Engelen, Eva-Maria
Kurt Gödels mathematische Anschauung und John P. Burgess' heuristische Intuition
Sektionsthema: Philosophie der Mathematik
Dienstag, 30. September 2014

Kurt Gödels mathematische Anschauung und John P. Burgess' heuristische Intuition[1]

John P. Burgess kritisiert Kurt Gödels Begriff der mathematischen oder rationalen Anschauung und erläutert, warum heuristische Intuition dasselbe leistet wie rationale Anschauung, aber ganz ohne ontologisch überflüssige Vorannahmen auskommt. Laut Burgess müsste Gödel einen Unterschied zwischen rationaler Anschauung und so etwas wie mathematischer Ahnung, aufzeigen können, die auf unbewusster Induktion oder Analogie beruht und eine heuristische Funktion bei der Rechtfertigung mathematischer Aussagen einnimmt. Nur, wozu benötigen wir eine solche Annahme? Reicht es nicht, wenn die mathematische Intuition als Heuristik funktioniert? Für Gödel sind Mengen Extensionen von Begriffen und er beharrt beispielsweise auf dem ontologischen Objektstatus von Mengen, weil Denken für ihn einen Input benötigt, den es selbst nicht zu liefern im Stande ist. Im Falle der mathematischen Anschauung darf dieser Input allerdings nicht subjektiv kontingent sein, wenn es sich um objektiv gültige Theorien handeln soll. (Zudem vertritt Gödel eine Korrespondenztheorie der Wahrheit.[2])

Der Begriff der heuristischen Intuition, den Burgess expliziert, stammt hingegen nicht zuletzt aus der kognitiven Psychologie, der bei der Verarbeitung impliziter, also unbewusster Informationen ansetzt und so das menschliche Vermögen erklärt, Entscheidungen und Urteile zu fällen, ohne sich der Urteilsgrundlagen bewusst zu sein. Über den ontologischen oder erkenntnistheoretischen Status dieser Urteilsgrundlagen sagen diese Theorien nichts aus. Sie könnten auch subjektiv kontingent zustande gekommen sein. Ihr normativer Anspruch ergibt sich lediglich aus „dem Funktionieren“, nicht daraus, dass es sich um Gesetze des Wahrseins handelt.

John P. Burgess hat Kurt Gödels Begriff der mathematischen Anschauung in seinem neuesten Aufsatz unter die Lupe genommen. Er legt zunächst seine Kritik an Gödels seiner Meinung nach vagen Äußerungen dazu dar und erläutert anschließend, warum er der Auffassung ist, dass eine mathematisch heuristische Intuition, die ganz ohne ontologisch überflüssige Vorannahmen auskommt, dasselbe leisten kann wie mathematische Anschauung[3] bei Gödel.

---

[1] Sektion: Philosophie der Mathematik; Dienstag, den 30. September 2014, XXIII. Kongress der Deutschen Gesellschaft für Philosophie 2014 in Münster.
[2] Vgl. hierzu Floyd/Kanamori, "Gödel vis-à-vis Russell: Logic and Set Theory to Philosophy", im Erscheinen.
[3] Im Englischen ‚intuition'.

Burgess' Aufsatz endet mit dem Eingeständnis, nicht zu wissen, wie Gödel sich gegen diese Kritik verteidigen würde. Dafür soll in diesem Beitrag ein Vorschlag unterbreitet werden.

Eine der wichtigsten Quellen, in denen sich Gödel zu mathematischer Anschauung äußert, ist sein berühmter Aufsatz "What is Cantor's continuum problem". Dort schreibt er etwa:

> Despite their remoteness from sense experience we do have something like a perception of the objects of set theory. [...] Mathematical intuition need not be conceived of as a faculty giving an *immediate* knowledge of the objects concerned. Rather it seems that, as in the case of physical experience, we *form* our ideas also of those objects on the basis of something else which *is* not immediately given. Only this something else here is *not*, or not primarily, the sensations'.[4]

Im Anschluss daran legt Gödel dar, dass Denken ein rein kombinatorisches Neuanordnen ist, durch das man keine neuen Elemente erhält. Hierin lässt sich ein Erfordernis für die Analogiebildung zwischen sinnlicher Wahrnehmung und mathematischer Anschauung bei Gödel sehen,[5] weil beide einen Input liefern, den das Denken allein nicht hervorzubringen vermag. Ein anderer Grund die Analogie stark zu machen, besteht für Gödel darin, Mengen (aber nicht Klassen[6]) als Objekte anzusehen, weil sie nicht selbst-referentiell sind.[7]

Nun stellen der iterative Mengenbegriff und unser Verständnis der Axiome der Mengenlehre wohl die bekanntesten Beispiele dar, wenn es darum geht zu illustrieren, was mathematische Anschauung ist. Hierzu wendet Burgess zunächst ein, dass Gödel einen unzulässigen Sprung von der Anschauung mengentheoretischer Objekte zur mathematischen Anschauung der Wahrheit mengentheoretischer Axiome vollziehe, verteidigt Gödels Ansatz aber dann auch selbst insofern als man zumindest davon ausgehen könne, dass die Wahrnehmung mengentheoretischer Begriffe es ermögliche, mengentheoretische Axiome wahrzunehmen:

> Whereas it is understandable why perceiving "set-theoretic concepts (set and elementhood) would involve […] perceiving or grasping *that* set-theoretic axioms are supposed to hold;" it is not clear why one should "think the same about perceiving set-theoretic *objects* (sets and classes)".

Das schlagende Argument gegen das Konzept der mathematischen Anschauung sieht Burgess selbst letztlich darin, dass sich all das, was sie leisten soll, auch durch weniger problematische Fähigkeiten wie etwa eine Form der heuristischen mathematischen Intuition erklären ließe:

> The crucial philosophical question is simply whether there is any real need to posit a special intellectual faculty in order to account for the experiences of the kind Gödel describes, where axioms "force themselves upon us," or whether on the contrary such experiences can be

[4] Gödel, *CW*, vol. II, S. 268.
[5] Potter 2001, S. 340.
[6] See also Wang 1996, S. 273-274: "Sets are objects. […] Classes are neither concepts nor objects. They are an analogue and a generalization of sets. The *range* of every concept is, by definition, a class."
[7] "Sets are quasi-physical. That is why there is no self-reference." Vgl. Wang 1996, S. 270 Nr. 8.5.6.

> explained in terms of faculties already familiar and less problematic. For there are other, more mundane, varieties of nonsensory intuition.

