EPISTEME NS, Vol. 21, Nº 1, 2001, pp.15–29

FRANKLIN GALINDO

AXIOMATIZACIÓN DE LA SILOGÍSTICA EXTENDIDA

Resumen: El objetivo principal de este trabajo es presentar el sistema lógico que resulta de extender, de una manera natural, a la silogística con la lógica proposicional, y demostrar que tal extensión se puede caracterizar como un sistema axiomático.

Palabras claves: completitud, Corcoran, Łukasiewicz

AXIOMATIZATION OF THE EXTENDED SYLLOGISTICS

Abstract: The main objective of this work is to present the logical system that results from extending, in a natural way, to the syllogistic with the propositional logic, and to demonstrate that such an extension can be characterized as an axiomatic system.

Keywords: completeness, Corcoran, Łukasiewicz

(0) Introducción

El objetivo principal de este trabajo es presentar el sistema lógico que resulta de extender, de una manera natural, a la silogística con la lógica proposicional, y demostrar que tal extensión se puede caracterizar como un sistema axiomático. Los axiomas que se usan son los propuestos por Jan Łukasiewicz en el libro *La silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la lógica formal moderna*[1]. En tal texto el autor deduce todas las leyes silogísticas conocidas a partir de sus axiomas y dicho resultado es clave para este trabajo. También son fundamentales para este trabajo las definiciones y técnicas empleadas en el artículo *Completeness of an ancient logic*[2] de John Corcoran. En tal artículo el autor demuestra que la silogística se puede caracterizar como un sistema de reglas de inferencia, y en él destacan las definiciones semánticas de *interpretación de un lenguaje silogístico* y de *satisfacción de una sentencia silogística;* así como también el empleo de la técnica del *conjunto máximal consistente de Henkin,* con la cual el autor construye un modelo para un conjunto máximal consistente de sentencias silogísticas usando las variables de términos universales.

El trabajo se divide en tres partes. En la primera parte se define a la silogística extendida, exponiendo su sintaxis y su semántica. En la segunda parte se describe el sistema axiomático de Jan Łukasiewicz, y en la tercera y última parte se demuestra que tal sistema axiomático tiene las propiedades de corrección y completitud, es decir, que dicho sistema cumple con (corrección) $\Sigma \vdash_{Ł} \sigma \Rightarrow \Sigma \models \sigma$ y (completitud) $\Sigma \models \sigma \Rightarrow \Sigma \vdash_{Ł} \sigma$, donde Σ es un conjunto de sentencias de la silogística extendida, σ es una sentencia de la silogística extendida, $\Sigma \vdash_{Ł} \sigma$ significa que σ se obtiene a partir de Σ usando los axiomas y reglas de inferencia del

1 Łukasiewicz, J., *La silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la lógica formal moderna,* Madrid, Tecnos, 1977.

2 Corcoran, J., «Completeness of an ancient logic», *The Journal of Symbolic Logic,* vol. 37, 1972.

sistema axiomático una cantidad finita de veces y $\Sigma \models \sigma$ significa que σ es una consecuencia lógica de Σ. La prueba de la propiedad de completitud se realiza usando la técnica del conjunto máximal consistente para aprovechar los resultados que John Corcoran obtuvo en la Silogística.

(1) La Silogística extendida.

