PHILOSOPHIA NATURALIS

Archiv für Naturphilosophie und die philosophischen Grenzgebiete
der exakten Wissenschaften und Wissenschaftsgeschichte

Begründet von Eduard May †

Herausgegeben von Joseph Meurers †

Sonderdruck aus

Band 24, Heft 4

1987

VERLAG ANTON HAIN – MEISENHEIM/GLAN

IV. Wahrscheinlichkeit, Induktion und Syllogistik

Zu Bolzanos Wahrscheinlichkeitslehre

von Georg J. W. Dorn, Salzburg

0 Einleitung

Bolzano hat seine Wahrscheinlichkeitstheorie in 15 Punkten im § 14 des zweiten Teils seiner *Religionswissenschaft* sowie in 20 Punkten im § 161 des zweiten Bandes seiner *Wissenschaftslehre* niedergelegt. (Ich verweise auf die *Religionswissenschaft* mit 'RW II', auf die *Wissenschaftslehre* mit 'WL II'.) In der RW II (vgl. p. 37) ist seine Wahrscheinlichkeitslehre eingebettet in seine Ausführungen "Über die Natur der historischen Erkenntniß, besonders in Hinsicht auf Wunder", und die Lehrsätze, die er dort zusammenstellt, dienen dem ausdrücklichen Zweck, mit mathematischem Rüstzeug Lehrmeinungen entgegentreten zu können, gemäß denen Wundererzählungen keine Glaubwürdigkeit zukommen könne. In der WL II (vgl. p. 171) führt Bolzano im großen und ganzen dieselben Lehrsätze an wie in der RW II, entwickelt nun aber die Wahrscheinlichkeitslehre innerhalb seiner Lehre von den Sätzen an sich. Dabei orientiert er sich zwar durchaus an den Lehrsätzen in den damaligen "Schriften über die Wahrscheinlichkeitsrechnung" (vgl. WL II, p. 190), korrigiert aber dort, wo es ihm nötig erscheint (vgl. WL II, pp. 187–191), und leistet so im Grunde eine Reformulierung des elementaren Teils der Wahrscheinlichkeitslehre seiner Zeit innerhalb seiner logischen Theorie von den Sätzen an sich.

Ich bezwecke hier keine historische Studie über Bolzanos Wahrscheinlichkeitslehre, obwohl es von Interesse sein mag, herauszuschälen, worin Bolzano mit welchen Wahrscheinlichkeitstheoretikern seiner Zeit übereinstimmt, und worin nicht, insbesondere welche Schwächen von Bolzanos Wahrscheinlichkeitslehre Schwächen aller damaligen Wahrscheinlichkeitslehren waren. Eine wichtige systematische Studie über Bolzanos Wahrscheinlichkeitslehre bestünde – wie von Berg (1962, pp. 148–149) ansatzweise begonnen – in einer exakten Rekonstruktion seiner Wahrscheinlichkeitslehre innerhalb eines konsistenten logischen Systems der Sätze an sich. Ich werde im folgenden etwas bei weitem Bescheideneres, doch möglicherweise durchaus Fruchtbares versuchen, nämlich die Lehrsätze von Bolzanos Wahrscheinlichkeitslehre in die Sprache einer heutigen Wahrscheinlichkeitstheorie zu übersetzen und die übersetzten Lehrsätze dort herzuleiten, soweit dies möglich ist. Man könnte dann in einem zweiten Schritt, der hier nicht mehr unternommen wird, untersuchen, inwieweit jene Thesen, die den Herleitungstest überstanden haben, jenen Zweck erfüllen, den Bolzano ihnen ursprünglich zugedacht hat: als mathematisches Rüstzeug für seine Argumentationen gegen die Auffassung zu dienen, Wundererzählungen könnten nicht glaubwürdig sein.

1 Eine axiomatische Wahrscheinlichkeitstheorie

1.1 Zur Objektsprache der Wahrscheinlichkeitstheorie

Ich habe zum Zweck der Rekonstruktion von Bolzanos Wahrscheinlichkeitslehre eine moderne axiomatische Wahrscheinlichkeitstheorie gewählt, in der die Objekte, denen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden, Aussagesätze sind und nicht – wie ebenfalls möglich und üblich – Mengen.[1] Die fraglichen Aussagesätze sind allerdings nicht umgangssprachlicher Natur. Ähnlich wie die Aussagenlogik keine Logik umgangssprachlicher Aussagesätze, sondern eine Logik von Formeln ist, durch die umgangssprachliche Aussagesätze repräsentierbar sind, so ordnet die hier gewählte Wahrscheinlichkeitstheorie nicht direkt umgangssprachlichen Aussagesätzen Wahrscheinlichkeiten zu, sondern aussagenlogischen Formeln, durch die sich umgangssprachliche Aussagesätze repräsentieren lassen. Ich nehme also eine aussagenlogische Sprache als Objektsprache an; nennen wir diese Sprache 'AL'. Ich verwende kursive Großbuchstaben, insbesondere 'A', 'B' und 'C', als Mitteilungszeichen für Formeln von AL. Die Menge aller Formeln von AL sei in der üblichen Weise rekursiv definiert. Insbesondere sei $\neg A$ die Negation von A, $(A \wedge B)$ die Konjunktion von A mit B, $(A \vee B)$ die Disjunktion von A mit B. Wenn I eine Interpretation von AL ist, dann seien $\mathrm{I}[\neg A]$, $\mathrm{I}[(A \wedge B)]$, $\mathrm{I}[(A \vee B)]$ in der gewohnten Weise rekursiv definiert. Der Semantik von AL entnehme ich folgende Definitionen:

Definition (1): A ist logisch wahr genau dann, wenn gilt:
Für alle I: $\mathrm{I}[A] = \mathrm{W}$.
Definition (2): A ist logisch falsch genau dann, wenn gilt:
Für alle I: $\mathrm{I}[A] = \mathrm{F}$.
Definition (3): A schließt B logisch aus genau dann, wenn gilt:
Für alle I: $\mathrm{I}(A \wedge B)] = \mathrm{F}$.
Definition (4): A folgt logisch aus B genau dann, wenn gilt:
$\neg A$ schließt B logisch aus.

1 Ich orientiere mich inhaltlich und terminologisch an Skyrms (1986).

Definition (5): A ist logisch äquivalent mit B genau dann, wenn gilt: A folgt logisch aus B und B folgt logisch aus A.
Definition (6): A ist logisch unabhängig von B genau dann, wenn gilt: A folgt nicht logisch aus B; und B schließt A nicht logisch aus.
Definition (7): A ist logisch abhängig von B genau dann, wenn A nicht logisch unabhängig von B ist.

1.2 Das spezifische Vokabular, die Axiome und einige wichtige Theoreme der Wahrscheinlichkeitstheorie

1.2.1 Das spezifische Vokabular

Es besteht aus nur zwei Zeichen, dem Kleinbuchstaben 'p' und dem senkrechten Strich '|'. Mit beiden Zeichen lassen sich zwei Arten von Funktoren bilden: '$p(A)$'; gelesen als 'die Wahrscheinlichkeit von A'; und '$p(B|A)$', gelesen als 'die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A' oder als 'die Wahrscheinlichkeit von B relativ zu A'.

Ich übernehme zudem die gewohnten mathematischen Symbole; nur statt des Bruchstriches verwende ich den Schrägstrich '/'. Man beachte, daß der senkrechte Strich so wenig zu unserer Objektsprache gehört wie etwa der Schrägstrich; z.B. gehört kein Ausdruck der Form $B|A$ zu AL.

