(A \to B)$. Lemma 1

10. Wenn $p(A) \neq 0$, dann $p(B, A) \leq p(B)$. 7, 9

11. Wenn $p(A) = 0$, dann stützt A B nicht bei p. 8; Def. 2

12. Wenn $p(A) \neq 0$, dann stützt A B nicht bei p.
10; Korrolar zu Def. 2

13. A stützt B nicht bei p. 11, 12

14. Für alle p: A stützt B nicht bei p.
13; UG, Variablenbedingung erfüllt

15. Es gibt kein einziges p, so daß A B bei p stützt. 14

EIN ANTIINDUKTIONSTHEOREM

Kein Satz A stützt irgendeinen Satz B bei irgendeiner Wahrscheinlichkeitsverteilung p echt induktiv.

BEWEIS

1. Wenn A echt induktiv B bei p stützt, dann gibt es mindestens ein C derart, daß C deduktiv unabhängig von A ist und A trotzdem C bei p stützt. Def. 3
2. Es gibt kein C, so daß C deduktiv unabhängig von A ist und A trotzdem C bei p stützt. Lemma 2
3. A stützt B bei p nicht echt induktiv. 1, 2
4. Für alle A, B und p: A stützt B bei p nicht echt induktiv.
3; UG, Variablenbedingung erfüllt
5. Es gibt kein einziges A, B und p, so daß A B bei p echt induktiv stützt. 4

So weit, so gut. Doch scheint es nur angemessen, die Poppersche Grundidee "Es muß gelten: wenn e h echt induktiv stützt, dann und nur dann stützt e auch solche Folgerungen aus h, die über e hinausgehen" konsequent fortzuspinnen, nämlich so: Es muß gelten: wenn e h echt induktiv schwächt, dann und nur dann schwächt e auch solche Folgerungen aus h, die über e hinausgehen. Übernimmt man wieder die Popper/Miller-Auslegung der Wendung 'über e hinausgehen', präsentiert sich die Grundidee so: e schwächt h dann und nur dann echt induktiv, wenn e Folgerungen aus h schwächt, die von e deduktiv unabhängig sind. Die Forderung der deduktiven Unabhängigkeit ist in diesem Kontext so stark, daß sich ein bemerkenswertes Ergebnis gewinnen läßt, das jeden Antiinduktivisten nachdenklich stimmen sollte: Für alle Sätze A und B sowie für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen p gilt: Wenn A B bei p schwächt, dann schwächt A B bei p echt induktiv. Im folgenden wieder ein, wie ich hoffe, völlig durchsichtiger Beweis dieses Satzes.

DEFINITION 4 (schwächen)
A schwächt B bei p gdw $p(B \wedge A) < p(B) \cdot p(A)$.

KOROLLAR zu Definition 4
Wenn $p(A) > 0$, dann: A schwächt B bei p gdw $p(B, A) < p(B)$.

DEFINITION 5 (echt induktiv schwächen)
A schwächt B echt induktiv bei p gdw gilt: (1) A schwächt B bei p und (2) es gibt mindestens eine logische Folgerung C von B derart, daß C deduktiv unabhängig von A ist und A trotzdem C bei p schwächt.

LEMMA 1*. (Version 2 des Popperschen Überschußgesetzes)
Wenn $0 < p(A) < 1$ und $p(B, A) < 1$, dann $p(A \to B) > p(B, A)$.

BEWEIS

1.	$0 < p(A) < 1$ und $p(B, A) < 1$.	Annahme
2.	$p(A \to B) - p(B, A) = (1-p(A)) \cdot (1-p(B, A))$	vgl. Beweis von Lemma 1
3.	$[(1-p(A)) \cdot (1-p(B, A))] > 0$	1
4.	$p(A \to B) > p(B, A)$	2, 3

LEMMA 3. Wenn $p(A) > 0$, dann $p(B, A) = p((A \rightarrow B), A)$.

BEWEIS

1. $p(A) > 0$	Annahme
2. $p(B, A) = p(B \wedge A)/p(A)$	1
3. $B \wedge A$ ist logisch äquivalent mit $(A \rightarrow B) \wedge A$.	Semant. Theorem
4. $p(B \wedge A) = p((A \rightarrow B) \wedge A)$	3
5. $p(B, A) = p((A \rightarrow B) \wedge A)/p(A)$	2, 4
6. $p((A \rightarrow B), A) = p((A \rightarrow B) \wedge A)/p(A)$	1
7. $p(B, A) = p((A \rightarrow B), A)$	5, 6

LEMMA 4. Wenn A B bei p schwächt, dann auch $A \rightarrow B$.

BEWEIS

1. A schwächt B bei p.	Annahme
2. $p(B \wedge A) < p(B) \cdot p(A)$	1; Def. 4
3. $0 < p(A) < 1$	2
4. $p(B, A) < p(B)$	3, 1; Kor. zu Def. 4
5. $p(B, A) < 1$	4
6. $p(B, A) < p(A \rightarrow B)$	3, 5; Lemma 1*
7. $p((A \rightarrow B), A) < p(A \rightarrow B)$	3, 6; Lemma 3
8. A schwächt $A \rightarrow B$ bei p.	3, 7; Kor. zu Def. 4

EIN INDUKTIONSTHEOREM

Wenn A B bei p schwächt, dann echt induktiv.

BEWEIS

1. A schwächt B bei p.	Annahme
2. $A \rightarrow B$ folgt logisch aus B.	Semantisches Theorem
3. $A \rightarrow B$ ist deduktiv unabhängig von A.	Semantisches Theorem
4. A schwächt $A \rightarrow B$ bei p.	1; Lemma 4
5. Es gibt mindestens eine logische Folgerung C von B derart, daß C deduktiv unabhängig von A ist und A trotzdem C bei p schwächt.	2, 3, 4
6. A schwächt B bei p echt induktiv.	1, 5; Def. 5

Wir haben also zum einen: wenn A B bei p stützt, dann nicht echt induktiv; und zum anderen: wenn A B bei p schwächt, dann echt induktiv. Das macht unsere Theorie zwar nicht logisch inkonsistent, aber bizarr. Beide Theoreme lassen sich nur deshalb herleiten, weil die Wendung '*B* geht über *A* hinaus' im Sinne von '*B* ist deduktiv unabhängig von *A*' ausgelegt und als solche in die Definitionen von 'echt induktiv stützen' und 'echt induktiv schwächen' eingebaut wurde. Trifft aber diese Auslegung wirklich die Kernbedeutung von '*B* geht über *A* hinaus'? Ich (unter anderen) verneine das trotz des blendenden logisch-mathematischen Feuerwerks zu dieser Frage in Popper/Miller (1987). Gemäß dem – meinetwegen naiven, doch verbreiteten – Verständnis von '*B* geht über *A* hinaus' geht zum Beispiel der Satz 'Der nächste Smaragd, der beobachtet wird, wird sich als grün herausstellen' über den Satz 'Alle bisher beobachteten Smaragde haben sich als grün herausgestellt' hinaus; aber nicht so gemäß der Popper/Miller-Auslegung, denn die beiden Beispielsätze sind nicht voneinander deduktiv unabhängig: ihre logischen Gehalte überschneiden sich, der Disjunktionssatz 'Alle bisher beobachteten Smaragde haben sich als grün herausgestellt, oder der nächste Smaragd, der beobachtet wird, wird sich als grün herausstellen' gehört zum logischen Gehalt des einen wie des anderen Satzes, und das trifft auch für die unendlich vielen logischen Folgerungen aus diesem Disjunktionssatz zu. (Bei Gelegenheit dieses Beispiels fällt auch auf, daß es zweifelhaft ist, ob die Relation des Hinausgehens-über symmetrisch ist, während es unzweifelhaft ist, daß die Relation der deduktiven Unabhängigkeit symmetrisch ist: Geht etwa der Satz 'Alle bisher beobachteten Smaragde haben sich als grün herausgestellt' über den Satz 'Der nächste Smaragd, der beobachtet wird, wird sich als grün herausstellen' wirklich hinaus?) Ein anderes einfaches Beispiel: Gemäß dem intuitiven Verständnis von '*B* geht über *A* hinaus' geht zum Beispiel der Satz 'Es wird innerhalb der nächsten Stunde regnen' über den Satz 'Das Barometer fällt schnell und immer wenn es schnell fällt, regnet es normalerweise innerhalb einer Stunde' hinaus; aber nicht so gemäß der Popper/

Miller-Auslegung, denn auch diese beiden Beispielsätze sind nicht voneinander deduktiv unabhängig: wieder gehört ihre Disjunktion zum logischen Gehalt des einen wie des anderen Satzes. Tausende weitere Beispiele könnten angegeben werden. Halten wir fest: Die Behauptung, wenn *B* über *A* hinausgehe, dann sei *B* von *A* deduktiv unabhängig, ist falsch. Die Umkehrung dieser Behauptung scheint mir auch falsch zu sein. Ein Beispiel: Die Sätze 'Linz ist eine Stadt' und 'Linz ist keine Stadt' sind voneinander deduktiv unabhängig, denn jeder Satz, der aus beiden Sätzen logisch folgt, ist logisch wahr und gehört somit weder zum logischen Gehalt des einen noch zum logischen Gehalt des anderen Satzes. Gemäß der Popper/Miller-Auslegung der Wendung '*B* geht über *A* hinaus' geht also jeder dieser beiden Beispielsätze über den anderen hinaus, gemäß dem normalen Verständnis der Wendung jedoch geht 'Linz ist eine Stadt' nicht über 'Linz ist keine Stadt' hinaus und geht 'Linz ist keine Stadt' nicht über 'Linz ist eine Stadt' hinaus. Halten wir fest: Die Behauptung, wenn *B* von *A* deduktiv unabhängig sei, dann gehe *B* über *A* hinaus, ist auch falsch. Damit ist die Auslegung der Wendung '*B* geht über *A* hinaus' durch '*B* ist von *A* deduktiv unabhängig' inhaltlich unangemessen und somit sind die Definitionen von 'echt induktiv stützen' sowie 'echt induktiv schwächen' inadäquat.

Die Kernbedeutung von '*B* geht über *A* hinaus' semantisch in den Griff zu bekommen, ist ein offenes wissenschaftstheoretisches Problem. Klar ist, daß jede adäquate Theorie des Hinausgehens-über die These "Wenn *B* über *A* hinausgeht, dann folgt *B* nicht logisch aus *A*" enthalten muß und die These "Wenn *B* nicht logisch aus *A* folgt, dann geht *B* über *A* hinaus" nicht enthalten darf. Klar ist nun wohl auch, daß eine solche Theorie die These "*B* geht über *A* hinaus gdw *B* von *A* deduktiv unabhängig ist" ebenfalls nicht enthalten darf. Fast alles sonst ist unklar. Ich vermute allerdings sehr, daß jede adäquate Theorie des Hinausgehens-über und damit jede Theorie des *induktiven* Stützens und Schwächens im Rahmen einer *relevanz*logischen Semantik Weingartnerscher Prägung zu entwickeln sein wird (siehe Dorn 1991, pp.359–360).

