LOOGIKA NÄIDISÜLESANDED JA HARJUTUSED

JÜRI EINTALU

LOOGIKA – PUUST JA PUNASELT
oleks samuti võinud olla selle õppematerjali pealkiri, milles püütakse jooniste, värvide, näidis- ja harjutusülesannete, aga ka teooria abil selgitada loogilise analüüsi protsessi.

Sisekaitseakadeemia üliõpilastele loogika aine õpetamiseks mõeldud õppevahend on absoluutne miinimum, mida autori hinnangul peab 21. sajandi alguses loogikast valdama kõrgkooli tudeng.

Samas sobib see õppematerjal ka matemaatika-füüsika eriklasside õpilastele jt loogikast huvitujatele.

SISUKORD

Sisekaitseakadeemia
Kase 61 12012 Tallinn
detsember 2006

1. ARISTOTELESE LOOGIKA

Loogika ajaloost ja -harudest

Antiik-Kreeka mõtlejat Aristotelest (384-322 e.m.a.) peetakse loogikateaduse rajajaks. Kindlasti tunti ja kasutati mõningaid loogikareegleid juba enne Aristotelest. Kuid Aristoteles oli esimene, kes rajas loogika süsteemse teadusena.[1] Sõna "loogika" pärineb samuti kreeka keelest, kuid Aristoteles ise oma õpetust veel selle nimega ei kutsunud.

Osa Aristotelese loogikaalastest mõtetest olid üldarusaadavamad ning need muutusid populaarseks, jäädes aastatuhandeiks loogikaõpetuse nurgakiviks. Seda osa Aristotelese loogikaalastest uurimustest tuntaksegi nime all *Aristotelese loogika.*

Aristotelese loogikat ning selle edasiarendusi tuntakse ka nime all *traditsiooniline loogika.* Kuni XIX sajandi keskpaigani oligi see pea ainus loogika, mida üldiselt tunti.[2]

XIX sajandi teisel poolel hakkas arenema *kaasaegne loogika*, mis tunneb rohkem loogikareegleid kui Aristotelese loogika. Kaasaegset loogikat tuntakse ka nime all *matemaatiline loogika.* Kaasaegse loogika klassikaline osa koosneb *lausearvutusest* ja *predikaatarvutusest.* Aristotelese loogikat on võimalik (mõningate mööndustega) näha kui moodsa predikaatarvutuse üht alamharu.

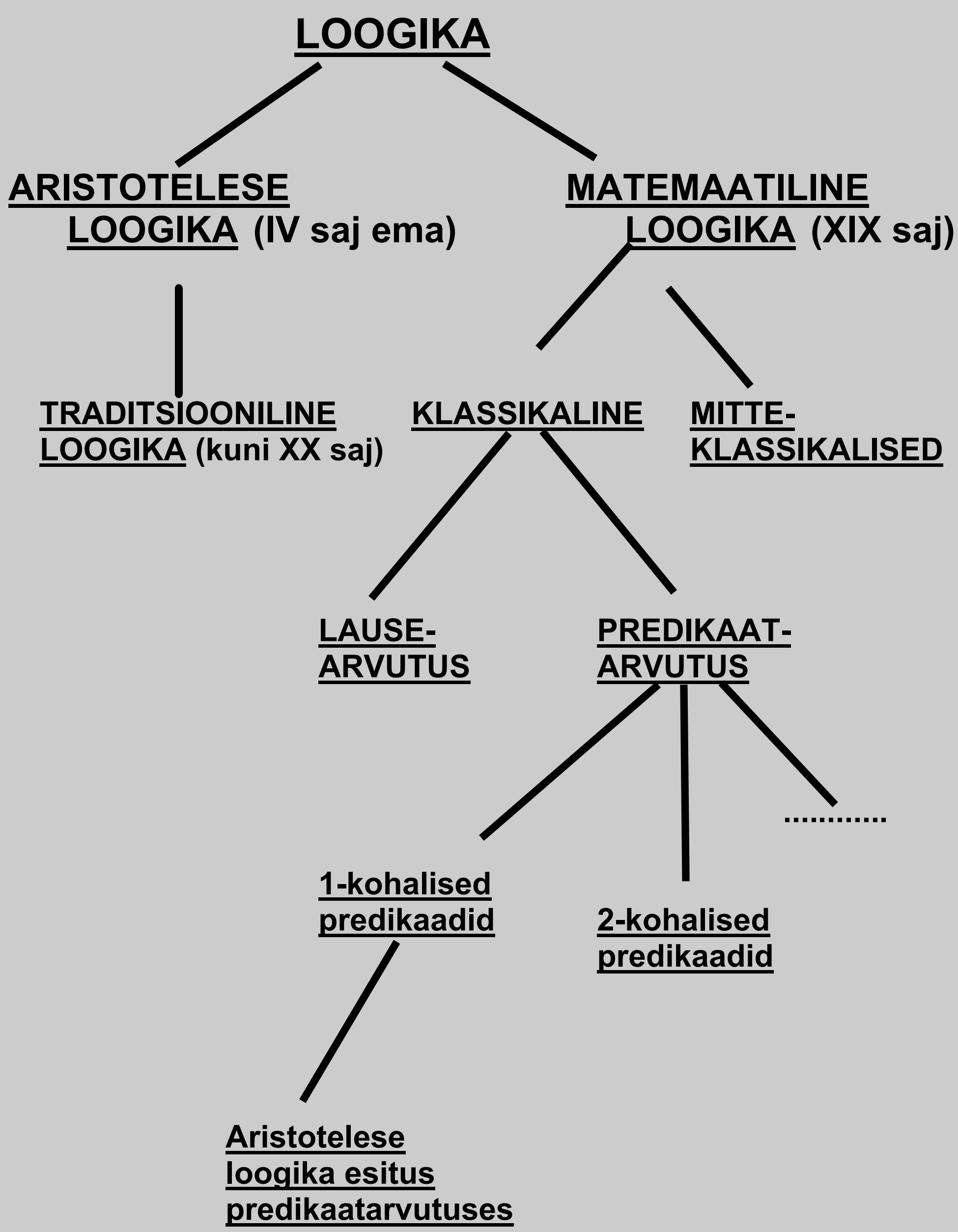
Kaasaegset loogikat jaotatakse *klassikaliseks loogikaks* ja arvukateks *mitteklassikalisteks loogikateks.* Klassikaline loogika peab kinni Aristotelese loogika *kolmest põhiseadusest*, millest lähemalt räägime allpool. Mitteklassikalised loogikad aga kas rikuvad mõnda neist kolmest põhiseadusest või siis tegelevad küsimustega, mida varem polnud põhjalikult uuritud.

Seejuures on nii mõnegi mitteklassikalise loogika juuri leitud juba antiikajast, kaasaarvatud Aristotelese enda kirjutistest.

Vaata ka skeemi allpool.

1 Ka Eukleides (u 300 ema) on mitte geomeetriareeglite leiutaja, vaid esimese süsteemse geomeetriateooria rajaja.

2 Kuid omaette keerukas ajalooline küsimus on see, millist osa Aristotelese tekstidest ning millal ja kus keskajal õieti tunti. Mõned Aristotelese tekstid tõlgiti ladina keelde ju alles pärast ristisõdasid XI sajandil.



Loogika ajaloo ja -harude skeem.

Mõtlemise kolm põhiseadust

Aristoteles rajab oma loogika *kolmele põhiseadusele:*

1. **Samasuse seadus;**
2. **Vastuoluseadus;**
3. **Välistatud kolmanda seadus.**

SAMASUSE SEADUS
nõuab,
et ühe arutluse vältel ei tohi
märkide, sõnade ja fraaside tähendused muutuda.
Igal sõnal peab kogu arutluse vältel olema
üks ja see sama tähendus.

Tänapäeval võiks seda reeglit nimetada pigem semantiliseks (ehk tähendusteoreetiliseks) reegliks.

Samasuse seaduse rikkumist on peetud näiteks poliitilise demagoogia üheks põhivõtteks.

Saab näidata, et kui arutlus rikub samasuse seadust, siis on säärase arutluse abil võimalik "tõestada" ükskõik mida (näiteks seda, et te istute praegu Kuu peal).

NÄITENA 1 vaatleme matemaatilist arvutust.

Juku tähistab $a = \sqrt{(x + 1)}$. Ta jätkab arvutust. Mõne aja pärast tähistab ta $a = \sqrt{x}$. Ta jätkab arvutust ja jõuab absurdsele tulemusele $1 = 0$.

NÄITENA 2 vaatleme järgmist arutlust:

"Kõik eestlased elavad Eestis. Väliseestlased on samuti eestlased. Mõned eestlased elavad Kanadas. Seega mõned eestlased elavad nii Eestis kui Kanadas."

Selles arutluses tähistab väljend "eestlane" kaht erinevat asja: 1) eesti rahvusest isikut; 2) Eestis elavat isikut.

Kui ühel sõnal on mitu erinevat tähendust, siis soovitab Aristoteles kasutusele võtta mitu erinevat sõna, et neid tähendusi omavahel mitte segi ajada. Antud näites sobiks kasutada sõna "eestlane", tähistamaks rahvust ja sõna "eestimaalane", tähistamaks alalist elukohta.

Samasuse seadust on rikutud ka siis, kui kaks erinevat fraasi on loetud samatähenduslikuks, kuigi nad seda pole. Samuti on samasuse seadust rikutud, kui kõneleja mõtleb oma sõnadega üht asja, kuulajad aga teist asja. See võib viia vääritimõistmisele või muuta suhtlemise üldse võimatuks.

Kindlasti on samasuse seadus väga oluline juuras, seadusloomes ja seaduste rakendamisel.

VASTUOLUSEADUS
ütleb,
et kõik vastuolulised laused (mõtted, arutlused) on väärad.
Vastuoluline lause ehk vastuolu (vasturääkivus)
jaatab ja eitab üht ja sama asja korraga.

Kõige lihtsam vastuolu on *eksplitsiitne* ehk *ilmutatud vastuolu.* Viimane on säärase kujuga lause, mille lausekujust endast on kohe näha, et tegemist on vastuoluga. Ilmutatud vastuolu on kujul:

"A ja mitte-A,"

kus *A* on mingi väide ja *mitte-A* selle väite eitus. Seejuures pole oluline, millest räägib väide *A*: säärase kujuga lause on niikuinii väär ja seda olenemata sellest, milline on maailm.

Näiteks lause

"Suurim algarv on olemas ja suurimat algarvu pole olemas."

on kindlasti väär ja seda olenemata sellest, kas siis on või ei ole olemas suurim algarv.

Aristoteles ise sõnastab vastuoluseaduse mitte seadusena väidete kohta, vaid seadusena maailma kohta: "Ükski asi ei saa korraga olla ja samas mitte olla."

Kohati sõnastab Aristoteles samasuse seaduse ja vastuoluseaduse samas lauses: "Ükski asi ei saa ühel ja samal ajal ühes ja selles samas tähenduses olla ja mitte olla." Tõepoolest: lause "*A* ja mitte-*A*" pole vastuolu, kui esimene *A* selles lauses tähendab midagi muud kui teine *A* samas lauses.

Vastuoluseadust on paljud autorid pidanud loogika nurgakiviks.

VÄLISTATUD KOLMANDA SEADUS
ütleb,
et iga väide on kas tõene või väär ja pole mingit kolmandat või vahepealset võimalust.

See seadus on vähemtuntud ja sellele seadusele on ka erandeid, mida avastas juba Aristoteles ise (näiteks väited tuleviku kohta). Just see seadus teeb klassikalise loogika kahevalentseks ja võimaldab seda, mida nüüd armastatakse nimetada digitaalsüsteemiks.

Kui lause pole läbinisti õige, siis loetakse see lause vääraks. Väära lauses võib olla kas vähe või ka palju tõest informatsiooni, kuid kindlasti sisaldab väär lause mingi koguse väärinformatsiooni. Seega on "vahepealsed" võimalused küll olemas, kuid mitte lause tõesuse või vääruse seisukohalt.

Loogiline ruut

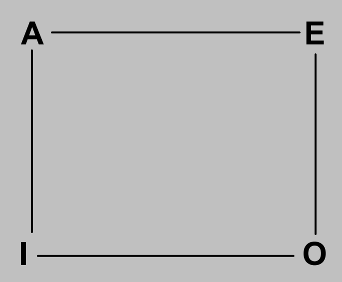
Aristoteles kasutab oma loogikas nelja tüüpi lauseid, mille traditsiooniliseks tähistuseks on saanud vastavalt tähed *A*, *E*, *I* ja *O*:

A – üldjaatav lause;
E – üldeitav lause;
I – osajaatav lause;
O – osaeitav lause.

Näiteks:

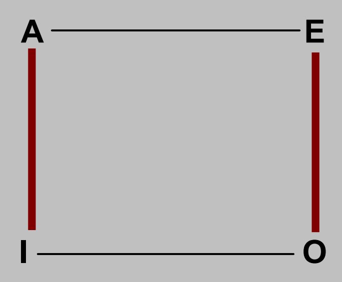
A – Kõik varesed on mustad.
E – Ükski vares pole must (st Iga vares on mitte-must).
I – Mõni vares on must (st Vähemalt üks vares on must).
O – Mõni vares pole must (st Vähemalt üks vares on mitte-must).

XI sajandil leiutas munk Psellos nn *loogilise ruudu,* mille abil on mugav kirjeldada nende lausetüüpide vahelisi seoseid:



Loogiline ruut

Piki ruudu külgi ülevalt alla saab **loogiliselt järeldada:**

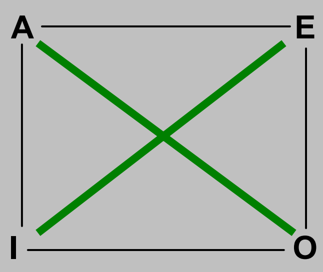


Järeldus ülevalt alla

Kui *A* on tõene, siis on vältimatult tõene ka *I.* (Kui kõik varesed on mustad, siis kindlasti on vähemalt üks vares must.) Kui *E* on tõene, siis on vältimatult tõene ka *O.* (Kui ükski vares pole must, siis kindlasti vähemalt üks vares on mitte-must.)

Alt ülesse järeldada ei saa. Näiteks sellest, et leidub mõni must vares, ei tulene veel, et kõik varesed ilma eranditeta on mustad.

Ruudu diagonaale pidi saame väited, mis on vastastikku teineteise eitused ja moodustavad seega **vastuolulise lausetepaari:**



Diagonaali otstes olevad laused on teineteise eitused

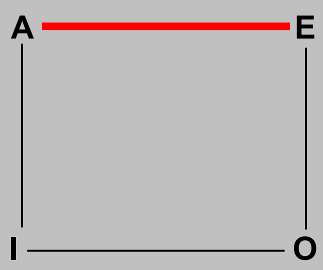
A on *O* eitus ja *O* on *A* eitus. Seega lause "*A* ja *O*" on vastuolu.

Tõepoolest: näiteks ütelda "See pole tõsi, et kõik varesed on mustad" on ju sama, mis ütelda: "Vähemalt üks vares on mitte-must."

Analoogiliselt, *I* on *E* eitus ja *E* on *I* eitus. Seega lause "*I* ja *E*" on vastuolu.

Näiteks ütelda "See pole tõsi, et ükski vares pole must" on ju sama, mis ütelda: "Vähemalt üks vares on must."

Ruudu ülemist külge pidi saame aga nn **vastandid:**



A ja E on teineteise vastandid

Väited *A* ja *E* moodustavad *vastuolu* (ingl k: *contradiction*): kui üks on tõene, siis teine on väär. Kuid nad eitavad teineteist maksimaalselt, nõnda, et nad on teineteise *vastandid* (ingl k: *contraries*).

Tõepoolest: kui üks väidab, et kõik varesed on mustad, teine aga väidab, et kõik varesed on valged (ja seega mitte-mustad), siis kumbki eitab teise väite kogu sisu, pidades seda väidet mitte ainult vääraks, vaid vääraks igas viimases kui üksikasjas.

Ruudu alumine külg mingit loogilist seost ei anna. On täiesti mõeldav selline olukord, kus mõned varesed on mustad ja mõned on mitte-mustad.

Süllogismid

Oma kolmele põhiseadusele rajab Aristoteles oma süsteemi loogilistest järeldustest, mida kutsutakse *süllogismideks*. Süllogisme on palju. Nendega tegelev teooria on *süllogistika*. Kõik süllogismid on kehtivad järeldused, nad on loogiliselt ranged.

Toome klassikalise näite süllogismist nimega BARBARA:

> **Kõik inimesed on surelikud.**
> **Sokrates on inimene.**
> **Sokrates on surelik.**

Siin joone peal on järelduse *eeldused:*

> **Kõik inimesed on surelikud.**
> **Sokrates on inimene.**
> **Sokrates on surelik.**

Kõikidel süllogismidel on kaks eeldust.

Joone all on järelduse *tulem:*

> **Kõik inimesed on surelikud.**
> **Sokrates on inimene.**
> **Sokrates on surelik.**

Tulem on see, mis eeldustest järeldub. Kui kõik inimesed on surelikud ja kui Sokrates on inimene, siis järelikult on Sokrates surelik. Antud eelduste korral ei saa me seda tulemit eitada, sattumata vastuollu juba eeldatuga.

Igal süllogismil on vähemalt üks eeldus kas üldjaatav või siis üldeitav lause. Toodud näites on üks eeldus üldjaatav lause, mis algab väljendiga “kõik” ja sisaldab väljendit “on”:

> **Kõik inimesed on surelikud.**
> **Sokrates on inimene.**
> **Sokrates on surelik.**

Toome ka kaks näidet süllogismidest, mis sisaldavad üldeitavat eeldust:

> **Ükski kala pole imetaja.**
> **Kõik karud on imetajad.**
> **Ükski karu pole kala.**

> **Ükski kala pole imetaja.**
> **Mõned imetajad on karud.**
> **Mõned karud pole kalad.**

Kui süllogismi üks eeldus ütleb midagi üksiku objekti (näiteks Sokrates) kohta, teeb seda ka tulem. Kui süllogismi üks eeldus on väljendiga “mõned”, on seda ka tulem. Kui süllogismi mõlemad eeldused on üldised (väljendiga “kõik” või “ükski”) on seda ka tulem. Kui süllogismi mõlemad eeldused on jaatavad, on seda ka tulem. Kui süllogismi mõni eeldus on eitav (näiteks väljendiga “mitte”), on seda ka tulem.

Kõikidel süllogismidel on nn *kesktermin* – see on omadus, mõiste, liik või hulk, mida mainitakse mõlemas eelduses. Süllogismis BARBARA ülalt on selleks terminiks *inimene:*

Kõik inimesed on surelikud.
Sokrates on inimene.
Sokrates on surelik.

Järelduse tulemis seda terminit enam ei esine.

