ISSN: 2695-480X
SLMFC

Revista de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España

Especial Febrero de 2023

Contenido:

Editan:
Cristina Corredor Lanas
David Pérez Chico

Maqueta:
Patricia García Rodríguez

Editorial

Este número especial de la Revista incluye los dos trabajos de fin de máster (TFM) que han resultado premiados en la convocatoria de 2022. Con estos premios, la SLMFCE quiere dar visibilidad y apoyar a los investigadores e investigadoras jóvenes en las etapas iniciales de sus carreras. Esta iniciativa se une a otras (como las bolsas de viaje para la asistencia a congresos internacionales, el congreso de posgrado y los premios a mejores comunicaciones en el congreso general de la Sociedad) con las que desde la Junta directiva de la SLMFCE confiamos en impulsar ese objetivo.

Los trabajos presentados al premio debían haberse defendido en el curso 2020-2021 y haber obtenido una calificación de 9 o superior. Podían estar escritos en español, inglés o cualquiera de las lenguas oficiales en España. En esta convocatoria, el procedimiento de resolución introdujo cambios respecto a las anteriores. Se desarrolló en dos fases: una primera fase eliminatoria mediante evaluación anónima por especialistas en el tema específico de cada trabajo, y una segunda fase en la que los cinco trabajos con mejor valoración fueron estudiados por un comité que acordó el fallo final. Este comité estuvo formado por: José Martínez (UB, presiente del comité y vicepresidente de la SLMFCE), Arantza Etxeberria (UPV/EHU, vocal de la SLMFCE), Sergi Oms (UB, vocal de la SLMFCE), María Cerezo (UCM) y Carl Hoefer (UB). La Junta de la SLMFCE nombró al comité respondiendo al criterio de cubrir las especialidades de los cinco trabajos finalistas. El nuevo modelo de evaluación ha ayudado a que la decisión final pueda estar basada en una visión más global y comparativa de los trabajos, complementando la asignación de puntuaciones con una valoración cualitativa por especialistas.

Importa destacar la alta calidad de los trabajos que se presentaron al concurso, así como su diversidad temática y pluralidad de enfoques. En esta ocasión además, los dos trabajos premiados se sitúan en el ámbito de la lógica formal y la mecánica cuántica con un enfoque lógico, lo que habla a favor del estado de la investigación en las ciencias formales en nuestro país. Así mismo, una mirada a los premios de los últimos años pone de manifiesto la amplitud de intereses y la orientación innovadora y crítica de la investigación más joven en los campos temáticos de interés de la SLMFCE. Lo que es más importante, cabe constatar que quienes recibieron el premio en años anteriores han continuado sus carreras con logros destacados, como contratos de investigación pre- y posdoctorales y la incorporación a la plantilla docente de departamentos universitarios.

No querríamos finalizar esta breve nota editorial sin agradecer muy sinceramente, en nombre de la Junta directiva de la SLMFCE, la valiosa colaboración de los y las especialistas que han prestado sus conocimientos y su tiempo en el proceso de evaluación de los trabajos presentados. En este número se incluye por ello la lista de su nombres, incluyendo todas las convocatorias que van desde los primeros Premios Mejor TFM 2014-2015 hasta la presente edición de TFM 2020-2021. Así mismo, agradecemos a los y las participantes su interés en concurrir a esta convocatoria, y hacemos llegar nuestra enhorabuena a los dos premiados.

1º) On the Axiom of Limitation of Size

Autor: **Alfredo Peña Castaño**
Máster interuniversitario en Lógica y Filosofía de la Ciencia (USAL).
Directora: Mara Manzano Arjona.

2º) La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

Autor: **José Alejandro Fernández Cuesta**
Máster interuniversitario en Lógica y Filosofía de la Ciencia (USAL).
Directores: Fernando Soler Toscano y Adán Sus Durán.

María José García Encinas y
Cristina Corredor

PRIMER PREMIO: On the Axiom of Limitation of Size

Alfredo Peña Castaño

Directora: Mara Manzano

Máster interuniversitario en Lógica y Filosofía de las ciencias-USAL

A Mara Manzano, por su ayuda y dedicación

CONTENTS

ABSTRACT

The Axiom of Limitation of Size is an axiom of set theory that states that a class is a proper class iff there is surjection from it onto V, the set-theoretical universe. And although nowadays it is no longer part of standard set theory (not even NBG), many results can be derived from it. Following this, this work has two objectives. First, analysing the axiom, its history and some well-known results, such as its relation to the ordinals, the Axiom of Choice or the Well- Ordering of V . Second, and perhaps more importantly, showing why and how it implies some new results. The first result is that it implies that $V = HOD$, this is, that the universe of sets is equal to the class of hereditarily ordinal definable sets. Then I will try to show why from this we can derive the existence of measurable cardinals, a type of large cardinal with remarkable properties, and why this means that the Axiom of Constructibility would be false. Finally, in the last section, I will discuss the possibility of a set theoretical multiverse, as a solution for certain problems and contradictions that can also be derived from the Axiom of Limitation of Size. For that, I will describe a possible picture of that multiverse, as a structure in which different models of set class. Although this picture of the multiverse is just a sketch, we can nevertheless derive from it a number of results concerning the Axiom of Limitation of Size, the different multiverses, and the very notion of proper class. The work ends with a historical annex, in which I try to disentangle the original formulation of the Axiom of Limitation of Size.

Keywords: set theory, proper class, alternative axioms, HOD, large cardinals, L, multiverse.

1. INTRODUCTION

Set theory is grown-up field: what began as a very intuitive formalization of mathematical objects and the infinite, is nowadays a complex theory about the mathematical universe. However, set theory is not a theory as such, but rather a family of theories revolving around certain axiomatizations. For instance, mainstream set theory is mainly done within the framework of Zermelo-Fraenkel's axiomatic system, and perhaps the second most well-known is the one of Neumann-Bernays-Gödel (NBG). But the history of NBG hasn't been static either: it has experienced some deep changes since its beginnings, adding some new axioms and ruling out others that seemed key. This work examines one of those axioms: Von Neumann's axiom of Limitation of Size (*Lim*). Roughly, *Lim* states that a class is a proper class if and only if there is a mapping from it onto V. Following this, I will not only analyse it, but also try to show why and how *Lim* leads to the following consequences:

(1): $Lim \Rightarrow V = OD$, and $V = HOD$. This is, the universe of all sets is equal to the class of all ordinal definable sets (OD) and the class of hereditarily ordinal definable sets (HOD).
(2): *Lim* is a large cardinals axiom, since it implies the existence of measurable cardinals.
(3): *Lim* implies $V \neq L$, the class of all constructible sets.
(4): *Lim* is either contradictory (and must be amended) or needs of a set theoretical multiverse.

In this section I will introduce *Lim*'s conceptual and historical framework.

1.1. Origins: the Limitation of Size doctrine

Georg Cantor, set theory's grandfather, not only developed a new understanding of the infinite, but also managed to find some immediate paradoxes. Perhaps the most important one is what is been known as Cantor's Paradox: which is the cardinality of the set of all cardinals? This problem is the seed from which the Limitation of Size doctrine comes out, as well as *Lim* and the very notion of proper class [1].

PRIMER PREMIO: On the Axiom of Limitation of Size

In short, Cantor's Paradox shows that there can be no set of all cardinals. This result comes from his conclusion that there is no greatest cardinal number: if it were, then it would be equal to the cardinality of its power set, which by Cantor's Theorem is impossible. Hence, there can be no set of all cardinals (call it X), for it would have a certain cardinality that would be equal to the cardinality of $P(X)$.

This result implied a problem for Cantor and the naive understanding of sets. The set of all cardinals is clearly a definable collection of objects, and therefore had to be a set. However, as we've seen, the existence of that set was inconsistent with primitive set theory. This is what led Cantor to state the Limitation of Size doctrine: some collections of objects were 'too big' for those collections to be a set. The obvious question is what exactly 'too big' means. And here is where Burali-Forti's paradox appears.

Burali-Forti's paradox, first developed in 1897 but not well known until the result was included in Russell's *The Principles of Mathematics* (1903), shows that the collection of all ordinals is not a set. Although at the time the notion of ordinal wasn't as formal as it is now (we will go later on to it), Burali-Forti realised that, since ordinals can be well-ordered, the set of all ordinals would be well-ordered. Explained in modern terms, this implies that given that every ordinal is defined as a well-ordered set, and the set of all ordinals is a well- ordered set, the set of all ordinals would itself be an ordinal. Therefore, the set of all ordinals would include itself, which is impossible, and hence the set of all ordinals cannot be a set.

When Cantor knew this result, rapidly connected it with his own, and realised that there can be a bijection between the ordinals and cardinal numbers. After that, he concluded that a collection of objects is too big to be a set if it can be mapped onto the ordinals. This is what we can coin as *Cantor's Limitation of Size*. But that didn't settle the question.

In 1925, Von Neumann published his article *An Axiomatization of Set Theory* [4]. The article is somewhat difficult for the modern reader, for instead of talking of sets or classes, Von Neumann states his axioms in terms of 'functions', 'arguments' and 'function-arguments'. Nevertheless, it is an article of great importance: in it we find the initial axiomatization from which NBG comes from, as well as a new Limitation of Size conception. Von Neumann didn't use the ordinals to define what 'too big' is, but introduced what we can call the 'mathematical universe'[1]. The mathematical universe (call it U) can be defined as the collection of all mathematical objects, ie. every set. Following this, *Von Neumann's Limitation of Size* implies that a set is too big if there is a mapping from it onto U.

There is another substantial difference between Cantor's and Von Neumann's notion of Limitation. In his article, Von Neumann not only made it explicit, but included it as an axiom. That axiom is Lim.

1.2. Original *Lim*

Probably due to how complicated is Von Neumann's article, many textbooks and online sources are slightly mistaken when it comes to Lim. It is easy to find examples (some: [1], [2]) in which it is said that Lim asserts that a set is too big if there is a *bijection* between the class and U. But this is not actually correct. Three pages before the axiom, and referring to the Limitation of Size notion, Von Neumann says ([4], p. 397):

> "(The function) must be single-valued, but it need not be one-to-one".

What Von Neumann means is that the function from the class to U only needs to be surjective: every element of U must be in the range of the function, but there can be *more* elements in the class from which we define the mapping. This aspect is important, and necessary for the fourth conclusion listed at the beginning of this work. The explanation of the article in which Lim was first introduced can be found at the end of this work, in the Annex

1.3 NBG: proper classes, proper extension

Von Neumann's axiomatization marked the beginning of NBG, but did not finish it; so to speak, Von Neumann's work is just the 'N'. After that, first Bernays (the 'B') and then Gödel (the 'G'), refined and changed the axiomatization, until a definite NBG was reached.

However, it wasn't Bernays or Gödel who took Lim out of NBG, but Von Neumann himself. Von Neumann found some of the consequences of Lim (that we will study after this introduction), and thought that Lim was a too powerful axiom: it implied the Axiom of Replacement, Separation, the well-ordering theorem and the more metaphysical notion that any class not as big as the universe *is* a set [3]. Von Neumann found that this last consequence departed too much from the Cantorian Set Theory that he had strived for with his first axiomatization, although it is not entirely clear why.

At any rate, in his 1929 paper [5] *On the Consistency of an Axiomatic Set Theory*, Von Neumann got rid of Lim, and included both the axiom of Replacement and an axiom of choice from which one can derive the well-ordering theorem. After that, it would be Bernays turn: he translated Von Neumann's axiomatization to mainstream notation, including as primitives two types of objects: sets and classes. Sets belong to either other sets or classes; classes belong to no other class. Each object worked with a different inclusion operator, so to simplify the situation, in 1940 Gödel developed the 'final' version of NBG: an axiomatization similar to Bernay's, but with only one type of object: classes. Both sets and proper classes were classes, the difference being that sets are classes that belong to other classes, and proper classes are those classes that belong to none. Equally, he included what he called the axiom of global choice: an axiom of choice that also applies to proper classes.

---

1. Again, this explanation is done in modern terms. Von Neumann's doesn't talk about a mathematical universe: as shown in the annex, his notation (which had the aim of clarifying set theory) is quite difficult to follow.

PRIMER PREMIO: On the Axiom of Limitation of Size

Gödel not only coined the modern concept of proper class, but also proved a great result for the study of NBG: that NBG is a proper extension of ZFC. Hence, any discovery within ZFC would also apply to NBG, what allows us to investigate set theory from a more unified point of view. Of course, there is a major difference between the two, namely proper classes. Any result in NBG about proper classes does not apply to ZFC, since in ZFC everything is a set; therefore, NBG is consistent with ZFC up to proper classes, and that is the reason why it a proper extension: it allows us to prove more things than ZFC, but anything provable in ZFC is also provable in NBG.

What does this all mean for this work? Since we are investigating *Lim*, we are not studying neither modern NBG nor ZFC. However, since *Lim* is related with proper classes, all the results shown in this article can only be incorporated within NBG. This is: this article assumes NBG as a framework for *Lim* (what we could call NBG + *Lim*), but without studying NBG itself or paying attention to certain minor problems. For instance, *Lim* implies the axiom of Replacement, which is already in NBG, and hence the axiomatization NBG + *Lim* would be redundant. But I will oversee this kind of issues.

In short, the conclusions of this article could apply to NBG (and any other axiomatization with proper classes) *iff* it included *Lim*, but not to ZFC.

1.4. The universe and the ordinals

In previous sections I have talked quite freely about the notion of universe and the notion of ordinal. Both are of great importance for *Lim*, so to fully understand *Lim*'s scope it is necessary to grasp them correctly.

The most common definition of the class of ordinals (*Ord*) is simple: the class of all sets that are both transitive and well-ordered by $\in$, where each ordinal is the well-ordered set of all previous ordinals.

Some important properties of ordinals are (proofs can be found in [6]):

- If α, β are ordinals, then either $\alpha \subset \beta$ or $\beta \subset \alpha$.
- $<$ is a linear order over *Ord*.
- Every well-ordered set is isomorphic to a unique ordinal number.

A bit more intuitively, the ordinals correspond to *positions* within an order: first, second, third, etc. Ordinals are denoted with lower case Greek letters.

Thanks to the ordinals we are able to develop a more formalized notion of universe: V. Named after Von Neumann but first introduced by Zermelo, V (also known as the cumulative hierarchy of sets) is the structure that includes every x that is a class. More concretely, it is the class of all well-founded sets (and since all classes are well-founded in NBG and ZF, it includes all sets). Of course, if we understand V as a class, it will be a proper class. However, the role of proper classes within V will be investigated at the end of this article.

V is generated step by step by transfinite recursion, using the ordinals:

- $V_0 = \emptyset$
- For any ordinal α, let $V_{\alpha+1}$ be: $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$
- For any limit ordinal γ, let V_γ be the union of all previous ordinals: $V_\gamma = \bigcup (V_\beta)$, when $\beta < \gamma$.

For any limit ordinal γ, let V_γ be the union of all previous ordinals:

Being each V_α a 'stage' or 'step', the class V is the union of all stages:

$$V := \bigcup_\alpha V_\alpha$$

Any existing set in the universe will be within a certain V_α. But what happens with proper classes? The answer to this question might lie within *Lim*.

2. THE AXIOM OF LIMITATION OF SIZE

In this section I will state *Lim* formally, as well as its main consequences. These results can be found in [3] and [7].

2.1. *Lim*

As said, *Lim* states that a class is a proper class iff there is a function from it onto V. This is equal to saying that there is a function from it to every set there is. Following this, we could formalize *Lim* as (when uppercase letter denote classes and lowercase letters, sets):

$$Lim\colon\ \forall C[\neg\exists D(C \in D) \Leftrightarrow \exists R\,(\forall_y \exists Y\,(y \in Y) \rightarrow \exists x\,(x \in C \wedge (x, y) \in \mathrm{R})) \wedge \forall_x \forall_y \forall_z\,([(x, y) \in R \wedge (x, z) \in R] \Rightarrow y = z)\ ]$$

Analyzing the axiom part by part, what it says is: for any class C, there is no class to which it belongs to (and therefore C is a proper class) iff there is a relation R such that:

- The range of R is the totality of sets: any set y that belongs to at least one class Y.
- For any set y, there is at least an element x in C such that $(x, y) \in R$. Therefore, R is surjective, and its domain is a subset of C
- R is a function.
- It is not specified whether R is one-to-one. Therefore, it can be many-to- one.

Since V is the union of every set there is, *Lim* can be stated as:

Simplified Lim: a class C is a proper class iff there is a function from a subset of C onto V.

PRIMER PREMIO: On the Axiom of Limitation of Size

2.2. Main implications of *Lim*

2.2.1. Sets

Thanks to stating what a proper class is, *Lim* allows to define what a set is: any class that cannot be surjected onto V.

Lemma 2.2.1: If a is a class and there is no surjective function F from a onto V, then a is a set.

Proof: Assume for the contrary that there is such an F. Then, for every element $y \in V$, there is an element $x \in a$ such that $(x, y) \in F$. Then, by *Lim*, it is a proper class.

Note that this is only serves to define what a class is in a very general way. Anything smaller than a proper class would be a set, and for example, by *Lim* alone a non-well-founded set would be a perfectly acceptable set. This is, other axioms are required to fully define what a set is, at least for mainstream axiomatizations.

2.2.2. Axiom of Replacement

Roughly, the Axiom of Replacement states that the image of any set under any definable function is also a set. Following this:

Lemma 2.2.2: *Lim* $\Rightarrow$ Replacement

Proof: Replacement says that if F is a function and a is a set, then $F[a]$ is a set. Assume for the contrary that $F[a]$ is not a set, and therefore it is a proper class. Then there is a function R from F [a] to V. Being $R \circ F$ the composition between the function from F [a] to V and the function from a to F [a], we know that $R \circ F$ is a function from a to V. The reason is that the domain of $R \circ F$ is the domain of F, namely a. Hence, since there is a function from a to V, a is a proper class, which contradicts a being a set.

We know that the Axiom of Replacement implies the Axiom of Separation, what means that *Lim* implies the Axiom of Separation.

2.2.3. Well-ordering of V

A well-order over V means that V is totally ordered and that every non-empty subset of it has a least element. In mainstream set theory such as ZF or NBG without the Axiom of Global Choice, V is not well-ordered. This seems counterintuitive given that V is built using the ordinals, and ordinals can be well- ordered. But consider the following case: take a certain V_α and V_β within V. By the ordinals, we know that either $\alpha < \beta$ or $\beta < \alpha$. But this does not mean V_α and V_β are well-ordered, for we can define two different well-orderings, one in which we have $V_\alpha < V_\beta$ and other in which we have $V_\beta < V_\alpha$. Hence, V is not well-ordered because we can define infinitely many well-orderings.

For V to be well-ordered, we need to define a definite well-ordering function *from outside*, that determines for every V_α whether $V_\alpha < V_\beta$ or $V_\beta < V_\alpha$. With *Lim* we can define such a function.

Lemma 2.2.3: *Lim* $\Rightarrow$ well-ordering of V.

Proof: As we have seen, *Ord* is a proper class. By *Lim*, there is a function F from *Ord* onto V. Following this, we can define a subclass R of F (assuming F is a function that is correctly defined) such that:

$$R = \{(\alpha, x) \in F \mid \forall y((y = \beta) \wedge (\beta, x) \in F) \Rightarrow \alpha \leq \beta)\}$$

This is, to R belong all the ordered pairs (α, x) such that α is the least ordinal in F, for any x in V. Therefore, for any $x \in V$, there will be a $\alpha \in Ord$ such that $(\alpha, x) \in R$, and α is the least ordinal such that (α, x). Hence, R is a bijection between a subset of *Ord* and V. The reason is that there will be an ordinal for any set in V, and since that ordinal will be the least possible, there will be a unique ordinal for any set.

Following this, we can prove that $x < y$ iff $R^{-1}(x) < R^{-1}(y)$ (R^{-1} being the inverse function of R). Consider for the contrary that we have $x < y$, but not $R^{-1}(x) < R^{-1}(y)$. Be $R^{-1}(x) = \alpha$ and $R^{-1}(y) = \beta$. Since it is not true that $R^{-1}(x) < R^{-1}(y)$, then $\beta < \alpha$ (for ordinals are well-ordered). By how we have defined R, we know that given the function $(\alpha, x) \in R$, α is the least ordinal for x, and the same happens with β and (β, y). Therefore, if $\beta < \alpha$, then the function R_β corresponds to a set (y) smaller than the one that corresponds to the function R_α (in this case, x). If it wasn't like this, then β would not be the least ordinal that relates to y, and therefore it would relate to x (for either $x > y$ or $y > x$). Therefore, we have that $y < x$. We have reached a contradiction.

We find that the function R defines a well-ordering over V: every element of V is ordered by the functions in R. The functions in R are ordered by *Ord*, and since *Ord* is well-ordered, then V is well-ordered.

Note that this is different from the many well-orderings we can define from V alone. Here, V has a certain well-order: the one that R determines. This is, given any V_α or any V_β, R gives us an outward criteria to decide whether $V_\alpha < V_\beta$ or not.

2.2.4. Axiom of Global Choice

From the well-ordering theorem we can derive that *Lim* implies the Axiom of Global Choice. The Axiom of Global Choice is equal to the Axiom of Choice, but applying also to proper classes. More concretely, a choice function is a function f such that, for every set x within a certain collection of sets, $f(x)$ is an element of x. Following this, the Axiom of Choice states that we can define a choice function f for any set of nonempty sets X, such that for any $x \in X$, $f(x) \in x$.

Lemma 2.2.4: *Lim* $\Rightarrow$ Axiom of Global Choice.

Proof: take R, the function we have used to prove the well -ordering theorem. Since R implies that V is well-ordered, any class x in V will have a least element. If we name that element $Least(x)$, we have that for every x, $Least(x) \in x$. Therefore, it is possible to define a choice function over V such that $f(x) = Least(x)$, and since $Least(x) \in x$, we would have that $f(x) \in x$. As we have seen, this is a choice function.

PRIMER PREMIO: On the Axiom of Limitation of Size

In conclusion, the well-ordering of V allows us to derive the Axiom of Global Choice. In fact, both the well-ordering principle and the Axiom of Choice are known to be equivalent between each other and to Zorn's Lemma [6].

From all these conclusions we extract what we can call V_{Lim}. It differs from the usual V in the sense that it is well-ordered thanks to Lim. V_{Lim} is the universe I will work with from now on, althought calling it V for simplicity.

3. NEW CONCLUSIONS

Now I move to the first part of the novel conclusions listed at the beginning of this work.

3.1.OD

A class A is said to be *ordinal −definable* [8][2] iff there exists a formula φ such that

$$A = \{u : \varphi\,(u, \alpha_1, ..., \alpha_n)\}$$

This is, a class A is ordinal-definable if, for any object u described by a formula φ, u has an ordinal as a witness in A. We call OD to the class of all ordinal definable classes.

From this, we can deduce that the property "A is ordinal definable" is in fact definable by a first order-formula. But, to understand why, we need to introduce the Reflection Principle.

Definition 3.1.1: *Reflection Principle* [6]: The Reflection Principle, some- what similar to Löwenheim-Skolem's theorem, says that for any finite number of formulas, there is a set M that works as an elementary submodel of the universe. This is: for that set of formulas, it gives us a framework for any formula to be true in the universe. More formally, the Reflection Principle says that given a formula $\psi(x_1, ..., x_n)$, in a certain M_0, we have that for each M_0, there exists a set M such that $M_0 \subset M$ and:

$$\psi^M(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, ..., x_n)$$

This states that ψ is true in M iff ψ is valid, this is, it is true in any possible model. We say that M *reflects* ψ. The complete proof can be found in [6]. Broadly, the reason is that one can prove that if $\exists x\psi(u_1, ..., u_n, x)$, then $(\exists x \in M)\psi(u_1, ..., u_n, x)$, in at least one M (for, if a formula is valid, then it will be true in at least one model). On the other hand, if ψ is true in M and ψ is an atomic formula, then it will be *absolute*: it will hold in any model of the universe of sets. This is: since atomic formulas are derived from the same axioms, each atomic formula will have the same truth conditions in all the models of set theory. There will be models with less or more atomic formulas (with different sizes), but given that set theory is a theory bounded by certain axioms, one cannot derive a contradiction from them. Therefore, we know that for any valid atomic formula, there will be a model in which it is true, and viceversa.