(1.1) Sintaxis de la silogística extendida: El conjunto S de las *fórmulas bien formadas* (fbf) de la silogística extendida se construye a partir de los símbolos primitivos A, E, I, O, $\sim$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$,), (,u_1, u_2, u_3, . . . Donde los símbolos A, E, I y O son los correspondientes a los esquemas categóricos de forma típica Todo _ es _, Ningún _ es _, Algún _ es _ y Algún _ no es _.Los símbolos $\sim$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ son los usuales para las conectivas proposicionales. Los símbolos u_1, u_2, u_3, . . . son una cantidad infinito numerable de variables para términos universales. Y los símbolos), (son los paréntesis como símbolos auxiliares La regla inductiva de construcción tiene tres cláusulas: (i) Cualquier símbolo primitivo del conjunto { A,E, I, O} seguido de dos variables de términos universales es una fbf . (ii) Si α y β son fbf entonces $\sim\alpha$, $(\alpha\rightarrow\beta)$, $(\alpha\wedge\beta)$, $(\alpha\vee\beta)$ y $(\alpha\leftrightarrow\beta)$ son también fbf. (iii) Sólo son fbf las filas de símbolos que se puedan construir usando un número finito de veces las cláusulas (i) y (ii)[3]. Por ejemplo las expresiones Au_1u_2, Ou_7u_2, Iu_9u_9 y $Eu_{10}u_{10}$ son fbf por la cláusula (i) y la expresión $(Amb \wedge Aam) \rightarrow \sim Oab$ es una fbf por la cláusulas (i) y (ii).

(1.2) Semántica de la silogística extendida: Una

3 Notar que en esta definición las proposiciones categóricas de forma típica son las fbf atómicas.

interpretación de S es una función que asigna a cada variable de término universal un conjunto no vacío[4]. Sea i una interpretación de S y sea α una f bf de S. Se define la relación i *satisface* a α (i sat α) por inducción[5] : (1) Si α= Aab entonces i sat Aab si y sólo si $i(a)\subseteq i(b)$. (2) Si α=Eab entonces i sat Esp si y sólo si $i(a)\cap i(b)=\varnothing$. (3) Si α=Iab entonces i sat Iab si y sólo si $i(a)\cap i(b)\neq\varnothing$. (4) Si α=Oab entonces i sat Oab si y sólo si existe un x tal que $x\in i(a)$ y $x\notin i(b)$. (5) Si $\alpha= \sim\beta$ entonces i sat $\sim\beta$ si y sólo si no i sat β. (6) Si $\alpha= \beta\rightarrow\gamma$ entonces i sat $\beta\rightarrow\gamma$ si y sólo si i no sat β o i sat γ. (7) Si $\alpha=\beta\wedge\gamma$ entonces i sat $\beta\wedge\gamma$ si y sólo si i sat β y i sat γ. (8) Si $\alpha=\beta\vee\gamma$ entonces i sat $\beta\vee\gamma$ si y sólo si i sat β o i sat γ. (9) Si $\alpha=\beta\leftrightarrow\gamma$ entonces i sat $\beta\leftrightarrow\gamma$ si y sólo si i sat a ambas o i no sat a ambas. Sea $\Sigma\subseteq$ S y sea i una interpretación de S. i *satisface* a Σ (i sat Σ) si y sólo si para toda $\sigma\in\Sigma$: i sat σ. Sea $\Sigma\subseteq$ S y $\sigma\in$ S. σ es una *consecuencia lógica* de Σ ($\Sigma\models\sigma$) si y sólo si toda interpretación i de S que satisface a Σ también satisface a σ. Sea α una fbf de S. α es *válida* si y sólo si $\varnothing\models\alpha$. Una *instancia de una tautología* es una fbf de S que se obtiene de una tautología de la lógica proposicional sustituyendo uniformemente cada letra proposicional por una fbf de S. Por ejemplo, $((\sim Aab \wedge Iab)\rightarrow Eba)\rightarrow(\sim Aab\rightarrow(Iab\rightarrow Eba))$ es una instancia de la tautología $((p\wedge q)\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow(q\rightarrow r))$. Toda instancia de una tautología es una fbf válida. En efecto, se puede probar usando inducción que cualquier fbf γ del lenguaje de la lógica proposicional tiene la siguiente propiedad: i sat γ_o si y sólo si $\underline{T_i}(\gamma)$=V, donde i es una interpretación de S, γ_o es una fbf de S que se obtiene sustituyendo uniformemente las letras proposicionales $p_1,\ldots, p_n$ de γ por las fbf $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ de S y $\underline{T_i}$ es una valuación[6] determinada por la asignación de valores de verdad[7] T_i que se define a partir de las letras proposicionales de γ de la siguiente manera: Para cada $j, 1\leq j \leq n$, $T_i(p_j)$=V si y sólo si i sat α_j.