Abschließend möchte ich betonen, daß meine Kritik an der Adäquatheit der Definition von 'B geht über A hinaus' durch 'B ist von A deduktiv unabhängig' keineswegs ein schlechtes Licht auf die logischen Verdienste David Millers und Karl Poppers werfen sollte. Sie waren die ersten Menschen, welche entdeckten und bewiesen, daß Sätze, deren logische Gehalte sich nicht überschneiden, einander nicht (probabilistisch) stützen können, und sie haben unter anderem auch als erste entdeckt, daß für alle A, B, p sogar gilt: wenn B von A deduktiv unabhängig ist, dann schwächt A B bei p, sofern $p(A) < 1$ und $p(B) < 1$. Ähnlich wie das Popper/Miller-Faktorisierungstheorem und verwandte Theoreme bleiben diese Einsichten in Zusammenhänge zwischen deduktiver Unabhängigkeit einerseits und (probabilistischer) Stützung und Schwächung anderseits als gültig bestehen und sind zu würdigen, auch wenn man der antiinduktivistischen Auslegung dieser Einsichten nicht beistimmt.

2. *Wahrscheinlichkeitstheorie*

2.1. *Ein Mangel an Überschußgesetzen in der Logic of Scientific Discovery (LScD)*

Karl Popper hat seine Antiinduktionsbeweise im Rahmen seiner eigenen Wahrscheinlichkeitstheorie entwickelt; das ist im wesentlichen jene brillante axiomatische Theorie der Wahrscheinlichkeit, die im Anhang *V der LdF unter dem Titel "Ableitungen der formalen Wahrscheinlichkeitstheorie" dargestellt wird. Um den antiinduktivistischen Argumentationen Karl Poppers besser folgen zu können, vertiefte ich mich im Sommersemester 1988 in diese Ableitungen. Das hatte ein praktisches Ergebnis: ich entdeckte ein paar sinnstörende Druckfehler, die in der 9. Auflage der LdF aus dem Jahr 1989 beseitigt wurden; und es hatte ein theoretisches Ergebnis: ich bettete Poppers Wahrscheinlichkeitstheorie in eine zweisortige Prädikatenlogik 1. Stufe ein. Am 26. Mai 1988 sandte ich Karl Popper eine erste Fassung dieser Einbettung unter dem Titel "Eine prädikatenlogische Nachkonstruktion von Poppers Wahrscheinlichkeitstheorie und einigen ihrer Erweiterungen" (er ging nicht darauf ein), im Sommersemester 1989 entstand die Endfassung (siehe Dorn 1989).

Der Anhang *V enthält 6 Axiome und 100 explizite Theoreme, es folgen metatheoretische Überlegungen und zum Schluß hin findet sich ein 22 Zeilen langer, äußerst dicht geschriebener Absatz über das Verhältnis der konditionalen Wahrscheinlichkeit zur Wahrscheinlichkeit des Konditionals. Es war mir in meiner 1989er Nachkonstruktion nicht gelungen, *alle* sogenannten Überschußgesetze, die in diesem Absatz aufgelistet werden, herzuleiten. Das wichtigste davon (das sich zum Glück als leicht beweisbar herausstellte) lautet: $p(A \to B)-p(B, A) \geq 0$, mit anderen Worten: der Überschuß der Wahrscheinlichkeit des Konditionals über die entsprechende konditionale Wahrscheinlichkeit ist stets größer/gleich 0. Dieses Überschußgesetz, das Popper bereits 1938 entdeckt hatte, sollte ja, wie im Kapitel 1 ausgeführt, ab 1980 überraschend wichtig für seine Antiinduktionsbeweise werden: er brauchte es für den Beweis von $S[(p \to q), p] \leq 0$, das heißt für den Beweis, daß p $p \to q$ niemals stützt.

Ich nahm mir erst ab Mai 1992 intensiv diesen Absatz vor. Als ich nach einigen Wochen wegen großer Schwierigkeiten mit dem deutschen Text die englische Fassung dieses Absatzes in der LScD konsultieren wollte, entdeckte ich zu meiner Verblüffung, daß der entsprechende Absatz im Anhang *V der LScD fehlte. Konnte dies bedeuten, daß Karl Popper sich von seinen Ausführungen zu den Überschußgesetzen in der LdF inzwischen distanziert hatte? Anderseits war der fragliche Absatz in keiner deutschen Neuauflage gestrichen worden (Anhang *V lag in der Erstauflage aus dem Jahr 1934 noch nicht vor). So schrieb ich am 8. Juni 1992 an Karl Popper und bat um Aufklärung:

> [...] Als ich kürzlich wieder einmal den Anhang *V – [in] der 9. Auflage der *Logik der Forschung* – studierte, stellte ich fest, daß alle sinn-

störenden Druckfehler bis auf einen (den ich aber möglicherweise selber übersehen hatte) beseitigt waren (die nicht sinnstörenden Druckfehler wurden offenbar belassen). Dieser eine sinnstörende Druckfehler ist in der 16. Zeile von unten auf Seite 306; dort muß es vermutlich statt 'wenn a, dann b' richtig 'wenn b, dann a' heißen. – Der ganze Absatz, in dem sich dieser Druckfehler befindet, ist meines Wissens in allen Auflagen der englischen Übersetzung Ihrer *Logik der Forschung* weggelassen worden. Da dieser Absatz aber die ausführlichste Textstelle zu Ihren Gesetzen des Überschusses von $p(b \rightarrow a)$ über $p(a, b)$ ist, so sind Ihre Gesetze des Überschusses zwar deutschsprachigen Philosophen bekannt geworden, aber den englischsprachigen Philosophen gewöhnlich unbekannt geblieben – wie ich immer wieder im Gespräch mit amerikanischen Kollegen, die über die Logik der Konditionalsätze arbeiten, feststelle. Gibt es einen besonderen Grund für die Auslassung in der englischen Übersetzung? [...]

Die Antwort Karl Poppers ist in Anbetracht dessen, welche Schreckensgeschichten über seine Pingeligkeit bei Übersetzungen kursieren, zum Schmunzeln. Er schrieb mir am 24. Juni 1992:

Lieber Herr Doktor Dorn,

schönen Dank für Ihren Brief vom 8. Juni. Und ganz besonderen Dank für die neue sinnstörende Verwechslung von a und b!

Die Erklärung dafür, daß der Absatz nicht im englischen Text ist, ist *vermutlich*: er war vielleicht nicht in der 1. engl. Auflage, da man ja nicht an alles denkt. Der engl. Verleger (im Gegensatz zum deutschen, der wunderbar ist) hat mich nie (oder fast nie) verständigt, wann ich Verbesserungen vor einer Neuauflage anbringen kann. [...]

Nachzutragen ist, daß meine Frage in meinem Brief falsch gestellt war, weil sie davon ausging, der Anhang *V sei zunächst in der LdF ab der 2. Auflage im Jahr 1966 vorgelegen und dann habe man bei der Übersetzung des Anhangs *V für die fünfte Auflage der LScD aus dem Jahr 1968 vergessen, den besagten wichtigen Absatz ins Englische zu übersetzen. In Wirklichkeit war es so, daß der Anhang *V bereits in der ersten Auflage der LScD aus dem

Jahr 1959 vorlag, und zwar ohne die Ausführungen zu den Überschußgesetzen, und daß er für die 2. Auflage der LdF ins Deutsche übertragen wurde, wobei Karl Popper den Absatz über Überschußgesetze der deutschen Fassung des Anhangs *V hinzufügte. Offenbar wurde bei der fünften Auflage der LScD und dann bei allen späteren Auflagen der LScD nicht mehr darauf geachtet, diesen Absatz, der seit 1966 auf Deutsch in der LdF vorlag, ins Englische zu übersetzen und an entsprechender Stelle in den Anhang *V der LScD einzufügen. Das Fehlen dieses Absatzes in der LScD hat zweifellos zu der philosophiegeschichtlichen Ungerechtigkeit beigetragen, daß in der angelsächsischen philosophischen Welt bei der Erwähnung der Zusammenhänge zwischen $p(A \rightarrow B)$ und $p(B, A)$ fast jeder an die Trivialitätsergebnisse von David Lewis aus dem Jahr 1976 denkt, aber fast niemand an die Überschußgesetze von Karl Popper, deren Entdeckung teilweise bis auf das Jahr 1938 zurückgeht.

2.2. *Probabilistische Unabhängigkeit*

Inzwischen war ich bei meinen vergeblichen Versuchen, die Überschußgesetze herzuleiten, auf ein Problem mit Karl Poppers Begriff der probabilistischen Unabhängigkeit gestoßen: es konnte wohl nicht der Standardbegriff sein, gemäß dessen Definition zwei Sätze genau dann voneinander probabilistisch unabhängig sind, wenn das Produkt ihrer Wahrscheinlichkeiten gleich ist der Wahrscheinlichkeit ihrer Konjunktion. Würde man nämlich die Poppersche Wahrscheinlichkeitstheorie um diese Definition ergänzen, ließen sich Sätze herleiten, die falsch sind. Ich schilderte Karl Popper das Problem in einem – vielleicht allzu detaillierten – Brief am 27. August 1992. Zwei Vorbemerkungen. *Erstens*: Der im Brief verwendete Ausdruck '$Exc(a, b)$' ist eine von Karl Popper eingeführte Abkürzung für 'der Überschuß von $p(b \rightarrow a)$ über $p(a, b)$'; es gilt: $Exc(a, b) = p(b \rightarrow a) - p(a, b)$. *Zweitens*: Ich behandle in diesem Brief stillschweigend 'p' so, als wäre 'p' eine Konstante; in meinem Brief vom 17. November 1992 wird sich herausstellen, daß diese Behandlungsweise nicht ohne Schaden für die semantische Version der Theorie durchgehalten werden kann (siehe Abschnitt 2.3), im vorliegenden Brief ist dieser Punkt jedoch vernachlässigbar. Hier nun der vollständige Text meines Briefes vom 27. August 1992:

Sehr geehrter Herr Professor!

Ich studierte vor einigen Wochen wieder den Anhang **V Ableitungen der formalen Wahrscheinlichkeitstheorie* Ihrer *Logik der Forschung* in der Absicht, mir Ihre Gesetze des Überschusses von $p(b \rightarrow a)$ über $p(a, b)$ in kleinen Schritten innerhalb Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie zu beweisen. Ich bin dabei auf Schwierigkeiten gestoßen, die vielleicht auch für Sie von Interesse sind, da sie möglicherweise auf der objektiven Unbeweisbarkeit von einigen im Anhang **V* als Theoreme ausgezeichneten Sätzen beruhen.

Die Schwierigkeiten begannen mit dem Versuch, den folgenden Satz auf Seite 307 Ihrer *Logik der Forschung* streng zu beweisen (ich verwende aus technischen Gründen das Negationszeichen statt des Querstrichs):

SATZ (1). Wenn a und b probabilistisch unabhängig sind, dann gilt, falls b widerspruchsfrei ist: $Exc(a, b) = p(\neg a) \cdot p(\neg b)$.

Da ich in der *Logik der Forschung* nichts Gegenteiliges finden konnte, ging ich (fälschlicherweise?) davon aus, daß Sie den üblichen Begriff der probabilistischen Unabhängigkeit verwenden:

SATZ (2). a und b sind probabilistisch unabhängig genau dann, wenn gilt: $p(a \wedge b) = p(a) \cdot p(b)$.

Zwar läßt sich mittels Satz (2) leicht beweisen:

SATZ (3). Wenn a und b probabilistisch unabhängig sind, dann gilt, falls $p(b) > 0$: $Exc(a, b) = p(\neg a) \cdot p(\neg b)$,

aber Satz (3) ist logisch schwächer als Satz (1), da ja in Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie nicht gilt:

SATZ (4). Wenn b widerspruchsfrei ist, dann $p(b) > 0$.

sondern nur gilt:

SATZ (5). Wenn $p(b) > 0$, dann ist b widerspruchsfrei.

Um Satz (1) zu beweisen, müßte man also zusätzlich zu Satz (3) auch noch den folgenden Satz beweisen können:

SATZ (6). Wenn a und b probabilistisch unabhängig sind, dann gilt, falls b widerspruchsfrei ist und $p(b) = 0$: $Exc(a, b) = p(\neg a) \cdot p(\neg b)$.

