

*Biblioteca di Cultura Moderna*

M. Frixione  
S. Iaquinto  
M. Vignolo

*Introduzione  
alle logiche  
modali*

 *Editori Laterza*

## Introduzione

Le logiche modali costituiscono un'estensione della logica classica. Vengono impiegate per studiare gli enunciati e le inferenze in cui compaiono espressioni quali 'è necessario che' e 'è possibile che', dette appunto *operatori modali*. Esempi di enunciati di questo tipo sono 'è necessario che  $2+2=4$ ' e 'è possibile che domani piova'. L'idea alla base delle logiche modali è che l'interpretazione di tali enunciati dipende da un insieme di circostanze alternative al mondo attuale, tradizionalmente chiamate *mondi possibili*. Ad esempio, affinché sia vero 'è necessario che  $2+2=4$ ' non è sufficiente che  $2+2$  faccia 4 nel mondo attuale; occorre che  $2+2$  faccia 4 in qualunque stato di cose in cui il mondo possa trovarsi. Negli ultimi decenni, a partire dal lavoro di logici e filosofi quali Rudolf Carnap, Saul Kripke, David Lewis, Arthur Prior, Jakko Hintikka e Johan van Benthem, la formalizzazione in termini modali è stata progressivamente estesa a una più ampia classe di enunciati del linguaggio naturale. Sono nate così, ad esempio, le logiche modali epistemiche (il cui obiettivo è formalizzare le attribuzioni di credenza e di conoscenza), le logiche temporali (che formalizzano operatori come 'in passato' e 'in futuro') e le logiche deontiche (per studiare operatori come 'è obbligatorio' e 'è lecito'). Lo sviluppo di questi settori ha favorito l'emergere di interessanti filoni di ricerca, nei quali la logica si confronta con alcune fondamentali branche della filosofia: la filosofia del linguaggio, la metafisica e l'epistemologia. Lo scopo del volume è introdurre ai concetti chiave delle logiche modali, fornendo tutti gli strumenti per comprendere e interpretare il complesso dibattito filosofico da queste stimolato.

Ciò che caratterizza gli operatori modali rispetto ai tradizionali operatori e connettivi della logica non modale (negazione, congiunzione, disgiunzione inclusiva, ecc.) è il fatto di non essere vero-funzionali. Un connettivo (o un operatore) enunciativo si dice vero-funzionale se e solo se il valore di verità dell'enunciato complesso dipende *esclusivamente* dal valore di verità degli enunciati che lo compongono. Il che equivale a dire che un connettivo (o un operatore) enunciativo è vero-funzionale se e soltanto se possiamo caratterizzare il suo significato per mezzo di una tavola di verità, che ci informa di come il valore di verità dell'enunciato composto varia al variare dei valori di verità dei suoi componenti. Ad esempio, la negazione ( $\neg$ ), la congiunzione ( $\wedge$ ) e la disgiunzione inclusiva ( $\vee$ ) possono essere

caratterizzate per mezzo delle tavole di verità seguenti:

$\alpha$	$\neg\alpha$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$
V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V
F	V	F	F	F	F

Una negazione è vera a condizione che l'enunciato negato sia falso e falsa altrimenti; una congiunzione è vera se e solo se entrambi i congiunti sono veri; una disgiunzione è vera qualora almeno uno dei disgiunti sia vero. Se invece un connettivo (o un operatore) non è vero-funzionale, ci saranno casi in cui la verità o falsità dell'enunciato composto non dipenderà *esclusivamente* dal valore di verità dei componenti. Quindi, se proviamo a farne la tavola di verità, non riusciremo a completare l'intera tabella. Prendiamo in considerazione un connettivo proposizionale di tipo temporale come 'poi'. Affinché un enunciato della forma ' $\alpha$  poi  $\beta$ ' sia vero (ad es. 'Napoleone fu sconfitto a Waterloo, poi fu esiliato a Sant'Elena'; 'Ieri ho mangiato una pizza, poi sono andato al cinema') sia  $\alpha$  che  $\beta$  devono essere veri, ma ciò non è sufficiente; è richiesto anche che l'evento descritto da  $\alpha$  preceda temporalmente l'evento descritto da  $\beta$ . Per cui, se provassimo a fare la tavola di verità di 'poi', ci troveremmo nella situazione seguente:

$\alpha$	$\beta$	$\alpha$ poi $\beta$
V	V	?
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ossia, se  $\alpha$  è falso oppure  $\beta$  è falso, allora ' $\alpha$  poi  $\beta$ ' sarà certamente falso, ma nel caso in cui  $\alpha$  e  $\beta$  siano entrambi veri, non sapremo quale valore di verità inserire nella tabella. Considerazioni analoghe valgono per gli operatori modali aletici 'è possibile che' e 'è necessario che'. In questo contesto, dato un enunciato  $\alpha$ , con 'È possibile che  $\alpha$ ' si intende dire che è concepibile che l'enunciato  $\alpha$  sia vero (anche se  $\alpha$  è falso, potrebbe darsi il caso che  $\alpha$  sia contingentemente falso, come ad esempio nell'enunciato 'È possibile che Firenze sia la capitale d'Italia'). Un enunciato necessario è invece un enunciato che non solo è vero, ma che non è possibile sia falso. Esempi di enunciati che plausibilmente sono necessari in questo senso sono le verità logiche (es. 'Piove o non piove'), le verità della matematica (come ' $2 + 2 = 4$ '), oppure enunciati analiticamente veri (ossia, veri solo in virtù del significato) come 'I quadrati hanno quattro lati' oppure 'Gli scapoli non sono sposati'. Cominciamo dall'operatore 'è necessario che'. Se un dato enunciato  $\alpha$  è falso, allora

certamente sarà falso anche ‘È necessario che  $\alpha$ ’. Ma il fatto che un enunciato  $\alpha$  sia vero non mi consente di concludere nulla circa la verità o meno di ‘È necessario che  $\alpha$ ’. Ad esempio, ‘Roma è la capitale d’Italia’ e ‘ $2 + 2 = 4$ ’ sono entrambi enunciati veri, ma, mentre è plausibile che ‘È necessario che  $2 + 2 = 4$ ’ sia a sua volta vero, verosimilmente l’enunciato ‘È necessario che Roma sia la capitale d’Italia’ è falso (posso facilmente concepire ad esempio che, se la storia fosse andata diversamente, la capitale d’Italia avrebbe potuto diventare Napoli, oppure rimanere Firenze). Nel caso dell’operatore ‘è necessario che’ avremo dunque la situazione seguente:

$\alpha$	<i>è necessario che <math>\alpha</math></i>
V	?
F	F

Simmetrica è la situazione con l’operatore ‘è possibile che’: se l’enunciato  $\alpha$  è vero, allora sarà certamente vero ‘È possibile che  $\alpha$ ’, ma dalla falsità di  $\alpha$  non posso concludere nulla circa il valore di verità di ‘È possibile che  $\alpha$ ’:

$\alpha$	<i>è possibile che <math>\alpha</math></i>
V	V
F	?

Ad esempio, è falso che  $2 + 2 = 5$ , e al tempo stesso è anche falso che è possibile che  $2 + 2 = 5$ ; ma la falsità di ‘Nizza è in Francia’ non comporta che sia falso anche ‘Nizza avrebbe potuto non essere in Francia’ (se ad esempio Cavour non avesse ceduto Nizza a Napoleone III, ora Nizza potrebbe far parte dell’Italia).

Nel caso degli operatori deontici, come ‘è obbligatorio che’, ‘è permesso che’, ‘è vietato che’, la situazione è ancora meno determinata. Nel caso di ‘è obbligatorio che’ e ‘è permesso che’, ad esempio, dal fatto che un enunciato  $\alpha$  sia vero o falso non si può concludere nulla circa la verità o falsità di ‘È obbligatorio che  $\alpha$ ’ o di ‘È permesso che  $\alpha$ ’.

$\alpha$	<i>è obbligatorio che <math>\alpha</math></i>	$\alpha$	<i>è permesso che <math>\alpha</math></i>
V	?	V	?
F	?	F	?

Ad esempio, dalla verità dell’enunciato ‘È obbligatorio che Mario paghi le tasse’ non segue il fatto che Mario le paghi per davvero. Analogamente, dalla falsità dell’enunciato ‘È obbligatorio che Mario indossi calzini gialli’ non segue nulla circa il colore dei calzini effettivamente indossati da Mario. Considerazioni simmetriche si applicano al caso di ‘è permesso che’.

Anche espressioni del tipo di ‘Tizio sa che’ oppure ‘Tizio crede che’ si comportano in maniera non vero-funzionale. Anche queste due espressioni possono essere trattate come operatori enunciativi: dato l’enunciato  $\alpha$ , sia ‘Tizio sa che  $\alpha$ ’ sia ‘Tizio crede che  $\alpha$ ’ sono a loro volta degli enunciati. Nel primo caso, quando cioè si ha a che fare con un operatore di conoscenza, si parla di contesti *epistemici*, mentre nel secondo caso (quello degli operatori di credenza) si parla di contesti *doxastici* (anche se capita talvolta che sia usata l’espressione ‘contesti epistemici’ sia per i contesti di credenza, sia per quelli di conoscenza). Consideriamo per primo il caso epistemico. Se un enunciato  $\alpha$  è falso, allora l’enunciato ‘Tizio sa che  $\alpha$ ’ sarà sicuramente falso (non è possibile sapere qualcosa di falso). Ma se l’enunciato  $\alpha$  è vero, non si può ancora dire nulla sulla verità di ‘Tizio sa che  $\alpha$ ’. La situazione è quindi quella della tabella seguente.

$\alpha$	<i>Tizio sa che <math>\alpha</math></i>
V	?
F	F

Nel caso di un enunciato come ‘Tizio crede che  $\alpha$ ’ la situazione è ancora più indeterminata. Infatti è del tutto concepibile che siano credute cose false. In altri termini, la situazione è la seguente:

$\alpha$	<i>Tizio crede che <math>\alpha</math></i>
V	?
F	?

Nel seguito vedremo come (e in che misura) è possibile trattare espressioni non vero-funzionali come queste con gli strumenti della logica.

Inizieremo la nostra trattazione (capitolo I) riprendendo due aspetti della filosofia del linguaggio di Gottlob Frege: la distinzione tra senso e riferimento e il principio di composizionalità del significato. Mostriamo poi come sia stata elaborata la nozione di intensione e quale legame vi sia tra quest’ultima e la nozione di mondo possibile.