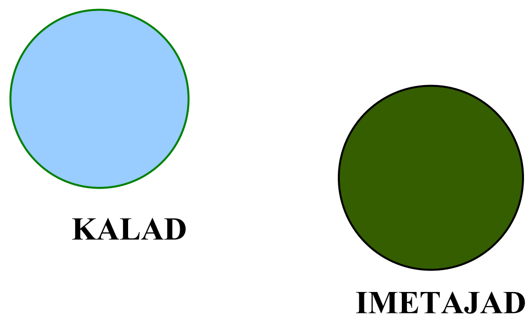
Toome veel ühe näite: "Kõik inimesed on surelikud. Mõned loomad on inimesed. Järelikult: Mõned loomad on surelikud." Ka siin langes kesktermin tulemist välja.

Süllogistika, nii nagu Aristoteles ja tema järgijad seda esitasid, on väga keeruline teooria. Süllogisme jaotatakse mitmesugustesse rühmadesse ja seejärel veel alamrühmadesse (nn *moodused* ja *figuurid*). Et selle teooria abil otsustada, milline järeldus siis on õigesti tehtud, tuleb traditsioonilise loogika õpikus tabeleist näpuga järge vedada ja tähelepanelikult silmitseda kummalisi diagramme. Seejuures reeglistik, mille alusel otsustada, kas järeldus kehtib või mitte, on üsna bürokraatlik ja arusaamatu. Tabeleist uurides saan küll teada, kas järeldus on range, ei saa aga sugugi aru, miks. Vaevalt, et selline tehnika õpetab loogiliselt mõtlema.

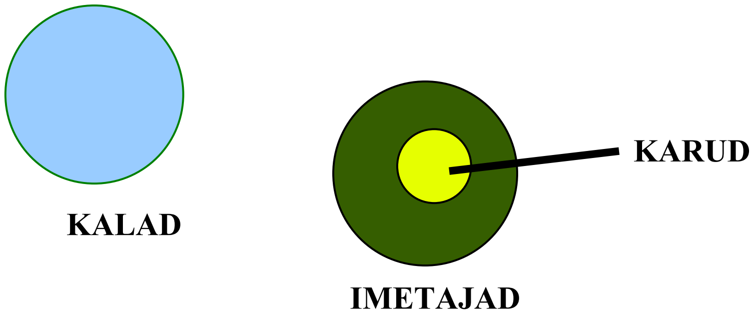
Tänapäeval on matemaatika- ja loogikateadus juba edasi arenenud ja praegu oleks lausa kuritegu nõuda õppijailt, et nad tunneksid neid detaile, mida vanamoodsas süllogistikas käsitletakse.

Geniaalne matemaatik Euler (1707–1783) leiutas nn *Euleri diagrammid*, mille abil saab Aristotelese stiilis järelduste kehtivust kontrollida. Seejärel on matemaatikud ja loogikud leiutanud veel ka *hulgateooria.* Sisuliselt ongi Aristotelese süllogismid hulgateoreetilised seosed. Kuidas kiiresti kindlaks teha, kas mõni esitatud järeldus kehtib või mitte? – Selleks võib kasutada Euleri diagramme või nende modifikatsioone, sisuliselt hulgateoreetilisi jooniseid.

Näitena ülalvaadeldud süllogism kaladest. Esimene eeldus ütleb, et ükski kala pole imetaja. Seega kalade territooriumil (sinine) ja imetajate territooriumil (roheline) puudub ühisosa:



Teine eeldus ütleb, et kõik karud on imetajad. Seega karude territoorium (kollane) ei ulatu välja imetajate territooriumilt:

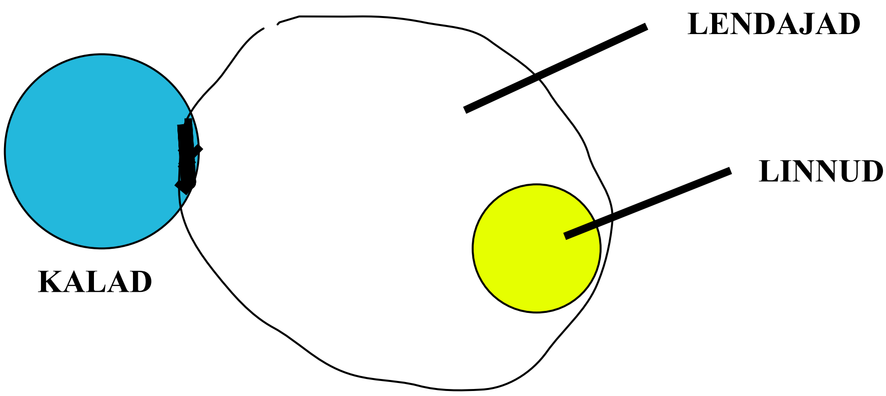


Kuidas me ka ei püüaks, ei õnnestu meil seda diagrammi joonistada nõnda, et karude territooriumil ja kalade territooriumil oleks mittetühi ühisosa. See näitabki, et saame rangelt järeldada, et ükski karu pole kala.

Toome ka näite ühest mittekehtivast järeldusest:

> **Ükski kala pole lind.**
> **Kõik linnud lendavad.**
> **Ükski kala pole lendaja.**

Olgu kalade territoorium sinine, lindude territoorium kollane ja lendajate territoorium valge. Siis antud järelduse eeldustega poleks vastuolus säärane diagramm:



Ülal oleme sodinud musta värviga seda ühist piirkonda, kuhu kuuluvad nii kalad kui ka lendajad. Et see piirkond on tehniliselt võimalik, näitabki meile, et antud järeldus pole loogiliselt range.

Aristotelese süllogismide uurimisel kaasaja loogika ja matemaatika valguses tuleb aga tähele panna, et Aristoteles eeldas, et süllogismides võib rääkida vaid sellistest liikidest, millel on olemas vähemalt üks esindaja. Näiteks ei saa kasutada eeldust kentauride kohta, kuna ühtki kentauri ei eksisteeri. Tänapäeval pole eksistentsi eeldus aga kohustuslik. Nüüd eristatakse faktitõdesid loogikatõdedest, nõnda, et järelduse kehtivust saab uurida ka siis, kui selle eeldused pole faktiliselt tõesed. Kui eksisteerimise eeldus aga teha, siis tuleb see ka eraldi välja kirjutada. Nii võib aga juhtuda, et mõnel Aristotelese süllogismil on siiski mitte kaks, vaid kolm eeldust.

ÜLESANDEID

1. Millist loogikareeglit on arutluses rikutud?

   1.1. Pesemata inimesed on mustad. Kõik mustad on pärit Aafrikast. Seega pesemata inimesed on pärit Aafrikast.

   1.2. See hüpoteetiline elementaarosake kaalub iseendast kaks korda rohkem.

2. Milline järeldus kehtib, milline mitte?

   2.1. Kõik linnud on lendajad. Emud pole lendajad. Seega emud pole linnud.

   2.2. Kõik linnud on lendajad. Seega mõned linnud on lendajad.

   2.3. Kõik elevandid on lendajad. Kõikidel lendajatel on lont. Seega kõikidel elevantidel on lont.

   2.4. Mõned loomad on lendajad. Mõned loomad on ujujad. Seega mõned lendajad on ujujad.

   2.5. Mitte keegi ei tea kõike. Seega pole tõsi, et mõni teab kõike.

   2.6. See pole tõsi, et kõik on ausad. Seega mitte keegi pole aus.

   2.7. Kõik kalad oskavad ujuda. Felix ei oska ujuda. Seega Felix pole kala.

3. Millised eelmise ülesande järeldustest olid Aristotelese süllogismid?

Autori ettepanekud lahendusteks ja vastusteks

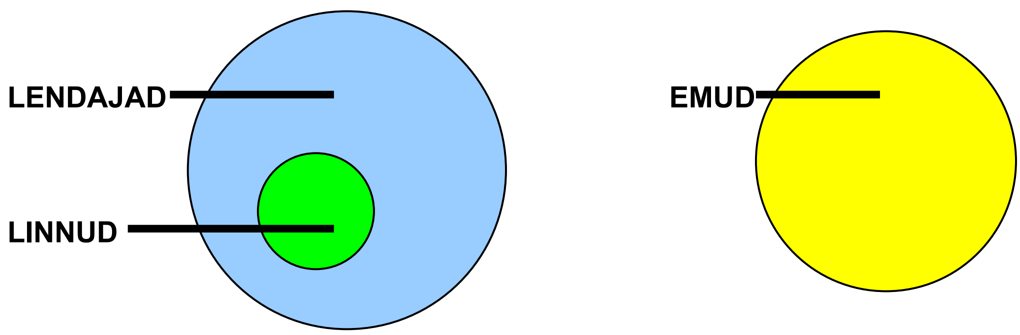
1.1. Rikutud on samasuse seadust. Väljend „must“ esineb siin kahes erinevas tähenduses.
1.2. Rikutud on vastuolu seadust. Kui välja kirjutada varjatud eeldus, et ükski asi ei saa kaaluda iseendast rohkem.

2.1. See järeldus on kehtiv, st loogiliselt range. Iseküsimus, kas järelduse eeldused ja tulem on faktiliselt tõesed.
2.2. See järeldus on kehtiv. Väljend „mõned“ tähendab loogikas: „vähemalt üks“.
2.3. See järeldus on kehtiv. Eeldused on küll faktiliselt väärad. Juhuslikult on see viinud faktiliselt õigele tulemile.
2.4. See järeldus ei kehti. Kuigi tulem on faktiliselt õige, ei tulene ta antud eeldustest.
2.5. See järeldus kehtib.
2.6. See järeldus ei kehti.
2.7. See järeldus kehtib.

3.1. See on süllogism.
3.2. See pole süllogism. Süllogismil on kaks eeldust.
3.3. See on süllogism.
3.4. See pole süllogism. Esiteks on kõik süllogismid kehtivad järeldused, aga see järeldus siin ei kehti. Teiseks on süllogismil vähemalt üks eeldus kas üldjaatav või üldeitav lause.
3.5. See pole süllogism. Süllogismil on kaks eeldust.
3.6. See pole süllogism. Esiteks on süllogism kehtiv järeldus, see järeldus siin aga ei kehti. Teiseks on igal süllogismil kaks eeldust.
3.7. See on süllogism.

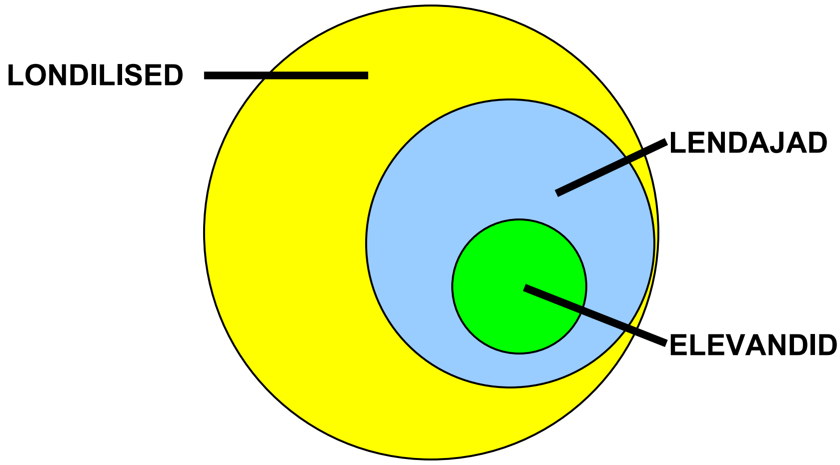
Allpool on toodud ka Euleri diagrammid ülesannetele 2.1; 2.3; 2.4 ja 2.7:

2.1. Lindude piirkond olgu roheline, lendajate piirkond sinine, emude piirkond kollane:

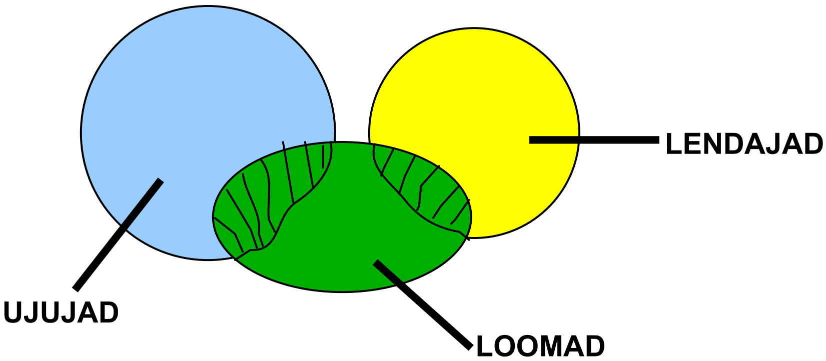


Antud eeldustega kooskõlaliselt pole võimalik rohelist ja kollast ringi lõikuma panna. See tõestabki järelduse kehtivust.

2.3. Elevantide piirkond olgu roheline, lendajate piirkond sinine, londiliste piirkond kollane:

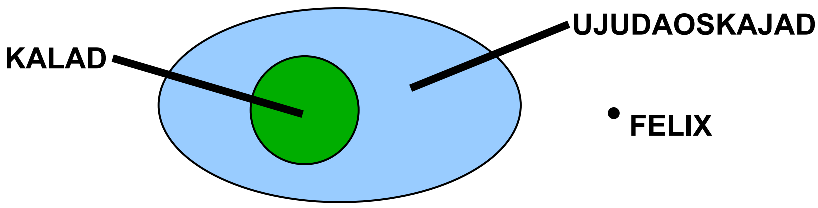


2.4. Loomade piirkond olgu roheline, ujujate piiirkond sinine, lendajate piirkond kollane. Antud eelduste korral on diagramm võimalik joonistada ka nii:



Siin viirutatud osad on mittetühjad ühispiirkonnad (loomad, kes ujuvad; ja loomad, kes lendavad). Kuna diagramm õnnestus joonistada nii, et ujujatel ja lendajatel ei tekkinud mittetühja ühispiirkonda, siis antud eeldustest ei järeldunud rangelt, et mõned lendajad on ujujad.

2.7. Kalade piirkond olgu roheline, ujudaoskajate piirkond sinine, Felixi tähistame musta punktiga:



2. LAUSEARVUTUSE (ehk LA) TEHTED JA TÕESUSTABELID

VÄITED (propositsioonid)

A, *B*, *C*, jne. tähistavad konkreetseid väiteid (propositsioone). Näiteks *A* võib tähistada väidet "Bush on USA president."

TÕEVÄÄRTUSED

Siin uurime kahevalentset (ehk 2-väärtuselist) loogikat, milles iga väide on kas tõene või väär, ilma kolmanda võimaluseta, ja ükski väide pole korraga nii tõene kui väär.

Seega uuritavad väited on tõesed või väärad. Kasutame järgmisi lühendeid:

"tõene" – "t" (või "1")
"väär" – "v" (või "0")

Näiteks väite "Napoleon on USA president" tõeväärtus on *v*.

LOOGILISI TEHTEID

Negatsioon: $\sim A$ ehk: *Mitte-A.* ("*A* on väär.")
(loogiline eitus)

Konjunktsioon: *A & B* ehk: *A ja B.* ("*A* ja *B* mõlemad on tõesed.")
(loogiline "ja")

Disjunktsioon: *A v B* ehk: *A või B.* ("*A* või *B* või mõlemad on tõesed.")
(loogiline "või")

NB! Disjunktsioon on **mittevälistav** "või".

Implikatsioon: $A \rightarrow B$ ehk: *A*-st implitseerub *B*. ("*A* on väär või *B* on tõene."

Loetakse: "Kui *A*, siis *B.*" Siiski *implikatsioon* pole täpselt sama asi mis *konditsionaal* ehk "kui...siis..." lause.

NB! Implikatsioon on siinvaadeldavaist tehteist ainus, mis pole sümmeetriline: $A \rightarrow B$ pole sama asi, mis $B \rightarrow A$.

Ekvivalents: $A \leftrightarrow B$ ehk: *A* parajasti siis kui *B*.
("*A* ja *B* on mõlemad tõesed või mõlemad väärad," "*A* ja *B* on ekvivalentsed," "*A*-l ja *B*-l on ühesugused tõeväärtused.")

Kui alustati väidetest, siis on loogilise tehte tulemuseks samuti väide.

Loogilise tehte tulemusena saadud väite tõeväärtus peab olema määratud *ainult* komponentväidete tõeväärtustega.

Näiteks A & B tõeväärtuse teadmiseks piisab A tõeväärtuse ja B tõeväärtuse teadmisest, ja midagi muud (näiteks väidete A ja B tähendust) polegi enam vaja selleks teada – seega konjunktsioon on loogiline tehe.

Aga näiteks lause "*A*, sest et *B*" puhul võin ma küll teada, et A ja B on mõlemad tõesed, ent ikka veel ei pruugi ma teada, kas väites B kirjeldatud sündmus põhjustas väites A kirjeldatud sündmuse. Seega "... sest et ..." ei ole loogikatehe.

NÄITEID LOOGILISTEST TEHETEST

Tähistagu märgid A ja B järgmisi väiteid:

A – Ahi köeb.
B – Päike kütab tuba.

Siis võime väidetest A ja B loogiliste tehete abil moodustatud lauseid lugeda järgnevalt:

$\sim A$	–	Ahi ei köe.
A & B	–	Ahi köeb ja päike kütab tuba. ("Miks siin nii palav on?" – "Sest et ahi köeb ja päike kütab tuba.")
$A \vee B$	–	Ahi köeb või päike kütab tuba (või mõlemat). Ahi köeb ja/või päike kütab tuba. ("Miks tuba külm ei olnud?" – "Ju siis keegi küttis ahju või soojendas päike tuba, aga võibolla soojendasid tuba nii ahi kui ka päike.")

A – Trammirööbas on kuumenenud.
B – Trammirööbas on pikenenud.

$A \rightarrow B$	–	Kui trammirööbas on kuumenenud, siis on ta pikenenud. TÄPSEMALT: Trammirööbas pole kuumenenud või on ta pikenenud.
$A \leftrightarrow B$	–	Trammirööbas on kuumenenud parajasti siis (s.t siis ja ainult siis), kui ta on pikenenud. Kui trammirööbas on kuumenenud, siis on ta pikenenud ja vastupidi: kui trammirööbas on pikenenud, siis on ta kuumenenud. Trammirööbas on kuumenenud ja pikenenud või ta pole ei kuumenenud ega pikenenud.

TÕESUSTABELITE KOOSTAMINE

Ülemisse vasakusse nurka tõesustabelis kirjutame üksteise järel vasakult paremale need väited – komponentväited –, millest on loogiliste tehete abil moodustatud uusi väiteid. Teisisõnu, tabeli sellesse nurka paigutatakse need väited, mille tõususest või väärusest sõltub meid huvitava avaldise tõesus või väärus.

Kui komponentväiteid on vaid üks, näiteks väide *A*, siis näeb tabel sel etapil välja nii:

A	

Kui komponentäiteid on kaks, näiteks väited *A* ja *B*, siis näeb tabel sel etapil välja nii:

A B	

Jne.

Alumisse vasakusse nurka tabelis kirjutatakse komponentväidete kõik võimalikud tõeväärtuste kombinatsioonid. Eesmärgiks on saavutada, et iga võimalik kombinatsioon oleks esindatud vähemalt ühe korra ja ükski kombinatsioon ei esineks mitu korda. Seega iga võimalik kombinatsioon peab esinema täpselt ühe korra.