Doch ich sehe (derzeit) nicht, wie sich Satz (6) mittels Satz (2) innerhalb Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie beweisen läßt. Es schiene mir allerdings durchaus vorteilhaft zu sein, wenn sich Satz (6) in Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie *nicht* beweisen ließe, weil sich – wie zu Ende dieses Briefes deutlich werden wird – aus Satz (6) gänzlich unerwünschte Konsequenzen ergeben.

Der nächste Satz nach Satz (1) auf Seite 307 Ihrer *Logik der Forschung* lautet:

SATZ (7). In diesem Fall ist auch $Exc(a, b) = 1$, wenn $p(a, b) = 0 = p(b)$.

Hier gibt es zwar keine Beweisschwierigkeiten, doch möchte ich auf folgenden psychologisch wichtigen Punkt aufmerksam machen. Die Wendung 'in diesem Fall' kann verwirrend wirken, denn sie legt nahe, daß Satz (7) vielleicht so aufzufassen ist wie:

SATZ (7'). $Exc(a, b) = 1$, wenn $p(a, b) = 0 = p(b)$ und wenn b widerspruchsfrei ist.

oder gar so wie:

SATZ (7''). $Exc(a, b) = 1$, wenn $p(a, b) = 0 = p(b)$ und wenn b widerspruchsfrei ist und wenn a und b probabilistisch unabhängig sind.

und daß zum Beweis des Satzes (7) der problematische Satz (1) nötig ist; doch alle diese Überlegungen, die durch die Wendung 'in diesem Fall' nahegelegt werden, sind glücklicherweise falsch. Der Zusatz im Satz (7') 'und wenn b widerspruchsfrei ist' ist überflüssig, da ja in Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie gilt:

SATZ (8). Wenn $p(a, b) = 0$, dann ist b widerspruchsfrei.

Der Zusatz im Satz (7'') 'und wenn a und b probabilistisch unabhängig sind' ist (bei Akzeptanz der üblichen Definition der probabilistischen Unabhängigkeit) überflüssig, da ja aus Satz (2) folgt:

SATZ (9). Wenn $p(b) = 0$, dann sind a und b probabilistisch unabhängig.

Und schließlich ist ein Rückgriff auf den problematischen Satz (1) beim Beweis des Satzes (7) unnötig, da ja der

SATZ (10). Wenn b widerspruchsfrei ist, dann $p(\neg a, b) = 1-p(a, b)$

und der

SATZ (11). $p(\neg b) = 1-p(b)$

und der

SATZ (12). Wenn b widerspruchsfrei ist, dann: $Exc(a, b) = p(\neg a, b) \cdot p(\neg b)$.

Theoreme Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie sind, so daß man unter Rückgriff auf die Sätze (8), (10), (11) und (12) sofort den eigentlich gewünschten

SATZ (13). Wenn $p(a, b) = 0 = p(b)$, dann $Exc(a, b) = 1$.

erhält.

Nun kommt im Text auf Seite 307 Ihrer *Logik der Forschung* die folgende, etwas schwierig zu lesende Stelle:

SATZ (14). Dieser Fall wird verwirklicht durch ein widerspruchsfreies b und jedes beliebige a, wenn $p(b) = 0$ und a entweder von b unabhängig und $p(a) = 0$, oder mit b unvereinbar oder fast unvereinbar ist.

Ich zerlege Satz (14) zu Analysezwecken in die beiden folgenden Sätze:

SATZ (15). Wenn b widerspruchsfrei ist und wenn $p(b) = 0$ und wenn a und b probabilistisch unabhängig sind und wenn $p(a) = 0$, dann $Exc(a, b) = 1$.

SATZ (16). Wenn b widerspruchsfrei ist und wenn $p(b) = 0$ und wenn a und b logisch unvereinbar sind, dann $Exc(a, b) = 1$.

Zunächst zum Satz (15). Es fällt auf, daß, wenn man Satz (2) als Definition der probabilistischen Unabhängigkeit akzeptiert, Satz (15) redundant formuliert ist, weil ja unter der Annahme von Satz (2), wie oben schon geschrieben, Satz (9) gilt. Satz (15) wäre zwar leicht unter Rückgriff auf Satz (6) beweisbar, aber gerade die Beweisbarkeit des Satzes (6) (und somit des Satzes 1) ist das Hauptproblem, dessentwegen ich Ihnen diese Zeilen mit der Bitte um einen klärenden Hinweis schreibe. – Im Gegensatz zum Beweis des Satzes (15) ist der des Satzes (16) problemlos; ein Rückgriff auf den problematischen Satz (1) ist unnötig, man kommt leicht mit dem Satz (11), dem Satz (12) und dem in Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie gültigen

SATZ (17). Wenn a und b logisch unvereinbar sind, dann:
$p(\neg a, b) = 1$.

durch. (Allerdings habe ich im Satz (16) die Wendung 'oder fast unvereinbar' unberücksichtigt gelassen, weil ich keine Theoreme kenne über die Relation des Fast-unvereinbar-seins-mit.)

In Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie sind auch die beiden folgenden Sätze gültig:

SATZ (18). Wenn a im kontradiktorischen Widerspruch zu b steht, dann sind a und b logisch unvereinbar.

Satz (19). Wenn a im kontradiktorischen Widerspruch zu b steht, dann: $p(\neg a) = p(b)$.

Aus den Sätzen (18) und (16) folgt unmittelbar der

Satz (20). Wenn b widerspruchsfrei ist und wenn $p(b) = 0$ und wenn a im kontradiktorischen Widerspruch zu b steht, dann: $Exc(a, b) = 1$.

Doch angenommen, der problematische Satz (6) (und damit der Satz 1) wäre wirklich ein Theorem Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie, dann wäre folgender Satz bestürzenderweise auch ein Theorem Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie:

Satz (21). Wenn b widerspruchsfrei ist und wenn $p(b) = 0$ und wenn a im kontradiktorischen Widerspruch zu b steht, dann: $Exc(a, b) \neq 1$.

Beweis von Satz (21)

1. b ist widerspruchsfrei.	Annahme
2. $p(b) = 0$	Annahme
3. a steht im kontradiktorischen Widerspruch zu b.	Annahme
4. $p(\neg a) = p(b) = 0$	3, Satz (19), 2
5. a und b sind probabilistisch unabhängig.	2, Satz (9)
6. $Exc(a, b) = p(\neg a) \cdot p(\neg b) = 0 \neq 1$	5, 1, 2, Satz (6), 4

Die Sätze (20) und (21) haben nun aber eine gänzlich unerwünschte Konsequenz:

Satz (22). Es gibt kein einziges a und kein einziges b, so daß gilt: b ist widerspruchsfrei und $p(b) = 0$ und a steht im kontradiktorischen Widerspruch zu b.

Es scheint mir bei Betrachtung des Beweises von Satz (21), daß Ihre Wahrscheinlichkeitstheorie vernünftigerweise nicht sowohl Satz (6) als auch Satz (2) als Theoreme haben sollte. Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir mitteilten, welche Differenzierungen Sie für nötig halten.

Mit freundlichen Grüßen und guten Wünschen

Ihr

Georg Dorn

Da ich zunächst keine Antwort auf meinen Brief erhielt, fürchtete ich, ich hätte mich zu langwierig ausgedrückt, und brachte das Problem mit der probabilistischen Unabhängigkeit in einem Brief vom 14. Oktober 1992 kurz auf den Punkt, indem ich wieder "Wenn $p(b) = 0$, dann sind a und b probabilistisch unabhängig" (ein Korollar zur Standarddefinition der probabilistischen Unhabhängigkeit) einsetzte, aber diesmal einen für Karl Popper ganz und gar unakzeptablen Satz als Theorem seiner um die Standarddefinition erweiterten Wahrscheinlichkeitstheorie etablierte, nämlich: Jeder Satz, der nicht logisch falsch ist, hat eine Wahrscheinlichkeit größer 0. Wahrscheinlichkeitsfunktionen, auf die dieser Satz zutrifft, werden 'regulär' genannt; solche Funktionen ordnen die 0 ausschließlich logisch falschen, die 1 ausschließlich logisch wahren Sätzen zu. Sätze, die weder logisch falsch noch logisch wahr sind, können deshalb nie die (reguläre) Wahrscheinlichkeit 0 oder 1 haben. Reguläre Wahrscheinlichkeitsfunktionen haben großes Interesse bei den Bayesianern gefunden: wenn unsere Glaubensgrade Werte einer regulären Wahrscheinlichkeitsfunktion sind, dann sind wir nach bayesianischer Ansicht insofern besonders rational, als nicht einmal ein *Semi-Dutch-Book*, geschweige denn ein *Dutch-Book* gegen uns errichtet werden kann. Für Karl Popper war jedoch die Regularitätsforderung eine irrwitzige, bloß scheinbare Rationalitätsforderung. Er hatte immer wieder in seinen wissenschaftstheoretischen Werken betont, daß gerade die wichtigsten Sätze mit empirischem Gehalt, nämlich jene strikt universellen Hypothesen, die nicht logisch falsch sind, die Wahrscheinlichkeit 0 nicht nur haben können, sondern in der Tat auch haben; und weiters, daß es Sätze gibt (er nennt sie 'universelle Existenzsätze'), deren wahrscheinlichkeitstheoretischer Gehalt gleich 0 und deren Wahrscheinlichkeit somit gleich 1 ist, obschon diese Sätze nicht logisch wahr sind. Meine Entdeckung, daß die Hinzunahme der Standarddefinition der probabilistischen Unabhängigkeit zur um die Überschußgesetze erweiterten Popperschen Wahrscheinlichkeitstheorie diese Theorie zu einer Theorie regulärer Wahrscheinlichkeitsfunktionen macht, schien mir deshalb keine bloße logische Spitzfindigkeit zu sein, sondern Sprengstoff für zentrale Thesen der Popperschen Wissenschaftstheorie im Haus seiner eigenen Wahrscheinlichkeitstheorie in sich zu bergen. Hier nun der vollständige Text meines kurzen Briefes vom 14. Oktober 1992:

> Sehr geehrter Herr Professor!
>
> Anbei drei Hinweise auf Druckfehler, die mir beim Studium Ihrer Bücher aufgefallen sind.
>
> Ich möchte bei dieser Gelegenheit noch einmal Ihre Aufmerksamkeit darauf lenken, daß der folgende Satz auf Seite 307 Ihrer *Logik der Forschung*:
>
> > SATZ (1). Wenn a und b probabilistisch unabhängig sind, dann gilt, falls b widerspruchsfrei ist: $Exc(a, b) = p(\neg a) \cdot p(\neg b)$.
>
> zu unhaltbaren Konsequenzen zu führen scheint, wenn man ihn als Theorem Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie akzeptiert (vgl. auch meinen Brief vom 27. August 1992). Insbesondere führt *Satz (1)* zu dem folgenden:
>
> > SATZ (2). Wenn b widerspruchsfrei ist, dann $p(b) > 0$.
>
> (sofern der
>
> > SATZ (3). Wenn $p(b) = 0$, dann sind a und b probabilistisch unabhängig.
>
> als Theorem Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie angesehen werden darf).
>
> INDIREKTER BEWEIS von Satz (2)

1.	b ist widerspruchsfrei und $p(b) = 0$.	Annahme
2.	b und b sind probabilistisch unabhängig.	1, Satz (3)
3.	$Exc(b, b) = p(\neg b) \cdot p(\neg b) = 1 \cdot 1 = 1$	2, 1, Satz (1)
4.	Wenn $Exc(b, b) = 1$, dann $p(b, b) = 0$.	Theorem
5.	$p(b, b) = 0$	3, 4
6.	$p(b, b) = 1$	Theorem
7.	$0 = 1$	5, 6

Es gibt aber, wie Sie betont haben, Sätze, nämlich die strikt allgemeinen Hypothesen, die widerspruchsfrei sind und doch die Wahrscheinlichkeit 0 haben.