Nel capitolo II presentiamo la logica modale proposizionale, soffermandoci sulla semantica per le logiche modali sviluppata da Saul Kripke. Spieghiamo come valutare il valore di verità di un enunciato contenente operatori modali alla luce di un insieme di mondi possibili e di una relazione di accessibilità tra questi ultimi. Intervenendo sulle proprietà della relazione di accessibilità (imponendo, ad esempio, che sia riflessiva, transitiva, seriale, ecc.), presentiamo la famiglia delle principali logiche modali aletiche: il sistema **K**, il sistema **T**, il sistema **S4**, il sistema **B** e il sistema **S5**.

Il capitolo III è dedicato a tre applicazioni filosofiche dei sistemi modali presentati nel capitolo II: le logiche deontiche, le logiche temporali e le logiche condizionali. Le prime disciplinano le inferenze tra enunciati contenenti gli operatori 'è obbligatorio che' e 'è permesso che'. Le seconde permettono di formalizzare gli aspetti temporali che caratterizzano gli enunciati al passato e al futuro. Le logiche condizionali aspirano a una formalizzazione del connettivo *se . . . allora* quanto più possibile aderente all'uso ordinario.

Il capitolo IV è dedicato alle logiche modali epistemiche. Dopo una breve introduzione di carattere filosofico, presentiamo le logiche della conoscenza e le logiche della credenza. Ne esaminiamo poi alcuni recenti sviluppi, soffermandoci sulle logiche multi-modali e le logiche multi-agente. Affrontiamo infine il cosiddetto problema dell'onniscienza logica, evidenziando come il dialogo tra logica e filosofia abbia arricchito il dibattito su questioni di carattere epistemologico.

Nel capitolo V presentiamo la logica modale quantificata. Il passaggio dai sistemi proposizionali a quelli predicativi è di fondamentale importanza per i problemi metafisici legati alla logica modale. Come vedremo, sono di particolare rilievo il tema della quantificazione entro i contesti modali e la distinzione tra modalità *de dicto* e modalità *de re*.

Il capitolo VI è dedicato all'approfondimento dei principali aspetti filosofici connessi alla logica modale quantificata. In particolare, discutiamo i rapporti tra le nozioni modali, la filosofia del linguaggio e la metafisica. Sul piano della filosofia del linguaggio, ricostruiamo la critica di W.V.O. Quine dell'interpretazione dell'operatore di necessità in termini di analiticità.

Nel capitolo VII, infine, discutiamo alcune intricate connessioni tra la semantica formale per i linguaggi modali - la semantica dei mondi possibili - e la metafisica.

Il volume è corredato di appendici dedicate all'approfondimento di alcuni aspetti tecnici.

### *Ringraziamenti*

L'idea di scrivere questo volume è nata a seguito di un seminario sulle logiche modali per gli studenti dei corsi di laurea dell'Università di Genova, tenuto nel giugno del 2013. Ringraziamo tutti i partecipanti per le stimolanti discussioni. Tra coloro che ci hanno in vario modo aiutato e incoraggiato ringraziamo Francesco Aloe, Alberto Gatto, Carlo Penco, Daniele Porello e Giuliano Torrenco. Pur essendo il testo frutto di un'elaborazione comune, i primi due capitoli sono stati redatti da Marcello Frixione, il terzo e il quarto da Samuele Iaquinto, il quinto, il sesto e il settimo da Massimiliano Vignolo.

## Capitolo primo

# Da Frege ai mondi possibili

### 1.1 *L'eredità di Frege: senso, riferimento e composizionalità del significato*

In questo capitolo vedremo come il problema dei contesti non vero-funzionali si pose nell'ambito della filosofia del linguaggio a partire da Frege. In particolare, in questo paragrafo esporremo due aspetti della filosofia del linguaggio di Gottlob Frege che ci introdurranno ai temi discussi nel resto del volume. Si tratta di i) la distinzione tra senso e riferimento e ii) il principio di composizionalità del significato. Oltre ai contributi tecnici alla logica e alla teoria dei fondamenti della matematica, Frege ha pubblicato alcuni scritti che hanno avuto un ruolo fondante per la filosofia analitica del linguaggio. Uno di essi è l'articolo "Über Sinn und Bedeutung" (1892), in cui vengono trattati gli argomenti che presentiamo qui di seguito.

#### 1.1.1 *Senso e riferimento: i termini singolari*

Tradotto alla lettera, il titolo "Über Sinn und Bedeutung" significa "Su senso e significato". Ma, di solito, poiché la parola 'significato' può avere usi diversi, in ambito filosofico si preferisce tradurre *Bedeutung* con *riferimento* (in inglese: *reference*). La distinzione tra *senso* e *riferimento* è centrale nella filosofia del linguaggio di Frege. Vediamo di cosa si tratta partendo da quelli che Frege chiama *nomi propri*<sup>1</sup>. Per Frege un nome proprio è qualunque espressione che ci consente di parlare di un oggetto specifico.

<sup>1</sup> In questo capitolo assumiamo la posizione di Frege che tratta come nomi o termini singolari tutte quelle espressioni che ci consentono di parlare di – o di denominare – oggetti specifici. Così intesa, la categoria dei termini singolari contiene sia i nomi in senso stretto, come 'Giuseppe Garibaldi', sia le descrizioni definite, come 'la capitale d'Italia'. Nel capitolo VI vedremo che i nomi e le descrizioni definite svolgono funzioni semantiche diverse, e che con l'espressione 'parlare di un oggetto specifico' si possono intendere cose molto diverse. Vedremo che i nomi si *riferiscono* agli oggetti mentre le descrizioni definite li *denotano*. Fu Russell (1905) per primo a distinguere la funzione semantica dei nomi dalla funzione semantica delle descrizioni definite.

Sono esempi di nomi propri in questa accezione le seguenti espressioni dell'italiano:

Giuseppe Garibaldi, il Po, Roma, Salerno, la capitale d'Italia, l'attuale presidente del consiglio, il gatto della zia Pina

oppure le espressioni matematiche seguenti:

$$5, \frac{10}{2}, 4+3, \pi, 137^5$$

e così via. In seguito, quelli che Frege chiamava nomi propri verranno poi detti *termini singolari*, ossia termini che denotano un singolo individuo. (Si parlerà di *nomi propri* solo nel caso dei nomi propri in senso stretto, come ad esempio 'Roma' o 'Giuseppe Garibaldi', mentre verranno dette *descrizioni definite* quelle descrizioni introdotte dall'articolo determinativo al singolare, come 'la capitale d'Italia' o 'il gatto della zia Pina'.) Qui di seguito adotteremo l'uso oggi corrente, per cui chiameremo termini singolari quelli che Frege chiamava nomi propri (e i nomi propri saranno un tipo particolare di termini singolari).

Nel caso di un termine singolare, il suo *riferimento* (*Bedeutung*) è l'oggetto denominato. Ad esempio, il riferimento di 'Giuseppe Garibaldi' è quel generale con la camicia rossa e la barba che ha guidato la spedizione dei mille, il riferimento di 'Roma' è quel grande agglomerato urbano che si trova sulle rive del Tevere a pochi chilometri dalla sua foce, il riferimento di '5' è un oggetto astratto con certe proprietà (ad esempio, essere l'unico fattore primo dispari di 10).

Ma che cos'è il *senso* (*Sinn*) di un termine singolare? Esaminiamo l'esempio proposto dallo stesso Frege. 'Stella del mattino' e 'Stella della sera' sono due termini singolari. La stella del mattino indica l'ultimo corpo celeste a scomparire dal firmamento prima dell'alba, mentre la stella della sera indica il primo corpo celeste ad apparire nel firmamento dopo il tramonto. Noi sappiamo che la stella del mattino e la stella della sera sono entrambi il pianeta Venere. Quindi, 'Stella del mattino' e 'Stella della sera' sono due termini singolari che hanno lo stesso riferimento (*Bedeutung*), ossia denotano lo stesso oggetto.

Di conseguenza, l'enunciato:

(i) La Stella del mattino è la Stella della sera

(o, se preferite, 'Stella del mattino = Stella della sera') è un enunciato vero. Ma anche:

(ii) La Stella del mattino è la Stella del mattino

(ossia, 'Stella del mattino = Stella del mattino') è un enunciato vero. I due enunciati sono simili. Tuttavia tra (i) e (ii) c'è una profonda differenza: la verità di (ii) è

ovvia, e per stabilirla basta conoscere la lingua italiana. Di conseguenza, (ii) non fornisce alcuna informazione interessante. (i) invece è un enunciato dotato di valore informativo: ci fornisce un'informazione non banale, tanto è vero che per stabilire la sua verità è stato necessario effettuare osservazioni di tipo astronomico. In altri termini, la verità di (i) è una “scoperta”, la verità di (ii) no.

È per spiegare la differenza tra enunciati come (i) e (ii) che Frege introduce la nozione di *sensu* (*Sinn*). Il senso per Frege è un'entità concettuale che fa da mediatore tra un termine e il suo riferimento. In altre parole, le cose starebbero come in Fig. 1.

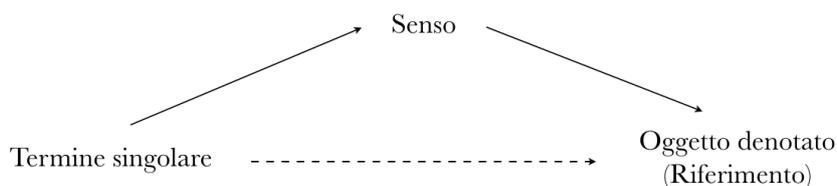


Fig. 1

Ossia, un termine singolare denota il suo riferimento, ma il collegamento tra il termine e il riferimento non è diretto, è mediato dal senso. Frege definisce il senso come *il modo in cui è dato il riferimento*.

Ad esempio, nel caso di ‘la Stella del mattino’ il senso può essere parafrasato grosso modo come ‘l’ultimo corpo celeste a scomparire dal firmamento prima dell’alba’. È chiaro a questo punto che ‘Stella del mattino’ e ‘Stella della sera’ hanno lo stesso riferimento, ma tale riferimento è dato attraverso sensi diversi (il senso di ‘la Stella della sera’ può essere descritto come ‘il primo corpo celeste a comparire nel firmamento dopo il tramonto’). In altri termini, potremmo dire che il riferimento è lo stesso ma viene raggiunto attraverso “percorsi cognitivi” diversi. La situazione è schematizzata dalla Fig. 2.



