El Método de Forcing: Algunas aplicaciones y una aproximación a sus fundamentos metamatemáticos

Franklin Galindo

Agosto 2016

Dedicatoria

A mi esposa Yasmin Andrina y a mi hija Lenis Alfonsina.

Agradecimientos

A Dios (Hashem, El Ser).

A mi esposa y a mi hija.

A todos los maestros que he tenido, en especial al Profesor Carlos Augusto Di Prisco.

A todos los alumnos que he tenido.

Resumen

Es conocido que el método de forcing es una de las técnicas de construcción de modelos más importantantes de la Teoría de conjuntos en la actualidad, siendo el mismo muy útil para investigar problemas de matemática y de fundamentos de la matemática. El objetivo del siguiente trabajo es estudiar tal método, describir algunas de sus aplicaciones y ofrecer una aproximación a sus fundamentos metamatemáticos. Se aspira que este texto sirva de apoyo para aprender dicho método.

Contenido

1 Introducción

La teoría de conjuntos que se usará en este trabajo es la de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección (ZFC) tal como es desarrollada en [D1], [K] y [J1].

Sea T una subteoría de ZFC; por ejemplo la misma ZFC, o ZF(=ZFC$-$ Axioma de elección), o ZF$^-$(=ZF$-$ Axioma de fundamentación). Sea φ una proposición del lenguaje de T. (a) Se dice que φ es *independiente* de T (o es indecidible en T) si y sólo si T $\nvdash \varphi$ y T $\nvdash \neg\varphi$. (b) Se dice que T $+ \varphi$ es *consistente relativa* a T si y sólo si:

Si T es consistente, entonces T $+ \varphi$ es consistente.

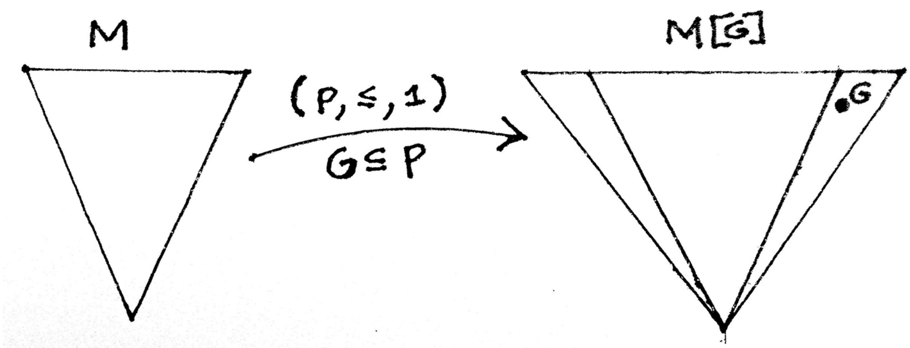
Si T es inconsistente es fácil responder a la pregunta de si φ es independiente o no de T, la respuesta es que NO. Pero si T es consistente no es tan fácil dar una respuesta a esta interrogante, pues para decir que SI hay que probar que T $\nvdash \varphi$ y que T $\nvdash \neg\varphi$, y para decir que NO hay que probar que T $\vdash \varphi$ o que $T \vdash \neg\varphi$; y en ambos casos tales pruebas pueden ser muy difíciles. En el transcurso de la historia el intento por responder que SI a la pregunta en cuestión para casos específicos ha permitido la creación de varios métodos, los cuales hoy en día representan un apoyo para la investigación y una motivación para la invención. Uno de tales métodos es el de *forcing*, la técnica de construcción de modelos que inventó Cohen (1963-64) para hacer pruebas de consistencia relativa, y con la cual demostró que ZFC + la negación de la Hipótesis de contínuo ($\neg$ HC) es consistente relativa con ZFC; y que ZF + la negación del Axioma de elección ($\neg$ AE) es consistente relativa con ZF. Lo cual permitió culminar la prueba de la independencia de ambas proposiciones de ZFC y ZF, respectivamente, pues ya *G*ödel había probado (1938-40) que ZF + HC + AE es consistente relativa con ZF, construyendo la clase de los conjuntos constructibles (**L**), otra importante técnica para probar consistencia relativa la cual hoy en día se ha generalizado (por ejemplo a L(A) o L[A]) y tiene multiples aplicaciones [G-D].

Otros métodos para construir modelos de la teoría de conjuntos son, por ejemplo, *HOD(A)* y *Ultraproductos* [J1], [Ch-Ke].

Actualmente el método de forcing es una de las técnicas de construcción de modelos más importantantes de la Teoría de conjuntos, siendo el mismo muy útil para investigar problemas de matemática y de fundamentos de la matemática.

