

FRANKLIN GALINDO MARCHENES

## DOS TÓPICOS DE LÓGICA MATEMÁTICA Y SUS FUNDAMENTOS

*Resumen:* El objetivo de este artículo es presentar dos tópicos de Lógica matemática y sus fundamentos: El primer tópico es una actualización de la demostración de Church del Teorema de completitud de Gödel para la Lógica de primer orden, la cual aparece en su texto “Introduction to Mathematical Logic” (1956) y usa el procedimiento efectivo de Forma normal de Skolem; el segundo tópico es una demostración de que la propiedad de partición (tipo Ramsey) del espacio de Baire llamada “Propiedad de partición polarizada” es falsa en el Modelo básico de Cohen.

*Palabras claves:* Church, completitud, propiedad-partición-polarizada.

## TWO TOPICS OF MATHEMATICAL LOGIC AND FOUNDATIONS

*Abstract:* The aim of this paper is to present two topics of mathematical logic and foundations: The first topic is an update of the Church’s demonstration of the Gödel’s completeness Theorem for First-Order Logic, which appears in his text “Introduction to Mathematical Logic” (1956) and uses the effective procedure of Skolem normal form; the second topic is a demonstration that the partition property (Ramsey type) of the Baire space called “polarized partition property” is false in the basic Cohen model.

*Keywords:* Church, completeness, polarized-partition-property.

### 1. *Introducción*

El objetivo de este artículo es presentar dos tópicos de Lógica matemática y sus fundamentos: (1) El primer tópico es una actualización de la demostración de Church del Teorema de completitud de Gödel para la Lógica de primer orden, la cual aparece en su texto “Introduction to Mathematical Logic” (1956) y usa los procedimientos efectivos de Forma normal prenexa y Forma normal de Skolem.<sup>1</sup> La demostración de Church se parece a la prueba original de Gödel<sup>2</sup> y es distinta en varios aspectos a la de Henkin (que usa la técnica de construcción de modelos a partir de nuevos símbolos constantes),<sup>3</sup> y a la que se hace usando Tablas (árboles) semánticas,<sup>4</sup> por ejemplo es menos general que ambas, y además la prueba Henkin se puede generalizar para lenguajes de cualquier cardinalidad  $\aleph_\alpha$  y permite demostrar el Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski hacia arriba,<sup>5</sup> lo cual no se puede hacer con la de Church; sin embargo, la técnica de Forma normal prenexa que utiliza Church ha sido y continua siendo de gran utilidad en la investigación de problemas abiertos sobre fragmentos decidibles o indecidibles de la Lógica de primer orden,<sup>6</sup> y adicionalmente, desde un punto de vista pedagógico, estudiar la prueba de Church puede ayudar a interiorizar sobresalientes leyes de la Lógica de primer orden y el Principio de inducción matemática para los números naturales. También es importante destacar que el Teorema de completitud de Gödel sigue siendo fundamental en Filosofía de la lógica y Filosofía de la matemática (entre otros).<sup>7</sup> Vale la pena resaltar que en la prueba de Church se usa una “asignación maestra”

<sup>1</sup> Church, A., *Introduction to mathematical logic*, Princeton, Princeton University Press, 1996.

<sup>2</sup> Gödel, K., “La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden”, en *Obras Completas*, Alianza, 1981.

<sup>3</sup> Henkin, L., “The completeness of first-order languages”, en *The Journal of Symbolic Logic*, (1949), N° 14, pp. 159-166.

<sup>4</sup> Nerode, A., and Shore, R., *Logic for Applications*, Springer, 1997.

<sup>5</sup> Chang, C., Keisler, H., *Model Theory*, Dover Publications, 2012.

<sup>6</sup> Mosterín J., *El Problema de la decisión en la Lógica de predicados*, Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia, Universidad de Barcelona.

<sup>7</sup> Moore, G., “The emergence of First-Order Logic”, en Aspray, W., y Kitcher, P. (Eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Vol. XI, (1988), Minneapolis, University of Minnesota Press.

la cual juega un papel equivalente al “conjunto máximo consistente” y al “camino no contradictorio” de las demostraciones de Henkin y por Tablas semánticas, respectivamente. La actualización de la prueba de Church fue realizada por el autor de este artículo y no ha sido publicada anteriormente. (2) El segundo tópico es una demostración de que la propiedad de partición (tipo Ramsey) del espacio de Baire llamada “Propiedad de partición polarizada” (PPP) es falsa en el Modelo básico de Cohen (MBC), es importante destacar que tal modelo fue construido por Cohen (usando el método de forcing y automorfismos, 1963-64) para probar que el Axioma de elección (AE) es independiente del resto de los axiomas estándar de la Teoría de conjuntos (ZF),<sup>8</sup> y el mismo ha sido y continua siendo muy valioso en la investigación de problemas abiertos de independencia o consistencia relativa en la Teoría de conjuntos,<sup>9</sup> por eso es relevante para la Filosofía de la matemática. También vale la pena resaltar que el método de forcing es importante para realizar pruebas de teoremas de la Teoría de conjuntos. La PPP es una propiedad del espacio topológico de Baire que es una consecuencia estricta de la Propiedad de Ramsey, es incompatible con el AE,<sup>10</sup> pero es compatible con ZF si existe un cardinal inaccesible.<sup>11</sup> Es un problema abierto de la Teoría de conjuntos determinar si la hipótesis de la existencia de un cardinal inaccesible es necesaria o no, es decir, la pregunta ¿Se puede construir un modelo de ZF + PPP usando sólo la Teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZFC)? todavía no ha sido respondida. Un tratamiento más completo sobre propiedades de partición del espacio de Baire y modelos de ZF puede encontrarse en el artículo “Perfect set properties in models of ZF”,<sup>12</sup> entre otros. Una de las importancias de la PPP es que su negación es una consecuencia estricta

<sup>8</sup> Cohen, P., *Set Theory and The Continuum Hypothesis*, Dover Publications, 2008.

<sup>9</sup> Jech, T., *Set Theory*, Springer, 2006.

<sup>10</sup> Bernstein, F., “Zur Theorie der Trigonometrischen Reihe”, en *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig Mathematisch-Physische Klasse*, N°60, (1908), pp. 325-338.

<sup>11</sup> Mathias, A. R. D., “Happy families”, en *Annals of Pure and Applied Logic*, N°12, (1977), pp. 59-111.

<sup>12</sup> Di Prisco, C., Galindo, F., “Perfect set properties in models of ZF”, en *Fundamenta Mathematicae*, N° 208, (2010), pp. 249-262.

del AE, y el estudio del AE y sus versiones débiles representa uno de los mayores focos de investigación (y discusión) en la Teoría de conjuntos desde su aparición hasta la actualidad.<sup>13</sup> Otra importancia de la PPP es que ella es una propiedad de partición tipo Ramsey, y la Teoría de Ramsey tiene muchas aplicaciones en diversas ramas de las matemáticas<sup>14</sup> y es muy estudiada en la Teoría de conjuntos, uno de sus resultados clásicos es el famoso Teorema de Ramsey.<sup>15</sup> La demostración de que la PPP es falsa en el MBC ha sido realizada por el autor de este artículo con la ayuda del Profesor Carlos Di Prisco y la misma no ha sido publicada anteriormente.

El orden de la exposición es el siguiente: En la segunda sección se presenta la actualización de la demostración de Church del Teorema de Completitud de Gödel para la Lógica de primer orden (la cual usa Forma normal de Skolem), y para dicha presentación se suponen conceptos básicos de la Teoría de Modelos, por ejemplo la definición de la sintaxis y la semántica de la Lógica de primer orden y el Principio de inducción matemática, tal como aparecen en los textos citados,<sup>16</sup> entre otros. Esta segunda sección se divide en cuatro subsecciones: En la subsección 2.1. se presenta el Sistema axiomático para la Lógica de primer orden con identidad que se encuentra en el texto de Enderton,<sup>17</sup> también se presenta en dicha subsección algunos

<sup>13</sup> Moore, *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development, and Influence*, Dover Publications, 2013. Howard P., Rubin, J., *Consequences of the Axiom of Choice*, American Mathematical Society, 1998. Jech, *The Axiom of Choice*, Dover Publications, 2008.

<sup>14</sup> Di Prisco, C., *Combinatoria: Teoría de Ramsey*, Notas no publicadas para un curso en la Universidad Simón Bolívar, Venezuela, 2006.

<sup>15</sup> Ramsey, F., "On a problem of formal logic", en *Proceedings of the London Mathematical Society*, N°30, (1930), pp. 264 -286.

<sup>16</sup> Di Prisco, *Introducción a la Lógica Matemática*, Emalca Amazonia, 2009. Enderton, H., *Una Introducción Matemática a la Lógica*, Universidad Nacional Autónoma de México, 2004. Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, Chapman and Hall/CRI, 2009. Nerode, A., Shore, R., *Logic for Applications*, Springer, 1997. Manzano, M., *Teoría de Modelos*, Alianza, 1989. Ebbinghaus, H., Flum, J., Thomas, W., *Mathematical Logic*, Springer, 1996. Chang, C., Keisler, H., *Model Theory*, Dover Publications, 2012.