Mit freundlichen Grüßen und guten Wünschen

Ihr
Georg Dorn

Ende Oktober 1992 erhielt ich von Karl Popper eine ausführliche Antwort in einem Brief, den er vom 21. bis 23. Oktober geschrieben hatte und in dem er das Problem sofort anerkannt und mit täglich neuen Lösungsvorschlägen kreativ und energisch angepackt hatte. Der Brief ist im Kapitel V des vorliegenden Buches abgedruckt. Er bietet einen Blick in die Denkwerkstatt Karl Poppers und ist ein schönes Beispiel für die von ihm hervorgehobene Methode des Problemerkennens, Lösungsvorschlägemachens und Vorschlägeverwerfens.

Karl Popper weist zunächst die herkömmliche Definition der probabilistischen Unabhängigkeit zurück, weil sie bei Anwendung auf Sätze zu gegenintuitiven Ergebnissen und innerhalb seiner Wahrscheinlichkeitstheorie zu logischen Schwierigkeiten führt. Dann versucht er, die Standarddefinition durch eine adäquate Definition zu ersetzen. Am Ende des ersten Tages gelangt er zu folgendem Definitionsvorschlag (wobei 'T' für 'Tautologie' steht; ich übernehme im folgenden Karl Poppers Schreibweise in seinem Brief):

$$\text{(D)}\quad U(a, b) \leftrightarrow a = T \vee b = T \vee (p(a, b) = p(a) \;\&\; p(a, \bar{b}) = p(a) \;\&\; p(b, a) = p(b) \;\&\; p(b, \bar{a}) = p(b))$$

Mit seiner Ablehnung der herkömmlichen Unabhängigkeitsdefinition geht seine Ablehnung jenes Korollars zu dieser Definition einher, das in meinem Brief vom 14. Oktober 1992 'Satz (3)' benannt wurde, nämlich: "Wenn $p(b) = 0$, dann sind a und b probabilistisch unabhängig." Er notiert zurecht: "Ihr Satz (3) passt nicht in meine Theorie" und gibt auch gleich die Intuition an, die durch Satz (3) verletzt wird: "$b \neq T \rightarrow b$ ist von b aufs Höchste abhängig"; mit anderen Worten, für Karl Popper ist es – zumindest an diesem Tag noch – intuitiv einleuchtend, daß b von b probabilistisch abhängig ist, sofern b keine Tautologie ist. Allerdings ist der Satz "Wenn b keine Tautologie ist, dann ist b von b nicht probabilistisch unabhängig" nicht aus (D) ableitbar. Hingegen ist aus (D) der Satz "Wenn $p(b) = 0$, dann sind b und b *nicht* probabilistisch unabhängig" ableitbar, denn in der Popperschen Wahrscheinlichkeitstheorie gilt, daß $p(b, b) = 1$, selbst wenn $p(b) = 0$. Und damit ist obiges beunruhigendes Korollar nicht mehr in der Popperschen Wahrscheinlichkeitstheorie herleitbar (ihre logische Konsistenz vorausgesetzt) und kann dort keinen Schaden mehr stiften.

Am nächsten Tag setzt Karl Popper seine Überlegungen fort und kommt in Anlehnung an Keynes zu einem weiteren, recht vorläufigen und unter Fragezeichen gesetzten Definitionsvorschlag:

$$\text{(?D?)}\quad U(a, b) \leftrightarrow p(a, b) = p(a)\ \&\ p(b, a) = p(b)\ \&\ p(a, \bar{b}) = p(a)\ \&\ p(b, \bar{a}) = p(b).$$

Dieser Vorschlag hat die bemerkenswerte Konsequenz, daß Tautologien und Kontradiktionen von allen jenen Sätzen, deren Wahrscheinlichkeit kleiner 1 ist, probabilistisch abhängig sind; das geht schon in Richtung der Intuition, daß Sätze, die einander logisch implizieren oder logisch ausschließen, somit logisch voneinander abhängig sind, auch probabilistisch voneinander abhängig sein sollten. (Allerdings ist aus (?D?) auch Gegenintuitives ableitbar. Zum Beispiel sind gemäß (?D?) alle Tautologien voneinander probabilistisch unabhängig, während alle Kontradiktionen voneinander probabilistisch abhängig sind. Man ahnt, wie schwierig es ist, einen Definitionsvorschlag zu machen, der nicht zu Merkwürdigkeiten, ja Absurditäten führt.)

Am dritten Tag kommt es zum (vorläufig) letzten Definitionsvorschlag:

$$(\text{*DU})\quad U(a, b) \leftrightarrow p(a, b) = p(a, \bar{b}) \;\&\; p(b, a) = p(b, \bar{a}).$$

(*DU) ist bereits eine Vorstufe jener Definition der probabilistischen Unabhängigkeit, die Karl Popper im Anhang *XX der 10. Auflage der LdF aus dem Jahr 1994 veröffentlichen wird. Sie lautet in obiger Terminologie:

$$(\text{D1})\quad U(a, b) \leftrightarrow p(a, b) = p(a, \bar{b}) \;\&\; p(b, a) = p(b, \bar{a}) \;\&\; p(\bar{a}, b) = p(\bar{a}, \bar{b}) \;\&\; p(\bar{b}, a) = p(\bar{b}, \bar{a}).$$

Ich komme auf (D1) im Abschnitt 2.4 zurück.

Ich habe 1993 die Standarddefinition, die Keynessche Definition, den Popperschen Definitionsvorschlag (*DU) und 1995 den Popperschen Definitionsvorschlag (D1) im Detail untersucht und miteinander verglichen (siehe Kapitel 11 in Dorn 1997). Es stellte sich leider heraus, daß jede dieser Definitionen zu gegenintuitiven Konsequenzen führt. – Zunächst war jedoch auf Einwände und Fragen in Karl Poppers Brief vom 21. bis 23. Oktober zu antworten. Ich schrieb am 2. November 1992 an Karl Popper:

> [...] Ich halte Ihre Absicht, Ihre Ideen über probabilistische Unabhängigkeit in einem eigenen Anhang zur *Logik der Forschung* systematisch darzustellen, für ausgezeichnet. Erstens sind die Ideen zur probabilistischen Unabhängigkeit, die ich Ihren Briefen entnehme, die differenziertesten und gleichzeitig wohl auch die fruchtbarsten, denen ich bisher in der einschlägigen Literatur begegnet bin. Zweitens wird den Lesern Ihrer wissenschaftstheoretischen Werke sehr geholfen sein, jene Stellen, die sich auf probabilistische Unabhängigkeit beziehen, besser zu verstehen. Denn der Leser, der sich in der *Logik der Forschung* über Ihre Wahrscheinlichkeitstheorie unterrichten will und deshalb die Anhänge *IV und *V durchstudiert, begegnet dort ja keiner Definition der probabilistischen Unabhängigkeit. Wenn er zum Ende des Anhangs *V hin auf zwei Gesetze des Überschusses stößt, in denen auf probabilistische Unabhängigkeit Bezug genommen wird, wird er wohl (wie ich es zunächst auch getan habe) davon ausgehen, daß Sie hier die traditionelle Unabhängigkeitsdefinition:

a und b sind probabilistisch unabhängig genau dann, wenn gilt: $p(a \wedge b) = p(a) \cdot p(b)$.

verwenden. Nun stellt er aber – wenn es ihm ähnlich wie mir geht – ein wenig verwirrt zweierlei fest. Erstens sind die beiden angesprochenen Gesetze des Überschusses unter Annahme der traditionellen Unabhängigkeitsdefinition in Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie nicht beweisbar. Zweitens: Wenn im Zuge eines logischen Gedankenexperimentes von diesen beiden Gesetzen des Überschusses angenommen wird, sie seien Theoreme Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie, und wenn von der traditionellen Unabhängigkeitsdefinition angenommen wird, sie sei in Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie zugelassen, dann wäre auch der folgende Satz, den Sie nie akzeptiert haben, ein Theorem Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie:

Wenn b widerspruchsfrei ist, dann $p(b) > 0$.

Damit regt sich im Leser der *Logik der Forschung* natürlich der Verdacht, daß es nicht die traditionelle Unabhängigkeitsdefinition sein kann, die Sie auf Seite 307 voraussetzen, sondern daß Sie stillschweigend eine andere Definition der probabilistischen Unabhängigkeit verwenden, die er allerdings nicht kennt. Hier wird ihm nun Ihr künftiger Anhang *XX bestens weiterhelfen.

Vielleicht ist es für Sie von Interesse zu erfahren, wie es mir verwirrtem Leser der Seite 307 der *Logik der Forschung* im weiteren gedanklich ergangen ist, bis Sie mit Ihren Briefen Licht in die Sache gebracht haben. Da ich mittels der traditionellen Unabhängigkeitsdefinition das folgende Gesetz des Überschusses:

Wenn a und b probabilistisch unabhängig sind, dann gilt, falls b widerspruchsfrei ist: $Exc(a, b) = p(\neg a)p(\neg b)$.

innerhalb Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie nicht beweisen konnte, begann ich mich natürlich auch zu fragen, ob Sie, wenn Sie auf Seite 307 in der *Logik der Forschung* 'a und b sind probabilistisch unabhängig' schreiben, damit wirklich $p(a \wedge b) = p(a) \cdot p(b)$ meinen. Wenn man die traditionelle Unabhängigkeitsdefinition in Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie zuließe (so überlegte ich weiter), dann müßte man auch zulassen, daß der folgende:

> SATZ (3). Wenn $p(a) = 0$ oder wenn $p(b) = 0$, dann sind a und b probabilistisch unabhängig.

als Theorem Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie betrachtet wird, weil ja Satz (3) ein Korollar zur traditionellen Unabhängigkeitsdefinition ist. In Anbetracht dieses Korollars wurde allerdings mein Zweifel, daß Sie probabilistische Unabhängigkeit im Sinne der traditionellen Definition verstehen, durch ein weiteres Gesetz des Überschusses, das Sie auf Seite 307 der *Logik der Forschung* erwähnen, nur verstärkt:

> Wenn b widerspruchsfrei ist, wenn $p(b) = 0$, wenn a und b probabilistisch unabhängig sind und wenn $p(a) = 0$, dann $Exc(a, b) = 1$.

Denn wenn Sie die traditionelle Definition der probabilistischen Unabhängigkeit bei der Niederschrift dieses Gesetzes im Kopf gehabt hätten, dann (so dachte ich) hätten Sie höchstwahrscheinlich die Bedingung 'wenn a und b probabilistisch unabhängig sind' weggelassen, die ja wegen $p(a) = 0$ und $p(b) = 0$ und Satz (3) doppelt unnötig gewesen wäre. Deshalb verwarf ich schon bald meine anfängliche Vermutung, die Wendung 'a und b sind probabilistisch unabhängig' sei auf Seite 307 im traditionellen Sinne zu verstehen, und suchte in der *Logik der Forschung* nach einer alternativen Unabhängigkeitsdefinition, mittels derer sich die beiden obigen Gesetze des Überschusses beweisen ließen, ohne daß deshalb auch der Satz "Wenn b widerspruchsfrei ist, dann $p(b) > 0$" beweisbar würde. Ich fand bald auf Seite 422 Ihrer *Logik der Forschung* eine Unabhängigkeitsdefinition, die diese Forderungen erfüllt:

> a ist probabilistisch unabhängig von b genau dann, wenn: $p(a, b) = p(a)$.

