MIXBA'AL Rev. Met. de Mat.
Nº 1, Vol. I, Junio 2010. 23 – 40

Constructibilidad relativizada y el Axioma de Elección

Franklin C. Galindo Carlos A. Di Prisco

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar en un solo cuerpo tres maneras de relativizar (o generalizar) el concepto de conjunto constructible de Gödel que no suelen aparecer juntas en la literatura especializada y que son importantes en la Teoría de Conjuntos, por ejemplo para resolver problemas de consistencia o independencia. Presentamos algunos modelos resultantes de las diferentes formas de relativizar el concepto de constructibilidad, sus propiedades básicas y algunas formas débiles del Axioma de Elección válidas o no válidas en ellas.

Palabras clave: Constructibilidad, Axioma de Elección, Forcing.

Clasificación de la AMS: Primary: 03E45, Secondary: 03E25, 03E35

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar en un solo cuerpo tres maneras de relativizar (o generalizar) el concepto de conjunto constructible de Gödel que no suelen aparecer juntas en la literatura especializada y que son importantes en la Teoría de Conjuntos, por ejemplo para resolver problemas de consistencia o independencia. Presentamos los modelos resultantes de las diferentes formas de relativizar el concepto de constructibilidad, sus propiedades básicas y algunas formas débiles del Axioma de Elección válidas o no válidas en ellas. El orden de la exposición es el siguiente: En la sección 2 presentamos algunos conceptos preliminares y la clase de los conjuntos constructibles de Gödel (L), la cual es un modelo transitivo de ZFC[1] más la Hipótesis Generalizada del Continuo. En la sección 3, definimos para cada conjunto

[1] ZFC la Teoría Axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel y el Axioma de Elección. ZF es ZFC sin el Axioma de Elección

A, un modelo transitivo $L(A)$ de ZF. Tal modelo permite construir, con la ayuda del forcing de Cohen el Modelo de Feferman, un modelo transitivo de ZF que no satisface el Axioma de Elección y tal que A no pertenece al mismo. En la sección 4 describimos, para cada conjunto A, otro modelo transitivo $L(A)$ de ZF. Dicho modelo permite construir, con la ayuda del forcing de Cohen, al Modelo Básico de Cohen, un modelo transitivo de ZF que no satisface el Axioma de Elección y que contiene a A como elemento. También este $L(A)$ permite construir, con la ayuda del forcing de Levy (el Colapso de Levy) y la hipótesis "existe un cardinal inaccesible", al Modelo de Solovay, un modelo transitivo de ZF más el Principio de Elección Dependiente, donde vale que cualquier conjunto de reales es medible según Lebesgue (o Lebesgue medible), tiene la propiedad de Baire y cada subconjunto de reales no numerable contiene un subconjunto perfecto. En la sección 5 describimos, para cada conjunto A, al modelo $L[A]$ de ZFC. Finalizamos (sección 6) mencionando algunos problemas abiertos de la Teoría de Conjuntos relacionados con el tema.

2. La clase de los conjuntos constructibles de Gödel (L)

ZFC está constituida por los siguientes axiomas:

1. Axioma de Extensionalidad: Si X y Y son dos conjuntos que tienen los mismos elementos, entonces ellos son iguales.

2. Axioma de pares: Si X y Y son dos conjuntos, entonces existe un conjunto $Y = \{X, Y\}$, cuyos elementos son exactamente X y Y.

3. Axioma de comprensión: Si $P(X)$ es una propiedad bien definida, entonces para cualquier conjunto X existe un conjunto $Y = \{Z \in X : P(Z)\}$.

4. Axioma de la unión: Si X es un conjunto, entonces existe un conjunto $Y = \bigcup X$, la unión de todos los elementos de X.

5. Axioma del conjunto potencia: Para todo conjunto X, existe un conjunto $Y = P(X)$, el conjunto de los subconjuntos de X.

6. Axioma del infinito: Existe un conjunto infinito.

7. Axioma de reemplazo: Si F es una función definible, entonces para cualquier conjunto X existe un conjunto $Y = F(X) = \{F(x) : x \in X\}$.

8. Axioma de regularidad: Cualquier conjunto no vacío tiene un elemento $\in$-minimal.

9. Axioma de elección: Cualquier familia de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.

ZF es la teoría axiomática de conjuntos constituída por los axiomas 1-8. ZFC se puede presentar como una teoría de primer orden, cuyo lenguaje tiene como único símbolo no lógico al relacional binario $\in$.

Dada una fórmula $\varphi(x)$ del lenguaje de ZFC decimos que la colección $\{x : \varphi(x)\}$ es una *clase*. Hay clases que son conjuntos, en particular todo conjunto es una clase pues si x es un conjunto, entonces la clase $\{z \in x : z = z\}$ es un conjunto por el axioma de comprensión, y $x = \{z \in x : z = z\}$ por el axioma de extensionalidad. Sin embargo, hay clases que no son conjuntos (*clases propias*), ya que el suponer que son conjuntos implica una contradicción. A continuación damos algunos ejemplos de ellas: Los ordinales, los cardinales, los conjuntos bien fundamentados, el universo y los constructibles de Gödel (clase definida por Gödel para probar la consistencia de ZF con el Axioma de Elección y la Hipótesis Generalizada del continuo[11] ,[12] , [13]).