Der nicht-sensorische Begriff der Intuition, den Burgess expliziert,[8] hat wie gesagt zumindest Parallelen zur kognitiven Psychologie. Ein solcher philosophischer Ansatz ist Gödels eigener Philosophie jedoch zuwiderlaufend. Aus Gödels eigener philosophischer Position heraus lässt sich aber erklären, warum Gödel sowohl auf der Wahrnehmung mathematischer Objekte als auch auf einer Art Wahrnehmung mathematischer Begriffe beharrt:

> Sets are objects but concepts are not objects. We perceive objects and understand concepts. *Understanding is a different kind of perception*[9]: it is a step in the direction of reduction to the last cause. [10]

Dieses Zitat spricht dafür, dass Gödel zwei Arten der Wahrnehmung benötigt, einmal die konkrete Anschauung bzw. Wahrnehmung mathematischer Objekten und zum anderen eine Art der Wahrnehmung mathematischer Begriffe, nämlich das Verstehen dieser Begriffe. Von der Wahrnehmung mathematischer Begriffe muss Gödel ausgehen, um das Erfassen und Finden mengentheoretischer Axiome verstehbar zu machen. Dass Gödel auf dem ontologischen Objektstatus von Mengen beharrt, hat wie gesagt zum einen damit zu tun, dass Denken für Gödel einen Input benötigt, und dieser Input zum anderen nicht subjektiv kontingent sein darf, wenn es sich um objektiv gültige Theorien handeln soll.

Gödel vergleicht in überlieferten Äußerungen des Öfteren mathematische (konkrete) Anschauung und Sinneswahrnehmungen. Solche Vergleiche sind für die meisten Forscher irritierend. Schauen wir sie uns daher etwas genauer an, um uns ein Bild von dem Status dieser Vergleiche bilden zu können.

Mathematische Anschauung und Sinneswahrnehmung

Der Grund für den Vergleich von mathematischer Anschauung und Sinneswahrnehmung sieht der Philosoph der Mathematik, Michael Potter, in dem Erfordernis zu erklären, wie es kommt, dass wir Begriffe wie ‚Menge' oder ‚Zahl' verstehen, obgleich dieses Verstehen nicht durch einen endlichen Formalismus beschreibbar ist.[11]

Das Vermögen, welches es uns ermöglicht, Begriffe wie ‚Menge' oder ‚Zahl' zu verstehen, beschreibt Gödel selbst wie folgt:

> Despite their remoteness from sense experience we do have something like a perception of the objects of set theory. [...] Mathematical intuition need not be conceived of as a faculty giving

---

[8] Er spricht anders als in der Psychologie üblich allerdings von heuristischer Intuition.
[9] Hervorhebung von der Autorin. Verstehen ist keine konkrete Anschauung.
[10] Wang 1996, S. 235, Nr. 7.3.12.
[11] Potter 2001, S. 339-349: "What we need to do, then, is to explain how our grasp of the meaning of terms such as 'number' or 'set' is possible, given that this grasp cannot be described in any finite formalism. Gödel thought it was necessary to appeal to something he called 'mathematical intuition' to explain this grasp, and he has, […] become famous for thinking of it as a 'mysterious faculty' in some ways analogous to sense perception." Gödel selbst spricht nicht von einem mysteriösen Vermögen.

> an *immediate* knowledge of the objects concerned. Rather it seems that, as in the case of physical experience, we *form* our ideas also of those objects on the basis of something else which *is* not immediately given. Only this something else here is *not*, or not primarily, the sensations'.[12]

Gödel fährt danach fort zu erläutern, dass Denken ein rein kombinatorischer Prozess sei. Ein solcher Vorgang bringt keine neuen Elemente hervor, wohingegen das im Falle der Sinneswahrnehmung sowie der mathematischen Anschauung, welche einen solchen Input liefern, anders ist.[13] Was er uns über diese Form der Anschauung mitteilt, bleibt allerdings sehr im Vagen. Gödel lässt uns lediglich wissen, dass es sich um eine "kind of relationship between us and reality" handelt. An dieser Vagheit entzündet sich denn auch Burgess' Kritik an den Ausführungen Gödels.

Gödels Analogie bezieht sich jedoch in erster Linie auf die Wahrnehmung physikalischer und mathematischer Objekte wie es etwa Mengen sind (nicht aber Klassen).[14] Für diese Analogie führt er Gründe an, die ernst zu nehmende sind:

> It is not in the ideas (of *set* and *concept*) themselves that every set is the extension of a concept. Sets might exist which correspond to no concepts. The proposition "for every set, there is a [defining] concept" requires a proof. But I conjecture that it is true. If so, everything (in logic and mathematics) is a concept: a set, if extensional; and a concept (only) otherwise).[15]

Für Gödel sind Mengen also extensionale Gebilde, sie gehören zur Mathematik, und Begriffe intensional, sie gehören zur Logik. Die hervorzuhebende Bemerkung lautet: "every set is the extension of a concept".

Die Analogie zwischen Sinneswahrnehmung und mathematischer Anschauung hat hingegen nicht denselben Stellenwert, wie ihn der zwischen Gegenständen und mathematischen Objekten hat. So können wir bei Wang (1996) diesbezüglich lesen:

> At least in his discussion with me, Gödel did not identify mathematical intuition with something like the perception of sets. That may be why he told me specifically that it was a mistake in the original text to say "in this perception, i.e., in mathematical intuition". […] In fact, my impression is that mathematical intuition for him is primarily our intuition that certain propositions are true—such as modus ponens […], some of the axioms of set theory, and so on. Only derivatively may we also speak of the perception of sets and concepts as mathematical intuition.[16]

---

[12] Gödel, *CW*, vol. II, S. 268.
[13] Vgl. auch: Potter 2001, S. 340.
[14] Vgl. auch Wang 1996, S. 273-274: "Sets are objects. […] Classes are neither concepts nor objects. They are an analogue and a generalization of sets. The *range* of every concept is, by definition, a class." Aber auch Wang 1996, S. 270, Nr. 8.5.6.: "Sets are quasi-physical. That is why there is no self-reference."
[15] Wang 1996, S. 274.
[16] Wang 1996, S. 226-227.

Nun muss man allerdings selbst wenn man Wangs Einschätzung kommentar- und kritiklos hinnimmt,[17] eine Interpretation dafür anbieten, wie Gödels Äußerungen über mathematische Wahrnehmung und insbesondere die über die Wahrnehmung von Mengen ("perceiving sets") zu verstehen sind. Gödel geht nämlich nicht davon aus, dass wir Mengen auf dieselbe Weise wahrnehmen wie wir Tische, Stühle oder Bäume wahrnehmen.

Was mit der Wahrnehmung von Mengen gemeint sein könnte, lässt sich am Beispiel des iterativen Mengenkonzeptes erläutern. Demnach ist unter einer Menge eine „Zusammenfassung *M* von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten *m* unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von *M* genannt werden) zu einem Ganzen" zu verstehen.[18] Diese Objekte sind die Elemente der Menge. Der entscheidende Punkt daran ist, dass die Elemente, damit sie zusammengesammelt werden können, zuvor schon da sein müssen, was dazu führt, dass eine Menge nicht Element ihrer selbst sein kann, weil es sie nicht gibt, ehe ihre Elemente zusammengenommen worden sind. Dadurch werden die mengentheoretischen oder extensionalen Russellschen Paradoxien (Beispiel: Lügnerparadox) verhindert, welche dadurch entstehen, dass eine Menge Element ihrer selbst ist.