<sup>17</sup> Enderton, H., *Una Introducción Matemática a la Lógica*, Universidad Nacional Autó-

de los metateoremas principales de dicho Sistema axiomático. En la subsección 2.2. se formula el concepto de Forma normal prenexa y se demuestra que existe un procedimiento efectivo para transformar cualquier fórmula  $\psi$  en una fórmula  $\psi'$ , en Forma normal prenexa, tal que  $\vdash \psi \leftrightarrow \psi'$ . Tal prueba se realiza siguiendo (principalmente) la prueba que se encuentra en el texto de Mendelson.<sup>18</sup> En la subsección 2.3. se formula el concepto de Forma normal de Skolem y se demuestra que existe un procedimiento efectivo para asignar a cada fórmula  $\varphi$  otra fórmula  $\varphi'$ , en Forma normal de Skolem, tal que  $\vdash \varphi$  si y sólo si  $\vdash \varphi'$ . Tal prueba se hace siguiendo (principalmente) las demostraciones que se encuentran en el texto de Mendelson.<sup>19</sup> En la subsección 2.4. se realiza la demostración de Church del Teorema de Completitud de Gödel para la Lógica de primer orden, la cual usa Forma normal de Skolem, dicha prueba se encuentra en *Introduction to mathematical logic*,<sup>20</sup> y la misma se hace siguiendo (principalmente) a dicho libro, aunque en algunos casos se reescribe para adaptarla al sistema axiomático del texto de Enderton<sup>21</sup> y a la notación semántica contemporánea. Vale la pena resaltar que esta prueba de completitud es para el Sistema axiomático de la Lógica de primer orden sin identidad (pero se puede extender al Sistema axiomático de la Lógica de primer orden con identidad<sup>22</sup>). En la tercera sección se presenta una demostración de que la PPP es falsa en el MBC. Tal demostración se realiza suponiendo los conceptos básicos de Teoría de Modelos, ZFC, el método de forcing, la clase de los conjuntos constructibles de Gödel y la técnica de constructibilidad relativizada, tal como aparecen en los textos citados,<sup>23</sup> entre otros. Esta sección se divide en cuatro subsecciones: En la subsección 3.1. se ofrece

---

noma de México, 2004.

<sup>18</sup> Mendelson, *Introduction to Mathematical...*, cit.

<sup>19</sup> *Ibidem*. También fue muy valiosa la información encontrada en: [Blog: especulacionpura.blogspot.com.ar. Entrada: *La forma normal de Skolem, segunda parte*. 12-10-2012.

<sup>20</sup> Church, *Introduction to mathematical...*, cit.

<sup>21</sup> Enderton, *Una Introducción Matemática...*, cit.

<sup>22</sup> Church, *Introduction to mathematical...*, cit.

<sup>23</sup> Chang, Keisler, *Model Theory*, cit. Di Prisco, *Introducción a la Lógica...*, cit. Kunen, K., *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, College Publications, 2011. Jech, *Set Theory*, cit. Jech, *The Axiom of...*, cit.

una definición informal del MBC usando la clase de los conjuntos constructibles de Gödel, el forcing de Cohen que agrega una cantidad infinita numerable de reales genéricos ( $\aleph_0$  nuevos números reales) y la técnica de constructibilidad relativizada, en la subsección 3.2. se presentan algunas propiedades del MBC relevantes para este trabajo, en la subsección 3.3. se ofrece una definición de la PPP, y en la subsección 3.4. se realiza la demostración de que PPP es falsa en el MBC.

2. *La demostración de Church del Teorema de Completitud de Gödel para la Lógica de primer orden que usa el procedimiento efectivo de Forma normal de Skolem*

2.1. Un Sistema axiomático correcto y completo para la Lógica de primer orden

¿La Lógica de primer orden es axiomatizable? La respuesta es que sí, al igual (por ejemplo) que la Lógica proposicional<sup>24</sup> y algunos sistemas de la Lógica modal (proposicional y de primer orden),<sup>25</sup> pero diferente (por ejemplo) a la Aritmética,<sup>26</sup> a la Teoría de Conjuntos, a la Lógica de Segundo orden, a las Lógicas con cuantificadores generalizados y a las Lógicas infinitarias, las cuales no son axiomatizables.<sup>27</sup> Y existen varios sistemas axiomáticos completos y correctos para la Lógica de primer orden, a continuación se presenta uno ellos, el estudiado en el texto de Enderton.<sup>28</sup>

### AXIOMAS LÓGICOS (ESQUEMAS DE AXIOMAS)

Los Axiomas lógicos son todas las generalizaciones de fórmulas de las formas siguientes, donde  $x$ , son variables y  $\phi$  y  $\chi$  son fórmulas (Definición:  $\phi$  es una generalización de  $\chi$  si  $\phi$  es  $\forall x_1, \dots, x_n \chi$ , para variables  $x_1, \dots, x_n$ ):

<sup>24</sup> Mendelson, *Introduction to Mathematical...*, cit.

<sup>25</sup> Hughes, G., Creswell, M., *Introducción a la Lógica modal*, Madrid, Tecnos, 1973.

<sup>26</sup> Gödel, "Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines", en *Obras Completas*, cit.

<sup>27</sup> Ebbinghaus, Flum, Thomas, *Mathematical Logic*, cit.

<sup>28</sup> Enderton, *Una Introducción Matemática...*, cit.

- (1) Todas las instancias de tautologías de la Lógica proposicional.
- (2)  $\forall x \phi \rightarrow \phi_t^x$ , donde  $t$  es sustituible por  $x$  en  $\phi$ .
- (3)  $\forall x(\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\forall x\phi \rightarrow \forall x\chi)$ .
- (4)  $\phi \rightarrow \forall x\phi$ , donde  $x$  no ocurre libre en  $\phi$ .
- (5)  $y \equiv y$ .
- (6)  $(x \equiv y) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi')$ , donde  $\phi$  es una fórmula atómica y  $\phi'$  se obtiene de  $\phi$  al reemplazar  $x$  por  $y$  en cero o más lugares (aunque no necesariamente en todos).

### REGLA DE INFERENCIA

*Modus Ponens:* A partir de  $\phi \rightarrow \chi$  y  $\phi$  se puede inferir  $\chi$ .

Definición 2.1.1. Sea  $\Gamma$  un conjunto de fórmulas y  $\phi$  una fórmula. Se dice que  $\phi$  se deduce de  $\Gamma$  o que  $\phi$  se demuestra a partir de  $\Gamma$ , lo que se denota por,

$$\Gamma \vdash \phi,$$

si existe una sucesión finita  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  de fórmulas tales que  $\sigma_m = \phi$ , y cada  $\sigma_i$  es un axioma, o es un miembro de  $\Gamma$ , o se obtiene de dos fórmulas anteriores en la sucesión por la regla de inferencia *Modus Ponens*. Si  $\Gamma = \emptyset$ , entonces se escribe  $\vdash \phi$  en lugar de  $\emptyset \vdash \phi$ .

### SE INTRODUCEN EL RESTO DE LAS CONECTIVAS Y EL CUANTIFICADOR EXISTENCIAL POR DEFINICIÓN

$\phi \wedge \chi$  por  $\neg(\phi \rightarrow \neg\chi)$ ,  $\phi \vee \chi$  por  $\neg\phi \rightarrow \chi$ ,  $\phi \leftrightarrow \chi$  por  $(\phi \rightarrow \chi) \wedge (\chi \rightarrow \phi)$ ,  $\exists u\phi$  por  $\neg \forall u \neg \phi$ .

#### 2.1.1. Algunos Metateoremas del Sistema Axiomático

A continuación se enuncian algunos teoremas (metateoremas) muy útiles sobre el sistema axiomático que se presentó anteriormente, una prueba de los mismos puede encontrarse en la bibliografía citada<sup>29</sup> (en algunos casos hay que hacer las adaptaciones pertinentes para que la demostración se pueda hacer en el sistema presentado en el texto de Enderton<sup>30</sup>):

<sup>29</sup> *Ibidem.* Di Prisco, *Introducción a la Lógica...*, cit. Mendelson, *Introduction to Mathematical...*, cit. Hamiltom, A., *Lógica para Matemáticos*, Paraninfo, 1981.

<sup>30</sup> Enderton, *Una Introducción Matemática...*, cit.

Teorema 2.1.1.1.  $\Sigma \vdash \phi$  si y sólo si  $\Sigma \cup \{\text{Axiomas}\} \vDash \phi$ , donde  $\Sigma \cup \{\text{Axiomas}\} \vDash \phi$  es la relación de consecuencia lógica de la lógica proposicional.

Teorema 2.1.1.2. (Teorema de Generalización). Si  $\Sigma \vdash \phi$  y  $x$  no ocurre libre en ninguna fórmula de  $\Sigma$ , entonces  $\Sigma \vdash \forall x \phi$ .

Teorema 2.1.1.3. (Teorema de la deducción). Si  $\Sigma \cup \{\chi\} \vdash \phi$  si y sólo si  $\Sigma \vdash (\chi \rightarrow \phi)$ .

Teorema 2.1.1.4. (Contraposición).  $\Sigma \cup \{\chi\} \vdash \neg \phi$  si y sólo si  $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \neg \chi$ .