Kombinatoorikast saame üle võtta järgmise reegli:

Kui komponentväidete arv on n,
siis komponentväidete tõeväärtuste t *ja* v *võimalike kombinatsioonide arv on* 2^n.

Niisiis, kui tegemist on ühe komponentäitega *A*, siis on võimalike kombinatsioonide arv $2^1 = 2$ ja vastavalt on ka tõesustabeli alumises vasakus nurgas *2* rida.

Kui tegemist on kahe komponentväitega *A* ja *B*, siis on võimalike kombinatsioonide arv $2^2 = 4$ ja tõesustabeli alumises vasakus nurgas on *4* rida.

Kui tegemist on kolme komponentväitega *A*, *B* ja *C*, siis on võimalike kombinatsioonide arv $2^3 = 8$ ja tõesustabeli alumises vasakus nurgas on *8* rida.
Iga kord, kui lisada üks komponentväide, kahekordistub all vasakul nurgas ridade arv. Ent reaalselt keegi rohkem kui 8-realisi kohmakaid tabeleid välja ei kirjuta.

Kui meil on *üks* komponentväide *A*, siis tuleb tabeli alumisse vasakusse nurka *2* rida. Täpselt pooled neist ridadest peavad vastama tõeväärtusele *t* ja pooled tõeväärtusele *v*. Kirjutamist alustame tõeväärtusest *t* ülevalt alla, saades sel etapil järgmise tabeli:

A	
t	
v	

Iga võimalik olukord esineb siin täpselt *1* kord.

Kui meil on *kaks* komponentväidet *A* ja *B*, siis tuleb tabeli alumisse vasakusse nurka *4* rida. Selles nurgas alustame kirjutamist paremalt poolt, seega *B* alt. Täpselt pooltel juhtudel peab *B* tõeväärtus olema *t* ja pooltel juhtudel *v*. Seega kahes reas peab *B* olema tõene ja kahes reas väär. Kirjutamist alustame ülevalt alla tõeväärtusest *t* ja kirjutame selle tõeväärtuse kaks korda järjest, seejärel aga kaks korda järjest tõeväärtuse *v*. Tabel näeb seejärel välja nõnda:

A	**B**	
	t	
	t	
	v	
	v	

Seejärel liigume vasakule poole ja kirjutame *A* alla (paremalt teise väite alla) ülevalt alla tõeväärtused *t* ja *v*, alustades väärtusest *t* – aga nüüd kaks korda sagedamini, seega mitte 2-kaupa, nagu *B* alla, vaid 1-kaupa, üle ühe, saades järgmise tabeli:

A	**B**	
t	**t**	
v	**t**	
t	**v**	
v	**v**	

Kontrollimisel selgub, et oleme selle kombinatoorika tehnilise nipiga tõepoolest saavutanud olukorra, kus tõeväärtuste iga võimalik kombinatsioon esineb täpselt *1* korra. Näiteks olukorda, kus esimene väide *A* on tõene ja teine väide *B* on väär, kirjeldab 3. rida, ja üheski teises reas pole seda olukorda kirjeldatud:

A	**B**	
t	t	
v	t	
t	**v**	
v	v	

Kui meil on *kolm* komponentväidet *A*, *B* ja *C*, siis tuleb tabeli alumisse vasakusse nurka *8* rida. Kirjutamist alustame paremalt poolt, seega *C* alt, liikudes ülevalt alla. Täpselt pooltel juhtudel peab *C* tõeväärtus olema *t*. Nii kirjutamegi *C* alla *4* korda järjest *t* ja seejärel *4* korda järjest *v*. Seejärel näeb tabel välja nii:

A	B	C	
		t	
		t	
		t	
		t	
		v	
		v	
		v	
		v	

Järgnevalt kirjutame *B* alla vaheldumisi tõeväärtused, alustades väärtusest *t*, aga kirjudes nüüd kaks korda sagedamini, seega 2-kaupa:

A	B	C	
	t	t	
	t	t	
	v	t	
	v	t	
	t	v	
	t	v	
	v	v	
	v	v	

Lõpuks kirjutame *A* alla veel kaks korda sagedamini, s.o. üle ühe:

A	B	C	
t	t	t	
v	t	t	
t	v	t	
v	v	t	
t	t	v	
v	t	v	
t	v	v	
v	v	v	

Kontrollimisel selgub, et oleme sedasi tõesti saavutanud olukorra, kus iga võimalik kombinatsioon esineb täpselt *1* korra. Näiteks olukorda "*A* on tõene, *B* on tõene, *C* on väär" kirjeldab 5. rida, ja üheski teises reas pole seda olukorda kirjeldatud:

A	B	C	
t	t	t	
v	t	t	
t	v	t	
v	v	t	
t	**t**	**v**	
v	t	v	
t	v	v	
v	v	v	

Paremasse ülemisse nurka tõesustabelis kirjutame selle avaldise, mis on komponentväidetest moodustatud ja mille puhul me uurime, kuidas tema tõeväärtus sõltub komponentväidete tõeväärtustest.

Näiteks väide *Mitte-A* on moodustatud ühest väitest *A* ja seega kirjutame tabeli ülemisse parempoolsesse nurka sümbolitega ~*A*:

A	**~A**
t	
v	

Väide *A või B* (mittevälistav "või") on moodustatud väidetest *A* ja *B* ja tabeli ülemisse parempoolsesse nurka kirjutame sümbolitega *A v B:*

A	**B**	**A v B**
t	t	
v	t	
t	v	
v	v	

Paremasse alumisse nurka tõesustabelis kirjutame uuritava avaldise tõeväärtused ridade kaupa: igasse ritta sellise tõeväärtuse, nagu sellel avaldisel selles reas on, vastavalt komponentväidete tõeväärtustele selles reas.

Näiteks väite *Mitte-A* jaoks saame sellise lõplikult täidetud tabeli:

A	**~A**
t	**v**
v	**t**

Väite *A või B* jaoks aga saame sellise lõpetatud tabeli:

A	**B**	**A v B**
t	t	**t**
v	t	**t**
t	v	**t**
v	v	**v**

Tabelit saab mõtestada, lugedes ridade kaupa vasakult paremale.

Näiteks *Mitte-A* tabeli esimesest reast loeme, et kui *A* on tõene, siis *Mitte-A* on väär:

A	**~A**
t	**v**
v	t

ja selle tabeli teisest reast loeme, et kui *A* on väär, siis *Mitte-A* on tõene:

A	**~A**
t	v
v	**t**

Näiteks, kui *A* väidab: “Päike paistab,” siis selle tabeli esimesest reast loeme:

> Kui see on tõsi, et päike paistab, siis pole see tõsi, et päike ei paista.

Selle tabeli teisest reast loeksime siis aga:

> Kui see pole tõsi, et päike paistab, siis on see tõsi, et päike ei paista.

Tabeleid saab aga analüüsida ka paremalt vasakule. Nii saame antud tabeli esimese rea – mis on siin ainus rida, milles ~*A* on väär, põhjal öelda:

> Kui see pole tõsi, et päike ei paista, siis on see tõsi, et päike paistab.

Tabeli teise rea – mis on siin ainus rida, milles ~*A* on tõene, põhjal saame aga öelda:

> Kui see on tõsi, et päike ei paista, siis pole see tõsi, et päike paistab.

A või B tabeli 3. realt saame lugeda, et kui *A* on tõene ja *B* on väär, siis on *A v B* tõene:

A	B	A v B
t	t	t
v	t	t
t	**v**	**t**
v	v	v

Ka seda tabelit saab analüüsida paremalt vasakule. Näiteks huvitab meid, millal on tõene väide *A v B*. Näeme, et selline olukord esineb vaid kolmes esimeses reas:

A	B	A v B
t	t	**t**
v	t	**t**
t	v	**t**
v	v	v

Seega on *A v B* tõene vaid juhul, kui esineb üks kolmest komponentväidete tõeväärtuskombinatsioonist:

A	B	A v B
t	**t**	t
v	**t**	t
t	**v**	t
v	v	v

Samuti võime *A v B* tabelist näha, et *A v B* on väär vaid 4. reas:

A	B	A v B
t	t	t
v	t	t
t	v	t
v	v	**v**

Seega väide *A või B* (mittevälistav "või") on väär vaid siis, kui nii *A* kui ka *B* on väärad (ja just nii on endale mugav meelde jätta disjunktsiooni definitsiooni.):

A	B	A v B
t	t	t
v	t	t
t	v	t
v	v	v

LA TEHTED DEFINEERITAKSE TÕESUSTABELITEGA

Tänapäeval antakse LA loogiliste tehete täpsed definitsioonid tõesustabelite abil järgnevalt:

Negatsioon:

A	~A
t	v
v	t

Konjukntsioon, disjunktsioon, implikatsioon ja ekvivalents:

A	B	A & B	A v B	A→B	A↔B
t	t	t	t	t	t
v	t	v	t	t	v
t	v	v	t	v	v
v	v	v	v	t	t

Konjuktsioon ***A & B*** on tõene siis ja ainult siis, kui *A* ja *B* on mõlemad tõesed.

Disjunktsioon ***A v B*** on väär siis ja ainult siis, kui *A* ja *B* on mõlemad väärad.

Ekvivalents ***A↔B*** on tõene siis ja ainult siis, kui *A* ja *B* tõeväärtused on ühesugused.

Implikatsioon ***A→B*** on väär siis ja ainult siis, kui implikatsiooni märgist → vasakulpoole olev avaldis (nn. "antetsedent") on tõene ja paremapool olev avaldis (nn "konsekvent") on väär. Teisisõnu: kui *A* on väär, siis on ***A→B*** tõene, kui aga *A* on tõene, siis on ***A→B*** tõeväärtus samasugune nagu *B*-l.

Implikatsiooni ***A→B*** võib lugeda lausena "Kui *A*, siis *B*," kusjuures seda lauset on siin muudetud nõnda, et ta lihtsalt loetakse tõeseks juhul, kui *A* on väär. Arusaadavalt, olukord, kus *A* on tõene ja *B* on väär, väärab lause "Kui *A*, siis *B*".

Tüüpiline viga:
Implikatsioon ei ole sümmeetriline tehe. Hoolikalt tuleb jälgida, milline avaldis on kirjutatud märgist → vasakule poole, milline avaldis aga paremale poole. Järgnevas tabelis on ***A→B*** tulp kirjutatud õigesti ja värvitud roheliseks, ***B→A*** tulp on aga värvitud punaseks, kuna algajale tüüpilise veana on see tulp kirjutatud valesti: *A* ja *B* järjekorda on ekslikult vaadatud mitte implikatsioonimärgi enda juurest, vaid tabeli vasakpoolsest ülemisest nurgast:

		õigesti	valesti
A	**B**	**A→B**	**B→A**
t	**t**	**t**	**t**
v	**t**	**t**	**t**
t	**v**	**v**	**v**
v	**v**	**t**	**t**

Järgmises tabelis on ***B→A*** tõeväärtused aga kirjutatud õigesti – sest on arvestatud seda, et tabeli ülal vasakus nurgas on väidete järjekord vastupidine sellele järjekorrale, millises nad on kirjutatud tabeli ülemises parempoolses nurgas implikatsioonimärgi → suhtes:

		õigesti
A	**B**	**B→A**
t	**t**	**t**
v	**t**	**v**
t	**v**	**t**
v	**v**	**t**

3. LAUSEARVUTUSE VALEMID

Lausearvutuse valemid

Lausearvutuses nimetatakse *valemiks* sama asja, mida matemaatikas nimetatakse (matemaatiliseks) avaldiseks. Valemiks on iga lihtne väide või lihtsatest väidetest loogiliste tehete abil moodustatud väide. Kui *A*, *B* ja *C* on mingid väited, siis valemiks on näiteks lihtne väide

$$A,$$

või keerulisem väide

$$A \vee B,$$

aga ka mitme tehte järjestikuse sooritamise tulemusena saadud väide

$$(A \vee B) \,\&\, C.$$

Edaspidi huvitavadki meid eelkõige sellised valemid, mis on moodustatud rohkem kui ühe tehte abil.

Tehete järjekord

Ühes anekdoodis vastas kohtunik timuka küsimusele, mida teha mõrvassüüdistatuga, kirjaga: “Vabaks lasta, mitte üles puua!” Kahjuks asetas ta oma kirjas koma valesse kohta: “Vabaks lasta mitte, üles puua!” – Siin sai probleemseks, millisele lause osale rakendus eitus “mitte”.

Analoogiliselt on mõnikord probleemseks loogiliste tehete järjekord kõnekeeles öeldud või kirjutatud lausetes.

Kujutlegem olukorda, milles liikluseeskirjad sisaldaksid järgmist lauset:

Siis tuleb sõita otse või pöörata vasakule ja anda signaali.

Kas siis: 1) Tuleb sõita otse või pöörata vasakule ja anda signaali mõlemal juhul? Või: 2) Tuleb sõita otse või pöörata signaali andes vasakule?

Loogika sümbolkeeles kasutatakse järgmisi kokkuleppeid tehete järjekorrale:

Sulgudes asetsevad tehted tuleb sooritada kõigepealt.

Kui eituse märgi järelt ei alga sulg, siis eituse tehe tuleb sooritada kõige enne, ja ta rakendub vaid eituse märgile vahetult järgnevale väitele.

Need kaks reeglit on samasugused, nagu sulgude kasutamise reegel ja miinusmärgi kasutamise reegel matemaatikas.

Näitena interpreteerime mõningaid valemeid:

(A v B) & C	–	*"A ja/või B on tõene ja lisaks eelöeldule on C tõene."*
A v (B & C)	–	*"A on tõene ja/või B ja C on mõlemad tõesed."*
~(B v C)	–	*"Pole tõsi, et B ja/või C."*
~B v C	–	*"B on väär ja/või C on tõene."*

Märgime siin, et viimane valem *~B v C* on esitatav ka pikemal kujul *(~B) v C*. Viimased kaks valemit on loetavad ka nii:

~(B v C) = *mitte-(B v C),*

~B v C = *mitte-B või C.*

Tehete järjekorra määramiseks on mugav kasutada **numbreid tehete kohal.** Ülaltoodud näidete jaoks saame siis järgmise kirjapildi:

$(A \overset{1}{v} B) \overset{2}{\&} C$ $\qquad$ $A \overset{2}{v} (B \overset{1}{\&} C)$

$\overset{2}{\sim}(B \overset{1}{v} C)$ $\qquad$ $\overset{1}{\sim}B \overset{2}{v} C$

Naasegem nüüd oma näite juurde hüpoteetilistest liikluseeskirjadest. Esitatud kohustusliku sõiduviisi kirjeldamiseks võtame kasutusele järgmise tähistuse:

A	–	*Sõidetakse otse.*
B	–	*Pööratakse vasakule.*
C	–	*Antakse signaali.*

Siis ebamäärasele lausele "Tuleb: Sõita otse või pöörata vasakule ja anda signaali" vastab avaldis

A v B & C.

Selline avaldis ei olegi LA valem,
sest on LA jaoks grammatiliselt ebakorrektselt kirjutatud:
tehete järjekord on siin jäänud määramata.

Avaldis *(A v B) & C* oleks aga grammatiliselt korrektne ja vastaks reeglile, milles kirjeldatud kohustuslik olukord on: "Sõidetakse otse või pööratakse vasakule ja mõlemal juhul antakse signaali."

Valem *A v (B & C)* vastaks reeglile, milles kirjeldatud kohustuslik olukord on: "Sõidetakse otse või pööratakse signaali andes vasakule."

Valem *~(B v C)* ütleks, et pole tõsi, et: pööratakse vasakule ja/või antakse signaali.
Valem *~B v C* ütleks, et vasakule ei pöörata ja/või antakse signaali.

Valemite arvutamine

Kuidas valemeid (täpsemalt: järjestikuseid tehteid) tõesustabelitega arvutatakse? Näitena uurime eelmises punktis vaadeldud valemit

$$(A \vee B) \mathbin{\&} C.$$

Tabeli saame kiiresti täita kuni järgmise faasini:

A	B	C	(A v B) & C
t	t	t	
v	t	t	
t	v	t	
v	v	t	
t	t	v	
v	t	v	
t	v	v	
v	v	v	

Järgnevalt on arukas ja lausa kohustuslik **märkida tabeli ülemises parempoolses nurgas, uuritava valemi kohal, numbritega tehete sooritamise järjekord:**

A	B	C	1 2 (A v B) & C
t	t	t	
v	t	t	
t	v	t	
v	v	t	
t	t	v	
v	t	v	
t	v	v	
v	v	v	

See hõlbustab arvutamist ja võimaldab valminud tabelit iseendal ning teistel hiljem kontrollida, sest nõnda saame protokolli tulpade arvutamise järjekorrast. Keerulisematel juhtudel ei saa tehete järjekorda tabelis valemi kujust välja lugeda isegi siis, kui arvutused on vigadeta, mistõttu numeratsioon on siis eriti vajalik.

Kuigi valmis tabelit mõistame me, lugedes seda ridu pidi vasakult paremale, **on tabeli täitmisel mugavam arvutada hoopiski ülevalt alla, tulpade kaupa, sest nõnda saame me teha ühe ja sama tehte kõikidele ridadele järjest.**

Niisiis arvutame kõigepealt disjunktsiooni *A v B* tulba, vaadates selleks *A* ja *B* tõeväärtusi tabeli vasakust osast, liikudes seejuures ülevalt alla:

A	B	C	1 (A v B)	2 & C
t	t	t	t	
v	t	t	t	
t	v	t	t	
v	v	t	v	
t	t	v	t	
v	t	v	t	
t	v	v	t	
v	v	v	v	

Disjunktsioon *A v B* on siin väär vaid neis ridades, milles *A* ja *B* on mõlemad väärad:

A	B	C	1 (A v B)	2 & C
t	t	t	t	
v	t	t	t	
t	v	t	t	
v	v	t	v	
t	t	v	t	
v	t	v	t	
t	v	v	t	
v	v	v	v	

Järgnevalt peame saadud tulpa numbriga *1* tõlgendama tervikliku väite tulbana – justnagu asetseks ta tabeli vasakpoolses osas. Niisiis on meil vaja arvutada tulba *1* konjunktsioon *C*-tulbaga tabeli vasakpoolsest osast.

Vilunum arvutaja võib selle protseduuri sooritada peast, kirjutades kohe numbri *2* alla konjunktsioonitulba.