1.2.2 Die Axiome

Axiom (1): Für alle A: $p(A) \geqslant 0$.
Axiom (2): Für alle A: Wenn A logisch wahr ist, dann $p(A) = 1$.
Axiom (3): Für alle A und B: Wenn A B logisch ausschließt, dann gilt: $p(A \vee B) = p(A) + p(B)$. **(Spezielle Disjunktionsregel)**

1.2.3 Einige Standard-Definitionen und -Theoreme

Theorem (1): Für alle A: $p(\neg A) = 1 - p(A)$. **(Negationsregel (für absolute Wahrscheinlichkeiten))**
Theorem (2): Für alle A: Wenn A logisch falsch ist, dann $p(A) = 0$.
Theorem (3): Für alle A und B: Wenn A mit B logisch äquivalent ist, dann gilt: $p(A) = p(B)$.
Theorem (4): Für alle A und B: Wenn A aus B logisch folgt, dann gilt: $p(A) \geqslant p(B)$.
Theorem (5): Für alle A: $p(A) \leqslant 1$.
Theorem (6): Für alle A und B: $p(A \vee B) = p(A) + p(B) - p(A \wedge B)$. **(Generelle Disjunktionsregel)**
Definition (8): Wenn $p(A) \neq 0$, dann gilt: $p(B|A) = p(B \wedge A)/p(A)$. **(Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit)**
Theorem (7): Für alle A und B: Wenn $p(A) \neq 0$, dann gilt: $p(A \wedge B) = p(A) \cdot p(B|A)$. **(Generelle Konjunktionsregel)**

Definition (9): Wenn $p(A) \neq 0$, dann gilt: B ist genau dann probabilistisch unabhängig von A, wenn $p(B|A) = p(B)$. (Definition der probabilistischen Unabhängigkeit)

Theorem (8): Für alle A und B: Wenn $p(A) \neq 0$ und wenn B von A probabilistisch unabhängig ist, dann gilt: $p(A \wedge B) = p(A) \cdot p(B)$. (Spezielle Konjunktionregel)

Theorem (9): Für alle A und B: Wenn $p(B) \neq 0$ und wenn A aus B logisch folgt, dann gilt: $p(A|B) = 1$.

Theorem (10): Für alle A, B, C: Wenn $p(C) \neq 0$ und wenn $p(A) = p(B)$, dann gilt: $p(A|C) = p(B|C)$.

Theorem (11): Für alle A und B: Wenn $p(B) \neq 0$, dann gilt: $p(\neg A|B) = 1 - p(A|B)$. (Negationsregel (für bedingte Wahrscheinlichkeiten))

Theorem (12): Für alle A und B: Wenn $p(B) \neq 0$ und wenn B A logisch ausschließt, dann gilt: $p(A|B) = 0$.

1.3 Zur Wahl der Wahrscheinlichkeitstheorie

Daß ich für die Rekonstruktion der Bolzanoschen Wahrscheinlichkeitslehre eine Wahrscheinlichkeitstheorie gewählt habe, die Formeln, die Aussagesätze repräsentieren, Wahrscheinlichkeiten zuordnet und nicht Mengen, die Ereignisse repräsentieren, hat zwei hauptsächliche Gründe, die ich gleich anführen werde. Zuvor möchte ich jedoch hervorheben, daß ich diese Gründe nicht für zwingend halte und daß ich es durchaus nicht ausschließe, daß eine Wahrscheinlichkeitstheorie, die Ereignissen statt Aussagesätzen Wahrscheinlichkeiten zuordnet, sich als mindestens ebenso dienlich für eine Übersetzung der Bolzanoschen Wahrscheinlichkeitslehre herausstellen mag wie die von mir gewählte. Nun zu den beiden Gründen, die Bolzanosche Wahrscheinlichkeitslehre in die Sprache einer Wahrscheinlichkeitstheorie zu übersetzen, die Aussagesätzen Wahrscheinlichkeiten zuordnet.

Erstens: Bolzano stellt in seiner *Religionswissenschaft* seine wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung von Wundern unter den Titel "Über die Natur der historischen Erkenntniß, besonders in Hinsicht auf Wunder" (vgl. RW II, p. 37) und erläutert eine Seite darauf, was er unter 'historischer Erkenntniß' versteht, nämlich historische Urteile im weitesten Sinne des Wortes. Der Haupteindruck, den man aus seinen Ausführungen gewinnen wird, ist der, daß nach ihm historische Urteile solche umgangssprachliche Aussagesätze sind (Erzählungen, Berichte, Äußerungen von Zeugen über Ereignisse), deren einen Teil man heute vermutlich 'Protokollsätze', deren anderen Teil man 'Basissätze' nennen würde, oder daß nach ihm historische Urteile die von solchen Aussagesätzen ausgedrückten Behauptungen sind. Wie auch immer – obschon Bolzanos Ausdrucksweise oft suggeriert, er ordne den Ereignissen selbst (etwa Wundern) Wahrscheinlichkeiten zu, hält er doch mehrmals ausdrücklich fest, es gehe ihm um die Wahrscheinlichkeit (die Glaubwürdigkeit, den Grad der Zuversicht in die Wahrheit) von Urteilen, Sätzen, Behauptungen, Annahmen, Nachrichten, Erzählungen (vgl. etwa RW II, § 13, Punkt 5, p. 38; § 15, Punkt 1, pp. 39–40; § 15, Punkt 3, p. 40; § 15, Punkt 4, pp. 40–41; § 15, Punkt 5, pp. 41–42; § 15, Punkt 8, p. 42; § 15, Punkt 9, pp. 42–43; § 15, Punkt 10, p. 43; § 15, Punkt 13, pp. 44–45; § 15, Punkt 14, p. 45; § 16, Einleitung, p. 49; § 30, pp. 71–75).

Zweitens: Bolzano stellt in der *Wissenschaftslehre* die Wahrscheinlichkeitslehre unter den Titel "Verhältniß der vergleichungsweisen Gültigkeit oder der Wahrscheinlichkeit eines Satzes in Hinsicht auf andere Sätze" (vgl. WL II, p. 171), wobei er, wie der Kontext eindeutig klarstellt, mit 'Sätze' Sätze an sich meint. Für Bolzano ist die Wahrscheinlichkeit also ein Verhältnis zwischen Sätzen an sich, dem er den Namen 'vergleichungsweise Gültigkeit' gibt, und zwar – wie er schreibt (WL II, p. 172) – "wegen der Ähnlichkeit, die es mit der Beschaffenheit hat, die ich § 147. die *Gültigkeit* eines Satzes nannte. Denn wie bei der *Gültigkeit* eines Satzes nach dem Verhältnisse gefragt wird, in welchem die Menge der verschiedenen Sätze, die durch den Austausch gewisser Vorstellungen aus ihm gebildet werden können, zur Menge der darunter befindlichen wahren stehet: so fragen wir bei der *vergleichungsweisen* Gültigkeit des Satzes M hinsichtlich auf gewisse andere Sätze A, B, C, D, ... nach dem Verhältnisse, in welchem die Menge der Fälle, bei welchen die A, B, C, D ... wahr werden, zur Menge der Fälle stehet, bei welchen nebst A, B, C, D, ... auch noch M wahr wird. *Wahrscheinlichkeit* aber nenne ich dieses Verhältniß, weil es mir däucht, daß wir, nach einem je länger je allgemeiner werdenden Sprachgebrauche, unter der Wahrscheinlichkeit wirklich nichts Anderes, als ein solches Verhältniß zwischen gegebenen Sätzen verstehen, ohne vorauszusetzen, daß diese Sätze eben von einem denkenden Wesen vorgestellt und geglaubt werden müßten."