Para enunciar el siguiente teorema se necesita una definición previa. Definición: Sea  $\Sigma$  un conjunto de fórmulas para un lenguaje  $\mathcal{L}$ .  $\Sigma$  es *inconsistente* (o *contradictorio*) si para alguna fórmula  $\phi$  se tiene que  $\Sigma \vdash \phi$  y  $\Sigma \vdash \neg \phi$ .  $\Sigma$  es *consistente* si no es inconsistente.

Teorema 2.1.1.5. (Reducción al absurdo). (1)  $\Sigma \cup \{\chi\}$  es inconsistente si y sólo si  $\Sigma \vdash \neg \chi$ . (2)  $\Sigma \cup \{\neg \chi\}$  es inconsistente si y sólo si  $\Sigma \vdash \chi$ .

Teorema 2.1.1.6 (Leyes de la relación de identidad  $\equiv$ ). (i)  $\forall y(y \equiv y)$

(ii)  $\forall y \forall z (y \equiv z \rightarrow z \equiv y)$

(iii)  $\forall y \forall z \forall w ((y \equiv z \wedge z \equiv w) \rightarrow y \equiv w)$

(iv)  $\forall y \forall z (y \equiv z \rightarrow (\phi(y) \leftrightarrow \phi(z)))$ , para cualquier fórmula  $\phi$ .

Teorema 2.1.1.7. (Teorema de existencia de variables alfabéticas (Cambio de variables ligadas)). Sea  $\phi$  una fórmula,  $t$  un término y  $x$  una variable. Entonces se puede encontrar una fórmula  $\phi'$ , que difiere de  $\phi$  sólo en la elección de las variables cuantificadas, tal que:

(1)  $\vdash \phi \leftrightarrow \phi'$

(2)  $t$  es sustituible por  $x$  en  $\phi'$ .

Teorema 2.1.1.8. (Generalización sobre constantes). Si  $\Sigma \vdash \phi$  y  $C$  es un símbolo constante que no ocurre en  $\Sigma$ , entonces existe una variable  $y$  que no ocurre en  $\phi$  tal que  $\Sigma \vdash \forall y \phi_C^y$ . Además, existe una deducción de  $\forall y \phi_C^y$  a partir de  $\Sigma$  en la que no ocurre  $C$ .

Teorema 2.1.1.9. (Corolario del Teorema de Generalización de constantes). Si  $\Sigma \vdash \phi_C^x$  y  $C$  es un símbolo constante que no ocurre en  $\Sigma$  ni en

$\phi$ , entonces  $\Sigma \vdash \forall x\phi$ , y existe una deducción de  $\forall x\phi$  a partir de  $\Sigma$  en la que no ocurre  $C$ .

Teorema 2.1.1.10. (Instanciación existencial). *Supongamos que el símbolo constante  $C$  no ocurre en  $\phi$ , ni en  $\chi$ , ni en  $\Sigma$ ; y ocurre que,  $\Sigma \cup \{\phi_c^x\} \vdash \chi$ , entonces,  $\Sigma \cup \{\exists x\phi\} \vdash \chi$ .*

Teorema 2.1.1.11. (Introducción de existencial).  $\phi(t) \vdash \exists x\phi(x)$ , donde  $t$  es un término sustituible por  $x$  en  $\phi$ .

Teorema 2.1.1.12. (Regla de reemplazo). *Sean  $\phi$  y  $\theta$  dos fórmulas, y supongamos  $\chi'$  resulta de  $\chi$  sustituyendo  $\phi$  por  $\theta$  (en una o más apariciones de  $\phi$  en  $\chi$ ). Por lo tanto: Si  $\vdash \phi \leftrightarrow \theta$ , entonces,  $\vdash \chi \leftrightarrow \chi'$ .*

## 2.2. Forma normal prenexa

A continuación se introduce el concepto de *forma normal prenexa*, un concepto muy importante para estudiar (por ejemplo) problemas de decidibilidad de la Lógica de primer orden (por el Teorema de indecidibilidad de Church (1936), es conocido que dicha Lógica es indecidible en forma general<sup>31</sup>).

Definición 2.2.1. *Una fórmula de la forma  $Q_1y_1Q_2y_2\dots Q_ny_n\varphi$ , donde cada  $Q_iy_i$  es  $\forall y_i$  o  $\exists y_i$ ,  $y_i \neq y_j$  si  $i \neq j$ , y  $\varphi$  no contiene cuantificadores, se dice que está en forma normal prenexa. La fórmula  $\varphi$  se llama matriz de la fórmula y la secuencia de cuantificadores  $Q_1y_1Q_2y_2\dots Q_ny_n$  se llama el prefijo de la fórmula.*

Uno de los resultados principales sobre forma normal prenexa que tiene muchas aplicaciones es el siguiente Teorema:

Teorema 2.2.2. (Teorema de Forma normal prenexa). *Existe un procedimiento efectivo para transformar cualquier fórmula  $\psi$  en una fórmula  $\psi'$  en forma normal prenexa tal que  $\vdash \psi \leftrightarrow \psi'$ .*

La demostración del Teorema se hace por inducción y requiere de un Lema previo cuya prueba se puede hacer sin ninguna dificultad haciendo uso de los axiomas del sistema axiomático, y en especial, utilizando los metateoremas del mismo que se presentaron en la sección

<sup>31</sup> Davis, M., *The Undecidable. Basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable function*, Raven Press, 1965.

anterior, una prueba de algunas cláusulas del Lema puede encontrarse en el texto de Mendelson:<sup>32</sup>

Lema 2.2.3. (Leyes de negación y distribución de los cuantificadores)

$$(1) \quad \vdash \neg \forall x \varphi(x) \leftrightarrow \exists x \neg \varphi(x)$$

$$(2) \quad \vdash \neg \exists x \varphi(x) \leftrightarrow \forall x \neg \varphi(x)$$

Las siguientes proposiciones valen si la variable  $x$  no está libre en  $\varphi$ :

$$(3) \quad \vdash (\varphi \wedge \forall x \chi(x)) \leftrightarrow \forall x (\varphi \wedge \chi(x))$$

$$(4) \quad \vdash (\varphi \vee \forall x \chi(x)) \leftrightarrow \forall x (\varphi \vee \chi(x))$$

$$(5) \quad \vdash (\varphi \wedge \exists x \chi(x)) \leftrightarrow \exists x (\varphi \wedge \chi(x))$$

$$(6) \quad \vdash (\varphi \vee \exists x \chi(x)) \leftrightarrow \exists x (\varphi \vee \chi(x))$$

$$(7) \quad \vdash (\varphi \rightarrow \forall x \chi(x)) \leftrightarrow \forall x (\varphi \rightarrow \chi(x))$$

$$(8) \quad \vdash (\varphi \rightarrow \exists x \chi(x)) \leftrightarrow \exists x (\varphi \rightarrow \chi(x))$$

$$(9) \quad \vdash (\forall x \chi(x) \rightarrow \varphi) \leftrightarrow \exists x (\chi(x) \rightarrow \varphi)$$

$$(10) \quad \vdash (\exists x \chi(x) \rightarrow \varphi) \leftrightarrow \forall x (\chi(x) \rightarrow \varphi)$$

Una vez que se cuenta con el Lema se procede a demostrar el teorema por inducción:

Demostración del Teorema:<sup>33</sup> Se realizará la prueba por inducción en el rango = número de conectivas y cuantificadores. Se demostrará que  $\forall n \in \mathbb{N} \forall \chi \in FORM(\text{rango}(\chi) = n \rightarrow P(\chi))$ , donde  $FORM$  es el conjunto de las fórmulas del lenguaje y  $P$  es la propiedad que describe el Teorema. *Caso base:*  $n = 0$ . Se probará que  $\forall \chi \in FORM(\text{rango}(\chi) = 0 \rightarrow P(\chi))$ . Sea una fórmula  $\sigma$  tal que  $\text{rango}(\sigma) = 0$ . Entonces  $\sigma$  es una fórmula atómica  $\sigma' = \sigma$ . Lo que se quería probar. *Caso inductivo:* Sea  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > 0$ , y supóngase que para toda  $s < m$  se cumple que  $\forall \chi \in FORM(\text{rang}(\chi) = s \rightarrow P(\chi))$ . Se debe probar que  $\forall \chi \in FORM(\text{rang}(\chi) = m \rightarrow P(\chi))$ . Sea  $\sigma$  una fórmula de rango  $m$ . Por definición  $\sigma = \neg \alpha$  o  $\sigma = \alpha \rightarrow \beta$  o  $\sigma = \forall x \alpha$ . Caso 1:  $\sigma = \neg \alpha$ . Entonces como  $\text{rango}(\alpha) < m$ , se tiene por Hipótesis inductiva que existe una fórmula en forma normal prenexa  $\alpha'$  tal que  $\vdash \alpha \leftrightarrow \alpha'$ . Entonces  $\vdash \neg \alpha \leftrightarrow \neg \alpha'$ . Luego, sustituyendo se tiene que  $\vdash \sigma \leftrightarrow \neg \alpha'$ . Entonces aplicando reiteradamente las leyes de negación de cuantificadores a  $\neg \alpha'$  se tiene una fórmula  $\gamma$  en forma normal prenexa tal que  $\vdash \sigma \leftrightarrow \gamma$ . Caso 2:  $\sigma = \alpha \rightarrow \beta$ . Entonces

<sup>32</sup> Mendelson, *Introduction to Mathematical...*, cit.