4 Cada conjunto no vacío representaría una "substancia segunda" Aristotélica.

5 Estas reglas coinciden con la interpretación usual que tenemos de las proposiciones categóricas de forma típica.

(2) El sistema axiomático Ł para la silogística extendida[8]

(I) *Axiomas de Ł*

A.1 Todas las instancias de tautología son axiomas.
Si a, b y m son variables de términos universales, entonces también son axiomas todas las fbf que tengan la siguiente forma:
A.2 Iaa (Identidad para I)
A.3 Aaa (Identidad para A)
A.4 (Amb $\wedge$ Aam)$\rightarrow$Aab (Barbara)
A.5 (Amb$\wedge$Ima)$\rightarrow$Iab (Datisi)

6 Una *valuación* es una función χ de dominio las fbf del lenguaje de la lógica proposicional y rango {V,F}, tal que las siguientes cláusulas son satisfechas: (1) $\chi(\sim\alpha)=V\Leftrightarrow\chi(\alpha)=F$ y (2) $\chi(\alpha\rightarrow\beta)=V\Leftrightarrow \chi(\alpha)=F$ o $\chi(\beta)=V$.

7 Una *asignación de valores de verdad* es una función de dominio las letras proposicionales y rango {V, F}.

8 El sistema axiomático que se expone tiene algunas diferencias no esenciales con el de Łukasiewicz. Por ejemplo, Łukasiewicz no enuncia el axioma 1 como aquí se hace. La idea de enunciarlo así se ha tomado de la manera como Enderton, H., [*A Mathematical Introduction to Logic*, New York, Academic Press,1972] presenta los axiomas para la lógica de primer orden. Otra diferencia es que el sistema de Łukasiewicz tiene una regla de inferencia adicional: Sustitución de variables de términos universales.

(II) Reglas de inferencia de Ł: Regla 1[9]: Regla de sustitución para las lógicamente equivalentes Eab, ~Iab y Oab, ~Aab. De α se puede inferir α^*, donde α^*,es la fbf que se obtiene de α sustituyendo Eab(Oab) por ~Iab(~Aab) – o a la inversa - en todas o alguna de sus ocurrencias. *Regla 2: Modus Ponens.* De α y $\alpha \rightarrow \beta$ se puede inferir β.

(III) La relación de deducibilidad de Ł : Sea $\Sigma \subseteq S$ y $\sigma \in S$. σ se *deduce* de Σ en Ł($\Sigma \vdash_{\text{Ł}} \sigma$) si y sólo si existe una sucesión de fbf de S, $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$, tal que $\gamma_n = \sigma$ y para cada i, $1 \leq i \leq n$, o $\gamma_i \in \Sigma$ o γ_i es un axioma de Ł o γ_i es el resultado de aplicar la regla de inferencia 1 o la regla de inferencia 2 a fbfs anteriores. Cuando $\varnothing \vdash_{\text{Ł}} \alpha$ se dice que α es un *teorema* de Ł y se denota $\vdash_{\text{Ł}} \alpha$. Algunos ejemplos de teoremas de Ł son:

(i) $\vdash_{\text{Ł}}$Iab→Iba. (Conversión simple para I)
Prueba:
(1) ((Aaa∧Iab)→Iba) →(Aaa→(Iab→Iba) A.1.Instancia de ((p∧q)→r) →(p→(q→r))
(2) (Aaa∧Iab)→Iba A.5.
(3) Aaa→(Iab→Iba) Regla 2; 1,2.

9 Con el axioma 1 se define implícitamente a las conectivas, con los axiomas A2, A3, A4 y A5 se definen implícitamente a A e I y con la Regla 1 se define implícitamente a E y O. Otra manera, quizás más elegante, de presentar este sistema axiomático es tomando como símbolos primitivos solamente a: $\rightarrow$, $\neg$, A, I, variable de términos universales y paréntesis. Los axiomas serían A_1 (restringido a $\rightarrow$, $\neg$), A_2, A_3, A_4, A_5. La regla de inferencia sería una sola: *modus ponens.* Y los símbolos restantes $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, O y E, se introducirían por definición así: $\alpha\wedge\beta \Leftrightarrow \neg(\alpha\rightarrow\neg\beta)$, $\alpha\vee\beta \Leftrightarrow \neg\alpha\rightarrow\beta$, $\alpha\leftrightarrow\beta \Leftrightarrow (\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha)$, Oxz⇔ ¬Axz y Exz⇔¬Ixz.