Algajale on aga lihtsam alustada sellest, et ülevalolevas tabelis võib *C* tulba tabeli vasakpoolsest osast parempoolsesse osasse väite *C* alla üle kanda:

A	B	C	1 (A v B)	2 &	C
t	t	t	t		t
v	t	t	t		t
t	v	t	t		t
v	v	t	v		t
t	t	v	t		v
v	t	v	t		v
t	v	v	t		v
v	v	v	v		v

Seejärel tuleb tulpa *1* võrrelda *C* tulbaga, et arvutada nende kahe tulba vahele nende konjunktsioon tulbaks *2*. Konjunktsiooni arvutamisel lähtume konjunktsiooni definitsioonist, mille järgi saame tõeväärtuse *t* vaid juhul, kui nii vasakul- kui paremalpool konjunktsioonimärki on väärtus *t*. Sedasi saamegi tabeli valmis:

A	B	C	1 (A v B)	2 &	C
t	t	t	t	**t**	t
v	t	t	t	**t**	t
t	v	t	t	**t**	t
v	v	t	v	**v**	t
t	t	v	t	**v**	v
v	t	v	t	**v**	v
t	v	v	t	**v**	v
v	v	v	v	**v**	v

Valemi kohale kirjutatud numbritest suurima numbri all olev tulp on arvutuse lõpptulemus, mis iseloomustab seda valemit tervikuna.

Ülalolevas tabelis on suurimaks numbriks *2*. **Otstarbekas on valmis tabelis kirjutada suurima numbriga tulp rõhutatult,** nagu see ülal ongi tehtud.

Ülaolevas tabelis on konjunktsioonitulp *2* tõene vaid neis ridades, kus konjunktsioonimärgist vasakul- ja paremalpool on kummaski tulbas tõeväärtuseks *t:*

A	B	C	1 (A v B)	2 &	C
t	t	t	**t**	**t**	**t**
v	t	t	**t**	**t**	**t**
t	v	t	**t**	**t**	**t**
v	v	t	v	v	t
t	t	v	t	v	v
v	t	v	t	v	v
t	v	v	t	v	v
v	v	v	v	v	v

Selle tabeli abil saame vasakult paremale lugedes teada näiteks seda, et kui *A* on tõene, *B* on tõene ja *C* on väär (*5.* rida), siis on väide *(A v B) & C* väär:

A	B	C	1 (A v B)	2 &	C
t	t	t	t	**t**	t
v	t	t	t	**t**	t
t	v	t	t	**t**	t
v	v	t	v	**v**	t
t	**t**	**v**	t	**v**	v
v	t	v	t	**v**	v
t	v	v	t	**v**	v
v	v	v	v	**v**	v

Samuti näeme, et väide *(A v B) & C* on tõene vaid esimeses kolmes reas:

			1	2	
A	**B**	**C**	**(A v B)**	**&**	**C**
t	t	t	t	**t**	t
v	t	t	t	**t**	t
t	v	t	t	**t**	t
v	v	t	v	**v**	t
t	t	v	t	**v**	v
v	t	v	t	**v**	v
t	v	v	t	**v**	v
v	v	v	v	**v**	v

Tabelit paremalt vasakule lugedes saame aga teada, millistel tingimustel saab väide *(A v B) & C* olla tõene:

			1	2	
A	**B**	**C**	**(A v B)**	**&**	**C**
t	**t**	**t**	t	**t**	t
v	**t**	**t**	t	**t**	t
t	**v**	**t**	t	**t**	t
v	v	t	v	**v**	t
t	t	v	t	**v**	v
v	t	v	t	**v**	v
t	v	v	t	**v**	v
v	v	v	v	**v**	v

Muuhulgas näeme siit, et alati, kui *(A v B) & C* on tõene, on tõene ka *C*.

Järgnevalt võrdleme ühes ja samas tabelis kahte väliselt sarnast valemit

(A v B) & C ning *A v (B & C)*.

Lõppkujul saame järgmise tabeli:

			1	2			2	1
A	**B**	**C**	**(A v B)**	**&**	**C**	**A**	**v**	**(B & C)**
t	t	t	t	**t**	t	t	**t**	t
v	t	t	t	**t**	t	v	**t**	t
t	v	t	t	**t**	t	t	**t**	v
v	v	t	v	**v**	t	v	**v**	v
t	t	v	t	**v**	v	t	**t**	v
v	t	v	t	**v**	v	v	**v**	v
t	v	v	t	**v**	v	t	**t**	v
v	v	v	v	**v**	v	v	**v**	v

Selle tabeli abil saame valemeid *(A v B) & C* ning *A v (B & C)* võrrelda, võrreldes selleks omavahel kummagi valemi suurima numbriga tulpa (ülal on need lõpptulbad esitatud rõhutatult). Võrdluse tulemusena märkame erinevust *5.* ja *7.* reas:

			1	2			2	1
A	**B**	**C**	**(A v B)**	**&**	**C**	**A**	**v**	**(B & C)**
t	t	t	t	**t**	t	t	**t**	t
v	t	t	t	**t**	t	v	**t**	t
t	v	t	t	**t**	t	t	**t**	v
v	v	t	v	**v**	t	v	**v**	v
t	**t**	**v**	t	**v**	v	t	**t**	v
v	t	v	t	**v**	v	v	**v**	v
t	**v**	**v**	t	**v**	v	t	**t**	v
v	v	v	v	**v**	v	v	**v**	v

Nende kahe rea põhjal saame ütelda, et kui *A* on tõene ja *C* on väär, siis on olenemata *B* tõeväärtusest valemite *(A v B) & C* ning *A v (B & C)* tõeväärtused erinevad: neist esimene on siis väär ja teine on tõene.
Näiteks lause

Ma ei mäleta täpselt, kas sõitsin otse või pöörasin vasakule,
aga igatahes andsin ma signaali.

on väär, kui ma sõitsin otse, aga signaali ei andnud.

Seevastu lause

Ma ei mäleta täpselt, aga igatahes sõitsin ma otse
või pöörasin signaali andes vasakule.

on tõene, kui ma sõistin otse, aga signaali ei andnud.

Kuna valemite *(A v B) & C* ning *A v (B & C)* tulbad ülal tabelis ei ühti täielikult, siis ei saa täielikult kattuda ka selliste valemitega väljendatud väidete mõte (kui märkidel *A*, *B* ja *C* on kummaski valemis sama tähendus). Erineval viisil väljendatud väited ei saa ju olla täpselt sama mõttega, kui kas või teoreetiliseltki on võimalikud sellised olukorrad, kus üks neist väidetest on tõene aga teine mitte.

Lõpuks arvutame veel näitena tabeli valemile

(A v B) & (A v C).

Siin pole kokkulepetega ära määratud, kummas sulus tuleb tehe teha esimesena. Seega on meil võimalik arvutada omal äranägemisel kas viisil

1 3 2
(A v B) & (A v C)

või viisil

2 3 1
(A v B) & (A v C).

Tulemus tuleks ikka samasugune.

Valime vasakult paremale arvutamise tee. Lõplik tabel näeb siis välja sedasi:

A	B	C	1 (A v B)	3 &	2 (A v C)
t	t	t	t	**t**	t
v	t	t	t	**t**	t
t	v	t	t	**t**	t
v	**v**	**t**	v	**v**	t
t	t	v	t	**t**	t
v	**t**	**v**	t	**v**	v
t	v	v	t	**t**	t
v	**v**	**v**	v	**v**	v

Roheliseks on ülal värvitud need vähemuses olevad read, mille puhul väide *(A v B) & (A v C)* on väär. Märkame, et kõikides nendes ridades on *A* väär:

A	B	C	1 (A v B)	3 &	2 (A v C)
t	t	t	t	**t**	t
v	t	t	t	**t**	t
t	v	t	t	**t**	t
v	**v**	**t**	v	**v**	t
t	t	v	t	**t**	t
v	**t**	**v**	t	**v**	v
t	v	v	t	**t**	t
v	**v**	**v**	v	**v**	v

Valemite arvutamisel on kasulik teada veel järgmist:

Nagu ka matemaatikas, on tehete järjekorda võimalik fikseerida, kasutades mitmekordseid sulge.

Näiteks:

$$\overset{1}{}\quad\overset{2}{}\quad\overset{3}{}$$
$$[(A \rightarrow B)\ \&\ A] \rightarrow B.$$

Nagu ka matemaatikas korrutamistehtega ja liitmistehtega: mitme järjestikuse konjunktsiooni puhul ja mitme järjestikuse disjunktsiooni puhul pole komponentväidete järjekord ja tehete järjekord olulised.

Näiteks:

$$A\ \&\ B\ \&\ C = (A\ \&\ B)\ \&\ C = A\ \&\ (B\ \&\ C) = (B\ \&\ A)\ \&\ C, \text{ jne.}$$

$$A \text{ v } B \text{ v } C = (A \text{ v } B) \text{ v } C = A \text{ v } (B \text{ v } C) = (B \text{ v } A) \text{ v } C, \text{ jne.}$$

ÜLESANDEID

1. Millistel järgmistest valemitest on tõesustabeleis tulbad ühesugused ja millistel erinevad?[1]

a) ~(A v B)
b) ~(A & B)
c) ~A v ~B
d) ~A & ~B.

2. Kas laused “Ma pole USA president ja/või ma ründan Iraaki” ja “Pole tõsi, et ma olen USA president ja/või ma ründan Iraaki” on sama mõttega?

[1] Vastused: **1.** Ühesugused tulbad on valemeil a) ja d), samuti valemeid b) ja c). **2.** Ei ole. Vaata tõeväärtusi olukorras, kus on tõsi, et ma ründan Iraaki.

4. LAUSEARVUTUSE VALEMITE KLASSIFIKATSIOON

Valemite klassifikatsioon

Lausearvutuse valemeid klassifitseeritakse järgnevalt:

- **samaselt tõesed valemid ehk tautoloogiad;**
- **samaselt väärad valemid ehk vastuolud;**
- **kontingentsed ehk asjaoludest sõltuvad valemid.**

See klassifikatsioon on defineeritud järgnevalt:

- **SAMASELT TÕENE valem on valem, mis on tõene tõesustabeli igas reas.**
- **SAMASELT VÄÄR valem on valem, mis on väär tõesutustabeli igas reas.**
- **KONTINGENTNE valem on valem, mis tõesustabeli mõnedes ridades on tõene ja mõnedes ridades on väär.**

Ülaltoodud definitsiooni põhjal saab kontingentse valemi defineerida ka järgnevalt: **Kontingnentne valem on valem, mis pole ei samaselt tõene ega ka samaselt väär.**

Järgnevalt vaatleme mõningaid näiteid (*A* tähistab siin mingit väidet):

$A \text{ v} \sim A$ = ***T***	– üks tüüpiline tautoloogia;
$A \,\&\, \sim A$ = ***V***	– üks tüüpiline vastuolu nimega ILMUTATUD vastuolu ehk EKSPLITSIITNE vastuolu;
$A \text{ v } A$	– üks kontingentne valem.

Kirjapildiga *"=* ***T****"* ja *"=* ***V****"* ülal pidasime silmas järgmist:

T – mistahes tingimustel (tõesustabeli igas reas) tõene valem;
V – mistahes tingimustel (tõesustabeli igas reas) väär valem.

Tähistagu *A* näiteks väidet "Homme sajab vihma." Siis meie kolmele valemile vastavad järgmised ilmaennustused:

$A \text{ v} \sim A$	–	Homme sajab vihma või ei saja.
$A \,\&\, \sim A$	–	Homme sajab ja homme ei saja vihma.
$A \text{ v } A$	–	Homme sajab vihma või homme sajab vihma.

Kui märk *A* ülal tähistab igal pool ühte ja sama kindla mõttega väidet, siis esimene ilmaennustus on kindlasti õige ja teine ilmaennustus on kindlasti vale – ning seda olenemata homsest ilmast. Kolmanda ilmaennustuse õigsus sõltub aga sellest, kas homme tõesti sajab vihma.

Valemite klassifitseerimine tõesustabelitega

Koostame ülalvaadeldud kolmele valemile tõesustabeli. Lõpetatult näeb see tabel välja nii (näidatud on vaid arvutuste lõpptulbad):

A	A v ~A	A & ~A	A v A
t	t	v	t
v	t	v	v

Niisiis on valem *A v ~A* samaselt tõene, sest ta on tõene tõesustabeli igas reas:

A	A v ~A	A & ~A	A v A
t	t	v	t
v	t	v	v

Valem *A & ~A* on samaselt väär, sest ta on väär tõesustabeli igas reas:

A	A v ~A	A & ~A	A v A
t	t	v	t
v	t	v	v

Valem *A v A* on kontingnentne, sest tõesustabeli mõnedes ridades on ta tõene, mõnedes ridades aga väär:

A	A v ~A	A & ~A	A v A
t	t	v	t
v	t	v	v

Mingil viisil tuleb see siin alati ära märkida, et ühtedes ridades on valem tõene ja teistes väär. Ülal kasutasime selleks ridade erinevat värvi.

Valemite klassifikatsiooni interpreteerimine

SAMASELT TÕENE valem on tõene, olenemata sellest, milline maailm tegelikult on. Seetõttu **samaselt tõese valemina esinev lause on sisutühi: ta ei ütle maailma kohta midagi.** Just see võimaldabki tal olla tõene igal võimalikul juhul.

Samaselt tõene valem ei sisalda ühtegi bitti infot. Näiteks “ilmaennustus” *Homme sajab või ei saja vihma* ei anna mulle mingitki vihjet, kas peaksin homme hommikul kodust lahkudes vihmavarju kaasa võtma või mitte.

Pangem tähele ka seda, et samaselt tõene valem on sisutu tänu oma loogilisele vormile: näiteks valem *A v ~A* (vt. tabelit ülalt) on igas reas tõene, *olenemata väite A sisust.* Nii väide *Homme sajab või ei saja vihma* kui ka väide *Napoleon on või ei ole USA president* on sisutühjad ja tõesed, olenemata maailma omadustest.

Väljendit "tautoloogia" kasutataksegi kõnekeeles tihti halvustava varjundiga, tähistamaks juttu, mis ei vasta küsimusele või ei paku (uut) infot.

SAMASELT VÄÄR valem on väär olenemata maailma omadustest. Seetõttu ka **samaselt väära valemina esinev lause on infotühi:** ta ei eelista üht võimalikku maailma teisele. Just see võimaldabki tal olla väär igal võimalikul juhul.

Näiteks ilmaennustus *Homme sajab vihma, aga homme ei saja vihma* ei informeeri mind, kas peaksin homme vihmavarju kaasa võtma.

Ka samaselt väärad valemid ehk vastuolud on väärad tänu oma loogilisele vormile. Näiteks, ka lause *Napoleon on ja ei ole USA president* on samaselt väär.

KONTINGENTSEL valemil on oma loogilise vormi tõttu *šanss* maailma kohta midagi informatiivset ütelda.

Näiteks valem *A v A* on kontingentne:

A	A v A
t	t
v	v

Väites lause kujuga *A v A*, väidame me ühtlasi, et väide *A v A* on tõene:

A	A v A
t	t
v	v

Seega me väidame, et tegelik maailm on selline, mis vastab tõesustabeli esimesele reale. Tabelit paremalt vasakule lugedes näeme nüüd, et väites lauset *A v A*, väidame me ühtlasi, et *A* on tõene:

A	A v A
t	t
v	v

Näiteks, lausudes *Vihma sajab või vihma sajab*, teatan ma ühtlasi, et *Vihma sajab.*

Siiski pole meil garantiid, et kontingentse valemina esitatud väide tõesti annab informatsiooni. **Et väide on sisukas, seda ei saa otsustada, toetudes ainult väite loogilisele vormile ja ignoreerides komponentväidete sisu.**

Täiendavad loogilised seosed

Valemis esinevate komponentväidete konkreetne tähendus võib tingida täiendavaid loogilisi seoseid valemis.
Seetõttu ei saa ka ainult valemi enda kuju põhjal veel ütelda, et konkreetne väide, mis sellisel kujul on esitatud, on informatiivne.

Näiteks valem *A v B* on kontingentne, sest mõnedes ridades on tema tõeväärtuseks *t*, mõnedes ridades aga *v*:

A	B	A v B
t	t	**t**
v	t	**t**
t	v	**t**
v	v	**v**

Nüüd näiteks väide *Homme sajab lund või rahet* on tõesti kontingentne ja ühtlasi ka sisukas. Uurime aga väidet

Homme sajab vihma või ei saja vihma.

Tähistades siin

A	–	Homme sajab vihma;
B	–	Homme ei saja vihma,

saame selle väite esitada kujul

$$A \text{ v } B$$

ning ülalesitatud tabeli põhjal on selline valem kontingentne.

Kuid siin saame kirja panna täiendava loogilise seose väidete *Homme sajab vihma* ja *Homme ei saja vihma* vahel:

$$B = {\sim}A.$$

Seega kombinatsioonid, kus *A* ja *B* on ühesuguste tõeväärtustega (vt. alumist tabelit, punasega märgitud) on siin võimatud ja esineda saavad vaid kombinatsioonid, kus *A* ja *B* tõeväärtused on erinevad (vt. alumist tabelit, rohelisega märgitud):

A	B	A v B
t	**t**	t
v	**t**	t
t	**v**	t
v	**v**	v

Seega saavad *A v B* tõesustabelis antud konkreetsel juhul esineda vaid teine ja kolmas rida (all rohelised) ja esimene ning neljas rida on välistatud (all punased). Nüüd näeme, et *A v B* tõeväärtustest saab antud juhul esineda vaid tõeväärtus *t*:

A	B	A v B
t	t	t
v	t	t
t	v	t
v	v	v

Seega väide *Homme sajab vihma või ei saja vihma* on siiski sisutühi, sest ta on esitatav tautoloogiana. Tõepoolest: kasutades vaid tähistust *A – Homme sajab vihma*, saame selle väite esitada ju kujul *A v ~A*, milline valem on aga ilmselt tautoloogia:

A	A v ~A
t	t
v	t

Nii võimegi me kokkuvõttes ütelda järgmist:

TAUTOLOOGIANA ESITATUD VÄIDE ON KINDLASTI SISUTÜHI. VASTUOLUNA ESITATUD VÄIDE ON KINDLASTI SISUTÜHI. KONTINGENTSE VALEMINA ESITATUD VÄITE SISUKUS SÕLTUB SELLE VALEMI KOMPONENTVÄIDETE TÄHENDUSTEST.

Seega LA tautoloogiad ja vastuolud on küll loogikareeglid, ent see pole loogikareegel, kui mõni LA valem on kontingentne.

Näidisülesanne.

Klassifitseerime järgmise valemi:

$$[A \,\&\, (A \rightarrow B)] \leftrightarrow (A \,\&\, B).$$

Selleks koostame tõesustabeli, arvestades, et: 1) implikatsioon $p \rightarrow q$ on väär vaid kui p on tõene ja q on väär; 2) konjunktsioon $p \,\&\, q$ on tõene vaid kui p ja q on mõlemad tõesed; 3) ekvivalents $p \leftrightarrow q$ on tõene vaid kui p ja q tõeväärtused on ühesugused.

Koostatud tabelist näeme, et vaadeldav valem on *samaselt tõene*:

A	B	2 [A &	1 (A→B)]	4 ↔	3 (A & B)
t	t	t	t	t	t
v	t	v	t	t	v
t	v	v	v	t	v
v	v	v	t	t	v

Siin lõpptulba *4* arvutamisel tuli ekvivalentsitehte märgist ↔ vasakul- ja paremalpool olevatest tulpadest omavahel võrrelda just suurimate numbritega tulpi – seega tulpi *2* ja *3* (tabelis ülal esitatud pruunina).