Los ordinales (Ord) : Se dice que un conjunto x es *transitivo* si $\forall z(z \in x \to z \subseteq x)$. Un conjunto α es un *ordinal* si es transitivo y está estrictamente bien ordenado por $\in$, es decir, si es transitivo y el par $(\alpha, \in_\alpha)$ es un buen orden estricto, donde $\in_\alpha = \{(\gamma, \delta) \in \alpha \times \alpha : \gamma \in \delta\}$. $Ord := \{x : x \text{ es un ordinal}\}$. Ord está estrictamente bien ordenada por $\in$. Sean α y β dos ordinales. Se define $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta$. La clase de los ordinales la podemos definir intuitivamente así: $0 := \emptyset$, $1 := \{0\}$,…,$n = \{0, \ldots, n-1\}$,…, $\omega := \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$, $\omega + 1 := \{0, 1, 2, 3, \ldots; \omega\}$, $\omega + 2 := \{0, 1, 2, 3, \ldots; \omega, \omega + 1\}$, $\omega + 3 := \{0, 1, 2, 3, \ldots; \omega, \omega + 1, \omega + 2\}$,…, $\omega + \omega := \{0, 1, 2, \ldots; \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots\}$,…. De esta forma se ve claramente que cada ordinal es igual al conjunto de los ordinales que lo preceden. Un ordinal α es *sucesor* si $\alpha = \beta + 1$, para algún ordinal β. Por ejemplo: 5, $\omega + 1$ y $\omega + 2$. Un ordinal es *límite* si no es cero ni sucesor. Por ejemplo, ω y $\omega + \omega$.

Los cardinales ($Card$): Dos conjuntos v y w son *equipotentes* si existe una función $f : v \longrightarrow w$ que sea biyectiva. Un conjunto κ es un cardinal si es un ordinal y no es equipotente a ningún ordinal menor (Es decir, si no es equipotente a ninguno de sus elementos). $Card := \{x : x \text{ es un cardinal}\}$. Cada cardinal tiene la forma $\aleph_\alpha$, para algún ordinal α, pues la clase $Card$ se puede definir por inducción tranfinita en los ordinales de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\aleph_0 &:= \omega \\
\aleph_{\alpha+1} &:= (\aleph_\alpha)^+ := \{\beta \in Ord : \beta \text{ es equipotente a} \\
&\quad\ \text{algún subconjunto de } \aleph_\alpha\} \\
\aleph_\gamma &:= \bigcup_{\beta<\gamma} \aleph_\beta, \text{ si } \gamma \text{ es límite} \\
Card &:= \{\aleph_\alpha : \alpha \in Ord\}.
\end{aligned}
$$

Un cardinal es *sucesor* si es de la forma $\aleph_{\alpha+1}$ para algún ordinal α. Por ejemplo $\aleph_1$, $\aleph_2$ y $\aleph_3$. Y es *límite* si es de la forma $\aleph_\gamma$, para algún ordinal límite γ. Por ejemplo $\aleph_\omega$ y $\aleph_{\omega+\omega}$.

Sean κ, η dos cardinales. $\kappa \leq \eta \leftrightarrow$ existe una función $f : \kappa \longrightarrow \eta$ que sea inyectiva. Sea x un conjunto. Se denotará por $|x|$ al único cardinal κ equipotente con x. Tal cardinal existe por el Axioma de Elección. x es *finito* si existe un $n \in \omega$ tal que $|x| = n$. x es *infinito* si no es finito. x es *numerable* si $|x| \leq \aleph_0$.

Cardinales regulares e inaccesibles: Sea α un ordinal límite. Decimos que $\beta < \alpha$ es *cofinal* con α si existe una función creciente $f : \beta \longrightarrow \alpha$ tal que para todo $\xi < \alpha$, existe un $\delta < \beta$ tal $f(\delta) \geq \xi$ (es decir, la imagen de f es no acotada en α). Dado α, la *cofinalidad* de α, $cof(\alpha)$, es el menor ordinal cofinal con α. Con respecto a la cofinalidad se cumple lo siguiente: $cof(\alpha)$ es el menor cardinal β tal que existe una partición de α en β pedazos cada uno de los cuales tiene cardinalidad estrictamente menor que α. Un cardinal infinito κ es *regular* si es igual a su cofinalidad. Decimos que es *singular* en caso contrario. Ejemplos: ω es regular y $\aleph_\omega$ es singular. Se puede demostrar que para cada ordinal α, el cardinal $\aleph_{\alpha+1}$ es regular. Un cardinal κ es un *límite fuerte*, si para todo cardinal $\alpha < \kappa$ se tiene que $2^\alpha < \kappa$. Un cardinal $\kappa > \omega$ es *fuertemente inaccesible* (o simplemente *inaccesible*) si es regular y límite fuerte. Decimos que κ es *débilmete inaccesible* si es regular y límite. Es conocido que la existencia de cardinales inaccesibles no se puede demostrar en ZFC.

Los conjuntos bien fundamentados WF: Se define por inducción transfinita en los ordinales así:

$$\begin{aligned} R_0 &:= \emptyset \\ R_{\alpha+1} &:= P(R_\alpha) \\ R_\lambda &:= \bigcup_{\beta<\lambda} R_\beta, \ \lambda \text{ límite.} \\ WF &:= \bigcup_{\alpha\in Ord} R_\alpha. \end{aligned}$$

Si $x \in WF$ entonces el *rango* de x, $\rho(x)$, es el menor ordinal α tal que $x \in R_{\alpha+1}$.

El universo (V): $V := \{x : x = x\}$. Por el Axioma de Fundamentación se tiene que $V = WF$.