(4) Aaa A.3
(5) Iab→Iba Regla 2; 3,4.

(ii) $\vdash_{\text{Ł}}$(Amb∧Iam)→Iab (Darii)
Prueba:
(1) ((Amb∧Ima)→Iab)→((Iam→Ima)→((Amb∧Iam)→Iab)). A1.Inst de (p∧q)→r)→((s→q)→ ((p∧s)→r))
(2) (Amb∧Ima)→Iab) A.5
(3) (Iam→Ima)→((Amb∧Iam)→Iab) Regla 2;1,2
(4) Iam→Ima. Teorema (i): Teniendo presente que esta versión se obtiene sustituyendo b por m en toda su prueba.
(5) (Amb∧Iam)→Iab Regla 2; 3,4.

(iii) $\vdash_{\text{Ł}}$ (Emb∧Iam)→Oab (Ferio)
Prueba:
(1) ((Aab∧Iam)→Imb)→((~Imb∧Iam)→~Aab). A.1. Inst de ((p ∧ q) →r) → ((¬r ∧ q) → ¬p)
(2) (Aab∧Iam)→Imb A.5.
(3) (~Imb∧Iam)→~Aab Regla 2; 1,2
(4) (Emb∧Iam)→~Aab Regla 1 en 3
(5) (Emb∧Iam)→Oab Regla 1 en 4.

En general, todas las leyes silogísticas conocidas son teoremas de Ł. En el texto *La silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la lógica formal moderna* se pueden encontrar todas estas pruebas en notación polaca y en el texto de Otto Bird *Syllogistic And its Extensions*[10] se pueden encontrar en una notación parecida a la usada en este trabajo.

10 Łukasiewicz, J., *Syllogistic and its Extens*, New Jersey, Prentice-Hall, 1964.

(3) *Propiedad de corrección y completitud del sistema axiomático Ł*

Teorema de corrección: Sea $\Sigma\cup\{\sigma\}\subseteq S$. Si $\Sigma\vdash_{\L}\sigma$ entonces $\Sigma\models\sigma$.

Demostración: Como $\Sigma\vdash_{\L}\sigma$, entonces existe una sucesión $\gamma_1,\ldots,\gamma_n=\sigma$ tal que para cada j, $1\leq j\geq\leq n$, o γ_j esta en Σ o γ_j es un axioma de Ł o γ_j se obtiene de proposiciones anteriores usando la regla de inferencia1 o la regla de inferencia 2. Sea i una interpretación de S tal que i sat Σ. Entonces, por inducción en n se obtiene que i sat γ_j , para cada j,$1\leq j\geq\leq n$; pues todos los axiomas de Ł son fbfs válidas y las reglas de inferencia tienen la propiedad de corrección (es decir, si una interpretación satisface la(s) premisa(s) de la Regla1(2), entonces, también satisface su conclusión de la Regla 1(2)). ■

Teorema de completitud: Sea $\Sigma\cup\{\sigma\}\subseteq S$. Si $\Sigma\models\sigma$ entonces $\Sigma\vdash_{\L}\sigma$.

Demostración: La demostración se realiza a partir de dos resultados previos, el Lema A y el Lema B.

Definición: Sea $\Delta\subseteq S$. Δ es *inconsistente* si y sólo si existe una fbf δ de S tal que $\Delta\vdash_{\L}\delta$ y $\Delta\vdash_{\L}\sim\delta$. Δ es *consistente* si no es inconsistente.

Lema A : Sea $\Gamma\cup\{\gamma\}\subseteq S$. $\Gamma\cup\{\gamma\}$es inconsistente si y sólo si $\Gamma\vdash_{\L}\sim\gamma$.