<sup>33</sup> *Ibidem*.

como  $\text{rango}(\alpha) < m$  y  $\text{rango}(\beta) < m$ , se tiene por Hipótesis inductiva que existen fórmulas en forma normal prenexa  $\alpha'$  y  $\beta'$  tal que  $\vdash \alpha \leftrightarrow \alpha'$  y  $\vdash \beta \leftrightarrow \beta'$ . Por lo tanto,  $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha' \rightarrow \beta')$ . Entonces  $\vdash \sigma \leftrightarrow (\alpha' \rightarrow \beta')$ . Luego, aplicando reiteradamente las leyes distribución de cuantificadores para la implicación se le exteriorizan todos los cuantificadores de la fórmula  $\alpha' \rightarrow \beta'$  y queda una fórmula  $\gamma$  en forma normal prenexa tal que  $\vdash \sigma \leftrightarrow \gamma$ . Caso 3:  $\sigma = \forall x\alpha$ . Entonces como  $\text{rango}(\alpha) < m$ , se tiene por Hipótesis inductiva que existe una fórmula en forma normal prenexa  $\alpha'$  tal que  $\vdash \alpha \leftrightarrow \alpha'$ . Por lo tanto, por la regla de generalización se concluye que  $\vdash \forall x(\alpha \leftrightarrow \alpha')$ . En consecuencia, por la ley de distribución de cuantificadores,  $\vdash \forall x(\lambda \leftrightarrow \eta) \leftrightarrow (\forall x\lambda \leftrightarrow \forall x\eta)$ , se concluye que  $\vdash \forall x\alpha \leftrightarrow \forall x\alpha'$ . Entonces, sustituyendo se tiene que  $\vdash \sigma \leftrightarrow \forall x\alpha'$ . Y como  $\forall x\alpha'$  está en forma normal prenexa ha finalizado la prueba del Teorema.  $\square$

Ejemplos de cálculos de forma normal prenexa pueden encontrarse en el texto de Nerode.<sup>34</sup>  $\forall u\exists v\forall w\exists z[P(u, v) \vee \neg Q(w, z)] \vee \forall u\forall w\exists v\exists z[P(u, v) \vee \neg Q(x, z)]$  es una forma normal prenexa de  $\forall x\exists yP(x, y) \vee \neg \exists x\forall yQ(x, y)$ .

### 2.3. Forma normal de Skolem

**Definición 2.3.1.** Una fórmula en Forma normal prenexa se dice que está en Forma normal de Skolem si todos sus cuantificadores existenciales preceden a todos sus cuantificadores universales, es decir, si ella tiene la siguiente:

$\exists u_1\exists u_2 \dots \exists u_m \forall w_1\forall w_2 \dots \forall w_n M(u_1, u_2, \dots, u_m, w_1, w_2, \dots, w_n)$ , donde  $m \geq 0$ ,  $n \geq 0$ .

El siguiente Teorema de Forma normal de Skolem se demuestra para el Cálculo de predicados puro como se hace en el texto de Mendelson,<sup>35</sup> es decir, se prueba para lenguajes de primer orden que tienen una cantidad infinita de predicados poliádicos de cualquier aridad, pero no tienen símbolos funcionales, ni constantes, ni la relación de identidad.

**Teorema 2.3.2.** (Forma normal de Skolem). Existe un procedimiento efectivo para asignar a cada fórmula  $\varphi$  otra fórmula  $\varphi'$  en Forma normal de Skolem tal que  $\vdash \varphi$  si y sólo si  $\vdash \varphi'$ .

<sup>34</sup> Nerode, Shore, *Logic for Applications*, cit.

<sup>35</sup> Mendelson, *Introduction to Mathematical...*, cit.

Demostración:<sup>36</sup> Como toda fórmula es demostrable si y sólo si su clausura universal lo es, y también, por el Teorema anterior, toda fórmula tiene una fórmula equivalente en forma normal prenexa, entonces se puede demostrar el teorema considerando sólo fórmulas cerradas en forma normal prenexa. Sea  $\chi$  una fórmula de dicha clase ( $\chi$  está en forma normal prenexa y no tiene variables libres), entonces se define el *Rango*( $\chi$ ) = número de cuantificadores universales que preceden cuantificadores existenciales. La prueba se realizará por inducción en el *Rango*( $\chi$ ), se demostrará que  $\forall n \in \mathbb{N} \forall \phi \in FORM(Rango(\phi) = n \rightarrow P(\phi))$ , donde  $P$  es la propiedad que describe el Teorema. Caso base:  $n = 0$ . Se debe demostrar que  $\forall \phi \in FORM(Rango(\phi) = 0 \rightarrow P(\phi))$ . Sea  $\sigma$  tal que *Rango*( $\sigma$ ) = 0. Entonces  $\sigma$  ya está en Forma normal de Skolem. Caso inductivo: Sea  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 0$ , y supongamos que para cada  $s < k$  se cumple que  $\forall \phi \in FORM(Rango(\phi) = s \rightarrow P(\phi))$ . Se probará que  $\forall \phi \in FORM(Rango(\phi) = k \rightarrow P(\phi))$ . Sea  $\sigma$  una fórmula de *Rango*  $k$ ,  $\sigma$  se puede escribir de la siguiente forma  $\exists x_1 \dots \exists x_m \forall y \theta(x_1, \dots, x_m, y)$ , donde  $\theta(x_1, \dots, x_m, y)$  está en forma normal prenexa, tiene sólo como variables libres a  $x_1, \dots, x_m, y$ , y su prefijo tiene al menos un cuantificador existencial, pues de lo contrario  $\sigma$  tendría Forma normal de Skolem. Sea  $S$  una variable de predicado  $m + 1$ -ária que no aparezca en  $\theta(x_1, \dots, x_m, y)$ . Y sea  $\beta$  la fórmula,

$$\exists x_1 \dots \exists x_m \{ [\exists z (\theta(x_1, \dots, x_m, z) \wedge \neg S(x_1, \dots, x_m, z)) \vee \forall y S(x_1, \dots, x_m, y)] \}$$

Se demostrará que  $\vdash \beta$  si y sólo si  $\vdash \sigma$ : ( $\Rightarrow$ ) Sea  $\vdash \beta$ . Entonces sustituyendo  $S(x_1, \dots, x_m, z)$  por  $\theta(x_1, \dots, x_m, z)$  se tiene una fórmula que se llamará  $\beta'$ :

$$\vdash \exists x_1 \dots \exists x_m \{ [\exists z (\theta(x_1, \dots, x_m, z) \wedge \neg \theta(x_1, \dots, x_m, z)) \vee \forall y \theta(x_1, \dots, x_m, y)] \}$$

Por otro lado, puede probarse que:

$$\vdash \{ [\exists z (Q(z) \wedge \neg Q(z)) \vee R] \leftrightarrow R \}$$

Entonces sustituyendo se tiene que:

$$\vdash \{ [\exists z (\theta(x_1, \dots, x_m, z) \wedge \neg \theta(x_1, \dots, x_m, z)) \vee \forall y \theta(x_1, \dots, x_m, y)] \leftrightarrow \forall y \theta(x_1, \dots, x_m, y) \}$$

<sup>36</sup> *Ibidem*. Blog: especulacionpura.blogspot.com.ar. Entrada: *La forma normal...*, cit.

Entonces aplicando la regla de generalización y distribución del cuantificador universal en bicondicional ( $\forall x[D(x) \leftrightarrow A(x)] \rightarrow [\exists x D(x) \leftrightarrow \exists x A(x)]$ ) reiteradamente  $m$  veces, se obtiene:

$$\vdash \exists x_1 \dots \exists x_m \{ [\exists z(\theta(x_1, \dots, x_m, z) \wedge \neg \theta(x_1, \dots, x_m, z)) \vee \forall y \theta(x_1, \dots, x_m, y)] \leftrightarrow \{ \exists x_1 \dots \exists x_m \forall y \theta(x_1, \dots, x_m, y) \} \}$$

Entonces aplicando MP de esta última proposición con  $\beta'$  se obtiene que:

$$\vdash \exists x_1, \dots, \exists x_m \forall y \theta(x_1, \dots, x_m, y)$$

Es decir,  $\vdash \sigma$ . Por lo tanto: Si  $\vdash \beta$ , entonces  $\vdash \sigma$ . Lo que se quería demostrar.