Sea M una clase. M es transitiva si $\forall z(z \in M \to z \subseteq M)$. Ord y WF son clases transitivas. Pero $Card$ no es transitiva pues, por ejemplo, los $\aleph_\alpha$ para $\alpha > 0$ tienen como elementos ordinales que no son cardinales. Ahora definiremos a la clase de los conjuntos constructibles, pero antes daremos una definición previa que vamos a utilizar: Sea $\mathfrak{A} := \langle A, < f_i >_{i\in I}, < R_j >_{j\in J}, < a_k >_{k\in K}\rangle$ una estructura y $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ un lenguaje de primer orden para la misma. Decimos que un subconjunto $B \subseteq A$ es *definible* en $\mathfrak{A}$ si existe una fórmula $\varphi(x)$ del lenguaje $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ tal que $B = \{z \in A : \mathfrak{A} \models \varphi[z]\}$. Se dice que B es definible en $\mathfrak{A}$ con parámetros si existe fórmula $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ del lenguaje $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ y existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tal que $B = \{z \in A : \mathfrak{A} \models \varphi[z, a_1, \ldots, a_n]\}$.

L se define intuitivamente usando inducción transfinita sobre los ordinales de la siguiente manera [19] :

$$\begin{aligned} L_0 &:= \emptyset \\ L_{\alpha+1} &:= \{X \subseteq L_\alpha : X \text{ es definible en}(L_\alpha, \in, \langle b : b \in L_\alpha\rangle)\} \\ L_\lambda &:= \bigcup_{\beta\epsilon\lambda} L_\beta \ ; \ \lambda \text{ límite} \\ L &:= \bigcup_{\alpha\in Ord} L_\alpha \end{aligned}$$

Es claro que en el paso sucesor la expresión "X es definible en la estructura $\langle L_\alpha, \in, \langle b : b \in L_\alpha\rangle$" supone que se tiene un lenguaje de primer orden con identidad, cuyos símbolos no lógicos son: Un símbolo relacional binario $\underline{\in}$ para la relación de pertenencia $\in$, y una constante $\underline{b}$ para cada $b \in L_\alpha$. Esta definición se puede formalizar en ZF, ver [19] y [16].

Teorema 2.1. *L es un modelo transitivo de ZF que contiene a los ordinales.*

Un demostración de este teorema puede encontrarse en [19] o [16].

Vale la pena resaltar que un importante resultado que es usado en esta prueba es el Teorema de Reflexión, el cual enunciaremos luego de la siguiente definición, y una prueba del mismo puede encontrarse en: [19] o [16].

Sean M, N dos clases tal que $M \subseteq N$ y $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula. Se dice que $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es absoluta para M y N si y sólo si,

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \in M[(M, \in) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow (N, \in) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)].$$

Teorema 2.2 (Teorema de Reflexión)**.** *Sea Z un clase, y para cada ordinal α, $Z(\alpha)$ un conjunto. Supongamos que:*

(1) $\alpha < \beta$, entonces $Z(\alpha) \subset Z(\beta)$.

(2) Si γ es un ordinal límite, entonces $Z(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} Z(\alpha)$.

(3) $Z = \bigcup_{\alpha \in Ord} Z(\alpha)$.

Entonces: Para cualquier fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$,

$$\forall \alpha \exists \beta > \alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_n \textit{ son absolutas para } Z(\beta), Z).$$

Teorema 2.3. *L es un modelo del Axioma de Elección.*

Una demostración de este resultado puede encontrarse en [19] o [16]. La idea es definir un buen orden para L utilizando la definición formal del mismo.

La Hipótesis Generalizada del Continuo, HGC, es la siguiente proposición:

$$\forall \alpha \in Ord(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}).$$

La Hipótesis del Continuo (HC) es la HGC para el caso $\alpha = 0$, es decir, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Teorema 2.4. *L es un modelo de la HGC.*

Una prueba de este Teorema puede encontrarse en [19] o [16]. Tal prueba usa el *Axioma de Constructibilidad* el cual afirma que todo conjunto es constructible, es decir, $\forall x \exists \alpha (x \in L_\alpha)$. El Axioma de Constructibilidad se simboliza así: $V = L$. $L \models V = L$. Asumiendo $V = L$, el caso base de la HGC, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, se sigue del hecho de que cualquier subconjunto constructible de ω es construido en algún paso numerable, es decir, $P(\omega) \subseteq L(\omega_1)$. Dado que $\mid L(\omega_1) \mid = \omega_1$ se tiene que $2^{\aleph_0} \leq \aleph_1$. Y como por el Teorema de Cantor se tiene que $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$, se concluye que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Un importante Teorema que se usa para la demostración de que $L \models HGC$ es el Teorema de Colapsamiento de Mostowski, el cual enunciamos a continuación luego de la siguiente definición:

Sean R una relación binaria sobre una clase A. R es *bien fundamentada* sobre A si y sólo si para todo conjunto $X \subseteq A : X \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in X(\forall z \in X((z, y) \notin R))$. El y anterior se llama R-minimal en X. R es *semejante a un conjunto* sobre A si y sólo si $\forall x \in A$, $\{y \in A : (y, x) \in R\}$ es un conjunto. R es *extensional* sobre A si y sólo si $\forall x, y \in A(\forall z \in A(zRx \leftrightarrow zRy) \rightarrow x = y)$.

Teorema 2.5 (Teorema del Colapsamiento de Mostowski)**.** *Sea A una clase y R una relación binaria sobre A tal que R es bien fundamentada, semejante a un conjunto y extensional. Entonces existe una clase transitiva M y una función biyectiva $G : A \longrightarrow M$ tal que G es un isomorfismo entre (A, R) y $(M, \in)$, es decir, $\forall x, y \in A[xRy \leftrightarrow G(x) \in G(y)]$. M y G son únicas.*

Una prueba de este Teorema puede encontrarse en [19] o [16].