Fig. 2

In questo modo si può spiegare il valore conoscitivo di (i) rispetto a (ii): (i) ci informa che  $Sens_1$  e  $Sens_2$  (ossia i due diversi “percorsi cognitivi” verso il riferimento associati rispettivamente a ‘Stella del mattino’ e a ‘Stella della sera’) ci portano allo stesso oggetto, il pianeta Venere (il che non è affatto una cosa ovvia).

Secondo Frege nel caso dei termini singolari (compresi i nomi propri in senso stretto) il riferimento viene fissato sempre attraverso la mediazione di un senso<sup>2</sup>. Ma, come vedremo tra poco (§ 1.3), per Frege tutte le espressioni linguistiche, e non solo i termini singolari, hanno sia un senso, sia un riferimento.

Si noti di passaggio che per Frege i sensi delle espressioni linguistiche non vanno confusi con entità di tipo mentale o psicologico. In semantica Frege è dunque *antipsicologista* – o *antimentalista*.

### 1.1.2 Ancora su senso e riferimento: enunciati e predicati

Abbiamo anticipato che, secondo Frege, tutte le espressioni linguistiche, e non solo i termini singolari, hanno sia un senso, sia un riferimento. In generale, Frege definisce il senso di un'espressione come il modo in cui è dato il suo riferimento. Abbiamo visto in cosa questo consiste nel caso dei termini singolari. Vediamo ora per sommi capi in cosa consistono secondo Frege il senso e il riferimento di altre due importanti categorie di espressioni, i predicati e gli enunciati.

Incominciamo dagli *enunciati*. Ricordiamo che un enunciato è un'espressione linguistica che può avere un valore di verità (in particolare, se accettiamo il principio di bivalenza, un enunciato è vero o falso). La tesi di Frege è che il *riferimento* (*Bedeutung*) di un enunciato coincide con il suo *valore di verità*. Ossia, tutti gli enunciati veri denotano il valore vero, e tutti gli enunciati falsi denotano il valore falso. Questo può sembrare controintuitivo: ad esempio, '2 + 2 = 4' ha la stessa *Bedeutung* di 'Napoleone è morto a S. Elena', che a sua volta ha la stessa *Bedeutung* di 'Piove oppure non piove': si tratta sempre del valore di verità vero. Analogamente, '16,2 = 3<sup>2</sup>', 'Ci sono quadrati rotondi' e 'Battipaglia è in Svizzera' denotano tutti il falso. Vale a dire, se il riferimento coincide con il valore di verità, il riferimento di un enunciato ha poco a che fare con ciò di cui l'enunciato "parla"; sul piano del riferimento viene cancellato gran parte del valore informativo dell'enunciato.

Per motivare questa scelta, Frege propone il seguente esempio. Supponiamo che qualcuno legga l'Odissea con l'ottica di uno storico. Allora egli sarà interessato a individuare il *riferimento* dei nomi dei personaggi del poema. Ad esempio, sarà interessato a stabilire se il personaggio che nel poema viene chiamato 'Ulisse'

<sup>2</sup> Questa idea si può leggere in due modi, uno forte e uno debole. Quello forte dice che un nome proprio è sinonimo di una descrizione definita che individua il riferimento del nome, per esempio il nome proprio 'Aristotele' è sinonimo della descrizione 'il maestro di Alessandro il Grande'. Quello debole dice che il riferimento del nome è determinato dalla descrizione, nel senso che il nome si riferisce a quell'unico individuo che soddisfa la descrizione. Entrambe le concezioni, quella forte e quella debole, sono state attaccate dagli argomenti di Kripke (1980).

è esistito davvero, e, in tal caso, chi fosse. Allo stesso tempo, egli sarà interessato a stabilire se i fatti descritti nel poema si sono verificati davvero oppure no; ad esempio, sarà interessato a stabilire se l'enunciato 'Ulisse è tornato a Itaca dopo vent'anni' è vero o falso. In generale, sarà interessato a stabilire qual è il valore di verità degli enunciati che appaiono nel poema. Invece un lettore che legga l'Odissea con un interesse diverso da quello storiografico (ad esempio con un interesse di tipo filologico o linguistico, o semplicemente perché è attratto dalla vicenda o dalla bellezza dei versi) non sarà interessato al riferimento dei nomi propri che vi compaiono, così come non sarà interessato a conoscere la verità o la falsità dei fatti narrati. Quindi il riferimento dei nomi propri (e, in generale, di tutti i termini singolari) si colloca sullo stesso piano del valore di verità degli enunciati. È legittimo quindi considerare il valore di verità come il riferimento degli enunciati. Questa tesi di Frege avrà ampio seguito negli sviluppi successivi della semantica formale.

Veniamo ora al *sensu* degli enunciati. Frege chiama *pensiero* il senso espresso da un enunciato. Il nome però potrebbe essere sviante: il pensiero espresso da un enunciato non deve essere confuso con un'entità di tipo psicologico. Frege afferma chiaramente che il pensiero deve essere mantenuto distinto dal processo psicologico del pensare. Intesi in questo modo, i pensieri devono essere considerati contenuti oggettivi, e non entità mentali. Valgono infatti per i pensieri le stesse considerazioni di ordine anti-mentalista svolte in precedenza per il senso dei termini singolari. Di conseguenza, secondo Frege, anche i pensieri sono entità astratte che, come i sensi dei termini singolari.

Consideriamo ora i *predicati*. Per semplicità, considereremo solo predicati a un argomento (ossia, proprietà). Tuttavia, tutto quello che diremo può essere facilmente generalizzato a predicati con un numero di argomenti qualsiasi. Frege ritiene che il riferimento dei predicati coincida con un tipo particolare di funzione. Dobbiamo quindi innanzitutto presentare brevemente il concetto matematico di *funzione* (che peraltro ci sarà utile più volte nel seguito).

Una funzione  $f$  è una corrispondenza tra due insiemi, di cui il primo viene detto il *dominio* di  $f$ , il secondo il suo *codominio*. La situazione è schematizzata nella figura seguente, dove il dominio è indicato con  $D$  e il codominio con  $C$  (Fig. 3). Affinché  $f$  sia una funzione, deve valere che, ad ogni elemento di  $D$  preso come *argomento*, venga associato uno ed un solo elemento di  $C$  come *valore*. In altri termini, per ogni elemento  $x$  del dominio scelto come argomento, deve esistere uno ed un solo valore  $y$  di  $C$  che  $f$  fa corrispondere a  $x$ . In tal caso si scrive  $f(x) = y$ .

Di solito in matematica vengono prese in considerazione funzioni in cui il dominio e il codominio sono insiemi numerici. Ad esempio, se scegliamo come dominio e come codominio l'insieme dei numeri reali, la seguente espressione algebrica definisce una funzione  $x^2 + 3x + 2 = y$ .

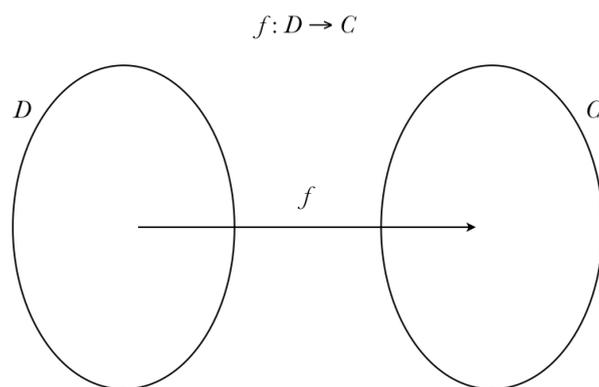


Fig. 3

Infatti, per ogni numero che associamo come argomento alla variabile  $x$ , otteniamo uno ed un solo numero come valore della variabile  $y$  (se  $x = 0$ ,  $y = 2$ ; se  $x = 1$ ,  $y = 6$ ; se  $x = 1.3$ ,  $y = 7.59$ ; e così via). Tuttavia, il concetto di funzione è molto più generale, in quanto dominio e codominio non devono necessariamente essere insiemi numerici, ma possono essere insiemi qualunque. Anche la corrispondenza può essere di natura qualsiasi<sup>3</sup>. Ad esempio, dato un insieme  $D$  di persone, si ottiene una funzione di dominio  $D$  facendo corrispondere ad ogni persona in  $D$  la sua altezza; in tal caso il codominio  $C$  è costituito da numeri decimali finiti che esprimono le misure delle altezze rispetto ad un'unità di misura (solitamente il metro). Si ottengono altre funzioni considerando come varia la temperatura corporea di una persona al trascorrere del tempo, o la quantità di un bene prodotta al variare dell'anno di produzione, e così via. Se  $D$  è l'insieme delle regioni italiane e  $C$  l'insieme delle città italiane, si ottiene una funzione  $f$  di dominio  $D$  e codominio  $C$  se si fa corrispondere a ciascuna regione il suo capoluogo ( $f(\text{Piemonte}) = \text{Torino}$ ,  $f(\text{Liguria}) = \text{Genova}$ , e così via). *Non* si ottiene una funzione di dominio  $D$  se si fanno corrispondere a ciascuna regione le sue province, poiché, in tal caso, non si associa a ciascuna regione una ed una sola città (le province del Piemonte sono otto, quelle della Liguria quattro, e così via).

Frege chiama *concetto*<sup>4</sup> il riferimento di un predicato. Nella terminologia freghiana, un concetto è una *funzione di verità*, ossia una funzione che ha per valori dei valori di verità. Consideriamo ad esempio il termine 'cane'. Si tratta del nome di

<sup>3</sup> La generalizzazione del concetto di funzione da un ambito specificatamente matematico a un ambito più generalmente logico è dovuta allo stesso Frege.

<sup>4</sup> Quando si usa la parola 'concetto' bisogna essere cauti, perché si tratta di un termine che è stato usato in molte accezioni diverse in varie discipline quali ad esempio la filosofia, la psicologia, la linguistica. Qui ci limitiamo a prendere in considerazione l'accezione di Frege.

un predicato ad un posto, ossia di una proprietà<sup>5</sup>. Il riferimento di ‘cane’ per Frege è una funzione che ha per dominio l’insieme degli oggetti di cui parla il linguaggio, e come codominio l’insieme dei valori di verità {V, F}, dove, naturalmente, V sta per vero e F per falso<sup>6</sup>.