Se probará ahora la otra dirección: ( $\Leftarrow$ ) Sea  $\vdash \sigma$ . Sean los siguientes dos teoremas:

$$\begin{aligned} &\vdash \forall y [B(y) \rightarrow A(y)] \rightarrow [\forall y B(y) \rightarrow \forall y A(y)] \\ &\vdash R \rightarrow (\Gamma \rightarrow S) \rightarrow [\Gamma \rightarrow (\neg R \vee S)] \end{aligned}$$

Entonces aplicando el segundo en el primero se obtiene:

$$\begin{aligned} &\vdash \forall y [B(y) \rightarrow A(y)] \rightarrow [\forall y B(y) \rightarrow \forall y A(y)] \rightarrow \\ &\quad \forall y B(y) \rightarrow [\neg \forall y (B(y) \rightarrow A(y)) \vee \forall y A(y)] \end{aligned}$$

En consecuencia, aplicando MP, se tiene que:

$$\vdash \forall y B(y) \rightarrow [\neg \forall y (B(y) \rightarrow A(y)) \vee \forall y A(y)]$$

Como,

$$\vdash \neg \forall y (B(y) \rightarrow A(y)) \leftrightarrow \neg \forall y \neg (B(y) \wedge \neg A(y))$$

Y,

$$\vdash \neg \forall y \neg (B(y) \wedge \neg A(y)) \leftrightarrow \exists y (B(y) \wedge \neg A(y))$$

Entonces se concluye que:

$$\vdash \forall y B(y) \rightarrow [\exists y (B(y) \wedge \neg A(y)) \vee \forall y A(y)]$$

Entonces sustituyendo las variables de predicados tenemos,

$$\vdash \forall y \theta(x_1, \dots, x_m, y) \rightarrow$$

$$[\exists y(\theta(x_1, \dots, x_m, y) \wedge \neg S(x_1, \dots, x_m, y)) \vee \forall y S(x_1, \dots, x_m, y)]$$

Luego, aplicando la regla de generalización y la ley de distribución del universal en implicación,

$$\vdash \forall y[B(y) \rightarrow A(y)] \rightarrow [\exists y B(y) \rightarrow \exists y A(y)],$$

Reiteradamente  $m$  veces, se concluye que,

$$\begin{aligned} & \vdash \exists x_1, \dots, \exists x_m \forall y \theta(x_1, \dots, x_m, y) \rightarrow \\ & \exists x_1, \dots, \exists x_m [\exists y(\theta(x_1, \dots, x_m, y) \wedge \neg S(x_1, \dots, x_m, y)) \vee \forall y S(x_1, \dots, x_m, y)] \end{aligned}$$

En consecuencia, como el antecedente de este condicional es la fórmula  $\sigma$ , usando la hipótesis de que  $\sigma$  es un teorema, se aplica MP y se obtiene,

$$\vdash \exists x_1 \dots \exists x_m [\exists y(\theta(x_1, \dots, x_m, y) \wedge \neg S(x_1, \dots, x_m, y)) \vee \forall y S(x_1, \dots, x_m, y)]$$

De la cual se obtiene  $\beta$  sustituyendo la variable  $y$  por  $z$ ,

$$\vdash \exists x_1 \dots \exists x_m [\exists z(\theta(x_1, \dots, x_m, z) \wedge \neg S(x_1, \dots, x_m, z)) \vee \forall y S(x_1, \dots, x_m, y)]$$

Por lo tanto, Si  $\vdash \sigma$ , entonces  $\vdash \beta$ . Lo que se quería demostrar. Se ha demostrado que  $\vdash \beta$  si y sólo si  $\vdash \sigma$ . La fórmula  $\beta$  obtenida de última se puede poner en forma normal prenexa utilizando las leyes de distribución de cuantificadores de modo que su prefijo empiece por  $\exists x_1 \dots \exists x_m$ , luego venga el cuantificador  $\exists z$ , después los cuantificadores del prefijo de  $\theta(x_1, \dots, x_m, z)$ , y por último el cuantificador  $\forall y$ . De modo que esta nueva fórmula tiene *Rango* exactamente un número menor que el  $Rango(\sigma) = k$ , por lo tanto, por Hipótesis inductiva, existe una fórmula  $\eta$  en Forma normal de Skolem tal que  $\vdash \beta$  si y sólo si  $\vdash \eta$ . Entonces:  $\vdash \sigma$  si y sólo si  $\vdash \eta$ . Se ha conseguido la fórmula en Forma normal de Skolem con la propiedad buscada. Fin de la demostración.  $\square$

Un ejemplo de cálculo de Forma normal de Skolem puede encontrarse en el texto [25].  $\exists w \exists u \exists z \forall x \forall y \{ \{ [\Phi(w, u, z) \wedge \neg A(w)] \vee A(x) \} \wedge \neg B(w, y) \} \vee B(y, w) \}$  es una forma normal de Skolem de  $\forall x \forall y \exists z \Phi(x, y, z)$ .

Corolario 2.3.3. (Corolario). *Sea  $\varphi$  una fórmula y  $\varphi'$  su fórmula en Forma normal de Skolem correspondiente. Entonces: (1)  $\varphi$  es verdad en una estructura si y sólo si  $\varphi'$  también es verdad en dicha estructura expandida a los nuevos símbolos relacionales de  $\varphi'$ . Y (2)  $\varphi$  es válida si y sólo si  $\varphi'$  es válida.*

Demostración: La prueba es el paralelo semántico de la demostración que se hizo en el teorema anterior:  $\vdash \beta$  si y sólo si  $\vdash \sigma$ . En dicha prueba se puede apreciar claramente que se pasaba de teorema a teorema hasta llegar a la conclusión que se quería, y los teoremas son verdad en cualquier estructura y el *Modus Ponens* transfiera a verdad de las premisas a la conclusión, es decir, si  $\Phi \rightarrow \psi$  y  $\Phi$  son verdad en una estructura  $\mathfrak{A}$ , entonces  $\psi$  es verdad en  $\mathfrak{A}$ .  $\square$

#### 2.4. La demostración de Church del Teorema de Completitud de Gödel para la Lógica de primer orden que usa Forma normal de Skolem

Teorema 2.4.1. (Teorema de Corrección). *Toda teorema es una fórmula válida. Es decir, para cualquier fórmula  $\varphi$ ,*

$$\vdash \varphi \Rightarrow \models \varphi.$$

Demostración:

Si  $\vdash \varphi$  entonces por definición existe una sucesión  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  de fórmulas tales que  $\sigma_m = \varphi$ , y cada  $\sigma_i$  es un axioma, o se obtiene de dos fórmulas anteriores en la sucesión por la regla de inferencia *Modus Ponens*. Sea  $\mathfrak{A}$  una estructura para el lenguaje de  $\varphi$ . Hay que probar que  $\mathfrak{A}$  es un modelo de  $\varphi$ . Esto se realiza probando que  $\mathfrak{A}$  es un modelo de  $\sigma_i$ , para cada  $i \in m$ . La prueba se hace fácilmente por inducción en  $m$  utilizando dos hechos: (1) Todo axioma es una fórmula Lógicamente válida; y (2) El *Modus Ponens* transfiere la verdad de las premisas a la conclusión.  $\square$

Teorema 2.4.2. (Teorema de Completitud de Gödel, 1930). *Toda fórmula válida es un teorema. Es decir, para cada fórmula  $\varphi$ ,*

$$\models \varphi \Rightarrow \vdash \varphi.$$

Demostración: (Versión de Church<sup>37</sup>) Sea  $\varphi$  una fórmula válida y  $\varphi'$  su fórmula correspondiente en Forma normal de Skolem. Por el Corolario del Teorema de Forma normal de Skolem  $\varphi'$  es válida. Y por

<sup>37</sup> Church, *Introduction to mathematical...*, cit.

el Teorema de Forma normal de Skolem es suficiente con demostrar que  $\varphi'$  es un teorema.  $\varphi'$  tiene la siguiente forma:

$$\exists u_1 \exists u_2 \dots \exists u_m \forall w_1 \forall w_2 \dots \forall w_n M(u_1, u_2, \dots, u_m, w_1, w_2, \dots, w_n), \text{ donde } m \geq 0, n \geq 0, \text{ y } M \text{ es una fórmula sin cuantificadores.}$$

Se probará que: (1)  $\varphi'$  es un teorema o (2)  $\varphi'$  no es válida.