3. Primera relativización del concepto de conjunto constructible de Gödel (L(A))

Sea A un conjunto. Se define intuitivamente a la clase $L(A)$ por inducción en los ordinales así:

Definicion 3.1.

$$\begin{aligned} L_0(A) &:= \emptyset \\ L_{\alpha+1}(A) &:= \{X \subseteq L_\alpha(A) : X \textit{ es definible en la estructura} \\ &\qquad \langle L_\alpha(A), \in, \langle a \cap L_\alpha(A) : a \in A\rangle, \langle d : d \in L_\alpha(A)\rangle\rangle\} \\ L_\lambda(A) &:= \bigcup_{\beta \in \lambda} L_\beta(A) \ , \quad \lambda \textit{ límite} \end{aligned}$$

$$L(A) := \bigcup_{\alpha \in Ord} L_\alpha(A)$$

Es claro que en el paso sucesor la expresión "X es definible en la estructura $\langle L_\alpha(A), \in, \langle a \cap L_\alpha(A) : a \in A\rangle, \langle d : d \in L_\alpha(A)\rangle\rangle$" supone que se tiene un lenguaje de primer orden con identidad, cuyos símbolos no lógicos son: Una constante $\underline{d}$ para cada $d \in L_\alpha(A)$, un símbolo de relación unario P_a por cada conjunto $a \cap L_\alpha(A)$, donde $a \in A$; y un símbolo relacional binario $\underline{\in}$ para la relación de pertenencia $\in$. Una formalización de la definición de L(A) en ZF puede hacerse siguiendo las ideas expuestas por [19] para formalizar el concepto de L.

Teorema 3.2. *L(A) es un modelo transitivo de ZF que contiene los ordinales.*

Una prueba de este resultado se puede hacer de manera similar a la que realiza [19] para demostrar que L es un modelo transitivo de ZF que contiene a los ordinales.

Teorema 3.3. *Si A es transitivo, entonces $A \subseteq L(A)$.*

Una prueba de este resultado puede hacerse por inducción en el rango (en V) de A $(\rho(A))$. Esto implica que si A es un conjunto transitivo, entonces L(A) es el menor modelo transitivo de ZF que contiene a los ordinales y a A.

3.1. Con L(A) y el forcing de Cohen que agrega infinitos reales genéricos se pueden construir modelos tipo Feferman

Denotamos por $\mathbb{N}^{<\omega}$ al conjunto de todas las sucesiones finitas de núneros naturales, es decir, $\mathbb{N}^{<\omega} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n$, donde $\mathbb{N}^n := \{s : s : n \longrightarrow \mathbb{N}\}$. Denotamos por $\mathbb{N}^\infty$ al conjunto de todas las sucesiones de números naturales, es decir, $\mathbb{N}^\infty := \{f : f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\}$. Consideremos el espacio topológico $(\mathbb{N}^\infty, t_1)$, donde t_1 es la topología generada por los conjuntos básicos de la forma $U_s := \{f \in \mathbb{N}^\infty : s \subseteq f\}$, donde $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Es decir, t_1 es la topología producto de $\mathbb{N}^\infty$ que se obtine al dotar a $\mathbb{N}$ con la topología discreta. El espacio $(\mathbb{N}^\infty, t_1)$ se denomina *Espacio de Baire*. Denotamos por $2^\mathbb{N}$ al conjunto de todas las sucesiones de ceros y unos, es decir, $2^\mathbb{N} := \{f : f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\}$. $2^\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}^\infty$ y con la topología producto heredada de $\mathbb{N}^\infty$ se denomina

Espacio de Cantor. Denotamos por $\mathbb{N}^{[\infty]}$ a la familia de todos los subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Consideremos el espacio topológico $(\mathbb{N}^{[\infty]}, t_2)$, donde t_2 es la topología generada por los conjuntos básicos de la forma $U_a := \{X \in \mathbb{N}^{[\infty]} : a \sqsubset X\}$, donde a es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ y $\sqsubset$ es la relación de segmento inicial. Es conocido que los espacios $\mathbb{N}^{\infty}$ y $\mathbb{N}^{[\infty]}$ son homeomorfos [6]. También que ellos son homeomorfos a los irracionales, considerados como un subespacio del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ [16]. Todos los espacios mencionados, $\mathbb{N}^{\infty}$, $2^{\mathbb{N}}$,$\mathbb{N}^{[\infty]}$ y $\mathbb{R}$ tienen la misma cardinalidad($2^{\aleph_0}$) y son *espacios polacos*, es decir, espacios *métricos*, *separables* y *completos* [16]. A los elementos de los espacios $\mathbb{N}^{\infty}$, $2^{\mathbb{N}}$ y $\mathbb{N}^{[\infty]}$ nosotros también los llamamos *números reales.*