ÜLESANDEID

1. Millised järgmistest valemitest on tautoloogiad, millised vastuolud, millised kontingentsed? Kasutada tõesustabeleid.

   a) A→(A v B).
   b) (A v B)→A.
   c) (A v B) & ~A & ~B.
   d) (A & B) →A.
   e) [(A→B) & ~B]→~A.
   f) (A↔B) & (A↔~B).
   g) [(A v B) & A]→~B.
   h) [(A v B) & ~(A & B) & A]→~B.

2. Tõestada, et:

   a) Tautoloogia eitus on vastuolu.
   b) Vastuolu eitus on tautoloogia.
   c) Kontingentse valemi eitus on kontingentne valem.[1]

[1] Vastused: **1.** Tautoloogiad on a), d), e) ja h). Vastuolud on c) ja f). **2.** Lähtuge eituse (negatsiooni) definitsioonist.

5. LAUSEARVUTUSE REEGLITE KEHTIVUSE KONTROLLIMINE

Loogikas on reegliteks sellised seosed valemite vahel, mis on tõesed olenemata asjaoludest. Loogika alamharu lausearvutuse (LA) reegleid saab tõestada tõesustabelitega. LA reeglid on järgmised:

- tautoloogiad ehk samaselt tõesed valemid;
- vastuolud ehk samaselt väärad valemid;
- loogilised järeldused;
- loogilised samaväärsusused;
- vastuolulised lausetesüsteemid (*versus* kooskõlalised lausetesüsteemid).

Tautoloogiaid ja vastuolusid oleme uurinud juba varem. Uuteks teemadeks on seega:

- ***LA järeldused;***
- ***LA loogilised samaväärsused;***
- ***LA vastuolulised lausetesüsteemid.***

Lausearvutuse järeldused

ESIMESE NÄITENA vaatleme järgmist kirjapilti:

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \sim B \\ \hline A \end{array}$$

Siin joone peal olevad väited on järelduse ***eeldused:***

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{A \vee B} \\ \boldsymbol{\sim B} \\ \hline A \end{array}$$

Eelduseid võib järeldusel olla üks või rohkem. Antud juhul on eelduseid kaks.
Joone all olev väide on järelduse väidetav ***tulem:***

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \sim B \\ \hline \boldsymbol{A} \end{array}$$

Kui järeldus tõepoolest kehtib (on loogiliselt range), siis väidetav tulem järeldubki neist eeldusist ja on seega tõepoolest tulem.

Kuigi mistahes eeldusist saab järeldada lõpmata palju tulemeid, uuritakse igal konkreetsel juhul korraga vaid ühte (oletatavat) tulemit.

LOOGILINE JÄRELDUS ON DEFINEERITUD JÄRGNEVALT:

Antud eeldustest järeldub antud tulem parajasti siis,
kui eelduste tõesuse puhul oleks tulemi väärus täiesti võimatu.

Teisisõnu kehtib järeldus siis ja ainult siis, kui eelduste jaatamine ja tulemi eitamine kokku moodustaksid vastuolu.

Loogilise järelduse kehtivuse puhul ei ole küsimuseks see, kas järelduse eeldused on faktiliselt tõesed. Ka vääratest teadusteooriatest saab loogiliselt kehtivalt teha järeldusi, nii nagu saab vääratest teadusteooriatest matemaatiliselt korrektselt tuletada mitmesuguseid väiteid. Faktivead ja matemaatikavead on erinevat liiki vead, ning täpselt samamoodi on ka faktivead ja loogikavead erinevat liiki vead.

Loogilise järelduse kehtivuse puhul pole küsimuseks ka see, kas eelduste tõesuse puhul oleks tulemi väärus tegelikus maailmas tegelikult võimatu. Kui järeldus kehtib, siis kehtib ta tänu eelduste ja tulemi vahelisele seosele, mis on lausete omavaheline seos. Lausete seos maailmaga – kas laused kirjeldavad maailma õigesti – pole siin kõne all. Kui järeldus kehtib, siis kehtib ta tänu lausete struktuurile, mitte tänu nende sisule. Järelduse kehtimine tähendab, et ükskõik, milline maailm tegelikult ka poleks, ikka ei oleks selle järelduse eeldused tõesed, aga tulem väär.

Niisiis kehtib ülalesitatud järeldus parajasti siis, kui valem

$$[(A \vee B) \ \& \ {\sim}B] \ \& \ {\sim}A$$

on vastuolu.

Ülaltoodu põhjal saame sõnastada **KRITEERIUMI LAUSEARVUTUSE JÄRELDUSE KEHTIVUSE JAOKS:**

Lausearvutuse järeldus kehtib parajasti siis, kui tõesustabeli igas reas,
milles järelduse kõik eeldused on tõesed, on tõene ka selle järelduse tulem.

Vaatame uuesti ülalesitatud näidet. Moodustame tõesustabeli, mille parempoolsesse ossa kirjutame alul kõikide *eelduste* tulbad (all märgitud roheliselt) ja seejärel viimasena väidetava *tulemi* tulba (all märgitud pruunilt):

A	B	A v B	~B	A
t	t			
v	t			
t	v			
v	v			

Järgnevalt peame kontrollima, kas igas reas, milles kõik eeldused (siin: *A v B* ja *~B*) on tõesed, on tõene ka tulem *A*. – **Seega pole meil vajadust kontrollida neid ridu, milles kas või üks eeldus on väär.**

Järgnevalt arvutamegi kõigepealt välja eelduste tulbad, katkestades arvutuse neis ridades (all märgitud punasena), milles mõni eeldus on väär, ja jätkates oma arvutusi vaid neis ridades (all märgitud rohelisena), milles kõik eeldused on tõesed:

A	B	A v B	~B	A
t	t	t	v	
v	t	t	v	
t	v	t	t	
v	v	v		

Antud juhul on vaid kolmandas reas kõik eeldused tõesed. Seega peame nüüd kontrollima, kas sel ainsal juhul on tõene ka tulem. Näeme (all märgitud rohelisena), et tulem on sel juhul tõesti tõene, mistõttu antud järeldus *kehtib*:

A	B	A v B	~B	A
t	t	t	v	
v	t	t	v	
t	v	t	t	t
v	v	v		

Vasakult paremale võime selle tulemuse kirjutada ka nii:

$$(A \text{ v } B) \ \& \sim B \Rightarrow A.$$

TEISE NÄITENA kontrollime, kas kehtib järeldus

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \\ \hline A \rightarrow C, \end{array}$$

ehk, kas kehtib järeldus

$$(A \rightarrow B) \ \& \ (B \rightarrow C) \Rightarrow A \rightarrow C.$$

Lõpetatult näeb tabel siin välja selline:

A	B	C	A → B	B → C	A → C
t	t	t	t	t	t
v	t	t	t	t	t
t	v	t	v		
v	v	t	t	t	t
t	t	v		v	
v	t	v		v	
t	v	v	v		
v	v	v	t	t	t

Siin on kokku neli erinevat võimalust, kuidas eeldused $A \rightarrow B$ ja $B \rightarrow C$ saavad korraga olla tõesed: 1., 2., 4. ja 8. reas (ülal märgitud rohelisena). Kõigil neil neljal juhul on ka tulem (esitatud pruunina) $A \rightarrow C$ tõene. Seega antud järeldus *kehtib.*

KOLMANDA NÄITENA uurime järeldust

$$\frac{\begin{array}{c} A \vee B \\ A \end{array}}{\sim B}$$

Tabel tuleb siin selline:

A	B	A v B	A	~B
t	t	t	t	v
v	t		v	
t	v	t	t	t
v	v		v	

Vaid esimeses ja kolmandas reas (ülal märgitud rohelisena) on kõik eeldused tõesed. Ent kõikidel sellistel juhtudel oletatav tulem *~B* tõene ei ole. Kuigi kolmandas reas (all märgitud rohelisena) on tõene ka tulem, on esimeses reas (all märgitud punasena) tulem väär, hoolimata kõikide eelduste tõesusest:

A	B	A v B	A	~B
t	t	t	t	v
v	t		v	
t	v	t	t	t
v	v	v		

Seega antud järeldus *ei kehti.*

Seejuures annab esimene rida meile nn. **KONTRANÄITE − olukorra, milles järelduse eeldused on tõesed, aga tulem väär.**

Tabeli vasakpoolsest osast esimesest reast näeme, et kui

A — *on tõene;*
B — *on tõene,*

siis on järelduse kõik eeldused tõesed, aga tulem on väär. Selline olukord ongi kontranäide ehk *vastunäide* väitele, et see antud järeldus kehtib.

Üldjuhul võib kontranäiteid olla ka rohkem kui üks. Ent piisab ühe kontranäite esitamisest, tõestamaks, et järeldus ei kehti.

Üksikute näidete abil ei saa aga tõestada järelduse kehtivust. Et tõestada järelduse kehtivust, tuleb läbi kontrollida *kõik* sellised read, milles kõik eeldused on tõesed.

Ülaloleva tabeli puhul oleks ka väär ütelda, et järeldus kehtib kolmandas reas, aga ei kehti esimeses reas. Kui järeldus kehtib, siis on *igas* reas, milles kõik eeldused on tõesed, tõene ka tulem.[1]

LA kehtiv järeldus on loogikareegel. Ent LA järelduse mittekehtivus loogikareegel ei ole, sest sama järeldus võib kehtida võimsamas loogikas nimega predikaatarvutus.

---

[1] LA kehtivat järeldust saab esitada ka samaselt tõese implikatsioonina. Näiteks kehtivale järeldusele

(A v B) & ~B ⇒ A vastab samaselt tõene implikatsioon [(A v B) & ~B] → A. Järelduse kehtivuse kontrollimiseks võiksime seega kontrollida, kas vastav implikatsioon on tautoloogia. Ent selline meetod on töömahukam kui meetod, mida tutvustasime ülal.

Lausearvutuse loogilised samaväärsused

Kaks valemit on loogiliselt samaväärsed parajasti siis,
kui on täiesti võimatu, et nendel valemitel on erinevad tõeväärtused.

Lausearvutuses tähendab see järgnevat:

LA kaks valemit on loogiliselt samaväärsed parajasti siis,
kui neil on tõesustabelis täpselt ühesugused lõpptulbad.

ESIMESE NÄITENA kontrollime, kas valemid *~(A v B)* ja *~A & ~B* on samaväärsed. Arvutuste lõpptulemused on järgnevad (vahearvutusi pole tabelis näidatud):

A	**B**	**~(A v B)**	**~A & ~B**
t	t	**v**	**v**
v	t	**v**	**v**
t	v	**v**	**v**
v	v	**t**	**t**

Kuna vasak- ja parempoolne tulp ühtivad, siis need kaks valemit on loogiliselt samaväärsed ja me võime kirjutada:

~(A v B) = ~A & ~B.

See reegel, mille äsja tõestasime, on üks nn De Morgani seadustest.

Samaväärsete valemite puhul järeldub esimesest valemist teine ja teisest esimene, s.t., järeldus on mõlemapidine. Eeldusest järeldub tulem ja vastupidi.
Antud näite puhul on mõlemad järeldused kehtivad:

~(A v B) $\Rightarrow$ *~A & ~B;*

~A & ~B $\Rightarrow$ *~(A v B).*

Üldjuhul aga järeldus mõlemapoolne ei ole. Näiteks väitest *A & B* järeldub küll väide *A*, ent väitest *A* väide *A & B* ei järeldu.

Loogiliselt samaväärsete valemitena esitatud väiteid võib teatud piires pidada sama mõtte või tähendusega väideteks, sest ükskõik, milline maailm ka poleks, kui üks neist väidetest on tõene, on seda paratamatult ka teine ning vastupidi.

ASENDUSVÕTE võimaldab meil valemeis samaväärseid avaldisi üksteisega asendada, saades esialgse valemiga samaväärse valemi.

Näiteks *A & B = B & A*. Seega võime valemis *(B & A) v C* asendada avaldise *B & A* avaldisega *A & B*, saades esialgse valemiga samaväärse valemi:
(A & B) v C = (B & A) v C. Võrdusmärk töötab siin täpselt samamoodi nagu matemaatikas.

TEISE NÄITENA uurime, kas valemid *~(A v B)* ja *~A v ~B* on loogiliselt samaväärsed. Saame järgmise tabeli:

A	B	~(A v B)	~A v ~B
t	t	v	v
v	t	v	t
t	v	v	t
v	v	t	t

Näeme, et saadud kaks tulpa ei ole täpselt ühesugused. Teine ja kolmas rida (all märgitud punasena) annavad meile **KONTRANÄITED:**

A	B	~(A v B)	~A v ~B
t	t	v	v
v	**t**	**v**	**t**
t	**v**	**v**	**t**
v	v	t	t

Nii saame teise rea põhjal teada, et kui *A* on väär ja *B* on tõene, siis on *~(A v B)* väär, sellal kui *~A v ~B* on tõene. – Seega teises reas kirjeldatud olukorras oleksid need kaks valemit erinevate tõeväärtustega, mistõttu *need kaks valemit ei ole (LA-s) loogiliselt samaväärsed:*

$$\sim(A \vee B) \neq \sim A \vee \sim B.$$

Üldjuhul võib kontranäiteid olla rohkem kui üks. Vääramaks väidet, et antud kaks valemit on loogiliselt samaväärsed, piisab ühe kontranäite toomisest.

Kontranäite abil saab tõestada, et valemid ei ole samaväärsed. Üksikute näidete abil ei saa aga tõestada, et valemid on samaväärsed. Samaväärsuse näitamiseks tuleb valemite tulpasid võrrelda *kõikides* ridades.[2]

Kahel väitel, mis on esitatud loogiliselt mittesamaväärsete valemitega, ei saa olla täpselt üks ja sama mõte, sest teatavates (kasvõi kujuteldavates) olukordades oleks üks neist väidetest tõene, sellal kui teine oleks väär. Näiteks laused

Sajab vihma.
Sajab vihma või lund.

ei saa olla täpselt sama mõttega, sest juhul, kui sajab lund, aga vihma mitte, on teine lause tõene, sellal kui esimene lause on väär. Seejuures pole oluline, kas need laused on lausutud piirkonnas, kus looduslikel põhjustel lund sadada ei saagi.

See on loogikareegel, kui kaks valemit on LA-s samaväärsed. Pole aga välistatud, et kaks valemit, mis pole samaväärsed LA-s, osutuvad samaväärseiks võimsamas loogikas nimega predikaatarvutus. Seetõttu pole see loogikareegel, kui mingid kaks valemit pole LA-s samaväärsed.

---

2 Loogiline samaväärsus on sama, mis samaselt tõene ekvivalents. Nii tähendab võrduse ~(A v B) = ~A & ~B kehtimine parasjagu seda, et valem ~(A v B) ↔ (~A & ~B) on samaselt tõene valem ehk tautoloogia. Ent meetod, mida ülal kasutasime, on loogilise samaväärsuse kontrollimiseks mugavam kui ekvivalentside samaväärsuse kontrollimine.

Lausearvutuse vastuolulised lausetesüsteemid

Lausetesüsteemiks nimetatakse mingit lausete hulka või loetelu.
ESIMESE NÄITENA vaatleme korraga väiteid *A v B*; *~A* ja *~B*:

{A v B; ~A; ~B}

Antud juhul on tegemist kolmest lausest koosneva lausetesüsteemiga.

Lausetesüsteemi nimetatakse vastuoluliseks parajasti siis, kui on täiesti võimatu, et selle süsteemi laused oleksid kõik korraga tõesed.

Ka siin peetakse silmas väidete (valemite) struktuurist tulenevaid omavahelisi seoseid ja mitte seda, milliseid täiendavaid piiranguid seab reaalne maailm oma omadustega. Lausearvutuse jaoks saame siit järgmise kriteeriumi:

LA lausetesüsteem on vastuoluline parajasti siis, kui tõesustabelis pole ühtegi rida, milles selle süsteemi laused oleksid kõik korraga tõesed.

Ülemise näite jaoks saame järgmise tabeli, milles on kolm tulpa – antud süsteemi iga lause jaoks täpselt üks tulp:

A	B	A v B	~A	~B
t	**t**	**t**	**v**	**v**
v	**t**	**t**	**t**	**v**
t	**v**	**t**	**v**	**t**
v	**v**	**v**	**t**	**t**

NB! **Lausetesüsteemi vastuolulisuse kontrollimisel on kõik tulbad võrdväärsed (nii nagu ka lausetesüsteemi kõik laused on omavahel võrdväärsed)** – erinevalt loogilise järelduse kontrollimisest, kus viimane tulp oli tulemi tulp, sellal kui kõik eelnevad tulbad olid eelduste tulbad.

Ülalesitatud tabelis on parempoolses osas igas reas vähemalt üks tõeväärtus *väär*, mis alumises tabelis on esitatud kollasena:

A	B	A v B	~A	~B
t	t	t	**v**	v
v	t	t	t	**v**
t	v	t	**v**	t
v	v	**v**	t	t

Seega on see lausetesüsteem *vastuoluline*: milline maailm ka poleks, ei saa selle süsteemi laused kõik korraga tõesed olla.

TEISE NÄITENA vaatleme lausetesüsteemi

{A v B; ~A; B}

Selle süsteemi jaoks saame järgmise tabeli:

A	B	A v B	~A	B
t	t	t	v	t
v	t	t	t	t
t	v	t	v	v
v	v	v	t	v

Näeme, et tabeli teises reas (all märgitud punasena) realiseerub võimalus, milles selle süsteemi laused on kõik korraga tõesed:

A	B	A v B	~A	B
t	t	t	v	t
v	**t**	**t**	**t**	**t**
t	v	t	v	v
v	v	v	t	v

Selline rida annab meile **KONTRANÄITE**, mis tõestab, et käesolev lausetesüsteem *ei ole vastuoluline.* Juhul, kui *A* on väär ja *B* on tõene, on antud süsteemi kõik kolm lauset ju korraga tõesed.

Üldjuhul võib kontranäiteid olla ka rohkem kui üks. Ent piisab ühest kontranäitest, et lükata ümber väide, et süsteem on vastuoluline.

Üksikute näidete abil ei saa aga tõestada, et süsteem on vastuoluline. Et tõestada vastuolulisust, tuleb näidata, et *igas* reas on vähemalt ühes tulbas tõeväärtuseks väär.[3]

Kui lausetesüsteem on mittevastuoluline, siis on ta seda tänu süsteemi kuuluvate lausete vahelistele seostele. See, kas kontranäitele vastav olukord on vähetõenäoline või reaalselt võimatu, ei puutu asjasse. Süsteem on vastuoluline, kui see on mitte maailma, vaid süsteemi lausete omadus, et nad ei saa kõik korraga tõesed olla.

Mittevastuolulist lausetesüsteemi nimetatakse KOOSKÕLALISEKS.

Niisiis kooskõlaline lausetesüsteem jätab maailmale kasvõi pisimagi võimaluse olla selline, et selle süsteemi laused oleksid kõik korraga tõesed.