After proving this, we extrapolate this result to the rest of finite formulas by transfinite induction, and hence we know that they will be valid in the universe iff they are true in a certain M.

Now we have the Reflection principle, and given the definition of ordinal definable class, we can prove the following lemma:

Lemma 3.1.1: A set x is ordinal definable iff there is some α such that x is ordinal definable in V_α [8].

Proof: assume that a set x is ordinal definable and $x = \psi(u, \alpha_1, ..., \alpha_n)$. Since it is a set, it will be within a certain V_α. Now, we can identify V_α with M_0, such that by the Reflection Theorem, there is an M that reflects X and $M_0 \subset M$. M can also be identified with a certain V_β, and since $M_0 \subset M$, we have that $\alpha < \beta$. Therefore, also by the Reflection Principle:

$$\forall u\{(V_\beta \models \psi(u, \alpha_1, ..., \alpha_n)) \leftrightarrow \psi(u, \alpha_1, ..., \alpha_n)\}$$

Hence, we have that X is ordinal definable in the universe iff it is ordinal definable within a certain V_α.

Also, one can prove a corollary that will be vital for our proof that Lim implies that $V = HOD$:

Corollary 3.1.1: If X is a class and there exists a function $F\colon Ord \longmapsto X$, then every element of X is ordinal definable [6]

Proof: As said, a class X is ordinal definable if any $u \in X$ has an ordinal as a witness. If there is a function from Ord to X, then there is a $\alpha \in Ord$ such that, for every $u \in X$, there is a $F(\alpha) = u$. Therefore, every $u \in X$ has an ordinal as a witness, and hence is ordinal definable. And by Lemma 3.1.1, then $\psi(u, \alpha_1, ..., \alpha_n)^X \leftrightarrow \psi(u, \alpha_1, ..., \alpha_n)$. This is, every $u \in X$ is ordinal definable not only in X but also within the whole structure in which X is in, this is, V.

From this, we can get to:

Theorem 2: $Lim \Rightarrow V = OD$

Proof: OD is the class of all ordinal definable classes. As we just have seen, by Corollary 3.1.1. we can now that if there is a function $Ord \longmapsto X$, then every element in X is ordinal definable. Be $X = V$. Since by Lim there can be a function $Ord \longmapsto X$, every element in V is ordinal definable. Therefore, $V = OD$

Now we prove that $Lim \Rightarrow V = HOD$.

2. The notion of definability, although not expressible as a property in first order logic, can be formalized as an operation. See [8], chapter V.

PRIMER PREMIO: On the Axiom of Limitation of Size

3.2. HOD

Once we have defined OD, we have the tools to define HOD: the class of all hereditarily ordinal definable sets [8]. It contains all the ordinal definable sets whose transitive closure is also an ordinal definable set. The transitive closure of x (denoted $TC\{x\}$) is the smallest transitive class that contains x.

We can formally define HOD such that:

$$x \in HOD \leftrightarrow TC\{x\} \subset OD$$

Now we prove that $V = HOD$.

Lemma 3.2: Given Lim, any set in V is transitive.

Proof : At the introduction we have seen that every well-ordered set is isomorphic to a unique ordinal number. We have also seen that there is a well-ordering of V, and therefore that every set can be well-ordered. An ordinal is defined as a class that is transitive and well-ordered. Since every well-ordered set is isomorphic to an ordinal, then every well-ordered set is transitive.

From this, we prove:

Theorem 3: $Lim \Rightarrow V = HOD$

Proof: We know that, thanks to Lim, $V = OD$. To prove $V = HOD$, assume for the contrary that there is an X in OD that it is not in HOD. If X is not in HOD, that means that $TC(X)$ is not in OD. Now, from this we can deduce that X is not included in any transitive class, for if it was included in at least one transitive class (call it M), then M would be the smallest transitive class that includes X, and therefore $M = TC(X)$. Every X in V is transitive, and $V = OD$, so, given that $X \in OD$, X must be in a certain transitive class. We have reached a contradiction.

From this we can also extract the conclusion that given Lim, $OD = HOD$, which under certain circumstances is not necessarily true (see [8], page 160)

3.3. Large Cardinals

Large cardinals is the name by which we refer to certain transfinite cardinals. Not all large cardinals are equal, not only in terms of size but also of properties. In fact, there is a wide range of options when it comes to large cardinals: from weakly inaccesible cardinals to Woodin cardinals, most of the research in modern set theory has been focused on discovering new large cardinal properties [9].

However, the proofs concerning large cardinals are usually consistency proofs. This is, one can prove that a certain large cardinal is consistent with a set of axioms (such as ZFC or NBG), but it cannot be proved from those axioms that the large cardinal *exists*. To prove the direct existence of a large cardinal, we need a large cardinals axiom. Large cardinals axioms are usually intended and developed to prove the existence of a certain large cardinal, and here lies the importance of Lim when it comes to large cardinals: despite Lim was not first thought as a large cardinals axiom, it actually allows to prove the existence of some large cardinals. Hence, Lim can also be thought as a large cardinals axiom.

To show how, I will prove that Lim implies the existence of a type of large cardinal known as measurable cardinals. Probably, Lim implies other large cardinals, but measurable cardinals are enough to prove a conclusion that will come afterwards: that Lim implies $V \neq L$.

Before explaining what a measurable cardinal is we need to grasp what exactly we mean with measure. A measure over a class is a function that assigns a number to every one of its subsets. This is, if we have a class $X = \{x, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$, a measure would be a function $f(X)$ such that $f(x) = 1$, $f(\{x, y\}) = 2$, and $f(\{x, y, z\}) = 3$.

Following this, a measurable cardinal is an uncountable cardinal for which we can define a special type of measure. This measure is two-valued: given a certain cardinal $k > \omega$, the two-valued measure $\{0, 1\}$ is a way of dividing the subsets of 2^k (k's powerset) between 'large' (we represent it with 1) and 'small' (we represent it with 0). The conditions for deciding which subsets are to be considered large or not must be stated formally:

Definition 3.3.1 : *measurable cardinal* [6]: a cardinal $k > \omega$ is a measurable cardinal iff there is a measure function $\lambda : 2^k \longmapsto \{0, 1\}$ that is:

1: $k-$*additive*: for any family of disjoint sets X_α with $\alpha < k$, we have: $\lambda(\bigcup X_\alpha) = \Sigma\lambda(X_\alpha)$. This is, there is no difference between the measure over the union of all X_α and all the λ functions over X_α.

2: $\lambda(k) = 1$

3: $\lambda(s) = 0$ for every bounded subset of k.

From this we can also extract the conclusion that the complements of small sets (value 0) will be large, this is, of value 1. The reason is that anything that is not small (a bounded subset) will be large. In other words, unbounded subsets of k will be large.

From here, we prove using Lim that any cardinal in V is measurable.

Lemma 3.3.1: given Lim , any cardinal $k > \omega$ can be measurable.

Proof: Be k a cardinal such that $k > \omega$. Since it exists, it is ordinal definable, and therefore it is transitive and well-ordered.

First we prove that we can always define, for any subset $x \subseteq k$, whether $\lambda(x) = 1$ or $\lambda(x) = 0$. Be r the first large subset ($\lambda(r) = 1$), such that, if $x > r$ we have $\lambda(x) = 1$, and if $x < r$, $\lambda(x) = 0$. Since k will be well-ordered due to Lim , for any $x \in k$ we will always be able to know whether $x > r$ or $r > x$, for any subset of k. Therefore we could define a measure $\lambda : 2^k \longmapsto \{1, 0\}$.

PRIMER PREMIO: On the Axiom of Limitation of Size

Now we prove that λ is $k-additive$. Assume for the contrary that it is not, and therefore $\lambda(\bigcup X_\alpha) \neq \Sigma\lambda(X_\alpha)$. Since every subset has an ordinal as a witness, we would then have that, for all the $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ attached to the disjoint subsets, $\bigcup\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \neq \Sigma\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ But given that each ordinal corresponds to just one subset and how ordinals are defined, this is impossible.

We have proven that we can define a measure over any cardinal, but for a cardinal to be measurable and to *exist*, we need to actually define a measure function from the axioms. This is what we do now:

Theorem 3.3.1 $Lim \Rightarrow$ measurable cardinals

Proof: for proving it we need to define a measure function. Be k a cardinal such that $k > \omega$. Be S a function from all the bounded subsets within 2^k to 0. Be R a function from all the complements of the bounded subsets within 2^k to 1. More formally:

Given the class:

$S = \{x \subseteq 2^k | \ x \text{ is bounded}\}$

We define the function $S \longmapsto 0$. And given the class:

$R = \{x \subseteq 2^k | \ \forall y \ (y \in S \rightarrow x - y)\}$

We define the function $R \longmapsto 1$. Of course, k itself will fall under R, for $k \subseteq 2^k$, and as we saw, k is big.

Now, we define our measure function λ, such that $\lambda(k) = R \circ S$. And as we have previously seen, this measure function will be $k-additive$. Hence, we have shown that k is a measurable cardinal, and that Lim is a large cardinals axiom.

3.4. L

In 1931, Kurt Gödel introduced a concept that would change set theory for the subsequent years: inner models [8]. Basically, an inner model is a transitive class that works as a model of a certain axiomatization and contains all ordinals. HOD, V and OD are in fact inner models. However, the first inner model to be developed was L: the constructible universe.

The importance of L lies in the reason why it was developed: proving that the generalized Continuum Hypothesis is consistent with ZFC. However, after that result, a great deal of research on inner models arose, and most of it, on L. Now I define it a bit more exactly:

Definition 3.4.1: L [8]: the universe of all constructible sets is formed in a similar way as V (by transfinite recursion), but limiting the sets that can be formed to those that are constructible. A set is constructible if it is *definable* by a formula φ with parameters from previous stages. This is, a set is constructible iff it is based in sets previously constructed. Many results are consistent or implied by L. For our proof, we need to have in mind three:

- L is an inner model of set theory.
- $V = L$ (known as the Axiom of Constructibility) is consistent within L
- L is the smallest inner model possible

Proofs can be found in [6].

Interestingly, L also implies that $V = HOD$, but one of the few direct im- plications within modern set theory, due to Dana Scott, is that the existence of measurable cardinals implies the negation of $V = L$ [6]. This is: measurable cardinals imply that $V \neq L$. And since *Lim* implies measurable cardinals, $Lim \Rightarrow V \neq L$. This is what I will show. But for proving it we need to introduce what an *embedding* is.

Definition 3.4.1: *elementary embedding* [8]: An elementary embedding is a function $f: M \longmapsto N$ such that, for every formula φ and all $(a_1, ..., a_n) \in M$, then:

$$M \vDash \varphi \ ((a_1, ..., a_n) \leftrightarrow N \vDash \ \varphi \ (f(a_1), ..., f(a_n))$$

We prove now that Lim implies that $V \neq L$. The original proof involves a manifold of concepts, such as ultrafilters, ultrapowers, Mostowkski's Collapse Theorem, etc. However, these concepts are for defining the necessary background for working with a measurable cardinals. Since we have seen that, thanks to Lim, measurable cardinals actually exist, we can skip those steps, and move directly to why measurable cardinals imply that $V \neq L$. The proof itself can get quite complex (the unabridged version can be found in [6], page 285), so I will try to simplify it.

Lemma 3.4.1: If there is a measurable cardinal, then there is a non-trivial elementary embedding to the universe [6].

Proof: Be M an inner model from which there is an elementary embedding onto the universe such that $f = M \longmapsto V$. As we have seen, for any formula φ, $V \vDash f(\varphi)$ iff $M \vDash \varphi$. This implies that $\alpha < \beta$ iff $f(\alpha) < f(\beta)$.

Now, be k a measurable cardinal within M. Since it is measurable, there is a measure function $r = \{0, 1\}$ that differentiates between 'big' and 'small' subsets of 2^k, such that if a certain subset x is small then $r(x) = 0$, and if big, $r(x) = 1$. As we saw, k is big, and the rest are small.

Now, we define a function d over k such that: $d(\alpha) = \alpha$, for any $\alpha < k$.

Now comes the key step in the proof. Remember bounded sets are 0 and unbounded, 1. If $\alpha < k$, then α can be either 1 or 0. In uncountable cardinals, the vast majority of subsets will be unbounded, and hence the majority of α will be 1. This is, be γ the class of all $\alpha = 0$, and be $[d]$ the class of the rank of the function d. Then, we will have $[d] > \gamma$, for the majority of elements in $[d]$ will be big, and in γ, small.

PRIMER PREMIO: On the Axiom of Limitation of Size

It is important to bear in mind that in this proof we are working with only two types of measure: big and small. Hence, even if there is a difference in the size of two different big α, it does not matter, for both will be 1. This is the trick of the proof: unifying all the big subsets, such that all big subsets are 'equal' in their size. Now, remember that k itself is 1. Therefore, since $[d] > \gamma$, then $k \leq [d]$. Why? Again, there are just two types of measure: big and small. γ is small, and k big, so $\gamma < k$. Since there is no other measure, there can be nothing between the small (γ) and the big (k). We also know that $[d] > \gamma$. Since $[d]$ cannot in between γ and k, therefore $[d]$ is either equal or bigger to k. We only know that it cannot be smaller, and therefore $k \leq [d]$.

Now, we go back to our elementary embedding f. Since we defined our α such that $\alpha < k$ and we have not applied the d function over $f(k)$, then $\alpha < f(k)$. But since $k \leq [d]$, then we have that $k < f(k)$. Note that d is a tool for dividing between big and small subsets by their measure, without paying attention to its actual size. Since we have not used it with $f(k)$, then every α will be smaller than k in terms of its size. In short, with k we work in terms of its measure, and with $f(k)$, in terms of size. This proof shows that size and measure are not equal, despite both are closely related.

Therefore, there is an elementary embedding from M onto V that is non- trivial, this is, that does not imply $\alpha = f(\alpha)$ for all of its elements.

Of course, we could apply the same procedure over $f(k)$, and define a d function over the embedding. But that would not sort out the situation, for then we could do another embedding to another inner model, and get to the same result. The only solution could come from defining a function all over every possible inner model. But that would mean that we could not define an embedding function from that collection of all inner models to any other model. Therefore, there would be a great 'unique' model of set theory, which due to the incompleteness, we know that cannot happen.

Theorem 3.4.1: If there is a measurable cardinal, then $V \neq L$ ([6], p. 287)

Proof: Let us assume $V = L$, and be k the *least* measurable cardinal. Be $f : M \longmapsto V$ the embedding we have seen, such that $k < f(k)$.

Since $V = L$, then the only inner model that exists is V itself, for as we have seen, L is the smallest. Therefore, $V = L = M$, for M is an inner model. Therefore, we have that:

$V \models$ "$f(k)$ is the least measurable cardinal" iff $M \models$ "k is the least measurable cardinal"

But this is not true, since we have that $k < f(k)$.

Corollary 3.4.1: Lim implies $V \vDash L$

The importance of this result lies in realising that Lim implies that there cannot be just one inner model. If there was, there would be a great inner model of set theory in which we would not have $k < f(k)$. However, we have seen that $HOD = V$, and HOD is an inner model. What does this mean? This problem opens the door to a great deal of new questions, closely related to the notion of proper class and the philosophical conception of set theoretical multiverse.

4. *LIM* AND PROPER CLASSES

Until now, I have presented some of the results that can be deduced from Lim. But Lim has other implications, more philosophical, that I will try to address in this section. In general terms, I will try to show that Lim allows us to see that the notion of proper class presents some clear problems, that can only be amended if we understand the set theoretical universe as a collection of structures with different truth conditions. In fact, I will try to show that Lim should be amended in light of certain well-known conclusions, but also that Lim, in fact, might give us the clue to solve those problems.

4.1. Problems: contradictions and illegal classes

Lim gives us a tool to decide when a class C is a proper class: if there is a surjective function from it onto V, then it is a proper class. In fact, this is just a formalization of the well-known notion that a proper class is a class that belongs to no class.

As we saw in the first section, Lim has been often understood as an axiom that states that a proper class is a class from which there is a *bijection* to V. If this were the case, then all proper classes would have the exact same size: that of V. This, in fact, is an assertion that is found often, and that is probably due to a result first developed by Von Neumann: that there is a bijection from every proper class to the ordinals. And since there is a bijection from the ordinals to V, then all proper classes are equal to the ordinals and V. However, as we saw, this is strange, since the function in Lim is surjective, what opens the door to the thought that maybe there can be proper classes bigger than others.

Now, given this, I will show Von Neumann's result that there is bijection from the ordinals to every proper class, as stated by Kanamori citing von Neumann [3]. The rest are novel.

Lemma 4.1.1: A class is a proper class iff it can be put in a bijection with Ord.

Proof: Be A a class. A is within V, and will be in a certain V_α defined by $A \cap (V_{\alpha+1} - V_\alpha)$. Assume A is a proper class; then, for any $\gamma < \alpha$, V_γ will include a set. This is: anything inferior to A will be a set. Since every V_γ can be well-ordered, then the union of all stages previous to V_α can be well-ordered (i.e.,$\bigcup V_\gamma$ can be well-ordered.). Therefore, V_α can be well-ordered. Hence, A can be well-ordered, and there is a bijection from A to Ord.

The reason why there is a bijection (following this argument, which I will try to show that is not necessarily correct) between C and Ord is that C belongs to no other class. Hence, there is no $V_\emptyset$ superior to the V_α in which C is in, and therefore, it is the 'biggest' a class can get. Therefore, it is the size of Ord.

If this is so, then, why state Lim as a surjective function, instead of a bijective one? In fact, this argument shows why Lim can be considered contradictory:

Theorem 4.1.1.: If there is a bijection from every proper class to Ord, then Lim is contradictory.

Proof: Assume a proper class C from which there is a surjective function onto V. Now, assume another proper class T, such that $T < C$. This is consistent with Lim, since the functions onto V only need to be surjective.

Now, if $T < C$, T will be in a V_α inferior to the V_φ in which C will be, as we have seen previously. Hence, T will belong to a class: V_φ . Therefore, it cannot be a proper class.

What to do? There is one immediate solution: to amend Lim and state formally that the function from the proper class to V must be bijective. This change is quite straightforward and intuitive, and does not affect the conclusions that I have listed: measurable cardinals, $V \neq L$, etc., would remain.

However, this change could have two motivations: fixing Lim and, more importantly, maintaining the current definition of proper class. But perhaps, the definition and role of proper classes within set theory should be reconsidered.

Consider again L, the class of all constructible sets. L, intuitivey, is a proper class. Since it is formed out of all the constructible classes, it itself will be a constructible class, and therefore should include itself. On the other hand, we have seen that $Lim \rightarrow V \neq L$, and therefore L is not the only inner model there is. It will be inferior to other inner models, such as HOD, and according to the proper class definition, it would not be a proper class, since there would not be a surjective function from L to V. Does this mean we should consider L to be an 'illegal' class? That given Lim it cannot exist?

What this example shows is that we could have many collections of objects perfectly definable by a formula, that would be proper classes if we rule out the condition that every proper class bijects to Ord. However, this is not a condition, but a proof, and seems to say that not only we should assume that L cannot exist, but also that Lim is contradictory.

In short, there seems to be a problem: many classes that, to some degree, could be proper classes, cannot exist due to the very definition of proper class. Furthermore, according to the definition of proper class, Lim is contradictory. Hence, either Lim is amended and L is ruled out (as we as any other similar classes), or we try to find an alternative. This is what I will do in the following subsection.

4.2. Solutions: the multiverse

The word 'multiverse' is dangerous. Leaving aside its science fiction scent, some- times looks like a 'trick' for solving almost any issue: "*x* is false, but in another universe it would be true" seems as trivial as saying "if *x* wasn't false then it would be true". However, perhaps as in physics, the idea of multiverse might not be that far-fetched, for it is a possible hypothesis to explain the different independence proofs. And although the concept of a set theoretical multiverse seems to be still between actual set theory and philosophy of mathematics [9], it could work as a *formal* solution for the situation we have encountered with Lim.

The set theoretical view first arose out of the different independence results found in set theory, and specially with the Continuum Hypothesis (CH). First, Gödel proved that CH is consistent within L, but years later Cohen proved that one can develop a model of ZF in which ¬CH is consistent. This implied that CH is independent from the axioms of ZF, since there is no way of proving a definite result for CH. This is when the multiverse view comes in: it is not that CH is not provable from ZF, but that, given certain conditions, from ZF one can prove both CH and ¬CH. Both will be consistent with ZF in different structures.

Here arises a question. One can accept the view that CH and ¬CH will be both true. But why using the word 'universe' instead of 'model'? After all, a universe is a structure with certain truth conditions that satisfies certain axioms, which is very much the same as saying that a universe *is* a model. However, probably the reason why the word 'universe' is used is that albeit one can have many models of set theory due to the incompleteness, those models are not contradictory between themselves, for all depend on the same axioms of set theory. Hence, the definition of universe that I will follow will be:

Definition 4.2.1: *universe*: a universe is a model of set theory that is contradictory with at least other model of set theory.

This is equivalent to claiming that a universe is a model of set theory to which we have added some additional rules or axioms, for it is from those new axioms from which we deduce the different contradictions. Following this, we could argue that there are two universes of set theory concerning CH: one in which it is consistent and other in which it is inconsistent.

But how does this relate to the problems we have seen with proper classes?

It all depends on how the multiverse is defined.

PRIMER PREMIO: On the Axiom of Limitation of Size

4.2.1. The multiverse V^M

We can define V^M as the collection of all universes V^m, when each superscript (symbolized with lower case letters for simplicity) denotes a specific universe.

Each $V^m$is created as normal V: recursively, using the power set operation. Therefore, each V^m will be layered in different V_α^m. However, given the definition of universe, we have that $V_\alpha^m = V_\alpha^m$, but not necessarily $V_\alpha^m = V_\alpha^n$. The reason, again, is that there will be contradictions between the two.

Now we go to proper classes. Given Lim, a proper class will be a class from which there is a surjection to the universe. But now we have many universes. Of course, Lim does not specify to which V^m there is a surjection. But in fact we do not need to do it: a class will be a proper class iff it surjects to at least one universe V^m. Since Lim allows for proper classes bigger than others (for instance, Ord is bigger than the class of all finite classes), there will be universes to which more than one proper class surjects.

To understand this situation, we need to introduce a concept: that of *upper bound*

Definition 4.2.1: *upper bound*; given a universe V^m, I will call the *upper bound* of V^m any proper class C from which there is a *bijection* to V^M.

It will be a bijection because in this way we make sure that the upper bound of a universe is the least proper class from which there is a function onto that universe. Obviously there cannot be a smaller proper class, because then it would not be a mapping from it to the universe. Hence, the universe will have the size of its upper bound, even if there are bigger proper classes from which there is a surjection to it.

Now, consider again the proper classes I mentioned in the previous section. L, for instance, will biject with a certain universe V^l, and hence will be its upper bound. This is: how we have defined the multiverse allows classes such as L to exist. They are the limits of the different universes, no matter how large or how small.

However, there is a very important issue. How do we reconcile this view in which the different proper classes can exist, with the proof that every proper class can be bijected to Ord? Consider a proper class C that bijects with a certain V^c. Now, be T another proper class such that $T > C$. Now we prove some important results to fully understand our multiverse:

Lemma 4.2.1: If $T > C$ and there is a bijection from C to M^c, then there is a bijection from T to another universe V^t.

Proof: assume for the contrary there is not. Since $T > C$, then there is a surjective function from T to M^c. Then, as in Lemma 4.1.1, then anything inferior to T will be a set. Therefore C is a set and not a proper class.