Si en el prefijo se tiene que  $m = 0$ , entonces  $\varphi'$  es una fórmula universal. Y como se conoce el siguiente hecho; *Hecho*:  $\forall w_1 \forall w_2 \dots \forall w_n M(w_1, w_2, \dots, w_n)$  es válida si y sólo si  $M(w_1, w_2, \dots, w_n)$  es válida; se puede decidir qué tipo de fórmula es  $M(w_1, w_2, \dots, w_n)$  usando procedimientos efectivos de la Lógica proposicional como lo son *Tablas de verdad* o *Forma normal conjuntiva*. Si en el análisis resulta que  $M(w_1, w_2, \dots, w_n)$  es una tautología, entonces por el Axioma 1, se concluye que ella es un teorema, y por la regla de generalización aplicada reiteradamente se concluye que  $\varphi'$  es un teorema. Si en el análisis resulta que  $M(w_1, w_2, \dots, w_n)$  no es tautología, entonces se puede construir un modelo que tiene exactamente  $n$  individuos donde  $M(w_1, w_2, \dots, w_n)$  no es verdadera, usando la información que brinda su tabla de verdad (por ejemplo). Por lo tanto,  $M(w_1, w_2, \dots, w_n)$  no es válida. En consecuencia,  $\varphi'$  no es válida. Para continuar con la demostración del Teorema se asumirá que  $m \geq 1$ . Considérese el buen orden del conjunto de las  $m$ -tuplas de  $\{\mathbb{N} \setminus \{0\}\}^m$  definido así:  $(i_1, i_2, \dots, i_m) < (j_1, j_2, \dots, j_m)$  si  $i_1 + i_2 + \dots + i_m < j_1 + j_2 + \dots + j_m$  o si  $i_1 + i_2 + \dots + i_m = j_1 + j_2 + \dots + j_m$ , entonces  $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_k = j_k, i_{k+1} < j_{k+1}$ , es decir, cuando la suma de las coordenadas de dos  $m$ -tuplas dan el mismo número, se decide cuál es menor entre ellas usando el orden lexicográfico de izquierda a derecha. Según el buen orden anterior la primera  $m$ -tupla es  $(1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1)$ , la segunda es  $(1, 1, 1, \dots, 1, 1, 2)$ , la tercera es  $(1, 1, 1, \dots, 1, 2, 1)$ , la cuarta es  $(1, 1, 1, \dots, 2, 1, 1)$ , y así sucesivamente. Notar que si  $k \geq 1$ , entonces no ocurren en la  $k$ -ésima tupla coordenadas (números naturales) mayores que  $k$ . La  $k$ -ésima tupla se expresa así  $([k_1], [k_2], \dots, [k_m])$  y se dice que la coordenada (el número natural)  $[k_l]$  es la  $l$ -ésima coordenada de dicha  $k$ -tupla. Ahora se define a  $B_k (k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$  como sigue:

$$\int_{x_{[k_1]}^{u_1} x_{2[k_2]}^{u_2} \dots x_{[k_m]}^{u_m} x_{[k-1]n+2}^{w_1} x_{[k-1]n+3}^{w_2} \dots x_{k n+1}^{w_n}} M$$

Es decir,  $B_k$  es la fórmula que resulta de sustituir las variables libres de la matriz  $M$ , correspondientes a los cuantificadores existenciales, por variables indizadas con los valores de la  $k$ -tupla del buen orden que se ha definido anteriormente, y las variables libres de  $M$  correspondientes a los cuantificadores universales se sustituyen por variables cuyos subíndices son de la forma  $(k-1)n+i$ , donde siempre se comienza con  $i \geq 2$ . Con  $B_k$  definido ahora se define  $C_k$  ( $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ) como sigue:  $C_k$  es la siguiente disyunción:

$$B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_k$$

Es decir,  $C_k$  es la disyunción de los  $k$  primeros  $B_k$ . Ahora con  $C_k$  definido, se define  $D_k$  ( $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ) como sigue:  $D_k$  es la siguiente fórmula universal:

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_{kn+1} C_k$$

Notar que las variables  $x_{(k-1)n+2}, x_{(k-1)n+3}, \dots, x_{kn+1}$  sustituidas por las variables  $w_1, w_2, \dots, w_n$  son todas distintas a las variables  $x_{[k1]}, x_{[k2]}, \dots, x_{[km]}$  sustituidas por las variables  $u_1, u_2, \dots, u_m$ . Además las variables  $x_{(k-1)n+2}, x_{(k-1)n+3}, \dots, x_{kn+1}$  son distintas (dos a dos) entre ellas mismas, y difieren de todas las variables que ocurren en  $B_1, B_2, \dots, B_{k-1}$ . Pero todas las variables  $x_1, x_2, \dots, x_{kn+1}$  ocurren libres en  $C_k$ . Notar que por la definición de Forma normal de Skolem es posible que  $n = 0$ , pero este caso especial no se genera ninguna dificultad, lo que podrían es quedar algunas variables libres en  $D_k$ . En el caso de  $m$ , se está considerando que siempre  $m \geq 1$ . Dado que la matriz  $M$  no tiene cuantificadores, se infiere que  $B_k$  y  $C_k$  tampoco tienen cuantificadores. Y, excepto en el caso de  $n = 0$ , la lista completa de variables libres de  $C_k$  es exactamente  $x_1, x_2, \dots, x_{kn+1}$ , en consecuencia, si  $n > 0$ , entonces  $D_k$  es la clausura universal de  $C_k$ .

Lema 2.4.3. Para cualquier  $k : D_k \vdash \varphi'$ .

Demostración: (Por inducción en  $k$ )

Se asume que ninguna de las variables  $x_1, x_2, \dots, x_{kn+1}$  es igual a alguna de las variables  $u_1, u_2, \dots, u_m, w_1, w_2, \dots, w_m$ , esto es posible asumirlo porque se puede aplicar un cambio de variable (Teorema de cambio

de variable ligada 2.1.1.7.) en la Forma normal de Skolem  $\varphi'$  si fuera necesario.

Caso base:  $k = 1$ . Se debe probar que de  $D_1 \vdash \varphi'$ .

$$D_1 = \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \dots \forall x_{n+1} \exists x_1^u \begin{matrix} u_2 & \dots & u_m & w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ x_1 & \dots & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \end{matrix} M$$

Por el Teorema de cambio de variable ligada (2.1.1.7.) se tiene que:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \dots \forall x_{n+1} \exists x_1^u \begin{matrix} u_2 & \dots & u_m & w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ x_1 & \dots & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \end{matrix} M \vdash$$

$$\forall u_1 \forall w_1 \forall w_2 \dots \forall w_n \exists u_1^x \begin{matrix} x_1 & \dots & x_1 & w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ u_1 & \dots & u_1 & w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{matrix} M$$

Entonces por *Descenso cuantificacional* ( $\vdash \forall x\psi(x) \rightarrow \exists x\psi(x)$ ) y la regla *Modus Ponens* se tiene que:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \dots \forall x_{n+1} \exists x_1^u \begin{matrix} u_2 & \dots & u_m & w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ x_1 & \dots & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \end{matrix} M \vdash$$

$$\exists u_1 \forall w_1 \forall w_2 \dots \forall w_n \exists u_1^x \begin{matrix} x_1 & \dots & x_1 & w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ u_1 & \dots & u_1 & w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{matrix} M$$

Entonces aplicando *Duplicación del existencial* ( $\vdash \exists x\psi(x, x) \rightarrow \exists x\exists y\psi(x, y)$ ) reiteradamente ( $m - 1$  veces) y *Modus Ponens* se obtiene lo que se quiere probar:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \dots \forall x_{n+1} \exists x_1^u \begin{matrix} u_2 & \dots & u_m & w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ x_1 & \dots & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \end{matrix} M \vdash$$

$$\exists u_1 \exists u_2 \dots \exists u_m \forall w_1 \forall w_2 \dots \forall w_n \exists u_1^x \begin{matrix} x_1 & \dots & x_1 & w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ u_2 & \dots & u_m & w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{matrix} M$$

Pues

$$\varphi' = \exists u_1 \exists u_2 \dots \exists u_m \forall w_1 \forall w_2 \dots \forall w_n \exists u_1^x \begin{matrix} x_1 & \dots & x_1 & w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ u_2 & \dots & u_m & w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{matrix} M$$

Paso inductivo: Sea  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 1$ ; y supóngase que  $D_{k-1} \vdash \varphi'$ . Se debe probar que  $D_k \vdash \varphi'$ . Por las leyes de distribución de cuantificadores (Lema 2.2.3. (4)) reiterada  $n$ -veces se tiene que:

$$\forall x_{(k-1)n+2} \forall x_{(k-1)n+3} \dots \forall x_{kn+1} [C_{k-1} \vee B_k] \vdash$$

$$C_{k-1} \vee \forall x_{(k-1)n+2} \forall x_{(k-1)n+3} \dots \forall x_{kn+1} B_k$$

En consecuencia, como  $C_{k-1} \vee B_k$  es la fórmula  $C_k$ , se concluye, aplicando el Axioma 2 (eliminación del generalizador)  $(k-1)n + 1$  veces y la regla *Modus Ponens*, que:

$$D_{\mathcal{k}} \vdash$$

$$C_{\mathcal{k}-1} \vee \forall x_{(k-1)n+2} \forall x_{(k-1)n+3} \dots \forall x_{kn+1} B_{\mathcal{k}}$$

Por lo tanto, realizando un cambio de variable ligada  $n$  veces, se tiene que:

$$D_{\mathcal{k}} \vdash$$

$$C_{\mathcal{k}-1} \vee \forall w_1 \forall w_2 \dots \forall w_n \mathcal{J}_{x_{[\mathcal{k}1]}^{u_1} x_{[\mathcal{k}2]}^{u_2} \dots x_{[\mathcal{k}m]}^{u_m}} M$$

Se tiene también que por la regla de Introducción del cuantificador existencial (Teorema 2.1.1.11.)  $m$  veces, se concluye que:

$$\vdash \forall w_1 \forall w_2 \dots \forall w_n \mathcal{J}_{x_{[\mathcal{k}1]}^{u_1} x_{[\mathcal{k}2]}^{u_2} \dots x_{[\mathcal{k}m]}^{u_m}} M \rightarrow \varphi'$$

En consecuencia:

$$D_{\mathcal{k}} \vdash C_{\mathcal{k}-1} \vee \varphi'$$

Entonces, aplicando la regla de Introducción del generalizador para todas las variables libres de  $C_{\mathcal{k}-1}$ , es decir, hasta la variable  $x_{(k-1)n+1}$ , y usando la ley de distribución de cuantificadores (en disyunción), se obtiene que:

$$D_{\mathcal{k}} \vdash D_{\mathcal{k}-1} \vee \varphi' (*)$$

Como por Hipótesis inductiva se tiene que  $D_{\mathcal{k}-1} \vdash \varphi'$ , entonces por el Teorema de la deducción (2.1.1.3.) se concluye que  $\vdash D_{\mathcal{k}-1} \rightarrow \varphi'$ . Y en consecuencia (considerando  $*$ ) se obtiene lo buscado:  $D_{\mathcal{k}} \vdash \varphi'$ . Fin de la prueba del lema.