Vastuolulise lausetesüsteemi lauseist oleks aga vähemalt üks lause väär, ükskõik, milline maailm tegelikult ka poleks – kuigi ühes olukorras võib vääraks osutuda üks, teises olukorras aga hoopis teine lause sellest süsteemist.

Kui antud lausetesüsteem on LA-s vastuoluline, siis on see loogikareegel. See pole aga loogikareegel, kui antud lausetesüsteem on LA-s kooskõlaline – sest sama süsteem võib osutuda vastuoluliseks võimsamas loogikas nimega predikaatarvutus.

---

[3] Kui lausetesüsteem on vastuoluline, siis on selle süsteemi lausete konjunktsioon vastuolu ja vastupidi. Näiteks süsteem {A v B; ~A; ~B} on vastuoluline ja samas on lause (A v B) & ~A & ~B vastuolu ehk samaselt väär valem. Ent süsteemi vastuolulisust on lihtsam kontrollida ülalesitatud meetodiga.

ÜLESANDEID

Loogiliste järelduste kehtivuse kontrollimine

1. Millised järgmistest järeldustest kehtivad? Kontrollida tõesustabelitega. Kui järeldus ei kehti, siis esitada väitele, et järeldus kehtib, kontranäide:

   a) $p \Rightarrow p \vee q$

   b) $p \vee q \Rightarrow p$

   c) $p \& q \Rightarrow p$

   d) $[(p \rightarrow q) \& \sim q] \Rightarrow \sim p$

   e) $[(p \vee q) \& \sim(p \& q) \& p] \Rightarrow \sim q$

   f)
   $$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow q \\ p \vee r \\ \hline q \end{array}$$

   g)
   $$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \rightarrow r \\ q \vee r \\ \hline p \end{array}$$

Loogilise samaväärsuse kehtivuse kontrollimine

2. Millised järgmistest lausetest on omavahel paarikaupa samaväärsed? Kontrollida tõesustabelitega. Kui kaks valemit pole samaväärsed, siis esitada väitele, et nad on samaväärsed, kontranäide:

   a) $\sim(A \& B)$

   b) $\sim(A \vee B)$

   c) $\sim A \& \sim B$

   d) $\sim A \vee \sim B$

   e) $(A \& B) \rightarrow C$

   f) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

3. a) Näidake tõesustabeliga, et $A \& B = B \& A$.

   b) Näidake tõesustabeliga, et siin võib kasutada asendusvõtet:
   $(A \& B) \vee C = (B \& A) \vee C$.

Lausetesüsteemi vastuolulisuse kontrollimine

4. Millised järgmistest lausetesüsteemidest on vastuolulised, millised aga kooskõlalised? Kontrollida tõesustabelitega. Kooskõlalise süsteemi puhul esitada kontranäide väitele, et süsteem on vastuoluline:

   a) $\{A \rightarrow B; A; \sim B\}$

   b) $\{A \rightarrow B; B \rightarrow \sim A\}$

   c) $\{\sim A \vee B; \sim B \vee \sim A; \sim A \rightarrow A\}$

5. Näidake tõesustabeli abil, et järgmine süsteem on vastuoluline: 1. Newtoni mehaanika kehtib; 2. Kui Newtoni mehaanika kehtib, siis on valguse kiirus konstantne; 3. Valguse kiirus ei ole konstantne.

VASTUSEID

1. Kehtivad järeldused on a), c), d), e) ja f).
   Kontranäiteid: b) *p* – väär, *q* – tõene;
   g) *p* – väär, *q* või *r* – tõene.

2. Omavahel paarikaupa samaväärsed on a) ja d); b) ja c); e) ja f).
   Üks kontranäide: a) ja b) pole samaväärsed, vaata juhtu *A* – tõene, *B* – väär (või vastupidi).

4. Süsteemid a) ja c) on mõlemad vastuolulised.
   Kontranäited: b) *A* – väär, olenemata *B* tõeväärtusest.

6. LAUSEARVUTUSE TEKSTÜLESANDED

Tekstile loogilise mudeli konstrueerimine

Et formaalloogika abil analüüsida teksti,
tuleb uuritav tekst esmalt *tõlkida* ehk *interpreteerida* loogiliste sümbolite keelde.
Alles seejärel saab nõnda loodud loogilisele *mudelile* rakendada formaalloogikat.

Kuigi loogikud sageli väidavad, et loogika andvat mõttele ülima täpsuse, tuleb siiski meeles pidada, et teksti viimine loogiliste sümbolite keelde on *tõlkimine* ühest keelest teise – samasugune tõlkimine nagu näiteks tõlkimine eesti keelest inglise keelde. Tõlkides võib teksti esialgne mõte moonduda. Tõlkimine on alati interpreteerimine, tõlgendamine – olemata seega täiesti mehhaaniline ja täpne protsess.

Seetõttu ei saa tulemust, mis saadi teksti loogilise mudeli analüüsimisel,
automaatselt rakendada esialgsele tekstile, mis oli sellele mudeli aluseks.

Näiteks võib formaalloogiline analüüs tuvastada: „Uuritav mõttekäik on vastuoluline.“ – Siiski on vastuolu täie rangusega kindlaks tehtud vaid kasutatud *mudelis*. Otsustamaks, et ka uuritav mõttekäik ise on vastuoluline, tuleb veel kindel olla, et vastuolu pole lisandunud esialgse teksti viimisel loogiliste sümbolite keelde.[1]

Siiski saab loogika (nagu ka matemaatika) abil palju kasulikku teha. Näiteks võib loogiline analüüs ilmutada, et uuritav tekst pole täpse mõttega.

Et vähendada formaalloogiliste mudelite koostamisel ja kasutamisel tekkida võivaid vigu, vajame mõningaid lisateadmisi. Tekstülesanded nõuavad ka loomingulisust ning võimet intuitiivselt loogiliselt mõtelda.

---

1 Analoogiliselt ei saa uuritavale olukorrale täiesti automaatselt rakendada matemaatilise arvutuse tulemust. Matemaatika on küll täpne, ent situatsiooni matemaatiliseks analüüsimiseks on esmalt vaja hankida seda iseloomustavad arvud, milline protsess ise aga pole matemaatiline arvutus.

Indikaatorid

Lausearvutuse *loogilised konnektiivid* on märgid, millega tähistatakse lausearvutuse loogilisi tehteid. Näiteks konjunktsiooni tehet tähistame siin märgiga *„&“*.

Kõnekeeles esinevad aga *grammatilised konnektiivid* ehk sidesõnad nagu „ja“, „ning“, „ega“ ja „või“. Samuti esinevad siin mitmesugused tüüpilised sõnakombinatsioonid nagu näiteks „kui ... siis ...“.

Indikaatorid on sõnad, sõnakombinatsioonid vms, mis võivad osutada loogilistele tehetele.

Näiteks sidesõna „ja“ on indikaatorsõna, sest ta võib osutada konjunktsioonitehtele *„&“*. Lauses

„Päike paistab ja tuul puhub.“

osutabki sidesõna „ja“ konjunktsioonile „*&*“:

&
„Päike paistab ja tuul puhub.“

Sõnakombinatsioon „kui ... siis ...“ on aga indikaator, mis võib osutada ligikaudselt implikatsioonitehtele *„→“*. Lause

„Kui päike paistab, siis vesi soojeneb.“

võimegi suurema veata tõlkida kujule

(Päike paistab.) → (Vesi soojeneb.)

Kuid indikaatoreist juhindumine pole siiski automaatne protseduur. Indikaatorid on pigem nagu haiguse süptomid. Sümptomi esinemise korral kaalutleb arst, kas tegemist on vastava haigusega. Ent sümptom võib esineda ka ilma vastava haiguseta.

Indikaatorid võivad, aga ei pruugi tähistada loogilisi tehteid.

Näiteks lauses

„Jaan ja Jüri on sõbrad.“

ei tähista sõna „ja“ konjunktsiooni *„&“* − muidu järelduks siit ju absurdne lause

„Jüri on sõber.“[2]

2 Sõber on alati *kellegi* sõber. Siin on meil tegemist on *seosega*, mitte *omadusega.* Seoseid võimaldab analüüsida aga alles predikaatarvutus.

Siit näeme ka, et teksti loogilise analüüsimisega tegeleme me varjatult veel enne, kui teksti formaalloogiline mudel on valmis saanud. Me analüüsime teksti juba tema loogikakeelde tõlkimise käigus – selleks, et teda paremini tõlkida.

Kuid nüansse on enamgi...

Loogilisi tehteid ei märgi ainult tüüpilised sõnad või sõnakombinatsioonid.

Näiteks punkt või koma võib samuti osutada konjunktsioonitehtele *„&“*. Tekstilõigus

„Päike paistab. Tuul puhub.“

esitabki punkt konjunktsiooni:

&
„Päike paistab. Tuul puhub.“

Teisisõnu võinuks selle tekstilõigu mõtte esitada kõnekeeles ka nõnda:

„Päike paistab ja tuul puhub.“

Mõned tüüpilised grammatilised kombinatsioonid viitavad aga loogilistele tehetele, mida pole võimalik vahetult väljendada meie poolt seni defineeritud loogiliste tehete abil.

Mõned sõnad või sõnakombinatsioonid osutavad loogiliste tehete kombinatsioonidele.

Näiteks väljend „kas ... või ...“ osutab mittevälistava „või“ asemel pigem hoopis välistavale „või“-le – seega mitte disjunktsioonile *„v“*, vaid veidi keerulisemale kombinatsioonile. Nimelt: lause „Kas *A* või *B*,“ kus *A* ja *B* on väited, esitub lausearvutuses valemi *A v B* asemel hoopis valemina *(A v B) & ~(A & B).*

Ja samuti tuleb meeles pidada järgmist:

Mõned tüüpilised sõnad või sõnakombinatsioonid ei osuta loogilistele tehetele.

Näiteks sõnakombinatsioon „... sest et ...“ võib väljendada põhjuslikku seost, mis aga ei ole loogiline tehe. Selle tõlkimisel lihtsal implikatsiooniks *„→“* läheb osa olulisest informatsioonist kaduma, kusjuures sisse võib tulla ka otsene viga.

Tüüpilisi indikaatoreid

KONJUNKTSIOON „*&*“

„ja“
„ning“
„ent“
„kuid“
„aga“
punkt „.“
koma „,“

DISJUNKTSIOON *„v“*

„või“

Seejuures väljend „Kas *A* või *B*“ tõlgitakse valemiks *(A v B) & ~(A & B)*.

IMPLIKATSIOON *„→“*

„kui ... siis ...“
„... ainult siis, kui ...“
„piisav tingimus“
„tarvilik tingimus“

Väljendi *„kui ... siis ...“* esitamisel implikatsioonina tuleb sisse väike viga, mis enamasti oluline ei ole.

Väljendi *„kui oleks (olnud) ... siis oleks (olnud) ...“* esitamisel implikatsioonina võib sisse lipsata oluline viga. Loogilise mudeli loomine on siin omaette teadus.[3]

Väljendi *„... ainult siis, kui ...“* saab esitada implikatsioonina. Väide „*A* ainult siis, kui *B*.“ on ju samaväärne väitega „Kui *A*, siis *B*,“ mille saab esitada kujul „*A* → *B*“. See on ühtlasi sama, mis ütelda, et väites *A* kirjeldatu on väites *B* kirjeldatu *piisav* tingimus; või ütelda, et väites *B* kirjeldatu on väites *A* kirjeldatu *tarvilik* tingimus.

Väljendid „järelikult“, „seega“, „niisiis“
on aga indikaatorsõnad loogiliselt rangele, kehtivale järeldusele.

EKVIVALENTS „↔“

„... parajasti siis, kui ...“
„... siis ja ainult siis, kui ...“
„ühekorraga“
„tarvilik ja piisav tingimus“

Ekvivalentsitehtega on meil tegemist näiteks terminite *definitsioonides.*

3 Tegemist on nn „kontrafaktuaalidega“, mida on viimased mõnikümmend aastat uuritud.

Minimaalse interpretatsiooni printsiip

Teksti viimisel loogiliste sümbolite keelde soovitavad mitmed autorid lähtuda teksti *minimaalse interpretatsiooni printsiibist.*

MINIMAALSE INTERPRETATSIOONI PRINTSIIP
nõuab,
et tekstile loogilise mudeli koostamisel
loeksime tekstist välja ainult seda informatsiooni,
mida sealt eksimatult välja saab lugeda.

Teksti analüüsimisel loeme sealt välja vaid selliseid väiteid, mis tekstis on *ilmutatult* ehk *eksplitsiitselt* esitatud.

Teatavas mõttes lähtume me süütuse presumptsioonist: kuni pole tõestatud, et tekstiga on mõeldud seda-ja-seda, ei eelda me, et seda on tegelikult mõeldud.

Niisiis teksti loogilisel analüüsimisel väldime me alltekstide või tagamõtete või varjatud eelduste omistamist.

Selles suhtes on loogiku tegevus üsna vastandlik näiteks psühhoanalüütiku või „kollase ajakirjaniku" tegevusele, kes sageli lähtub pigem „öeldu maksimaalse interpreteerimise printsiibist".

NÄITENA vaatleme järgmist lauset:

„Jack läheb kinno või teatrisse."

Selles lauses on grammatiliseks konnektiiviks, mis võib osutada mõnele loogilisele tehtele, sidesõna „või":

„Jack läheb kinno või teatrisse."

See lause näib koosnevat kahest komponentväitest.
Esiteks, väitest *„Jack läheb kinno."*:

„Jack läheb kinno või teatrisse."

Teiseks, väitest *"Jack läheb teatrisse."*:

„Jack läheb kinno või teatrisse."

Tähistame need komponentväited vastavalt tähtedega *„A“* ja *„B“*:

A – Jack läheb kinno.
B – Jack läheb teatrisse.

NB! Nii, nagu me äsja ülal märkisime, tuleb teha igas ülesandes.

Uute märkide kasutuselevõtmisel tuleb alati välja kirjutada, mida need märgid täpselt tähendavad.

Nüüd aga märkame, et lause „Jack läheb kinno või teatrisse.“ jaoks on meil kaks loomulikku loogilist mudelit – vastavalt sellele, kuidas tõlgendame sidesõna „või“.

Esimeses mudelis tõlgendame me sidesõna „või“ *mittevälistava* „või“-na, seega disjunktsioonina, mille märgiks on meil *„v“*:

v
„Jack läheb kinno või teatrisse.“

Sel juhul saame järgmise valemi:

A v B **(6.1),**

mille täpne, ühemõtteline keeleline väljend oleks:

„Jack läheb kinno või teatrisse või nii kinno kui teatrisse.“

Teises mudelis tõlgendame me sidesõna „või“ *välistava* „või“-na, millise tehte jaoks me pole aga spetsiaalset märki seni veel kasutusele võtnud.
Sel juhul saame olemasolevates märkides järgmise valemi:

(A v B) & ~(A & B) **(6.2),**

mille täpne, ühemõtteline keeleline väljend oleks:

„Jack läheb kinno või teatrisse, ent mitte nii kinno kui teatrisse,“

või ka keelepärasemalt:

„Jack läheb kas kinno või teatrisse.“

Kumba mudelit peaksime me nüüd eelistama, kas mudelit (6.1) või mudelit (6.2)?

Siin on oluline järgmine asjaolu:

Valem (6.2) sisaldab rohkem informatsiooni kui valem (6.1).

On selge, et valemi (6.2) saame valemist (6.1), lisades viimases esitatud infole *„(A v B)“* konjunktsiooni *„&“* abil täiendav informatsiooni *„~(A & B)“*.

Minimaalse interpretatsiooni printsiibi järgi peame me nüüd esialgse teksti loogilise mudelina eelistama valemit (6.1). Kui me eelistaksime valemit (6.2), loeksime esialgsest lausest välja säärast täiendavat infot, milles me ei saa eriti kindlad olla.

Ühtlasi selgitab see printsiip, miks me ülal nimetasime sidesõnu „kuid“, „ent“ ja „aga“ indikaatorsõnadeks konjunktsioonitehtele *„&“*. Väljend „*A*, aga *B*“ on ju loetav kui „*A* ja *B* ja *C*,“ kus *„C“* väljendab näiteks üllatust, milles me ei saa aga eriti kindlad olla.

Minimaalse interpretatsiooni printsiibi vigane kasutamine

Teksti interpreteerimisel tehakse sageli üks viga. Et seda viga mõista, sõnastan siin ühe täiendava printsiibi, mille vastu eksimine viibki vigadele:

**Minimaalselt tuleb interpreteerida mõtet tervikuna,
mitte selle üksikuid osasid eraldi.**

Ülalesitatud lisaprintsiip tugineb lihtsale tähelepanekule:

**Kui minimaalselt interpreteerida teksti üksikuid osasid eraldi,
siis tulemus ei pruugi olla teksti kui terviku minimaalne interpretatsioon.**

NÄITENA vaatleme järgmist lauset:

„See pole tõsi, et Jack läheb kinno või teatrisse.“

Kui siin sõna „või“ interpreteerida nõrgalt kui disjunktsiooni, siis saame eituse („See pole tõsi, et ...“) tõttu esialgse lause tugeva interpretatsiooni:

„Jack ei lähe kinno ega teatrisse.“

Kui interpreteerime sõna „või“ aga tugevalt kui välistavat „või“-d, siis saame esialgse lause nõrga interpretatsiooni:

„Jack ei lähe kinno ega teatrisse või ta läheb nii kinno kui teatrisse.“

Mainigem ka seda, et lausutu *loogilises* mõttes „minimaalne“ interpretatsioon võib *juriidilises* mõttes olla koguni „maksimaalne“ interpretatsioon – tulenevalt lausutut ümbritsevast varjatud kontekstist, mida loogik oma analüüsis võis mitte arvestada.

Vastuoluline tekst

Minimaalse interpretatsiooni printsiip toimib hästi siis, kui avastame analüüsitavas tekstis vastusolu. Nimelt: kui teksti mingi osa on vastuoluline, siis on ka kogu tekst vastuoluline. Kui osa mõttest on vastuoluline, siis on ka kogu mõte vastuoluline. Vastuolulisele informatsioonile täiendava informatsiooni lisamine ei muuda informatsiooni veel kooskõlaliseks.

Loogikute keeli sõnastatuna:

Kui väidete süsteemi alamsüsteem on vastuoluline,
siis on ka väidetesüsteem ise vastuoluline.

Näiteks väide

A & ~A

on ilmne, eksplitsiitne vastuolu. Seetõttu on vastuolu ka väide

(A & ~A) & B,

kus *„B“* on *mistahes* väide.
Seetõttu:

Kui me avastame tekstis vastuolu,
kasutades minimaalse interpretatsiooni printsiipi,
siis see vastuolu säilib ka teksti rikkamates interpretatsioonides.