Demostración del Lema A: La dirección $\Leftarrow$ del lema A es inmediata. La dirección $\Rightarrow$ requiere del Teorema de la deducción para Ł : $\Gamma\subseteq S$ y $\alpha,\beta\in S\Rightarrow\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash_{\L}\beta\Leftrightarrow\Gamma\vdash_{\L}\alpha\rightarrow\beta$. En efecto, si $\Gamma\cup\{\gamma\}\vdash_{\L}\varphi$ y $\Gamma\cup\{\gamma\}\vdash_{\L}\neg\varphi$, entonces, $\Gamma\vdash_{\L}\gamma\rightarrow\varphi$ y $\Gamma\vdash_{\L}\gamma\rightarrow\neg\varphi$, por el teorema de la deducción. De modo que usando el axioma 1 $(\gamma\rightarrow\varphi)\rightarrow((\gamma\rightarrow\neg\varphi)\rightarrow\neg\gamma)$, se obtiene $\Gamma\vdash_{\L}\sim\gamma$. La demostración del Teorema de la deducción para Ł es estándar : La dirección $\Leftarrow$ se hace usando la regla de inferencia 2 y la dirección $\Rightarrow$ se hace aplicando inducción en la deducción de β a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$, $\gamma_1,\ldots,\gamma_n=\beta$. Se debe verificar que para cualquier j, $1\leq j\leq n$, $\Gamma\vdash_{\L}\alpha\rightarrow\gamma_j$. Para los detalles de la prueba del teorema de la deducción puede verse el texto de Elliott Mendelson *Introduction to Mathematical Logic*[11] páginas 32 y 33. ■

Lema B : Sea $\Gamma\subseteq S$. Si Γ es consistente, entonces existe una interpretación i de S tal que i sat Γ.

Demostración del lema B: Sea $\Gamma\subseteq S$ tal que Γ es consistente. La demostración se realiza a partir de dos resultados previos, la Proposición 1 y la Proposición 2.

Definición: Sea $\Delta\subseteq S$. Δ es *máximal consistente* si y sólo si Δ es consistente y Δ no esta incluido en sentido estricto en un subconjunto de S que sea consistente.

---

11 Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, New York, D. Van Nostrand Company, 1964.

Proposición 1: Existe una extensión Γ^* de Γ, tal que Γ^* es máximal consistente y para cada $\alpha,\beta \in S$ y cada a, b variables de términos universales, Γ^* cumple con las siguientes cláusulas:

(a) $\alpha \in \Gamma^*$ si y sólo si $\Gamma^* \vdash_{L} \alpha$.

(b) $\sim\alpha \in \Gamma^*$ si y sólo si $\alpha \notin \Gamma^*$.

(c) Al menos una de las fbf Iab y Oab está en Γ^*.

(d) A lo sumo una de las fbf Aab y Eab está en Γ^*.

(e) $\alpha\wedge\beta \in \Gamma^*$ si y sólo si $\alpha \in \Gamma^*$ y $\beta \in \Gamma^*$.

(f) $\alpha\vee\beta \in \Gamma^*$ si y sólo si $\alpha \in \Gamma^*$ o $\beta \in \Gamma^*$.

(g) $\alpha\rightarrow\beta \in \Gamma^*$ si y sólo si $\alpha \notin \Gamma^*$ o $\beta \in \Gamma^*$.

(h) $\alpha\leftrightarrow\beta \in \Gamma^*$ si y sólo si $\alpha,\beta \in \Gamma^*$ o $\alpha,\beta \notin \Gamma^*$.