Aus diesem Zitat läßt sich eine Auffassung der Wahrscheinlichkeit herauslesen, die man heute oft 'die logische Deutung von Wahrscheinlichkeitsaussagen' nennt. Diese Deutung geht von dem Faktum aus, daß zwischen Aussagesätzen bzw. den durch sie ausgedrückten Aussagen oder Propositionen mannigfache logische Beziehungen bestehen, insbesondere die Beziehungen der logischen Folge, des logischen Ausschlusses und der logischen Unabhängigkeit. Nach der logischen Deutung von Wahrscheinlichkeitsaussagen sind nun Wahrscheinlichkeitsaussagen – grob gesagt – Aussagen über das Ausmaß, in dem ein Satz *A* in einem Satz *B* "inhaltlich eingeschlossen" ist: Die Wahrscheinlichkeit eines Satzes *A* hinsichtlich eines Satzes B ist danach so etwas wie der Grad, in dem A von B impliziert wird. Wenn Bolzano die Wahrscheinlichkeitsbeziehung als das Verhältnis der vergleichungsweisen Gültigkeit zwischen Sätzen an sich auffaßt, dann liegt es in der Tat nicht fern, daß er damit etwas ganz Analoges meint wie ein moderner Wahrscheinlichkeitstheoretiker der logischen Schule, der sagt, die Wahrscheinlichkeitsbeziehung sei eine verfeinerte logische Beziehung zwischen Sätzen, nämlich eine metrisierte Implikationsbeziehung. Es ist auch offensichtlich, daß diese Deutung jemandem entgegenkommt, der – wie Bolzano – die Wahrscheinlichkeiten zu errechnen versucht, die Wundererzählungen durch Zeugenaussagen "verliehen" werden. Und ein Teil seiner Lehrsätze spiegelt denn auch einige wichtige Intuitionen wider, die man bezüglich der Wahrscheinlichkeitsbeziehung als einer metrisierten Implikationsbeziehung zu haben pflegt.[2]

All dies ist freilich nicht zwingend. Wie erwähnt, ist Bolzanos Terminologie in der RW II besonders uneinheitlich; so gebraucht er häufig nebeneinander Wendungen wie 'die Wahrscheinlichkeit eines Erfolges' und 'die Wahrscheinlichkeit eines Urteiles'; in seiner Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre auf die Wunderproblematik gebraucht er zudem fast ausschließlich Wendungen wie 'die Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit' und 'die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses'. Was die Entwicklung seiner Wahrscheinlichkeitslehre in der WL II angeht, so ist offensichtlich, daß er die damals übliche Auffassung der Wahrscheinlichkeit als der Verhältniszahl zwischen den günstigen und möglichen Fällen in seine Lehre von den Sätzen an sich einzubauen versucht. (Ob dieser Versuch geglückt ist, sei dahingestellt.) Daß damit für Bolzano die Wahrscheinlichkeit eines Satzes eng verknüpft ist mit der relativen Häufigkeit von Ereignissen, könnte eine Übersetzung seiner Lehre auch in eine solche Wahrscheinlichkeitstheorie, die Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zuordnet, nahelegen.

Gleichgültig, ob nun der Bolzanoschen Wahrscheinlichkeitslehre eher durch eine häufigkeitstheoretische Auffassung der Wahrscheinlichkeit oder eher durch eine logische Deutung der Wahrscheinlichkeit (oder vielleicht auch durch eine andere Auffassung der Wahrscheinlichkeit) Gerechtigkeit widerfährt – es ist offensichtlich, daß die hier gewählte Wahrscheinlichkeitstheorie in diesem Punkt neutral ist, weil sie ja keinerlei Regeln enthält, wie die Wahrscheinlichkeit eines Satzes, der weder logisch wahr noch logisch falsch ist, zu bestimmen ist. Insofern steht sie über dem

2 Zwei Beispiele: Folgt A logisch aus B, dann "verleiht" der Satz B dem Satz A die größtmögliche Wahrscheinlichkeit, nämlich die Wahrscheinlichkeit 1 (vgl. die These 4); mit anderen Worten, A als logische Folge von B ist *mit Sicherheit* wahr unter der Bedingung, daß B selbst wahr ist. Schließt der Satz B den Satz A logisch aus, dann "gibt" der Satz B dem Satz A die geringstmögliche Wahrscheinlichkeit, nämlich die Wahrscheinlichkeit 0 (vgl. die These 5).

Streit der verschiedenen Schulen, wie Wahrscheinlichkeit zu messen sei. Und insofern verpflanze ich Bolzano nicht von vornherein in eine bestimmte Schule der Wahrscheinlichkeitsauffassung, wenn ich seine Wahrscheinlichkeitslehre in die von mir gewählte Theorie übersetze.

2 Übersetzung von Bolzanos Wahrscheinlichkeitslehre in die Sprache der hier gewählten Wahrscheinlichkeitstheorie

Textauslegung ist immer mit Unsicherheit behaftet. Glücklicherweise hat jedoch Bolzano seine Lehrsätze nicht nur mittels der Umgangssprache darzustellen versucht, sondern er hat auch – zumindest bruchstückhaft – mathematische Formeln verwendet und den Großteil seiner Lehrsätze durch leicht faßliche Beispiele veranschaulicht. Ich führe im folgenden seine eigenen Beispiele zu den wichtigeren Lehrsätzen an, einerseits um damit die Übersetzungen dieser Lehrsätze zu erläutern, andererseits um eben dadurch die inhaltliche Adäquanz der Reformulierungen aufzuzeigen. (Ich werde diese Reformulierungen 'die Thesen der (rekonstruierten) Bolzanoschen Wahrscheinlichkeitslehre' nennen.) Ich strebe dabei nicht an, Bolzanos eigene Begründungen für seine Lehrsätze nachzukonstruieren; dazu ist einerseits die von mir gewählte Wahrscheinlichkeitstheorie zu schwach, andererseits interessiert ja hier nur die Herleitbarkeit der Thesen, nicht die Korrektheit der Begründung der entsprechenden Lehrsätze in Bolzanos eigener Wahrscheinlichkeitslehre.

2.1 Thesen über die Extremgrade der Wahrscheinlichkeit

Aus Punkt 3) des § 161 der WL II (pp. 172–173) und aus Punkt 7) des § 15 der RW II (p. 42) geht hervor:

These 1: Für alle A: $p(A) \leq 1$.

Beweis: These 1 ist mit Theorem (5) identisch.

Aus Punkt 5) des § 161 der WL II (p. 173) und aus Punkt 15a) des § 15 der RW II (pp. 45–46) geht hervor:[3]

3 Aus Punkt 5) des § 161 der WL II (p. 173), nicht aber aus Punkt 15a) des § 15 der RW II (pp. 45–46), läßt sich eventuell auch die Negationsregel für bedingte Wahrscheinlichkeiten (das ist das Theorem (11) der hier gewählten Wahrscheinlichkeitstheorie) herauslesen. Bolzanos abschließende Ausführungen im Punkt 17) des § 161 in der WL II (p. 183) legen zudem die Vermutung nahe, daß er zumindest instinktiv die Negationsregel für bedingte Wahrscheinlichkeiten verwendet. Ich sehe trotzdem vorläufig von einer Aufnahme dieser Regel unter die Thesen ab, um keine Überinterpretation des Textes zu riskieren.
Hier wird ein allgemeines Interpretationsproblem bezüglich älterer wahrscheinlichkeitstheoretischer Texte sichtbar. Es scheint nämlich (vgl. Hacking (1975, p.