Nun kann es sich bei der Zusammenfassung entweder um eine asymmetrische Abhängigkeitsrelation handeln, bei der die Mengen einer späteren Stufe von denen einer früheren Stufe in ihrer Existenz abhängen, aber nicht umgekehrt. Oder aber es handelt sich um einen Prozess, der als ein zeitlicher zu verstehen ist, weil das Zusammenfassen vollzogen werden muss. Letzteres ruft die Frage hervor, inwiefern der Prozess auch dann noch, wenn man die „Prozeß-Variante" des iterativen Mengenbegriffs ins Auge fast, objektiv zu nennen ist und dementsprechend, inwiefern Gödel zugleich am iterativen Mengenbegriff festhalten kann und Mengen objektiv nennen kann, die wahrgenommen werden.

Ein Vergleich zwischen der Wahrnehmung eines Objektes und einer Menge mag geeignet sein zu verstehen, warum Gödel auch in letzterem Fall berechtigt wäre, an seiner Auffassung festzuhalten. Wenn wir etwa einen Baum sehen, nehmen wir ihn als ein Objekt wahr, obgleich es sich um eine Zusammensetzung von Blättern, Ästen und einem Stamm handelt. In unserer Wahrnehmung sind sie zu einem Gegenstand integriert. Ähnlich verhält es sich bei Mengen, denn wenn wir Mengen wahrnehmen, lässt sich auch davon sprechen, dass wir eine integrierte Wahrnehmung haben. Wir nehmen die Elemente als eine Menge wahr und zwar gemäß objektiver Kriterien, die im Vorhinein festlegen, ob es eine solche Menge gibt oder nicht. Für diesen Ansatz gilt etwa die Bedingung, nach welcher eine Menge als Ergebnis des Zusammenfassens zu verstehen ist. Die Bedingung bestimmt also zusammen mit den jeweiligen Elementen die Menge.

---

[17] Gegen Wangs Auffassung lassen sich durchaus einige Äußerungen Gödels anführen, die in eine andere Richtung weisen.
[18] Cantor 1895, S. 481.

Sinn und Verstand

Gödel scheint, wie Burgess bemerkt, den Umstand, dass man eine Anschauung von mengentheoretischen Objekten hat, damit gleichzusetzen, dass man eine Anschauung von der Wahrheit mengentheoretischer Axiome hat. Diese Gleichsetzung leuchtet Burgess nicht ein, denn es sei zwar nachvollziehbar anzunehmen, dass die Wahrnehmung mengentheoretischer Begriffe wie ‚Menge' und ‚Element' zugleich beinhaltet wahrzunehmen, dass mengentheoretische Axiome zutreffen, es sei aber nicht nachvollziehbar, dass dasselbe auch für die Wahrnehmung mengentheoretischer Objekte gilt wie es für Burgess etwa Mengen und Klassen sind.[19] Burgess ignoriert bei dieser Darstellung aber, dass für Gödel Klassen keine Objekte sind, er ignoriert des weiteren, dass Begriffe für Gödel keine konkreten Objekte sind, worin dieser Frege folgt. Sieht man sich allerdings die folgende Äußerung Gödels in seinem Aufsatz über Russell an, scheint Burgess gute Gründe für seine Auffassung geltend machen zu können:

> Classes and concepts may, however, also be conceived as real objects, namely classes as "pluralities of things" or as structures consisting of a plurality of things and concepts as the properties and relations of things existing independently of our definitions and constructions. It seems to me that the assumption of such objects is quite as legitimate as the assumption of physical bodies.[20]

Die Diskrepanz zwischen dieser Aussage im Russell-Paper und anderen, in den er einen scharfen Unterschied zwischen Mengen als Extensionen und Begriffen als Intensionen gezogen hat, hat die Leserschaft Gödels schon früh verwirrt. Hao Wang hat Gödel daher auf diese Diskrepanz angesprochen. Gödels autorisierte Antwort lautet wie folgt:

> The difference in emphasis is due to a difference in subject matter, because the whole paper on Russell is concerned with logic rather than mathematics. The full concept of class […] is not used in mathematics, and the iterative concept which is sufficient for mathematics, may or may not be the full concept of class.[21]

Entscheidend ist auch, was Gödel im Folgenden äußert: "Sets are quasi-physical. That is why there is no self-reference." (Wang 1996, S. 270, Nr. 8.5.6) Und schließlich: "A concept, unlike a set, can apply to itself" (Wang 1996, S. 278, Nr. 8.6.23)). Burgess Annahme, Gödel verträte mit der Formulierung „so etwas wie die Wahrnehmung der Objekte der Mengentheorie", dass wir mit der Wahrnehmung des Begriffs der Menge auch die Axiome der Mengentheorie quasi mitgeliefert bekommen, ist daher sehr problematisch. Denn wenn wir Hao Wang Glauben schenken können, war Gödel gerade nicht der Auffassung, dass Begriffe Objekte sind, weshalb er, wie bereits zitiert, gesagt hat:

---

[19] Whereas it is understandable why perceiving "set-theoretic concepts (set and elementhood) would involve […] perceiving or grasping *that* set-theoretic axioms are supposed to hold;" it is not clear why one should "think the same about perceiving set-theoretic *objects* (sets and classes)". Burgess, http://www.princeton.edu/~jburgess/Goedel.pdf.

[20] *CW* II, S. 128.

[21] Wang 1996, S. 270, Nr. 8.5.4.

Sets are objects but concepts are not objects. We perceive objects and understand concepts. Understanding is a different kind of perception: it is a step in the direction of reduction to the last cause.[22]

Ergänzen lässt sich dieser Aspekt durch eine Bemerkung aus Gödels unveröffentlichten *Philosophischen Bemerkungen* (Max Phil). Dort findet sich in Heft XIV auf den Manuskriptseiten 97-99 die folgende Bemerkung:

> *Phil<osophie>*: Die Notwendigkeit von Symbolen für begriffliches Denken ist eine logische Folge, dass wir Begriffe nur an Dingen sehen. (Wir können unsere Aufmerksamkeit **[98]** nicht direkt auf Begriffe richten**.** Diese sind gewissermaßen immer **„**hinter uns**“**.) Daher müssen wir die Begriffe zunächst auf physische Dinge abbilden, um sie zu Objekten des Erkennens zu machen**.** Genauer: Ein Begriff (inhaltlich) müsste festgelegt werden durch ein konkretes Objekt + eine Aufmerksamkeitsrichtung (die Begriffe sind also auch als Objekte gegeben, aber nur zusammen mit anderen**,** nicht abtrennbar)**.** Das eignet sich aber nicht zur Behandlung: 1. weil es zu kompliziert, **2. weil es zwei Dinge und zwar *heterog<ene>* sind**, während der Begriff eines ist, welches aus diesen beiden irgendwie zu gewinnen ist, 3. weil das Objekt, aus dem <wir> determinieren, **unwesentlich und willkürlich ist**, {4. weil die Aufmerksamkeitsrichtung etwas *subj<ektives>* ist, was wir schlecht erinnern können}. Das Wort (obwohl es auch nicht der Begriff selbst ist) hat doch diese vier Nachteile nicht**.** Insbesondere werden drei dadurch eliminiert, dass man es als das **„**richtige**“** Wort lernt**. Das Wesentliche ist, dass bei der Vertretung <der> Symbolbegriffe wenigstens [99] die Eineindeutigkeit gewahrt ist**. Das heißt, die Begriffe sind uns zwar gegeben, aber nicht als einzelne, trennbare Objekte – die Symbole ja**.** Die Möglichkeit sich denselben Begriff verschieden vorzustellen {und <dass> diese verschiedenen Vorstellungen völlig gleichberechtigt sind (was auch den Entschluss erschwert)}, macht es unmöglich, ihn als ein Objekt zu erfassen**.** Die Begriffe sind uns nie direkt, sondern nur durch Beschreibungen gegeben. Ist vielleicht nebenbei eine spezielle Fähigkeit vorhanden, in Kombinationen von Worten (d. h. Gehörvorstellungen bestimmter Art) einen Sinn zu sehen (z. B. dadurch, dass der Sinn der *Juxtaposition* verstanden wird {oder der Sinn von **„**Begriff**“** oder der **„**Sinn?relation**“**}) oder dadurch, dass Worte eine *spez<ifische>* Wirkung auf die Aufmerksamkeit haben, sie irgendwie innerhalb des Begriffsraums zu dirigieren? (Das heißt**:** Die Vernunft ist uns nur durch Worte zugänglich.)[23]