Presentación intuitiva del Método de forcing, una técnica para construir modelos: Sea $(P, \leq)$ un orden parcial. $D \subseteq P$ es *denso* en P si y sólo si $\forall p \in P \exists q \in D(q \leq p)$. $G \subseteq P$ es un *filtro* sobre P si y sólo si: (1) $\forall p, q \in G\, \exists r \in G(r \leq p \wedge r \leq q)$ y (2) $\forall p \in G\, \forall q \in P(p \leq q \rightarrow q \in G)$. Sean M un modelo transitivo de ZFC y $P \in M$ un orden parcial. G es un filtro P-*genérico* sobre M si y sólo si G es un filtro sobre P y para todo denso $D \subseteq P$: Si $D \in M \rightarrow G \cap D \neq \emptyset$. Sean M un modelo transitivo de ZFC, $P \in M$ un orden parcial y G un filtro P-genérico sobre M. Entonces $M[G]$, la *extensión genérica* de M, es el menor modelo transitivo de ZFC que es cerrado bajo las operaciones usuales de la Teoría de Conjuntos y contiene a $M \cup \{G\}$. (en este caso M se llama *modelo base*). Cuando el orden parcial P satisface que $\forall p \in P\, \exists\, q, r \in P(q \leq p \wedge r \leq p \wedge q \perp r)$, entonces $G \notin M$. Donde $q \perp r$ significa que q y r son incompatibles, es decir, $\neg \exists s \in P(s \leq q \wedge s \leq r)$. Es decir, cuando P tiene la condición antes descrita el nuevo modelo $M[G]$ es una extensión propia del modelo base M, por ejemplo, $M[G]$ puede tener números reales que no estan en M y en este caso se dice que el orden parcial P (o el *forcing* P) agrega nuevos reales a M. Un ejemplo de un orden parcial que agrega nuevos números reales al modelo base es el forcing de Cohen, el cual definiremos a continuación.

Forcing de Cohen que agrega un real al modelo base: El forcing de Cohen es el orden parcial $(\mathcal{C}, \leq)$ donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de todas las secuencias finitas de ceros y unos. Y $p \leq q \leftrightarrow p \supseteq q$. Sea G un $\mathcal{C}$-genérico sobre un modelo transitivo M de ZFC. Entonces, $f = \cup G \in M[G]$ y $f : \omega \longrightarrow 2$ se llama *real de Cohen.* Sea $a := \{n : f(n) = 1\}$. El conjunto a también es llamado un real de Cohen, y se cumple que

$M[G] = M[f] = M[a]$, porque G puede ser recuperado a partir de f, $G = \{p \in \mathcal{C} : p \subset f\}$. $\mathcal{C}$ también se puede definir como el conjunto de todas las secuencias finitas de números naturales. Con el mismo orden anterior, es decir, $p \leq q \leftrightarrow p \supseteq q$. En este caso si H es un $\mathcal{C}$-genérico sobre un modelo transitivo M de ZFC, entonces la función $g : \omega \longrightarrow \omega$ tal que $g = \cup H$ es también llamada un real de Cohen. Y se cumple que $M[G] = M[f] = M[a] = M[H] = M[g]$. El forcing de Cohen $\mathcal{C}$ se puede generalizar para agregar una cantidad infinita ($\alpha \geq \omega$) de reales genéricos. Una manera de hacerlo es la siguiente: Sea M un modelo transitivo de ZFC. Sea $(\mathcal{C}_\alpha, \leq)$ el siguiente orden parcial:

$$\mathcal{C}_\alpha := \{p :\mid p \mid< \omega \ \wedge \ p \subseteq \alpha \times \omega \times 2\}.$$

$$p \leq q \leftrightarrow q \subseteq p$$

Sea G un $\mathcal{C}_\alpha$-genérico sobre M y $M[G]$ la extensión genérica resultante. Tal forcing agrega la función $F := \bigcup G = \alpha \times \omega \longrightarrow 2$. La cual permite definir α nuevos reales genéricos de la siguiente forma: Para cada $\beta < \alpha$ definimos la función $f_\alpha : \omega \longrightarrow 2$ así: $f_\alpha(n) := F(\beta, n)$, para cada $n \in \omega$. Los α nuevos reales genéricos también pueden ser definidos de la siguiente manera: Sea $\beta \in \alpha$. Se define,

$$a_\beta := \{m \in \omega : \exists p \in G(p(\beta, m) = 1)\}.$$

Los a_β asi definidos son subconjuntos de ω y estan en $M[G]$. Obviamente los f_β son las funciones características de los a_β. A la extensión $M[G]$ la denotamos a veces por $M[\{a_\beta : \beta < \alpha\}]$ para resaltar los reales genéricos que agregamos.

Sea L la clase de los conjuntos constructibles. Y sea $L[G]$ la extensión genérica de L que se obtiene utilizando el forcing de Cohen que agrega $\aleph_0$ nuevos reales genéricos ($\mathcal{C}_{\aleph_0}$). Sea A el conjunto de dichos $\aleph_0$ reales genéricos, entonces $L(A)$ en $L[G]$ es el *Modelo de Feferman.* El Modelo de Feferman es un modelo transitivo de ZF que contiene a los ordinales y tiene las siguientes dos propiedades: $A \notin L(A)$ y $L(A)$ no satisface el Axioma de Elección [9] , [17]. Estos resultados se enuncian en forma de teorema a continuación:

Teorema 3.1.1. $A \notin L(A)$.

Teorema 3.1.2. $L(A)$ *no satisface el Axioma de Elección.*

En [15] puede encontrarse una lista de versiones débiles del Axioma de Elección válidas en el Modelo de Feferman. También se puede encontrar en [15] una lista de formas débiles que no son válidas en el mismo. Dentro de las no válidas se encuentra por ejemplo el Teorema del Ideal Primo: Toda álgebra booleana tiene un ideal primo (o todo filtro se puede extender a un ultrafiltro) [9]. Es conocido que el Teorema del Ideal Primo es equivalente al Teorema de Compacidad (si cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo, entonces Σ tiene un modelo) y al Teorema de Completitud (si Σ es un conjunto consistente de sentencias, entonces Σ tiene un modelo) de la Lógica de Primer Orden [17].