Para continuar con la prueba del teorema se considerarán dos casos (se usa aquí el Principio del tercero excluido, Church resalta este hecho en un pie de página de su prueba,<sup>38</sup> esto significa que dicha demostración no es totalmente constructiva.):

*Caso 1:* Para algún  $\mathcal{k}$ ,  $C_{\mathcal{k}}$  es un teorema. *Caso 2:* Para cualquier  $\mathcal{k}$ ,  $C_{\mathcal{k}}$  no es un teorema. *Caso 1:* Para algún  $\mathcal{k}$ ,  $C_{\mathcal{k}}$  es un teorema. Entonces por generalización reiterada ( $\mathcal{k}n+1$  veces),  $D_{\mathcal{k}}$  es un teorema. En consecuencia, por el Lema anterior  $\varphi'$  es un teorema. *Caso 2:* Para cualquier  $\mathcal{k}$ ,  $C_{\mathcal{k}}$  no es un teorema. Entonces,  $C_{\mathcal{k}}$  no puede ser instancia de una tautología de la Lógica proposicional, pues toda instancia de tautología es un

38

*Ibidem.*

axioma y por lo tanto es un teorema. En consecuencia considerando a  $C_k$  como una fórmula de la Lógica proposicional donde sus fórmulas atómicas son letras proposicionales se tiene que existen asignaciones de valores de verdad para sus fórmulas atómicas tal que toda valuación que se construya respetando dichos valores hace falsa a  $C_k$ . Dichas asignaciones de valores de verdad para las fórmulas atómicas de  $C_k$  que hacen falsa a  $C_k$  siempre son finitas, pues no exceden en número a la cantidad de filas de su tabla de verdad. Sea  $E_1, E_2, E_3, \dots$  una lista de las subfórmulas atómicas de los  $C_k, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  ( $C_1, C_2, C_3, \dots$ ) definida de la siguiente manera: Primero van todas las diferentes subfórmulas atómicas de  $C_1$  en el orden de su primera ocurrencia (de izquierda a derecha) en  $C_1$ . Después van todas las subfórmulas atómicas de  $C_2$  que no aparecen en  $C_1$  ordenadas según su orden de primera ocurrencia en  $C_2$ . Luego van todas las subfórmulas atómicas de  $C_3$  que no ocurren en  $C_1$  y  $C_2$  ordenadas según su primera ocurrencia. Y así sucesivamente. Ahora se define una *asignación maestra*  $b: \{E_i\}_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \rightarrow \{V, F\}$  como sigue: Si  $E_1$  recibe el valor de verdad  $V$  en una cantidad infinita de asignaciones de valores de verdad para las fórmulas atómicas de los  $C_i$  que falsean a  $C_p$ , entonces se define  $b(E_1) = V$ ; en caso contrario (si es finito), entonces  $E_1$  debe tomar el valor  $F$  en una cantidad infinita de asignaciones de valores de verdad para las fórmulas atómicas de los  $C_i$  que falsean a  $C_p$ , en este caso se define  $b(E_1) = F$ . Ahora para definir  $b(E_2)$  se considera la cantidad infinita de asignaciones de valores de verdad para las fórmulas atómicas de los  $C_i$  que permitieron definir a  $b(E_1)$ . Si en dichas asignaciones de valores de verdad para las fórmulas atómicas de los  $C_i$  que falsean a  $C_i$ ,  $E_2$  toma el valor  $V$  en una cantidad infinita de veces, entonces se define  $b(E_2) = V$ ; en caso contrario se define  $b(E_2) = F$ . Para definir  $b(E_3)$  se considera la cantidad infinita de asignaciones de valores de verdad para las fórmulas atómicas de los  $C_i$  que falsean a  $C_i$  donde  $E_1$  y  $E_2$  toman el mismo valor que  $b(E_1)$  y  $b(E_2)$  (tal cantidad infinita porque contiene al conjunto de todas las que permitieron definir a  $b(E_2)$ ). Si  $E_3$  toma el valor  $V$  en una cantidad infinita de ellas, entonces se define  $b(E_3) = V$ , en caso contrario  $b(E_3) = F$ . Así sucesivamente.

Proposición: Para cada  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  $b(C_k) = F$ .

Demostración: Por reducción al absurdo. Supóngase que es falsa la proposición. Es decir, supóngase que existe un  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tal que  $b(C_k) = V$ . Sean  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_m$  todas las subfórmulas atómicas de  $C_k$ . Y sean  $b(E_1), b(E_2), b(E_3), \dots, b(E_m)$  sus valores respectivos por la asignación maestra. Entonces tomando en cuenta que las  $C_i$  son disyunciones, y también a la tabla de verdad de la disyunción, se concluye que para todo  $j > k$ , no existen asignaciones de valores de verdad para las fórmulas atómicas de los  $C_j$  que falsen a  $C_j$  y preserven los valores  $b(E_1), b(E_2), b(E_3), \dots, b(E_m)$ . Esto contradice la definición de la asignación maestra  $b$ . Por lo tanto, para cada  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  $b(C_k) = F$ . Fin de la prueba de la Proposición.

Ahora, con la ayuda de la asignación maestra, definimos una estructura  $\mathfrak{U}$  donde  $\varphi'$  será falsa, el universo de  $\mathfrak{U}$  es  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  y tendrá una relación  $i$ -aria por cada símbolo relacional  $i$ -ario de  $\varphi'$ . Supóngase que  $\varphi'$  tiene  $n$  símbolos relacionales:

$$\mathfrak{U} = \langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, R_1^{\mathfrak{U}}, R_2^{\mathfrak{U}}, R_3^{\mathfrak{U}}, \dots, R_n^{\mathfrak{U}} \rangle$$

Si  $R_j$  es un símbolo relacional  $i$ -ario de  $\varphi'$  entonces definimos:

$(u_1, u_2, \dots, u_i) \in R_j^{\mathfrak{U}}$  si y sólo si  $b(R_j(x_{u_1}, x_{u_2}, \dots, x_{u_i})) = V$ . Y si  $b(R_j(x_{u_1}, x_{u_2}, \dots, x_{u_i}))$  no está definida, es decir,  $R_j(x_{u_1}, x_{u_2}, \dots, x_{u_i})$  no es ninguna  $E_t$ , entonces  $(u_1, u_2, \dots, u_i) \in R_j^{\mathfrak{U}}$ .

Ahora se define una asignación  $s: VAR \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$  de la siguiente manera:  $s(x_u) = u$ , para todo  $u \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Se cumple que para todo  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $\mathfrak{U} \models C_k[s]$ . Porque por la Proposición anterior se tiene que  $b(C_k) = F$ , para todo  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Notar que " $s$  y  $b$  le asignan el mismo valor a todas las subfórmulas atómicas de  $C_k$ ":  $\mathfrak{U} \models R_j(x_{u_1}, x_{u_2}, \dots, x_{u_i})[s]$  si y sólo si  $(s(x_{u_1}), s(x_{u_2}), \dots, s(x_{u_i})) \in R_j^{\mathfrak{U}}$  si y sólo si  $(u_1, u_2, \dots, u_i) \in R_j^{\mathfrak{U}}$  si y sólo si  $b(R_j(x_{u_1}, x_{u_2}, \dots, x_{u_i})) = V$ . Por lo tanto, " $s$  y  $b$  le asignan el mismo valor a  $C_k$ ". En consecuencia, como  $C_k = C_{k-1} \vee B_{k^2}$ , se concluye que  $\mathfrak{U} \models B_k[s]$ , para todo  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Por lo tanto, por definición de satisfacibilidad, se tiene que:

$$\mathfrak{U} \models \forall w_1 \forall w_2 \dots \forall w_n s_{w_1}^{X_{(k-1)n+2}} \quad X_{(k-1)n+3} \quad \dots X_{kn+1} M[s]$$

Es decir, reescribiendo la expresión anterior:

$$\mathfrak{U} \models \forall w_1 \forall w_2 \dots \forall w_n s_{[k1]}^{u_1} \quad X_{[k2]}^{u_2} \quad \dots X_{[km]}^{u_m} M[s]$$

Como esto ocurre para todo  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , todas la  $m$ -tuplas de variables  $(x_{[k1]}, x_{[k2]}, \dots, x_{[km]})$  son consideradas, entonces, por definición de  $s$ ,  $(s(x_{[k1]}), s(x_{[k2]}), \dots, s(x_{[km]})) = ([k_1], [k_2], \dots, [k_m])$ , es decir, con  $s$  quedan consideradas todas las  $m$ -tuplas de naturales.