[22] Wang 1996, S. 235, Nr. 7.3.12. Burgess schenkt dieser Äußerung Wangs, wie er auf Nachfrage schriftlich mitgeteilt hat, nicht unbedingt Glauben. Der Quellenwert, insbesondere von *A Logical Journey* wird in Forscherkreisen nicht einhellig beurteilt. Während John Dawson auf Nachfrage schriftlich insbesondere kritisiert hat, Wang gäbe seine Quellen nicht immer an, selbst wenn er wörtlich zitiere, äußerte sich Hilary Putnam auf Nachfrage mündlich dahingehend, an den wörtlichen Zitaten Gödels durch Wang nicht zu zweifeln, aber Wangs Bücher doch insofern mit Vorsicht zu verwenden, als Wang eigene Interessen gehabt habe, Gödels Philosophie in einem bestimmten Licht erscheinen zu lassen.

[23] Transkription aus der Kurzschrift Gabelsberger von E.-M. Engelen. Die Transkription wurde von der französischen Forschungsgemeinschaft (Agence Nationale de la Recherche) im Rahmen des Projektes ANR-09-BLA-0313 unter der Leitung von Gabriella Crocco finanziert. Die Hervorhebungen stammen von Gödel selbst. Die Einfügungen in geschwungenen

Etwas lax ausgedrückt, kann man laut Gödel Begriffe zwar zu Objekten der Erkenntnis machen, aber sie sind keine konkreten Dinge oder konkreten Objekte. Der Unterschied besteht für Gödel letztlich darin, dass sich Begriffe als abstrakte Entitäten in verschiedener Weise exemplifizieren lassen, während das bei konkreten Objekten, wie Mengen es sind, nicht so ist.[24]

Ausgangspunkt für Burgess Überlegungen bildet die erkenntnistheoretisch inspirierte Beobachtung, dass wir, wenn es etwa um die Wahrnehmung astronomischer Objekte geht, nicht „so etwas wie" eine Wahrnehmung dieser Objekte haben, sondern diese Objekte schlicht wahrnehmen, ohne dass sich uns irgendwelche Axiome der Astronomie als wahr aufdrängen. Diese Beobachtung von Burgess läuft bei Gödel freilich ins Leere, da wir ihm zufolge weder über eine umstandslos direkte Wahrnehmung mathematischer Objekte noch über eine umstandslos direkte Wahrnehmung von Sinnesobjekten verfügen.[25] Wenn wir beispielsweise ein Objekt als solches wahrnehmen, wird der Begriff ‚Objekt' nicht automatisch durch die Sinne mitgeliefert.

Dennoch sollte man sich Burgess' Ausführungen etwas genauer ansehen. Worauf Burgess nämlich letztlich hinweist, betrifft zwei unterschiedliche Aspekte. Der eine bezieht sich auf die Rolle der Kausalität bei der Sinneswahrnehmung, die bei der Wahrnehmung mathematischer Objekte wegfällt. Und der andere betrifft die Rolle mathematischer Objekte für die Axiome einer mathematischen Theorie.

Es sollte auch klar sein, dass wir nicht nur von Objekten, mit denen wir unmittelbar kausal verbunden sind, Wissen erwerben können,[26] – denken wir etwa nur an Objekte, mit denen sich Wissenschaftler in der Kosmologie beschäftigen. Was die Rolle mathematischer Objekte für die Axiome mathematischer Theorien anbelangt, muss darauf hingewiesen werden, dass Gödel nicht nur unmittelbare Anschauung als Möglichkeit gesehen hat, sich Axiomen zu nähern.[27] Das bedeutet, dass die Ungleichgewichtung der Kausalität vernachlässigbar ist und die Rolle mathematischer Objekte noch genauer zu untersuchen wäre.

Burgess' Kritik an Gödels mathematischer Anschauung

Die Stoßrichtung von Burgess Hauptkritik an Gödels Konzept der mathematischen Anschauung ist in dem folgenden Zitat enthalten:

Klammern, stehen im Manuskript in Fußnoten. Fett gedruckte Satzzeichen stammen von Gödel selbst.

[24] Crocco 2006, S. 186.

[25] „It should be noted that mathematical intuition need not be conceived of as a faculty giving an *immediate* knowledge of the objects concerned. Rather it seems that, **as in the case of physical experience, we *form* our ideas** also of those objects on the basis of something else which *is* immediately given. Only this something else is *not*, or not primarily, the sensations." Gödel, *CW* II, S. 268; Wang 1996, S. 226, Nr. 7.2.16. (Hervorhebung von der Autorin)

[26] Ausführlich geht etwa Richard Tieszen in seinem Gödel-Buch auf diesen Aspekt ein. Tieszen 2011, S. 174-175.

[27] Wang 1996, S. 245-246.

> Since Gödel does not discuss questions of heuristics explicitly, he never confronts the question of how to distinguish genuine, if fallible, perceptions of concepts from mere hunches perhaps based on subconscious inductive or analogical reasoning. But it seems there will be a serious weakness in his position unless a satisfactory answer can be given. At the very least, there will be a serious disanalogy between rational and sensory intuition. For when it comes to the visible properties of visible objects, there is no mistaking *seeing* what they are from having a *hunch* about what they must be.

Für die darin enthaltene Aussage, Gödel habe nicht nur angenommen, dass es Anschauung mathematischer Objekt gäbe, sondern auch mathematischer Begriffe, nimmt Burgess selbst keine Textexegese der publizierten Texte Gödels vor. Er beruft sich vielmehr auf Untersuchungen von Donald A. Martins[28] Zusammenstellung einschlägiger Textstellen bei Gödel sowie auf Studien von Charles Parsons.[29] Daraus leitet Burgess ab, Gödel könne, wenn er von der Wahrnehmung von Objekten der Mengentheorie spricht, die Wahrnehmung der Begriffe der Mengentheorie meinen, weshalb man diese Begriffe auch als Objekte bezeichnen könne.