Chiamiamo  $CANE(x)$  il concetto denotato da ‘cane’. La funzione  $CANE(x)$  è tale per cui  $CANE(x) = V$  se e soltanto se  $x$  è un cane; se invece  $x$  non è un cane,  $CANE(x) = F$ . In generale dunque il nome di una proprietà denota una funzione che discrimina tra gli oggetti che soddisfano la proprietà e quelli che non la soddisfano.

Per comprendere come può essere concepito il *sensò di un predicato* si considerino i due predicati ‘essere un poligono con (esattamente) tre lati’ e ‘essere un poligono con (esattamente) tre angoli’. Qualcosa è un poligono con tre lati se e soltanto se è un poligono con tre angoli. Quindi, nella prospettiva di Frege, ‘essere un poligono con (esattamente) tre lati’ e ‘essere un poligono con (esattamente) tre angoli’ denotano lo stesso concetto: si tratta della funzione che dà come valore il vero se e solo se prende come argomento un triangolo, e produce come valore il falso in tutti gli altri casi. Tuttavia, il modo in cui riconosciamo che qualcosa è un poligono con tre lati è diverso dal modo in cui riconosciamo che qualcosa è un poligono con tre angoli: nel primo caso contiamo i lati, nel secondo caso contiamo gli angoli. Ossia, ci troviamo di fronte a due modi diversi di presentare lo stesso concetto. (La situazione è analoga al caso di ‘stella del mattino’ e ‘stella della sera’: il riferimento è lo stesso, ma il modo con cui lo identifichiamo è diverso. La differenza consiste nel fatto che qui si tratta di nomi di proprietà anziché di termini singolari – ossia, di espressioni che denotano oggetti.) Il senso di un predicato è il modo in cui è dato il concetto. Ossia, potremmo dire, il modo in cui sono calcolati i valori della funzione di verità che costituisce il concetto.

In sintesi, possiamo riassumere con la seguente tabella la distinzione tra senso e riferimento per termini singolari, nomi di proprietà ed enunciati.

<b>Tipo di espressione</b>	<b>Senso (<i>Sinn</i>)</b>	<b>Riferimento (<i>Bedeutung</i>)</b>
Termine singolare	Modo in cui è dato l’oggetto	Oggetto
Nome di proprietà	Modo in cui è calcolata la funzione che costituisce il concetto	Concetto (funzione di verità)
Enunciato	Pensiero (modo in cui è dato il valore di verità)	Valore di verità

<sup>5</sup> Come abbiamo anticipato sopra, qui per semplicità prenderemo in considerazione solo proprietà. Tuttavia quanto diremo può facilmente essere generalizzato a predicati con un numero qualsiasi di argomenti.

<sup>6</sup> Secondo una convenzione comunemente accettata in logica e in matematica, useremo le parentesi graffe { ... } per rappresentare un insieme.

### 1.1.3 Il principio freghiano di composizionalità del significato

Una delle caratteristiche più peculiari ed importanti delle lingue naturali è che consentono di formulare un numero potenzialmente illimitato di contenuti diversi a partire da un insieme finito di elementi di partenza (gli elementi del lessico). Ciò è legato alla capacità dei parlanti di generare e di comprendere enunciati sempre nuovi. Probabilmente pochi hanno già incontrato prima d'ora l'enunciato:

(iii) Il pinguino dell'inquilino del terzo piano è un campione di poker

Tuttavia capite che cosa significa. Non sapete se è vero o falso, naturalmente (da ciò che sappiamo sui pinguini siamo a giustificati a ritenere che sia falso, ma in assoluto non è detto), ma siete in grado di comprendere qual è il contenuto che esso comunica. La ragione per cui siete in grado di comprenderlo, nonostante non l'abbiate mai visto prima, è che conoscete il significato delle parole che vi compaiono, e che conoscete la sintassi dell'italiano (sapete cioè in che modo il significato di una frase dipende dal significato delle parole che la compongono). Uno dei contributi di Frege alla filosofia del linguaggio consiste nell'aver formulato in maniera chiara un principio che spiega questi fatti – si tratta appunto del cosiddetto *principio di composizionalità del significato* – e nell'aver messo in luce alcuni problemi che ne derivano.

Il *principio di composizionalità del significato* può essere enunciato come segue:

(C) In un linguaggio, il significato di un'espressione complessa è funzione del significato delle sue parti e della sua struttura sintattica

Ossia, il significato di un'espressione complessa (cioè formata da più simboli) dipende in maniera univoca<sup>7</sup> dal significato delle espressioni che la compongono e dal modo in cui queste espressioni sono combinate fra loro. La necessità di tenere conto anche della struttura sintattica è ovvia: si considerino ad esempio i due enunciati dell'italiano 'Anna ama Giorgio' e 'Giorgio ama Anna'. Il loro significato è chiaramente diverso (infatti uno potrebbe essere vero e l'altro falso), ma sono composti dalle stesse parti. L'unica differenza è data dalla struttura sintattica (quello che in un caso è il soggetto nell'altro è il complemento oggetto, e viceversa).

Nel formulare il principio di composizionalità si parla in modo generico di significato: infatti si assume che il principio valga sia a livello di senso, sia a livello di riferimento: come il senso di un'espressione complessa è funzione del senso

<sup>7</sup> L'uso del termine *funzione* nell'enunciazione del principio di composizionalità coincide esattamente con il senso tecnico di funzione visto sopra.

delle sue parti e della sua struttura sintattica, così il riferimento di un'espressione complessa è funzione del riferimento delle sue parti e della sua struttura sintattica.

Frege stesso tuttavia si rese conto che il principio di composizionalità presenta delle eccezioni. Il seguente principio, noto come *principio di sostitutività degli identici salva veritate*, costituisce un caso particolare del principio di composizionalità:

- (S) Se in un enunciato sostituisco un'espressione con un'altra dotata dello stesso riferimento della prima, il valore di verità dell'enunciato non cambia

Consideriamo ad esempio l'enunciato (vero):

- (iv) Milano ha più di un milione di abitanti

'Milano' e 'la città natale di Alessandro Manzoni' sono due termini singolari con lo stesso riferimento. Pertanto, sostituendo 'la città natale di Alessandro Manzoni' a 'Milano' in (iv) si ottiene:

- (iv\*) La città natale di Alessandro Manzoni ha più di un milione di abitanti

che è a sua volta un enunciato vero. Che (S) sia un caso particolare di (C) è evidente da quanto segue. Consideriamo il caso particolare di (C) in cui i) non si considera un'espressione complessa qualunque ma un enunciato, e ii) non si considera il significato in generale ma il riferimento. Otterremo:

- (C\*) Il riferimento di un enunciato (ossia, il suo valore di verità) è funzione del riferimento delle sue parti e della sua struttura sintattica

Da (C\*) e dal concetto di funzione segue proprio il principio di sostitutività (S): se in un enunciato sostituisco un'espressione con un'altra che ha lo stesso riferimento, il valore di verità non può cambiare.

I problemi derivano dal fatto che il principio (S) non vale per tutti gli enunciati. Non vale ad esempio per i cosiddetti enunciati di *atteggiamento proposizionale*. I contesti di atteggiamento proposizionale sono quelli generati da verbi come 'sapere', 'credere', 'sperare', eccetera<sup>8</sup>. Si consideri ad esempio l'enunciato seguente:

- (v) Anna sa che Milano ha più di un milione di abitanti

<sup>8</sup> Verbi come 'sapere', 'credere', 'sperare', eccetera sono detti verbi di atteggiamento proposizionale in quanto esprimono un atteggiamento nei confronti di una proposizione (si sa, crede, spera che  $p$ , dove  $p$  è appunto una certa proposizione). Questa terminologia, che oggi è quella di uso corrente, è successiva a Frege (è stata introdotta infatti da Bertrand Russell). Frege chiamava *contesti indiretti* i contesti generati da credere e sapere. Per essere più precisi, oggi i contesti generati da 'sapere' vengono detti *contesti epistemici*, i contesti generati da 'credere' vengono detti *contesti doxastici*.

Sebbene ‘Milano’ e ‘la città natale di Alessandro Manzoni’ abbiano lo stesso riferimento non possiamo sostituirli *salva veritate* (cioè senza alterare il valore di verità) in (v). Infatti sostituendoli otterremmo:

(v\*) Anna sa che la città natale di Alessandro Manzoni ha più di un milione di abitanti

che non è detto abbia lo stesso valore di verità di (v) (Anna potrebbe essere ignorante in storia della letteratura, e non sapere dove è nato Manzoni). Lo stesso problema si pone ad esempio con:

(vi) Anna sa che 2 è un numero pari

I termini ‘2’ e ‘radice cubica di 8’ hanno lo stesso riferimento (denotano lo stesso numero) ma non possiamo sostituirli *salva veritate* in (vi) perché non è detto che Anna sappia che la radice cubica di 8 è pari (Anna potrebbe essere una scolara delle elementari che sa cos’è un numero pari ma non ha ancora la più pallida idea di cosa sia una radice cubica). Dunque, nell’ambito di un contesto di atteggiamento proposizionale (in questo esempio, nell’ambito di un contesto di atteggiamento epistemico) non posso sostituire *salva veritate* espressioni equireferenziali.