These 2: Für alle A: $\mathrm{p}(\neg A) = 1 - \mathrm{p}(A)$.

Beweis: These 2 ist mit Theorem (1) identisch.

Aus Punkt 3) des § 161 der WL II (pp. 172–173) dürfte sich neben der These 1 auch das Axiom (1) der hier gewählten Wahrscheinlichkeitstheorie entnehmen lassen:

These 3: Für alle A: $\mathrm{p}(A) \geqslant 0$.

These 3 wird durch die Thesen 1 und 2 suggeriert, wenn sie auch nicht aus ihnen folgt: Kann ein Satz keine größere Wahrscheinlichkeit als 1 haben, so kann seine Negation keine kleinere Wahrscheinlichkeit als 0 haben. Allerdings ist zuzugeben, daß Bolzano selbst nicht ausdrücklich einen der These 3 entsprechenden Lehrsatz aufstellt und in den Punkten 10), 11), 12) des § 15 der RW II und später bei der Erörterung der Wunderproblematik (vgl. p. 57, pp. 69–70 der RW II) sogar Wendungen gebraucht, die möglicherweise suggerieren, die Wahrscheinlichkeit eines Aussagesatzes könne einen Grad annehmen, der "unendlich gering" und somit eventuell kleiner als 0 ist.

2.2 Thesen über die Wahrscheinlichkeit eines Satzes relativ zu anderen Sätzen, von denen er logisch abhängt

Aus Punkt 3) in § 161 der WL II (p. 172) gehen die Thesen 4 und 5 hervor, die unter Berücksichtigung der Tatsache, daß bei Bolzano Ableitbarkeit Verträglichkeit impliziert[4], mit Hilfe des heutigen Begriffs der lo-

90); Popper (1982, pp. 306–307)), daß bis in die dreißiger Jahre unseres Jahrhunderts herein auch von den Wahrscheinlichkeitstheoretikern selbst der Unterschied zwischen den Sätzen der folgenden drei Formen nicht immer deutlich gesehen worden ist:
(a) Wenn A, dann $\mathrm{p}(B) = x$;
(b) $\mathrm{p}(B|A) = x$;
(c) $\mathrm{p}(\text{Wenn } A, \text{dann } B) = x$.
Was die Interpretation der wahrscheinlichkeitstheoretischen Ausführungen Bolzanos angeht, so ist es dann besonders schwierig, bei ihm zwischen (a) und (b) zu unterscheiden, wenn er – wie im vorliegenden Fall – kein Beispiel gibt; (und es wird noch schwieriger, wenn sich auch keine parallele Stelle in der RW II findet).

4 Ich gehe aber nicht soweit wie Berka (1979, p. 8, p. 15), der schreibt, Bolzano setze als eine notwendige Bedingung für seinen Wahrscheinlichkeitsbegriff – ähnlich wie für den Begriff der Ableitbarkeit – die Eigenschaft der Verträglichkeit voraus. Es ist wahr, daß bei Bolzano gilt: Wenn A ableitbar aus B ist, dann ist A verträglich mit B; insofern ist Verträglichkeit eine notwendige Bedingung für Ableitbarkeit. Aber was könnte es heißen, daß Verträglichkeit eine notwendige Bedingung für Wahrscheinlichkeit ist? Wenn es heißen soll, daß bei Bolzano die Wahrscheinlichkeit von A relativ zu B nicht definiert ist, wenn A mit B nicht verträglich ist; oder wenn es gar heißen soll, daß für Bolzano kein einziger Satz relativ zu anderen Sätzen die Wahrscheinlichkeit 0 annimmt, dann kann man jeweils nur

gischen Folge (s. Definition (4)) folgendermaßen formuliert werden können:

These 4: Für alle A und B: Wenn $p(B) \neq 0$ und wenn B nicht logisch falsch ist, dann gilt: Wenn A aus B logisch folgt, dann: $p(A|B) = 1$.

These 5: Für alle A und B: Wenn $p(B) \neq 0$ und wenn B nicht logisch falsch ist, dann gilt: Wenn B A logisch ausschließt, dann: $p(A|B) = 0$.

Beweis: Die Thesen 4 und 5 sind Abschwächungen der Theoreme (9) und (12).

Enthielte Bolzanos Wahrscheinlichkeitslehre das Theorem (2), nämlich

Für alle A: Wenn A logisch falsch ist, dann $p(A) = 0$,

als These, wäre der Antezedens-Teil 'und wenn B nicht logisch falsch ist' natürlich überflüssig. Nicht überflüssig ist jedenfalls wegen der Gefahr der Inkonsistenz die Voraussetzung, daß die Wahrscheinlichkeit des bedingenden Satzes ungleich 0 zu sein habe. Diese Voraussetzung findet sich nicht ausdrücklich im § 161 der WL II. Sie wurde hier im Sinne einer wohlwollenden Interpretation den Thesen 4 und 5 hinzugefügt. Es gibt zwar keinen sicheren Anhaltspunkt in Bolzanos Text, daß er für die Berechnung von $p(B|A)$ stets voraussetzt, daß $p(A) > 0$. Allerdings dürfte es jemandem, der – wie Bolzano – in der Tradition der Laplaceschen Gedankenexperimente dachte ("blinde" Ziehungen aus Urnen, Würfe mit "unverfälschten" Münzen und Würfeln), von vornherein nicht in den Sinn gekommen sein, Situationen wie etwa die beiden folgenden zu betrachten, in denen der bedingende Satz A die Wahrscheinlichkeit 0 hat:

p(Es wird eine schwarze Kugel gezogen | Es wird eine rote Kugel gezogen und es wird nicht eine rote Kugel gezogen);
p(Es wird eine gerade Zahl mit einem sechsseitigen Würfel geworfen | Es wird eine Sieben geworfen).

Solche Situationen wären ihm wohl als absurd erschienen, und so mag man mit einiger Berechtigung davon ausgehen, daß zumindest in älteren wahrscheinlichkeitstheoretischen Texten den bedingenden Sätzen, wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, immer eine Wahrscheinlichkeit größer als 0 zuzuschreiben ist. (Manchmal ist dies ja auch noch bezüglich von als vorbildlich geltenden, modernen Standardeinführungen in die Wahrscheinlichkeitstheorie angebracht, wie Popper an einem berühmten Beispiel entdeckt hat; vgl. Popper (1982, p. 305).)

auf Bolzanos Text selbst verweisen, aus dem das Gegenteil hervorgeht: "[...] wenn M in dem Verhältnisse der Unverträglichkeit mit A, B, C, D, ... stehet, so ist der Grad der Wahrscheinlichkeit des M hinsichtlich auf die Sätze A, B, C, D, ... = 0" (WL II, p. 173).

Aus den Punkten 9) und 10) des § 161 der WL II (pp. 177–178) geht hervor:

These 6: Für alle A und B: Wenn B nicht logisch falsch ist, dann gilt: Wenn A aus B logisch folgt, dann: $p(A) \geqslant p(B)$.

Beweis: These 6 ist eine Abschwächung des Theorems (4).

Aus Punkt 4) des § 161 der WL II (p. 173) geht hervor:

These 7: Für alle A und B: Wenn B nicht logisch falsch ist, dann gilt: Wenn A mit B logisch äquivalent ist, dann: $p(A) = p(B)$.

Beweis: These 7 ist eine Abschwächung des Theorems (3).