El método de forcing es la técnica que se estudiará en este trabajo y según Kunen [K] existen al menos dos maneras de interpretarlo: "forcing con modelos transitivos numerables" y "forcing con modelos sintácticos o forcing sobre **V**". Aquí se usará el forcing con modelos transitivos numerables tal como se desarrolla en [K], siendo la idea básica del mismo la siguiente: Si se quiere probar que ZFC + φ es consistente relativa a ZFC se supone la existencia de un modelo transitivo y numerable M (llamado *modelo base*) de ZFC y luego se extiende M a otro modelo transitivo y numerable $M[G]$ de ZFC + φ tal que $M[G]$ es el menor modelo transitivo de ZFC que contiene a $M \cup \{G\}$, y $M[G]$ y M tienen los mismos ordinales. $M[G]$ se llama la *extensión genérica* de M correspondiente a G, donde G es un P*-genérico* sobre M, es decir, G cumple con (a) y (b): (a) G es un filtro sobre un orden parcial con un mayor elemento $(P, \leq, 1)$, orden parcial que pertenece a M. Y (b) G intersecta a cualquier subconjunto denso D de $(P, \leq, 1)$ que este en M. En síntesis, dado un $(P, \leq, 1) \in M$ y un G P*-genérico* sobre M se define $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^P\}$, donde M^P es el conjunto de todos los P-nombres de M y τ_G es la interpretación(o el valor) de τ en G. La idea que se usa para extender M a $M[G]$ puede recordar el Teorema de Kronecker [F] en álgebra sobre extensión de cuerpos: Dados un cuerpo F y un polinomio $f(x)$ no constante en el anillo de polinomios en x con coheficientes en F, $F[x]$; existe un cuerpo E que extiende a F y existe $a \in E$ tal que $f(a) = 0$.

La siguiente figura sugiere la idea de la extensión de M a $M[G]$ usando forcing con modelos transitivos numerables:



Además de los modelos M, los ordenes parciales $(P, \leq, 1)$, los conjuntos densos D, los G P-genéricos sobre M, los P-nombres y las extensiones $M[G]$; en el forcing con modelos transitivos numerables se utiliza la relación de forcing $p \Vdash \varphi$ (p fuerza a φ), donde $p \in P$. Esta relación y los otros componentes mencionados en el párrafo anterior se definirán en la sección siguiente (2).

Este trabajo contiene a mi tesis de maestría llamada "*Forcing y reales genéricos*" [Gal] y algunos resultados y reflexiones posteriores que he realizado sobre el tema.

La exposición se realizará en el siguiente orden: En la siguiente sección (2) se presentarán algunos conceptos preliminares, incluyendo la descripción de ZFC y del método de forcing con modelos transitivos numerables; luego en la sección 3 se ofrecerán algunas aplicaciones del método de forcing, incluyendo la prueba de Cohen de que la negación de la hipótesis del continuo es consistente con ZFC; y por último, en la sección 4, se expondrá una aproximación a los fundamentos metamatemáticos del método de forcing.

2 ZFC, el Método de forcing con modelos transitivos numerables y otros conceptos preliminares

2.1 Introducción

La finalidad de esta sección es presentar la Teoría Axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el Axioma de elección (ZFC), el Método de forcing con modelos transitivos numerables y algunos otros conceptos preliminares necesarios para desarrollar este trabajo. Entre ellos están: Ordinales, cardinales, Aritmética transfinita, la clase de los conjuntos constructibles de Gödel, cardinales inaccesibles, los Teoremas de incompletitud de Gödel, árboles perfectos, los espacios topológicos de Baire y Cantor, etc.

2.2 ZFC

Sea $\mathcal{L}_\in$ el lenguaje de primer orden con identidad que tiene como único símbolo no constante en su alfabeto al relacional binario $\in$. Como es usual, dada una fórmula φ de $\mathcal{L}_\in$ y dada una secuencia finita de variables distintas, $v_0, \dots, v_m$ del alfabeto de $\mathcal{L}_\in$, la expresión $\varphi(v_1, \dots, v_m)$ significa que las variables libres de φ son a lo sumo $v_1, \dots, v_m$. ZFC es el siguiente conjunto de axiomas (en $\mathcal{L}_\in$) para la teoría de conjuntos, entendiendo (intuitivamente) por teoría de conjuntos a la colección de todas las sentencias verdaderas en el UNIVERSO DE LOS CONJUNTOS:

1. Axioma de extensionalidad: Si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces ellos son iguales.

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

2. Axioma del conjunto vacio: Existe un conjunto que no tiene elementos.

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

El conjunto sin elementos es único y se denotará por $\emptyset$.

3. Axioma de pares: Dados dos conjuntos x e y existe un conjunto z cuyos elementos son exactamente x e y.

$$\forall x \forall y \exists z \forall r (r \in z \leftrightarrow (r = x \vee \ r = y))$$

El conjunto z es único y se denotará por $\{x, y\}$.

4. Axioma de la union: Si x es un conjunto, entonces existe un conjunto y cuyos elementos son los elementos de los elementos de x.