Da Sie ja diese alternative Definition der probabilistischen Unabhängigkeit bzw. die entsprechende Definition der probabilistischen Abhängigkeit:

> a ist probabilistisch abhängig von b genau dann, wenn: $p(a, b) \neq p(a)$.

auch in anderen Werken, insbesondere in den Popper/Miller-Antiinduktionsbeweisen, verwendet haben, glaubte ich bis zur Ankunft Ihrer beiden Briefe, es sei nicht die traditionelle, sondern die alternative Unabhängigkeitsdefinition, die Ihren Ideen über probabilistische Unabhängigkeit am nächsten kommt, und es sei deshalb die alternative Unabhängigkeitsdefinition, die Sie überall dort, wo Sie sie nicht ausdrücklich anführen, stillschweigend voraussetzen (so eben auch auf Seite 307 der *Logik der Forschung*). In diesem Glauben habe ich Mitte Oktober ein kleines (für das institutsinterne Forschungsseminar bestimmtes) Papier geschrieben, um mir und einigen interessierten Kollegen klar zu machen, welche Unterschiede zwischen der traditionellen und der alternativen Unabhängigkeitsdefinition bestehen. Ich lege meinem Brief ein Exemplar dieses Papiers (Two Kinds of Probabilistic Independence) zu Ihrer näheren Information bei. Das Papier hat zwar viel an Wert dadurch verloren, daß auch die alternative Unabhängigkeitsdefinition, wie ich Ihren beiden Briefen mittelbar entnehme, keine Definition der probabilistischen Unabhängigkeit in Ihrem Sinne ist; aber nach wie vor scheint mir lehrreich zu sein, daß die alternative Unabhängigkeitsdefinition nicht nur den Beweis jener beiden, oben angegebenen problematischen Gesetze des Überschusses erlaubt, sondern auch plausibel macht, warum Sie im Wenn-Teil des zweiten Überschußgesetzes:

> Wenn b widerspruchsfrei ist, wenn $p(b) = 0$, wenn a und b probabilistisch unabhängig sind und wenn $p(a) = 0$, dann $Exc(a, b) = 1$.

nicht nur verlangen, daß $p(a) = 0 = p(b)$, sondern auch fordern, daß a und b probabilistisch unabhängig sind; denn Satz (3) ist ja kein Korollar zur alternativen Unabhängigkeitsdefinition, sondern nur ein Korollar zur traditionellen Unabhängigkeitsdefinition.

Damit komme ich zur Rolle des Satzes (3), zu der Sie mich in Ihren Briefen befragen. Ich schrieb in meinem Brief vom 14. Oktober:

'Ich möchte bei dieser Gelegenheit noch einmal Ihre Aufmerksamkeit darauf lenken, daß der folgende Satz auf Seite 307 Ihrer *Logik der Forschung*:

SATZ (1). Wenn a und b probabilistisch unabhängig sind, dann gilt, falls b widerspruchsfrei ist: $Exc(a, b) = p(\neg a) \cdot p(\neg b)$.

zu unhaltbaren Konsequenzen zu führen scheint, wenn man ihn als Theorem Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie akzeptiert (vgl. auch meinen Brief vom 27. August 1992). Insbesondere führt Satz (1) zu dem folgenden:

SATZ (2). Wenn b widerspruchsfrei ist, dann $p(b) > 0$.

(sofern der

SATZ (3). Wenn $p(b) = 0$, dann sind a und b probabilistisch unabhängig.

als Theorem Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie angesehen werden darf).'

Ich möchte das 'darf' am Schluß des Zitates betonen. Ich wollte in meinem Brief vom 14. Oktober sowie in meinem Brief vom 27. August (in dem der Satz (3) die Nummer '(9)' hat) nicht behaupten, daß Satz (3) ein Theorem Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie *ist* oder gar, daß Sie selbst in einem Ihrer Werke behaupten, Satz (3) sei ein Theorem Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie; im Gegenteil, gemäß derzeitigem Stand meiner Literaturkenntnis wird Satz (3) in keinem Ihrer Werke auch nur erwähnt. Vielmehr wollte ich in meinen beiden Briefen nur ausdrücken, daß, *wenn* Ihre Wahrscheinlichkeitstheorie durch die *traditionelle* Unabhängigkeitsdefinition ergänzt *würde*, dann Satz (3) eine Theorem Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie *wäre* und somit im Beweis weiterer Sätze, etwa des obigen Satzes (2), eingesetzt werden dürfte. Da Satz (3) im Verein mit Satz (1) zu dem unakzeptablen Satz (2) führt, stimme ich allein schon deshalb Ihrer Bemerkung zu, daß Satz (3) nicht in Ihre Theorie paßt. [...]

Soweit einschlägige Ausschnitte aus meinem damaligen Brief. Ich vermute noch immer, daß Karl Popper die oben von mir angegebene alternative Definition

a ist probabilistisch unabhängig von b genau dann, wenn $p(a, b) = p(a)$.

im Hinterkopf hatte, wo immer er in seinen Werken vor 1992 auf probabilistische Unabhängigkeit zu sprechen kam. Einerseits bedarf diese Definition in seiner Wahrscheinlichkeitstheorie nicht des lästigen Vorspanns "Wenn $p(b) > 0$" (den die übliche Kolmogorovsche Wahrscheinlichkeitstheorie benötigt), anderseits ist sie – in diesem Zusammenhang erfreulicherweise – schwächer als die Standarddefinition und erlaubt nicht die Herleitung des ominösen Satzes (3). Alle auf probabilistische Unabhängigkeit bezüglichen Stellen in Karl Poppers Werk werden verständlicher, wenn man sie im Sinne der alternativen Definition liest. Dies galt und gilt insbesondere für jenen Absatz im Anhang *V der LdF, der von den Überschußgesetzen handelt. Bei der Herleitung dieser Überschußgesetze hatte sich jedoch inzwischen ein neues Problem ergeben, das nichts mehr mit der Unabhängigkeitsdefinition zu tun hatte, sondern mit der grundsätzlichen Auffassungsweise der ganzen Popperschen Wahrscheinlichkeitstheorie.

2.3. Wahrscheinlichkeitstheorie und Wahrscheinlichkeitssemantik

Im Jahr 1988 hatte ich die Poppersche Wahrscheinlichkeitstheorie in eine zweisortige Prädikatenlogik 1. Stufe eingebettet; in dieser Fassung war sie eine formale Theorie, zu deren spezifischem Vokabular die Konstante 'p' gehörte. Man konnte auf Deutsch über diese Theorie reden, aber deutsche Sätze waren keine wohlgeformten Ausdrücke von ihr. Seit 1989 war ich der beeindruckenden, vom kanadisch/amerikanischen Logiker Hugues Leblanc dominierten Sekundärliteratur zur Popperschen Wahrscheinlichkeitstheorie gefolgt und bewegte mich nun in der sogenannten wahrscheinlichkeitssemantischen Fassung der Popperschen Theorie. Man hat da eine formale Objektsprache, meist eine aussagen- oder prädikatenlogische Sprache, gegeben, und ähnlich wie man in der klassischen Semantik Intepretationsfunktionen für eine solche Sprache definiert und darauf aufbauend festlegt, was es heißt, daß eine Formel logisch falsch ist oder daß eine Formel eine andere logisch impliziert etc., definiert man in Wahrscheinlichkeitssemantiken Popperscher Prägung unter Rückgriff auf seine Axiome Wahrscheinlichkeitsfunktionen für eine solche Sprache und legt darauf aufbauend wieder fest, was es heißt, daß eine Formel logisch falsch ist oder eine Formel eine andere logisch impliziert etc. (es stellt sich dabei heraus, daß die klassischen Interpretationsfunktionen solche Wahrscheinlichkeitsfunktionen sind, die aus dem reellen Intervall [0, 1] nur die Werte 0 und 1 annehmen: Wahrscheinlichkeitssemantik ist generalisierte klassische Semantik). Oft wird zum Beispiel der Ausdruck 'Formel A impliziert logisch Formel B' in Popperschen Wahrscheinlichkeitssemantiken so definiert: Für alle Formeln C und alle Popperschen Wahrscheinlichkeitsfunktionen p (kurz 'Popper-Funktionen' genannt) gilt: $p(B \wedge A, C) = p(A, C)$; und der Ausdruck '$A$ ist eine Kontradiktion' so: A impliziert logisch $\neg A$. Eine wahrscheinlichkeitssemantische Theorie Popperscher Art ist somit keine formale Theorie erster Stufe, sondern eine auf Deutsch oder in einer anderen natürlichen Sprache formulierte semantische Theorie über formale Sprachen. Insbesondere ist 'p' in der Wahrscheinlichkeitssemantik eine Variable, deren Werte Wahrscheinlichkeitsfunktionen sind, während 'p' in der Popperschen Wahrscheinlichkeitstheorie, aufgefaßt als Theorie 1. Stufe, eine Konstante ist, die im intendierten Modell dieser Theorie sich durch Wahrscheinlichkeitsfunktionen interpretieren läßt.

Wohin gehört nun Karl Poppers eigene Darstellung seiner Wahrscheinlichkeitstheorie im Anhang *V der LdF? Die Axiome und die ersten 100 Theoreme machen den Eindruck, als handle es sich um eine formale Theorie 1. Stufe, wenn auch zugegebenermaßen etwas lockerer formuliert als in der heutigen Logik üblich. Jedenfalls werden bis zum Theorem (100) Formeln und nicht deutsche Sätze hergeleitet. Nach dem Theorem (100) bricht die formale Theorie ab und es folgen deutsche Sätze und logische Formeln und insbesondere Mischformen aus beiden, die weder wohlgeformte formale Zeichenreihen noch grammatisch korrekte Sätze sind, sondern zu einer Art Logikerdeutsch gehören. (Diese Mischformen fallen auch in den Briefen Karl Poppers auf; man erinnere sich etwa an Gebilde wie '$(p)(q)(P(p) > 0$ & $P(q) < 1 \rightarrow [S(q, p)$ is said to be a purely deductive S-function $\leftrightarrow p \vdash q])$' mit der typischen Vermischung von natürlicher Sprache ('is said to be'), objektsprachlichen logischen Zeichen ('$\rightarrow$') und metasprachlichen semantischen Zeichen ('$\vdash$'). Dies kann verwirren.) Die Überschußgesetze, die ich im wahrscheinlichkeitssemantischen Rahmen herzuleiten trachtete, waren allesamt auf Deutsch formuliert. Ich verstand deshalb Karl Poppers Ausführungen so, daß er sich hier – vielleicht eher unbewußt als bewußt – im semantischen Rahmen und nicht in dem einer Theorie 1. Stufe bewegt. Nun fiel mir auf, daß er gleichwohl das Zeichen 'p' nach wie vor wie eine Konstante behandelte. Das brachte mich bei meinen Herleitungsversuchen in Schwierigkeiten.