Corollary 4.2.1: All the proper classes that have a function onto a certain universe must be of the same size.

Lemma 4.2.2: Given $T > C$ and a bijection $T \mapsto V^t$, then $C \notin V^t$

Proof: assume for the contrary that $C \in V^t$. Then it is a set. But we have defined C as a proper class.

From this we get to a very important result:

Theorem 4.2.3: There can be no class of all classes (V^M)

Proof: assume it can. Then it will be the collection of all the classes that belong to all the universes: V^M. Then there will be a proper class M that will biject with V^M. Since it includes many universes, there will be other proper classes $C \in M$ such that $C < M$. But we have seen this is impossible.

Does this mean that the multiverse V^M we have introduced is contradictory? Is this a proof of the impossibility of a multiverse? Instead of thinking as it, we can also understand it as a *description* of how it looks like. Precisely because we have defined a universe as a model of set theory that is contradictory with other models, then, from the beginning, it was impossible to define a class V^M. We can say it is a collection, or a structure, but we do not have the means within set theory to define what $V^M$is formally.

It is a strange situation, but not necessarily contradictory. Given the multiverse, we know by Lim that different proper classes can exist, despite their different sizes. This, in fact, is what allows us to have proper classes such as C, L, etc. On the other hand, we also know that there can be no class to which all classes belong, and hence the universes within the multiverse are disconnected. And this is precisely how we must imagine it: the multiverse has no *within*, and classes do not belong to the multiverse but to each of the universes. Nevertheless, by how Lim is defined, Lim works for any universe, since it does not specify to which universe there is a function from the different proper classes. It can be applied to any.

Also, it is important to see that now the result that a class is a proper class iff there is a bijection to Ord is consistent with Lim. That is because the proof is within just one universe, that of V. Therefore, since we can do a function from Ord to V, then by Corollary 4.2.1, then any proper class must be of the same size as Ord. But this is not necessarily so concerning other universes. In fact, *Lim* implies that not all universes allow for a function (not a bijection, a *function*) from Ord to it.

Lemma 4.2.3: following Lim, there can be a universe V^x with no function from Ord to V^x.

Proof: assume a universe V^x such that there is a proper class X from which $X \mapsto V^x$ Assume $X < Ord$. If there is a function $Ord \mapsto V^x$, then, by corollary 4.2.1, X will be of the same size as Ord. This is a contradiction.

PRIMER PREMIO: On the Axiom of Limitation of Size

What this means is that *Lim* makes V (our V, so to speak) well-ordered, but gives a fantastic richness when it comes to other universes. It opens the door to a fascinating field, in which we can investigate and formalize the notion of multiverse. If not, as we have seen, the other option is fixing *Lim* and ruling out a great number of quite intuitive classes. As said, the reason is that with only one universe, *Lim* is contradictory. But with more universes, it is not.

To my mind, the multiverse option is much better than the one of fixing *Lim*. *Lim* has demonstrated to be an axiom with a power far greater than what it looks at first, despite being, at the same time, very intuitive. Hence, from multiverses to the different proper classes we have investigated, I believe that the richness that *Lim* implies should not be rejected, but treasured.

5. CONCLUSIONS

Lim is an axiom with a great range of action. On one hand, it modifies the general picture of our mathematical universe (with its well-ordering, its large cardinals, its ordinals), and opens the door for understanding an hypothetical multiverse and the very concept of proper class. However, these conclusions are probably just a few of all the possibilities that *Lim* grants us, and further investigation in the field would probably lead to fascinating results. The aim of this work was to walk that path.

6. ANNEX

6.1. Original *Lim*

This subsection is an explanation of the original article in which *Lim* was introduced. The reason why it is an annex is that the original article is very cumbersome, since it is written with a terminology that is quite alien to modern logic. Hence, first I will explain Von Neumann's notation, and after then introduce the original *Lim*.

As said, Von Neumann does not use sets, but explains everything in terms of functions. Hence, there are two types of objects: functions and arguments, when for an operation $[x, y]$, x is the function and y the argument. Quite confusingly, the object formed by it is also called an argument, with the form $[x, y]$.

There is also a third object: sometimes x and y overlap, creating argument- functions. Concerning this, Von Neumann says:

> "What 'functions' are at the same time 'arguments'? Obviously the most convenient answer is: all of them. (...) But this would again entangle us in the antinomies of naive set theory"

This fragment gives us the clue to understand Von Neumann's notation. A function is simply an object (or collection of objetcs) definable by a property, as in naive set theory. An argument is the object formed by those objects, this is, a class. A function-argument is a class that includes all the objects definable by a property, what we would call a set. Hence, proper classes will be just arguments, but not function-arguments, since they will be classes but will not include all the possible function values, given the problems we have already seen (as in the class of ordinals: it would include itself).

In fact, this distinction between arguments and function-arguments is explained immediatly by Von Neumann, introducing *Lim* before stating it formally. He defines an argument (a class) A, and claims that a function a is not also an argument (is not a set) iff, within $[a, x]$, it does not take too many arguments x differing from A. More concretely, 'too many' means that the totality of arguments x such that $[a, x] \neq A$ can be mapped onto the totality of all arguments. What does this mean? Here, A works as any set. If there is a class so big that all the x that do not belong to A ($[a, x] \cap A = \emptyset$) can be mapped to all the rest of sets in the universe, then it is not a set. However, it will still be a class. In other words, what Von Neumann is doing is saying that a class is not a set iff there is a mapping from it to all the sets. And, as said, this mapping needs not to be one-to-one.

Just for the sake of the explanation, why Von Neumann introduces the set A is not easy to understand, but it is in fact important. Since he has not introduced an universe U in which all the sets exist, he needs $A$to define it: the universe is everything that is different from A, whatever A is (of course, A itself cannot be the universe, since it is a set). Without A, the structure of all sets cannot be formally defined, at least without making explicit a structure such as V.

Once we understand this, we can move to the axiom. For his axiomatization, Von Neumann does not use the words function or argument, but 'I-objects' for arguments, 'II-objects' for 'functions' and 'I-II-objects' for argument-functions. Given this, the original axiom reads:

Original Lim: "IV.2: A II-object a is not a I-II-object if and only if there exists a II-object b such that for every I-object x there exists a y for which both $[a, y] \neq A$ and $[b, y] = x$."

Which, given what we have seen, we could translate to:

'Translated' Original Lim: "IV.2: A collection of objects a is not a set if and only if there exists a collection of objects b such that for every class x there exists a y for which both $[a, y] \neq A$ and $[b, y] = x$."

This is: a has an argument y such that it is not in A, and at the same time, y is the argument of a function b, such that the result of $[b, y]$ is every single set. In other words: A is not the argument of $[a, y]$, and there is a mapping b from y to all the rest of sets x that exist. This is a formal way of stating what I explained before: a collection of objects is a class and not a set iff there is a function from it to all the universe sets, A being here a tool for defining what the universe is.

Clearly, it is much easier to get rid of A and Von Neumann's notation, and define what the universe is. Then, one can claim that a class is a proper class iff there is a mapping from it to the universe. This is the modern form of *Lim*.

PRIMER PREMIO: On the Axiom of Limitation of Size

7. BIBLIOGRAPHY

[1] L. Incurvati, Conceptions of Set and the Foundations of Mathematics. [S.l.]: Cambridge University Press, 2021.

[2] R. Holmes, "Alternative Axiomatic Set Theories (Stanford Encyclopedia of Philosophy)", Plato.stanford.edu, 2021. [Online]. Available: https://plato.stan- ford.edu/entries/settheory-alternative/. [Accessed: 22- Jul- 2021]

[3] A. Kanamori, 'Bernays and Set Theory', *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 15, Numb.1, pp. 43 - 65, March 2009.

[4] J. Von Neumann, "An Axiomatization of Set Theory", *From Frege to Gödel*, ed: V. Heiljenoor, Cambridge (MA): Harvard University Press, 1981, pp. 394 - 413.

[5] J. von Neumann, "Ü ber eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axioma- tischen Mengenlehre", Journal für reine und angewandte Mathematik 160 (1929), 227–241.

[6] Jech, T., Set Theory, 3d Edition, New York: Springer, 2003.

[7] C. Pinter, Set theory. Taipei: Mei Ya, 1977.

[8] K. Kunen, Set Theory An Introduction To Independence Proofs. Burling- ton: Elsevier Science, 2014.

[9] A. Kanamori, The Higher Infinite, Second Edition. Springer Mono- graphs in Mathematics, New York: Springer, 2003.

[10] C. Antos *et al*, "Multiverse conceptions in set theory", *Synthese*, 192, pp. 2463–2488, 2015.

[11] K. Devlin and K. Devlin, The joy of sets. New York: Springer-Verlag, 1993.

[12] J. Bagaria, "Set Theory - Basic Set Theory (Stanford Encyclopedia of Philosophy)", Plato.stanford.edu, 2021. [Online]. Available: https://plato.stan- ford.edu/entries/set-theory/basic-set- theory.html. [Accessed: 27- Jul- 2021].

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

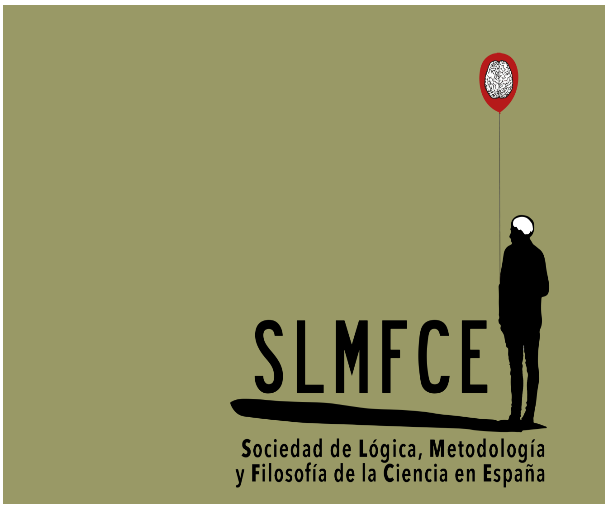
José Alejandro Fernández Cuesta

Directores: Fernando Soler Toscano y Adán Sus Durán

Máster Interuniversitario en Lógica y Filosofía de las Ciencias-USAL

A Fernando y Adán,
por su paciencia, apoyo y ayuda constantes

ÍNDICE



RESUMEN

El presente trabajo pretende explicitar que los operadores modales, como construcciones lógicas, insertos en las interpretaciones modales (MI) de la mecánica cuántica son usados de manera informal sin una semántica modal adecuada. Primero se estudiarán en detalle los motivos por los que ninguna *lógica cuántica* puede ofrecer una base apropiada para formalizar estos operadores en contextos mecánico-cuánticos. A continuación, se presentará el enfoque de las historias cuánticas como una *nueva lógica cuántica* (NQL) intrínsecamente booleana como posible herramienta para formalizar operadores modales en el contexto de las MI. Tras comentar brevemente las principales MI, se propondrá abordar un estudio de las modalidades presentes en ellas desde esta NQL prestando siempre especial atención al *problema de la medida* como hilo conductor. Finalmente, se pretende señalar cuáles han de ser los primeros pasos necesarios para ofrecer una exposición lógicamente consistente de las modalidades en contextos cuánticos relevantes con NQL como herramienta, así como señalar las ventajas que esta perspectiva podría llegar a ofrecer.

Palabras clave: mecánica cuántica, interpretaciones modales, lógica cuántica, historias consistentes, lógica modal, problema de la medida, hamiltoniano, conectiva lógica.

ABSTRACT

The present dissertation intends to specify that modal operators, as logical constructs, inserted in modal interpretations of quantum mechanics (MI) are informally used without any adequate modal semantics. First, the reasons why any quantum logic cannot provide an appropriate basis for formalising these operators in quantum-mechanical contexts will be explored in detail. Then, the approach of quantum histories as an intrinsically Boolean *new quantum logic* (NQL) will be presented as a possible tool to formalise modal operators in the context of MI. After briefly outlining the main MI, it will be proposed to approach a study of the modalities presented in them from this NQL, always paying special attention to the *measurement problem* as a guiding thread. Finally, the aim is to point out the first steps needed to offer a logically consistent exposition of modalities in quantum relevant contexts with NQL as a tool, as well as to point out the advantages that this perspective could offer.

Keywords: quantum mechanics, modal interpretations, quantum logic, consistent histories, modal logic, measurement problem, hamiltonian, logical connective.

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

1. INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se abordará el problema de las interpretaciones modales de la mecánica cuántica (QM) desde una perspectiva eminentemente lógica. Tras introducir brevemente el formalismo mecánico-cuántico no relativista más habitual, en la tercera sección se estudiará el proyecto lógico-cuántico iniciado por Birkohff y von Neumann (1936) y sus principales límites. La cuarta sección se centrará en exponer la aproximación de las historias cuánticas como base para la construcción de una nueva lógica cuántica compatible con un marco modal –tanto semántico como cuántico. La quinta sección resumirá la exposición canónica de las interpretaciones modales más relevantes así como los retos particulares de cada una de ellas tratando de explicitar que el uso de los operadores modales en tales interpretaciones es eminentemente informal y que, por lo argumentado en las secciones anteriores, las viejas lógicas cuánticas no permiten solucionar este límite, mientras que la nueva lógica cuántica se presenta como un formalismo prometedor al respecto. En la sexta sección se desarrollará esto último intentando señalar los primeros pasos para generar un formalismo basado en las historias cuánticas compatible con las interpretaciones modales, tal vez, capaz de dotar de consistencia lógica a los operadores modales insertos en estas mismas interpretaciones. Esta propuesta consistirá en el estudio de la compatibilidad metafísica entre las MI y la aproximación de las historias consistentes y, posteriormente, en la definición de cada uno de los términos necesarios para tomar NQL como un cálculo modal (normal).

El objetivo principal del presente trabajo es, por tanto, el de proponer una vía alternativa, eminentemente lógica, para abordar el estudio de las nociones de posibilidad y necesidad en contextos cuánticos, basada en la formalización de estas categorías propias de las interpretaciones modales a través de una nueva lógica cuántica –basada en las familias de historias consistentes. Se señalarán las ventajas de esta posible nueva aproximación, especialmente sobre el proyecto lógico-cuántico anterior, y se concluirá la posibilidad de interrelacionar distintos problemas filosóficos aparentemente desconectados en las exposiciones canónicas desde este posible nuevo enfoque –entre los que destacan los relativos a los compromisos ontológicos discutidos en el seno de la filosofía de la lógica modal, ausentes en las interpretaciones modales de la mecánica cuántica salvo que se utilice en su exposición un formalismo modal de manera consistente.

Para poder alcanzar los objetivos anteriormente descritos se ha optado por realizar un análisis eminentemente lógico de la categorización de los operadores modales en el contexto de las interpretaciones modales prestando siempre especial atención al problema de la medida. Esta metodología es la que se ha seguido, igualmente, tanto para ofrecer argumentos de peso en contra del proyecto lógico-cuántico tradicional como para resumir las interpretaciones modales más relevantes y, en último término, para construir una nueva lógica cuántica potencialmente modalizable.

2. EL FORMALISMO MECÁNCO-CUÁNTICO

El formalismo en que se expone QM[1] , la teoría física actual con mayor éxito empírico[2] , ha permitido demostrar que es equivalente a un cálculo probabilístico no-clásico, es decir, no reducible a la definición de Kolmogorov (1933). Von Neumann (1932) propuso que un sistema físico fuera interpretado, *grosso modo*, como un espacio de Hilbert (H), ofreciendo así un formalismo capaz de capturar todos los posibles estados físicos de un sistema cuántico. Esta propuesta parte de la asunción de que podemos interpretar como observables los operadores autoadjuntos y como valor esperado el producto interno; dos operadores serán conmensurables si, y solo si (syss), conmutan. Esta formalización ha resultado ser enormemente fructífera, no solamente por su alto grado de precisión a la hora de estudiar sistemas cuánticos concretos –incorporando el estudio de numerosos experimentos– sino por su versatilidad tanto matemática como interpretativa[3] . Las funciones de onda –interpretadas como estados de sistemas cuánticos– se abordan, a su vez, como vectores abstractos, mientras que los operadores –observables– lo hacen como transfor6maciones lineales entre estos vectores[4] . La colección de todas las funciones, que constituye un espacio vectorial suele ser *demasiado grande* para operar con ella[5] . Para representar un estado físico posible se normaliza la función de onda del modo habitual,

$$(1) \quad \int |\Psi|^2 dx = 1$$

El espacio de Hilbert es un *espacio vectorial con producto interno completo*[6] mientras que la colección de todas las funciones integrables es sólo una *instancia* concreta de dicho espacio de Hilbert. Sin embargo, en física se operará con esta colección, por lo que habitualmente esta recibe también el

1. Seguiremos en esta exposición, especialmente a Griffiths (2017) y a Zetilli.
2. Éxito que, obviamente, justifica el interés de un estudio que apunte hacia la interconexión con debates metodológicos, ontológicos y epistemológicos, en sentido amplio $\Psi dx = \langle\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle$.
3. Aunque tal vez, esta última sea, precisamente, consecuencia de un cierto margen de ambigüedad terminológica derivada de la caracterización de nociones como *sistema* u *observable* en contextos extra-teóricos.
4. Es probablemente, esta base algebraico-lineal, la fuente de la versatilidad antes mencionada (por cuanto nos permite realizar aproximaciones topológicas y, especialmente, reticulares, de los valores que hemos interpretado como relativos a un sistema.
5. En lo que a manipulación de su *cardinalidad* se refiere, se trata de un criterio práctico relativo a su operabilidad y, especialmente a su interpretación por analogía a un marco físico clásico (lo que, sin embargo, no excluye que sea posible abordarlo desde una consideración ordinal).
6. Que sea completo significa que toda serie de Cauchy de funciones en el propio espacio de Hilbert converge en una función que también está en él. Aquí *completo*, al contrario de su significado habitual en contextos lógicos, significa *continuo* en el mismo sentido en que se dice que el conjunto $\mathbb{R}$ es continuo o que $\mathbb{Q}$ no lo es. Podríamos decir que es *cerrado* bajo la solución de toda serie que de la forma $\{xn\} : \forall_{\epsilon>0}\exists_z\forall_{m,m}>z(|x_m + x_n| < \epsilon)$ con ϵ como infinitesimal arbitrariamente pequeño.

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

nombre de *espacio de Hilbert*[7] . El conjunto, de cardinalidad mucho menor, de las funciones cuadradas integrables en un intervalo específico será

(2) $\{f(x) : \int_a^b |f(x)|^2\, dx < \infty\}$

y, por tanto, se dice que *las funciones de onda viven en el espacio de Hilbert*. El producto interno de dos funciones f(x) y g(x) se define del modo habitual:

(3) $\langle f|g\rangle := \int_a^b f(x)^* g(x)dx$

donde el asterisco indica el complejo conjugado – y aplicado a un producto interno de dos vectores es la traspuesta– también en el sentido habitual: $\forall_{c\in\mathbb{C}}$ $(C = a + b_i \wedge a, b \in \mathbb{R} \wedge i = \sqrt{-1}) \rightarrow c^* = a - b_i : c^* c = (a + b_i)(a - b_i) = a^2 + b^2 = |c|^2$ por lo que suele abreviarse y se escribe directamente en la notación vectorial.

Los observables se hacen corresponder con los operadores hermíticos. Un valor esperado de un observable Q(x,p) puede expresarse satisfactoriamente en notación de producto interno:

(4) $\int \Psi^* \hat{Q} \Psi dx = \langle \Psi | \hat{Q} \Psi | \rangle$

donde $\hat{Q}$ es el operador construido desde Q sustituyendo p por $\hat{p} := (\hbar/i)d/dx$. Además estas operaciones son lineales en el sentido de que

(5) $\forall f \forall g \forall a,b \in \mathbb{C}(\hat{Q}[af(x)+bg(x)] = a\hat{Q}f(x)+b\hat{Q}g(x))$

y constituyen transformaciones lineales sobre el espacio de todas las funciones. El resultado de una medida tiene que ser real y, por tanto, se toma en realidad la media de muchas medidas

(6) $\langle Q\rangle = \langle Q\rangle^*$

pero el complejo conjugado de un producto interno invierte el orden, por lo que

(7) $\langle \Psi|\hat{Q}\Psi\rangle \models \langle \hat{Q}\Psi|\Psi\rangle$

para toda función de onda Ψ. Los operadores tienen, por tanto, la propiedad de que

(8) $\forall f(x)\ \langle f|\hat{Q}f\rangle = \langle \hat{Q}f|f\rangle$

que es, precisamente, la definición de operador hermítico – como operador autoadjunto[8]– que estará a la base del formalismo propuesto por von Neumann.

La fuerza de este formalismo reside en su posible expansión topológica. Un subconjunto $M \leq H$ es una variedad lineal $M^{\mathcal{L}}$ si para todo vector $|\alpha\rangle \in M$ se cumple que $a|\alpha\rangle \in M^{\mathcal{L}}$ y para todos los vectores $|\alpha\rangle \wedge |\beta\rangle \in M^{\mathcal{L}}$, se cumple $(a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle) \in M^{\mathcal{L}}$. Una variedad lineal, M, es cerrada syss para toda secuencia de vectores con un vector límite, este vector límite pertenece a M y se llama subespacio de Hilbert. Los subespacios de Hilbert forman, además, un retículo complejo bajo inclusión conjuntista[9] en la que se definen las operaciones

Meet := ínfimo
Join := supremo

Desgraciadamente, la notación habitual empleada para estas dos operaciones es «∧» y «∨» respectivamente, idéntica a las de la conjunción y la disyunción lógicas en la notación canónica. Salvo que especifiquemos lo contrario, reservaremos esta notación exclusivamente para las conectivas lógicas y usaremos $\dot{\wedge}$ y $\dot{\vee}$ para referirnos a las operaciones meet y join respectivamente. Además, estas dos operaciones se hacen corresponder con la intersección y la unión conjuntistas respectivamente (es decir, en *ZF* y sus ampliaciones, por ejemplo, se introducen, respectivamente a partir del axioma de la unión y del esquema de axiomas de separación respectivamente). Más adelante volveremos a esta cuestión.

Por otro lado, como un subespacio cerrado típico tiene una pluralidad de subespacios cerrados complementarios, el retículo correspondiente a los subespacios cerrados de Hilbert –que también son espacios de Hilbert– será no-distributivo, aunque sí ortocomplementado. Lo relevante es que, dada esta correspondencia entre subespacios cerrados y proyectores[10] en la estructura del retículo ortocomplementario se cumple que

(9) $P \leq Q : \text{rang}(P) \leq \text{rang}(Q) \wedge P' = I - P = \Rightarrow \text{rang}(P') = \text{rang}(P)^{\perp}$

A partir de aquí se establecen las correspondencias habituales entre las operaciones vectoriales propias del álgebra lineal –en cualquiera de sus exposiciones– y las operaciones reticulares:

- $P \leftrightarrow (PQ = QP = P)$
- $(PQ = QP) \rightarrow (PQ = P \dot{\wedge} Q)$
- $(P \dot{\vee} Q) = (P + Q - PQ)$

Recordemos que el producto interno de dos vectores $\langle\alpha|\beta\rangle$ es el número complejo $\langle\alpha|\beta\rangle = a^*_1 b_1 + a^*_2 b_2 + ... + a^*_n n_n$; que dos funciones son ortogonales si su producto interno es 0 y que un conjunto de funciones $\{f_n\}$ es ortonormal si están

7. En matemáticas, la distinción se mantiene siempre.
8. Matricialmente hablando es exactamente lo mismo un conjugado hermítico y un operador adjunto y, por tanto, el traspuesto conjugado: $T^\dagger \equiv \dot{T}^* : a^\dagger = \tilde{a}^* = (a_1^*\ a_2^* ...\ a_n^*)$.