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists w (w \in x \wedge \ z \in w))$$

El conjunto y es único y se denotará por $\cup x$.

Para comentar el siguiente axioma es conveniente introducir una definición: Se dice que una fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_n, x, y)$ es una *relación funcional* en x, y con parámetros $p_1, \ldots, p_n$ si la fórmula $\psi(p_1, \ldots, p_n, x, y)$ que se obtiene fijando los valores de $x_1, \ldots, x_n$ en $p_1, \ldots, p_n$ cumple que: $\forall x \forall y \forall z (\psi(p_1, \ldots, p_n, x, y) \wedge \psi(p_1, \ldots, p_n, x, z) \rightarrow y = z)$.

5. Axioma (Esquema) de reemplazo:

Para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, x, y)$ la siguiente proposición es un axioma(de reemplazo):

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n [\forall x \forall y \forall z (\varphi(x_1, \ldots, x_n, x, y) \wedge \varphi(x_1, \ldots, x_n, x, z) \rightarrow y = z)$$
$$\rightarrow \forall u \exists v \forall y (y \in v \leftrightarrow \exists x (x \in u \wedge \varphi\,(x_1, \ldots, x_n, x, y)))]$$

Es decir, si la fórmula obtenida de $\varphi(x_1, \ldots, x_n, x, y)$ fijando valores para las variables $x_1, \ldots, x_n$ es una relación funcional en x, y; entonces, dado un conjunto u, existe un conjunto v cuyos elementos son las imágenes de los elementos de u por esa relación funcional. El conjunto v es único y se denotará por $\{y : \exists x \in u \varphi(p_1, \ldots, p_n, x, y)\}$, si los conjuntos $p_1, \ldots, p_n$ son los valores que se le fijaron a las variables $x_1, \ldots, x_n$.

6. Axioma (Esquema) de separación o de comprensión:

   Para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, x)$ la siguiente proposición es un axioma(de separación):

   $$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall z \exists y \forall w (w \in y \leftrightarrow w \in z \wedge \varphi(x_1, \ldots, x_n, w))$$

   Es decir, dada la propiedad obtenida de $\varphi(x_1, \ldots, x_n, x)$ fijando valores para las variables $x_1, \ldots, x_n$, por ejemplo $p_1, \ldots, p_n$, y dado un conjunto z, existe un conjunto y cuyos elementos son los elementos de z que satisfacen $\varphi(p_1, \ldots, p_n, x)$.

   El conjunto y es único y se denotará por $\{x \in z : \varphi(p_1, \ldots, p_n, x)\}$ o por $\{x : x \in z \wedge \varphi(p_1, \ldots, p_n, x)\}$.

7. Axioma del conjunto de partes: Dados dos conjuntos w y u se dice que w es un *subconjunto* de u $(w \subseteq u)$ si $\forall z(z \in w \rightarrow z \in u)$. El axioma de partes dice que para todo conjunto x existe un conjunto y cuyos elementos son los subconjuntos de x.

   $$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

   El conjunto y es único y se denotará por $P(x)$.

   El resto de los axiomas se enunciarán después de las siguientes definiciones: (I) $\{x\} = \{x, x\}$. (II) $x \cup y = \cup\{x, y\}$. (III) $s(x) = x \cup \{x\}$. (IV) $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. (V) $x \times y = \{(z, w) : z \in x \wedge w \in y\}$. (VI) z es una *relación* en $x \times y$ si $z \subseteq x \times y$. Si z es una relación en $x \times y$ a veces se escribirá vzw en vez de $(v, w) \in z$. Si z es una relación en $x \times y$ y $x = y$ se dice que z es una relación en x .(VII) $dom(z) = \{x : \exists y((x, y) \in z)\}$. (VIII) $rango(z) = \{y : \exists x((x, y) \in z)\}$. (IX) f es una *función* de x en y $(f : x \longrightarrow y)$ si f es una relación en $x \times y$, y para cada $v \in x$ existe un único $w \in y$ tal $(v, w) \in f$. A veces se escribirá $f(v) = w$ en vez de $(v, w) \in f$. (X) f es *sobreyectiva* si $rango(f) = y$. (XI) f es *inyectiva* si: $\forall v, w \in dom(f)(f(v) = f(w) \rightarrow v = w)$. (XII) f es *biyectiva* si f es inyectiva y sobreyectiva . (XIII) Si $w \subseteq x$, entonces $f|w = \{(v, f(v)) : v \in w\}$ y $f''w = \{f(v) : v \in w\}$. (XIV) $x^y = \{f : f : y \longrightarrow x\}$. (XV) $x - y = \{z \in x : z \notin y\}$. (XVI)Si $x = \emptyset$, $\cap x = \emptyset$. Si $x \neq \emptyset$, $\cap x = \{z : \forall y \in x(z \in y)\}$. (XVII) $v \cap w = \cap\{v, w\}$.