2.3 Bolzanos Konjunktionsregel

Aus Punkt 11) des § 161 der WL II (pp. 178–180) und aus Punkt 15b) des § 15 der RW II (pp. 46–47) geht hervor:

These 8: Für alle A und B: $p(A \wedge B) = p(A) \cdot p(B)$.

These 8 läßt sich als **Bolzanos Konjunktionsregel** auffassen. Aus ihr ist auf offensichtliche Weise das Theorem (8), die sogenannte spezielle Konjunktionsregel, ableitbar:

These 9: Für alle A und B: Wenn $p(A) \neq 0$ und wenn B von A probabilistisch unabhängig ist, dann gilt: $p(A \wedge B) = p(A) \cdot p(B)$.

Man sieht: Im Gegensatz zu der speziellen Konjunktionsregel ist Bolzanos Konjunktionsregel nicht durch die Voraussetzung eingeschränkt, daß B von A probabilistisch unabhängig zu sein habe. Zumindest findet sich diese Voraussetzung nicht ausdrücklich in Bolzanos Text. Daß er sie stillschweigend gemacht habe, dagegen spricht sein eigenes Beispiel, das er zur Erläuterung seiner Konjunktionsregel angibt. Das Beispiel ist eines der damals wie heute üblichen Laplaceschen Urnen-Beispiele und lautet: "So wäre z.B. die Wahrscheinlichkeit, daß Jemand von 6 Kugeln, darunter 4 schwarze und 5 wohlriechende sind, eine ergreifen werde, die zugleich schwarz und wohlriechend ist, $= 4/6 \cdot 5/6 = 5/9$." (WL II, p. 180).

Das Ergebnis, zu dem Bolzano hier gelangt, ist unkorrekt, und zwar deshalb, weil er die Tatsache nicht berücksichtigt hat, daß der Aussagesatz 'Es wird eine wohlriechende Kugel gezogen' nicht von dem Aussagesatz 'Es wird eine schwarze Kugel gezogen' probabilistisch unabhängig ist. Kürzen wir zur Erleichterung der Schreibweise ersteren Satz durch 'W' und letzteren Satz durch 'S' ab. Wir können (unter der von Bolzano hier und in allen anderen Urnen-Beispielen stets vorausgesetzten Gleichwahrscheinlichkeit aller Sätze der Form 'Kugel x wird herausgezogen') akzeptieren, daß gilt:

(1) $p(S) = 4/6$;
(2) $p(W) = 5/6$.

Unter der Annahme von (1) und (2) liefert Bolzanos Konjunktionsregel dann das gerade zitierte Ergebnis:

$$p(S \wedge W) = 4/6 \cdot 5/6 = 20/36 = 5/9;$$

aber um die spezielle Konjunktionsregel, die in der hier gewählten Wahrscheinlichkeitstheorie das Analogon zu Bolzanos Konjunktionsregel ist, verwenden zu können, müßte die Voraussetzung erfüllt sein, daß (a) $p(S) \neq 0$ und daß (b) W von S probabilistisch unabhängig ist, daß also

(3) $p(W|S) = p(W) = 5/6$.

(a) ist wegen (1) erfüllt. (b) ist nicht erfüllt, wie sich aus folgender Fallunterscheidung ergibt.

Fall 1: Alle vier schwarzen Kugeln sind wohlriechend.
Fall 2: Nicht alle vier schwarzen Kugeln sind wohlriechend.

Nehmen wir zunächst Fall 1 an. Dann gilt:

(4) $p(W|S) = 1 \neq 5/6$.

Nehmen wir nun Fall 2 an. Wenn mindestens eine der vier schwarzen Kugeln nicht wohlriechend ist und 5 der insgesamt 6 Kugeln wohlriechend sind, dann ist höchstens eine der vier schwarzen Kugeln nicht wohlriechend. (Denn wären weniger als drei der vier schwarzen Kugeln wohlriechend, so wären, auch wenn beide nicht-schwarzen Kugeln wohlriechend sind, weniger als 5 der 6 Kugeln wohlriechend; es sind jedoch 5 der 6 Kugeln wohlriechend.) Im Fall 2 ist also genau eine der vier schwarzen Kugeln nicht wohlriechend. Somit gilt:

(5) $p(W|S) = 3/4 \neq 5/6$.

Da W erwiesenermaßen nicht von S probabilistisch unabhängig ist, kommt statt der speziellen die generelle Konjunktionsregel zur Anwendung. Sie liefert im Fall 1 das Ergebnis:

(6) $p(S \wedge W) = p(S) \cdot p(W|S) = 4/6 \cdot 1 = 2/3 \neq 5/9$;

und im Fall 2 das Ergebnis:

(7) $p(S \wedge W) = p(S) \cdot p(W|S) = 4/6 \cdot 3/4 = 1/2 \neq 5/9$.

Ich halte fest: Wenn Bolzanos Konjunktionsregel angewendet wird, ohne daß die Voraussetzung der probabilistischen Unabhängigkeit erfüllt ist, kann dies zu unkorrekten Ergebnissen führen, wie Bolzanos eigenes Beispiel zu seiner Konjunktionsregel veranschaulicht. Man wird deshalb gut daran tun, alle Anwendungen seiner Konjunktionsregel kritisch daraufhin zu überprüfen, ob jeweils die Bedingung der probabilistischen Unabhängigkeit erfüllt ist.

2.4 Bolzanos Disjunktionsregel

Aus Punkt 16) des § 161 der WL II (pp. 181) geht hervor:[5]

These 10: Für alle A und B: $p(A \vee B) = 1 - \{[1 - p(A)] \cdot [1 - p(B)]\}$.

These 10 läßt sich als **Bolzanos Disjunktionsregel** auffassen. Man kann bei Betrachtung der These (10) im Lichte von Bolzanos Ausführungen im Punkt 16) sagen, daß sich Bolzano der Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Disjunktionssatzes ($A \vee B$) über die Berechnung der Wahrscheinlichkeit seines De Morganschen Äquivalents $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ nähert – eine angesichts des Theorems (3) bzw. der These 7 durchaus legitime Zugangsmöglichkeit:

$$p(A \vee B) = p(\neg(\neg A \wedge \neg B)) = 1 - p(\neg A \wedge \neg B) = 1 - [p(\neg A) \cdot p(\neg B)] =$$
$$= 1 - \{[1 - p(A)] \cdot [1 - p(B)]\}.$$

Den kritischen Punkt in dieser Reihe von Gleichungen bildet die Gleichung

$$1 - p(\neg A \wedge \neg B) = 1 - [p(\neg A) \cdot p(\neg B)].$$

Der Übergang von $p(\neg A \wedge \neg B)$ zu $[p(\neg A) \cdot p(\neg B)]$ setzt nämlich voraus, daß die Wahrscheinlichkeit von $\neg A$ größer als 0 ist und daß $\neg B$ probabilistisch unabhängig von $\neg A$ ist. Schwächt man Bolzanos Disjunktionsregel durch die Voraussetzung der probabilistischen Unabhängigkeit ab, so erhält man:

These 11: Für alle A und B: Wenn $p(\neg A) \neq 0$ und wenn $\neg B$ von $\neg A$ probabilistisch unabhängig ist, dann gilt:
$p(A \vee B) = 1 - \{[1 - p(A)] \cdot [1 - p(B)]\}$.