9. Cfr. Svozil (1998, pp. 186-187).
10. Dirac propuso la notación bracket para poder partir el producto interno, $\langle\alpha|\beta\rangle$, lo que permite tratar la primera parte, *bra*, como una función lineal de vectores. Si $|\alpha\rangle$ es un vector normalizado, el operador $\dot{P} \equiv |\alpha\rangle\langle\alpha|$ permite extraer la parte de cualquier otro vector que se encuentre a lo largo de $|\alpha\rangle$ y $\dot{P}|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle|\alpha\rangle$ es el operador de proyección en el subespacio unidimensional cubierto por $|\alpha\rangle$.

normalizadas y son mutuamente ortogonales: $\langle f_m|f_n\rangle = \delta_{mn}$. La ortogonalidad se define ahora como $P\perp Q \Leftrightarrow P \leq Q' \Leftrightarrow PQ = QP = 0$. Si P y Q son ortogonales, entonces la operación join es escribe como suma $P \oplus Q$ de H a 1.

Sin poder entrar en más detalle, lo que a nosotros nos interesa es que Birkhoff y von Neumann (1936) intentaron ir un paso más allá y propusieron una nueva conexión a partir del formalismo de la QM: el de interpretar las operaciones *join* y *meet* como las conectivas *disyunción* y *conjunción* respectivamente.

Si bien es cierto que la correspondencia entre las operaciones reticulares y conjuntistas de unión e intersección es relativamente clara, el salto que supone su lectura como conectivas lógicas no lo es tanto –ver sección 3.2. En primer lugar, la conexión con las operaciones conjuntistas no es problemática cuando se tiene en cuenta la lectura de las operaciones reticulares como *ínfimo* y *supremo* así como el hecho de que el retículo en cuestión esté construido como cerrado bajo la relación de inclusión –conjuntista por excelencia– debido a que, en último término, todos los espacios topológicos vectoriales pueden ser definidos sin excesivo problema como conjuntos –de vectores, productos entre estos, etc.–, algo que se deja ver en las definiciones algebraico lineales de cualquier manual estándar de física cuántica en las que se usan cuantificadores sobre dominios predefinidos –intensiva o extensivamente –y, como ya hemos señalado, desde cualquier axiomática estándar de conjuntos incluimos las operaciones en base a una interpretación axiomática que permite señalar, perfectamente, *abreviaciones* de expresiones de primer orden mediante símbolos consistentes en las estructuras del modelo de nuestra teoría; en este caso, $\dot{\wedge}$ y $\dot{\vee}$. Sin embargo, la *construcción* de una conectiva en cualquier cálculo lógico veritativo-funcional ha de hacerse vía tablas de verdad: en la construcción reticular –desde una fundamentación conjuntista– ya hemos definido las conectivas estándar en el lenguaje de primer orden –o en el que queramos exponer nuestra axiomática conjuntista.

El presente trabajo se centrará en el estudio de los formalismos que se pretenden construir como sistemas lógicos a partir de la incorporación de las operaciones reticulares de QM como operadores lógicos y no entenderemos por *lógicas cuánticas* los desarrollos reticulares de los estudios de los subespacios de Hilbert en sí ni las definiciones de ciertas operaciones matriciales dentro del álgebra lineal usadas en la formulación de la QM[11]. Tampoco comentaremos los cálculos construidos con independencia de QM pero llamados *cuánticos* porque se intentasen aplicar a esta como, por ejemplo, los ensayos propuestos por Reichenbach (1944) de formalizar la mecánica cuántica con una lógica trivalente (L3) o el más reciente de Dickson (2001) mediante las conocidas como *arrow logics*.

11. Dichos desarrollos han recibido a menudo el nombre de lógicas cuánticas en un sentido puramente informal. Entre ellos destacan Goldblatt (1974), Mittelstaedt (1978) o Svozil (1998) entre otros.

3. LÓGICAS CUÁNTICAS: CONSTRUCCIÓN Y LÍMITES

En primer lugar, Birkhoff y von Neumann (1936) propusieron la lectura de los formalismos mecánico-cuánticos como una QL buscando estudiar cuál era «la estructura lógica que uno podría esperar hallar en las teorías físicas que, como la mecánica cuántica, no se ajustan a la lógica clásica» (p. 823). Pero el estudio de las cargas metafísicas y epistemológicas de dicho proyecto –ya presentes en este enunciado–, explicitadas por Finkelstein (1963, 1972) y popularizadas de manera mucho más radical por Putnam (1969), llevaron finalmente a más problemas que soluciones. Bacciagaluppi (2007, p. 2) resume así el proyecto de Putnam:

1) QM nos fuerza a revisar nuestra lógica clásica (CL) en favor de una QL. Putnam, utilizando una analogía respecto de lo que sucedió con la geometría –cuando se revisaron las geometrías euclídeas en favor de las riemanianas tras la relatividad general– propuso revisar la lógica clásica en favor de la lógica cuántica.

2) Esta revisión, además, no habría de ser local sino global. La QL se erigiría como la *autentica* o *verdadera* lógica desterrando a todas las demás.

3) Finalmente, con dicho formalismo, se conseguiría resolver las famosas paradojas de la QM; especialmente las relativas al *problema de la medida*.

Putnam (1969, p. 174) se preguntó si «pueden algunas de las "verdades necesarias" de la lógica volverse falsas por *razones empíricas*» y su respuesta fue rotunda: sí[12]. Así, siguiendo la propuesta de Birkhoff y von Neumann (1936), dicha lógica cuántica *simplemente* se extraería de la estructura reticular de los subespacios cerrados de Hilbert en QM. Para Putnam (1969, pp. 188-9 y 191-2), es preferible un cambio sutil en la lógica a utilizar que las asunciones de una metafísica incomprensible o de la existencia de variables ocultas. Sin embargo, y aunque no podamos detenernos en analizar este proyecto con excesivo detalle, debemos mencionar una serie de problemas relevantes que no ha superado:

1) Una cosa es adaptar y descartar formalismos y otra bien distinta asumir que la lógica sea un conocimiento empírico. Como bien señalaron Bell y Hallet (1982, p. 357) «parece, por tanto, claro que el ejemplo que Putnam ofrece no sirve para instanciar la tesis radical de Quine acerca de la naturaleza empírica de la lógica. Las dificultades metafísicas asociadas con el cambio de QM podrían, es verdad, conducir a un rechazo de LC, pero esto es algo completamente distinto de proclamar que los resultados de un experimento conducen directamente a tal rechazo».

12. Argumentó que así lo demostraría en su artículo aunque numerosos autores, especialmente Dummett (1976) y Bell y Hallet (1982), han demostrado que nunca llega a establecerse o fundamentarse dicha conclusión.

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

2) Aun cuando la lógica fuera eminentemente *a posteriori*, parece dudoso que se basaría en un conocimiento físico-teórico. QL, tal y como la entendieron Finkelstein y Putnam, ha servido de ejemplo para «mostrar que la lógica es revisable en el sentido de que es refutable por la experiencia» Martínez Vidal (2007, p. 95), pero tal y como apunta Bacciagaluppi (2007, p.4), si la lógica tuviera una constitución empírica, parece aceptable pensar que esta se basará antes en las «consideraciones en torno al uso empírico y práctico del lenguaje» que en los «resultados experimentales obtenidos en ciertas ramas de la física»[13] .

3) Existen ambigüedades terminológicas serias en el planteamiento –y desarrollo– del debate. Al margen de todos los problemas anteriores, encontramos una serie de ambigüedades en el uso de términos no triviales cuyo esclarecimiento es necesario y que, sin embargo, adolecen de fundamentación o de desarrollo en el contexto de discusión de la lógica cuántica en los textos fundacionales de dicho debate. Entre estas nociones destacan: (i) conocimiento *a priori* y empírico[14], (ii) lógica *clásica*[15] (iii) ley lógica[16] .

13. Para una panorámica general del debate actual en torno a la caracterización de la lógica como a priori y las diferentes posturas a favor y en contra, cfr. Martínez Vidal (2007).

14. Ejemplo relevante de la ambigüedad de estos términos es la distinción ente la noción de *a priori* débil y fuerte de Boghossian y Peacocke (2000). La caracterización fuerte, que es a la que parecen referirse Finkelstein y Putnam, asumiría que el conocimiento *a priori* es independiente de la experiencia en cuanto que no-refutable por evidencia empírica alguna.

15. Ya que parecen, la mayoría de contextos, referirse a *lógica clásica* en cuanto que álgebra de Boole, esta consideración es históricamente discutible. Habitualmente, se suelen tomar o interpretar como lógica clásica o bien el cálculo estándar de primer orden con igualdad –como lógica operativa de fondo en las demostraciones presentes en los *Elementa* de Euclides cfr. Beeson, M. *et al*. (2019)–; o la silogística de Aristóteles como proto-lógica de clases; o bien el cálculo discutido por los estoicos como proto-lógica de enunciados; o un cálculo de orden cero estándar que, si bien es interpretable como un álgebra de Boole, no todo álgebra de Boole se reduce a un cálculo de orden cero.

16. Habitualmente en el contexto de QL se usa para referirse a ciertas propiedades de las conectivas y, especialmente, a la propiedad distributiva de la conjunción y la disyunción –debido a que, en mecánica cuántica, como veremos, si forzamos la traducción lógico-reticular, habría que abandonar dicha propiedad. Está claro que, desde cualquier perspectiva no relevantista, estas propiedades deben tomarse como meras *etiquetas* de combinaciones de fórmulas que, instrumentalmente, han mostrado ser más útiles a lo largo de distintos contextos justificados históricamente, pero no formalmente.

3.1. La lógica cuántica como lógica formada por conectivas clásicas: el argumento de la invarianza de Putnam y el fracaso del proyecto Finkelstein-Putnam

En línea con la crítica dibujada por Dummett (1976) al programa Finkelstein-Putnam, el núcleo de las críticas a QL, se centró en el estudio de las conectivas *cuánticas*. Si tenemos dos enunciados:

- S: la posición del electrón e en el instante t es P.
- T: el momento del electrón e en el instante t es Q.

para Putnam, de acuerdo con QL, $S \wedge T$ es una contradicción lógica. En palabras de Bell y Hallet (1982, p. 358) esto serviría a Putnam para mostrar «por qué nunca podemos en *la práctica* asignar el valor de verdad "verdadero" a $S \wedge T$ »[17]. Si S_z representa un enunciado sobre la posición de una partícula y t_1, ..., t_n el posible momento de dicha partícula, entonces, en palabras de Putnam (1969, p. 180):

> «La idea [inaceptable] de que la medida del momento "produce" el valor obtenido surge con mucha naturalidad si uno no aprecia la lógica empleada en mecánica cuántica. Si yo sé que S_z es verdadera, entonces sé que para *toda* t_j , la conjunción $S_z \wedge t_j$ es falsa. Es natural concluir ("sumergido en" lógica clásica) que $S_z \wedge (t_1 \vee t_2 \vee ... \vee t_n)$ es falsa y por tanto rechazar $(t_1 \vee t_2 \vee ... \vee t_n)$ –es decir, diremos que "la partícula no tiene momento". Entonces uno mide el momento y obtiene el momento –digamos que uno lo halla en t_m. Claramente, la partícula ahora tiene un momento –y la medida ha tenido que ser "producida". Sin embargo, el error se encuentra en el paso de la falsedad de $S_z \wedge t_1 \vee S_z \wedge t_2 \vee ... \vee S_z \wedge t_r$ a la falsedad de $S_z \wedge (t_1 \vee t_2 \vee ... \vee t_n)$. Este último enunciado es *verdadero* (asumiendo S_z); por lo que es verdad que "la partícula tiene un momento" (incluso si es también *verdad* que "la posición es r_3"); y la medida del momento simplemente *halla* este momento (a la vez que perturba la posición); no lo crea, ni lo perturba en ningún sentido. Es así de simple».

El esquema del argumento de Putnam completo sería el siguiente:

1. $S \wedge T = \perp$ pero para justificarlo manteniendo la posibilidad de realizar conjunciones, debemos remarcar en qué momento se vuelve lógicamente falsa dicha conjunción.
2. $\neg(S_z \rightarrow S_z \wedge t_i)$.
3. $S_z \wedge \neg(S_z \wedge t_i)$ por la definición de $\rightarrow$.
4. $\neg((S_z \wedge t_1) \vee ... \vee (S_z \wedge t_n))$ simplificando $\wedge$.
5. Pero si $S_z \wedge (t_1 \vee ... \vee t_n)$ que es la aplicación de la propiedad distributiva.
6. Por tanto, la propiedad distributiva falla.

17. Aunque esta afirmación parece demasiado fuerte: que de una imposibilidad material así se pueda derivar una contradicción lógica no es, ni mucho menos, obvio. En ciertas lógicas epistémicas, por ejemplo, el hecho de que un agente no pueda conocer puede ser verdadero.

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

Sin embargo, debemos destacar dos cosas: (i) está claro que la caracterización de la contradicción generada por la primera conjunción depende, exclusivamente, del significado de los términos –extralógico–, (ii) este es el motivo para considerar que la lógica es empírica[18].

Lo que Putnam propone para evitar el problema anterior es un uso *informal* de las conectivas. Si, por ejemplo, en el argumento anterior, asumimos que $\neg(S_z \rightarrow S_z \wedge t_i) \equiv S_z \wedge \neg(S_z \wedge t_i)$, tenemos la expresión completa de la enunciación de la contradicción $S_z \wedge T$ derivada del primer condicional negado[19]. De ambos enunciados, lógicamente equivalentes, no se pueden deducir ninguna de las dos versiones a las que se aplica la propiedad distributiva de la conjunción sobre la disyunción. Putnam parece estar usando una interpretación lingüística extra-lógica de una de las dos fórmulas –equivalentes– por la que esta sí que regiría mientras que la otra no. Esto es un límite del cálculo.

Pero, en ningún caso se puede privilegiar una de las dos expresiones sobre la otra cuando son lógicamente equivalentes –por definición– de forma que, entonces, se pase a argumentar que han dejado de serlo. El argumento de Putnam –y la fundamentación de la construcción de una lógica cuántica– debe hacer frente, de entrada, a tres problemas:

1) El primero hace referencia a la idea subyacente a la interpretación empírica de la lógica y es la imposibilidad de determinar en un contexto puramente formal ciertas preferencias y jerarquizaciones sobre expresiones absolutamente equivalentes –con base en criterios puramente externos. ¿Cuál es el límite de este procedimiento? ¿Con qué criterio privilegiaremos unas sobre otras? ¿Podemos forzar la introducción de nuevas conectivas ante cualquier resultado empírico aparentemente paradójico o meramente sorprendente?

2) Además, si tomamos dos expresiones que sean lógicamente equivalentes pero determinamos, *empíricamente*, que una es verdadera mientras que la otra no, ¿Qué hacemos con la ristra infinita de expresiones que sean equivalentes a ambas cuyo significado extra-lingüístico no sea evidente –por ejemplo, por no estar habituados a su uso en el lenguaje natural? La disyunción de conjunciones es falsa mientras que la conjunción de disyunciones es verdadera. ¿Y la expresión $\neg(\neg(S_z \wedge t_i) \rightarrow \neg(S_z) \wedge \ldots \wedge \neg(\neg(S_z \wedge t_n) \rightarrow \neg S_z$ es verdadera o falsa mecánico-cuánticamente hablando? Es equivalente a una expresión verdadera y a otra falsa al mismo tiempo. Renunciar a la propiedad distributiva será renunciar, en último término, al cálculo de enunciados: se renuncia a la equivalencia lógica de dos expresiones, lo que implica renunciar a sus definiciones mediante tablas de verdad y, por tanto, a la definición estándar de toda conectiva lógica veritativo-funcional.

3) Al margen de todo lo anterior, sin negar la mayor, parece razonable pensar que no es la disyunción inclusiva sino la disyunción exclusiva la conectiva correcta para formalizar ambas expresiones. Ya que, aunque los términos disyuntos de las dos expresiones, de hecho, solamente sean verdaderos cuando al menos uno de los términos lo sea, es obvio que una partícula no podrá tener dos momentos angulares distintos en un mismo instante t.

El problema de la construcción de la lógica cuántica terminará centrándose, en último término, en el problema de la caracterización de sus conectivas. En este punto Putnam ofreció dos argumentos. El primero es que no existe una necesidad real de explicar las conectivas cuánticas porque, de hecho, son las mismas que las conectivas clásicas; este es el llamado argumento de la invarianza del significado. El segundo argumento, basado en Finkelstein (1963, 1972), buscó ofrecer una caracterización operacionalita de las conectivas lógicas cuánticas.

El primer argumento se centra en la idea de que QM ha de poder compatibilizarse, de algún modo, con el «realismo del sentido común», tal y como apuntan Hallet y Bell (1982, p. 359). Para Putnam, las conectivas cuánticas formadas a partir de la supresión de la propiedad distributiva seguirán siendo clásicas. Así, no sería necesario justificar la aceptabilidad de QL mientras que, al mismo tiempo, se configura una continuidad –invarianza de significado– que permitiría asegurar dicho realismo clásico –por ejemplo, a través del mantenimiento del principio de contradicción o del tercio excluso. Putnam (1969, p. 177) compara las conectivas cuánticas con las geodésicas continuando con la equiparación entre la lógica y la geometría como analogía «perfecta» (1969, p. 190):

> «Podemos decir que las geodésicas son rectas porque satisfacen al menos lo que siempre se han reconocido como restricciones operacionales a la noción de línea recta; sin embargo no obedecen a la vieja geometría. En una palabra, o bien afirmamos que las geodésicas son a lo que siempre nos hemos referido con "línea recta", o bien decimos que no esta nada claro a lo que nos solíamos referir con esa expresión».

Sin embargo, Bell y Hallet (1982) mostraron que si todos los principios son deducidos y operan exactamente igual que en una lógica clásica, entonces la propiedad distributiva se sigue de ellos –o, al menos, se sigue de las mismas definiciones de conectivas de las que dichas leyes clave se siguen. Son inseparables– y el argumento falla. Fine (1971) demostró que los diferentes significados de las conectivas en CL y QL obedecen a una razón más profunda. Regresó a la propuesta original de Birkhoff y von Neumann (1936) para determinar que la estructura a partir de la cual se construye QL, los subespacios cerrados de Hilbert, se identifica con un

18. Una vez se ha ofrecido un argumento empírico en contra de la distributividad parece que solamente quedaría abandonarla. Pero dichas propiedades son inherentes a las definiciones de conjunción y disyunción.
19. Se asume que T es la disyunción de las t_i.

retículo correspondiente a un álgebra no-booleana[20]. El segundo argumento, por el que las conectivas cuánticas se definirán en base a una traducción de las operaciones reticulares, se erige como la única vía para poder construir un cálculo lógico-cuántico pero teniendo presente que la estructura que se quiere traducir no podrá incorporarse en un cálculo booleano. Por todo esto se asumió que las conectivas cuánticas, fueran lo que fueran, no podían ya ser clásicas, de manera que los cálculos cuánticos tampoco. Finalmente, se abandonó el proyecto metafísico de sustitución de CL por QL desde el momento en que se asumió que QL, en cuanto que no-clásica, no podía ofrecer una sustitución satisfactoria de CL.

3.2. Reformulaciones y límites de las lógicas cuánticas

Toda propuesta de lógica cuántica, por tanto, se hará a partir de los fallos de Putnam y desde la perspectiva original de Birkhoff y von Neumann (1936) por la que simplemente se estipula una traducción directa entre operaciones reticulares y conectivas lógicas. Pero, ¿cómo llevamos a cabo dicha traducción? Aquí las propuestas varían en cada autor. Mencionaremos las más relevantes para, finalmente, concluir que estas propuestas, aun cuando se separen del proyecto de Finkelstein-Putnam, continúan incorporando el fallo estructural más profundo de la construcción del cálculo lógico-cuántico: su imposibilidad de incluir tablas de verdad.

1) Bell y Hallet (1982): asumieron que las operaciones en un ortorretículo como el formado por los subespacios cerrados de Hilbert son traducibles a conectivas lógicas y que el fallo de Putnam fue, precisamente, el de no construir su QL desde una traducción de las operaciones ortorreticulares. Las operaciones *meet* y *join* se corresponderían directamente con la conjunción y disyunción respectivamente y la relación $\leq$ con el condicional. Así, establecieron que se puede ofrecer una definición conjuntista de la conjunción y la disyunción en términos de $\leq$ aun cuando el ortorretículo no sea un álgebra de Boole ni, por tanto, una estructura distributiva:

(10) $a \wedge b = c \leftrightarrow \{x : x \leq c\} \Rightarrow \{x : x \leq a\} \cap \{x : x \leq b\}$
(11) $a \vee b = c \leftrightarrow \{x : c \leq x\} \Rightarrow \{x : a \leq x\} \cap \{x : b \leq x\}$

Sin embargo, la conjunción y la disyunción no forman un conjunto adecuado de conectivas. Necesitamos la negación. Y aquí es donde se dan cuenta de que se debe introducir una modificación respecto del cálculo booleano para construir un cálculo lógico-cuántico análogo. Aun cuando no asumamos que el cambio de definición de un ítem concreto en dos estructuras distintas implique su cambio de significado[21], la negación no será incorporable en este nuevo cálculo. La operación de ortocomplementación es definible en un álgebra de Boole en términos de $\wedge$ por:

(12) $a = b^{*} \leftrightarrow \{x : x \leq a\} = \{x : b \wedge x = 0\}$

pero, como apuntan Bell y Hallet (1982, p. 365), en el caso de la lógica clásica «la negación es (conjuntistamente) definible en términos de la relación básica $\leq$» a través de la definición anterior, mientras que «en lógica cuántica la negación *no* es definible en estos términos». Putnam consideró que la negación era definible en estos términos –aunque no ofreció tal definición–, pero Bell y Hallet demostraron que no lo es –para ellos, su significado cambiaba respecto del de la lógica clásica. Sin embargo, lo que debemos destacar es que la definición *ad hoc* de una nueva conectiva que se llame *negación* no implica ni permite que el nuevo cálculo sea, de nuevo, veritativo-funcional. Este es el límite de la construcción de una QL: que la estructura algebraica reticular de base bloquea, vía traducción, la constitución de un cálculo lógicamente consistente.

Bell y Hallet (1982) intentaron solucionar esto interdefiniendo la negación clásica a partir de la ortocomplementación junto a la ortogonalidad. Siguiendo a Dummett (1976) y su crítica a Putnam (1969), propusieron, además, abandonar el realismo bivalente clásico en todo contexto mecánico-cuántico. Sin embargo, las asunciones y los compromisos de partida son demasiados como para poder considerar que este cálculo permita una aplicabilidad más allá de la mera traducción ortorreticular.

2) Dummett (1976): propuso que la lógica que deba ser tomada como correcta para una determinada clase de enunciados debe decidirse determinando, en primer lugar, el modelo de significado correcto de dichos enunciados. Es decir, hay que desarrollar primero una semántica guiada por «principios fundamentales concretos sobre el significado» (pp.287-9). Dummet propuso relacionar la lógica cuántica con la lógica intuicionista (Li): en el caso intuicionista, lo anterior se hace en calidad de pruebas de proposiciones matemáticas y en QL en calidad de medidas de cantidades físicas. Bell y Hallet (1982) trataron de construir su cálculo lógico-cuántico compatibilizando esta exigencia dummettiana con la supresión de la negación clásica.

20. Por otra parte, Bell y Hallet (1982) argumentaron que la construcción de un cálculo lógico-cuántico incorporará conectivas esencialmente distintas a las clásicas por otro motivo. Para ellos, dadas dos estructuras con una serie de elementos primitivos comunes, si en una de ellas, a partir de dichos elementos, se puede definir *t* mientras que en la otra estructura, con esos mismos elementos, no se puede, entonces *t* habrá cambiado de significado. Sin embargo no seguiremos esta línea de crítica ya que supone la asunción de una tesis que tal vez sea demasiado fuerte. Más allá del eco constructivista de esta definición de cambio de significado, su asunción puede ser problemática en ciertos contextos. Piénsese en el 0 como elemento neutro en $\{\mathbb{N}^{*}, +\}$ y en el mismo 0 en $\{\mathbb{N}^{*}, \cdot\}$ donde no opera como elemento neutro; ¿Puede decirse que existe un genuino cambio de significado?