Was gegen diese Vermutung von Burgess spricht, wurde dargelegt. Da es für Gödel durchaus eine Wahrnehmung von Begriffen gibt, wäre also darüber hinaus zu klären, wie sich die Anschauung des Begriffs der Menge (also das Verstehen des Mengenbegriffs) von der konkreten Anschauung einer Menge (im Sinne eines Objekts) unterscheidet.[30]

Aber vielleicht müssen wir das an dieser Stelle gar nicht klären, sondern können uns Burgess' Bedenken gegenüber der Analogie von Wahrnehmung oder konkreter Anschauung von physischen und mengentheoretischen oder mathematischen Objekten und Begriffen zuwenden. Burgess sieht eine Disanalogie zwischen der Wahrnehmung der Sterne am Himmel beispielsweise und der mathematischer Objekte oder Begriffe, weil er meint, dass wir, wenn wir sichtbare Objekte sehen, zumindest nicht darüber Fehl gehen, was sie sind, während das bei unklaren Ahnungen bezüglich mathematischer Objekte und Begriffe nicht so sei. Diese Bemerkung spielt auf Äußerungen Gödels an, wonach wir in der Mathematik in der Lage sind, Begriffe klarer und immer klarer zu sehen.[31]

Wählt man die Beispiele allerdings anders, besteht hier vielleicht gar keine Disanalogie. Nehmen wir beispielsweise ganz winzige Objekte der sinnlichen Wahrnehmung, die wir mit dem bloßen Auge kaum oder vielleicht gar nicht sehen. Mit der Erfindung des Mikroskops gab es die Möglichkeit, sie genauer zu betrachten und zu studieren und mit der Verbesserung

---

[28] Vgl. D. A. Martin, "Gödel's conceptual realism", in: *Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 2 (2005), S. 207-224.

[29] Vgl. Ch. Parsons, "Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel's thought", in: *Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 1 (1995), S. 44-74.

[30] Von der konkreten Anschauung des Begriffs der Menge spricht Gödel beispielsweise in folgendem Zitat: „Non-elementary logic involves the concept of set, which also needs concrete intuition. Understanding a primitive concept is by abstract intuition." Wang 1996, S. 217, Nr. 7.1.13.

[31] Vgl. etwa Wang 1996, S. 210. Hierbei handelt es sich allerdings nicht um ein wörtliches Zitat.

der Technik und Erfindung neuer Mikroskope wie etwa dem Elektronenmikroskop konnten sie noch genauer betrachtet werden. Wäre es abwegig, mathematische Theorien die Rolle von Mikroskopen zuzuschreiben, mittels derer wir mathematische Objekte und Begriffe immer klarer sehen? Dagfinn Føllesdale findet es jedenfalls nicht abwegig.[32]

Gödel selbst fand seine Analogie aber selbst nicht in allen Punkten überzeugend, wenn seine Zweifel an der Stimmigkeit der Analogie auch in eine ganz andere Richtung gehen als die von Burgess. In Heft IX von Gödels *Philosophischen Bemerkungen* (Max Phil) können wir auf den Seiten 85 bis 87 des Manuskripts Folgendes lesen:

> *Bem<erkung>* (*Gr<ammatik>*): Der Auffassung, dass alle Folgerungen in den *Ax<iomen>* bereits **„**mitgesagt**"** sind {wodurch unterscheidet sich das eine Axiomensystem, in dem irgendeine Folgerung als [überflüssig<es>] *Ax<iom>* formuliert ist, <von einem anderen>**?**}, d. h. der durch eine Folgerung dargestellte Sachverhalt ist ein Teil des durch *Axiome* Bezeichneten, kann man die folgende gegenüberstellen**:** Das Zeigen eines Schlusses (C) aus zwei Prämissen A und B bedeutet, dass C dadurch wahrgenommen wird [oder besser <gesagt> die Wahrheit oder das Sein von C], dass man die Aufmerksamkeit auf A und B richtet und dann gewissermaßen einen **„**Mittelpunkt**"** konstruiert [ähnlich wie man schwache Sterne mit Hilfe von solchen, die man gut sieht, auffindet]. Wobei natürlich nicht für je zwei beliebige Sätze ein solcher Mittelpunkt existiert [ebenso wie bei den Sternen].
>
> *Bem<erkung>* (*Gr<ammatik>*): Der Unterschied zwischen analytischen und *synth<etischen>* Sätzen ist, dass bei den ersteren der Grund {für ihr Bestehen} ihres Bestehens in ihnen liegt [nämlich in den Gegenständen, über die sie sprechen], bei den anderen außerhalb [insbesondere in dem Willen irgendeines Wesens]**.** Die Möglichkeit des Gegenteils bei analytischen Sätzen sehen wir nur in dem Sinn, dass wir den Termen eine andere Bedeutung geben **[86]** (da es analoge Dinge gibt, für welche ~P gilt, so könnte doch auch ~P selbst gelten) [die Möglichkeit, die mit ∃ *ext<ern>* definiert ist, wäre also der *int<ernen>* Notwendigkeit übergeordnet**?**] {**[87]** ohne in irgendeinem Sinn die Möglichkeit des Gegenteils zu sehen, könnten wir die Sätze nicht verstehen, insbesondere könnten wir nicht ~ ~ P verstehen, weil darin ~ P sinnlos wäre (daher auch P)}, bei *synt<hetischen>* Sätzen <sehen wir die Möglichkeit des Gegenteils> aber auch bei Festhaltung der Terme**.** Wir sind prinzipiell in der Lage das zu bewirken, daher auch zu planen, daher auch vorzustellen**.** Dagegen liegt alles Begriffliche außerhalb der *Sphäre* unseres Willens**.** Ist es denkbar, dass es in der Willens*sph<äre>* Gottes liegt und daher in der anderen Welt für darin <liegende> logische Begriffe nicht mehr unsere *Ax<iome>* gelten**?** [Insbesondere z. B.**:** W(A) mehrmals ≢ A] {oder mehrmals P **.** ~ P . Der Satz vom Widerspruch aber hat am meisten den Charakter einer ewigen Wahrheit. Das Widersprechen ist Sinn des **„**Nicht**"**}. Jedenfalls in dem Sinn, dass wir diese logischen Begriffe nur unvollständig wahrnehmen [ebenso wie wenn jemand nur *Add<ition>* ganzer Zahlen sieht], und dass daher unsere *Ax<iome>* nur für diese beschränkten Anwendungsfälle gelten [Unterschied zwischen der irdischen und der ewigen Wahrheit]. Insbesondere könnte die *Antin<omie>* so erklärt werden**.** Insofern wir also nicht direkt die Notwendigkeit der logischen Sätze sehen, überhaupt die Sätze nur im symbolischen Sinn [für

[32] Føllesdale schreibt diese Auffassung sowohl Husserl als auch Gödel zu. Vgl. Føllesdale 2014, S. 342.

> den mit ∃ bezeichneten Begriff gilt *etc*.] **[87]** sehen, in dem sie wirklich nicht notwendig sind, nehmen wir also gewissermaßen einen höheren Standpunkt ein als vorher**.** Die Analogie mit den Sternen stimmt insofern nicht, als wir auch das Nicht-Vorhandensein gewisser **„**Sterne**"** (im Raum der Wahrheit) wahrnehmen**.** Oder ist dies Nicht-Vorhandensein auch etwas *Pos*<*itives*>**?** (Ein Stern)[33]

Die Analogie ist für Gödel dann stark, wenn es um das Finden von Sternen oder Schlussfolgerungen geht und wird zweifelhaft, wenn es darum geht, aus dem Nicht-Sehen Schlüsse zu ziehen. Denn während man bei der Sinneswahrnehmung (zumeist) davon ausgehen kann, dass da nichts ist, wenn man nichts sieht, verhalte sich das in der Mathematik gerade nicht so.