So konnte ich zum Beispiel ein dem ersten Anschein nach zentrales Lemma, nämlich 'A ist eine Kontradiktion genau dann, wenn $p(\neg A, A) \neq 0$' nicht beweisen – genauer gesagt: ich hatte einen Beweis versucht, aber meine mathematisch ausgebildete Freundin, Mag. Monika Feldbacher, hatte mich beim Korrekturlesen auf einen nicht auszugleichenden Fehler in meinem Scheinbeweis hingewiesen. Rückblickend ist es kein Wunder, daß mein Beweisversuch gescheitert war: Da 'p' in meiner semantischen Fassung keine Konstante, sondern eine Variable ist, ist obiger Satz äquivalent mit dem falschen Satz: 'A ist eine Kontradiktion genau dann, wenn es mindestens ein p gibt, so daß $p(\neg A, A) \neq 0$'. Dieser falsche Satz würde etwa jede Aussagenvariable A zur Kontradiktion erklären, für die gilt: $p(A) = 0$ und $p(\neg A, A) \neq 0$ für mindestens ein p (eine solche Popper-Funktion p ist durch die Theorie nicht ausgeschlossen). Es ist somit die *Nicht*herleitbarkeit des Satzes 'A ist eine Kontradiktion genau dann, wenn $p(\neg A, A) \neq 0$' in der Popperschen Wahrscheinlichkeitssemantik hocherwünscht und in der Tat ist dieser Satz dort auch nicht herleitbar.

Meinen Beweisfehler nahm ich zum Anlaß, an Karl Popper zu schreiben mit der Bitte um Auskunft, welchen Umgang er mit dem Buchstaben '*p*' empfiehlt und wie er, wenn man in einer Theorie mit '*p*' als einer Variablen arbeitet, über *p* zu quantifizieren vorschlägt. Ich wußte seit meinem Gespräch mit ihm im März 1989, daß er zwar die Sekundärliteratur zu seiner Wahrscheinlichkeitstheorie kannte, aber ihr mit einem gewissen Vorbehalt begegnete. So rechnete ich von vornherein nicht mit Ratschlägen bezüglich Quantifizierung, doch schien es mir aufschlußreich, von ihm selbst über seine eigene Auffassungsweise seiner Wahrscheinlichkeitstheorie Näheres zu erfahren.

Im folgenden mein Brief vom 17. November mit der Ausformulierung des Problems am konkreten Beispiel der Herleitung von Lemmata für Überschußgesetze. Dann seine Antwort vom 20. November 1992, in der er meinen "Fehler", '*p*' als eine Variable, eventuell gar als eine Zahlenvariable mißzuverstehen, mit großer Milde richtigstellt. Schließlich meine Antwort darauf vom 28. Dezember 1992, in der ich im Bewußtsein der Vergeblichkeit für eine Änderung einiger Stellen im Anhang *V im Sinne der Wahrscheinlichkeitssemantik werbe. Aus meiner Analyse des Anhangs *V der LdF entstand zu dieser Zeit im wahrscheinlichkeitssemantischen Rahmen eine historische und systematische Studie zu den Popperschen Überschußgesetzen. Die Theoremebrücke, von der im folgenden Brief die Rede ist, ist dort übrigens nochmals mit besser fundamentierten Pfeilern geschlagen worden (siehe Dorn 1992/93, pp. 29–39).

Georg Dorn an Karl Popper am 17. November 1992:

Sehr geehrter Herr Professor!

Ich hatte im Juni dieses Jahres ein Arbeitspapier begonnen mit dem Titel "A Bridge of Theorems from Popper's Theorem 100 on p. 304 to his Laws of Excess on p. 307 of the *Logik der Forschung*". (Ein Ausschnitt dieses Papiers ist beigeschlossen.) Ich glaubte, dieses Papier im August erfolgreich abgeschlossen zu haben. Das Papier sollte mir (und in der Folge meinen Studenten) helfen, Ihre Gesetze des Überschusses im Rahmen Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie in kleinen Schritten zu beweisen. Wenige Tage, nachdem ich meinen Brief vom 2.11. an Sie abgesandt hatte, wurde ich von meiner Freundin darauf aufmerksam gemacht, daß mir ein schwerer Fehler im Beweis des Satzes:

A ist eine Kontradiktion genau dann, wenn $p(\neg A, A) \neq 0$.

auf Seite 11 meines Arbeitspapiers unterlaufen war. Nun ist dieser Satz ja nötig für den Beweis des Satzes:

A ist eine Kontradiktion genau dann, wenn $p(\neg B, A) \neq 1 - p(B, A)$.

Das folgende Korollar zu diesem Satz, nämlich:

Wenn A keine Kontradiktion ist, dann: $p(\neg B, A) = 1 - p(B, A)$.

ist seinerseits unerläßlich für den Beweis Ihres Überschußgesetzes:

Wenn A keine Kontradiktion ist, dann:
$excess[p(A \rightarrow B), p(B, A)] = p(\neg B, A) \cdot p(\neg A)$.

(Dabei seien A und B Formeln einer gewöhnlichen aussagenlogischen Sprache $\mathfrak{L}$ und p sei entweder eine zweistellige Funktion, die gemäß den von Ihnen auf Seite 298 der *Logik der Forschung* angegebenen sechs Axiomen jedem geordneten Paar $\langle B, A\rangle$ aus $\mathfrak{L} \times \mathfrak{L}$ eine reelle Zahl zuordnet, oder p sei eine einstellige Funktion, die jeder Formel A von $\mathfrak{L}$ eine reelle Zahl zuordnet gemäß Ihrer Bedingung: $p(A) = p[A, \neg(B \wedge \neg B)]$.)

Kann man aber dieses Überschußgesetz nicht beweisen, dann kann man auch die meisten der anderen Überschußgesetze nicht beweisen, die Sie auf Seite 307 der *Logik der Forschung* angeben. Ich unterbrach mein Studium Ihrer Ideen zur probabilistischen Unabhängigkeit und versuchte, meinen Beweisfehler zu korrigieren. Dies gelang nicht. Es scheint mir nach vierzigstündigem Nachdenken derzeit, daß dieses Mißlingen möglicherweise nicht bloß in meiner Ungeschicklichkeit wurzelt, korrekte Beweise zusammenzubringen, sondern in einem objektiven logischen Tatbestand begründet ist; deshalb diese Zeilen an Sie mit der Bitte um klärende Hinweise.

Um obiges Überschußgesetz im Rahmen Ihrer Wahrscheinlichkeitstheorie zu beweisen, bedarf es offenbar einer geeigneten Definition des Begriffes der Kontradiktion in eben diesem Rahmen. Sie selbst geben auf Seite 305 der *Logik der Forschung* in Form Ihrer Definition (D3) einen deutlichen Hinweis, wie man das machen könnte: Man definiere zunächst im Sinne der Definition (D3) das zweistellige Prädikat 'B folgt logisch aus A' und definiere dann auf die übliche Art mittels dieses zweistelligen Prädikates das einstellige Prädikat 'A ist eine Kontradiktion':

SATZ 1 (erste Variante der Definition (D3))
B folgt logisch aus A genau dann, wenn für alle C gilt:
$p(B \wedge A, C) = p(A, C)$.

SATZ 2 (eine mögliche Definition der Kontradiktion)
A ist eine Kontradiktion genau dann, wenn $\neg A$ aus A logisch folgt.

In meinem Arbeitspapier habe ich jedoch (D3) nicht durch Satz 1 wiedergegeben, sondern durch:

SATZ 1* (zweite Variante der Definition (D3))
B folgt logisch aus A genau dann, wenn für alle p und C gilt:
$p(B \wedge A, C) = p(A, C)$.

Ich wollte nämlich meine Version von (D3) als eine korrekte, nonkreative Definition formulieren, in der, wie die Definitionenlehre vorschreibt, eine Variable, die nicht im Definiendum vorkommt (in unserem Fall die Variable 'p'), durch einen im Definiens vorkommenden Quantor gebunden sein muß. In Rücksicht auf diese Vorschrift habe ich von Anfang an Ihre Definition (D3) im Sinne des Satzes 1* und nicht im Sinne des Satzes 1 aufgefaßt (Satz 1 ist ja im Gegensatz zu Satz 1* keine in formaler Hinsicht korrekte Definition des zweistelligen Prädikats 'B folgt logisch aus A'). Bis vor knapp zwei Wochen glaubte ich, Satz 1* sei sowohl in formaler als auch in inhaltlicher Hinsicht in Ordnung. Nun sind mir Zweifel gekommen. Denn Satz 1* hat zwar den Vorteil, eine korrekte Definition zu sein, aber Satz 1* hat auch den

Nachteil, nicht mehr einen Beweis des folgenden, für den Beweis oben angegebenen Überschußgesetzes nötigen Satzes zu erlauben:

Wenn A keine Kontradiktion ist, dann gilt für alle p: $p(\neg A, A) = 0$.

Aus Satz 1* folgt nur der logisch schwächere Satz:

Wenn A keine Kontradiktion ist, dann gilt für mindestens ein p: $p(\neg A, A) = 0$.

Mit diesem logisch schwächeren Satz läßt sich aber nicht beweisen, daß gilt: wenn A keine Kontradiktion ist, dann $p(\neg B, A) = 1 - p(B, A)$; und ohne diesen Satz läßt sich das zitierte Überschußgesetz nicht beweisen.

So beschloß ich, Ihren Hinweis, daß es sich bei (D3) um eine *Definition* handelt, nicht mehr so streng auszulegen, daß (D3) eine *non*-kreative Definition zu sein habe, und ersetzte versuchsweise den Satz 1* durch den Satz 1. Satz 1 erlaubt nun in der Tat den Beweis von:

Konsequenz 1 des Satzes 1
Für alle A gilt:
Wenn A keine Kontradiktion ist, dann gilt für alle p: $p(\neg A, A) = 0$.

(Skizze des Beweises der Konsequenz 1 des Satzes 1: Ich folgerte aus Satz 1 zunächst den von Ihnen auf Seite 306 Mitte der *Logik der Forschung* angegebenen Satz: Für alle A und B gilt: B folgt logisch aus A genau dann, wenn $p(B, \neg B \wedge A) \neq 0$. Daraus bekam ich durch universelle Einsetzung: $\neg A$ folgt logisch aus A genau dann, wenn $p(\neg A, \neg\neg A \wedge A) \neq 0$. Hieraus als erstes: $\neg A$ folgt logisch aus A genau dann, wenn $p(\neg A, A) \neq 0$. Und als zweites via Satz (2): A ist eine Kontradiktion genau dann, wenn $p(\neg A, A) \neq 0$. Daraus ergibt sich schließlich nach aussagenlogischer Umformung und universeller Generalisierung die Konsequenz 1 des Satzes 1.)

Satz 1 ist aber eine *kreative* Definition des Begriffes der logischen Folgerungsbeziehung, er macht Sätze zu Theoremen, die keine Theoreme der ursprünglichen (nicht durch Satz 1 erweiterten) Wahrscheinlichkeitstheorie sind, zum Beispiel den folgenden Satz:

KONSEQUENZ 2 des Satzes 1
Für jedes A: Wenn es mindestens ein p gibt, so daß $p(\neg A, A) = 0$, dann gilt für alle p, daß $p(\neg A, A) = 0$.