21. Cfr. supra, nota a pie de pág. 20.

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

3) Gibbins(1987, pp.128 y ss.): sí que insistió en distinguir claramente entre la estructura reticular y cualquier posible traducción lógica. Subrayó las dificultades de realizar dicha traducción sin pagar altos precios. Además de uno de los análisis más detallados en lo que a filosofía de la QL y filosofía de la física se refieren, fue de los primeros autores en ofrecer una construcción sistemática de QL a partir de la definición de su sintaxis, semántica y metalógica. Sin embargo, al contrario que los autores que hemos visto hasta ahora, para Gibbins, el carácter no-clásico de QL derivaba principalmente del condicional y, subsidiariamente, de la disyunción. Gibbins (1987, p.128) construyó una exposición del cálculo en deducción natural y diferenció las nuevas conectivas como el condicional cuántico añadiendo restricciones en las reglas de introducción y eliminación. No obstante, las restricciones que añadió para definir las nuevas conectivas cuánticas las caracterizaron como equivalentes a las de un cálculo lógico estándar –de forma que su cálculo cuántico se volvería, en el mejor de los casos, operacionalmente trivial. Gibbins (1987, p. 134) afirma, respecto de la definición de prueba, que

> «de acuerdo con la regla clásica uno puede inferir $\Gamma \vdash a \rightarrow$ de $\Gamma, a \vdash b$. La regla lógico-cuántica exige que Γ esté vacío. Esto impide que uno demuestre secuencias clásicamente validas como $\vdash P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ y $(P \rightarrow Q), (Q \rightarrow R) \vdash (P \rightarrow R)$. Una restricción equivalente sirve para $\vee$E y para *reductio ad absurdum*».

Si estudiamos las expresiones mediante tablas de verdad en los tres casos, veremos que para $\Gamma = \varphi$ obtenemos el mismo resultado con $(\Gamma, a \vdash b) \vdash a \rightarrow b$ y con $(a \vdash b) \vdash a \rightarrow b$. Y la equivalencia cuántico-clásica de dicha restricción se extiende a las nuevas definiciones de condicional y bicondicional: $a \rightarrow b := (\neg a \vee (a \wedge b))$: si construimos una tabla de verdad del condicional clásico

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

vemos que es equivalente al condicional cuántico de Gibbins. Los dos disyuntos de la nueva definición no pueden ser ambos verdaderos a la vez porque entraríamos en una contradicción a partir de la negación de *a*. Y lo que nos indica es que el condicional será verdadero o bien cuando a sea falso –las dos últimas filas–, o bien cuando ambas, *a* y *b*, sean verdaderas –la primera fila– y en el resto de casos –la segunda fila restante– el condicional será falso. Las pruebas de corrección y completitud para QL ofrecidas por Gibbins funcionan porque su cálculo es equivalente a un cálculo de enunciados.

4) Dickson (2001): propuso revisitar la construcción del cálculo incluyendo como condicional la flecha de Sasaki, $(p \hookrightarrow q) \equiv (p^{\perp} \vee (p \wedge q))$ que Hardegree (1979) demostró que es la única conectiva en un otrorretículo que satisface *modus ponens* y otra serie de condiciones propias de la implicación material clásica. Sin embargo, concluyó la no-operacionalidad de QL siguiendo a Gibbins (1987). Dickson ha revitalizado, sin duda, la lectura de QL, pero entendiendo por esta una remodelación interna a la propia estructura reticular –capaz de incluir variables temporales.

5) Mackey (1957) y especialmente todos los que continuaron con su programa, entre quienes destacan Finkelstein (1963), Mittelstaedt (1978), Greechie (1981) o Foulis y Bennett (1994), partieron de la asunción de que una teoría física $\mathfrak{T}$ determina una clase de sistemas de *eventos-estado* formada por la dupla $\langle \mathcal{E}, \mathcal{S} \rangle$ en la que $\mathcal{E}$ contiene los eventos que ocurren en el sistema y $\mathcal{S}$ los estados que ha de asumir el sistema descrito por la teoría. Aquí, tal y como se preguntan Dalla Chiara y Giuntini (2001, p. 9), «¿Cuáles son las condiciones abstractas que se deberían postular para cualquier par $\langle \mathcal{E}, \mathcal{S} \rangle$?». En QM y asumiendo el modelo del espacio de Hilbert se consideraron restricciones naturales:

- Que $\mathcal{E}$ sea una abstracción de la estructura de todos los subespacios cerrados de Hilbert y, como consecuencia, sea al menos un retículo ortomodular σ –completo no distributivo.
- Que $\mathcal{S}$ sea una buena abstracción de los operadores estadísticos en un espacio de Hilbert que represente los posibles estados de cada sistema físico y, por tanto, todo estado se comporte como una medida probabilística que asigne a cada evento en E un valor en el intervalo [0, 1].

Pero esto, tal y como señalan Dalla Chiara y Giuntini (2001, pp. 9-10) genera, principalmente, dos retos:

1) «¿Es posible capturar, a través de ciertas condiciones abstractas requeridas para cualquier par de eventos-estado $\langle \mathcal{E}, \mathcal{S} \rangle$ el comportamiento de pares de espacios de Hilbert concretos?».

2) «¿Hasta qué punto debe ser absolutamente vinculante el modelo del espacio de Hilbert?».

El primer problema dio lugar a una gran cantidad de intentos fallidos por demostrar un *teorema de representación* que cambiaron la pregunta a «¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para un par evento-espacio genérico $\langle \mathcal{E}, \mathcal{S} \rangle$ que hagan a $\mathcal{E}$ isomorfa al retículo de todos los subespacios cerrados de un espacio de Hilbert?». La falta de dicho teorema de representación hizo que la única alternativa posible fuera una algebraización realizada en los términos propuestos por Dalla Chiara y Giuntini (2001) que veremos en el siguiente punto.

El segundo problema, sin embargo, solamente se pudo superar a partir de la definición de estructuras cada vez más generales que, finalmente, no han podido ofrecer una respuesta satisfactoria a ninguna de las siguientes críticas:

2.1) Primero, que los subespacios cerrados de Hilbert representan *propiedades físicas* en un sentido *intensional* y, al mismo tiempo, *extensional*. La incapacidad de formalización de dicho sentido intensional ha generado lo que Foulis y Bennett (1994) llamaron «el desastre metafísico» de la lógica cuántica estándar.

2.2) En segundo lugar, el retículo de los subespacios cerrados exige que los sistemas extensionales –conjuntistas– se hallen cerrados bajo intersección –por *meet*– y, por tanto, una traducción lógica directa implicaría que los sistemas proposicionales se hallasen cerrados bajo conjunción lógica, algo a lo que no parece corresponder ninguna interpretación física. De hecho, y en línea con las restricciones ya mencionadas de la constitución de toda lógica cuántica, es habitual –y recomendable– imponer restricciones semánticas que recojan que la conjunción de ciertas proposiciones no pueda ser testada experimentalmente. Esto, para Dalla Chiara y Giuntini (2001, p.10), apunta a que «la estructura proposicional reticular parece ser demasiado fuerte».

6) Bacciagaluppi (2007) y Dalla Chiara y Giuntini (2001): realizaron las últimas sistematizaciones más completas de todas las posibilidades que QL –entendidas como un conjunto de posibles cálculos diferentes– ofrece junto al estudio de sus límites.

Bacciagaluppi argumentó que es legítimo, y nada polémico, desarrollar un cálculo en que se definan nuevas conectivas tal y como hizo Kolmogorov (1931) con Li. Y propone crear una nueva disyunción cuántica:

«La disyunción clásica de dos proposiciones experimentales p y q, correspondiente a la unión conjuntista de dos subespacios, no es en sí un subespacio en general, por lo que no es tampoco una proposición experimental. Sin embargo, la proposición correspondiente al esparcimiento (cerrado) de dos subespacios P y Q (el subespacio cerrado más pequeño que contiene los subespacios P y Q) es una proposición experimental y podemos introducir una disyunción lógico-cuántica» Bacciagaluppi (2007, p. 9).

Esa nueva conectiva recoge, otra vez, el fallo de la propiedad distributiva. Bacciagaluppi asume que toda lógica cuántica será siempre, a lo sumo, un lenguaje semi-interpretado[22] . Con este matiz desarrolló una metalógica muy elegante sobre una definición cuántica de validez lógica y una función de evaluación basada en un homomorfismo con filtros y ultrafiltros reticulares. Además, puso el acento en la caracterización de las proposiciones elementales como enunciados de propiedades cuánticas.

Dalla Chiara y Giuntini (2001, p.96), de manera parecida, concluyeron que «las lógicas cuánticas son, sin ninguna duda, *lógicas*» ya que «satisfacen todas las condiciones canónicas que la comunidad de lógicos exige para que un objeto abstracto sea llamado *una lógica*». Sin embargo, la base de la lógica cuántica que proponen se construye en base a la algebraización –y posterior inclusión de una semántica de Kripke – de un ortorretículo. Se construye una estructura general algebraizada y, a partir de ahí, se construyen semánticas consistentes. Dalla Chiara y Giuntini (2002, p.32)[23] demuestran una generalización algebraica de QL que se correspondería, en concreto, con el cálculo modal B. Excede los propósitos del presente trabajo el estudio de esta semántica modal. Pero Dalla Chiara y Giuntini (2001) deben hacer frente, aún así, a dos problemas:

1) La inclusión del condicional: en conexión con la propuesta de Dickson (2001) se incluye una nueva conectiva lógico-cuántica que permita operar como condicional. Esto se hace, esencialmente, para preservar la validez del *modus ponens*; piedra angular de todo cálculo lógico.

2) Anomalías metalógicas: se deben definir, más allá de la nociones habituales de verdad, verdad lógica y consecuencia lógica, una *consecuencia débil*, una *cuasiconsecuencia* o la *realizabilidad* de *modelos* y *cuasi-modelos* para que se satisfagan –en las traducciones modales– un número aceptable de teoremas metalógicos –especialmente completitud o compacidad.

Finalmente, debemos mencionar que ambas propuestas, la de Dalla Chiara y Giuntini (2001) y la de Bacciagaluppi (2007), logran generar cálculos que, con una serie apropiada de restricciones y definiciones *ad hoc*, efectivamente, configuran cálculos lógicos genuinos. Pero, la pregunta ante cálculos de estas características[24] no es ya si pueden llamarse o *no lógicas* tanto como si pueden apellidarse *cuánticas*. Es cierto que la mayoría de estas propuestas no han de generar, en sus exposiciones como construcciones semánticas completas, duda alguna respecto de su naturaleza lógica pero, ¿guardan aún alguna clase de interpretación física, en concreto, mecánico-cuántica? Si bien es cierto que los pseudo-cálculos que conforman la mayoría de las propuestas que hemos llamado *viejas lógicas cuánticas* llegaron a tomarse como *cálculos semi-interpretados* para así poder salvaguardar su utilidad aplicativa en contextos físicos –pagando el precio de su veritativo-funcionalidad–, ahora encontramos la expresión contraria.

22. van Fraassen (1970).

23. Siguiendo a Goldblatt (1974), uno de los primeros en explorar esta vía de modalización a partir de la inclusión de una semántica de Kripke en QL por analogía a la lógica intuicionista.

24. Como construcciones desde las generalizaciones algebraicas en las que se insertan, a su vez, los ortorretículos, ortomarcos y ortocomplementos reticulares en los que se definen los conjuntos de subespacios cerrados de Hilbert.

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

Las estructuras susceptibles de ser tomadas como lógicas[25] han forzado una generalización de estructuras no-booleanas que no parecen ofrecer dicha posibilidad de manera directa. Al menos, respecto de una lógica clásica de enunciados o predicados[26] .

En concreto, la propuesta de Chiara y Giuntini (2001) asigna una interpretación física específica a cada uno de los elementos que sirven para construir el cálculo modal. Sin embargo, el problema más grave que presenta es el de que el significado físico de cada uno de los elementos de un *marco de Kripke* se estipula única y exclusivamente *ad hoc*. Así, por ejemplo, la relación de accesibilidad se sustituye por una relación de no-ortogonalidad y la función veritativa *necesariamente no-clásica* se determina a partir de una proposición que contiene todos los estados puros que asignan a una proposición cualquiera un valor de probabilidad igual a 1. Aun así, esto es problemático debido a que se bloquea, de entrada, cualquier estado mixto; lo que impedirá cualquier formalización posible de un proceso de medida que, en último termino, es lo que nos interesa[27] .

Esto último podría decirse que es la *maldición* de todas las *viejas* lógicas cuánticas: cuanto más solido lógicamente hablando sea el cálculo, tanto más debe alejarse de su significado mecánico-cuántico y viceversa.

Por tanto, si entendemos por *lógica cuántica* el resultado de la traducción de la teoría de retículos subyacente a QM a partir de la equiparación de operaciones reticulares con conectivas lógicas –ya sea de manera directa o a partir de un proceso de construcción de estructuras algebraicas generalizadas–, vemos que las lógicas cuánticas se enfrentan a varios problemas serios. Y que un número relevante de dichos problemas no depende tanto de la metodología concreta con que se lleve a cabo dicho proceso de traducción como de la propia pretensión de realizar una traducción de manera –lógicamente– consistente y –mecánico-cuánticamente– relevante.

Podemos resumir brevemente el conjunto de problemas que nacen de la construcción de las viejas lógicas cuánticas así:

1. Los proyectos metafísico, epistemológico e interpretativo de QM fracasan: la lógica cuántica termina generando más interrogantes que respuestas como posible *interpretación* de MQ y el proyecto por el cual sustituir la lógica clásica *in totum* con una lógica cuántica se vuelve inviable. Destacan las críticas de Kripke –en Martínez Vidal, C. (2007, p.96)–, quien afirma que si la metalógica de QL es clásica el proyecto de sustitución no tiene sentido –y que si no lo es, no entendemos en qué consiste QL– y las de Dummett (1976), Popper (1968), Bell y Hallet (1982), Schurz (2011, 2013) y Dapprich y Schister (2016) entre otras muchas.

2. La construcción de los cálculos cuánticos como traducción de la estructura reticular de los subespacios cerrados de Hilbert también tiene problemas:

2.1. Existe una serie de expresiones lógicamente equivalentes que han de tomarse como incompatibles y no existen criterios físicos ni lógicos para tomar dichas decisiones salvo *ad hoc*. Esto focaliza en problema de QL en el problema de las conectivas.

2.2. Los cálculos, cuando pretendan formalizar de manera directa las estructuras mecánico-cuánticas no distributivas, no podrán ser –al menos por el momento– veritativo-funcionales. Se renuncia a las tablas de verdad, a la interdefinición de conectivas e incluso, a veces, al *modus ponens*. Hellman (1980) demostró que ningún cálculo lógico-cuántico podrá ser veritativo-funcional.

2.3. Cada una de las propuestas lógicas que pretenden superar estos problemas presenta, a su vez, otros o bien derivados de los anteriores o bien nuevos. Destacan los dos fallos del programa de Mackey (1957) así como las anomalías metalógicas y los problemas de las conectivas de cada generalización.

25. De hecho, susceptible de hacerlo en sentido amplio, pues estos cálculos propuestos por Dalla Chiara y Giuntini (2001) y Bacciagaluppi (2007), así como las propuestas más ligadas a las exposiciones reticulares de Mittelstaedt (1978) y Svozil (1998), son insertables en un proyecto de traducción a una Many-Sorted Logic (MSL): cfr. Manzano (1996).

26. Igual que podemos generalizar la definición de retículo mecánico -cuántica y tomar dicha generalización como una lógica, o bien traducirla a una, los tres formalismos son susceptibles de ser incorporados en una MSL, pero para que se pueda traducir en sentido técnico el formalismo original, de nuevo, habremos de añadir operaciones booleanas.

27. De hecho, cuando Giuntini (1991) introduce por primera vez la traducción de ciertos cálculos cuánticos a una semántica modal, lo hace como prueba de la independencia de estos respecto de la teoría física. Giuntini (1991, p. 119) busca consolidar cierta versión de QL como una lógica indiscutible emancipándola, precisamente, de su interpretación física. Si se demuestra que es equivalente a un cálculo modal, queda demostrado que existe, en cuanto que dicho cálculo, en el reino de la lógica independientemente de los resultados de la física y así afirma: «El objetivo principal de este capítulo es mostrar que la lógica cuántica tiene significado lógico independientemente del hecho de que sus orígenes se remonten al retículo de todos los subespacios de Hilbert (...). Es una lógica "real" que resulta que tiene un estatus preciso como otras tantas lógicas no-clásicas, por ejemplo, la lógica intuicionista».

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

Para cada uno de los cálculos cuánticos que hemos mencionado, existen, a su vez, otras muchas críticas en las que tampoco hemos podido profundizar por falta de espacio[28] .

Por todo lo anterior, vemos que existe un límite serio a la hora de incluir operadores modales – formalismo lógico-semántico y veritativo-funcional– en un contexto cuántico, al menos, vía viejas lógicas cuánticas. Solamente tenemos tres posibilidades de hacer esto:

- Incorporando operadores modales en cálculos de enunciados inconsistentes de forma que dichos cálculos sean, a su vez, inconsistentes.

- Incorporando operadores modales a través de la traducción de ciertas estructuras reticulares a álgebras con semánticas de Kripke, tal y como propusieron Chiara y Giuntini (2001). Pero siendo conscientes de que dichos operadores modales carecerán de interpretación física concreta.

- Mediante un trato puramente informal[29] de dichos operadores. Esto es, *grosso modo* lo que encontraremos en la mayoría de interpretaciones modales.

A continuación expondremos la interpretación de las *historias cuánticas* como posible formalismo capaz de constituir una *nueva lógica cuántica* (NQL) o, al menos, un formalismo lo más parecido posible a una lógica cuántica que sea susceptible, a su vez, de permitirnos incluir operadores modales de manera semánticamente consistente en contextos mecánico-cuánticos.

4. NUEVA LÓGICA CUÁNTICA

Una NQL es posible a partir del formalismo de las familias de historias consistentes cuánticas y no simplemente del, por así decir, espacio de Hilbert en bruto forzado a encajar con una sintaxis y semántica construidas *ad hoc*. Esto permitiría, sobre todo, que se eliminen, al menos, dos de los principales límites de las anteriores lógicas cuánticas que, puesto que ya casi ha pasado un siglo desde la publicación de Birkhoff y von Neumann, hemos convenido en llamar viejas: la no veritativo-funcionalidad y la imposibilidad de incluir operadores modales lógicamente bien definidos. Y, sobre todo, permitiría considerar la posibilidad de incluir operadores modales (normales) genuinos y abordar el formalismo desde una perspectiva eminentemente formal.

4.1. La lógica clásica de enunciados como formalismo adecuado

Veremos ahora el análisis de la teoría de las familias de historias consistentes cuánticas que es formalizable –en ciertos aspectos– como lógica clásica en cuanto que orden cero booleana. En esta sección propondremos una aproximación a la interpretación de la mecánica cuántica basada en las historias cuánticas desde un cálculo estándar de enunciados apuntando a su posible generalización a un cálculo modal normal –normal– en el contexto de las MI. La interpretación de las historias se basa principalmente en las *propiedades cuánticas* que, en un contexto lógico, convendría caracterizar más bien como *proposiciones cuánticas elementales*, ya que una propiedad, en sentido estricto, ha de formalizarse como un predicado y para ello se requeriría de cuantificación y un cálculo de primer orden. Esto tal vez pudiera servir para solucionar los problemas relativos a la aproximación vía formalizaciones *ad hoc*. Una propiedad –proposición– física se define[30] bivalentemente como aquella unidad proposicional susceptible de ser verdadera o falsa, es decir, como el contenido proposicional elemental –entendido en sentido amplio[31]. Se representa, como antes, por el subespacio cerrado P de un espacio de Hilbert, con la salvedad de que ahora se limitará la capacidad de formalización –lo cual suponía un fallo en los cálculos anteriores e introducía en contextos modales los problemas de composición de sistemas. Siendo más precisos, una proposición se corresponderá con un proyector P u operador de proyección ortogonal en dicho subespacio[32]. De la forma habitual, cualquier ket positivo $|\psi\rangle$ corresponderá, en el espacio de Hilbert, a un subespacio unidimensional formado por todos sus múltiplos de la forma $c|\psi\rangle$ con $c \in \mathbb{C}$[33]. Además, cuando $|\psi\rangle$ se normalice, se representará el proyector sobre el subespacio como $[\psi] = |\psi\rangle\langle\psi|$. Griffiths (2013, p. 5) relaciona este uso del ket o función de onda con una interpretación ontológica, pero debe matizarse que esto es así ya que constituye el referente atómico del contenido proposicional básico, es decir, que al no haber asumido una postura filosófica previa, aún estaría por esclarecer si incorporamos una correlación entre unidades proposicionalmente elementales, elementos del dominio y un *compromiso ontológico* en sentido quineano.

---

28. Dapprich y Schuster (2016) ofrecen un resumen muy claro sobre los problemas derivados de las viejas lógicas cuánticas. No se centran especialmente en la gravedad de renunciar a un trato veritativo-funcional, pero ofrecen otras críticas tanto a las propuestas de Birkhoff y von Neumann (1936) como de Putnam (1969) que no hemos podido mencionar. Destacan entre todas estas críticas dos. En primer lugar, Popper (1968) terminará criticando que también existen ejemplos en el lenguaje natural referidos a contextos no-cuánticos que permiten legitimar la construcción de cálculos como los aquí mencionados de forma que todo proyecto de construcción de una lógica cuántica será *ad hoc*. En segundo lugar, Schurz (2011, 2013) reformulará las formulaciones del experimento de la doble rendija de Birkhoff, von Neumann y Putnam deteniéndose en analizar las inconsistencias de su fundamentación en base al abandono de la propiedad distributiva de la disyunción. La especificidad de estas críticas y el tiempo que tomaría explicarlas con el merecido detalle nos han llevado a omitirlas y limitarnos a comentarlas.

29. Es decir, no-lógico.

30. Seguimos principalmente en este análisis a Griffiths (2013). 31Sin comprometernos con ninguna filosofía de la lógica concreta, al menos, de entrada.

32. Lo cual abre, a su vez, una nueva vía consistente de aproximación al problema de la caracterización del término información, antes bloqueada por tomar como proposiciones enunciados complejos del lenguaje natural.

33. Es pertinente recordar que la exigencia de detalle de estudio del formalismo fuerza, al menos, en este estado embrionario de la investigación, a limitar el análisis a una exposición no relativista.

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

En un sistema clásico, podemos tomar un espacio fase Γ con un punto γ representando el estado físico real de una partícula. En QM se procederá de manera análoga. Una colección de puntos P en Γ representa una propiedad clásica que es verdadera respecto de un sistema syss el punto γ representa su estado físico en el conjunto P. Se establece, entonces una correspondencia entre el subconjunto P y el indicador de función $P(\gamma)$ que será 1 para $\gamma \in P$ y 0 en cualquier otro caso. El indicador clásico es análogo al proyector cuántico cuyos valores propios serán, precisamente, 1 y 0. Además, en mecánica clásica las variables físicas se pueden representar como funciones sobre el espacio de fase –como el momento angular o la energía– y en cuántica, hemos visto que una variable física referirá a un observable, representado por el operador hermítico de la forma:

(13) $$A = \sum a_j P_j,\quad P_j = P_j^{\dagger} = P^2_j,\quad \sum_j P_j = I$$

P_j es la colección de proyectores que forman la descomposición proyectiva del operador identidad, I. Pues bien, con estos elementos podemos comenzar a definir los elementos constitutivos del cálculo lógico:

1) Función veritativa: La proposición de una variable física toma un valor a_j tal que $A = a_j$ corresponde al proyector P_j –o al subespacio P_j sobre el que se proyecta P_j. Y, esto se verá más adelante, la medida de un observable corresponderá a la medida de la descomposición de I, determinando así qué propiedad P_j, o qué P_j, es, de hecho, verdadero. Es decir, que podemos definir una *asignación* funcional de valores de verdad al modo clásico v(P_j) que mapee el conjunto {1, 0}. Esto es relevante porque, aunque no se engloba directamente dentro de los cálculos cuánticos que hemos mencionado anteriormente, numerosos autores[34] propusieron la posibilidad de estudiar lógicas trivalentes, generando cálculos no clásicos, para aproximarse a una formalización adecuada de la mecánica cuántica. Sin embargo, esto no sería necesario –el intento de aproximación a partir de un rango con *n* valores de verdad fue, en último término, una reformulación de la ruptura de la distributividad de las conectivas clásicas: pudo eliminar ciertas condiciones de distributividad en las tablas de verdad a partir de la adición de *n* tipos de negación que permitan introducir *n* valores de verdad en el cálculo.