Mõnikord on aga tegemist *praktilise vastuoluga*, mille ilmsikstoomine formaalloogilisel kujul eeldaks *varjatud eelduste* väljakirjutamist. Nii on see näiteks tunnistajate ütluste puhul, kui üks tunnistaja nägi kahtlusalust isikut teatud ajal Tartus, teine tunnistaja aga samal ajal Tallinnas. Et saada kätte formaalloogilist vastuolu, peaksime välja kirjutama, et keegi ei saa olla korraga nii Tartus ja Tallinnas.

Kui aga kohtunik ütleb, et antud tunnistused on vasturääkivad, siis ta säärase varjatud eelduse ilmselt ka teeb. Kuid see asjaolu näitab ühtlasi, et minimaalse interpretatsiooni printsiip pole alati ja igas kontekstis arukas töövahend.

Veelgi keerulisem on analüüsida seda, millistel tingimustel on uuritav *järeldus* kehtiv, samuti *järelduse varjatud eeldusi* ja kuidas see kõik sõltub järelduse eelduste ning järelduse tulemi nõrgast või tugevast interpreteerimisest. Ruumipuudusel ei saa ma enda ja teiste analüüse siin kahjuks käsitleda.

Tudengite mõned tüüpilised vead

VIGA 1

Vaatleme järgmist lauset:

„Täna sajab vihma või lund."

Tudeng esitab järgmise kirjapildi:

A v B
„Täna sajab vihma või lund."

ja järgmise valemi:

A v B.

Märkide kasutamine otse lause kohal on küll abiks, kuid tudeng on jätnud esitamata oma märkide täpse definitsiooni:

„Tähistame: *A – Täna sajab vihma.*
B – Täna sajab lund."

VIGA 2

Vaatleme uuesti lauset:

„Täna sajab vihma või lund."

Tudeng esitab järgmise kirjapildi:

„Täna sajab vihma või lund."

ühes visandiga:

A – vihm;
B – lumi,

A v B.

Kuid märgid *„A"* ja *„B"* peavad lausearvutuses tähistama *väiteid*, mitte nimesid või omadusi. Seejuures mõni tudeng ei saagi sellest erinevusest sisuliselt aru ja kirjutab lisaks veel mõttetuid sümbolkeelseid avaldisi.

VIGA 3

Vaatleme lauset

„Täna ei saja vihma ega lund."

Tudeng tähistab:

A – Täna ei saja vihma.
B – Täna ei saja lund.

Ta esitab valemi

A & B.

See vastus on antud tähistuse puhul õige.
Kuid esialgse lause grammatilist vormi pole siin lõpuni analüüsitud. Sõna „ei" komponentlausetes

„Täna ei saja vihma." ja *„Täna ei saja ... lund."*

on ju tõlgendatav loogilise eitusena, negatsioonina, mida tähistame märgiga *„~"*. Seetõttu eeldaks esialgse lause täisanalüüs järgmist tähistust:

A – Täna sajab vihma.
B – Täna sajab lund.

Valemiks saame sel juhul aga:

~A & ~B.

VIGA 4

Ülaltoodud lause puhul tähistab tudeng:

A – Täna ei saja vihma.
B – Täna ei saja lund.

Valemina esitab ta aga:

~A & ~B.

Nüüd on aga tegemist juba *kahekordse* eitusega ja kokku saame algsele hoopis vastupidise lause: „Täna sajab nii vihma kui ka lund."

ÜLESANDEID

1. Esitage järgmised laused lausearvutuse sümbolkeeles:

1.1. Kui mul raha ei jätku, siis ma endale autot ei osta.
1.2. Seda naturaalarvu nimetatakse paarisarvuks siis ja ainult siis, kui see naturaalarv jagub kahega.
1.3. Ei Jaan ega Peeter ole päikesevarjutust näinud.
1.4. Vihma sajab vaid siis, kui ilm on pilvine.
1.5. Käituge minuga viisakalt, või muidu ma lähen kohe ära.
1.6. Sellel ristmikul ma sõidan otse või pööran suunatuld näidates paremale.
1.7. Kui vihma sajab, siis ma jään koju või võtan takso.
1.8. Ma lähen külla ainult siis, kui pole torm.

2. Millised järgmistest arutlustest on vastuolulised?

2.1. See arv on algarv, kuid ta pole algarv.
2.2. Ta oli sel kellaajal Tartus või Pärnus. Ta oli sel kellaajal nii Tartus kui Pärnus.
2.3. Kui mul on raha, siis ma ostan maja. Kui ma ostan maja, siis mul raha pole.
2.4. Dickensoni romaani peategelane ilmus oma sõbra pulma pärast iseenda matuseid. Tal oli halb tuju, sest ta oli juba 20 aastat mulla all olnud.

Autori ettepanekud lahendusteks ja vastusteks

1.1. Tähistame: *A – Mul jätkub raha.*
B – Ma ostan endale auto.

$$\sim A \rightarrow \sim B$$

1.2. Tähistame: *A – Seda naturaalarvu nimetatakse paarisarvuks.*
B – See naturaalarv jagub kahega.

$$A \leftrightarrow B$$

1.3. Tähistame: *A – Jaan on näinud päikesevarjutust.*
B – Peeter on näinud päikesevarjutust.

$$\sim A \;\&\; \sim B$$

1.4. Tähistame: *A – Vihma sajab.*
B – Ilm on pilvine.

$$A \rightarrow B$$

1.5. See ülesanne on problemaatilisem, kuivõrd väljend „käituge“ on käskivas kõneviisis, lausearvutus käsitleb aga vaid kirjeldusi.

Tähistame: *A – Te käitute minuga viisakalt.*
B – Ma lähen kohe ära.

Formaalloogilise mudelina pakun järgmist valemit:

$$\sim A \rightarrow B$$

(„Kui te minuga viisakalt ei käitu, siis ma lähen kohe ära.“)

See oleks teksti minimaalne interpretatsioon.
Kui olete aga kindel, et ta eeldab oma lausega ka seda,
et ta ei lähe kõnealusel hetkel kohe ära,
kui temaga viisakalt käitutakse, siis saate rikkama interpretatsiooni:

$$\sim A \leftrightarrow B$$

1.6. Pange sulud õieti.
1.7. Pange sulud õieti.
1.8. See on ju sama mis öelda: „Kui ma lähen külla, siis pole torm.“

2.1. „Kuid“ minimaalne interpretatsioon on „ja“. See annab vastuolu. Seega on vastuoluline ka lause väljendiga „kuid“.
2.2. Tegemist on vastuoluga, kui esile tuua üldtunnustatud varjatud eeldus.
2.3. „Mul on raha“ võib siin olla kahemõtteline. Kui mitte, siis vastuolu pole, sest võimalik on variant, et mul raha pole.
2.4. Tegemist on vastuoluga, kui esile tuua üldtunnustatud varjatud eeldus.

7. PREDIKAATARVUTUS

Subjektid ja predikaadid

Lausearvutuse vahenditega saime analüüsida, kuidas keeruline väide koosneb komponentväidetest, mis on ühendatud loogiliste konnektiividega. Grammatikas vastab sellele liitlause koosnemine alamlausetest, mis on ühendatud sidesõnadega.

Kuid paljud laused omavad sügavamat loogilist struktuuri, mida ei saa avada, kasutades üksnes lausearvutuse vahendeid. Väited on väidetud *millegi kohta* – ja selle millegi kohta väidavad nad *midagi.* Sellise täiendava struktuuri uurimisega tegelebki *predikaatarvutus.*

Predikaatarvutuses jäävad kehtima kõik lausearvutuse tähistused ja reeglid. Samas tuleb juurde rida uusi tähistusi ja reegleid.

***

SUBJEKTIKS nimetatakse predikaatarvutuses seda, mille *kohta* midagi öeldakse. Subjekt on loogiline alus. Subjekt on „allolev“ – see, mille „peale“ pannakse ütluses mingi omadus, seos vms. Grammatikas vastab subjektile näiteks *alus*, ent ka *sihitis.*

Subjekt on tavaliselt konkreetne asi, indiviid või isik (näiteks: „see vaas siin laual“ või „Edward Kennedy“). Grammatilised *pärisnimed* osutavad kindlasti sellistele subjektidele.

Kõnekeeles on tavaks nimetada „subjektiks“ kõnealust isikut, „objektiks“ aga kõnealust asja. Kuid loogikas nimetatakse neid ühtviisi subjektideks.

Kui kõnekeeles algavad pärisnimed suure algustähega, siis **predikaatarvutuses on tavaks saanud *subjekte tähistada väikeste tähtedega tähestiku algusest:***

a, b, c, d, ... jne.

Näiteks võime tähistada järgnevalt:[1]

a – Edward Kennedy;
b – George Bush;
c – Washington.

***

1 Ülesannete lahendamisel tuleb kasutuselevõetud märkide *a*, *b*, *c*, ... jne tähendused, kui need olemas on, alati samal moel välja kirjutada.

PREDIKAADIKS nimetatakse predikaatarvutuses seda, *mida* subjekti või subjektide kohta öeldakse. „Praedicātum“ tähendab ladina keeli *avalikult teatatu.* Grammatikas vastavad predikaatidele näiteks *öeldis* ja ka *määrus.*

Predikaati nimetatakse *ühekohaliseks*, kui temaga täislause moodustamiseks piisab, kui omistame selle predikaadi ühele subjektile.

Predikaat on *kahekohaline*, kui täislause mooodustamiseks tuleb nimetada kaht subjekti.
Üldiselt võib predikaat olla *n*-kohaline, kus *n* on mistahes naturaalarv.[2]

Predikaat pole kunagi konkreetne indiviid, asi või isik. Niisiis ei vasta predikaatidele need asjad, mida kõnekeeles nimetame pärisnimedega.

Ühekohaline predikaat* võib olla *omadus, liik, hulk* või *mõiste. Grammatikas vastavad *üldnimed* (näiteks: „inimene“ või „roheline“ või „paarisarv“) sellistele predikaatidele.

***Kahekohaline predikaat* on *seos* ehk *relatsioon* kahe subjekti vahel** (näiteks: „on suurem kui“).

Suuremakohalisi predikaate tavaliselt ei käsitleta, kuigi neid kõnekeeleski esineb (näiteks lauses „Juku kinkis Marile kella“ on kolm subjekti: „Juku“, „Mari“ ja „kell“ ning seega on siin tegemist *3*-kohalise predikaadiga).

Kui kõnekeeles on omadused ja üldnimed enamasti väikese algustähega, siis **predikaatarvutuses on tavaks saanud *predikaate tähistada suurte tähtedega tähestiku algusest:***

A, B, C, D, ... jne.

Näiteks võime tähistada[3]:

> ***Px – x on pikk;***
> ***Lx – x on lühike;***
> ***Ixy – x imetleb y-t.***[4]

> **NB! Seoste puhul on oluline muutujate *x* ja *y* järjekord. Kõik seosed pole sümmeetrilised. Sellest, et üks imetleb teist, ei tulene ju, et teine imetleb esimest.**

Kui kõnekeeles algab lause tavaliselt alusega ja sellele järgnevad öeldis ning määrus vms (nt „George on pikk“), siis predikaatarvutuses on vastupidi: lause algab predikaadiga ja alles seejärel kirjutatakse välja need subjektid, millele see predikaat omistatakse. Meie tähistuses:

> ***Pa – Edward Kennedy on pikk*** (subjektil *a* on omadus *P*);
> ***Lb – George Bush on lühike*** (subjektil *b* on omadus *L*);
> ***Iab – Edward Kennedy imetleb George Bushi*** (subjektid *a* ja *b* on seoses *I*);
> ***Iba – George Bush imetleb Edward Kennedyt*** (subjektid *b* ja *a* on seoses *I*).

---

2 Analoogiliselt räägitakse matemaatikas ühe-, kahe- ja ka *n*-muutuja funktsioonidest.
3 Ülesannete lahendamisel tuleb märkide tähendused, kui need olemas on, alati samal moel välja kirjutada.
4 Muutujatest *x*, *y*, *z*, ... jne räägime lähemalt järgmises alajaotuses.

Muutujad

Me võtsime kasutusele *muutujad* x, y, z, ... , märgistamaks, millises järjekorras tuleb seostes lugeda subjektide nimesid a, b, c, ... Muutujaid tähistatakse väikeste tähtedega tähestiku lõpust.
Kuid mis need muutujad on?

***

Matemaatikas oleme me muutujatega tuttavad. Näiteks

$$y = 1 + 2x$$

on sirge võrrand. Aga

$$x^2 = 9$$

on astmevõrrand, millel on kaks lahendit: $x = 3$ ja $x = -3$.

Matemaatikas võib muutujat x nimetada ka *tundmatu arvu nimeks.*

***

Loogikas muutujate nägemine on õppijaile tihti üllatav. Ometi pole siin midagi keerulist.

Muutujad ilmusid matemaatilisse loogikasse, sest selle rajajail oli eeskujuks matemaatiline analüüs. Viimane leiutati, rajamaks Newtoni mehaanikat. Kaasaegne matemaatiline loogika tekkis osalt ka sel põhjusel, et loogikud märkasid, et kaasaegses matemaatikas ja füüsikas kasutatakse rangeid järeldusi, mida ei saa kirja panna Aristotelese loogika keeles.

Muutujad *x, y, z,* ... on tundmatute subjektide nimed.

Soovi korral võime täpsustada, öeldes et x on tundmatu *arvu* nimi, et *kõnealuseks universumiks*[5] on arvud. Samuti võime kirjutada: „x tähistab inimesi“. Sel juhul on x täpsustamata *inimese* nimi.

Sisuliselt on muutuja *tühik* lauses (probel), punktiirjoon, kuhu nimi pole veel kirjutatud. Kui Px tähendab: „***x*** on pikk,“ siis see on sama, mis öelda: „**...** on pikk.“ Tegemist on ***lõpetamata lausega*** – nagu ankeediga, mis on veel täitmata ja kuhu isiku nimi pole veel kirjutatud.

Muutujate kasutamine on otstarbekas. Sest igale poole, kuhu on kirjutatud x, tuleb lause lõpetamisel panna *üks ja sama* subjekti nimi, näiteks mehe nimi a. Igale poole, kuhu on kirjutatud y, tuleb samuti panna *üks ja sama* subjekti nimi – mis ei pruugi aga olla a, vaid võib olla näiteks selle mehe a naise nimi b. ***x* ja *y* abil räägime me kahest täpsustamata isikust, kes ei pruugi kokku langeda.**

5 Ingl k: *the universe of discourse.*

Kvantorid

Ühte viisi, kuidas lõpetamata lausest täislauset saada, me juba tunneme. Selleks tuleb kõik muutujad asendada subjektide pärisnimedega.
Näiteks lõpetamata lausest

Px & ~Lx & Ixy & Ixx

(„*x* on pikk ja pole tõsi, et *x* on lühike ja *x* imetleb *y*-t ja *x* imetleb iseennast.“)

saame pärisnimede *a* ning *b* abil moodustada lõpetatud lause:

Pb & ~Lb & Iba & Ibb.

(„George Bush on pikk ja ta pole lühike, ning ta imetleb Edward Kennedyt ja iseennast.“

Ent on veel üks tähtis viis, kuidas lõpetamata lauseid lõpetada saab. Nimelt võime me kasutada *kvantoreid.*

***

KVANTOR on hulga- või kogusemääraja.

Kvantum on hulk, määr või kogus. Ladina keeli tähendab *quantum*: „kui palju“.[6]

Kõnekeeles on väga palju kvantoreid, näiteks: „kõik“, „enamus“, „enamik“, „75%“, „absoluutne enamus“, „pooled“, „palju“, „vähe“, „alati“, „mõnikord“ jne.

Aristotelese loogikas kasutatud väljendid **„kõik“** ja **„mõned“** (tähenduses „vähemalt üks“) on samuti kvantorid. Just neist kahest klassikalisest kvantorist alustabki predikaatarvutus. Ülejäänud kvantorid püütakse seejärel defineerida nende kahe kaudu.

Väljend „kõik“ tähistab UNIVERSAALSUSE ehk ÜLDISUSE KVANTORIT.
Väljend „mõned“ tähistab EKSISTENTSI ehk OLEMASOLU KVANTORIT.

Üldisuse kvantorile viitavad veel näiteks väljendid **„mistahes“**, **„suvaline“**, **„alati“**, **„kõikjal“**, **„igaüks“**, **„eranditult“**, **„mitte kunagi“**, **„mitte keegi“**, **„mitte kusagil“** (viimasel kolmel juhul üldeitavates lausetes).

Olemasolu kvantorile viitavad näiteks väljendid **„leidub“**, **„on olemas“**, **„vähemalt üks“**, **„keegi“**, **„miski“**, **„midagi“**, **„kusagil“**, **„kunagi“.**

6 Samast sõnatüvest on tuletatud ka sõnad *kvantitatiivne* ja *kvant*füüsika.

Matemaatilises loogikas kasutatakse kvantorite tähistamiseks sümboleid.

Üldisuse kvantorit tähistab tagurpidi suur *A* täht: ∀
Olemasolu kvantorit tähistab tagurpidi suur *E* täht[7]: ∃

Arvutist leiab need märgid „spetsiaalsete sümbolite“ alt alamlahtrist „sümbolid“.

Kvantori märgi taha tuleb alati kirjutada muutuja, millele see kvantor rakendub.

Kui üldisuse kvantor rakendub muutujale *x*, siis tulebki kirjutada: **∀x,** mida loetakse:
„Iga *x* korral ...“

Kui olemasolu kvantor rakendub muutujale *x*, siis tulebki kirjutada: **∃x,** mida loetakse:
„Leidub selline *x*, mille korral ...“

Seejärel tuleb kirja panna, mis siis iga või mõne *x* puhul aset leiab. Valem

∀x (...)

ütleb, et iga *x* puhul on tõsi see, mis sulgudes öeldud. Valem

∃x (...)

aga ütleb, et on olemas vähemalt üks selline *x*, mille puhul on tõsi see, mis sulgudes öeldud.

Näiteks valem

∀x Bx

ütleb, et kõikidel *x*-del on omadus *B*, aga valem

∃x Bx

ütleb, et vähemalt ühel *x*-l on omadus B. Valem

$$\forall x\ (Rx \rightarrow Bx) \tag{7.1}$$

ütleb, et iga *x* korral, kui *x*-l on omadus *R*, siis on tal ka omadus *B* (kõik *R*-d on *B*-d). Valem

$$\exists x\ (Rx\ \&\ Bx) \tag{7.2}$$

aga ütleb, et leidub *x*, millel on nii omadus *R* kui ka omadus *B* (mõni *R* on *B*).

7 Üldisuse kvantor on inglise keeli ***Universal** quantifier*, olemasolu kvantor aga ***Existential** quantifier.* Nende fraaside esitähtedega ***U*** ja ***E*** tähistatakse kvantoreid alternatiivses tähistusviisis.

Kui me tähistasime:

> ***Rx – x on vares;***
> ***Bx – x on must,***

siis valem (7.1) ülal ütleb: „Iga *x* korral: kui *x* on vares, siis *x* on must,“ mis ilma *x*-deta tähendab kõnekeeli: „Kõik varesed on mustad.“

Valem (7.2) ülal aga ütleb: „Leidub selline *x*, mis on vares ja mis on must,“ mis ilma *x*-deta tähendab kõnekeeli: „Mõned varesed on mustad.“

***

Naaseme nüüd küsimuse juurde, kuidas kvantorite abil lõpetada lõpetamata lauseid.