Il fatto che il principio di sostitutività *salva veritate* (*S*) in certi casi fallisca è grave perché, come abbiamo visto, (*S*) segue dal principio di composizionalità (*C*), per cui, se fallisce (*S*), allora fallisce anche (*C*), e abbiamo già discusso dell’importanza (e della validità intuitiva) del principio di composizionalità (*C*). Frege cercò quindi di individuare una soluzione che permettesse di salvare (*S*) generalizzandolo. La soluzione proposta da Frege è la seguente. Si consideri un enunciato in cui compare una parola tra virgolette, come ad esempio:

(vii) ‘Milano’ ha sei lettere

Qui è evidente perché non posso sostituire *salva veritate* ‘Milano’ con ‘la città natale di Alessandro Manzoni’ (oppure con un altro termine singolare che abbia lo stesso riferimento): in (vii) l’espressione ‘Milano’ non denota la città di Milano (ossia, il suo usuale riferimento), ma denota la parola stessa (il segno). In (vii) le virgolette servono proprio a indicare il fatto che la parola ‘Milano’ viene usata per parlare di se stessa. Secondo Frege, in (v) e in (vi) accade qualcosa di simile. In (v) o in (vi) non stiamo parlando della città di Milano o delle proprietà del numero 2, ma di ciò che Anna conosce, cioè dei pensieri veri che Anna intrattiene. Quindi, prosegue Frege, in un contesto del tipo ‘Tizio sa che ...’ o ‘Tizio crede che ...’, le parole che stanno al posto dei puntini non denotano quello che è il loro riferimento usuale, ma denotano il loro senso. In altri termini, all’interno dei contesti epistemici avverrebbe una sorta di “slittamento semantico”: le parole hanno come riferimento quello che di solito è il loro senso. Per questa ragione, all’interno dei contesti

epistemici si possono sostituire *salva veritate* solo espressioni dotate dello stesso senso. Siccome, ad esempio, ‘Milano’ e ‘la città natale di Alessandro Manzoni’ hanno presumibilmente sensi diversi, (v\*) non può essere ottenuta *salva veritate* da (v). Vedremo tuttavia nel seguito che la soluzione proposta da Frege presenta delle difficoltà.

Per ora constatiamo che le eccezioni al principio (S) non sono limitate agli enunciati di atteggiamento proposizionale. Esse riguardano molti altri tipi di enunciati del linguaggio naturale. Un esempio è costituito da enunciati in cui compaiono espressioni *temporali* (tipo ‘il giorno tale’, ‘nell’anno tale’, ‘in passato’, ‘in futuro’, eccetera). Si consideri il seguente enunciato (vero):

(viii) Nel 1867 Firenze era la capitale d’Italia

I termini singolari (in particolare, le descrizioni definite) ‘la capitale d’Italia’ e ‘la più grande città bagnata dal Tevere’ hanno lo stesso riferimento: designano entrambi la città di Roma. Ma evidentemente non li posso sostituire *salva veritate* in (viii) perché otterrei l’enunciato palesemente falso:

(viii\*) Nel 1867 Firenze era la più grande città bagnata dal Tevere

Lo stesso problema si pone con il connettivo temporale ‘poi’. Consideriamo l’enunciato vero:

(ix) I Francesi furono sconfitti a Waterloo, poi Napoleone fu esiliato a S. Elena

e sostituiamo all’enunciato vero ‘Napoleone fu esiliato a S. Elena’ quello, altrettanto vero, ‘Luigi XVI fu ghigliottinato’; otterremo l’enunciato:

(ix\*) I Francesi furono sconfitti a Waterloo, poi Luigi XVI fu ghigliottinato che è falso.

Problemi simili sorgono con quelli che i filosofi chiamano *contesti modali aleatici*, ossia quei contesti linguistici generati da espressioni come ‘è necessario che ...’ (o ‘necessariamente ...’) oppure ‘è possibile che ...’. In questa accezione<sup>9</sup> dire che qualcosa è necessario significa che le cose stanno così e che, per qualunque circostanza alternativa, non possono stare altrimenti. Dire invece che un certo

<sup>9</sup> Nel linguaggio ordinario, espressioni come ‘necessario’ e ‘possibile’ sono ambigue e vengono usate talvolta in un’accezione probabilistica (ad esempio: ‘Prendiamo l’ombrello perché è possibile che piova’). Talvolta vengono usate invece in un’accezione deontica (ad esempio: ‘È necessario rispettare i limiti di velocità’, ‘Qui è possibile parcheggiare’). Esistono inoltre accezioni epistemiche, volte ad esprimere casi di certezza assoluta (ad esempio: ‘L’ho visto io stesso! Non è possibile che le cose non stiano così’). Qui invece ci interessa la sola accezione aleatica, che comporta una lettura metafisica degli operatori modali.

fatto è possibile significa dire che potrebbe verificarsi (o, in altri termini, che non è necessario che non si verifichi).

Consideriamo l'enunciato:

(x) Necessariamente, 5 è dispari

Esso è presumibilmente vero. Infatti che 5 sia dispari non è un fatto contingente: non riusciamo a figurarci una situazione in cui 5 è pari. Ma '5' e 'il numero delle province della Campania' sono termini che hanno lo stesso riferimento. Tuttavia, se proviamo a sostituirli in (x) otteniamo:

(x\*) Necessariamente, il numero delle province della Campania è dispari

che invece è falso: il numero delle province della Campania potrebbe non essere dispari; basterebbe che venisse creata una nuova provincia o che si cancellasse una di quelle esistenti.

Analoga è la situazione con i contesti aletici di possibilità. Questo è un enunciato vero:

(xi) È possibile che il presidente della repubblica italiana sia una donna

La descrizione definita 'il presidente della repubblica italiana' ha lo stesso riferimento di 'Sergio Mattarella'. Ma se sostituiamo questi due termini equireferenziali in (xi) otteniamo:

(xi\*) È possibile che Sergio Mattarella sia una donna

della cui verità è lecito dubitare.

Avrete intuito da questi esempi che i problemi con il principio di sostitutività, e quindi anche con quello di composizionalità, nascono proprio con quel tipo di espressioni che nell'introduzione abbiamo visto essere non vero-funzionali. E d'altra parte basta rifletterci un attimo per capire che la non vero-funzionalità coincide proprio con un caso particolare del fallimento del principio di sostitutività (quello in cui si sostituiscono interi enunciati).

## 1.2 *Senso e condizioni di verità*

Si deve a Ludwig Wittgenstein la prima chiara formulazione di una nozione che avrà un posto centrale negli sviluppi successivi della semantica logica e filosofica. Si tratta dell'identificazione del senso di un enunciato con le sue *condizioni di verità*. In questo paragrafo introdurremo questa nozione, e analizzeremo il suo rapporto con la nozione di senso di un enunciato secondo Frege e con il problema dei contesti non vero-funzionali. Wittgenstein nel *Tractatus* (1922) sostiene che capire

il senso di un enunciato equivale a capire *a quali condizioni esso è vero*<sup>10</sup>. Una prima ovvia considerazione è che conoscere le condizioni di verità di un enunciato non coincide con il conoscere il suo valore di verità. Conoscere le condizioni di verità di un enunciato vuol dire sapere come *dovrebbe* essere il mondo se l'enunciato fosse vero. Ci sono innumerevoli enunciati che noi comprendiamo, anche se non sappiamo se sono veri o falsi. Consideriamo ad esempio l'enunciato 'Nella tasca destra della giacca di Sergio Mattarella ci sono due monete da 10 centesimi'. Noi non sappiamo se è vero o falso (per saperlo dovremmo andare a frugare nelle tasche del Presidente). Ma siamo in grado di comprenderne il contenuto: sappiamo come dovrebbero stare le cose affinché l'enunciato sia vero.

Vediamo un altro esempio. Immaginiamo un semplice "universo" formato da pochi oggetti: un gatto, un cagnolino, un parallelepipedo grande, un cubo più piccolo e un telefono. Questi oggetti possono essere combinati in vari modi, come nelle vignette della Fig. 4.

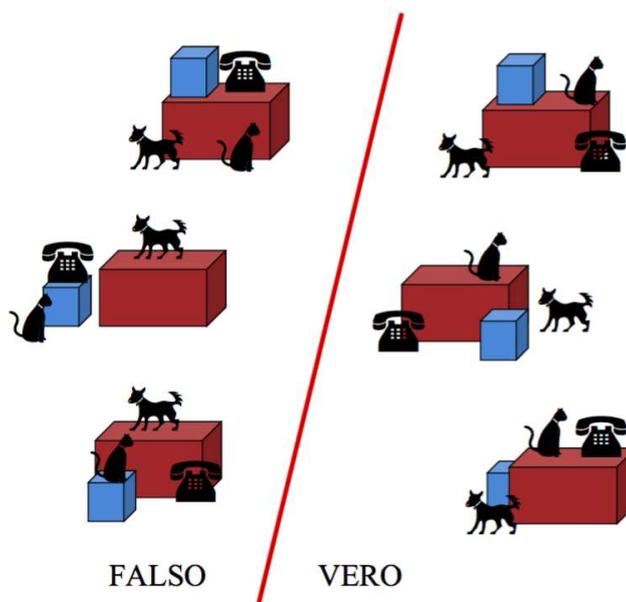


Fig. 4

Consideriamo ora l'enunciato:

(xii) Il gatto è sul parallelepipedo grande

Alcuni dei possibili stati del nostro "universo" lo rendono vero (ad esempio quelli sulla destra della figura), altri lo rendono falso (ad esempio quelli sulla sinistra).

<sup>10</sup> Per la precisione, Wittgenstein afferma che comprendere una proposizione vuol dire comprendere cosa accade se essa è vera (T 4.0241).

Capire il senso di (xii) significa saper distinguere gli stati dell'universo che lo rendono vero da quelli che lo rendono falso. Ossia, metaforicamente, significa saper tracciare una sorta di linea ideale che separa i primi dai secondi (la linea diagonale nella figura).

Ovviamente, enunciati diversi corrispondono a modi diversi di “tracciare la linea”. Ad esempio, nel caso dell'enunciato ‘Il cubo è sul parallelepipedo grande’ la linea dovrebbe separare i due stati dell'universo collocati in alto (che rendono vero l'enunciato) da quelli sottostanti (che lo rendono falso). In generale, dato un enunciato  $p$ , possiamo dire che conoscere il senso di  $p$  (inteso come le sue condizioni di verità) significa saper discriminare tra gli stati che rendono vero  $p$  e quelli che lo rendono falso. Uno stato  $S_i$  è uno stato di cose che può essere più o meno differente dal mondo attuale (ovviamente i possibili stati del mondo sono innumerevoli, forse infiniti; tra tutti questi stati del mondo ce ne sarà uno in particolare che coincide con il mondo attuale, cioè con il mondo come di fatto è). Anche qui, metaforicamente, possiamo identificare il significato di  $p$  con la linea ideale che separa gli stati del mondo che rendono vero  $p$  da quelli che lo rendono falso, come in Fig. 5. Questa, nella sostanza, è l'idea di senso di un enunciato inteso come condizioni di verità.