2) Negación: La negación de una propiedad clásica P se corresponde con el subconjunto complementario P^c y el espacio de puntos en Γ que no están en P. La conectiva de la negación $\neg P$ o P^c se define como verdadera en caso de que P sea falsa y falsa en caso de que P sea verdadera. En otras palabras, podemos afirmar que se corresponde a $I - P$, siendo $I(\gamma) = 1$ para toda $\gamma \in \Gamma$. Von Neumann y Putnam propusieron, como hemos visto, que la negación no se representase por el complemento de teoría de conjuntos del correspondiente subespacio de Hilbert, sino por el complemento ortogonal: la colección $P^{\perp}$ de todos los kets ortogonales a cada ket en P. Esto es un subespacio con proyector $I - P$. Veamos un ejemplo a partir de la propuesta de Griffiths (2013, p.6). Para un espacio bidimensional de Hilbert representando un spin-medio de una partícula, los subespacios unidimensionales correspondientes a los kets ortogonales $|z+\rangle$ y $|z-\rangle$, *up* y *down*, se asocian con los proyectores

(14) $$[z^+] = |z^+\rangle\langle z^+|$$
(15) $$[z^-] = |z^-\rangle\langle z^-|$$

Como suman I, son la negación de la otra y juntas forman la descomposición proyectiva de la identidad. Si el spin no está en estado *down*, lo está en *up*[35]. Entonces v(S_z = +1/2) = 1 syss v(S_z= −1/2) = 0.

3) Conjunción: Birkhoff y von Neumann definían la conjunción o intersección de dos propiedades –proposiciones– a partir de la intersección conjuntista de dos subespacios tomada en sí como otro subespacio cerrado –igual que en la mecánica clásica donde la conjunción de dos propiedades se representa como la intersección de dos subconjuntos. Sin embargo, el indicador de la conjunción clásica es el producto de dos indicadores y en la mecánica cuántica el producto de dos proyectores es otro proyector syss dicho producto es conmutativo: $P \wedge Q \leftrightarrow PQ = QP$. En caso de que haya producto conmutativo, se dice que los proyectores –y por tanto los enunciados cuánticos o propiedades– son compatibles. Para dos enunciados compatibles, el producto PQ de los proyectores proyecta sobre el subespacio $P \wedge Q$, pero cuando no conmutan, ni PQ, ni QP son proyectores y simplemente no existe relación entre ellos y el subespacio formado por la intersección de P y Q. Al contrario que con la lógica cuántica clásica, ahora no se define la conjunción cuando no hay conmutación, es decir, cuando la mecánica cuántica no asigna significado a la conjunción de las dos propiedades –proposiciones– involucradas. Esto encaja, además, con la idea de Frege por la que la conjunción simplemente recoge la mera compatibilidad entre conceptos[36] .

4) Disyunción: Hasta ahora la disyunción $P \vee Q$ se definía como la expansión de $P \cup Q$ que, en general, no es un subespacio. El indicador clásico es $P + Q - PQ$ y esta misma expresión regirá cuando $PQ = QP$. Igual que en el caso anterior, la conectiva solamente estará definida para el caso en que los operadores conmuten.

La aplicación de la exigencia de la conmutación es una traducción de la regla del marco único, central en la exposición de las familias de historias consistentes, algo que usaremos para definir el estado de valor en las interpretaciones modales. Esta restricción se aplica a la combinación de contenido proposicional para formar expresiones bien formadas y permite conservar un marco lógico puramente clásico. En mecánica cuántica debemos limitarnos a la restricción por

34. Sobre todo a partir de Łukasiewicz (1929).

35. Esto es consistente con los experimentos de Stern y Gerlach.
36. Para un estudio actualizado al respecto, Frápolli (2021).

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

conmutación –por lo demás extrapolable también a otros contextos no-cuánticos pero cuya explicitación es crucial para poder separarnos de los fallos de la vieja lógica cuántica. Es más, las expresiones que se basen en conceptos cuya conmutación no se dé serán, simplemente, expresiones mal formadas. En el caso de la negación y la privación sería como si escribiésemos ¬p¬. De igual manera, debe tenerse claro que no es lo mismo una expresión mal formada que una falsa. Una expresión falsa, en QM, será aquella cuya función veritativa devuelva cero y, por tanto, cuya negación sea igual a 1[37]. Volviendo al ejemplo anterior, si definimos

(16) $|z^+\rangle = (1/\sqrt{2})\,(|z^+\rangle + |z^-\rangle)$
(17) $|z^-\rangle = (1/\sqrt{2})\,(|z^+\rangle - |z^-\rangle)$

siendo $[x^+]$ y $[x^-]$ los proyectores de las propiedades $S_x = \pm 1/2$, es fácil comprobar que no conmutan con $[z^+]$ y $[z^-]$. En la lógica cuántica anterior, el enunciado

(18) $S_z = +1/2 \wedge S_x = +1/2$

se corresponde al operador 0 o ⊥ que siempre es falso –habitualmente identificado con una contradicción– y es consistente con el hecho de que su negación, por aplicación de las leyes de De Morgan, resulta en una expresión de la forma

(19) $S_z = -1/2 \vee S_x = -1/2$

siendo verdadera. Pero esto ´ultimo no tiene ningún significado físico e incluso podría acarrear problemas serios. Antes era necesario modificar las reglas del razonamiento ordinario renunciando a la propiedad distributiva en la que se basan las reglas de De Morgan. Pero ahora esta modificación no es necesaria. De hecho, Gardner (1976) ya mostró que la distributividad rige en el experimento de la doble rendija incluso bajo la interpretación de Finkelstein-Putnam.

Puesto que $S_z = +1/2 \wedge S_x = +1/2$ es una expresión mal formada, su negación también lo es y no genera ninguna contradicción que nos fuerce a abandonar la propiedad distributiva de la disyunción y la conjunción. Lo habitual es afirmar que S_x y S_z simplemente no pueden medirse simultáneamente. Pero ahora se justifica a partir de una carencia epistemológica y, en último término, ontológica: no existe objeto formal que tomar en cuanto que tal.

Se mantienen las tablas de verdad de todas las conectivas y se permite una aproximación veritativo-funcional. Antes no podíamos incluir la noción de conjunto adecuado de conectivas como aquella combinación de conectivas tal que, a partir de ella, se puedan Interdefinir el resto de conectivas existentes –cuya construcción está tasada. Ahora, sin embargo, no necesitamos recurrir a una teoría reticular para generar una relación de buen orden que hagamos corresponder con la figura del condicional –o subconjunto. Simplemente podemos interdefinirlo a partir de la negación y la conjunción como aquella relación que es falsa siempre que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso y verdadera en el resto de casos. Un ejemplo tal vez pudiera ser el del estudio de una propiedad concreta de una partícula en movimiento con un spin determinado.

4.2. La regla del marco único

En el formalismo de las *historias cuánticas*, en cuyo seno regiría una lógica clásica de enunciados, el desarrollo del sistema cuántico es entendido como un proceso estocástico, por lo que no estamos tanto ante una *interpretación alternativa* a la de Copenhague como ante una *forma* distinta de presentarla. Pero el desarrollo se entiende estocásticamente *siempre* y no solamente cuando se realiza una medida. De hecho, las probabilidades en cuestión obedecen a las reglas básicas de la probabilidad. Tal como señala Griffiths (2013, p. 7), se parte de una tripla:

- **Un espacio de muestreo (S):** de todas las posibilidades mutuamente excluyentes de las que una y sólo una será verdadera. Un espacio de muestreo es siempre una descomposición proyectiva de I y toda proyección puede servir como espacio de muestreo.
- **Un álgebra de Boole de eventos ($\mathcal{E}$):** consistente en todos los proyectores que sean sumas de alguno de los proyectores en el espacio de muestra –incluidos 0 e I[38].
- **Una medida de probabilidad (M):** que asigne probabilidades a los elementos de $\mathcal{E}$.

Tomaremos espacios de muestreo que sean numerables por mor de la simplificación. Y el álgebra de Boole podrá consistir en todos los subconjuntos de S, incluidos S y ∅. Y, al igual que Griffiths (2013), llamaremos *marco* tanto a $\mathcal{E}$ como a S debido a la estrecha relación entre ambos.

Dos marcos de espacios de muestra, $\{P_j\}$ y $\{Q_k\}$, serán compatibles syss todo P_j conmuta con todo Q_k y, en cualquier otro caso, serán incompatibles. En el caso de dos marcos compatibles existe un refinamiento común mínimo de los dos marcos con el espacio de muestra que consiste en todos los productos de la forma P_jQ_k positivos con los duplicados eliminados y el álgebra del refinamiento incluye todos los proyectores en las dos álgebras originales. Si son incompatibles, no habrá refinamiento y sus álgebras no se podrán compatibilizar. Para asignar probabilidades se empieza por la colección de $\{p_j\}$ positivos, se asigna uno a cada proyector en S de forma que su suma sea 1. Las probabilidades se calculan al modo habitual:

(20) $Pr(P_j + P_k) = p_j + p_k$

37. Esta construcción parece encajar perfectamente con las nociones fregeanas de proposición, compatibilidad de conceptos –con la inclusión de la conjunción y, en general el trato de las conectivas– y, finalmente, los vacíos referenciales: cfr. Frápolli (2021).

38. Puesto que todos los elementos de la descomposición proyectiva de la identidad conmutan con el resto, también lo harán los proyectores de $\mathcal{E}$.

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

En un modelo de probabilidad clásico, los índices para las p_i son simplemente parámetros elegidos por tanteo o como resultado de un experimento. Lo mismo sucederá en el presente contexto cuántico con la salvedad de que para el desarrollo temporal de un sistema cerrado regirá la *regla de Born*[39].

La regla del marco único será, por tanto, un proceso central en la caracterización de la formalización cuántica. Por ella un *cálculo probabilístico* –o una deducción lógica– habrá de realizarse usando un único marco, es decir, una única álgebra generado por el espacio de muestreo, una única descomposición proyectiva de la identidad. Operar usando un único marco y luego transferir el resultado a otro diferente para seguir calculando no está permitido. La razón es que todos los proyectores conmutan en un marco entre sí, por lo que no se podrán generar nuevas combinaciones de proyectores no conmutativos a partir de la introducción de nuevas conectivas.

Griffiths (2013, p. 8) sintetiza cuatro principios que compactan lo que la regla del marco ´único permite y no permite hacer:

1) «El físico tiene perfecta **Libertad** para construir diferentes marcos, tal vez incompatibles, cuando analiza y describe un sistema cuántico. Ninguna ley de la naturaleza obliga a leer un marco concreto como el "correcto"(...)».

2) «Existe una perfecta **Igualdad** entre las diferentes posibilidades».

3) «Sin embargo, el principio de **Incompatibilidad** prohíbe combinar marcos incompatibles en una sola descripción, o implementarlos en una única argumentación lógica para entender una situación física o añadir otras cuestiones científicas».

4) «El último principio es la **Utilidad**: no todo marco es útil para comprender una situación física concreta o para añadir nuevas cuestiones científicas. Por el contrario, es importante no olvidar que la elección del marco por parte del físico influye, en algún sentido, a la realidad. En este sentido, la realidad cuántica nos provee de una variedad de descripciones alternativas, útiles para distintos propósitos, que cuando son incompatibles no pueden combinarse».

Estos últimos dos puntos, serán la clave a la hora de ofrecer, en ultimo termino, un esclarecimiento en lo que a algunas de las *paradojas* de la mecánica cuántica –al menos las relativas a problemas de medida y, por tanto, no localidad– se refiere: la ruptura de la regla del marco único y la evaluación simultánea de familias de historias inconsistentes.

39. Según esta regla dado un sistema puro que se halle en un estado $|\Psi\rangle$, la probabilidad $\Pr(a = \lambda_i|\Psi\rangle)$ de hallar el valor propio λi de *a* cuando *a* se mida es $\Pr(a = \lambda i|\Psi\rangle) = |(e_i, |\Psi\rangle)|^2$. Por tanto, si $|\Psi\rangle = \sum_i c_i e_i$ con $\sum_i |c_i|^2$, entonces $P(a = \lambda_i||\Psi\rangle) = |c_i|^2$.

4.3. Evolución temporal estocástica

La propuesta de von Neumann consistió en diferenciar dos tipos de evolución temporal cuántica: una unitaria a partir de la ecuación de Schrödinger y otra estocástica separada relativa a las medidas. Sin embargo, la interpretación de Muchos-mundos propuesta por Everett (1957) y ampliada por De Witt y Graham (1973) solamente toma un desarrollo de tiempo unitario, en concreto, una función de onda unitaria universal: es la conocida como *uniwave*. Pero ambas posturas plantean problemas serios, especialmente la segunda, que tendrá que explicar el comportamiento probabilístico de los sistemas cuánticos observados en laboratorios. La propuesta de las *historias cuánticas* propone exactamente lo contrario: todo desarrollo temporal cuántico es estocástico y la ecuación de Schrödinger determinista se usa para calcular estas probabilidades. De hecho, esto encaja con la exposición habitual de la mecánica cuántica en la interpretación ortodoxa a partir de la determinación de los sistemas desde el cuadrado de los módulos vector de las amplitudes.

Una evolución temporal estocástica requiere un espacio de muestreo cuyos eventos se especifiquen en instantes sucesivos. Cada evento se tomará como una *propiedad* cuántica. Así, para una secuencia temporal, $t_0 < t_1 < \ldots < t_f$ definimos –al fin– una *historia* como una secuencia de propiedades

(21) $$Y = F_0 \odot F_1 \odot \cdots \odot F_f$$

donde cada F_j es un proyector. Bajo ciertas condiciones, a la historia se le podrá asignar una probabilidad. En este contexto el producto tensorial se escribe $\odot$ y no $\otimes$. Finalmente, Y es un proyector en un subespacio de la *historia espacio de Hilbert,*

(22) $$\dot{H} = H \odot H \odot \cdots \odot H,$$

formado a partir del producto tensorial de las copias del espacio de Hilbert que describen el sistema en un momento determinado. La interpretación física es que el evento cuántico F_0 sucede o, lo que es lo mismo, que la propiedad F_f es verdadera en el instante t_f. Y es precisamente por esto por lo que resulta interesante incluir una aproximación modal a este enfoque: no porque cada instante se tome, en sí, como un estado concreto cuya relación de accesibilidad sea entonces meramente temporal –y correspondiente a una sucesión –, sino porque el espacio de muestreo S consistirá en la colección de todos los proyectores ortogonales como los que encontramos en la definición de historia. Estas *historias elementales* sumarán la *historia identidad*

(23) $$\breve{I} = I \odot I \odot \ldots \odot I$$

y constituirán la descomposición proyectiva de $\breve{I}$. El álgebra $\mathcal{E}$ estará formada por los proyectores que sean suma de algunas de las proyecciones que forman S y la probabilidad de una historia en $\mathcal{E}$ será la suma de las probabilidades de las historias elementales de las que estará compuesta.

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

Entonces, y de nuevo siguiendo a Griffiths (2013, p.9), la expresión familia de historias se empleará como sinónimo de marco y dependiendo del contexto se aplicará a S o a $\mathcal{E}$. Y la bivalencia se respetará ya que, al igual que en cualquier modelo probabilístico, una y solo una de las historias elementales mutuamente excluyentes podrá determinarse experimentalmente.

El formalismo, en nuestra versión no relativista, es relativamente sencillo. Como en la mecánica cuántica estándar presentada en la primera sección del presente trabajo, tomamos un espacio de Hilbert –separable– y los operadores hermíticos como observables. Una *familia de historias* simple, pero enormemente útil, empleará un conjunto de historias elementales:

(24) $$Y_\alpha = [\psi_0] \odot P_1^{\alpha 1} \odot P_2^{\alpha 2} \odot \cdots \odot P_f^{\alpha f}$$

con $[\psi_0] = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ fijado como estado inicial en t_0 y $P_m^{\alpha m}$ siendo αm una etiqueta, no un exponente, perteneciendo a la descomposición de la identidad tal que

(25) $$\sum_{\alpha m} P_m^{\alpha m} = I.$$

La etiqueta para la historia Y^α será la secuencia $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2, ..., \alpha_f)$.

4.4. Marcos semiclásicos y el problema de la medida

Omnès (1999a, 1999b) y Griffiths (2002, cap.26) abordan la aproximación de las historias consistentes como herramienta interpretativa del *problema de la medida*. Rechazarán, igual que harán las interpretaciones modales, el postulado del colapso. Una de las versiones más relevantes del problema de la medida es la que plantea *qué mide una medida cuántica*. Esto será relevante, como veremos más adelante, para poder compatibilizar las metafísicas propias de MI y de las historias consistentes.

Dado un sistema –pongamos por caso, una partícula en su espacio de Hilbert– Hs, o simplemente S, supongamos que las medidas de sus propiedades se realizan en un aparato H_m, o directamente M, con $H_s \otimes H_m$ como espacio de Hilbert de la combinación de ambos. Y sea el estado inicial de la partícula

(26) $$|s_0\rangle = \sum_j c^j\, |s^j\rangle$$

donde $\{|s\ j\ \rangle\}$ es la base ortonormal de S y $|m_0\rangle$ el estado inicial del aparato de medida en t_0. Durante el intervalo $[t_0, t_1]$ ambos sistemas no interactúan, por lo que sabemos que $T(t_1, t_0) = I_s \otimes I_m$. Durante el intervalo en que sí interaccionan asumimos que

(27) $$T(t_2, t_1)(|s^j\rangle \otimes |m_0\rangle) = |s^j\rangle \otimes |m^j\rangle$$

Por lo que, durante la evolución unitaria de tiempo, el estado inicial $|\Psi_0\rangle = |s_0\rangle \otimes |m_0\rangle$ con $|m^j\rangle$ normalizadas y mutuamente ortogonales pasa a ser, en los instantes t_1 y t_2, respectivamente

(28) $$|\Psi_1\rangle = T(t_1, t_0)|\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle$$

(29) $$|\Psi_2\rangle = T(t_2, t_1)|\Psi_1\rangle = \sum_j c_j\, s^j\rangle \otimes |m^j\rangle$$

Ahora consideremos varias familias de historias de la forma que hemos visto más arriba, $Y_\alpha = [\psi_0] \odot P_1^{\alpha 1} \odot P_2^{\alpha 2} \odot \cdots \odot P_f^{\alpha f}$ con estado inicial $[\Psi_0] = |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|$ en t_0 dadas por $[\psi_0] = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$. Una posibilidad es el desarrollo unitario de tiempo

(30) $$F_u: [\Psi_0] \odot \{[\Psi_1], I - [\Psi_1]\} \odot \{[\Psi_2], I - [\Psi_2]\}$$

para $t_0 < t_1 < t_2$ y con diferentes historias en el espacio de muestreo –construido eligiendo uno de los proyectores dentro de las llaves en cada uno de los instantes anteriores. Como $I - [\Psi 1]$ y $I - [\Psi_2]$ ocurren con probabilidad 0, se cancelan y la historia aislada $[\Psi_0] \odot [\Psi_1] \odot [\Psi_2]$ ocurre con probabilidad 1.

No obstante, mientras que F_u podrá ser tomado como una familia de historias, no podrá ser usado como conjunto de posibles resultados de una medida porque no incluye proyectores $\{[m^j]\}$ para t_2 ni pueden incluirse ya que $[\Psi_2]$ no conmutará con algunos $[m^j]$. El enfoque de las historias, sin embargo, propone solucionar el problema relativo a los resultados de la medida reemplazando F_u por la familia

(31) $$F1 : [\Psi_0] \odot [\Psi_1] \odot \{[m^j]\}$$

es decir, por las distintas historias de acuerdo con t_0 y t_1 pero correspondientes a diferentes posiciones en t_2. Esto será lo que permita compatibilizar el formalismo con la respuesta que ofrecen las MI: NQL permite definir una evolución estocástica.

5. INTERPRETACIONES MODALES DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

5.1. Interpretaciones modales

Las interpretaciones modales (MI)[40] nacen en los años 70 a partir del estudio del problema de la medida –igual que las QL– centrándose en el postulado de proyección: el estado de un sistema cuántico tras la medida colapsa –proyectado– en un estado que corresponde, precisamente, al de la medida obtenida. Van Fraassen (1972, 1974, 1991) propone eliminar directamente el postulado de proyección[41] y distinguir –esta es la novedad– entre:

- **Estado dinámico:** aquel que indica qué debería ser el caso. El estado dinámico señala qué propiedades físicas debería poseer el sistema –en un instante t_i.
  Se corresponde con el estado cuántico canónico: el vector o matriz de densidad en el espacio de Hilbert que, en cuanto que sistema aislado, siempre evolucionará con la ecuación de Schrödinger por lo que un sistema dinámico nunca colapsa durante su evolución[42].

40. Seguiremos principalmente a Lombardi y Dicks (2017) así como a Dieks y Vermaas (1998).
41. Al igual que habían hecho ya otras interpretaciones de QM antes: especialmente Bohm (1952), Everett (1957) y De Witt y Graham (1973).
42. Así es como se introduce la noción de posibilidad en MI. El apellido *modal* hace alusión a la relación entre estas interpretaciones y los cálculos que incluyan operadores tipo diamante, ⋄, entendidos como operadores de posibilidad. Sin embargo vemos que aquí el trato es, desde el principio, *informal*.

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

- **Estado de valor:** aquel que señala cuál es *realmente* el conjunto de propiedades definidas para el estado en t_0. Esto fuerza que un sistema físico posea, en cada instante, un número de propiedades bien-definidas[43]. Mientras que un estado cuántico solamente especifica cuáles son las posibilidades, este estado se incluye para «representar cuál es realmente el caso» tal y como señalan Dieks y Vermaas (1998, p.3).

A partir de esta distinción, un sistema tendrá valor de observable, aunque su estado dinámico no sea un estado-propio (*eigenstate*)[44]. Es decir, que si un sistema tiene un estado dinámico que es el estado-propio del observable correspondiente al valor-propio, entonces el sistema tiene un estado valor correspondiente al valor-propio dado de un observable. Ya no es necesario el contrapuesto: poseer un estado de valor –correspondiente a un valor-propio– no implicará que su estado dinámico sea un estado-propio.

Van Fraassen (1991) subrayó que las proposiciones sobre sistemas físicos no pueden ser verdaderas salvo que sean representadas por observables que conmutan y estipuló esta condición como criterio de determinación de los posibles estados de valor. La no conmutatividad de observables se constituyó como el límite de la compatibilidad de propiedades –y no la posibilidad de su conocimiento. Esto encajará con NQL.

Pero la adecuación empírica requiere que el valor tras la medida coincida con el resultado de definido de la medida. Esta fue una de las principales críticas que se hicieron a la propuesta de van Fraasen, sobre todo por parte de Ruetsche (1996). A partir de este y otros problemas se fueron perfilando diferentes propuestas de MI.