Sidumata muutuja on muutuja, mida tema ees vasakul kvantoreis ei esine. ***Seotud muutuja*** on muutuja, mis esineb tema ees vasakul olevas kvantoris.[8] Näiteks avaldises

$$\mathbf{Rx}$$

on *x* sidumata muutuja. Avaldises

$$\exists\mathbf{x}\ \mathbf{Ixy}$$

on *x* seotud muutuja, *y* aga sidumata muutuja. Avaldises

$$\exists\mathbf{x}\ \exists\mathbf{y}\ \mathbf{Ixy} \qquad \textbf{(7.3)}$$

on mõlemad muutujad *x* ja *y* seotud muutujad.
Avaldist (7.3) tuleb lugeda nii: „Leidub selline *x* ja leidub selline *y*, et *x* ja *y* on seoses *I*.“ Kui *Ixy* tähendas: „*x* imetleb *y*-t,“ siis lause (7.3) ütleb: „Leidub selline *x* ja leidub selline *y*, et *x* imetleb *y*-t. Kui oli mainitud, et *x* ja *y* tähistavad inimesi, siis saame kõnekeeli lause: „Keegi imetleb kedagi.“

Ainult lause, milles kõik muutujad on seotud, on lõpetatud lause.
Lause, milles esineb vabu, sidumata muutujaid, on lõpetamata lause.

Kolmest näitest ülal vaid lause (7.3) on täislause. Lõpetatud lause näitena toome veel avaldise
∃x Ixa, mis võib tähendada näiteks: „Keegi imetleb Edward Kennedyt.“ Kokkuvõttes:

Lõpetamata lause lõpetamiseks tuleb iga muutujaga teha ühte kahest:
asendada ta subjektinimega
või siduda ta kvantoriga.

---

8 Iga muutuja tohib esineda vaid ühes kvantoris.

Loogiline ruut

Nüüd saame predikaatarvutuse sümboleis üles kirjutada seosed traditsioonilise loogika nn „loogilisest ruudust“. Vaatame näiteks lauseid

A – Kõik varesed on mustad; *E – Ükski vares pole must;*
I – Mõni vares on must; *O – Mõni vares pole must.*

ESIMENE VERSIOON[9]**.** **Tähistagu *x, y, ...* vareseid.** Tähistame veel: ***Mx – x on must.*** Siis:

A: $\forall x\ Mx$ **E:** $\forall x \sim Mx$
I: $\exists x\ Mx$ **O:** $\exists x \sim Mx$

Järeldused *A* ⇒ *I* (*A*-st järeldub *I*) ja *E* ⇒ *O* saavad siis järgmise kuju:

$$\frac{\forall x\ Mx}{\exists x\ Mx} \qquad \frac{\forall x \sim Mx}{\exists x \sim Mx}\ . \tag{7.4}$$

Seosed loogilise ruudu diagonaalidel saavad aga järgmise kuju:

$$\sim\forall x\ Mx = \exists x \sim Mx \tag{7.5}$$
$$\sim\exists x\ Mx = \forall x \sim Mx \tag{7.6}$$

Viimast kahte reeglit ülal nimetatakse ***duaalsuse seadusteks.*** Need reeglid ütlevad, et **eituse märgi ~ viimisel kvantori märgi taha vahetuvad kvantorid ∀ ja ∃.**

Valemis (7.5) ütleb vasak pool: „Pole tõsi, et kõik varesed on mustad.“ Parem pool ütleb: „Leidub vares, kes pole must.“
Valemis (7.6) ütleb vasak pool: „Pole tõsi, et leidub vares, kes on must.“ Parem pool ütleb: „Kõik varesed on mitte-mustad.“

TEINE VERSIOON. Tähistame: ***Vx – x on vares; Mx – x on must.*** Siis saame:

A: $\forall x\ (Vx \rightarrow Mx)$
E: $\forall x\ (Vx \rightarrow \sim Mx)$.

I ja *O* kirjapanemisel satume aga segadusse. Nimelt tähendab **$\exists x\ (Vx \rightarrow Mx)$:** „Leidub miski, mis on must, kui ta on vares.“ Valem **$\exists x\ (Vx\ \&\ Mx)$:** ütleb aga: „Vähemalt üks vares on must.“ See viimane aga ei järeldu lausest *A* (vt esimene järeldus (7.4)), kui me ei eelda – nagu Aristoteles eeldas –, et vähemalt üks vares on olemas: **$\exists x\ Vx$.** See asjaolu on XX sajandi loogikuile sageli tekitanud peavalu − tõepoolest: kui mõisteliselt kõik varesed oleks mustad, siis sellest ei järelduks ju veel, et ükski vares üldse reaalselt või mittevastuoluliselt mõeldavaltki olemas on.

9 Põhimõtteliselt on selle versiooni ekvivalendiks nn „tõkestatud kvantorite“ kasutamine.

Süllogismid

Ka Aristotelese süllogisme saab esitada ühekohaliste predikaatidega.[10]

Vaatleme kolme süllogismi:

1. **Kõik inimesed on surelikud. Sokrates on inimene. Seega Sokrates on surelik.**
2. **Kõik inimesed on surelikud. Mõned olendid on inimesed. Seega mõned olendid on surelikud.**
3. **Kõik inimesed on surelikud. Ükski jumal pole surelik. Seega ükski jumal pole inimene.**

Tähistame: ***Ix – x on inimene;***
Sx – x on surelik;
a – Sokrates;
Ox – x on olend;
Jx – x on jumal.

Siis saame järgmised predikaatarvutuse kehtivad järeldused:

1.

$$\frac{\forall x\,(Ix \rightarrow Sx) \qquad Ia}{Sa}$$

2.

$$\frac{\forall x\,(Ix \rightarrow Sx) \qquad \exists x\,(Ox \,\&\, Ix)}{\exists x\,(Ox \,\&\, Sx)}$$

3.

$$\frac{\forall x\,(Ix \rightarrow Sx) \qquad \forall x\,(Jx \rightarrow \sim Sx)}{\forall x\,(Jx \rightarrow \sim Ix).}$$

Aga loomulikult saab ühekohaliste predikaatidega kirja panna ka selliseid kehtivaid järeldusi, mis pole Aristotelese süllogismid.

Lisaks sellele on meie käsutuses ka kahe- ning rohkemakohalised predikaadid.

10 Siingi tuleb aga mõnikord meelde tuletada, et Aristotelese loogikas on ehk tehtud vaikimisi eeldus mingi liigi esindaja olemasolust – eeldus, et see liik pole tühi hulk.

Seosed

Tähistagu muutujad ***x*****,** ***y*** **ja** ***z*** **inimesi.** Tähistame veel: ***Axy*** **–** ***x armastab y-t.***

Lausearvutuse tehteid kasutamata saab üldisuse- ja olemasolu kvantoritega seosest *Axy* moodustada täpselt *8* erinevat lauset:

1. **∃x∃y Axy** – **„Leidub selline *x* ja leidub selline *y*, et see *x* armastab seda *y*-t."**
2. **∀x∀y Axy** – **„Iga *x* ja iga *y* korral *x* armastab *y*-t."**
3. **∃x∀y Axy** – **„Leidub selline *x*, et iga *y* korral see *x* armastab seda *y*-t."**
4. **∃x∀y Ayx** – **„Leidub selline *x*, et iga *y* korral *y* armastab seda *x*-i."**
5. **∀x∃y Axy** – **„Iga *x* korral leidub selline *y*, keda see *x* armastab."**
6. **∀x∃y Ayx** – **„Iga *x* korral leidub selline *y*, kes seda *x*-i armastab."**
7. **∃x Axx** – **„Leidub selline *x*, kes armastab iseennast."**
8. **∀x Axx** – **„Iga *x* puhul see *x* armastab iseennast."**

Ülal oli väga oluline jälgida muutujate järjekorda. Kõnekeeelsete lausetena saame kirjutada:

1. **Keegi armastab kedagi.**
2. **Kõik armastavad kõiki.**
3. **Keegi armastab kõiki.**
4. **On keegi, keda kõik armastavad.**
5. **Igaüks armastab kedagi.**
6. **Igaüht armastab keegi.**
7. **Keegi armastab iseennast.**
8. **Igaüks armastab iseennast.**

Kui kasutada ka lausearvutuse tehteid, siis võime kirja panna keerulisemaid lauseid. Näiteks

$$\exists x \exists y\ (Axy\ \&\ {\sim}Ayx)$$

teatab: **„Keegi armastab kedagi, kes teda vastu ei armasta."**

Kui ***a*** **tähistab Marit,** siis lause **∃x Axa → ∀y Aay** teatab, et kui keegi Marit armastab, siis Mari armastab kõiki. Kui ***x*** **≠** ***y*** **tähendab, et** ***x*** **ja** ***y*** **pole üks ja sama isik,** siis

$$\exists x \forall y\ [(x \neq y) \rightarrow {\sim}Axy]$$

ütleb: **„On keegi, kes ei armasta kedagi, kes pole tema ise."**

***

Seost nimetatakse ***sümmeetriliseks***, kui ta on alati pööratav:

$$\forall x \forall y\, (Axy \rightarrow Ayx)$$

SÜMMEETRILINE SEOS

Seost nimetatakse ***antisümmeetriliseks,*** kui ta on alati mittepööratav:

$$\forall x \forall y\, (Axy \rightarrow \sim Ayx)$$

ANTISÜMMEETRILINE SEOS

Aritmeetikas on võrdumise seos sümmeetriline. Kui $2 + 3 = 5$, siis $5 = 2 + 3$, ja nii ka kõikide teiste arvude puhul. Võrratus on aga antisümmeetriline: kui $3 > 2$, siis ei vasta tõele, et $2 > 3$, ja nii ka kõikide teiste arvude puhul.

Paljud seosed pole ei sümmeetrilised ega ka antisümmeetrilised. Mõnede elementide puhul on seos siis mõlemapidine, mõnede elementide puhul aga mitte:

$$\exists x \exists y\, (Axy \,\&\, Ayx) \,\&\, \exists x' \exists y'\, (Ax'y' \,\&\, \sim Ay'x')$$

Näiteks armastuse seos on selline: mõni armastus leiab vastuarmastuse, aga mõni ei leia.

***

Seoseid õpiti analüüsima juba traditsioonilise loogika arengu lõppstaadiumis, täiendina Aristotelese süllogismidele. Seosed assimileeriti aga ennekõike kaasaegsesse matemaatilisse loogikasse.

Ka seostega saab kirja panna järeldusi, kuid mitte selliseid, mida tundis Aristotelese süllogistika. Näiteks **kehtib järgmine järeldus:**

$$\boxed{\exists x \forall y\, Axy \Rightarrow \forall y \exists x\, Axy.}$$

Tõepoolest: kui keegi armastab kõiki, siis on see ju vältimatu tõde, et igaüht armastab keegi.

Vastupidises suunas aga järeldada ei saa. Sellest, et igaüht armastab keegi, ei järeldu ju, et on keegi, kes kõiki armastab. Kui keegi on kõigi inimeste isa, siis on igal inimesel isa. Kuid sellest, et igal inimesel on isa, ei järeldu rangelt, et keegi (Adam; Jumal) on kõigi inimeste isa.

Tudengite mõned tüüpilised vead

VIGA 1

Vaatleme järgmist lauset:

„Kõik linnud lendavad."

Tudeng esitab järgmise valemi:

$$\forall x\ (Ax \rightarrow Bx).$$

Seejuures ta teeb ühte kahest:

1) Jätab välja kirjutamata, mida tähendavad märgid *A* ja *B*.
2) Kirjutab: „*A* – lind". Kuid ta pole märkinud muutujat *x*. Pealegi lihtsalt märk *A* peaks tähistama mitte predikaati, vaid lausearvutuse väidet.

VIGA 2

Tudeng tähistab eelmise lause puhul korrektselt: „*Ax* – *x* on lind; *Bx* – *x* on lendaja." Kuid ta esitab valemi

$$\forall x\ (Ax \ \&\ Bx),$$

mis tähendab hoopiski: „Kõik asjad, mida saab nimetada, on linnud ja nad on lendajad."

VIGA 3

Vaatleme lauset

„Mõned linnud on lendajad."

Tudeng kirjutab valemi

$$\exists x\ (Ax \rightarrow Bx),$$

mis tähendab hoopiski: „Leidub selline asi, mis juhul, kui ta on lind, on lendaja." Õige valem on:

$$\exists x\ (Ax \ \&\ Bx),$$

mis tähendab: „Leidub selline asi, mis on lind ja mis on lendaja."

VIGA 4

Vaatleme lauset

„Igal potil on talle sobiv kaas."

Tudeng kirjutab: „*P* – pott, *K* – kaas," või „*K* – poti sobiv kaas," ning esitab seejärel arusaamatu valemi või esitab muutujad x ja y vales järjekorras – sest ta jättis ju oma tähistuses märkimata muutujad x ja y ning nende järjekorra.

VIGA 5

Eelmise lause puhul kirjutab tudeng: „*Px* – x on pott, *Kx* – x on kaas," ning esitab siis valemi

$$\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{Px} \rightarrow \mathbf{Kx}).$$

Kuid esialgses lauses oli tegemist seosega, mitte omadusega. „Igal potil on talle sobiv kaas" asemel üritas tudeng nüüd ütelda: „Igal potil on kaas." Kuid sedagi tegi ta valesti – sest tema tähistuse puhul sai ta hoopis lause „Iga asi, mis on pott, on kaas." Lause „Igal potil on kaas" saanuks ta siis, kui ta tähistanuks hoopis: „*Kx* – x-l on kaas."

VIGA 6

Sama lause puhul tähistab tudeng: „*Kxy* – kaas x sobib potile y." Seejärel esitab ta valemi

$$\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y}\ \mathbf{Kxy}.$$

Kuid see valem ütleb antud tähistuse puhul hoopiski: „Iga kaas sobib mingile potile." Ta on muutujate x ja y järjekorda valesti lugenud. Õige valem antud tähistuse puhul olnuks selline:

$$\forall \mathbf{y} \exists \mathbf{x}\ \mathbf{Kxy}.$$

VIGA 7

Tudeng üritab predikaatarvutuse valemile teha tõesustabelit. See aga on võimatu, sest väljendi „kõik" tõttu tükib tabelisse tulema lõpmatult palju ridasid![11]

***

Lisaks sellele teevad tudengid sageli neidsamu vigu, mida juba lausearvutuses tehti. Näiteks märgitakse eitus nii sümbolite tähistusse kui ka valemisse vms.

11 Predikaatarvutuse reeglite tõestamine on raskem teooria ja seda me siin ei käsitle, lootes lugejate heale intuitsioonile ja võimele lihtsate reeglite puhul näidete abil aru saada, kas reegel kehtib. Kuid endiselt saab mistahes esitatud järelduse kehtimatust tõestada, tuues üheainsa tabava *kontranäite* reaalsest elust.

ÜLESANDEID

1. Kirjutage predikaatarvutuse sümboleis:

   1.1. Kõikidel elevantidel on lont ja nad ei oska lennata.
   1.2. Kõikidel elevantidel on lont ja ükski elevant ei oska lennata.
   1.3. Ükski elevant ei oska lennata.
   1.4. See pole tõsi, et kõik elevandid oskavad lennata.
   1.5. See pole tõsi, et ükski elevant ei oska lennata.
   1.6. Kui mõni elevant oskab lennata, siis pole tal lonti.

2. Vaadake eelmises ülesandes lauseid 1.1 – 1.6. Millisest lausest siin järeldub milline lause?

3. Kirjutage predikaatarvutuse sümboleis:

   3.1. Maailm on alati olemas.
   3.2. Kusagil on tulekahi.

4. Millised järgmistest järeldustest kehtivad?

   4.1. $\exists x\ Px \Rightarrow \forall x\ Px$
   4.2. $[\forall x\ (Px \rightarrow Rx)\ \&\ {\sim}Ra] \Rightarrow {\sim}Pa$.

5. Kirjutage predikaatarvutuse sümboleis:

   5.1. Iga sportlane kaotab kellegile.
   5.2. Ükski sportlane ei kaota iseendale.
   5.3. Martin ei kaota kellegile.
   5.4. See pole tõsi, et Martin kaotab kõigile.

6. Millised järgmistest järeldustest kehtivad?

   6.1. $\forall x\ \exists y\ Axy \Rightarrow \forall y\ \exists x\ Axy$
   6.2. $\forall x\ \exists y\ Ayx \Rightarrow \forall y\ \exists x\ Ayx$
   6.3. $\forall x\ \forall y\ Axy \Rightarrow \forall y\ \exists x\ Axy$.

Autori ettepanekud lahendusteks ja vastusteks

1. Tähistame: *Ex* – *x* on elevant; *Lx* – *x*-l on lont; *Fx* – *x* oskab lennata.

    1.1. $\forall x\ [Ex \rightarrow (Lx\ \&\ {\sim}Fx)]$
    1.2. $\forall x\ (Ex \rightarrow Lx)\ \&\ \forall y\ (Ey \rightarrow {\sim}Fy)$
    1.3. $\forall x\ (Ex \rightarrow {\sim}Fx)$
    1.4. ${\sim}\forall x\ (Ex \rightarrow Fx)$
    1.5. ${\sim}\forall x\ (Ex \rightarrow {\sim}Fx)$
    1.6. $\forall x\ [(Ex\ \&\ Fx) \rightarrow {\sim}Lx]$

2. Laused 1.1 ja 1.2 on samaväärsed: üks järeldub teisest ja vastupidi. Lause 1.4. järeldub lausest 1.3.

3.1. Tähistagu *x* ajahetki, *Ox* – maailm on hetkel *x* olemas. Siis: $\forall x\ Ox$.
3.2. Tähistagu *x* ruumipunkte, *Tx* – punktis *x* on tulekahi. Siis: $\exists x\ Tx$.

4.1. See järeldus ei kehti.
4.2. See järeldus kehtib. Tegemist on Aristotelese süllogismiga.

5. Tähistagu *x* ja *y* inimesi. Tähistame: *Sx* – *x* on sportlane; *Kxy* – *x* kaotab *y*-le, *a* – Martin.

    5.1. $\forall x\ (Sx \rightarrow \exists y\ Kxy)$
    5.2. $\forall x\ (Sx \rightarrow {\sim}Kxx)$
    5.3. ${\sim}\exists x\ Kax$
    5.4. ${\sim}\forall x\ Kax$.

6.1. See järeldus ei kehti. Näiteks sellest, et igaüks kedagi armastab, ei saa rangelt järeldada, et igaüht armastab keegi.

6.2. See järeldus ei kehti. Näiteks sellest, et igaüht armastab keegi, ei saa rangelt järeldada, et igaüks ise kedagi armastab.

6.3. See järeldus kehtib. Näiteks sellest, et kõik armastavad kõiki, kindlasti tuleneb, et on tõene öelda, et igaüht armastab keegi.