BEWEIS der Konsequenz 2 des Satzes 1

1.	Es gibt mindestens ein p, so daß $p(\neg A, A) = 0$.	Annahme
2.	Wenn $\neg A$ aus A logisch folgt, dann $p(\neg A \wedge A, A) = p(A, A)$.	Satz 1
3.	$p(\neg A \wedge A, A) = p(\neg A, A)$	Poppers Theorem 69 [im Anhang *V der LdF]
4.	$p(A, A) = 1$	Poppers Theorem 23 [im Anhang *V der LdF]
5.	Wenn $\neg A$ aus A logisch folgt, dann $p(\neg A, A) \neq 0$.	2, 3, 4
6.	Wenn $\neg A$ aus A logisch folgt, dann gilt für alle p: $p(\neg A, A) \neq 0$.	5; UG, Variablenbedingung erfüllt
7.	$\neg A$ folgt nicht logisch aus A.	6, 1
8.	A ist keine Kontradiktion.	Satz 2, 7
9.	Für alle p gilt, daß $p(\neg A, A) = 0$.	8; Konsequenz 1 des Satzes 1

Die Konsequenz 2 des Satzes 1 ist kein Theorem der ursprünglichen (nicht durch Satz 1 erweiterten) Wahrscheinlichkeitstheorie. Sei etwa A eine Aussagenvariable mit $p(A) = 0$ und $p(\neg A, A) = 0$. Dann scheint mir angesichts Ihres Theorems 96:

$$p(B, A) \cdot p(A) = p(B \wedge A)$$

nichts dagegen zu sprechen, daß es eine andere Wahrscheinlichkeitsfunktion p^* gibt mit $p^*(A) = 0$ und $p^*(\neg A, A) \neq 0$.

Wenn meine bisherigen Überlegungen richtig waren, dann ist also die logische Situation diese: Entweder man akzeptiert Satz 1, dann bekommt man zwar alle Ihre Überschußgesetze als Theoreme Ihrer durch Satz 1 erweiterten Wahrscheinlichkeitstheorie, aber diese Erweiterung ist eine echte oder kreative und vielleicht keineswegs in Ihrem Sinne liegende, weil sie (was ich derzeit nicht überblicke) zu durchaus unerwünschten Theoremen führen mag. Oder man akzeptiert Satz 1 nicht, sondern stattdessen Satz 1*; dann ist diese Erweiterung zwar eine unechte oder non-kreative und insofern harmlose, als sie zu keinen unerwünschten Theoremen führen kann, aber fast alle Ihre Überschußgesetze lassen sich in dieser non-kreativen Erweiterung nicht mehr beweisen. [...]

Karl Popper an Georg Dorn am 20. November 1992:

Lieber Georg,

In Deinem Brief vom 17.11. hast Du wirklich einen Fehler gemacht: "p" ist keine Variable des Axiomensystems, sondern eine Konstante; ganz ähnlich wie "$\wedge$" oder "$\vee$". (Man kann sagen (etwas vage), daß "p", "$\wedge$" und "$\vee$" und, natürlich auch "$\neg$" durch das Axiomensystem "implizit definiert" werden.) Deine "A", "B" oder meine "a", "b",... sind die einzigen Variablen des Systems.

Dein Fehler ist sehr verständlich: $p(a)$ kann jede Zahl zwischen 0 und 1 sein. Also, da man etwa schreibt

"$p(a, b) = x$"

wobei x eine Zahlvariable ist; und da [...] für dieses x, das als eine weitere Variable – eine Zahlvariable – des Systems angesehen werden kann, [...] ja $p(.,.) = x$ geschrieben werden kann; so *scheint* "p" eine Zahlvariable zu sein.

Aber so ist es nicht: p ist keine Zahl, sondern ein Funktionszeichen (eine Maßfunktion andeutend; und nur "$p(\ldots,\ldots)$" ist eine Zahlvariable, oder genauer "$p(a, b)$" oder "$p(a \wedge b, c)$" usw., sind Zahlvariablen, die eben von den (nicht-Zahl-) Variablen a, b, c usw. abhängen.

Es ist Dein Fehler auch deshalb verständlich, weil "p" ja etwas Verschiedenes bedeutet, wenn es für *absolute* probability steht, und wenn es für relative probability steht; und in diesem Sinn ist das Symbol "variable"! So sollten wir eigentlich schreiben "p_a" und "p_r", da das zwei verschiedene *Konstanten* sind. Aber wir drücken den Unterschied anders aus: durch $p(\ldots)$ und $p(\ldots,\ldots)$: die Anwesenheit des Kommas macht klar, daß es sich hier um zwei verschiedene Funktionszeichen handelt (um eine Funktion von *einer* Variablen und um eine (*andere*) Funktion von zwei Variablen.

Wie Du ja weißt, kann jede dieser zwei Funktionen verwendet werden, um die andere zu definieren:

DEF.ABS. $p(a) = p(a, a \vee \neg a)$
[oder: $p(a) = p(a, \neg(a \wedge \neg a))$]

DEF.REL. $p(b) \neq 0 \rightarrow p(a, b) = p(a \wedge b)/p(b)$

Wie Du ja gleichfalls weißt, besteht die Hauptstärke meiner Theorie, daß sie das (relative) $p(\ldots,\ldots)$ als axiomatische Konstante des Systems behandelt, und so Def.Abs verwendet und Def.Rel. vermeidet.

Also wird "p" von mir nicht als Variable verwendet, sondern als ein *ambiguous* Symbol, das aber im Kontext *unambiguous* wird – dadurch, daß es einmal mit dem Komma erscheint, und ein andermal ohne.

Dein Fehler ist also sehr verständlich; und ich habe, genaugenommen, einen ähnlichen Fehler gemacht, wenn ich hier (oben) schrieb, daß "p" eine Konstante ist. Denn wir haben zwei Konstanten, "$p(\ldots)$" und "$p(\ldots,\ldots)$", wobei die letztere als *Grundkonstante* meines Systems auftritt und die andere *definiert* wird.

Also ist Deine Definition

D≤ $a \vdash b$ (oder $a \leq b$) $\leftrightarrow (c)p(a, c) = p(ab, c)$

völlig korrekt für "Aus a folgt b".

Bitte schreibe mir, ob dieser Brief Deine Schwierigkeiten *befriedigend* löst.

Herzlich Dein
Karl

Georg Dorn an Karl Popper am 28. Dezember 1992:

Lieber Karl,

vielen Dank für Deinen ausführlichen Brief vom 20. November (der mir dankenswerterweise von Frau Mew nachgesendet worden ist). Du hast mich zum Schluß Deines Briefes ermutigt, Dir mitzuteilen, ob meine Fragen in meinem Brief vom 17. November durch Deine Hinweise in Deinem Brief vom 20. November ausreichend beantwortet sind; deshalb die folgenden Zeilen.

Ich entnehme Deinen Ausführungen drei Hauptpunkte: Dein erster Hauptpunkt war, daß der lateinische kursive Kleinbuchstabe 'p' in Deiner im Anhang *V der LdF dargestellten Wahrscheinlichkeitstheorie *keine* Variable, schon gar nicht eine *Zahlen*variable ist. Dein zweiter Hauptpunkt war, daß der Buchstabe 'p' in der Formulierung Deiner Wahrscheinlichkeitstheorie je nach Kontext einmal als einstellige, einmal als zweistellige Funktions*konstante* verwendet wird. Dein dritter Hauptpunkt war, daß meine erste Variante Deiner Definition (D3) auf Seite 305 der LdF in Ordnung ist:

[Erste Variante der DEFINITION (D3)]
B folgt logisch aus A genau dann, wenn für alle C gilt:
$p(B \wedge A, C) = p(A, C)$.

Zunächst möchte ich betonen, daß ich mit Deinen ersten beiden Hauptpunkten immer übereingestimmt habe und nach wie vor übereinstimme. Es ist nur so, daß ich in meiner Version Deiner Wahrscheinlichkeitstheorie der Sekundärliteratur zu Deiner Wahrscheinlichkeitstheorie gefolgt bin und somit [...] den Buchstaben 'p' als eine Funktions*variable* verwende, die – je nach Kontext – über zwei- oder einstellige Wahrscheinlichkeitsfunktionen in Deinem Sinne läuft. [...] Natürlich unterscheide ich in meiner Version Deiner Wahrscheinlichkeitstheorie zwischen der Popper-Funktion p und der reellen Zahl $p(A)$ oder $p(B, A)$. Möglicherweise lehnst Du jedoch die in der Sekundärliteratur übliche Vorgangsweise, zunächst mittels Deiner wahrscheinlichkeitstheoretischen Axiome zu definieren, was Popper-Funktionen sind, und dann allgemeine Aussagen über Popper-Funktionen zu machen, ab?

Was Deinen dritten Hauptpunkt angeht, so muß ich gestehen, daß ich nach langem eigenen Nachdenken und nach weiterem Studium der Sekundärliteratur noch mehr als im November zweifle, ob die erste Variante der Definition (D3) in Ordnung ist. Diese erste Variante führt ja zu folgendem Theorem:

A ist eine Kontradiktion* genau dann, wenn $p(\neg A, A) \neq 0$.

Das heißt aber, sie führt (wenn Du für den Augenblick akzeptierst, daß p eine *beliebige* Popper-Funktion ist) zu dem Theorem:

A ist eine Kontradiktion* genau dann, wenn es mindestens eine Popper-Funktion p gibt, so daß $p(\neg A, A) \neq 0$.

Aber dieses Theorem macht gemäß Ergebnissen von Leblanc, van Fraassen, Harper und anderen Logikern, die Popper-Funktionen untersucht (und mit Carnaps, Kolmogorovs und Rényis Wahrscheinlichkeitsfunktionen verglichen) haben, nicht nur Kontradiktionen im herkömmlichen Sinne zu Kontradiktionen*, sondern auch Sätze, die nicht im herkömmlichen Sinne Kontradiktionen sind. Diese Logiker haben deshalb vorgeschlagen, zunächst das zweistellige Prädikat 'A ist relativ zur Popper-Funktion p absurd (ungültig, abnormal, völlig unglaubhaft)' zu definieren und dann mit seiner Hilfe das einstellige Prädikat 'A ist eine Kontradiktion' zu definieren, wie folgt:

A ist relativ zur Popper-Funktion p absurd genau dann, wenn $p(\neg A, A) \neq 0$ (m.a.W. gdw für alle B gilt: $p(B, A) = 1$);

A ist eine Kontradiktion** genau dann, wenn für jede Popper-Funktion p gilt: A ist relativ zu p absurd (m.a.W. gdw für alle p gilt: $p(\neg A, A) \neq 0$).

Wenn man diese beiden Definitionen übernimmt, dann ist ein Satz eine Kontradiktion** genau dann, wenn er eine Kontradiktion im herkömmlichen Sinne ist; weiter bekommt man alle Überschußgesetze auf Seite 307 der LdF, wenn man anstatt 'Kontradiktion' 'absurd relativ zu p' (oder kurz: 'p-absurd') schreibt. In diesem Falle wäre auch (D3) auf Seite 305 sinngemäß zu ändern, etwa so:

B wird p-impliziert durch A genau dann, wenn für alle C gilt: $p(B \wedge A, C) = p(A, C)$.

B folgt logisch aus A genau dann, wenn für alle p gilt: B wird p-impliziert durch A.

Auch auf den Seiten 306 und 307 ergäben sich einige wenige Änderungen. Etwa wäre die Bemerkung auf Seite 307, daß sich logische Notwendigkeit durch "$p(A, \neg A) = 1$" definieren läßt, umzuschreiben zu so etwas wie:

A ist p-gültig genau dann, wenn $p(A, \neg A) \neq 0$ (m.a.W. gdw für alle B gilt: $p(A, B) = 1$);
A ist eine Tautologie genau dann, wenn für alle p gilt: A ist p-gültig (m.a.W. gdw für alle p gilt: $p(A, \neg A) \neq 0$).

Freilich weiß ich nicht, inwieweit Du den Ergebnissen jener Logiker, die Deine Wahrscheinlichkeitsfunktionen untersucht haben, zustimmst, und vielleicht habe ich Dich bereits verärgert, indem ich oben ihre Vorschläge übernommen und noch einmal vorgeführt habe. [...]