Desde los años 80 proliferan distintas interpretaciones modales con una serie de características comunes: (i) asunción del formalismo estándar a excepción del postulado de la proyección; (ii) ontología susceptible de ser tomada como *realista*; (iii) inclusión de un *estado dinámico* para caracterizar las propiedades posibles de un sistema; (iv) por lo anterior, inclusión de operadores modales –aunque sin una caracterización lógico-formal– y (v) interpretación del proceso de medida como una interacción ordinaria, rechazo al postulado del colapso y lectura basada en su evolución unitaria.

En palabras de Dieks y Vermaas (1998, p. 3), «La idea novedosa más importante tiene que ver con la exacta relación entre el estado cuántico y lo que realmente es el caso. Se asume que esta relación contiene un elemento de modalidad en el siguiente sentido: el estado cuántico nos dice qué podría ser el caso, es decir, qué propiedades físicas podría poseer el sistema».

43. La adecuación empírica exige que este estado genere una frecuencia de Born correcta para cada cantidad observable.
44. En toda interpretación modal se viola el conocido *eigenstate-eigenvalue link* por el que un sistema solamente puede poseer un valor definido.

5.2. Distintas aproximaciones modales
5.2.1. Interpretación modal atómica

Desarrollada por Bacciagaluppi y Dickson (1999) esta interpretación propone tomar un espacio de Hilbert universal factorizable, $H^{univ} = H^1 \otimes H^2 \otimes$ ..., de forma que cada estado valor –propiedad– de cada sistema cuántico se defina en términos de trazos parciales respecto al resto del universo. Esto entra en contradicción con el teorema Bell-Kochen-Speker[45] tal y como mostró Bacciagaluppi (1995). Una solución fue asumir que existe en la naturaleza un conjunto fijo de sistemas cuánticos atómicos mutuamente excluyentes y que, por tanto, existe una factorización privilegiada, algo que encaja con el modelo estándar pero plantea dos retos:

- Justificar la asunción de que existe una partición del universo ofreciendo una caracterización de cómo ha de ser dicha partición.
- Clifton (1995, 1996) y Dieks (1998) destacaron otra serie de problemas conceptuales derivados especialmente de la incorporación de sistemas cuánticos compuesto[46].

5.2.2. Interpretaciones modales de descomposición biortogonal y descomposición espectral

Propuestas por Kochen (1985) y Dieks (1988) y por Vermaas y Dieks (1995) respectivamente, estas dos modificaciones parten del teorema de descomposición biortogonal[47]. Para abordar el problema de la medida a partir de una medida ideal de von Neumann esta propuesta es muy apropiada: una medida es una interacción entre el aparato de medida, M, y el sistema cuántico, $|\phi\rangle$ que introduce una correlación de estados propios del observable A y el puntero P

$$\textbf{(32)}\quad |\psi_0\rangle = \sum_i c_i\, |a_i\rangle \otimes |p_0\rangle \longrightarrow |\psi\rangle = \sum_i c_i\, |a_i\rangle \otimes |p_i\rangle$$

de manera que el contexto prefijado del sistema medido se define por $\{|a_i\rangle\}$ y el del aparato de medida por $\{|p_i\rangle\}$[48]. De esta propuesta existen, a su vez, dos versiones:

- La primera asume una metafísica en la que toda propiedad se halla relacionada con el resto y la pregunta acerca de qué interpretación se restringe a subsistemas de dos componentes ya no es un problema. El sistema no posee las propiedades: solamente cuando es presenciado por otro sistema se le atribuyen. Esta metafísica, sin embargo, termina generando problemas análogos a los del postulado del colapso que se pretendía suprimir.

45. Kochen y Specker (1967).
46. Un sistema no atómico no tiene por qué tener propiedades que se correspondan con los resultados de las medidas: Clifton (1996) argumentó que existen propiedades *disposicionales* además de ordinarias mientras que Dieks (1998) concluyó que ciertos sistemas no atómicos podrían tomarse como uno atómico en ciertos contextos descriptivos.
47. Este teorema afirma que, dado un vector $|\phi\rangle$ en un producto tensorial $H^1 \otimes H^2$, existen bases $\{|a_i\rangle\}$, $\{|p_i\rangle\}$ para H^1 y H^2 tales que $|\psi\rangle$ se puede escribir como combinación lineal $|a_i\rangle \otimes |p_i\rangle$.
48. Y la posición del puntero es una propiedad bien definida del aparato.

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

- La segunda parte de que las propiedades adscritas a un sistema no tienen carácter relacional. Pero se generan problemas de consistencia para esta lectura. Piénsese, por ejemplo, en un sistema compuesto de tres componentes $\alpha\beta\gamma$ descompuesto en $\alpha(\beta\gamma)$, $\beta(\gamma\alpha)$, $\gamma(\alpha\beta)$ con $P(\alpha) = 1$, $Q(\beta) = 1$ y $R(\alpha\beta) = 1$: ¿Cómo definimos las propiedades individuales de α y β en $\alpha\beta$? Para $\alpha\beta$ ¿Qué predicados son verdaderos? ¿$P \wedge Q$, R, $(P \wedge Q) \wedge R$ o todos?¿Cómo se sistematiza esto?, etc.

Aquí irrumpe la descomposición espectral como generalización de la anterior para estados mixtos. Se basa, como indica su nombre, en la descomposición espectral del operador de densidad reducido. En otras palabras, las propiedades con valor definido, Π_i de un sistema y sus probabilidades correspondientes P_{ri} están dadas por los elementos diagonales positivos de la descomposición espectral del estado del sistema:

(33) $\rho = \sum_i \alpha_i \Pi_i$

(34) $P_{ri} = T_r(\rho\Pi_i)$

y así se aplica a la medida de manera que se determinen dos contextos privilegiados: uno del sistema S definido por proyectores $\Pi_a^{\,i}$ y otro de M definido por $\Pi_p^{\,i}$:

(35) $\rho_r^{S} = T_{r(M)}\, |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_i |c_i|^2\, |a_i\rangle\langle a_i| = \sum_i |ci|^2\, \Pi_i^{a}$

(36) $\rho_r^{M} = T_{r(S)}\, |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_i |c_i|^2\, |p_i\rangle\langle p_i| = \sum_i |c_i|^2\, \Pi_i^{P}$

por lo que los observables A de S y P de M adquieren valores definidos reales con probabilidades dadas por la diagonal de los elementos de los estados diagonalizados. Pero tenemos el mismo problema que con la descomposición –biortogonal– no relacional: un sistema se puede descomponer de muchas maneras distintas. Bacciagaluppi (1995) demostró que esta propuesta también se halla en contradicción con el teorema Bell-Kochen-Speker –por desgracia su demostración es demasiado larga como para incluirla en detalle–, lo que supuso uno de los mayores retos. Además, se tendría que desarrollar una teoría plausible de relaciones entre sistemas compuestos. Otros problemas, señalados por Clifton (1995), derivan del mantenimiento de propiedades definidas en un instante concreto así como del hecho de que dichas propiedades tengan un valor definido en t_i .

Finalmente, ambas propuestas solamente ofrecen una solución a la *medida ideal de von Neumann* con estados-propios $|ai\rangle$ de un observable A. Y esto es un límite serio por cuanto una medida ideal no es implementable en la práctica[49]: la interacción entre S y M nunca introduce una correlación perfecta. De hecho, existen dos tipos de medidas no ideales interdefinibles[50]:

- **Medida imperfecta:**

(37) $\sum_i c_i\, |a_i\rangle \otimes |p_0\rangle \longrightarrow \sum_{ij} d_{ij}\, |a_i\rangle \otimes |p_j\,\rangle$ con $d_{ij} \neq 0 : i \neq j$

- **Medida alterada:**

(38) $\sum_i c_i\, |a_i\rangle \otimes |p_0\rangle \longrightarrow \sum_i c_i\, |a_i^{d}\rangle \otimes |p_i\rangle$ con $\langle a_i^{d}|a_j^{d}\rangle \neq \delta_{ij}$

Las medidas imperfectas suponen un reto para toda aproximación descomposicional porque sus reglas para seleccionar propiedades con valor definido no sirven para las propiedades de un aparato en un contexto de medidas imperfectas[51]. Este ha sido un argumento crítico para todas las MI. Muchos intentos de salvarlas de este tipo de críticas han pasado por apelar al principio de decoherencia pero esto termina retrotrayendo las interpretaciones a problemas previos incluso a la eliminación del postulado del colapso[52] .

5.2.3. Interpretación modal hamiltoniana

Es la interpretación más extendida actualmente y ha sido defendida preminentemente por Olimpia Lombardi[53]. Bub (1997) se dio cuenta de que, para la mayoría de las MI, el contexto privilegiado de observables con valor definido depende del estado del propio sistema. Sin embargo, la mecánica bohmiana supone una excepción relevante: un contexto privilegiado se define previa medición del observable posición. Una interpretación modal hamiltoniana toma el hamiltoniano de un sistema como determinante en

- La definición de sistemas y subsistemas –solucionando uno de los problemas que antes mencionábamos.
- La selección del contexto privilegiado.

Definiéndose en los siguientes postulados:

P.1. Postulado de los sistemas: un sistema cuántico S es representado por un par $\langle O, H\rangle$ tal que:

1.1. O es el espacio de operadores autoadjuntos en un H que representa los observables.
1.2. $H \in O$ es el hamiltoniano independiente del tiempo en S.
1.3. Si $\rho_0 \in O*$, donde $O*$ representa el espacio dual de O, es el estado inicial de S, entonces su evolución sigue la ecuación de Schrödinger.

Es decir, todo sistema cuántico es descomponible de muchas maneras distintas en otros sistemas cuánticos syss las componentes son dinámicamente independientes –cuando no hay interacción entre los subsistemas.

49. Ruetsche (1995).
50. Estas medidas también son llamadas, a menudo, destructivas. En palabras de Griffiths (2001, p.200): «en las medidas destructivas, la propiedad de interés es alterada durante el proceso de medida, a menudo de manera no controlada, de forma que, tras la medida, la partícula ya no posee dicha propiedad».
51. Elby (1993) desarrolló esta crítica con un experimento Stern-Gerlach y una función de onda con la variable z.
52. Otros dos problemas serios para estas MI, pero que se alejan de la argumentación principal del presente trabajo son: el estudio de las propiedades en sistemas compuestos o la necesidad de generar una *dinámica de propiedades* que acerca el realismo modal al de las teorías de variables ocultas clásicas.
53. En Lombardi (2010), Lombardi y Dieks (2016), Lombardi y Fortin (2015) y en Lombardi, Fortin y López (2015).

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

P.2. Postulado de los sistemas compuestos: un sistema cuántico $S : \langle O, H\rangle$ con estado inicial $\rho_0 \in O'$ es compuesto si se puede dividir

(39) $S^1 : \langle O^1, H^1 \rangle \wedge S^2 : \langle O^2, H^2 \rangle$:
(40) $O = O^1 \otimes O^2$
(41) $H = H^1 \otimes I^2 + I^1 \otimes H^1$

y S^1 y S^2son subsistemas de $S = S^1 \wedge S^2$y en otro caso S es elemental. El hamiltoniano define la actualización y todo observable que no tenga simetrías en ´el no podrá adquirir un valor real porque su actualización rompería la simetría arbitrariamente.

P.3. Regla de actualización: dado un sistema elemental $S : \langle O, H\rangle$, los observables con valor real de S serán H y todo observable que conmute con H con, al menos, las mismas simetrías que H. El hamiltoniano se toma como el observable privilegiado y en las medidas no ideales ofrece un criterio de distinción entre aquellas realizables y no-realizables. Ya no es necesaria una dinámica debido a que el contexto privilegiado es invariante en el tiempo. Los observables con valor definido siempre conmutan con él. Este es el mayor triunfo de las interpretaciones modales. Aquí radica el éxito de esta interpretación.

6. ACOTANDO LA NOCIÓN DE *MODALIDAD* EN MI VÍA NQL

Como hemos visto, cada una de las distintas MI se enfrenta a una serie de retos. En cualquier caso, las nociones modales –especialmente la noción de posibilidad– se incluyen en toda interpretación modal como lógicamente *informales*, es decir, no-definidas en un marco lógico-modal. Esto es relevante porque limita, de entrada, el estudio de la inclusión de cualesquiera operadores modales en un contexto cuántico con un rigor formal apropiado. Lo interesante, y esta es nuestra propuesta, es que existe la posibilidad de estandarizar dichas nociones en un contexto modal vía formalización a partir de NQL. Ha debido quedar patente –sección 3– la imposibilidad de homologación de dichas nociones a través de QL. De hecho, Arntzenius (1998), siguiendo a Reeder (1998), explicitó una serie de problemas para las MI[54] en base a su relación con QL.

Como ya hemos mencionado[55], las MI adoptaron su nombre a partir de su estrecha relación con el manejo de ciertas nociones modales eminentemente lógicas. Sin embargo, sus exposiciones no han ofrecido aún –en parte debido a los límites de QL– una caracterización lógica de los operadores modales –*necesidad posibilidad*. Bueno (2014), por ejemplo, señaló la aparente contradicción entre el empirismo constructivo de van Fraassen y el realismo modal, sin embargo debemos realizar tres matizaciones:

1) El uso de cálculos modales no implica, necesariamente, un compromiso realista como el asumido por Lewis(1986) ni la asunción de un *esencialismo aristotélico* de entrada[56] .

2) El *realismo modal* que se pudiera derivar de la consideración de la lógica modal como un cálculo que genera contextos opacos –y especialmente la asunción de modalidades *de re*– se construye en un contexto en el que *realismo* adopta un significado distinto al que adopta en el debate en filosofía de la ciencia frente al *empirismo constructivo*.

3) Si se lograsen formalizar las modalidades cuánticas de MI en una semántica modal estándar, ambos debates podrían confluir en un mismo contexto, pero hasta entonces no podemos hablar de aparentes *compatibilidades* ni *incompatibilidades*.

¿Es factible el proyecto de formalizar las modalidades de MI vía NQL?

En principio contamos con dos antecedentes históricos a favor:

- El primero, negativo, se basa en que la única alternativa que tendríamos a día de hoy para llevar a cabo dicha formalización lógica es a través de QL y ya hemos visto que este proyecto parece generar más interrogantes y retos que respuestas y soluciones. De hecho, Reeder (1998) demostró que no se puede ofrecer una exposición consistente de MI en QL. Lo hizo para MI descomposicionales, sin embargo, su crítica es extensible a otras MI ya que se basó en la prueba arriba mencionada[57] de Hellman (1980) por la que no es posible conservar veritativo-funcionalidad en MQ con la construcción directa de QL: «no hay hay manera de asignar valores de verdad en un retículo de oraciones elementales mecánico-cuánticas (...)» (p. 157) y tras ensayar como posible solución la inclusión de un álgebra de Boole parcial (PBA) «antes que un retículo», concluyó que «esta estrategia falla (...), no existen dos homomorfismos bivalentes de PBAs en PBAs de oraciones realistas mecánico-cuánticas» (p. 158).
- El segundo, positivo, lo ofreció Hemmo (1996, 1998) reconstruyendo ciertas partes de MI con el formalismo de las historias cuánticas consistentes. Hemmo (1996) ofrece una definición de *mundo posible* a la que más adelante volveremos. Hemmo (1998) generalizó este formalismo y logró construir una versión de MI descomposicional no-generalizada formalizada mediante el uso de historias consistentes que ya no necesitaría de dinámicas subyacentes –recordemos que este era el principal problema de estas interpretaciones[58] .

54. Los relativos a la relación entre sistemas y subsistemas cuánticos, en cuyo detalle no podemos entrar por falta de espacio.
55. Cfr. nota a pie de pág. 34.

56. Cfr. MacFarlane (2021, pp.80 y ss.), Hughes y Cresswell (1968) o Priest (2001, p.32 y ss.) para introducciones a las distintas posturas frente al significado de los mundos posibles y, especialmente, Blackburn, de Rijke, y Venema (2001) para una construcción de cálculos modal libre de cualquier compromiso ontológico en sentido quineano.
57. Cfr. p. 16
58. Ruetsche (2003) argumentó en contra de estas MI al afirmar que se acercaban mucho a ciertas teorías de variables ocultas cuando se hacía patente la necesidad de incluir una dinámica.

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

Sin embargo, Hemmo no llegó a interpretar el formalismo de las familias consistentes como la posible base de una semántica modal a partir de la cual acotar lógicamente las nociones modales presentes en MI. Hemmo no llegó siquiera a proponérselo, como es comprensible, ya que la lectura del formalismo de las familias como posible *lógica cuántica* es posterior y Griffiths (2013) no lo llega a exponer como cálculo canónico –vía construcción de semántica, sintaxis, metalógica, etc. Pero el antecedente está asentado: las metafísicas subyacentes a MI y al formalismo de las historias consistentes son, *a priori*, compatibles.

Arntzenius (1998) se dio cuenta de que en el contexto de MI no solamente importa la compatibilidad lógica a la hora de estudiarla desde distintos enfoques sino, principalmente, la metafísica. Esto es algo comprensible dado que él tenía en mente el proyecto lógico-cuántico de la sección anterior –en concreto en sus generalizaciones reticulares– pero no es baladí que el formalismo con que nos propongamos formalizar los operadores modales, además de ser lógicamente consistente y empíricamente adecuado –como cuando definíamos las proposiciones sobre la noción de *propiedad* de un sistema– sea metafísicamente compatible con las MI. Es decir, que no se incorporen –explícita o implícitamente– el postulado del colapso o compromisos con variables ocultas[59]. Esto es lo que estudiaremos a continuación antes de pasar a ofrecer una posible vía de caracterización lógica de los operadores modales: la compatibilidad metafísica o *interpretativa* del formalismo de las historias cuánticas y las MI. Nos centraremos, en concreto, en la compatibilidad de incorporación del hamiltoniano en una lectura estocástica de la evolución del sistema y en la posibilidad de formalizar medidas no-ideales en NQL. Estos eran dos puntos cruciales para las MI hamiltoniana y descomposicionales respectivamente.

En primer lugar, respecto del hamiltoniano[60], H, podemos tomarlo ahora en NQL independiente en t de forma que

(42) $T(t, t') = exp[-i(t' - t)\, H/\hbar]$

Sea la familia de historias $F = \{Y\ \alpha\}$ para un sistema cerrado, dada una colección finita de instantes posibles $t_1, t_2, \cdots, t_f$. Bajo ciertas condiciones podemos usar $T(t', t)$ para asignar –a través de una generalización multi-temporal de la regla de Born– probabilidades a las historias en F de manera consistente. Restringiéndonos a situaciones en que las historias comiencen con el mismo estado puro inicial normalizado $|\Psi_0\rangle$ en $t_0 < t_1$ de forma que

(43) $Y^\alpha = [\Psi_0] \odot P_1^{\alpha 1}\, 1 \odot P_2^{\alpha 2}\, 2 \odot \cdots \odot P_f^{\alpha f}$

y añadimos una historia extra

(44) $Y^0 = (I - [\Psi_0]) \odot I_1 \odot I^2 \odot \cdots$

donde $[\Psi_0] \equiv |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|$ y de forma que la suma de todos los proyectores sea $\breve{I}$ sobre $H\Psi = H_0 \otimes H_1 \otimes \cdots$ para definir una colección de kets, $|\Phi\ \alpha\rangle$ para toda historia α

(45) $|\Phi\ \alpha\rangle = P_f^{\alpha f}\ T(t_f, t_{f-1}) P_{f-1}^{\alpha f-1}\ T(t_{f-1}, t_{f-2}) \cdots P_1^{\alpha 1}\ T(t_1, t_0)|\Psi_0\rangle$

Siempre que se cumpla la *condición de consistencia*

(46) $\forall \alpha, \alpha' \,(\alpha \neq \alpha' \rightarrow \langle \Phi\alpha\, |\Phi\ \alpha'\rangle = 0)$

cuando $\alpha_m \neq \alpha_m' \rightarrow \alpha \neq \alpha'$ para al menos un valor $m \in [1, f]$, se asigna a la historia Y^α la probabilidad[61] .

(47) $Pr\,(Y^\alpha) \neq \langle \Phi^\alpha\, |\Phi^\alpha\rangle$

y si f = 1, la condición de consistencia se satisface automáticamente porque los proyectores son mutuamente ortogonales en t_1 y las probabilidades $\langle \Phi\alpha\, |\Phi\ \alpha'\rangle$ están dadas de la manera habitual por la regla de Born. Con $f \geq 2$, la condición de consistencia provee una generalización no trivial de la regla de Born cuando se satisfaga.

En segundo lugar, es posible hacerse cargo de medidas destructivas a partir de la aplicación con procesos de medida alterados –y, por tanto, también imperfectos[62]. Griffiths (2002, p. 209) genera una descripción generalizada de un proceso de medida idealizado para sistemas, S, que

interactúan con el aparato de medida M. Con la proposición de la medida correspondiente a una base ortonormal $\{|s^k\rangle\}$, $k = 1, 2, \cdots, n$ de S se asume que el proceso de medida corresponde a un desarrollo de tiempo unitario $t_0 > t_1 > t_2$ tal que

(48) $|s^k\rangle \otimes |M_0\rangle \longrightarrow |s^k\rangle \otimes |M_1\rangle \longrightarrow |N^k\rangle$

en el que $|M_0\rangle$ y $|M_1\rangle$ son los estados del aparato en los dos primeros instantes antes de su interacción con S y $\{|N^k\rangle\}$ los estados ortonormales sobre $S \otimes M$ que serán la base del puntero. Asumiendo como estado inicial

59. Lo primero ya hemos visto que se rechaza, por definición, tanto en MI como en NQL. Respecto de las teorías de variables ocultas, es pertinente traer a colación la propuesta de Griffiths (2013, p.12) por la que aunque «a veces se confunde con ciertas clases del enfoque de variables ocultas estudiado por Bell y sus seguidores. Sin embargo, la hipótesis básica subyacente a la mayoría de esquemas de variables ocultas es que toda propiedad que podría medirse realmente "existe" en algún sentido en la particular previa medida (...). El enfoque de las historias elude la paradoja Bell-Kochen-Speker usando la regla de marco único». No podemos entrar en el presente trabajo en la discusión acerca del significado, alcance o actualidad de las interpretaciones de variables ocultas. No obstante, baste por el momento con señalar que ni MI ni NQL son susceptibles de subsumirse en este tipo de interpretaciones mecánico-cuánticas.

60. Incorporado por Griffiths (2019).

61. Griffiths (2019), especifica que la ecuación (47) se adscribe, a veces, a Wigner (1963) y, a veces, a Aharonov, Bergmann y Lebowitz (1964).

62. Recordemos que son interdefinibles. Tal y como apuntan Lombardi y Dieks (2017), «las medidas alteradas pueden reescribirse como medidas imperfectas (y viceversa)».

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

(49) $|\Psi_0\rangle = |s_0\rangle \otimes |M_0\rangle : |s_0\rangle = \sum_k c_k|s^k\rangle$ con $\sum_k |c_k\rangle^2 = 1$

la evolución unitaria de tiempo resultará ser en t2

(50) $|\Psi_2\rangle = T(t_2, t_0)|\Psi_0\rangle = \sum_k c_k|N^k\rangle$

por lo que,

(51) $\Psi_0 \odot I \odot \{N^1, N^2, \cdots\}$

Y esto es generalizable para medidas no-ideales a partir de[63]

(52) $I^S = \sum_k S^k$

que permite centrarse en una variable concreta:

(53) $V = \sum_k v'_k S^k$

Con una compatibilidad interpretativa de partida podemos, entonces, ofrecer finalmente una caracterización lógica de la formalización de los operadores modales presentes en MI a partir de NQL. Un cálculo modal no es más que una tripla formada por un conjunto de estados, una relación de accesibilidad –dibujada como aplicación matemática– entre dichos estados y una función veritativa. El formalismo de las lógicas modales estándar se agota ahí y el resto de implicaciones filosóficas acerca de cómo leamos cada uno de sus elementos se traslada al ámbito interpretativo de la filosofía de la lógica y la metafísica –modales. En este contexto tomaremos el cálculo como mero formalismo y, tal y como hemos señalado más arriba, esto es algo no acarrea ninguna clase de compromiso ontológico con los estados o mundos posibles[64] .