Demostración de la proposición 1: La idea es listar todas las fbf de S $\gamma_1,\ldots\gamma_n, \gamma_{n+1},\ldots$ y definir inductivamente una sucesión de conjuntos consistentes mediante la siguiente regla: $\Gamma_0 = \Gamma$ y $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup\{\gamma_n\}$, si $\Gamma_n \cup\{\gamma_n\}$ es consistente o $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$, si $\Gamma_n \cup\{\gamma_n\}$ es inconsistente. Sea $\Gamma^* = \cup_{n\in\omega} \Gamma_n$. Como cada Γ_n es consistente, Γ^* es máximal consistente. También Γ^* cumple con cada una de las cláusulas de la proposición 1. Para los detalles de la prueba de la prosición1 puede verse las páginas 116, 124 y 125 del texto de María Manzano *Teoría de Modelos*[12], donde se realiza la prueba de una proposición análoga para la lógica de primer orden. ■

Ahora con Γ^* se construye a partir de las variables de términos universales una interpretación que satisface a Γ^* (y por lo tanto satisface también a Γ). Sea Ω el conjunto de todas las variables de términos universales y $P(\Omega)$ el conjunto de todos los subconjuntos de Ω. Considérese el conjunto $M \subseteq P(\Omega)$ que resulta de sacar de $P(\Omega)$ los siguientes elementos: (1) Por cada fbf Aab que este en Γ^* todos los subconjuntos de Ω que tengan a "a", pero no tengan a "b". (2) Por cada fbf Eab que este en Γ^* todos los subconjuntos de Ω que tengan a "a" y " b". i es la función que asigna a cada x de Ω un elemento de P(M) según la siguiente regla: $i(x)=\{\Delta\subseteq \Omega \mid \Delta\in M \wedge x\in\Delta\}$. Para probar que i es una interpretación de S y que i satisface todas las sentencias de la forma A, O, I y E que están en Γ^* es suficiente con la siguiente proposición:

[12] Manzano, M., *Teoría de Modelos*, Madrid, Alianza Editorial, 1988.

Proposición 2: Si a, b $\in\Omega$ y M es el conjunto que se definió anteriormente, entonces

(I) $i(a)\neq\varnothing$.

(II) $Aab\in\Gamma^*$ si y sólo si M no tiene elementos que tengan a "a" y no a "b".

(III) $Eab\in\Gamma^*$ si y sólo si M no tiene elementos que tengan a "a" y a "b".

(IV) $Iab\in\Gamma^*$ si y sólo si M tiene un elemento que tiene a "a" y tiene a "b".

(V) $Oab\in\Gamma^*$ si y sólo si M tiene un elemento que tiene a "a" y no tiene "b".

Demostración de la proposición 2: La cláusula (I) se demuestra usando la misma idea que se usará para probar la dirección $\Leftarrow$ de las cláusulas (II) y (III). Una prueba de ella puede encontrarse en el artículo *Completeness of an ancient logic* de John Corcoran. La dirección $\Rightarrow$ de las cláusulas (II) y (III) es directa por la definición de M. Las cláusulas (IV) y (V) son inmediatas a partir de las cláusulas (II), (III) y de la proposición1.

(II) $\Leftarrow$ Si $a=b$, entonces la prueba concluye ya que $Aaa \in \Gamma^*$ para cada $a \in \Omega$. Supóngase que $a \neq b$. Por la hipótesis se tiene que $\{a\} \notin M$. Entonces $\{a\}$ fue sacado de $P(\Omega)$ por alguna fbf del tipo E o A. Pero como una fbf del tipo E no puede sacar conjuntos unitarios de $P(\Omega)$ concluimos que existe un $y' \in \Omega$ tal que $y' \neq a$ y $Aay' \in \Gamma^*$ y así se pudo sacar al conjunto $\{a\}$ de $P(\Omega)$. Sea $Y = \{y \in \Omega : Aay \in \Gamma^*\}$. Como $Aaa \in \Gamma^*$, entonces $a \in Y$. Si se prueba que b esta en Y, la demostración concluye. Supóngase que $b \notin Y$. Entonces $Y \neq \Omega$ y además (por la hipótesis) $Y \notin M$. Por lo tanto el conjunto Y fue sacado de $P(\Omega)$ por alguna fbf del tipo A o E que esta en Γ^*. Considérese los dos casos posibles: *Caso1*[13]: $Awz \in \Gamma^*$ donde $w \in Y$ y $z \notin Y$. *Caso2*[14]: $Ewz \in \Gamma^*$ donde $w, z \in Y$. De cada uno de estos casos se obtendrá una contradicción para luego concluir que $b \in Y$. *Caso1*: Como w esta en Y , $Aaw \in \Gamma^*$. De modo que por la proposición 1, $\Gamma^* \vdash_{\text{Ł}} Aaw$. Pero por hipótesis $Awz \in \Gamma^*$,entonces, también por la proposición1 se tiene que $\Gamma^* \vdash_{\text{Ł}} Awz$. De manera que usando la regla de inferencia 2, el axioma Barbara y el axioma 1 $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$, se tiene que $\Gamma^* \vdash_{\text{Ł}} Aaz$. Y otra vez por la proposición1 se obtiene que $Aaz \in \Gamma^*$. En consecuencia, $z \in Y$, contradiciéndose el supuesto de que $z \notin Y$. *Caso2*: Como w y $z \in Y$ entonces se tiene que Aaw y $Aaz \in \Gamma^*$. De modo que por la proposición 1 se