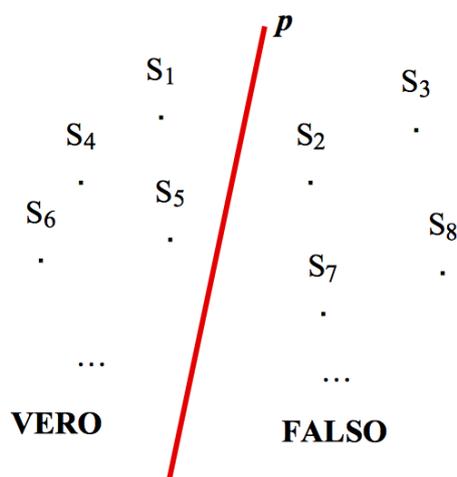


Fig. 5

Consideriamo ora una tautologia, ad esempio ‘Piove oppure non piove’, in simboli  $p \vee \neg p$ . Una tautologia è un enunciato che ha la proprietà di risultare sempre vero. Quindi tutti gli stati del mondo  $S_i$  rendono vero  $p \vee \neg p$ . Ossia, se concepiamo il senso dell'enunciato  $p \vee \neg p$  come una linea ideale che separa gli stati del mondo che lo rendono vero da quelli che lo rendono falso, tutti gli stati del mondo si troveranno dalla stessa parte, ossia dalla parte del vero, come in Fig. 6.

Ora, il punto è che *tutte* le tautologie si comportano in questo modo. Ossia, tutte le tautologie hanno le stesse condizioni di verità (sono sempre vere), per cui,

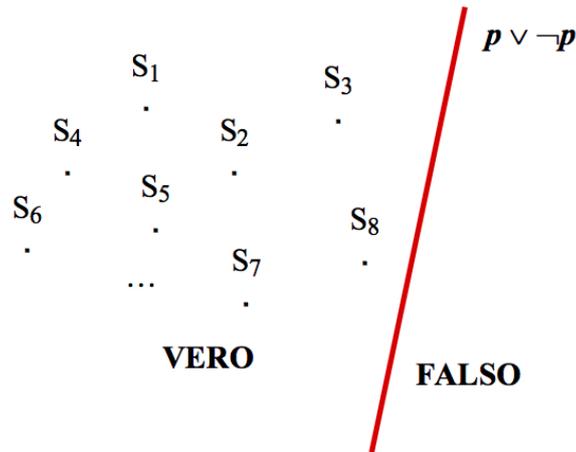


Fig. 6

se identifichiamo il senso con le condizioni di verità, dobbiamo concludere che tutte le tautologie hanno lo stesso senso. Simmetricamente, anche tutte le contraddizioni hanno le stesse condizioni di verità: sono false in tutti gli stati del mondo. Si noti inoltre che se due enunciati  $p$  e  $q$  sono logicamente equivalenti, allora  $p$  e  $q$  hanno le stesse condizioni di verità: ogni volta che è vero uno è vero anche l'altro, e viceversa. Per cui, di nuovo, se identifichiamo il senso con le condizioni di verità, allora  $p$  e  $q$  avranno lo stesso senso.

Una situazione analoga a quella delle tautologie si verifica con gli enunciati della matematica. Consideriamo ad esempio i tre enunciati seguenti dell'aritmetica:

- (xiii)  $2+2=4$
- (xiv) Ogni numero naturale ha una e una sola scomposizione in fattori primi
- (xv) Per ogni numero naturale  $n > 2$ , non esistono tre numeri naturali  $x, y$  e  $z$  tali che  $x^n + y^n = z^n$

Si tratta di tre enunciati aritmetici veri: (xiii) è una verità ovvia che ogni essere umano impara già da bambino (anzi, secondo alcuni potrebbe far parte del patrimonio di competenze matematiche innate dell'uomo); (xiv) è chiamato *Teorema fondamentale dell'aritmetica*; si tratta di un risultato che viene appreso da chiunque studi matematica nelle scuole superiori; (xv) infine è l'enunciato del cosiddetto *Ultimo teorema di Fermat*, un risultato la cui dimostrazione si è rivelata difficilissima, e ha richiesto lo sforzo congiunto di generazioni di matematici: la congettura fu formulata da Pierre de Fermat nel XVII secolo, ma una dimostrazione completa fu ottenuta solo nel 1994.

Il punto è che qualunque enunciato vero dell'aritmetica è vero a prescindere da come stanno le cose nel mondo. Quindi gli enunciati (xiii)-(xv) sono veri in tutte le situazioni  $S_i$  concepibili (come accade alle tautologie). Per cui (xiii)-(xv)

hanno tutti le stesse condizioni di verità. Pertanto, se identifichiamo il senso con le condizioni di verità, (xiii)-(xv) hanno tutti lo stesso senso, e a livello di senso non siamo in grado di rendere conto delle differenze che sussistono tra questi enunciati.

Possiamo ora domandarci: la nozione freghiana di *pensiero* (cioè di senso di un enunciato) coincide con la nozione di senso di un enunciato come condizioni di verità? Ci sono passi nell'opera di Frege in cui effettivamente sembra che egli identifichi i sensi degli enunciati con le loro condizioni di verità. Ma per altri aspetti, come vedremo, sembra che i sensi di Frege non possano essere ridotti alle condizioni di verità.

Per chiarirci le idee, torniamo al problema dei contesti non vero-funzionali, quelli cioè in cui fallisce il principio (*S*) di sostitutività: non si possono sostituire *salva veritate* espressioni con lo stesso riferimento. Ricordiamo che per risolvere il problema Frege aveva ipotizzato che in tali contesti le espressioni denotassero il loro senso ordinario, per cui sarebbe possibile sostituire *salva veritate* espressioni con lo stesso senso. Questa proposta funziona se identifichiamo i pensieri con le condizioni di verità?

Cominciamo dai contesti modali aletici e consideriamo di nuovo l'enunciato:

(x) Necessariamente, 5 è dispari

Ora, gli enunciati '5 è dispari' e 'il numero delle province della Campania è dispari' hanno lo stesso riferimento (sono entrambi veri), ma hanno condizioni di verità diverse: il primo è un enunciato dell'aritmetica che presumibilmente è reso vero da ogni possibile stato del mondo, mentre è facile concepire degli stati del mondo che rendono falso il secondo. Quindi, se assumiamo che nei contesti modali aletici siano sostituibili *salva veritate* enunciati con lo stesso senso, e se assumiamo inoltre che il senso coincida con le condizioni di verità, la possibilità di operare la sostituzione in (x) è bloccata. Considerazioni analoghe valgono per i contesti aletici di possibilità. Sembra quindi che in questo caso l'identificazione del senso con le condizioni di verità svolga il ruolo desiderato.

Anche nei contesti di tipo temporale le cose sembrano funzionare. Consideriamo di nuovo:

(ix) I Francesi furono sconfitti a Waterloo, poi Napoleone fu esiliato a S. Elena

Anche qui gli enunciati 'Napoleone fu esiliato a S. Elena' e 'Luigi XVI fu ghigliottinato' hanno lo stesso riferimento (sono tutti e due veri), ma hanno condizioni di verità diverse: è facile immaginare delle situazioni in cui l'uno è vero ma l'altro è falso e viceversa. Quindi, anche in questo caso viene bloccata la possibilità di una sostituzione *salva veritate*.

Diversa è la situazione con gli enunciati di atteggiamento proposizionale. Consideriamo i contesti di tipo epistemico (ma analoghe considerazioni varrebbero anche per i contesti doxastici, e per altri atteggiamenti proposizionali), e iniziamo considerando l'enunciato:

(xvi) Pietro sa che Roma è la capitale d'Italia

(a) 'Roma è la capitale d'Italia' e (b) 'Roma è la città natale di Giuseppe Gioachino Belli' hanno lo stesso riferimento (sono entrambi veri). Tuttavia essi hanno condizioni di verità diverse: sono concepibili stati del mondo in cui (a) è vero e (b) è falso o viceversa. Roma potrebbe non essere la capitale d'Italia: non lo è stata prima del 1870, se le cose fossero andate diversamente potrebbe non esserlo nemmeno oggi. D'altra parte, anche il Belli potrebbe essere nato da qualche altra parte. Quindi, se identifichiamo pensieri e condizioni di verità, (a) e (b) esprimono pensieri diversi, per cui, in base alla proposta di Frege, non possono essere sostituiti *salva veritate* in (xvi). Fin qui dunque sembra che tutto vada per il meglio.

Ma consideriamo l'enunciato:

(xvii) Pietro sa che  $2+2=4$

Abbiamo visto che ' $2 + 2 = 4$ ' e gli enunciati (xiv) e (xv) visti sopra hanno *le stesse condizioni di verità*. Quindi, se i pensieri coincidono con le condizioni di verità, allora (xiii), (xiv) e (xv) esprimono lo stesso pensiero, e dovremmo poter sostituire *salva veritate* (xiv) e (xv) in (xvii). Ma questo non funziona: supponiamo che Pietro sia uno scolaro delle elementari. Presumibilmente egli *sa* che  $2 + 2$  fa 4, ma non ha idea di che cosa sia la scomposizione in fattori primi di un numero. Per non parlare dell'ultimo teorema di Fermat. (Anzi, prima del 1994 nessuno poteva dire di *sapere* che (xv); al massimo poteva congetturarlo, perché (xv) non era stato ancora dimostrato.)

Quindi il significato di un enunciato inteso come le sue condizioni di verità non coincide completamente con la nozione di pensiero di Frege. Dunque il problema del significato degli enunciati rimane aperto. Vedremo che la nozione di significato come condizioni di verità risolve molti problemi, ma non tutti. In particolare, come abbiamo visto, non risolve fino in fondo il problema dei contesti di atteggiamento proposizionale. Per risolvere il problema della sostitutività *salva veritate* nei contesti di atteggiamento proposizionale la concezione del significato come condizioni di verità è troppo "grossolana". È necessaria una nozione di significato di grana più fine, che ad esempio assegni significati diversi ad enunciati come (xiii), (xiv) e (xv), i quali hanno condizioni di verità identiche.