These 11 ist in der hier gewählten Wahrscheinlichkeitstheorie herleitbar.[6] In jenen Fällen, in denen die Voraussetzung der probabilistischen Unab-

5 Bolzano stellt seine Konjunktionsregel in Punkt 11), seine Disjunktionsregel in Punkt 16) des § 161 der WL II vor. In den dazwischenliegenden Punkten 12), 13), 14) und 15) bringt er einige (korrekte) Korollare, die sich auf offensichtliche Weise aus der Konjunktionsregel und der These 4 ergeben. Da diese Korollare irrelevant für die wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung der Wunderproblematik sind, gehe ich im Text sofort zu der interessanteren und relevanteren Disjunktionsregel über.

6 Skizze des Beweises für These 11:

1. $p(\neg A) \neq 0$	Annahme
2. $\neg B$ ist von $\neg A$ probabilistisch unabhängig	Annahme
3. $p(A \vee B) = p(\neg(\neg A \wedge \neg B))$	Mittels Theorem (3)

hängigkeit erfüllt ist, wird man also bei der Anwendung von Bolzanos Disjunktionsregel zu korrekten Ergebnissen gelangen; in jenen Fällen, in denen sie nicht erfüllt ist, nicht. In dem Beispiel, das Bolzano zur Erläuterung seiner Disjunktionregel angibt, kann die Voraussetzung plausiblerweise als erfüllt betrachtet werden, und deshalb das Ergebnis, zu dem Bolzano gelangt, als korrekt. Das Beispiel lautet: "[...] die Wahrscheinlichkeit, daß Jemand, der in zwei Urnen greift, in deren einer unter 50 Kugeln 40, in deren anderen aber unter 60 Kugeln 45 schwarze sind, eine schwarze hervorholen werde, = 1 − (1 − 40/50) (1 − 45/60) = 19/20." (WL II, p. 181) Aber würde etwa Bolzanos Disjunktionsregel auf das weiter oben gebrachte Beispiel mit den 4 schwarzen und den 5 wohlriechenden Kugeln in einer Urne mit insgesamt 6 Kugeln angewendet, so ergäbe sich ein von den zwei möglichen korrekten Werten 5/6 und 1 verschiedener unkorrekter Wert:

$$\begin{aligned} p(S \vee W) &= 1 - [(1 - p(S)) \cdot (1 - p(W))] = 1 - [(1 - 4/6) \cdot (1 - 5/6)] = \\ &= 1 - (2/6 \cdot 1/6) = 1 - 2/36 = 34/36 = 17/18. \end{aligned}$$

2.5 Bolzanos zwei Hauptthesen

Wir kommen nun zu jenen beiden Thesen aus Bolzanos Wahrscheinlichkeitslehre, denen er ausdrücklich eine große Bedeutung für die wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtung von Sätzen über Wunder beimißt. Diese Thesen seien daher seine 'Hauptthesen' genannt.

2.5.1 Hauptthese I

Die Hauptthese I läßt sich dem Punkt 17) des § 161 der WL II (pp. 181–183) sowie dem Punkt 15d) des § 15 der RW II (pp. 47–48) entnehmen:

Hauptthese I: Für alle A und B: $p((A \wedge B) | [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]) =$
$= [p(A) \cdot p(B)] \,/\, \{[p(A) \cdot p(B)] + [(1 - p(A)) \cdot (1 - p(B))]\}$.

Man erkennt unschwer, daß die Wahrscheinlichkeit von $(A \wedge B)$ hier wieder – ganz im Sinne von Bolzanos Konjunktionsregel – gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeit von A mit der von B gesetzt worden ist; und daß die Wahrscheinlichkeit von $(\neg A \wedge \neg B)$ gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeit von $\neg A$ mit der von $\neg B$ gesetzt worden ist. Die Vermutung liegt nahe, daß es der Hauptthese I wie schon den Thesen 10 und 8 an einem Antezedens fehlt, das die nötigen probabilistischen Unabhängigkeitsbehauptungen ausdrückt, um diese Gleichsetzungen zu rechtfertigen.

4.	$p(A \vee B) = 1 - p(\neg A \wedge \neg B)$	Mittels Theorem (1)
5.	$p(A \vee B) = 1 - [p(\neg A) \cdot p(\neg B)]$	Mittels Theorem (8)
6.	$p(A \vee B) = 1 - \{[1 - p(A)] \cdot [1 - p(B)]\}$	Mittels Theorem (1)

Wenn wir ein solches Antezedens der Hauptthese anfügen, erhalten wir denn auch eine abgeschwächte Variante, die in der hier gewählten Wahrscheinlichkeitstheorie herleitbar ist:[7]

Hauptthese I′: Für alle A und B: Wenn $p(A) \neq 0$ und wenn $p(\neg A) \neq 0$ und wenn B probabilistisch unabhängig von A ist und wenn $\neg B$ probabilistisch unabhängig von $\neg A$ ist, dann gilt:
$p((A \wedge B)|[(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]) =$
$= [p(A) \cdot p(B)] / \{[p(A) \cdot p(B)] + [(1 - p(A)) \cdot (1 - p(B))]\}.$

Bolzano veranschaulicht die Hauptthese I durch ein weiteres Urnen-Beispiel: "Wenn wir z.B. wüßten, daß Jemand in zwei Urnen, deren eine 30 schwarze und 20 weiße, die andere 70 schwarze und 50 weiße Kugeln enthält, gegriffen, und aus jeder eine Kugel hervorgeholt habe, von denen uns nur gesagt wird, daß beide gleichfärbig (also entweder beide schwarz oder weiß) sind: so wäre die Wahrscheinlichkeit des Satzes, daß beide Kugeln schwarz sind, = 21/31." (WL II, p. 182) Da in diesem Beispiel die Voraussetzung der probabilistischen Unabhängigkeit plausiblerweise als erfüllt betrachtet werden kann, führte die Anwendung der Hauptthese I zu einem korrekten Ergebnis.[8]

7 Skizze des Beweises für Hauptthese I′:

1. $p(A) \neq 0$	Annahme
2. $p(\neg A) \neq 0$	Annahme
3. B ist probabilistisch unabhängig von A	Annahme
4. $\neg B$ ist probabilistisch unabhängig von $\neg A$	Annahme
5. $p((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) = p(A \wedge B) + p(\neg A \wedge \neg B)$	Mittels Axiom (3)
6. $p((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)) \neq 0$	Aus 1., 2. und 5.
7. $p((A \wedge B)|[(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]) = p(\{(A \wedge B) \wedge$ $\wedge [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]\}) / p((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$	Mittels Definition (8)
8. $p(\{(A \wedge B) \wedge [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]\}) = p(A \wedge B)$	Mittels Theorem (3)
9. $p(A \wedge B) = p(A) \cdot p(B)$	Mittels Theorem (8)
10. $p(\neg A \wedge \neg B) = p(\neg A) \cdot p(\neg B)$	Mittels Theorem (8)
11. $p((A \wedge B)|[(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]) =$ $= [p(A) \cdot p(B)] / \{[p(A) \cdot p(B)] + [p(\neg A) \cdot p(\neg B)]\}$	Aus 5., 7., 8., 9. und 10.
12. $p((A \wedge B)|[(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]) = [p(A) \cdot p(B)] /$ $/ \{[p(A) \cdot p(B)] + [(1 - p(A)) \cdot (1 - p(B))]\}$	Mittels Theorem (1)

8 Zwar sprechen dieses Urnen-Beispiel und auch das Formelbruchstück, das Bolzano als Beschreibungshilfe für jenen Lehrsatz verwendet, den ich hier als Hauptthese I übersetzt habe, eindeutig für die Adäquatheit der Übersetzung, aber es ist bemerkenswert, daß Bolzano, wenn es zur Anwendung der Hauptthese I auf die Wunderproblematik kommt, stillschweigend (und vermutlich unbewußt) zu einer äußerlich ähnlichen, aber inhaltlich ganz verschiedenen These übergeht, die man Bolzanos stillschweigende Hauptthese I nennen könnte:
$p(A|B \wedge C) =$
$= [p(A|B) \cdot p(A|C)] / \{[p(A|B) \cdot p(A|C)] + [(1 - p(A|B)) \cdot (1 - p(A|C))]\}.$
Diese stillschweigende Hauptthese I ist auch nach Hinzufügung der nötigen probabilistischen Unabhängigkeitsvoraussetzungen nicht in der hier gewählten Wahrscheinlichkeitstheorie herleitbar.