8. Axioma del infinito: Un conjunto x es *inductivo* si $\emptyset \in x$ y para todo conjunto z, si $z \in x$ entonces $s(z) \in x$. El axioma del infinito dice que existe un conjunto inductivo.

$$\exists x(x \text{ es inductivo})$$

9. Axioma de fundamentación: Para cualquier conjunto x, no vacío, existe un elemento y con el cual x no tiene elementos en común. Esto quiere decir que y es minimal en x con respecto a $\in$.

$$\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)$$

10. Axioma de elección: Dado un conjunto x se dice que la función f es una función de elección (o una función selectora) para x si el $dom(f) = x - \{\emptyset\}$ y para todo $z \in dom(f)$, se tiene que $f(z) \in z$. El axioma de elección dice que todo conjunto tiene un función selectora.

$$\forall x \exists f(\, f \text{ es una función de elección para x}\,)$$

Sea $\vdash$ la relación de demostrabilidad en el cálculo de predicados de primer orden con identidad correspondiente al lenguaje $\mathcal{L}_\in$ [E2], [Me]. Sea φ una proposición de $\mathcal{L}_\in$. φ es un *teorema* de ZFC si ZFC$\vdash \varphi$.

2.3 Ordenes parciales, anticadenas, conjuntos densos y filtros

Definición 2.3.1. *Sea A un conjunto y R una relación en A(es decir, $R \subseteq A \times A$)*

1. *R es reflexiva si y sólo si $\forall x \in A(xRx)$*
2. *R es simétrica si y sólo si $\forall x, y \in A(xRy \rightarrow yRx)$*

3. *R es transitiva si y sólo si* $\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \to xRz)$

4. *R es antisimétrica si y sólo si* $\forall x, y \in A(xRy \wedge yRx \to x = y)$.

Definición 2.3.2. 1. *Un orden parcial es un par* $(P, \leq)$ *donde* P *es un conjunto no vacío y* $\leq$ *es una relación en* P *que es reflexiva y transitiva. Los* $p \in P$ *se llaman condiciones y cuando* $p \leq q$ *se dice que* p *extiende a* q. $(P, \leq)$ *es un orden parcial propio si y sólo si* $\leq$ *es antisimétrica. En este caso se define,* $p < q \leftrightarrow p \leq q \wedge p \neq q$, *y decimos que* $(P, <)$ *es también un orden parcial (estricto). Es claro que en el orden parcial* $(P, <)$ *la relación* $<$ *es transitiva y* $\forall p \in P(p \not< p)$.

2. *El par* (P, R) *es un orden total (o lineal) si el par* (P, R) *es un orden parcial, y la relación* R *satisface la propiedad de tricotomía:* $\forall x, y \in P(xRy \vee yRx \vee x = y)$. *Si* $\forall p \in P[\neg(pRp)]$, *se dice que* (P, R) *es un orden total estricto.*

3. *Un o.p.m es un orden parcial con un mayor elemento. Es decir, es una terna* $(P, K, 1)$ *tal que* (P, K) *es un orden parcial y 1 es un mayor elemento de* P, *es decir,* $1 \in P$ *y* $\forall x \in P(xK1)$.

Definición 2.3.3. 1. *Sean* (P, R) *un orden parcial y* $D \subseteq P$. $x \in P$ *es un elemento minimal (máximal) de* D *si* $x \in D \wedge$ *no existe ningún* $y \in D$ *tal que* $y \neq x \wedge yRx$ (xRy). x *es una cota inferior (superior) de* D *si* $\forall y \in D(xRy \vee y = x)\,(yRx \vee y = x)$. x *es un ínfimo (supremo) de* D *si* x *es cota inferior (superior) de* $D \wedge$ *para todo* $y \in P$, *si* y *es una cota inferior (superior) de* D, *entonces* $yRx \vee y = x\,(xRy \vee y = x)$. x *es un menor (mayor) elemento de* D *si* $x \in D \wedge \forall y \in D(xRy \vee y = x)\,(yRx \vee y = x)$.

2. *El par* (P, R) *es un buen orden si* (P, R) *orden parcial y cualquier subconjunto no vacío de* P *tiene un menor elemento. Si* (P, R) *es un orden parcial estricto,se dice que* (P, R) *es un buen orden estricto (Notar que si* R *es un buen orden, entonces* R *es un orden total).*

(En algunos casos, cuando hablemos de un orden en cualquiera de sus variantes escribiremos sólo su universo omitiendo la relación, por ejemplo, escribiremos P *en lugar de* (P, R)*).*

Un importante resultado sobre conjuntos bien ordenados es el Principio de Inducción transfinita, a continuación se enuncia y una prueba del mismo puede encontrarse en [D1]:

Teorema 2.3.4 (Principio de Inducción transfinita (1)). *Sea (A, R) un conjunto bien ordenado y $\varphi(x)$ una fórmula del lenguaje de la Teoría de Conjuntos. Entonces:*

$$\{\forall x \in A[\forall y \in A(yRx \to \varphi(y)) \to \varphi(x)]\} \to \forall x \in A\varphi(x).$$

Otros resultados importantes para este trabajo que ya se pueden enunciar son el Principio del Buen Orden, *Todo conjunto se puede bien ordenar*, y el Lema de Zorn. Es conocido que dichas proposiciones son equivalentes al Axioma de elección, una prueba de ello puede encontrase en [D1]. También se sabe que existen muchas otras proposiciones equivalentes a estas tres, un tratamiento de ellas puede encontrase [H-R] y [J2]. A continuación se enuncia el Lema de Zorn:

Teorema 2.3.5 (Lema de Zorn). *Sea (A, R) un conjunto parcialmente ordenado tal que cada $X \subseteq A$ totalmente ordenado tiene una cota superior en A. Entonces A tiene un elemento máximal.*

Vale la pena enunciar ahora el *Principio de Elección Dependiente (DC)*, una versión débil del Axioma de elección que implica elección numerable: "Toda familia numerable de conjuntos no vacíos tiene una función selectora". Elección numerable es muy utilizada, por ejemplo, en el análisis matemático [J1]:

Teorema 2.3.6 (Principio de elección dependiente (DC)). *Si E es una relación binaria sobre un conjunto no vacío A, y si para cualquier $a \in A$ existe un $b \in A$ tal que bEa, entonces existe una secuencia $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ en A tal que: $a_{n+1}Ea_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definición 2.3.7. *Sea $(P, \leq)$ un orden parcial . Una cadena en P es un conjunto $C \subseteq P$ tal que $\forall p, q \in C(p \leq q \vee q \leq p)$. p y q son compatibles $(p|q)$ si y sólo si $\exists r \in P(r \leq p \wedge r \leq q)$. p y q son incompatibles ($p \perp q$) si y sólo si $\neg\exists r \in P(r \leq p \wedge r \leq q)$. Una anticadena en P es un subconjunto $A \subseteq P$ tal que $\forall p, q \in A(p \neq q \rightarrow p \perp q)$.*

Definición 2.3.8. *Sea $(P, \leq)$ un orden parcial. $D \subseteq P$ es denso en P si y sólo si $\forall p \in P \exists q \in D(q \leq p)$. Si $D \subseteq P$ y $p \in P$, entonces D es denso bajo p en P si y sólo si para cualquier $q \in P$ tal que $q \leq p$, existe un $r \in D$ tal que $r \leq q$. $G \subseteq P$ es un filtro sobre P si y sólo si:*

1. $\forall p, q \in G \, \exists r \in G(r \leq p \wedge r \leq q)$
2. $\forall p \in G \, \forall q \in \mathsf{P}(p \leq q \rightarrow q \in G)$.

El siguiente Teorema es muy útil y su prueba es inmediata:

Teorema 2.3.9. *Sean $(P, \leq)$ un orden parcial y $p \in P$. El conjunto $\{q \in P : q \leq p \vee q \perp p\}$ es denso en P.*

2.4 Clases, ordinales, cardinales, los conjuntos bien fundamentados, los conjuntos constructibles de G$\ddot{o}$del, cardinales inaccesibles

Dada una fórmula $\varphi(x)$ decimos que la colección $\{x : \varphi(x)\}$ es una *clase*. Más generalmente, dada una fórmula $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ decimos que la colección $\{x : \varphi(x, p_1, \ldots, p_n)\}$ es una *clase*, donde los $p_1, \ldots, p_n$ son conjuntos que sirven como parámetros para la definición. Hay clases que son conjuntos, en particular todo conjunto es una clase pues si x es un conjunto, entonces la clase $\{z : z \in x \wedge z = z\}$ es un conjunto por el axioma de separación, y $x = \{z : z \in x \wedge z = z\}$ por el axioma de extensionalidad. Sin embargo, hay clases que no son conjuntos (*clases propias*), ya que el suponer que son conjuntos implica una contradicción, cinco ejemplos importantes de ellas son los siguientes:

(a) Los ordinales (**Ord**) : Se dice que un conjunto x es *transitivo* si $\forall z(z \in x \to z \subseteq x)$. Un conjunto α es un *ordinal* si es transitivo y está estrictamente bien ordenado por $\in$, es decir, si es transitivo y el par $(\alpha, \in_\alpha)$ es un buen orden estricto, donde $\in_\alpha = \{(\gamma, \delta) \in \alpha \times \alpha : \gamma \in \delta\}$. $\mathbf{Ord} = \{x : x \text{ es un ordinal}\}$. **Ord** está estrictamente bien ordenada por $\in$. Sean α y β dos ordinales. Se define $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta$. La clase de los ordinales la podemos definir intuitivamente así: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$,...,$n = \{0, \ldots, n-1\}$,..., $\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$, $\omega + 1 = \{0, 1, 2, 3, \ldots; \omega\}$, $\omega + 2 = \{0, 1, 2, 3, \ldots; \omega, \omega + 1\}$, $\omega + 3 = \{0, 1, 2, 3, \ldots; \omega, \omega+1, \omega+2\}$,..., $\omega+\omega = \{0, 1, 2, \ldots; \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots\}$, $(\omega + \omega) + 1 = \{0, 1, 2, \ldots; \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots, \omega + \omega\}$,.... De esta forma se ve claramente que cada ordinal es igual al conjunto de los ordinales que lo preceden. Un ordinal α es *sucesor* si $\alpha = \beta + 1$, para algún ordinal β. Por ejemplo: 5, $\omega + 1$ y $\omega + 2$. Un ordinal es *límite* si no es cero ni sucesor. Por ejemplo, ω y $\omega + \omega$.

Un resultado muy importante que se cumple para cada ordinal α y para la clase **Ord**, que se deriva de su buen orden, es el Principio de inducción transfinita, es decir, el Principio de inducción transfinita vale para cada ordinal α y para la clase **Ord**, y es una herramienta muy útil para hacer demostraciones sobre propiedades de los ordinales y también para realizar definiciones. A continuación se plantea la versión más utilizada para el caso de **Ord**, la prueba de la misma se hace por reducción al absurdo de manera análoga a como se hace para los conjuntos bien ordenados (A, R) en [D1]:

Teorema 2.4.1 (Principio de inducción transfinita modificado para Ord). *Sea $\varphi(x)$ una fórmula con una variable libre del lenguaje de la Teoría de conjuntos. Entonces:*

$$\{\, \varphi(0) \,\wedge \forall \alpha \in \mathbf{Ord}(\varphi(\alpha) \to \varphi(\alpha')) \wedge$$

$$\forall \alpha \in \mathbf{Ord}[(\,\alpha \textit{ límite} \wedge \forall \beta < \alpha\, \varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha)]\} \to \forall \alpha \in \mathbf{Ord}\, \varphi(\alpha).$$

Aritmética ordinal:

Un resultado bien importante que permite asignarle a cada conjunto bien ordenado un único número ordinal se expresa a continuación, una prueba del mismo puede encontrarse en [D1] y usa el Axioma de reemplazo:

Teorema 2.4.2 (Teorema del Tipo de Orden). *Para todo conjunto bien ordenado (A, R) existe un único ordinal isomorfo a él. Tal ordinal se denomina "el tipo de orden de $(A, <)$".*

A continuación se definen las operaciones de suma, producto y potenciación ordinal, dichas operaciones satisfacen algunas propiedades de la aritmética de los números reales, pero otras no. Una presentación de los resultados básicos de las mismas puede encontrarse en [D1], [E1] y [H-J]:

Suma y producto:

Sean α y β dos ordinales y (A, R) y (B, S) dos buenos ordenes cuyos tipos de orden son α y β, respectivamente, y tales que $A \cap B = \emptyset$:

(1) Se define $\alpha + \beta$ como el tipo de orden del buen orden $(A \cup B, R \oplus S)$, donde $R \oplus S = R \cup S \cup (A \times B)$. Es decir, $R \oplus S$ es el buen orden que se obtiene poniendo B con su orden a continuación de A.

Usando el Principio de inducción transfinita (modificado) $\alpha + \beta$ puede definirse por inducción en β de la siguiente manera:

$$\alpha + 0 = \alpha$$

$$\alpha + (\gamma + 1) = (\alpha + \gamma) + 1$$

$$\alpha + \lambda = \bigcup\{\alpha + \delta : \delta < \lambda\} \quad (\lambda \text{ límite}).$$

(2) Se define $\alpha.\beta$ como el tipo de orden del buen orden $(A \times B, R * S)$, donde $R * S$ se define de la siguiente manera: $(\alpha_1, \beta_1) R * S (\alpha_2, \beta_2)$ si y sólo si $(\beta_1 S \beta_2)$ o $(\beta_1 = \beta_2 \, y \, \alpha_1 R \alpha_2)$. Es decir, $\alpha.\beta$ es el tipo de orden que se obtiene si se toma un orden de tipo α y se repite β veces.