Burgess beharrt aber selbst auch nicht lange auf diesem Punkt seiner Kritik an Gödels Begriff der mathematischen Anschauung, sondern wendet sich seinem eigentlichen Einwand zu:

> The crucial philosophical question about rational intuition, however, is not how bright or dim it is; nor even how reliable or treacherous it is; nor yet how long or short the list of analogies with sense-perception is; and least of all whether "rational intuition" is right or wrong as a label for it. The crucial philosophical question is simply whether there is any real need to posit a special intellectual faculty in order to account for the experiences of the kind Gödel describes, where axioms "force themselves upon us," or whether on the contrary such experiences can be explained in terms of faculties already familiar and less problematic. For there are other, more mundane, varieties of nonsensory intuition.

Diese banalere Form der Intuition, für die sich Burgess interessiert, nennt er heuristische Intuition.

Heuristische Intuition

Burgess stellt zwei Ansätze dafür einander gegenüber, was unter mathematischer Anschauung zu verstehen ist. Der eine ist für ihn die rationalistische Anschauung. Folgt man diesem Ansatz, ist es uns laut Burgess beispielsweise möglich, immer wieder zu dem Begriff der Menge, den es zu verstehen gilt, zurückzukehren, ihn wieder und wieder zu betrachten und so einen Zugang zu den mengentheoretischen Axiomen zu erhalten, von denen die mathematischen Theoreme deduziert werden können.[34]

Dagegen stellt Burgess das, was er heuristische Intuition nennt. Sie spiegelt für ihn die Praxis der Mathematiker wieder und ist nach ihm völlig ausreichend, um zu erklären, wie wir zu

[33] Transkription aus der Kurzschrift Gabelsberger von E.-M. Engelen. Die Transkription wurde von der französischen Forschungsgemeinschaft (Agence Nationale de la Recherche) im Rahmen des Projektes ANR-09-BLA-0313 unter der Leitung von Gabriella Crocco finanziert. Die Einfügungen in geschwungenen Klammern, stehen im Manuskript in Fußnoten. Fett gedruckte Satzzeichen stammen von Gödel selbst.

[34] Burgess: "On the rationalist picture, the only function of the original exposition is to get us to turn our rational intuition in the direction of the concept of set. Once we perceive it, we can go back to it again and again and perceive more and more about it. Hence, though at any stage we will have perceived only finitely much, still we have access to a potentially infinite set of set-theoretic axioms, from which to deduce by logic mathematical theorems."

neuen Axiomen beziehungsweise zur „Entdeckung“ von Beweisen für Axiome in der Mengentheorie gelangen. Gödel lässt hingegen Fragen des Entdeckungszusammenhangs von Beweisen in der Mathematik und die dazugehörige kognitive Psychologie unberücksichtigt und damit auch die Rolle des Unbewussten bei der Beweisfindung (oder die von Induktion und von Analogiebildung).[35]

Burgess glaubt aber, dass Mathematiker, wenn sie von Intuition sprechen, meist auf unbewusst ablaufende Denkvorgänge und Folgerungen Bezug nehmen, wie es unbewusste Induktionen oder Analogiebildungen sind:

> Thus it is said to be by intuition that one comes to suspect what the answer to a question must be before one finds the proof, or that a proof is to be sought in *this* rather than *that* direction. This use of “intuition” for the faculty of arriving at hunches, and “intuitions” for the hunches arrived at, is by no means confined to mathematics, but is probably closer to the ordinary sense of the word than any of the special senses of “intuition” considered by philosophers. In contrast to other kinds let me call this *heuristic* intuition.

Wenn Burgess im Weiteren darlegt, was er unter heuristscher Intuition in der Mathematik versteht, ist die Wortwahl interessant. Diese zeigt nämlich, dass er sich mutmaßlich in der psychologischen Forschungsliteratur umgetan hat und diese Ansätze auf die Mathematik überträgt.

Die Forschungsrichtung in der Psychologie, welche analoge Fragen der Heuristik untersucht, bemüht sich herauszufinden, wie wir zu richtigen Entscheidungen gelangen. Gerichtet ist sie gegen die Tradition der Entscheidungsforschung, die stets vom bewusst reflektierenden und urteilenden Menschen ausgeht und daher unbewusst intuitiv zustande gekommene Entscheidungen nicht berücksichtigt. Dabei wird in der psychologischen Forschung zu Intuition zwischen intuitiv zustande gekommenen Entscheidungen unterschieden, die auf Expertenwissen beruhen und solchen die via Daumenregeln im Alltag angewandt werden, bei denen auch Gefühle eine wichtige Rolle spielen. Dazu passen Burgess’ Äusserungen:

> We may wonder how one is supposed to be able to *tell*, when one has a pro–or anti–feeling about a given proposition, whether one is experiencing the one kind of intuition or the other. For it does not seem easy to do so.
> Looking through Maddy’s[36] collection of “rules of thumb,” one may guess that Gödel might consider some of them mere heuristic principles and others rational intuitions, though ones

---

[35] Burgess: “Gödel in his reflections on mathematical epistemology takes little note of such matters. Nor does he take much note of the fact that the body of theorems of mathematics comes accompanied by a body of conjectures for which no rigorous proof has yet been found.” Die Rolle von Analogien für das Denken ist in Gödels *Philosophischen Bemerkungen* (Max Phil) allerdings eines der zentralen Themen.

[36] Burgess rekurriert hier auf Penelope Maddys Aufsatz “Believing the Axioms I und II”. Der in zwei Teile aufgespaltene Aufsatz erschien 1988 in *The Journal of Symbolic Logic* 53. Der Ausgangspunkt seiner Überlegungen dürfte u. a. der folgende Satz Maddys in dem zitierten Aufsatz sein: “Rather, the axioms we now hold to be self-evident were first justified by reference to vague rules of thumb and purely extrinsic consequences, in addition to intrinsic evidence.” (S. 490).

> too dim and misty to issue in rigorously-formulated axioms rather than roughly-formulated principles. But at least in my own case, I am able to guess this only because of my knowledge of attitudes Gödel has expressed in his writings, not because I myself have any sense when contemplating "rules of thumb" that *this* one is rational, *that* one heuristic.

Die Daumenregeln, auf die Burgess rekurriert, stammen von Penelope Maddy, die in ihrer eigenen Forschung sehr häufig auf Forschungsansätze aus der Psychologie rekurriert. Bei den von ihr so genannten Daumenregeln tut sie das allerdings nicht. Es muss daher offen bleiben, ob Maddy und Burgess ihre Überlegungen direkt aus Forschungsarbeiten der Psychologie entlehnt haben oder nicht.