4. Segunda manera de relativizar el concepto de conjunto constructible de Gödel (L(A))

Sea A un conjunto. Se define intuitivamente otra clase $L(A)$ por inducción en los ordinales así:

Definicion 4.1.

$$\begin{aligned}
L_0(A) &:= CT(\{A\}) \\
L_{\alpha+1}(A) &:= \{X \subseteq L_\alpha(A) : X \textit{ es definible en la estructura} \\
&\quad\ \langle L_\alpha(A), \in, \langle d : d \in L_\alpha(A)\rangle\rangle\} \\
L_\lambda(A) &:= \bigcup_{\beta\in\lambda} L_\beta(A)\ , \quad \lambda \textit{ límite} \\
L(A) &:= \bigcup_{\alpha\in Ord} L_\alpha(A)
\end{aligned}$$

Es claro que en el paso sucesor la expresión “X es definible en la estructura $\langle L_\alpha(A), \in, \langle d : d \in L_\alpha(A)\rangle\rangle$” supone que se tiene un lenguaje de primer orden con identidad, cuyos símbolos no lógicos son: Una constante $\underline{d}$ para cada $d \in L_\alpha(A)$ y un símbolo relacional binario $\underline{\in}$ para la relación de pertenencia $\in$. Una formalización de la definición de L(A) en ZF puede darse siguiendo las ideas expuestas en [19] para el caso de L.

Teorema 4.2. *L(A) es un modelo transitivo de ZF que contiene los ordinales.*

Como en el caso anterior, la prueba es similar a la que se realiza en [19] para demostrar que L es un modelo transitivo de ZF que contiene a los ordinales.

$A \subseteq L(A)$. Esto ocurre por construcción e implica que $L(A)$ es el menor modelo transitivo de ZF que contiene a los ordinales y a A.

4.2. Con L(A) y el forcing de Cohen que agrega $\aleph_0$ reales genéricos se puede construir el Modelo Básico de Cohen

Sea L la clase de los conjuntos constructibles. Y sea $L[G]$ la extensión genérica de L que se obtiene utilizando el forcing de Cohen que agrega $\aleph_0$ nuevos reales genéricos ($\mathcal{C}_{\aleph_0}$). Sea A el conjunto de dichos $\aleph_0$ reales genéricos, entonces $L(A)$ en $L[G]$ es el *Modelo Básico de Cohen*. Este es un modelo transitivo de ZF que contiene a los ordinales y tiene las siguientes dos propiedades:$A \in L(A)$ y $L(A)$ no satisface el Axioma de Elección. Una prueba de que $L(A)$ no satisface el Axioma de Elección usa argumentos de simetría y puede realizarse procediendo análogamente a como se hace en [16] , páginas 221-223. Entre las versiones débiles del AE que satisface el Modelo Básico de Cohen se encuentra el Teorema del Ideal Primo[10]. Otra versión débil del AE válida en el Modelo Básico de Cohen es: Cualquier familia de conjuntos bien ordenables no vacíos, tiene una función de elección[17].

Otra forma débil del AE es el *Teorema de Ramsey*, el cual afirma que cualquier conjunto infinito X tiene la siguiente propiedad: Para cualquier partición del conjunto $[X]^2 := \{\{a, b\} : a, b \in X\}$ en dos pedazos, existe un subconjunto infinito Y de X tal que $[Y]^2$ está incluido en una de las piezas de la partición. El Teorema de Ramsey es falso en el modelo Básico de Cohen [3]. Una lista de versiones débiles del Axioma de elección válidas en el Modelo Básico de Cohen puede encontrarse en [15]. También se puede encontrar en [15] otra lista de versiones débiles del AE que no son válidas en tal modelo.

4.3. Con L(A) y el Colapso de Lévy más la hipótesis de que existen cardinales inaccesibles se puede construir el Modelo de Solovay

El siguiente teorema nos ofrece una técnica para colapsar un cardinal aplicando forcing:

Teorema 4.3.1. *Sea κ un cardinal regular y $\lambda > \kappa$ otro cardinal. Entonces existe un orden parcial $(P, <)$ que colapsa a λ onto κ, es decir, $(P, <)$ agrega una fución sobreyectiva de κ en λ, por lo que λ tiene cardinalidad κ en la extensión genérica. Más todavía:*

(a) Cualquier cardinal $\alpha \leq \kappa$ en el modelo base M sigue siendo un cardinal en M[G]; y

(b) Si $\lambda^{<\kappa} = \lambda$, entonces cualquier $\alpha > \lambda$ sigue siendo un cardinal en M[G]. Donde $\lambda^{<\kappa} := \bigcup\{\lambda^\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Una demostración de este teorema puede encontrarse en [16]. El orden parcial $(P, <)$ utilizado es el siguiente:

P es el conjunto de todas las funciones p tal que:

(i) $dom(p) \subseteq \kappa$ y $\mid dom(p) \mid < \kappa$,

(ii) $ran(p) \subseteq \lambda$.

Y el orden $<$ es: $p < q$ si y sólo si $p \supseteq q$.

La técnica anterior nos dice como colapsar un cardinal λ en un cardinal regular menor κ. Lévy nos presenta una técnica de colapsamiento de los cardinales menores que un cardinal inaccesible λ preservando a λ, así λ es un cardinal sucesor en la extensión genérica. Esto es el contenido del siguiente teorema:

Teorema 4.3.2. *Sea κ un cardinal regular y $\lambda > \kappa$ un cardinal inaccesible. Entonces existe un orden parcial $(P, <)$ tal que:*

(a) Cualquier α, $\kappa \leq \alpha < \lambda$, tiene cardinal κ en M[G], y

(b) Cualquier cardinal $\leq \kappa$ y cualquier cardinal $\geq \lambda$ siguen siendo cardinales en M[G].