### 1.3 Intensioni e mondi possibili

Lasciando da parte per ora il problema dei contesti di atteggiamento proposizionale, vedremo in questo paragrafo come a partire dalla nozione di condizioni di verità di un enunciato si possa elaborare la nozione di *intensione*, e sviluppare una *semantica intensionale*. L'opposizione intensione/estensione risale al medioevo; tradizionalmente, l'estensione di un concetto veniva identificata con l'insieme degli oggetti che cadono sotto quel concetto (ad es., l'estensione del concetto SCAPOLO è l'insieme degli scapoli), mentre l'intensione di un concetto veniva intesa come l'insieme dei tratti che un oggetto deve soddisfare per cadere sotto quel concetto (l'intensione di SCAPOLO ad esempio sarà un insieme di tratti quali *essere umano, maschio, adulto, non sposato*). Nella logica e nella semantica moderna questa coppia di concetti viene rielaborata in maniera radicale, soprattutto per quel che riguarda l'intensione (mentre la nozione di estensione rimane molto simile a quella tradizionale).

Fu Rudolph Carnap (1947)<sup>11</sup> a introdurre i concetti di intensione e di estensione

<sup>11</sup> Citiamo Carnap (1946, 1947) perché egli fu tra i primi a sviluppare una semantica per un linguaggio che contiene gli operatori 'è necessario che' e 'è possibile che' che ha forti somiglianze con il tipo di semantica che discuteremo nei prossimi capitoli. È bene osservare tuttavia che Carnap intese tali operatori in modo assai diverso da come oggi tendiamo a intenderli. Carnap intese la necessità come necessità logica o concettuale (e la possibilità come consistenza logica o concettuale), mentre oggi si tende a interpretare la necessità come necessità metafisica. Nella semantica di Carnap, un enunciato è valutato come vero o falso entro una descrizione di stato. Una descrizione di stato è un insieme di enunciati tale che, per ogni enunciato atomico  $\alpha$ , essa contiene  $\alpha$  o la sua negazione  $\neg\alpha$  (ma non entrambi) e nessun enunciato di altro tipo. Un enunciato atomico o la sua negazione sono veri in una descrizione di stato se e solo se vi appartengono. Gli enunciati complessi sono valutati sulla base di regole ricorsive. Per esempio una congiunzione  $\alpha \wedge \beta$  è vera in una descrizione di stato se e solo se sia  $\alpha$  che  $\beta$  sono veri in quella descrizione di stato. Gli operatori modali 'è necessario che' e 'è possibile che' funzionano come quantificatori che quantificano sulle descrizioni di stato. 'è necessario che  $\alpha$ ' è vero in una descrizione di stato se e solo se  $\alpha$  è vero in *tutte* le descrizioni di stato, e 'è possibile che  $\alpha$ ' è vero in una descrizione di stato se e solo se  $\alpha$  è vero in *almeno una* descrizione di stato. La nozione di *vero in ogni descrizione di stato* è l'esplicazione che Carnap propose della necessità logica o concettuale. Detto in modo informale, essa cattura l'idea che un enunciato vero in tutte le descrizioni di stato – o L-vero – è vero in virtù delle sole regole semantiche del linguaggio, indipendentemente dai fatti extralinguistici. In effetti, gli enunciati veri in tutte le descrizioni di stato sono le sole verità logiche in senso stretto o, al più, le verità concettuali se la costruzione delle descrizioni di stato è sottoposta a vincoli di postulati di significato. Per spiegare la quantificazione entro i contesti modali (e rispondere alle obiezioni sollevate Quine, che discuteremo nel capitolo V) Carnap adottò l'idea che il valore di una variabile è una funzione che assegna a ciascuna descrizione di stato una costante individuale. Un enunciato del tipo  $\exists x\alpha$  è vero in una descrizione di stato D se e solo se esiste un assegnamento  $a$  di costanti individuali tale che in D è vera l'esemplificazione sostituzionale  $\alpha[t/x]$ , ottenuta sostituendo a ogni occorrenza libera di  $x$  in  $\alpha$  la costante individuale  $t$  che  $a$  assegna a D. Un enunciato del tipo  $\forall x\alpha$  è vero in una descrizione di stato D se e solo se, per ogni assegnamento  $a$  di costanti individuali, l'esemplificazione sostituzionale  $\alpha[t/x]$  è vera in D, dove  $t$  è la costante che l'assegnamento  $a$  assegna a D. Si può così spiegare la quantificazione

nella logica e nella semantica moderne. Carnap riteneva infatti che la distinzione senso/riferimento di Frege non fosse sufficientemente chiara, soprattutto perché Frege non specifica con sufficiente chiarezza le condizioni di identità tra i sensi (non specifica cioè con sufficiente chiarezza quando due espressioni hanno lo stesso senso – in sostanza si tratta del problema che abbiamo incontrato in precedenza). Per definire la moderna nozione di intensione si fa riferimento a possibili situazioni alternative del mondo, che, riprendendo una terminologia che risale a Leibniz, vengono chiamate *mondi possibili*. Un mondo possibile non è altro che una situazione che può differire in maniera più o meno grande dal come le cose stanno di fatto. Un esempio di mondo possibile potrebbe essere una situazione nella quale tutto è esattamente come nel mondo attuale, salvo il fatto che il presidente della repubblica italiana è Toni Servillo. Un altro esempio di mondo possibile potrebbe essere una situazione in cui l'*Homo sapiens* non si è mai evoluto. E così via. In ogni caso, deve essere rispettato il vincolo per cui i mondi possibili devono essere coerenti (cioè non contraddittori: in nessun mondo possibile potrà accadere che un enunciato  $p$  risulti contemporaneamente vero e falso) e completi (in ciascun mondo possibile ogni enunciato  $p$  deve risultare o vero o falso). Da questo segue che in tutti i mondi possibili vale la logica classica.

Ora, prima di introdurre la nozione di intensione, vediamo innanzi tutto come si caratterizzano le *estensioni* per le diverse categorie sintattiche. Anche qui, come abbiamo fatto quando abbiamo introdotto la distinzione senso/riferimento di Frege, limitiamoci a tre categorie sintattiche: termini singolari, predicati a un argomento (ossia, nomi di proprietà) ed enunciati. L'estensione di termini singolari, nomi di proprietà e enunciati è specificata dalla tabella seguente:

<b>Tipo di espressione</b>	<b>Estensione</b>
Termine singolare	Oggetto
Predicato	Insieme di oggetti
Enunciato	Valore di verità

Come si può constatare, l'unica differenza rispetto al riferimento di Frege è data dai predicati: l'estensione di un predicato  $P$  è data da un insieme di oggetti; si tratta

entro in contesti modali: 'esiste un  $x$  tale che è logicamente necessario (L-vero) che  $x = \text{Fosforo}$ ' è vero in  $D$  perché esiste un assegnamento  $a$  di costanti individuali tale che il valore che  $a$  associa a  $D$  è la costante singolare 'Fosforo' e l'enunciato 'è logicamente necessario che Fosforo = Fosforo' è vero in  $D$ , poiché l'enunciato 'Fosforo = Fosforo' è vero in tutte le descrizioni di stato. (Per Carnap gli enunciati della forma  $t_i = t_i$  sono veri in tutte le descrizioni di stato, mentre gli enunciati della forma  $t_i = t_j$  sono falsi in tutte le descrizioni di stato.) In quanto segue le tesi di Carnap sono esposte da un punto di vista contemporaneo; non si tratta quindi di una ricostruzione storicamente dettagliata delle posizioni carnapiane.

dell'insieme degli oggetti che soddisfano la proprietà espressa da  $P$ . Ad esempio, l'estensione di 'rosso' sarà l'insieme degli oggetti che sono rossi, e così via. Per Frege invece la *Bedeutung* di un predicato era una funzione di verità (vedi sopra). Nonostante le apparenze, tuttavia, la soluzione freghiana nella sostanza non è molto diversa da quella esposta qui. Gli insiemi infatti si possono caratterizzare in modo del tutto equivalente nei termini di funzioni, le cosiddette *funzioni caratteristiche*. Vediamo di cosa si tratta con un esempio: l'insieme  $G$  dei gatti si può caratterizzare in maniera equivalente sia come  $\{x \mid x \text{ è un gatto}\}$  (ossia: l'insieme degli  $x$  tali che  $x$  è un gatto), sia tramite la sua funzione caratteristica, che indicheremo con  $f_G$  e che dà come valore 1 se e soltanto se il suo argomento  $x$  è un gatto (e 0 altrimenti):

$$f_G(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ appartiene all'insieme } G \text{ dei gatti} \\ 0, & \text{se } x \text{ non appartiene all'insieme } G \text{ dei gatti} \end{cases}$$

In generale, la funzione caratteristica  $f_I$  di un insieme  $I$  è una funzione che discrimina gli elementi di  $I$  da qualunque altro oggetto. Di fatto i concetti freghiani si comportano esattamente come funzioni caratteristiche: dato un predicato  $P$ , il concetto corrispondente  $f_P$  è la funzione caratteristica dell'insieme degli oggetti che sono dei  $P$  (unica differenza, del tutto trascurabile, è che i concetti di Frege assumono come valori il vero e il falso mentre di solito le funzioni caratteristiche assumono come valori 1 e 0). Pertanto, considerare come estensione di un nome di proprietà un insieme o un concetto freghiano non costituisce di fatto una grossa differenza<sup>12</sup>. Nella pratica della semantica formale si preferisce oggi la prima alternativa, perché è tecnicamente più comoda. Quindi, la nozione di estensione non si discosta in modo radicale dalla *Bedeutung* freghiana.

Passiamo ora alle intensioni, e cominciamo dalle *intensioni degli enunciati*. Nella sostanza, per definire l'intensione di un enunciato si recupera l'idea di Wittgenstein che abbiamo esposto nel § 1.2: l'intensione di un enunciato viene fatta coincidere con le sue condizioni di verità. Abbiamo visto che capire le condizioni di verità di un enunciato  $p$  può essere visto come la capacità di distinguere tra le situazioni che rendono vero  $p$  da quelle che lo rendono falso, ossia di tracciare una linea ideale che separa le prime dalle seconde; a questo punto possiamo riformulare lo stesso concetto utilizzando la nozione di mondo possibile: capire l'intensione di un enunciato  $p$  (ossia, le sue condizioni di verità) si può interpretare come la capacità di distinguere tra i mondi possibili che lo rendono vero da quelli che lo rendono falso.

<sup>12</sup> Frege non la pensava in questi termini, ma su questo punto le sue posizioni non hanno avuto seguito.