Daumenregeln sind beispielsweise das Forschungsgebiet des Psychologen Gerd Gigerenzer. Intuitionen sind demnach das Ergebnis unbewusster mentaler Prozesse, so genannter Daumenregeln, welche wir mittels in unserer Umgebung gemachter Erfahrungen abgeleitet haben.[37] 'Abgeleitet' verweist dabei nicht etwa auf rationale Vorgänge – im Gegenteil. Der Unterschied zu rationalen Entscheidungen liegt darin, dass bei intuitiven Daumenregeln nur die nützlichsten Informationen herangezogen werden und nicht wie bei rationalen Entscheidungen, alle.[38]

Eine andere Richtung der Intuitionsforschung ist die NDM (NDM steht für „Naturalistic Decision Making" oder Entscheidungsfindung im ‚wahren Leben'). Auch sie richtet sich gegen eine Dominanz der wissenschaftlich-analytischen Entscheidungsforschung. Einer ihrer prominentesten Vertreter ist Gary Klein.[39] Er kritisiert, dass in der Entscheidungsforschung in der Regel vom bewusst reflektierenden und urteilenden Menschen ausgegangen wird und die unbewusst intuitiv zustande gekommenen Entscheidungen nicht berücksichtigt werden. Dabei gälte es die impliziten Hinweise zu identifizieren, welche Experten verwenden, um ihre Entscheidungen zu treffen. Experten selbst müssten diese Hinweise dabei nicht benennen können, diese Hinweise könnten implizites Wissen sein. Die Intuition von Experten ermöglicht es diesen auf Grund ihres Expertenwissens, das sie über einige Zeit hinweg erworben haben, richtige Entscheidungen zu treffen.

Was aber ist nun der Maßstab für die Richtigkeit einer intuitiv getroffenen Entscheidung, wenn man dieser Forschungsrichtung der Psychologie folgt? Eine subjektive Überzeugung kann jedenfalls kein Maßstab für die Richtigkeit einer Überzeugung sein, es sei denn, er wäre bei den Subjekten jeweils angeboren. Das bedeutet, dass das Subjekt alleine keinen Zugang zur Validität seiner intuitiv getroffenen Entscheidungen hat. Um einschätzen zu können, ob die intuitiv getroffenen Entscheidungen richtig waren, müssen daher auch Experten sich mit den besten Spezialisten ihres Gebietes vergleichen, um die Validität ihres intuitiven Urteilsvermögens einschätzen zu können.

---

[37] Siehe auch: Goldstein u. Gigerenzer, "The Recognition Heuristic. How Ignorance Makes Us Smart", 1999.

[38] Vgl. Gigerenzer, *Gut Feelings*. *The Intelligence of the Unconscious*, 2007b. Oder, ders., *Bauchentscheidungen*. *Die Intelligenz des Unbewussten und die Macht der Intuition*, 2007a.

[39] Vgl. Klein, *Natürliche Entscheidungsprozesse. Über die „Quellen der Macht"*, *die unsere Entscheidungen lenken*, 2003.

Sowohl für die Forschungsrichtung der Psychologie, die sich um intuitiv getroffen Entscheidungen von Experten kümmert, als auch für diejenige, die sich um die intuitive Heuristik von Daumenregeln kümmert, gilt, dass sie zuvor untersuchen muss, inwiefern sich ein untersuchten Forschungsgebiet überhaupt eignet, zuverlässige intuitive Urteils- oder Entscheidungsfähigkeit auszubilden. Um dafür geeignet zu sein, muss es nämlich genügend Regelmäßigkeiten aufweisen, die unterbewusst „erkannt“ und erlernt werden können.[40] Damit die Ergebnisse der heuristischen Intuitionsforschung also valide sind, müssen solche (natürlichen oder anerzogenen) Regelmäßigkeiten im untersuchten Forschungsgebiet vorhanden sein.

Wie aber verhält es sich mit den Daumenregeln in der Mathematik, auf welchen Voraussetzungen beruhen sie? Maddy nennt in ihrem Aufsatz zahlreiche Daumenregeln wie etwa die *limitation of size, the iterative conception, one step back from disaster, maximize, uniformity, reflection* und andere. Da hier nun bereits mehrmals auf den iterativen Mengenbegriff Bezug genommen wurde, soll die dementsprechende Daumenregel herausgegriffen werden. Sie äußert sich dazu wie folgt:

> Finally, rules of thumb. When uncritical, intuitive work with sets was interrupted by the appearance of the paradoxes, examination of previously unexamined practice revealed that full comprehension was not in fact used. Rather, sets were thought of as being formed from objects already available. This lead to the separation of sets from classes, and eventually, to the development of the rule *iterative conception*. The source of this rule of thumb in pretheoretical practice, and the overwhelming impression of its naturalness once it was specified, suggest that its origin is at least partly intuitive […]. *Realism, maximize*, and its companion, *richness*, are all closely tied to *iterative conception* […].[41]

Dieses Zitat Maddys, auf deren Daumenregeln sich Burgess stützt, legt nahe, dass sie ‚intuitiv’ im Sinne von ‚unbegründet’ beziehungsweise von ‚unkritisch’ verwendet, also gerade nicht im Sinne von ‚anschaulich’. Das bedeutet allerdings nicht, dass man nach Maddys Ansicht auf Begründungen verzichten sollte. Für Maddy sind Daumenregeln, die sich nicht begründen lassen, rein heuristische Hilfsmittel, die einer Begründung bedürfen:

> Another possibility would be to grant evidential status to *uniformity* and *whimsical identity* arguments only in the presence of good evidence for consistency, or perhaps to relegate them to the status of heuristic devices for generating hypotheses that must then be justified by other, probably extrinsic, means.[42]

Eines sollte durch diese Analyse deutlich geworden sein. ‚Anschauung’ und ‚Intuition’ sind in der Mathematik beziehungsweise in der Philosophie der Mathematik nicht dasselbe, nur weil man im Englischen beide Male das Wort ‚intuition’ verwendet. Während ‚Intuition’ im deutschen Forschungskontext so gut wie immer (im Englischen aber eben nicht immer) an

---

[40] Vgl. Hogarth, *Educating intuition*, 2001.
[41] Maddy 1988, S. 759.
[42] Maddy 1988, S. 760.

Stelle von unbegründeten Urteilen, Einsichten und Schlussfolgerungen verwendet wird,[43] was auch gerne mit Ahnung oder Gefühl für die Sache umschrieben wird, ist Gödels ‚Anschauung' (und nicht nur sein Begriff der Anschauung) etwas anderes.[44] Schon bei Immanuel Kant ist Anschauung unmittelbarer Gegenstandsbezug (Kant, *KrV* B 33f.), bei Gödel ist sie jedenfalls Gegenstandbezug.

Intuitionen im Sinne unbegründeter Ahnungen haben wir nicht etwa von Geburt an, wir haben sie vielmehr in erster Linie auf Grund von Einübung und Schulung. In der Mathematik Ungeschulte werden keine mathematischen Intuitionen haben.[45] Gleiches trifft aber wohl auch auf die mathematische Anschauung zu. Der Unterschied besteht letztlich darin, dass wir es in dem einen Fall mit unbegründeten Ahnungen zu tun haben und in dem anderen Fall die Objektivität und damit Intersubjektivität mathematischer Ergebnisse eine Begründung erhält.