Usando el Principio de inducción transfinita $\alpha.\beta$ puede definirse por inducción en β de la siguiente manera:

$$\alpha.0 = 0$$

$$\alpha.(\gamma + 1) = (\alpha.\gamma) + \alpha$$

$$\alpha.\lambda = \bigcup\{\alpha.\delta : \delta < \lambda\} \quad (\lambda \text{ límite}).$$

Potenciación:

Usando el Principio de inducción transfinita α^β puede definirse por inducción en β de la siguiente manera:

$$\alpha^0 = 1$$

$$\alpha^{\gamma+1} = \alpha^\gamma.\alpha$$

$$\alpha^\lambda = \bigcup\{\alpha^\delta : \delta < \lambda\} \quad (\lambda \text{ límite}).$$

(b) Los cardinales (**Card**): Dos conjuntos v y w son *equipotentes* si existe una función $f : v \longrightarrow w$ que sea biyectiva. Un conjunto κ es un *cardinal* si es un ordinal y no es equipotente a ningún ordinal menor (es decir, si no es equipotente a ninguno de sus elementos). $\mathbf{Card} = \{x : x \text{ es un cardinal}\}$. Cada cardinal infinito tiene la forma $\aleph_\alpha$ (o ω_α), para algún ordinal α, donde los $\aleph_\alpha$ se definen por inducción transfinita en los ordinales de la siguiente forma:

$$\aleph_0 = \omega$$

$$\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+ = \{\beta \in Ord : \beta \, \text{es equipotente a algún subconjunto de} \, \aleph_\alpha\}$$

$$\aleph_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \aleph_\beta, \ \text{si} \, \gamma \, \text{es límite}$$

Un cardinal es *sucesor* si es de la forma $\aleph_{\alpha+1}$ para algún ordinal α. Por ejemplo $\aleph_1$, $\aleph_2$ y $\aleph_3$. Y es *límite* si es de la forma $\aleph_\gamma$, para algún ordinal límite γ. Por ejemplo $\aleph_\omega$ y $\aleph_{\omega+\omega}$.

Sean κ, η dos cardinales. $\kappa \leq \eta \leftrightarrow$ existe una función $f : \kappa \longrightarrow \eta$ que sea inyectiva. Sea x un conjunto. Se denotará por $|x|$ al único cardinal κ equipotente con x. Tal cardinal existe por el Axioma de elección. x es *finito* si existe un $n \in \omega$ tal que $|x| = n$. x es *infinito* si no es finito. x es *numerable* si $|x| \leq \aleph_0$. Sean $(P, \leq)$ un orden parcial y κ un cardinal. P tiene la condición de κ-cadena si y sólo si cualquier anticadena en P tiene cardinal $< \kappa$. Si $\kappa = \aleph_1$ se dice que P tiene la condición de cadena contable.

Aritmética cardinal:

A continuación se definen las operaciones de suma, producto y potenciación cardinal, dichas operaciones satisfacen algunas propiedades de la aritmética de los números reales, pero otras no. También tienen similitudes y diferencias con la aritmética ordinal. Una presentación de los resultados básicos de las mismas puede encontrarse en [D1], [E1] y [H-J]:

Sean κ y θ dos cardinales y dos conjuntos A y B tales que $\kappa =\mid A \mid$, $\theta =\mid B \mid$ y $A \cap B = \emptyset$.

$$\kappa + \theta =\mid A \cup B \mid .$$

$$\kappa.\theta =\mid A \times B \mid .$$

$$\kappa^{\theta} =\mid A^{B} \mid .$$

Una vez definida la potención cardinal se puede explicar cuál es la Hipótesis del continuo de Cantor:

Cantor conocía que $\mid \mathbb{R} \mid = 2^{\aleph_0}$. Y también demostró, usando la famosa prueba de la diagonal [Mos], que $\mid \mathbb{R} \mid > \mid \mathbb{N} \mid = \aleph_0$. Entonces, surge la interrogante ¿ Qué $\aleph_\alpha$ es $2^{\aleph_0}$? : ¿$2^{\aleph_0} = \aleph_1$? ¿ $2^{\aleph_0} = \aleph_2$? ¿ $2^{\aleph_0} = \aleph_3$? ¿ $2^{\aleph_0} = \aleph_4$? etc.. ¿ Existirá algún cardinal intermedio entre $\mid \mathbb{N} \mid$ y $\mid \mathbb{R} \mid$?. Cantor conjeturó que NO, es decir, que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, pero nunca logró probar tal conjetura. La afirmación $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ es lo que se llama *Hipótesis del continuo*. Más adelante (en la sección 3) se comentará algunos resultados relevantes sobre este tema que se han obtenido después de Cantor.

(c) Los conjuntos bien fundamentados **WF**: Se define por inducción transfinita en los ordinales así:

$$R_0 = \emptyset$$
$$R_{\alpha+1} = P(R_\alpha)$$

$$R_\lambda = \bigcup\nolimits_{\beta<\lambda} R_\beta, \ \lambda \text{ límite.}$$

$$\mathbf{WF} = \bigcup_{\alpha \in Ord} R_\alpha.$$

Si $x \in \mathbf{WF}$ entonces el *rango* de x, $\rho(x)$, es el menor ordinal α tal que $x \in R_{\alpha+1}$.