Mit herzlichen Grüßen und
insbesondere mit den besten Wünschen für 1993
verbleibe ich

Dein
Georg

2.4. *Die neue Unabhängigkeitsdefinition im Anhang *XX der LdF*

Karl Popper antwortete erwartungsgemäß auf diesen Brief nicht, doch schien er durch meine beharrliche Uneinsichtigkeit nicht gekränkt zu sein. Im Juli 1994 ließ er mir über seinen Verleger Georg Siebeck ein Exemplar der 10. Auflage der LdF zusenden. Sie war, wie am 21. Oktober 1992 angekündigt, um einen Anhang vermehrt worden: "**XX. Probabilistische Unabhängigkeit in der relativen Wahrscheinlichkeitstheorie: Korrektur eines Auslassungsfehlers*". Die neue Definition der probabilistischen Unabhängigkeit lautete nun (ausgeschriebene Version):

$$I(a, b) \leftrightarrow p(a, b) = p(a, \bar{b}) \;\&\; p(b, a) = p(b, \bar{a}) \;\&\; p(\bar{a}, b)) = p(\bar{a}, \bar{b}) \;\&\; p(\bar{b}, a) = p(\bar{b}, \bar{a}).$$

Sie steht zwar äußerlich im deutlichen Kontrast zur herkömmlichen Definition:

$$U(a, b) \leftrightarrow p(ab) = p(a)p(b);$$

doch gilt immerhin (ich verwende im folgenden statt der Formeln stets ihre umgangssprachliche Lesart und halte mich ansonsten an die Schreibart im Anhang *XX): Wenn $0 < p(a) < 1$ und $0 < p(b) < 1$, dann $I(a, b)$ genau dann, wenn $U(a, b)$. Die inhaltlichen Unterschiede können also nur jene Fälle betreffen, in denen a oder b die extremen Wahrscheinlichkeiten 0 oder 1 annehmen. Der erste wichtige Unterschied (er wird in Popper 1994, pp.453–455 hervorgehoben) besteht darin, daß gemäß der herkömmlichen Definition gilt: Wenn a eine Tautologie oder eine Kontradiktion ist, dann gilt für *jedes b*, daß a und b probabilistisch unabhängig sind; während gemäß der Popperschen Definition gilt: Wenn a eine Tautologie oder eine Kontradiktion ist, dann gibt es *kein b*, sodaß a und b probabilistisch unabhängig sind. Karl Popper (1994, p.455) notiert dazu in Klammern: "Das löst Dorns Problem". Strenggenommen nicht. Das Problem, auf das ich aufmerksam gemacht hatte, war, daß aus der herkömmlichen Unabhängigkeitsdefinition als Korollar folgt, daß a und b probabilistisch unabhängig sind, wenn $p(a) = 0$ oder $p(b) = 0$, und daß dieses Korollar zusammen mit anderen Sätzen der Popperschen Wahrscheinlichkeitstheorie zu unerwünschten Konsequenzen führt. Es kommt für die Lösung dieses Problems darauf an, daß besagtes Korollar zur herkömmlichen Unabhängigkeitsdefinition nicht auch ein Korollar zur Popperschen Unabhängigkeitsdefinition ist, mit anderen Worten, es kommt darauf an, daß der Satz 'wenn $p(a) = 0$ oder $p(b) = 0$, dann $I(a, b)$' *kein* Theorem der Popperschen Theorie der probabilistischen Unabhängigkeit ist. Und das ist er auch glücklicherweise nicht. Der zweite wichtige Unterschied (er wird in Popper 1994, pp.453–455, nicht hervorgehoben) besteht also darin, daß gemäß der herkömmlichen Definition gilt: Wenn $p(a) = 0$ oder $p(b) = 0$, dann sind a und b probabilistisch unabhängig; während gemäß der Popperschen Definition dies nicht gilt (es gilt im übrigen auch nicht: Wenn $p(a) = 0$ oder $p(b) = 0$, dann sind a und b probabilistisch abhängig).

Damit war zwar das von mir aufgezeigte Problem beseitigt, aber die Frage blieb offen, ob die Poppersche Definition im Verein mit entsprechenden Definitionen der positiven und der negativen probabilistischen Abhängigkeit neue absurde Konsequenzen nach sich zieht. Gemäß meinen Untersuchungen tut sie das (siehe Kapitel 11 in Dorn 1997). Zum Beispiel gilt in der Popperschen Theorie der gegenintuitive Satz, daß, wenn $0 < p(b) < 1$, a und b voneinander positiv probabilistisch abhängig sind, sofern a kontradiktorisch ist, a und b hingegen voneinander negativ probabilistisch abhängig sind, sofern a tautologisch ist. Wissenschaftstheoretisch gewendet, würde das heißen, daß in der Popperschen Theorie gilt: (1) Jeder logisch falsche Satz stützt bei jeder Wahrscheinlichkeitsverteilung p jeden Satz, dessen Wahrscheinlichkeit größer 0 und kleiner 1 ist. (2) Jeder Satz, dessen Wahrscheinlichkeit größer 0 und kleiner 1 ist, stützt jeden logisch falschen Satz bei jeder Wahrscheinlichkeitsverteilung p. (3) Jeder logisch wahre Satz schwächt bei jeder Wahrscheinlichkeitsverteilung p jeden Satz, dessen Wahrscheinlichkeit größer 0 und kleiner 1 ist. (4) Jeder Satz, dessen Wahrscheinlichkeit größer 0 und kleiner 1 ist, schwächt jeden logisch wahren Satz bei jeder Wahrscheinlichkeitsverteilung p. Mir scheint, keine Theorie der probabilistischen Stützung und Schwächung sollte die Sätze (1) bis (4) als Theoreme haben. Offenbar darf in einer Theorie der probabilistischen Schwächung und Stützung, die mit der Popperschen Unabhängigkeitsdefinition arbeitet, 'stützen' nicht mehr gleichbedeutend mit 'positiv probabilistisch abhängig sein' aufgefaßt werden und 'schwächen' nicht mehr als gleichbedeutend mit 'negativ probabilistisch abhängig sein' betrachtet werden. Oder man muß die neue Poppersche Unabhängigkeitsdefinition aufgeben. Eine befriedigende Definition der probabilistischen Unabhängigkeit für Sätze steht meines Wissens allerdings nach wie vor aus.

Ich dankte Karl Popper am 21. Juli 1994 für das Exemplar der 10. Auflage der LdF und legte meinem Brief mit der Bitte um Kritik einen kurzen Aufsatz bei, der 1995 als Diskussionsbeitrag unter dem Titel "Inductive Countersupport" im *Journal for General Philosophy of Science* erscheinen sollte. Er enthielt das in 1.4 vorgestellte merkwürdige Ergebnis, daß – locker ausgedrückt – es einerseits Induktion nicht gibt, insofern es keine echt induktive Stützung gibt, und daß es anderseits Induktion doch gibt, insofern es echt induktive Schwächung gibt. Karl Popper antwortete bereits fünf Tage später. Es war sein letzter Brief an mich. (Der Brief ist im Kapitel V des vorliegenden Buches fast vollständig abgedruckt.) Trotz Erschöpfung schreibt Karl Popper darin in deutlich lesbarer, kraftvoller, großer Schrift über fünf Seiten hin mit einer Mischung aus Humor und Schaudern über die Mühen bei der Drucklegung der 10. Auflage der LdF. Ich antwortete mit meinem letzten Brief an ihn am 6. August 1994 und schnitt noch ein Dilemma bei der Definition der probabilistischen Unabhängigkeit an. Aber die Zeit für weiteren Gedankenaustausch war abgelaufen: Karl Popper war, was ich nicht wußte, im August 1994 bereits todkrank. Am Abend des 17. September 1994 rief mich ein Freund an und teilte mir mit, Karl Popper sei gestorben; das Gefühl des Verlustes war tief und schmerzlich. Ich habe Karl Popper ausschließlich als freundlichen, ja gütigen Menschen kennengelernt. Ich gehörte zwar niemals zu seinem engeren Bekanntenkreis und strebte auch niemals an, zur Schar der sogenannten Popperianer zu gehören (jedwede Art von Kultgemeinschaft, ob institutionalisiert oder nicht, ist mir zuwider); doch zweifellos wurde ich durch seine Philosophie sowie durch seinen lehrreichen und liebenswürdigen brieflichen Umgang mit mir stark beeinflußt. Die Beschäftigung mit der Philosophie Karl Poppers begann in meiner Studentenzeit und zog sich durch meine ganze berufliche Laufbahn. Von 1982 bis 1987 widmete ich mich immer wieder der Falsifizierbarkeitsproblematik, was sich in zwei veröffentlichten Abhandlungen niederschlug. Von 1987 bis 1996 ging ein gutes Drittel meiner Arbeitszeit in seine Antiinduktionsbeweise und in seine Wahrscheinlichkeitstheorie, was in drei veröffentlichte Abhandlungen und in ein Buch mündete. Gefühlsmäßig betrachtet, gehören die Monate März, April und Mai 1988, während derer ich mich Schritt für Schritt durch die ersten 100 Theoreme der Popperschen Wahrscheinlichkeitstheorie im Anhang *V der LdF arbeitete, zu den glücklichsten meines beruflichen Lebens. Auch hat mich die kreative Kühnheit des Neunzigjährigen, die herkömmliche Definition des probabilistischen Unabhängigkeitsbegriffs fallenzulassen und sie durch eine einfallsreiche eigene zu ersetzen, im Herbst 1992 überaus beeindruckt. Ich verdanke Karl Popper viel und vermutlich mehr, als mir bewußt ist.

Dorn, Georg J.W. (1989): *Eine Formalisierung von Poppers Wahrscheinlichkeitstheorie und einigen ihrer Erweiterungen*, Salzburg: unveröffentlichtes Typoskript.

Dorn, Georg J.W. (1991): Inductive Support, in Gerhard Schurz & Georg J.W. Dorn, Hg., *Advances in Scientific Philosophy. Essays in Honour of Paul Weingartner on the Occasion of the 60th Anniversary of his Birthday*, Amsterdam: Rodopi, pp.345–362.

Dorn, Georg J.W. (1992/93): Popper's Laws of the Excess of the Probability of the Conditional over the Conditional Probability, in *Conceptus* 26, pp.3–61.

Dorn, Georg J.W. (1995): Inductive Countersupport, in *Journal for General Philosophy of Science* 26, pp.187–189.

Dorn, Georg J.W. (1997): *Deductive, Probabilistic and Inductive Dependence. An Axiomatic Study in Probability Semantics*, Frankfurt am Main: Peter Lang.

Popper, Karl R. (1983a): *Realism and the Aim of Science*, London: Hutchinson.

Popper, Karl R. (1983b): The Calculus of Probability Forbids Ampliative Probabilistic Induction, in Johannes Czermak & Christine Pühringer, Hg., *Abstracts of the 7th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Salzburg, July 11th–16th, 1983*, Bd.1: *Abstracts of Sections 1, 2, 3, 4, and 7*, Salzburg, pp.250–252.

Popper, Karl R. (1985): The Non-Existence of Probabilistic Inductive Support, in Georg J.W. Dorn & Paul Weingartner, Hg., *Foundations of Logic and Linguistics. Problems and Their Solutions*, London: Plenum, pp.303–318.

Popper, Karl R. (1994): *Logik der Forschung*, 10. verbesserte und vermehrte Aufl., Tübingen: J.C.B. Mohr (Paul Siebeck).

Popper, Karl R./Miller, David W. (1983): A Proof of the Impossibility of Inductive Probability, in *Nature* 302, pp.687–688.

Popper, Karl R./Miller, David W. (1987): Why Probabilistic Support is not Inductive, in *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 321, pp. 569–591.