Ein wichtiges Korollar zu Hauptthese I kann dem Punkt 18) des § 161 der WL II (p. 183) sowie dem Punkt 15f) des § 15 der RW II (p. 48) entnommen werden:

Korollar zu Hauptthese I: Für alle A und B:
Wenn gilt:
$p((A \wedge B) | [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]) =$
$[p(A) \cdot p(B)] / \{[p(A) \cdot p(B)] + [(1 - p(A)) \cdot (1 - p(B))]\}$,
dann gilt auch:
(a) Wenn $p(A) = 1/2$, dann $p((A \wedge B) | [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]) = p(B)$;
(b) Wenn $p(A) < 1/2$, dann $p((A \wedge B) | [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]) < p(B)$.

Der (a)-Teil dieses Korollars ist auf offensichtliche Weise in der hier gewählten Wahrscheinlichkeitstheorie herleitbar. Es ist aber zumindest ebenso offensichtlich, daß auch die folgenden beiden Sätze dort unter Anname der Hauptthese I herleitbar sind:

Wenn $p(B) = 0$, dann $p((A \wedge B) | [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]) = p(B)$.
Wenn $p(B) = 1$, dann $p((A \wedge B) | [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]) = p(B)$.

Woraus folgt, daß der (b)-Teil des Korollars falsch ist, wenn nicht die Einschränkung hinzugefügt wird, daß $0 < p(B) < 1$. Wenn wir unterstellen, daß Bolzano diese Einschränkung stillschweigend gemacht hat, ist das Korollar zur Hauptthese I (bzw. I′) so zu reformulieren:

Modifiziertes Korollar zu Hauptthese I′: Für alle A und B:
Wenn gilt:
$p((A \wedge B) | [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]) =$
$[p(A) \cdot p(B)] / \{[p(A) \cdot p(B)] + [(1 - p(A)) \cdot (1 - p(B))]\}$,
dann gilt auch:
(a) Wenn $p(A) = 1/2$, dann $p((A \wedge B) | [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]) = p(B)$;
(b) Wenn $p(A) < 1/2$ und wenn $0 < p(B) < 1$, dann:
$p((A \wedge B) | [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]) < p(B)$.

Das modifizierte Korollar zu Hauptthese I′ ist in der hier gewählten Wahrscheinlichkeitstheorie herleitbar.[9]

9 Skizze des Beweises für das modifizierte Korollar zu Hauptthese I′, Teil (b):

1.	$p((A \wedge B) \| [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]) = [p(A) \cdot p(B)] /$ $/ \{[p(A) \cdot p(B)] + [(1 - p(A)) \cdot (1 - p(B))]\}$	Annahme
2.	$p(A) < 1/2$	Annahme
3.	$0 < p(B) < 1$	Annahme
4.	$2p(A) < 1$	Aus 2.
5.	$2p(A) < (1 - p(B)) / (1 - p(B))$	Aus 3. und 4.
6.	$p(A) < 2p(A) \cdot p(B) + (1 - p(B)) - p(A)$	Aus 5.
7.	$p(A) < [p(A) \cdot p(B)] + [(1 - p(A)) \cdot (1 - p(B))]$	Aus 6.
8.	$p(A) \cdot p(B) <$ $< p(B) \cdot \{[p(A) \cdot p(B)] + [(1 - p(A)) \cdot (1 - p(B))]\}$	Aus 3. und 7.

2.5.2 Hauptthese II

Die Hauptthese II kann dem Punkt 19) des § 161 der WL II (pp. 183–184) sowie dem Punkt 15g) des § 15 der RW II (pp. 48–49) entnommen werden:

Hauptthese II: Für alle A und B: Wenn A B logisch ausschließt und wenn $p(A \vee B) \neq 0$, dann gilt: $p(A|(A \vee B)) = p(A) / [p(A) + p(B)]$.

Hauptthese II ist in der hier gewählten Wahrscheinlichkeitstheorie herleitbar.[10] Bolzanos Urnen-Beispiel zur Hauptthese II lautet: "Wenn wir z.B. wissen, daß sich in einer Urne 1000 Kugeln von verschiedenen Farben, aber nur 10 schwarze und eine weiße befinden: so ist die Wahrscheinlichkeit, daß Jemand, der eine einzige Kugel herausgezogen, eine schwarze ergriffen habe, = 10/1000 = 1/100, und daß es die weiße gewesen sey, = 1/1000. Wenn uns nun Jemand, ohne die Farbe der Kugel zu bestimmen, nur mittheilt, daß sie entweder schwarz, oder weiß gewesen; so ist die Wahrscheinlichkeit für das Erstere = 10/11" (p. 184). Das Ergebnis ist offensichtlich korrekt.

Folgendes Korollar zur Hauptthese II ist Bolzano wichtig. Es läßt sich dem Punkt 20) des § 161 der WL II (p. 184) entnehmen.

Korollar zu Hauptthese II: Für alle A und B:
Wenn gilt:
1. $p(A|(A \vee B)) = p(A) / [p(A) + p(B)]$ und
2. $p(A) < 1/2$ und
3. $p(B) < p(A)$;
dann gilt auch:
$p(A|(A \vee B)) > p(A)$.

Das Korollar zu Hauptthese II ist in der hier gewählten Wahrscheinlichkeitstheorie herleitbar.[11]

9. $[p(A) \cdot p(B)] / \{[p(A) \cdot p(B)] + [(1-p(A)) \cdot (1-p(B))]\} < p(B)$ — Aus 8.
10. $p((A \wedge B)|[(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]) < p(B)$ — Aus 1. und 9.

10 Skizze des Beweises für Hauptthese II:

1.	A schließt B logisch aus	Annahme
2.	$p(A \vee B) \neq 0$	Annahme
3.	$p(A|(A \vee B)) = p([A \wedge (A \vee B)]) / p(A \vee B)$	Mittels Definition (8)
4.	$p([A \wedge (A \vee B)]) = p(A)$	Mittels Theorem (3)
5.	$p(A \vee B) = p(A) + p(B)$	Mittels Axiom (3)
6.	$p(A|(A \vee B)) = p(A) / [p(A) + p(B)]$	Aus 3., 4. und 5.

11 Skizze des Beweises für das Korollar zu Hauptthese II:

1.	$p(A|(A \vee B)) = p(A) / [p(A) + p(B)]$	Annahme
2.	$p(A) < 1/2$	Annahme
3.	$p(B) < p(A)$	Annahme
4.	$p(B) \geqslant 0$	Mittels Axiom (1)

2.6 Zur Konsistenz der rekonstruierten Bolzanoschen Wahrscheinlichkeitslehre

Wir haben in 2.3–2.5 festgestellt, daß es Bolzanos Konjunktionsregel, Bolzanos Disjunktionsregel sowie Bolzanos Hauptthese I an einem Antezedens mangelt, das die jeweils nötigen probabilistischen Unabhängigkeitsvoraussetzungen ausdrückt. Dieser Mangel gewinnt dann praktische Relevanz, wenn Bolzanos Konjunktionsregel oder seine Disjunktionsregel oder seine Hauptthese I auf solche Sätze angewendet werden, für welche die Annahme, der eine sei vom anderen probabilistisch unabhängig, falsch ist. In diesen Fällen kann, wie wir gesehen haben, die (rekonstruierte) Bolzanosche Wahrscheinlichkeitslehre zu anderen Ergebnissen als die (hier gewählte) Wahrscheinlichkeitstheorie führen.