13 Notar que si $w=z$, entonces la fbf $Awz \in \Gamma^*$ no saca a nadie de $P(\Omega)$, por lo tanto hay que asumir que $w \neq z$.

14 Notar que para toda $x \in \Omega$, $Axx \in \Gamma^*$, entonces por la proposición 1(d), para cada $x \in \Omega$, $Exx \notin \Gamma^*$. De modo que hay que asumir que $w \neq z$.

tiene que $\Gamma^* \vdash_{\text{Ł}} Aaw$ .Entonces, como por hipótesis, $\Gamma^* \vdash_{\text{Ł}} Ewz$, usando la regla de inferencia 2, el axioma 1 $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$, y el teorema Celarent, se tiene que $\Gamma^* \vdash_{\text{Ł}} Eaz$. En consecuencia, $Eaz \in \Gamma^*$; contradiciéndose la cláusula (d) de la proposición 1, pues $Aaz \in \Gamma^*$.

(III) $\Leftarrow$ .Si $a=b$, entonces $i(a)=i(b)=\varnothing$ y se contradice la cláusula (I). Por consiguiente, $a \neq b$. Por la hipótesis se tiene que el conjunto $\{a,b\} \notin M$. Entonces $\{a,b\}$ fue sacado de $P(\Omega)$ por alguna fórmula del tipo A o E, siendo los dos casos posibles los siguientes: *Caso1*: $Aay \in \Gamma^*$ donde $y \neq b$ o $Aby \in \Gamma^*$ donde $y \neq a$. *Caso2*: $Eab \in \Gamma^*$ o $Eba \in \Gamma^*$. Si el caso 2 ocurre se tiene lo que se quiere demostrar . Si el caso 1 ocurre, se define el conjunto no vacío $Y = \{y \in \Omega$: $Aay \in \Gamma^*$, $y \neq b$ o $Aby \in \Gamma^*, y \neq a\}$. Como $\{a,b\} \subseteq Y$ el conjunto $Y \notin M$, por la hipótesis. $Y = \Omega$ o $Y \neq \Omega$. Si $Y = \Omega$, entonces $Eab \in \Gamma^*$. En efecto, como este conjunto no puede ser sacado de $P(\Omega)$ por una f.b.f de tipo A, ya que este tipo de f.b.f nunca pueden sacar a Ω, entonces existen s, $p \in \Omega$ tal que $Esp \in \Gamma^*$ y Esp saca a Y de Γ^*. Como s, $p \in Y$ se tiene que ($Aas \in \Gamma^*$, $s \neq b$ o $Abs \in \Gamma^*$, $s \neq a$) y ($Aap \in \Gamma^*$, $p \neq b$ o $Abp \in \Gamma^*$, $p \neq a$). Entonces hay que considerar cuatro posibilidades:

(1) $Esp \in \Gamma^*$ y ($Aas \in \Gamma^*$, $s \neq b$) y ($Aap \in \Gamma^*$, $p \neq b$)
(2) $Esp \in \Gamma^*$ y ($Aas \in \Gamma^*$, $s \neq b$) y ($Abp \in \Gamma^*$, $p \neq a$)
(3) $Esp \in \Gamma^*$ y ($Abs \in \Gamma^*$, $s \neq a$) y ($Aap \in \Gamma^*$, $p \neq b$)
(4) $Esp \in \Gamma^*$ y ($Abs \in \Gamma^*$, $s \neq a$) y ($Abp \in \Gamma^*$, $p \neq a$)

Si (1) ocurre entonces usando la proposición1, la regla de inferencia 2, el teorema Celarent y el axioma 1 $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$, se tiene que $\Gamma^* \vdash_{\text{Ł}} Eap$. Lo cual contradice la proposición1, pues $\Gamma^{*}\vdash_{L}$ Aap. Si (2) ocurre entonces usando lo mismo que en el caso anterior más el teorema de conversión simple para la universal negativa, se tiene que Eab $\in\Gamma^{*}$. Con un procedimiento análogo a (2) en (3) se obtiene que Eab $\in\Gamma^{*}$. Si (4) ocurre entonces por un procedimiento parecido a (2) se obtiene que Ebb $\in\Gamma^{*}$, lo cual es una contradicción. Entonces, resumiendo, si $Y=\Omega$ sólo pueden ocurrir las posibilidades (2) y (3), y en ambas se cumple que Eab$\in\Gamma^{*}$. La opción $Y\neq\Omega$ no puede ocurrir. En efecto, este conjunto puede ser sacado de $P(\Omega)$ por una f.b.f del tipo A o E. Si la fbf es del tipo E se repite el caso $Y=\Omega$. Supóngase que existen s, p$\in\Omega$ tal que Asp$\in\Gamma^{*}$ donde s$\in$ Y y p$\notin$ Y. Asp es una f.b.f. que saca a Y de $P(\Omega)$.Como s$\in$ Y, entonces (Aas $\in\Gamma^{*}$, $s\neq b$) o (Abs $\in\Gamma^{*}$, $s\neq a$). De modo que se tiene dos posibilidades: (1) Asp$\in\Gamma^{*}$ y Aas $\in\Gamma^{*}$; donde s$\in$ Y, p$\notin$ Y, $s\neq b$. (2) Asp$\in\Gamma^{*}$ y Abs $\in\Gamma^{*}$; donde s$\in$ Y , p$\notin$ Y, $s\neq a$. Si (1) ocurre entonces usando la proposición 1, el axioma 1 $p\rightarrow(q\rightarrow(p\wedge q))$, y el axioma de Bárbara se tiene que Aap $\in\Gamma^{*}$. Como $p\neq b$, p$\in$ Y, contradiciéndose el supuesto de que p$\notin$ Y. Si (2) ocurre, entonces operando de manera análoga al caso anterior se tiene que Abp $\in\Gamma^{*}$. Como $p\neq a$, p$\in$ Y, contradiciéndose el supuesto de que p$\notin$ Y. En conclusión, si ocurre el caso 1 se tiene que Eab$\in\Gamma^{*}$. Con esto termina la prueba de la proposición 2. ■

Con la proposición 2 se tiene que la función i es una interpretación de S y que para cada fbf $\varphi\in S$ de la forma Aab, Eab, Iab y Oab: i sat $\varphi \Leftrightarrow \varphi\in\Gamma^{*}$. De modo que para terminar la prueba del lema B sólo falta probar que i sat $\varphi \Leftrightarrow \varphi\in\Gamma^{*}$ para las fbf de la forma

$\sim\alpha$, $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\vee\beta$, $\alpha\rightarrow\beta$ y $\alpha\leftrightarrow\beta$; pero esta prueba es inmediata usando la proposición1 e inducción en el número de conectivas de las fbf. De manera que la prueba del Lema B termina. ■

Con el lema A y el Lema B la prueba del teorema de completitud es inmediata, esto se puede apreciar usando reducción al absurdo. ■

Escuela de Filosofía
Universidad Central de Venezuela