En particular $M[G] \models \lambda = \kappa^+$.

Una demostración de este teorema puede encontrarse en [16]. El orden parcial $(P, <)$(se denota $Col(\kappa, < \lambda)$) utilizado es el siguiente:

P son todas las funciones p cuyo dominio esta contenido en $\lambda \times \kappa$ tal que:

(i) $\mid dom(p) \mid < \kappa$,

(ii) $p(\alpha, \xi) < \alpha$ para cada $(\alpha, \xi) \in dom(p)$.

Conjuntos proyectivos y borelianos [2] : Una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos es $\sum_n^1$ si es de la forma:

$$\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots \psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m),$$

donde los cuantificadores $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots$ tienen rango sobre $\mathbb{N}^\infty$(es decir: $\exists x_1 \in \mathbb{N}^\infty \forall x_2 \in \mathbb{N}^\infty \exists x_3 \in \mathbb{N}^\infty \ldots$), $y_1, \ldots, y_m$ son variables libres que toman valores en $\mathbb{N}^\infty$, y todos los cuantificadores de ψ tienen rango sobre ω.

Una fórmula es $\prod_n^1$ si es la negación de una fórmula $\sum_n^1$.

Una *fórmula es proyectiva* si es $\sum_n^1$ o $\prod_n^1$, para algún número natural n.

Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}^\infty$ es *proyectivo* si y sólo si existe una fórmula $\sum_n^1$ o $\prod_n^1$, $\varphi(x, y_1, \ldots, y_m)$, y $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}^\infty$, tal que $A = \{b \in \mathbb{N}^\infty : \varphi(x, a_1, \ldots, a_m)\}$. Un conjunto proyectivo $B \subseteq \mathbb{N}^\infty$ es *boreliano* si es definible con una fórmula $\sum_1^1$ y también es definible con una fórmula $\prod_1^1$.

Sea κ un cardinal inaccesible en L. Y sea $L[G]$ la extensión genérica de L que se obtiene usando el Colapso de Lévy: $Col(\aleph_0, < \kappa)$. En $L[G]$ todo conjunto proyectivo de reales es medible Lebesgue, tiene la propiedad de Baire, y si es no numerable, entonces contiene un subconjunto perfecto[22]. Sea $L(\mathbb{R})$ en $L[G]$($L(\mathbb{R})$ es llamado el Modelo de Solovay), donde $\mathbb{R}$ son los reales en $L[G]$. Entonces $L(\mathbb{R})$ satisface ZF, más el Principio de Elección Dependiente(DC), más "cualquier conjunto de reales es medible Lebesgue, tiene la propiedad de Baire y cada subconjunto de reales no numerable contiene un subconjunto perfecto"[22]. El Principio de Elección Dependiente es la versión débil del AE que afirma lo siguiente: Si E es una relación binaria sobre un conjunto no vacío A, y si para cualquier $a \in A$ existe un $b \in A$ tal que bEa, entonces existe una secuencia $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ en A tal que: $a_{n+1}Ea_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. DC implica El Axioma de Elección Numerable (Cualquier familia numerable de conjuntos no vacíos tiene una función de elección). En [15] se puede encontrar una lista de formas débiles del Axioma de Elección que valen en el modelo de Solovay. También se puede encontrar otra lista de formas débiles que no valen en el mismo.

5. Tercera manera de relativizar el concepto de conjunto constructible de Gödel (L[A])

Definición intuitiva de L[A]:

Sea A un conjunto. Se define intuitivamente a la clase $L[A]$ por inducción sobre los ordinales así:

Definicion 5.1.

$$
\begin{aligned}
L_0[A] &:= \emptyset \\
L_{\alpha+1}[A] &:= \{X \subseteq L_\alpha[A] : X \textit{ es definible en la estructura} \\
&\quad\ \langle L_\alpha[A], \in, A \cap L_\alpha[A], \langle d : d \in L_\alpha[A] \rangle \rangle\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} L_\lambda[A] &:= \bigcup_{\beta\in\lambda} L_\beta[A]\ , \quad \lambda \text{ límite} \\ L[A] &:= \bigcup_{\alpha\in Ord} L_\alpha[A] \end{aligned}$$

Es claro que en el paso sucesor la expresión "X es definible en la estructura $\langle L_\alpha[A], \in, A\cap L_\alpha[A], \langle d : d \in L_\alpha[A]\rangle\rangle$" supone que se tiene un lenguaje de primer orden con identidad, cuyos símbolos no lógicos son: Una constante $\underline{d}$ para cada $d \in L_\alpha[A]$, un símbolo de relación unario P para el conjunto $A \cap L_\alpha[A]$, y un símbolo relacional binario $\underline{\in}$ para la relación de pertenencia $\in$. Una formalización de $L[A]$ en ZF puede hacerse siguiendo las ideas expuestas en [19] para L.

Teorema 5.2. *L(A) es un modelo transitivo de ZF que contiene los ordinales.*

Como en los casos anteriores la prueba es similar a la que se realiza para demostrar que L es un modelo transitivo de ZF que contiene a los ordinales.

Teorema 5.3. *L[A] satisface el Axioma de Elección.*

Una prueba puede realizarse de manera análoga a como se hace en [19] o [16] para L.

Otras propiedades de L[A] se expresan a partir del siguiente teorema, una prueba del mismo puede encontrarse en [16] :

Teorema 5.4. *(i) L[A] satisface el Axioma* $\exists X(V = L[X])$.