Das Fehlen der nötigen probabilistischen Unabhängigkeitsvoraussetzungen hat aber auch noch eine theoretische Relevanz: Dieser Mangel macht die rekonstruierte Bolzanosche Wahrscheinlichkeitslehre zu einer zweiwertigen Wahrscheinlichkeitstheorie, das heißt zu einer Theorie, die jedem Aussagesatz entweder die Wahrscheinlichkeit 1 oder die Wahrscheinlichkeit 0 zuordnet, und trivialisiert sie damit in einer unzumutbaren Weise. Denn gäbe es auch nur einen einzigen Aussagesatz, dem sie eine andere Wahrscheinlichkeit als 1 oder 0 zuordnet, würde sie inkonsistent. Man kann sich diesen Sachverhalt leicht am Beispiel von Bolzanos Konjunktionsregel veranschaulichen.

Wenn gilt: $\mathrm{p}(A) = 1$, dann gilt zwar gemäß Bolzanos Konjunktionsregel:

$$\mathrm{p}(A \wedge A) = \mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(A) = 1 \cdot 1 = 1;$$

und wenn gilt: $\mathrm{p}(A) = 0$, dann gilt zwar gemäß Bolzanos Konjunktionsregel:

$$\mathrm{p}(A \wedge A) = \mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(A) = 0 \cdot 0 = 0;$$

wenn aber etwa gilt: $\mathrm{p}(A) = 1/2$, dann gilt gemäß Bolzanos Konjunktionsregel:

$$\mathrm{p}(A \wedge A) = \mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(A) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4 \neq 1/2;$$

womit aus der Annahme, ein Satz habe die Wahrscheinlichkeit 1/2 und somit eine andere Wahrscheinlichkeit als 0 oder 1, ein Widerspruch gefolgt

5.	$\mathrm{p}(A) > 0$	Aus 3. und 4.
6.	$[\mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B)] > 0$	Aus 4. und 5.
7.	$[\mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B)] < 1$	Aus 2. und 3.
8.	Für alle x, y: Wenn $x > 0$ und $y \geqslant 0$, dann: $x/(x+y) > x$ gdw $x + y < 1$	Algebraisches Gesetz.
9.	$\mathrm{p}(A \mid (A \vee B)) > \mathrm{p}(A)$	Aus 1., 4., 5., 6., 7. und 8.

ist. Allgemeiner: Aus Bolzanos Wahrscheinlichkeitslehre (zumindest in der Form, wie sie hier rekonstruiert worden ist) würde eine inkonsistente Theorie, wenn man die folgende These zu ihr hinzurechnete:

These 12: Es gibt mindestens ein A: $0 < p(A) < 1$.

Zwar hat Bolzano nirgends ausdrücklich ein Postulat des Inhalts aufgestellt, es gebe mindestens einen Satz, der eine Wahrscheinlichkeit größer als 0 und kleiner als 1 hat, doch erhellt aus seinen Beispielen, daß er ein solches Postulat als für selbstverständlich wahr erachtet. Es wäre in der Tat eine eigenartige Wahrscheinlichkeitstheorie, die unter der Annahme der These 12 als inkonsistent herauskäme. Daß die hier rekonstruierte Bolzanosche Wahrscheinlichkeitslehre inkonsistent würde, wenn man These 12 dazunähme, ist jedoch leicht beweisbar.[12] Also darf sie um der Erhaltung der Konsistenz der rekonstruierten Bolzanoschen Wahrscheinlichkeitslehre willen nicht dazugerechnet werden. Dann aber ist die Bolzanosche Wahrscheinlichkeitslehre (zumindest in der hier rekonstruierten Form) eine bloß zweiwertige und damit praktisch entwertete Wahrscheinlichkeitstheorie.

Will man Konsistenz *und* Unendlichwertigkeit, dann muß man die in der rekonstruierten Bolzanoschen Wahrscheinlichkeitslehre vorkommenden und sie an den Rand der Inkonsistenz führenden Bestandteile ausgliedern und durch ihre geeignet abgeschwächten Varianten ersetzen. Damit erhalten wir als das gefilterte Ergebnis der hier vorgenommenen Rekonstruktion die folgende Fassung der Bolzanoschen Wahrscheinlichkeitslehre:

{These 1, These 2, These 3, These 4, These 5, These 6, These 7, These 9, These 11, Hauptthese I′, modifiziertes Korollar zu Hauptthese I′, Hauptthese II, Korollar zu Hauptthese II}.

12 Skizze des Inkonsistenz-Beweises:

1.	Für mindestens ein A: $0 < p(A) < 1$	Aus 2. (nach 8., VB erfüllt)
2.	$0 < p(A) < 1$	Annahme
3.	$p(A) = p(A \wedge A)$	Mittels These 7
4.	$p(A \wedge A) = p(A) \cdot p(A)$	Bolzanos Konjunktionsregel
5.	$p(A) = p(A) \cdot p(A)$	Aus 3. und 4.
6.	Für alle x: Wenn $0 < x < 1$, dann: $x \neq x \cdot x$	Algebraisches Gesetz
7.	$p(A) \neq p(A) \cdot p(A)$	Aus 2. und 6.
8.	Für mindestens ein A: $p(A) = p(A) \cdot p(A)$ und $p(A) \neq p(A) \cdot p(A)$. Widerspruch	Aus 5. und 7.

Literatur

BERG, Jan: *Bolzano's Logic.* – Stockholm, Almqvist & Wiksell 1962.

BERKA, Karel: "Bolzanos Lehre von den Wahrscheinlichkeitsschlüssen", *Teorie rozvoje vedy* 3 (1979), pp. 7–18.

BOLZANO, Bernard: *Lehrbuch der Religionswissenschaft*, ein Abdruck der Vorlesungshefte eines ehemaligen Religionslehrers an einer katholischen Universität, von einigen seiner Schüler gesammelt und herausgegeben. – Sulzbach, J. E. v. Seidel'sche Buchhandlung, 1834.

BOLZANO, Bernard: *Wissenschaftslehre*. In 4 Bänden. Mit einem Nachweis der von Bolzano zitierten Verfasser, Werke und Stellen herausgegeben von Wolfgang Schultz. Band 2. 2. Neudruck der 2. Auflage Leipzig 1929. – Aalen, Scientia Verlag, 1981.

HACKING, Ian: *The Emergence of Probability, a Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference.* – London, Cambridge University Press, 1975.

POPPER, Karl R.: *Logik der Forschung.* Siebente, verbesserte und durch sechs Anhänge vermehrte Auflage. – Tübingen, J. C. B. Mohr (Paul Siebeck), 1982.

SKYRMS, Brian: *Choice and Chance. An Introduction to Inductive Logic.* – Wadsworth Publishing Company, Belmont, 1986.

Dr. Georg J. W. Dorn
Universität Salzburg
Institut für Philosophie
Franziskanergasse 1
A-5020 Salzburg/Austria