- **Función veritativa:** para un marco de Kripke esta función no es nada más que la definición del mapeo entre las proposiciones y el conjunto de valores de verdad. En este caso, $v(P_j) \rightarrow \{1, 0\}$ tal y como vimos en la sección 2.
- **Conjunto de estados o mundos posibles:** podremos caracterizar tanto $\mathcal{S}$ como $\mathcal{E}$ como el conjunto total de estados. Esto se debe a que el término *familia de historias* se podrá aplicar, tal y como se hace habitualmente en física, tanto a $\mathcal{E}$ como a $\mathcal{S}$ dependiendo del contexto. La idea es que el conjunto de estados, habitualmente W, ahora operará como lo que antes llamábamos *marco*.

Otra vía de construcción de los mundos posibles con inclusión de hamiltoniano, siguiendo a Hemmo (1996)[65], es la de definirlos probabilísticamente:

- **Evento de Schmidt:** proyecciones que determinan el conjunto de estados que definen los estados físicamente accesibles a un instante dado –posibles– para cada t. Son proyecciones $P_i(t)\rho(t)$ del estado universal $\rho(t)$ diagonalizable desde el operador densidad en cada sistema. Las probabilidades para cada evento de Schmidt de suceder en cada instante es $Tr\ (\rho(t)\ P_i(t))$
- **Familia:** como las hemos venido usando, en cuanto que secuencia finita ordenada discreta de proyecciones definida ahora sobre ρ como estado inicial tal que

(54) $\sigma_i = \langle \rho : P_{i_1}, \cdots P_{i_n}(t_n)\rangle$

de manera que una historia con probabilidad asignada se defina como

(55) $Pr_\rho(\sigma_i) = Tr\ \ P_{i_n}, \cdots P_{i_1}(t_1)\, \rho P_{i_1}(t_1), \cdots, P_{i_n}(t_n))$

que vuelve a coincidir con la generalización de la regla de Born.

- **Condición de consistencia:** en sustitución equivalente a la decoherencia, un conjunto de historias es consistente si, siendo H el hamiltoniano global, para todo $i_k \neq i'_k$:

(56) $D_{\rho,H}(\sigma_i, \sigma_{i'}) = Tr\ (P_{i_n}(t_n), \cdots, P_{i_1}(t_1)\, \rho P_{i'_1}(t_1), \cdots, P_{i'_n}(t_n)) = 0$

- **Historia de Schmidt:** asumiendo que el estado universal es puro[66], definimos una historia de Schmidt como

(57) $\sigma_i = \langle \rho : P_{i_1}(t_1), P_{i_2}(t_2), \cdots, P_{i_k}(t_k)\rangle$

y asumimos que únicamente las historias de Schmidt serán mundos posibles.

Debido a que los eventos verdaderos son dados por la ecuación de Schrödinger por los proyectores dependientes del tiempo, en realidad la propuesta de Hemmo (1996) se puede entender como una subclase de mundos posibles. Es interesante, sin duda, preguntarse ahora, con esta definición de mundo posible, si el conjunto de todas las historias de Schmidt genera o no, tal y como apunta Hemmo, la «clase infinita de los mundos físicos posibles» (1996, p. 332) y si dicho formalismo se limita a aquellos estados accesibles a los sistemas actuales.

63. Griffiths (2002, p. 201).
64. Lo cual es relevante, además, debido a que la regla de marco único podría leerse como una propuesta radicalmente contradictoria con la asunción de existencia física de los mundos posibles.
65. Hemmo (1996) desgraciadamente solamente propuso esta definición de mundo o estado posible: no llegó a caracterizar el resto de la semántica modal.

66. Y que, por tanto $\rho(t) : |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$. De ser mixto, esto cambiaría. La otra formulación de mundo posible es lo suficiente genérica como para no conllevar demasiados problemas a la hora de suprimir esta asunción. Sin embargo, hay que conceder que esta decisión es arbitraria: clarificar qué podrá significar que un estado universal sea mixto probablemente nos lleve, de nuevo, al problema de MI respecto de las relaciones entre subsistemas cuánticos –en el mejor de los casos.

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

Relación de accesibilidad entre estados: en la vertiente de definición de los mundos posibles como eventos de Schmidt, en verdad ya la hemos definido. La relación de accesibilidad, en concreto, va más allá de la mera determinación de accesibilidad: se tomará como la determinación probabilística de lo que en NQL llamábamos $\mathcal{M}$; esto podemos hacerlo solamente porque hemos implementado previamente una condición de conmutatividad. No solamente se permite estipular si existe una relación de accesibilidad o no. También se especifica la probabilidad de que en un instante dado el estado w_i accesible desde el actual w_0 pasará, de hecho, a ser actual o no[67].

7. CONCLUSIONES

El problema de la medida en QM es, sin duda, uno de los mayores interrogantes físicos, lógicos, metafísicos, epistemológicos, matemáticos y, en general, filosóficos actuales. Hemos visto que frente a dicho problema, QL falla a la hora de, siquiera, construirse como formalismo consistente. Por otro lado, NQL ofrece una alternativa capaz de hacerse cargo del problema de la medida desde una perspectiva, en principio, compatible –metafísica y lógicamente– con las interpretaciones modales hamiltonianas y descomposicionales a través del uso de las historias consistentes.

Uno de los principales retos de las MI es el de no haber incluido definiciones lógicamente consistentes de los operadores modales vía construcción de una tripla formada por una función veritativa, un conjunto de mundos posibles y una relación de accesibilidad. Las MI no pueden construir tal formalismo por sí mismas: necesitan incluir un núcleo semántico básico. NQL parece posicionarse como una herramienta prometedora a la hora de construir este marco desde la lectura de las propiedades cuánticas en las historias cuánticas como proposiciones elementales. Que, además, se pueda exponer en un algebra booleana facilita la inclusión de operadores modales y la exposición de una parte de la mecánica-cuántica en un *álgebra de Boole con operadores*.

Sin duda, quedan aún muchos interrogantes abiertos acerca de la construcción lógico-matemática del formalismo expuesto así como de las implicaciones metafísicas derivadas de este. Si lográsemos estructurar este cálculo e investigar qué restricciones se podrían imponer a la relación de accesibilidad –restricciones, por lo demás, ahora físicas–, entonces, se abrirán numerosos interrogantes: ¿Qué cálculo modal obtendríamos? ¿Qué significado podría tener esto? ¿Se podría, acaso, reabrir el debate en torno a si la lógica es o no empírica? Y, respecto de todos los debates puramente metafísicos acontecidos en contextos lógico-modales, tendríamos que preguntarnos si podríamos, ahora, incorporar las discusiones en torno a las modalidades *de re* en un contexto cuántico o qué significaría aquí una postura *necesitista*. ¿La regla del marco único es compatible con la asunción de la existencia física de mundos posibles?

Desde una perspectiva más práctica, las familias consistentes han demostrado ser de enorme utilidad a la hora de formalizar evoluciones temporales en interferómetros Mach-Zehnder. Una exposición de MI en NQL podría usarse en la formalización de resultados experimentales que tradicionalmente se han usado para argumentar a favor de otras interpretaciones como la de Muchos-mundos. Este es el caso de las *medidas sin interacción* en los detectores de bombas Elitzur-Vaidman que incorporan nociones eminentemente modales como *contrafácticos cuánticos*[68].

La riqueza de los cálculos modales, así como de todas las discusiones aún hoy abiertas en torno a sus relaciones e implicaciones, permearían, de esta manera, en las MI en cuanto se definiesen operadores en una *nueva lógica cuántica modal.* De esta manera, tal vez las preguntas anteriores puedan llegar a servir, no solamente para revisar debates metafísicos pasados –al tiempo que se inauguran nuevas problemáticas–, sino también –y sobre todo– para arrojar algo de luz sobre senderos, si bien no nuevos, sí hasta ahora ocultos, que aún debemos recorrer. Caminos trazados por líneas de investigación que hemos de transitar desde disciplinas alejadas solamente en apariencia por una distancia forzada, y cuya confluencia parece ser, por mucho que nos empeñemos, prácticamente inevitable una vez se haya arrojado algo de luz sobre el inicio de los mismos.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a Solofici, en general, la oportunidad que me han brindado y la labor tan necesaria que realizan y a Patricia García, en especial, el formidable trabajo de edición y maquetación que ha llevado a cabo.

8. BIBLIOGRAFÍA CITADA

Aharonov, Y., Bergmann, P.G. y Lebowitz, J. (1964). *Time symmetry in the quantum process ofmeasurement*. Physical Review B, 134: pp. 1410–1416.

Arntzenius, F. (1998). *Curiouser and Curiouser: A Personal Evaluation of Modal Interpretations* en Dieks, D. y Vermaas, P. (eds.). *The Modal Interpretation of Quantum Mechanics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp 337-377.

Bacciagaluppi, G. (1995). *A Kochen-Specker theorem in the modal interpretation of quantum mechanics*. International Journal of Theoretical Physics, 34: pp. 1205-1216.

—(2007). *Is Logic Empirical?* [preprint]. http://philsci-archive.pitt.edu/3380/

67. Cuando se elimina el colapso, este es uno de los puntos comunes con la interpretación de Muchos-mundos. Es relevante, además, porque permite construir mundos posibles determinando su caracterización probabilística y no meramente cualitativa.

68. Y en la computación contrafáctica como generalización implementable de dichos experimentos.

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

Bacciagaluppi, G. y Dickson, M. (1999). *Dynamics for modal interpretations*. Foundations of Physics, 29: pp. 1165-1201.

Bell, J. y Hallet, M. (1982). *Logic, Quantum Logic and Empiricism*. Philosophy of Science, 49,3: pp. 355-379.

Birkhoff, G. y von Neumann, J. (1936). *The Logic of Quantum Mechanics*. Annals of Mathema-tics Second Series, 37, 4: pp. 823-843.

Blackburn, P., de Rijke, M. y Venema, Y. (2001). *Modal Logic*. Cambridge: Cambridge UniversityPress.

Boghossian, P. y Peacocke, C. (eds.). *New Essays on the A Priori*. Oxford: Clarendon Press.

Bohm, D. (1952). *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of 'hidden' variables,I and II*. Physical Review, 85: pp. 166-193.

Boyd, R. (1981). *Scientific realism and naturalistic epistemology*. Philosophy of Science Association (PSA): pp. 613-662.

—(1984). *The Current Status of Scientific realism*. En Leplin (ed.), 1984: pp. 41-48.

Brown, H., Suárez, M. y Bacciagaluppi, G. (1998). *Are 'sharp values' of observables always objec- tive elements of reality?* en Dieks, D. y Vermaas, P. (eds.). *The Modal Interpretation of Quantum Mechanics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers: pp. 289-306.

Bub, J. (1997). *Interpreting the Quantum World*. Cambridge: Cambridge University Press.

Bueno, O. (2014). *Constructive empiricism, partial structures and the modal interpretation of quantum mechanics*. Quanta, 3: pp. 1-15.

Clifton, R. (1995). *Making sense of the Kochen-Dieks 'no-collapse' interpretation of quantum mechanics independent of the measurement problem*. Annals of the New York Academy of Science,755: pp. 570 –578.

—(1996). *The properties of modal interpretations of quantum mechanics.* The British Journal for the Philosophy of Science, 47: pp. 371-398.

Dalla Chiara, M.L. y Giuntini R. (2002). *Quantum Logics*. En Gabbay, D.M. y Guenthner, F. (eds.). Handbook of Philosophical Logic. Handbook of Philosophical Logic, vol. 6. Dordrecht: Springer.

Dapprich y Schister (2016). *Philosophy and Logic of Quantum Physics. An investigation of the Metaphysical and Logical Implications of Quantum Mechanics*. Philosophische Grundlagen der Wissenschaften und ihrer Anwendungen V. 5. Frankfurt: Peter Lang Edition.

De Witt, B.S. y Graham, N. (eds.). (1973). *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Me- chanics*. Princeton: Princeton University Press.

Dickson, M. (2001). Quantum Logic Is Alive ∧ (It Is True ∨ It Is False). Proceedings in Philosophy of Science, 68: pp. 274-287.

Dieks, D. (1988). The formalism of quantum theory: an objective description of reality?. Annalen der Physik, 7: pp. 174–190.

— (1998). Preferred factorizations and consistent property attribution en Healey, R. y Hellman, G. (eds.). Quantum Measurement: Beyond Paradox. Minneapolis: University of Minnesota Press: pp. 144–160.

Dieks, D. y Vermaas, P. E. (1998). Introduction en Dieks, D. y Vermaas, P. (eds.). The Modal Interpretation of Quantum Mechanics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers: pp.1-8.

Dummett, M. (1976). Is Logic Empirical?. En Truth and Other Enigmas. Harvard: Harvard University Press: pp. 269-289.

Elby, A. (1993). Why 'modal' interpretations of quantum mechanics don't solve the measurement problem. Foundations of Physics Letters, 6: pp. 5-19.

Everett, H. (1957). "Relative state" formulation of quantum mechanics. Rev. Mod. Phys., 29. pp- 454-462.

Fine, A. (1971). *Probability in Quantum Mechanics and Otehr Statistical Theories*. Problems inthe Foundations of Physics. M. Bunge (ed.). Heidelberg: Springer.

Finkelstein, D. (1963). *The Logic of Quantum Physics*. Transactions of the New York Academyof Sciences, 25: pp. 621-637.

—(1972). *The Physics of Logic* en Colodny (ed.) Paradoxes and Paradigms, V. 5. Reimpreso en Hooker (ed.) The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics, V. 2: pp. 141-160.

Foulis, D. J. y Bennett, M. K. (1994). *Effect algebras and unsharp quantum logics*. Foundationsof Physics, 24: pp. 101-106.

Frápolli, M.J. (2021). *Frege Pragmatised*. En imprenta.

Gibbins, P. (1987). *Particles and Paradoxes. The Limits of Quantum Logic*. Cambridge: Cam- bridge University Press.

Giuntini, R. (1995). *Quasilinear QMV algebras*. International Journal of Theoretical Physics, 34: pp. 1397-1407.

—(1991). *Quantum Logic and Hidden Variables*. Viena: Wissenschafts-verlag.

—(1996). *Quantum MV algebras*. Studia Logica, 56: pp. 393-417.

Goldblatt, R. H. (1974). *Semantics analysis of orthologic*. Journal of Philosophical Logic, 3: pp.19-35.

Greechie, R. J. (1981). *A non-standard quantum logic with a strong set of states*, en Beltrametti, E. G. y van Fraassen (eds.). *Current Issues in Quantum Logic*, vol. 8, Ettore Majorana Interna-tional Science Series. Nueva York: Plenum: pp. 375-380.

Griffiths, D. (2004). *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge: Cambridge UniversityPress.

Griffiths, R.B. (2002). *Consistent Quantum Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

—(2013). *New Quantum Logic*. Foundations of Physics, 44: pp. 610-640.

—(2019). *The Consistent Histories Approach to Quantum Mechanics* en Edward N. Zalta (ed.). The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.): https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/qm-consistent-histories/.

Hardegree, G. (1979). *The Coinditional in Abstract and Concrete Quantum Logic*. Hooker, C.A.,(ed.), *The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics*. Vol. 2. Dordrecht: D. Reidel Publishing.

Hellman, G. (1980). *Quantum Logic and Meaning*. Philosophy of Science Association (of America), 2: pp. 493-511.

Hemmo, H. (1996). *Possible Worlds in the Modal Interpretation*. Philosophy of Science, Vol. 63, Supplement. *Proceedings of the 1996 Biennial Meetings of the Philosophy of Science Association*. Part I: Contributed Papers: pp. 330-337.

—(1998). *Quantum Histories in the Modal Interpretation* en Dieks, D. y Vermaas, P. (eds.).*The Modal Interpretation of Quantum Mechanics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers: pp. 253-278.

Hughes, G. y Cresswell, M. (1968). *An Introduction to Modal Logic*. Londres: Methuen.

Kochen, S. (1985). *A new interpretation of quantum mechanics* en Mittelstaedt, P. y Lahti, P. (eds.). *Symposium on the Foundations of Modern Physics 1985*. Singapur: World Scientific: pp.151–169.

Kochen, S. y Specker, E. (1967). *The problem of hidden variables in quantum mechanics*. Journal of Mathematics and Mechanics,17:pp.59–87.

Kolmogorov, A. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berl´ın: Julius.Lewis, D. (1986). *On the Plurality of Worlds*. Nueva Jersey: Wiley.

Lombardi, O. (2010). *The central role of the Hamiltonian in quantum mechanics: decoheren- ce and interpretation*. Manuscrito. Citado en Olimpia, O. y Dieks, D. *Modal Interpretations of Quantum Mechanics*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2017 Edition), Zalta, E.N. (ed.): https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/qm-modal.

Lombardi, O. y Dieks, D. (2016). *Particles in a quantum ontology of properties* en Bigaj, T. y Wüthrich, C. (eds.). *Metaphysics in Contemporary Physics*. Leideb: Brill-Rodopi: pp. 123-143.

—(2017). *Modal Interpretations of Quantum Mechanics*. The Stanford Encyclopedia of Philo- sophy. Edward N. Zalta (ed.). https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/qm-modal/.

Lombardi, O. y Fortin, S. (2015). *The role of symmetry in the interpretation of quantum mechanics*. Electronic Journal of Theoretical Physics, 12: pp. 255-272.

SEGUNDO PREMIO: La interpretación modal de la mecánica cuántica: de la Lógica cuántica al problema de la medida

Lombardi, O., Fortin, S. y López, C. (2015). *Measurement, interpretation and information*. En- tropy, 17: pp. 7310-7330.

Łukasiewicz, J. (1929). *Elementy logiki matematycznej. Skrypt autoryzowany*. Presburger, M. (ed.). Warsaw: Wydawnictwo Koła Matematyczno-Fizycznego Słuchaczów Uniwersytetu Warszawskiego. Traducido en (1966). *Elements of Mathematical Logic*. Oxford: Pergamon Press.

MacFarlane, J. (2021). *Philosophical Logic. A Contemporary Introduction*. London: Routledge.

Mackey, G. (1957). *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Nueva York: Benjamin.

Manzano, M. (1996). *Extensions of First Order Logic*. En *Tracts in Theoretical Computer Scien-ce*. Cambridge: Cambridge University Press.

Martínez Vidal, C. (2007). *El* status *epistemológico de la lógica: verdad y necesidad*. En Frápolli Sanz, M.J. (Ed.) *Filosofía de la lógica*. Madrid: Tecnos.

Mittelstaedt, P. (1978). *Quantum Logic*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Omnès, R. (1999 a). *Understanding Quantum Mechanics*. Princeton: Princeton University Press.

—(1999b). *Are there unsolved problems in the interpretation of quantum mechanics?*. En Breuer, H.P. y Petruccione, F. (eds.). *Open Systems and Measurement in Relativistic QuantumTheory*. Berlin: Springer: pp. 169-194.

Popper, K. (1968). *Birkhoff and von Neumann's Interpretation of Quantum Mechanics*, Nature 219: pp. 682-685.

Priest, G. (2001). *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Putnam, H. (1969). *Is Logic Empirical?*. En Cohen, R. y Wartofsky, M. (Eds.). Boston Studies in the Philosophy of Science, 5. Dordrecht: Reidel: pp. 216-241. Citamos la reimpresión bajo el título *The Logic of Quantum Mechanics* en *Putnam Philosophical Papers*, I: pp. 174-197.

Reeder, N. (1998). *Projection Operators, Properties, and Idempotent Variables in the Modal Interpretation* en Dieks, D. y Vermaas, P. (eds.). *The Modal Interpretation of Quantum Mechanics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp 149-176.

Reichenbach, H. (1944). *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics*. California: University of California Press.

Ruetsche, L. (1995). *Measurement error and the Albert-Loewer problem*. Foundations of PhysicsLetters, 8: pp. 327–344.

—(1996). *Van Fraassen on preparation and measurement*. Philosophy of Science, 63: pp. 338-346.

—(2003). *Modal semantics, modal dynamics and the problem of state preparation*. International Studies in the Philosophy of Science, 17: pp. 25-41.

Schurz, G. (2011). *Einführung in die Wissenschaftstheorie*. Darmstadt: WBG.

—(2013). *Logik: Einführung in die Aussagen- und Prädikatenlogik*. Recurso on-line: http:// www.phil-fak.uni-duesseldorf.de/fileadmin/Redaktion/Institute/Philosophie/Teorische Philosophie/ Schurz/scripts/SkriptVLLogikINeu.pdf.

Staechel, J. (1986). *Do Quanta Need a New Logic?*. En From Quarks to Quasars: PhilosophicalProblems of Modern Physics. Pittsburgh: University of Pittsburgh Press: pp. 229-347.

Svozil, K. (1998). *Quantum Logic*. Singapore: Springer-Verlag Singapore.

van Fraassen, B.C. (1970). *On the extension of Beth's semantics of physical theories*. Philosophyof Science, 37: pp. 325-339.

—(1972). *A formal approach to the philosophy of science* en Colodny, R. (ed.), *Paradigms and Paradoxes: The Philosophical Challenge of the Quantum Domain*. Pittsburgh: University of Pittsburgh Press: pp. 303–366.

—(1974). *The Einstein-Podolsky-Rosen paradox*. Synthese, 29: pp. 291-309.

—(1991). *Quantum Mechancis*. Oxford: Clarendon Press.

Vermaas, P. y Dieks, D. (1995). *The modal interpretation of quantum mechanics and its genera-lization to density operators*. Foundations of Physics, 25: pp. 145-158.

von Neumann, Bas, C. (1932). *Quantum Mechanics: An Empiricist View*. Oxford: Oxford Uni-versity Press.

Wigner, E. P. (1963). *The problem of measurement*. American Journal of Physics, 31: pp. 6–15.Zetilli, N. (2001). *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*. Nueva Jersey: Wiley.

EVALUADORES Y EVALUADORAS de la SLMFCE

EVALUADORES Y EVALUADORAS
en las convocatorias de Premios Mejor TFM

(2014-2015, 2015-2016, 2016-2017, 2017-2018, 2018-2019, 2019-2020, 2020-2021)

www.solofici.org

Juan José Acero
Jesús Alcolea
Enrique Alonso
Agustín Arrieta
Marc Artiga
Juan Barba
Lilian Bermejo-Luque
Antonio Blanco Salgueiro
María Caamaño
Paco Calvo
María Cerezo
Cristina Corredor
Ana Cuevas
Xavier de Donato
Manuel de Pinedo
José Díaz
Esa Díaz León
Antonio Diéguez
Arantza Etxeberria
José Luis Falguera
Víctor Fernández Castro
Pedro Francés
Manuel García Carpintero
María José García Encinas
Ángel García Rodríguez
Antoni Gomila
Íñigo González
Javier González de Prado
Valeriano Iranzo
José Luis Luján
Alfredo Marcos
Hubert Marraud
José Martínez
Manolo Martínez
Fernando Martínez Manrique
Concha Martínez Vidal
Andrei Moldovan
María Navarro
Ángel Nepomuceno
Laura Nuño de la Rosa
Paula Olmos
Sergi Oms
Inmaculada Perdomo
David Pérez Chico
Manuel Pérez Otero
Claudia Picazo
David Pineda Oliva
Daniel Quesada
Javier Rodríguez Alcázar
Cristian Saborido
Mirco Sambrotta
Iñaki San Pedro
Fernando Soler
Adán Sus
David Teira
Vanessa Triviño
Ekai Txapartegi
Luis M. Valdés Villanueva
Jesús Vega
Luis Vega †
Ignacio Vicario
Agustín Vicente
Javier Vilanova
Neftalí Villanueva

SLMFCE
Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España

Febrero de 2023

www.solofici.org

SOCIEDAD DE LÓGICA, METODOLOGÍA Y FILOSOFÍA DE LA CIENCIA EN ESPAÑA

Para envíos al boletín:
davidpch@unizar.es

www.solofici.org