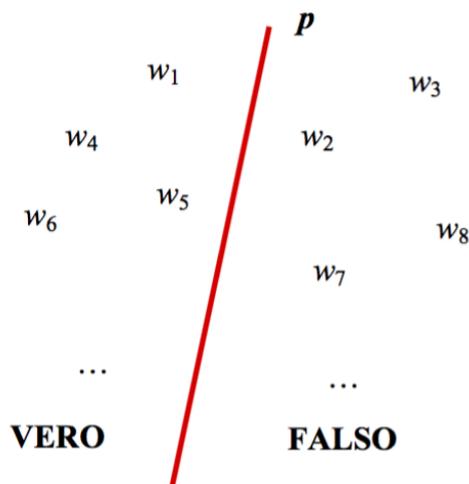


Fig. 7

A questo punto possiamo fare un passo ulteriore: possiamo vedere l'intensione di  $p$  come una funzione  $Int_p$  che ha per dominio l'insieme  $W$  di tutti i mondi possibili e per codominio l'insieme  $\{V, F\}$  dei valori di verità. Dato un certo mondo  $w$  che appartiene a  $W$ , si avrà che  $Int_p(w) = V$  se  $p$  è vera nel mondo  $w$ , e si avrà che  $Int_p(w) = F$  se  $p$  è falsa nel mondo  $w$ . Ossia,  $Int_p$  discrimina i mondi in cui  $p$  è vera da quelli in cui  $p$  è falsa<sup>13</sup>. In particolare, nel caso dell'esempio di Fig. 7, avremo:

$Int_p(w_1) = V$	$Int_p(w_2) = F$
$Int_p(w_4) = V$	$Int_p(w_3) = F$
$Int_p(w_5) = V$	$Int_p(w_7) = F$
$Int_p(w_6) = V$	$Int_p(w_8) = F$
...	...

Questa formulazione in termini di funzioni ha il vantaggio di poter essere facilmente generalizzata alle altre categorie sintattiche. Nel caso degli enunciati, l'intensione è una funzione da mondi possibili a valori di verità, e i valori di verità costituiscono le estensioni degli enunciati. Possiamo quindi generalizzare la nozione di intensione nel modo seguente: data una certa espressione  $e$  (termine singolare, nome di proprietà o enunciato), la sua intensione  $Int_e$  è una funzione da

<sup>13</sup> Un modo ancora equivalente di concepire l'intensione di un enunciato è vederla come un insieme di mondi possibili: l'intensione di un enunciato  $p$  è l'insieme dei mondi in cui  $p$  è vero. Per ragioni tecniche può essere comodo concepire le intensioni degli enunciati talvolta come funzioni, talvolta come insiemi.

mondi possibili a estensioni del tipo appropriato. Se si tratta di un termine singolare, l'intensione sarà una funzione da mondi possibili a oggetti<sup>14</sup>, se si tratta di un predicato, l'intensione sarà una funzione da mondi possibili a insiemi. Possiamo quindi riassumere in una tabella le intensioni e le estensioni per i diversi tipi sintattici presi in considerazione:

Tipo di espressione	Intensione	Estensione
Termine singolare	Funzione da mondi possibili a oggetti	Oggetto
Nome di proprietà	Funzione da mondi possibili a insiemi di oggetti	Insieme di oggetti
Enunciato	Funzione da mondi possibili a valori di verità	Valore di verità

Nel caso di un termine singolare  $t$ , la sua intensione sarà una funzione  $Int_t$  che specifica come varia l'estensione di  $t$  al variare del mondo possibile: dato un mondo  $w$ ,  $Int_t(w)$  sarà l'oggetto che costituisce l'estensione di  $t$  nel mondo  $w$ . Nel caso di un nome di proprietà  $P$ , la sua intensione sarà una funzione  $Int_P$  che specifica come varia l'estensione di  $P$  al variare del mondo possibile:  $Int_P(w)$  sarà l'insieme che costituisce l'estensione di  $P$  nel mondo  $w$ .

A partire dai concetti di intensione ed estensione, possiamo distinguere tra contesti linguistici estensionali e intensionali. I *contesti estensionali* sono quelli in cui vale il principio di sostitutività ( $S$ ) nella sua formulazione standard. La logica che formalizza questi contesti viene detta *logica estensionale* (la logica estensionale coincide con le logiche proposizionale e dei predicati standard). I contesti intensionali sono invece quelli in cui, in generale, risultano sostituibili *salva veritate* espressioni con la stessa intensione. È il caso dei contesti modali aletici e deontici e dei contesti temporali. Si parla di *logiche intensionali* per le logiche che formalizzano questi contesti.

Torniamo all'esempio:

- (x) Necessariamente, 5 è dispari

<sup>14</sup> Si noti che, se si accetta la teoria del riferimento diretto e si considerano i nomi propri come designatori rigidi, allora l'intensione di un nome proprio si comporta come una funzione costante che associa al nome lo stesso oggetto in ogni mondo possibile. Vedremo nel capitolo V e nel capitolo VII che, se distinguiamo i nomi propri in senso stretto dalle descrizioni definite sulla base delle diverse funzioni semantiche che svolgono, i nomi propri ma non le descrizioni definite sono designatori rigidi, e cioè si riferiscono allo stesso individuo in ogni mondo possibile. Come designatori rigidi, dunque, i nomi propri hanno una intensione costante. È vero che esistono delle descrizioni definite rigide, per esempio 'il successore di 3', che denotano lo stesso oggetto in tutti i mondi possibili. Ma il fatto che le descrizioni di questo tipo denotino lo stesso oggetto in tutti i mondi possibili non è spiegato sulla base delle loro proprietà semantiche. È un fatto matematico e non semantico che il numero 4 è il successore del numero 3 in tutti i mondi possibili.

I termini '5' e 'il numero delle province della Campania' hanno la stessa estensione (denotano entrambi il numero cinque) ma hanno intensioni diverse: mentre '5' denota il numero cinque in tutti i mondi possibili, 'il numero delle province della Campania' può denotare numeri diversi al variare del mondo possibile. Ciò blocca la possibilità di sostituirli *salva veritate* nel contesto intensionale generato dall'espressione 'necessariamente'. Invece i termini '5' e '3 + 2' hanno la stessa intensione in quanto denotano lo stesso oggetto (il numero 5) in tutti i mondi possibili. Quindi si possono sostituire *salva veritate* in (x).

Infine, esistono contesti in cui fallisce anche la sostituzione *salva veritate* di espressioni con la stessa intensione. Si tratta, come è facile intuire, dei contesti epistemici e doxastici, e, in generale, dei contesti di atteggiamento proposizionale. Per questa ragione, essi sono stati detti talvolta *contesti iperintensionali* (Cresswell 1975).

# Indice del volume

Introduzione	5
I. Da Frege ai mondi possibili	10
1.1 L'eredità di Frege: senso, riferimento e composizionalità del significato, p. 10 - 1.2 Senso e condizioni di verità, p. 21 - 1.3 Intensioni e mondi possibili, p. 27	
II. Logica modale proposizionale	33
2.1 Mondi possibili e semantica di Kripke, p. 33 - 2.2 Logica modale minimale: il sistema <b>K</b> , p. 37 - 2.3 <b>R</b> riflessiva: il sistema <b>T</b> , p. 43 - 2.4 <b>R</b> riflessiva e transitiva: il sistema <b>S4</b> , p. 45 - 2.5 <b>R</b> riflessiva e simmetrica: il sistema <b>B</b> , p. 47 - 2.6 Se <b>R</b> è un'equivalenza: il sistema <b>S5</b> , p. 48 - 2.7 Conclusioni, p. 52	
III. Logiche deontiche, temporali e condizionali	53
3.1 Introduzione, p. 53 - 3.2 Obbligatorio e permesso: logiche deontiche, p. 53 - 3.3 Mondi possibili e logiche del tempo, p. 59 - 3.4 Condizionali e mondi possibili, p. 66	
IV. Logiche modali epistemiche	77
4.1 Introduzione, p. 77 - 4.2 Logiche del sapere, p. 78 - 4.3 Logiche del credere, p. 81 - 4.4 Logiche multi-modali, p. 83 - 4.5 Logiche del sapere multi-agente, p. 85 - 4.6 Il problema dell'onniscienza logica, p. 87 - 4.7 Conclusioni, p. 91	
V. Logica modale quantificata del primo ordine	92
5.1 Introduzione, p. 92 - 5.2 Il linguaggio della logica modale quantificata del primo ordine, p. 93 - 5.3 La semantica della logica modale, p. 98 - 5.4 Gli assiomi e la formula Barcan (FB), p. 102 - 5.5 I modelli con i domini variabili, p. 104 - 5.6 Dai domini variabili ai domini costanti, p. 109 - 5.7 La distinzione <i>de dicto/de re</i> , p. 111	
VI. L'intelligibilità della logica modale quantificata	117
6.1 Introduzione, p. 117 - 6.2 Estensioni e intensioni, p. 118 - 6.3 Regole di inferenza, p. 122 - 6.4 Quine e gli operatori non-estensionali, p. 128 - 6.5 Quine e il numero dei pianeti, p. 131	

VII. Mondi possibili: semantica e metafisica	137
7.1 Introduzione, p. 137 - 7.2 Semantica pura e semantica dei mondi possibili, p. 138 - 7.3 Il problema dei <i>possibilia</i> , p. 143 - 7.4 Concretismo, p. 148 - 7.5 Astrazionismo, p. 154 - 7.6 Necessitismo, p. 158 - 7.7 Analisi e riduzione delle modalità, p. 162	
Appendice 1. Logica proposizionale non modale	170
A1.1 La sintassi di <b>LP</b> : linguaggio e apparato deduttivo, p. 170	
Appendice 2. Sistemi assiomatici proposizionali	178
A2.1 Logiche modali aletiche, p. 178 - A2.2 Logiche deontiche, p. 178 - A2.3 Logiche modali epistemiche, p. 178	
Appendice 3. Paradossi epistemici	179
A3.1 Il paradosso di Fitch, p. 179 - A3.2 Il paradosso del conoscitore, p. 182	
Appendice 4. Correttezza e completezza	184
A4.1 Correttezza dei sistemi con FB, p. 184 - A4.2 Completezza dei sistemi con FB, p. 189	
Approfondimenti bibliografici	196
Riferimenti bibliografici	197