(ii) Si M es un modelo transitivo de ZF que contiene a los ordinales y tal que $A \cap M \in M$, *entonces* $L[A] \subseteq M$.

(iii) Existe un ordinal α_0 *tal que para todo* $\alpha \geq \alpha_0$,

$$L[A] \models 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

6. Algunos problemas abiertos de la teoría de conjuntos que tienen relación con este tema

1. *Definición de la Propiedad de Ramsey*: Para toda (partición) $F : \mathbb{N}^{[\infty]} \longrightarrow 2$ existe un conjunto infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ tal que F es constante en $H^{[\infty]}$. La Propiedad de Ramsey se denota así: $\omega \to (\omega)^\omega$. Es conocido que esta propiedad es falsa si vale el

Axioma de Elección [5] y que Mathias probó que en el Modelo de Solovay vale la misma [20], de esta forma demostró que si ZFC + "existe un cardinal inaccesible" es consistente, también es consistente ZF + DC + $\omega \to (\omega)^\omega$.

Problema [18]:

¿ Se puede eliminar la hipótesis de la existencia del cardinal inaccesible para probar la consistencia de la propiedad de Ramsey con ZF?. Es decir, ¿ se puede construir un modelo para ZF + $\omega \to (\omega)^\omega$ utilizando solamente ZFC ?.

2. (Carlos Di Prisco) ¿ $\omega \to (\omega)^\omega$ es compatible con $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$?, donde $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$ es una versión débil del AE que significa: Existe una función inyectiva de $\aleph_1$ en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Para fianlizar, podemos mencionar que es conocido por los trabajos de K. Gödel [11] y P. Cohen [4] que la Hipótesis del Continuo (HC) es independiente de ZFC. Pero desde una perspectiva platonista de la matemática, la HC es una proposición verdadera o falsa, entonces sigue abierto el problema sobre cómo aumentar el poder deductivo de ZFC agregando nuevos axiomas para determinar cuál es el cardinal del continuo [8], [14].

Referencias

[1] Bagaria, J., *Models of Set Theory*, Master's Course, Universidad de Barcelona, España. 2008.

[2] Bagaria, J., *The many faces of the Continuum*, Notas para un curso dictado en el XI Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática, Universidad de los Andes, Venezuela, 1998.

[3] Blass, A., *Ramsey's theorem in the hierarchy of choice principles.* The Journal of Symbolic Logic. **42**, No. 3, 1977, 387-390.

[4] Cohen, P., *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, W.A. Benjamin, INC. New York, 1966.

[5] Di Prisco, C., *Teoría de Conjuntos*, Universidad Central de Venezuela, Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico, Caracas, 2009.

[6] Di Prisco, C., *Temas Avanzados de Teoría de Conjuntos*, Notas para un curso dictado en el Postgrado de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Caracas, 2001.

[7] Di Prisco, C., *Mathematics versus metamathematics in Ramsey theory of the real numbers*, Logic, Methology and Phylosophy of Science, Proccedings of the twelfth International Congress, (Petr Hajek, Luis Valdes-Villanueva, Dag Westerstalhl. Eds), Kings College Publications, London, 2005.

[8] Di Prisco, C., *Are we closer to a solution of the antinuum problem?*, Manuscrito - Rev. Int. Fil., **28**, No.2, Campinas, 2005, 331-350.

[9] Feferman, S., *Some applications of notion of forcing and generic sets* , Fundamenta Mathematicae, **56**, 1964/65, 325-345.

[10] Halpern, J, Lévy, A., *The boolean prime theorem does not imply the axiom of choice*, Axiomatic Set Theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **13**, part 1. (D. Scott ed.), Univ. of California, Los Angeles, 1967, 83-134.

[11] Gödel, K., *La consistencia del axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo*, Obras Completas, Gödel, K., Alianza, Madrid, 1981.

[12] Gödel, K., *Prueba de la consistencia de la hipótesis generalizada del continuo* , Obras Completas, Gödel, K., Alianza, Madrid, 1981.

[13] Gödel, K., *La consistencia del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo con los axiomas de la teoría de conjuntos*, Obras Completas, Gödel, K., Alianza, Madrid, 1981.

[14] Gödel, K., *¿ Qué es el Problema del continuo de Cantor?*, Obras Completas, Gödel, K., Alianza, Madrid, 1981.

[15] Howard, P., Rubin, J., *Consecuences of the Axiom of Choice*, American Mathematical Society, EEUU, 1998.

[16] Jech, T., *Set Theory*, Springer, New York, 2000.

[17] Jech, T., *The Axiom Choice*, North Holland, Amsterdam, 1973.

[18] Kanamori, A., *The Higler Infinite*, Springer, New York, 1997.

[19] Kunen, K., *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* North Holland, Amsterdam, 1980.

[20] Mathias, A., *Happy families*, Annals of Mathematical Logic, **12**, No. 1, 1977, p. 59-111.

[21] Ramsey, P., *On a problem of formal logic*, Proceedings of the London Mathematical Society, **30**, 1929/30, 264-286.

[22] Solovay, R., *A model of set theory where every set of reals is Lebesgue measurable* , Annals of Mathematics, **92**, 1970, 1-56.

Dirección de los autores
Franklin C. Galindo
Universidad Central de Venezuela,
Facultad de Humanidades y Educación,
Escuela de Filosofía.
Venezuela.
e-mail: franklin.galindo@ucv.ve

Carlos A. Di Prisco
Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
Venezuela.
e-mail: cdiprisc@ivic.ve