Por lo tanto:

$$\mathfrak{U} \models \exists u_1 \exists u_2 \dots \exists u_m \forall w_1 \forall w_2 \dots \forall w_n M(u_1, u_2, \dots, u_m, w_1, w_2, \dots, w_n)[s]$$

Lo que se quería demostrar. Con esto termina la demostración del teorema.  $\square$

El siguiente corolario es relevante porque conecta la “validez” de la Lógica de primer orden con la “tautologicidad” de la Lógica proposicional, en cierta medida se puede afirmar que “reduce el problema de la validez a un problema de tautologicidad”<sup>39</sup>:

Corolario 2.4.4. Si  $\varphi'$  es una fórmula en Forma normal de Skolem:

$$\varphi' = \exists u_1 \exists u_2 \dots \exists u_m \forall w_1 \forall w_2 \dots \forall w_n M(u_1, u_2, \dots, u_m, w_1, w_2, \dots, w_n),$$

donde  $M$  es una fórmula sin cuantificadores. Si  $B_k$  es la siguiente fórmula sin cuantificadores:

$$\bigvee_{x_{[k1]} x_{[k2]} \dots x_{[km]} x_{(\underline{k-1})n+2} x_{(\underline{k-1})n+3} \dots x_{\underline{k}n+1}} M,$$

y si  $C_k$  es la siguiente fórmula disyuntiva  $B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_k$ , entonces  $\varphi'$  es un teorema (y es válida) si y sólo si existe algún entero positivo  $k$  tal que  $C_k$  es una instancia de sustitución de una tautología.

Demostración:  $\square$

Nota sobre la demostración del Teorema de Completitud: Aunque la prueba anterior se realizó para un Sistema axiomático de la Lógica de primer orden sin identidad, la misma se puede extender para un Sistema axiomático de la Lógica de Primer orden con identidad.<sup>40</sup>

### 3. La Propiedad de Partición Polarizada es falsa en el Modelo Básico de Cohen

<sup>39</sup> *Ibidem.* Nerode, Shore, *Logic for Applications*, cit.

<sup>40</sup> *Ibid.*, p.283. Gödel, “La suficiencia de... cit., p.18

En esta sección se ofrece una demostración de que la PPP es falsa en el MBC. En la demostración se usa un resultado que probó Jech:<sup>41</sup> *La versión débil del Axioma de elección “Cualquier familia de conjuntos no vacíos y bien ordenables tiene una función de elección” es verdad en el MBC.*

### 3.1. Definición del Modelo básico de Cohen como un $L(A)$

A continuación se define informalmente el MBC utilizando la clase de los conjuntos constructibles de Gödel, el forcing de Cohen que agrega una cantidad infinita numerable de reales genéricos, y la técnica de constructibilidad relativizada, definiciones formales del mismo (en ZF) pueden encontrarse en los textos de Jech:<sup>42</sup>

(1.1) Constructibilidad relativizada: Sea  $A$  un conjunto cualquiera. Se define el modelo  $L(A)$  por inducción transfinita sobre los ordinales de la siguiente manera:<sup>43</sup>

(Definiciones previas: Un conjunto  $D$  es *transitivo* si  $\forall x(x \in D \rightarrow x \subseteq D)$ . Dado un conjunto  $B$ , la *clausura transitiva* de  $B$  es el menor conjunto (respecto a  $\subseteq$ ) transitivo y que contiene a  $B$ . Se denotará por  $Cl(B)$ ).

$$L_0(A) = Cl(\{A\})$$

$$L_{\alpha+1}(A) = \{X \subseteq L_\alpha(A) : X \text{ es definible en la estructura}$$

$$(L_\alpha(A), \in, \langle d : d \in L_\alpha(A) \rangle)\}$$

$$L_\lambda(A) = \bigcup_{\beta \in \lambda} L_\beta(A), \lambda \text{ límite}$$

$$L(A) = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} L_\alpha(A)$$

Lema 3.1.1.  $L(A)$  es el menor modelo transitivo de ZF que contiene los ordinales y  $A \in L(A)$ .

Una prueba de este resultado puede encontrarse en los textos mencionados.<sup>44</sup>

(1.2) Sea  $L[\{a_n : n < \omega\}]$  el modelo genérico de Cohen que se obtiene agregando  $\aleph_0$  reales genéricos con el método de forcing al modelo

<sup>41</sup> Jech, *The Axiom of...*, cit.

<sup>42</sup> *Ibidem.* Jech, *Set Theory*, cit.

<sup>43</sup> *Ibidem.*

<sup>44</sup> *Ibidem.* Jech, *The Axiom of...*, cit.

base  $L$  (la clase de los conjuntos constructibles de Gödel [15]). Sea  $\mathcal{A} = \{a_n : n < \omega\}$ . Entonces el  $MBC$  es  $L(\mathcal{A})$  en  $L[\{a_n : n < \omega\}]$ .

3.2. Algunas propiedades del Modelo básico de Cohen

Lema 3.2.1. (i)  $MBC$  es un modelo transitivo de  $ZF$  que contiene los ordinales.

(ii)  $A \subseteq MBC$  y  $\mathcal{A} \in MBC$ .

(iii)  $MBC \not\models \mathcal{A} \in E$ .

(iv) En el  $MBC$  vale que:  $(C(\infty, WO))$  Cualquier familia de conjuntos no vacíos y bien ordenables tiene una función de elección.

Una prueba de este resultado puede encontrarse en los textos citados.<sup>45</sup>

3.3. Definición de la Propiedad de Partición Polarizada

El *Espacio topológico de Baire* es el par  $(\mathbb{N}^\infty, t)$ , donde  $\mathbb{N}^\infty = \{f : f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$  y  $t$  es la topología generada por los abiertos básicos  $U_s = \{f \in \mathbb{N}^\infty : s \subseteq f\}$ , donde  $s$  es una sucesión finita de naturales. En otras palabras,  $t$  es la topología producto de  $\mathbb{N}^\infty$  que resulta de dotar a  $\mathbb{N}$  con la topología discreta. Es conocido que el espacio de Baire es homeomorfo a los irracionales considerados como un subespacio del conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ .<sup>46</sup>

*Propiedad de Partición Polarizada (PPP)*: La expresión

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \omega \\ \omega \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

significa que para toda (partición)  $F : \mathbb{N}^\infty \rightarrow 2$  existe una sucesión de conjuntos  $\{H_i\}_{i \in \omega}$  tal que:

- $H_i \subseteq \omega$ ,  $|H_i| = n_i$ , y
- $F$  es constante en  $\prod_{i \in \omega} H_i$

<sup>45</sup> *Ibidem.* Jech, *Set Theory*, cit.

<sup>46</sup> *Ibidem.*

### 3.4. Prueba de que la Propiedad de Partición Polarizada es falsa en el Modelo Básico de Cohen

Teniendo presente las secciones anteriores para probar que la PPP es falsa en el MBC es suficiente con demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.4.1 (F. Galindo - C. Di Prisco). *Si  $C(\omega, \mathcal{WO})$ , entonces*

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \omega \\ \omega \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

es falsa.

Demostración: Se usa  $C(\omega, \mathcal{WO})$  para definir una partición de  $\mathbb{N}^\omega$  en dos pedazos que no admite homogéneo de la forma  $\prod_{i \in \omega} H_i$ , donde  $H_i \subseteq \omega$  y  $|H_i| = 2$ , para todo  $i \in \omega$ .

En  $\mathbb{N}^\omega$  se define la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \leftrightarrow \exists n < \omega \forall m \geq n [x(m) = y(m)].$$

Para cada  $x \in \mathbb{N}^\omega$  su clase de equivalencia  $\bar{x}$  es numerable, pues el conjunto de las sucesiones finitas de números naturales es numerable. Entonces para cada  $x \in \mathbb{N}^\omega$  su clase de equivalencia  $\bar{x}$  es un conjunto bien ordenable. En consecuencia, por  $C(\omega, \mathcal{WO})$ , existe una función de elección  $f$  para la familia  $\{\bar{x} : x \in \mathbb{N}^\omega\}$ .

Con la función  $f$  se define la partición  $G: \mathbb{N}^\omega \rightarrow 2$  de la siguiente manera:  $G(x) = 0$  si el menor natural  $n$  tal que  $\forall m \geq n [x(m) = f(\bar{x})(m)]$  es par. Y  $G(x) = 1$  si el menor natural  $n$  tal que  $\forall m \geq n [x(m) = f(\bar{x})(m)]$  es impar.  $G$  no admite homogéneo de la forma  $\prod_{i \in \omega} H_i$ , pues para cada  $x \in \prod_{i \in \omega} H_i$  definimos  $x' \in \prod_{i \in \omega} H_i$ , así:  $x'(m) = x(m)$ , si  $m \neq n$  y  $n$  es el menor natural tal que  $\forall m \geq n [x(m) = f(\bar{x})(m)]$ . Y  $x'(n) = k$ , donde  $k \in H_n \setminus \{x(n)\}$ . Es claro que  $x' \in \bar{x}$  y que  $G(x) = 0$  si sólo si  $G(x') = 1$ .  $\square$