Fazit

Kann eine mathematisch heuristische Intuition, die ganz ohne ontologisch überflüssige Vorannahmen auskommt, also dasselbe leisten wie mathematische Anschauung? Was könnte Gödel auf eine entsprechende Behauptung erwidern? Der hier unterbreitet Vorschlag lautet noch einmal zusammengefasst wie folgt: (1) Anschauung von Mengen und Wahrnehmung des Begriffs der Menge ist nicht, wie Burgess annimmt, dasselbe, weil Begriffe keine Objekte sind wie es Mengen sind. (2) Auch Heuristiken müssen sich auf „etwas" stützen, um sich von rein subjektivem Raten, Erfinden oder Erdichten zu unterscheiden. Dieses „Etwas" kann in dem Einüben in eine Kultur des Denkens bestehen oder in natürlich gegebenen Regelmäßigkeiten gesehen werden. Rekurriert man auf die Einübung in eine Kultur des Denkens ist gerade im Falle der Mathematik zu erklären, wie es kommt, dass alle, die in die Mathematik eingeübt sind, zu denselben Ergebnissen kommen, wenn sie sich nicht verrechnet haben, und zwar auch in völlig neuen Gebieten der Mathematik. Rekurriert man hingegen auf natürlich gegebene Regelmäßigkeiten ist zu unterscheiden, ob man auf Regelmäßigkeiten in der Natur rekurriert oder im menschlichen Gehirn. Tut man ersteres tauscht man Realismus gegen Naturalismus ein und muss erklären, inwiefern Mathematik auf natürlichen Grundlagen der Welt beruht. Tut man das Zweite muss man erklären, wie es kommt, dass durch die Evolution ein Gehirn entstanden ist, das Theoreme wie das der Unvollständigkeit der Mathematik hervorbringt, – mit dem Verweis auf das Überleben der besser Angepassten an ihre Umgebung dürfte man da nicht weit kommen. Wer am End die problematischeren Annahmen macht, scheint mir nicht ausgemacht zu sein.

---

[43] So etwa auch von Maddy (1990, 2003, S. 70), wenn sie von intuitiven Annahmen (intuitive beliefs) schreibt, die wir nicht überprüfen können. Begonnen wird dieses Unterkapitel von ihr allerdings mit der Wahrnehmung (perception) von Mengen (ebd., S. 67).

[44] Hacking (2014, S. 252f.) konstatiert Ähnliches für James Robert Browns Begriff der Intuition.

[45] Vgl. auch Hacking 2014, S. 252.

Literatur:

Burgess, John P., "Intuitions of Three Kinds in Gödel's Views on the Continuum", http://www.princeton.edu/~jburgess/Goedel.pdf, wird erscheinen in: *Interpreting Gödel,* hrsg. von Juliette Kennedy, Cambridge, Cambridge University Press, 2014.

Cantor, Georg, „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre", in: *Mathematische Annalen*, 46 (1895), S. 481-512.

Crocco, Gabriella, "Gödel on Concepts", in: *History and Philosophy of Logic* 27 (2006), S. 171-191.

Engelen, Eva-Maria, "About the Pleasure and the Difficulties of Interpreting Kurt Gödel's *Philosophical Remarks*", wird erscheinen in: *Gödelian Studies on the Max-Phil Notebooks*, Vol. I, hrsg. von Gabriella Crocco et al., Aix en Provence, Presses Universitaire de Provence 2014.

Engelen, Eva-Maria, „Emotion und Intuition. Zwei ungleiche Geschwister", in: *Geistesblitz und Neuronendonner. Intuition, Kreativität und Phantasie*, hrsg. von Rainer Rosenzweig, Paderborn, mentis Verlag 2010, S. 121-137.

Floyd, Juliet und Kanamori, Akihiro, "Gödel vis-à-vis Russell: Logic and Set Theory to Philosophy", wird erscheinen in: *Gödelian Studies on the Max-Phil Notebooks*, Vol. I, hrsg. von Gabriella Crocco et al., Aix en Provence, Presses Universitaire de Provence 2014.

Føllesdale, Dagfinn, "Husserl and Gödel on Mathematical Objects and our Access to them", in: European Philosophy of Science – European Philosophy of Science in Europe and the Viennese Heritage, hrsg. von Maria Carla Galavotti, Elisabeth Nemeth und Friedrich Stadler, Cham/Heidelberg, Springer, 2014, S. 319-356.

Gigerenzer. Gerd, *Bauchentscheidungen. Die Intelligenz des Unbewussten und die Macht der Intuition*, München, Bertelsmann, 2007a.

Gigerenzer. Gerd, *Gut Feelings. The Intelligence of the Unconscious*, New York, Viking, 2007b.

Goldstein, Daniel G. und Gigerenzer, Gerd, "The Recognition Heuristic. How Ignorance Makes Us Smart", in: *Simple Heuristics That Make Us Smart*, hrsg. von G. Gigerenzer, P. M. Todd und die ABC Research Group, New York/Oxford, Oxford University Press, 1999, S. 37-58.

Gödel, Kurt, "What is Cantor's Continuum Problem?", in: Kurt Gödel, *Collected Works* II, hrsg. von Solomon Feferman, John W. Dawson Jr., Warren Goldfarb, Charles Parsons, Robert Solovay, Oxford, Oxford University Press, 1990, S. 254-270.

Hacking, Ian, *Why Is There Philosophy of Mathematics at All*?, Cambridge, Cambridge University Press, 2014.

Hogarth, Robin M., *Educating Intuition*, Chicago, University of Chicago Press, 2001.

Kant, Immanuel, *Kritik der reinen Vernunft*, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1983.

Klein, Gary, *Natürliche Entscheidungsprozesse. Über die „Quellen der Macht", die unsere Entscheidungen lenken*, Paderborn, Junfermann Verlag, 2003.

Maddy, Penelope, "Believing the Axioms I and II", in: *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 53 (1988), S. 481-511 und 736-764.

Maddy, Penelope, *Realism in Mathematics*, Oxford/New York, Oxford University Press, 1990, 2003.

Maddy, Penelope, "A Second Philosophy of Arithmetic", in: *The Review of Symbolic Logic* 7 (2014), S. 222-249.

Martin, Donald A., "Gödel's Conceptual Realism", in: *Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 2 (2005), S. 207-224.

Parsons, Charles, "Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought", in: *Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 1 (1995), S. 44-74.

Potter, Michael, "Was Gödel a Gödelian Platonist?", in: *Philosophia Mathematica* 9 (2001), S. 331-346.

Tieszen, Richard, *After Gödel. Platonism and Rationalism in Mathematics and Logic*, Oxford, Oxford University Press, 2011.

Tieszen, Richard, "Arithmetic, Mathematical Intuition and Evidence", wird erscheinen in: Special Issue of the Journal *Inquiry* on Mathematical Evidence, hrsg. von Dagfinn Føllesdal, 2014.

Wang Hao, *From Mathematics to Philosophy*, London, Routledge & Keagan, 1974.

Wang, Hao, *A Logical Journey. From Gödel to Philosophy*, Cambridge Mass., MIT Press, 1996.