(d) El universo ($\mathbf{V}$):

$$\mathbf{V} = \{x : x = x\}.$$

Por el Axioma de Fundamentación se tiene que $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$.

Nota: Muchos textos denotan a los conjuntos R_α anteriores así: V_α. Y la secuencia creciente de los R_α se le llama: "Jerarquía acumulativa de conjuntos de J. von Neumann".

(e) Los conjuntos constructibles de Gödel ($\mathbf{L}$):

Antes de dar la definición introduciremos la definición de definibilidad en una estructura [Ch-Ke], [D2]: Sea una estructura $\mathfrak{A} = \langle A, < R_\beta^{\mathfrak{A}} >_{\beta \in \gamma}, < f_\mu^{\mathfrak{A}} >_{\mu \in \delta}, < c_\xi^{\mathfrak{A}} >_{\xi \in \eta} \rangle$ para un lenguaje $\mathcal{L}$. Decimos que un subconjunto $B \subseteq A$ es *definible* en $\mathfrak{A}$ si existe una fórmula $\varphi(x)$ del lenguaje $\mathcal{L}$ tal que $B = \{z \in A : \mathfrak{A} \models \varphi[z]\}$. Se dice que B es definible en $\mathfrak{A}$ con parámetros si existe fórmula $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ del lenguaje $\mathcal{L}$ y existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tal que: $B = \{z \in A : \mathfrak{A} \models \varphi[z, a_1, \ldots, a_n]\}$.

L se define por inducción transfinita en los ordinales de la siguiente manera:

$$L_0 = \emptyset$$

$$L_{\alpha+1} = \{X \subseteq L_\alpha : X \text{ es definible en la estructura}$$

$$\langle L_\alpha, \in, \langle b : b \in L_\alpha \rangle \rangle\}$$

$$L_\lambda = \bigcup_{\beta\in\lambda} L_\beta \ , \quad \lambda \text{ límite.}$$

$$\mathbf{L} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{Ord}} L_\alpha$$

Es claro que en el paso sucesor la expresión "X es definible en la estructura $\langle L_\alpha, \in, \langle b : b \in L_\alpha\rangle\rangle$" supone que se tiene un lenguaje de primer orden con identidad, cuyos símbolos no lógicos son: Una constante $\underline{b}$ para cada $b \in L_\alpha$ y un símbolo relacional binario $\underline{\in}$ para la relación de pertenencia $\in$. Formalizaciones (en ZF) de la definición intuitiva de $\mathbf{L}$ pueden encuentrarse en [K] y [J1].

El concepto de clase transitiva es análogo al de conjunto transitivo. Es decir, una clase $\mathbf{C}$ es *transitiva* si $\forall z(z \in \mathbf{C} \rightarrow z \subseteq \mathbf{C})$. Las clases **Ord**, **WF**, **V** y **L** son transitivas. Importantes propiedades de las clases transitivas se mencionarán más adelante.

Cardinales regulares e inaccesibles:

Sea α un ordinal límite.Decimos que $\beta < \alpha$ es *cofinal* con α si existe una función creciente $f : \beta \longrightarrow \alpha$ tal que para todo $\xi < \alpha$, existe un $\delta < \beta$ tal $f(\delta) \geq \xi$ (es decir, la imagen de f es no acotada en α).

Dado α, la *cofinalidad* de α, $cof(\alpha)$, es el menor ordinal cofinal con α. Con respecto a la cofinalidad se cumple lo siguiente: $cof(\alpha)$ es el menor cardinal β tal que existe una partición de α en β pedazos cada uno de los cuales tiene cardinalidad estrictamente menor que α.

Un cardinal infinito κ es *regular* si es igual a su cofinalidad. Decimos que es *singular* en caso contrario. Ejemplos: ω es regular y $\aleph_\omega$ es singular. Se puede demostrar que para cada ordinal α, el cardinal $\aleph_{\alpha+1}$ es regular [D1].

Un cardinal κ es un *límite fuerte*, si para todo cardinal $\alpha < \kappa$ se tiene que $2^\alpha < \kappa$. Un cardinal $\kappa > \omega$ es *fuertemente inaccesible* (o simplemente *inaccesible*) si es regular y límite fuerte. Decimos que κ es *débilmete inaccesible* si es regular y límite.

Con respecto a los cardinales inaccesibles es conocido que: (1) Si κ es un cardinal inaccesible, entonces R_κ (o V_κ) es un modelo de ZFC [J3], (2) a partir de ZFC no se puede demostrar que existan cardinales inaccesibles [J3], y (3) no se puede construir un modelo con ZFC donde valga ZFC + "Existe un cardinal inaccesible" [K]. Una prueba de estos resultados puede encontrarse en las referencias mencionadas. El Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel (1931) es fundamental en la prueba de (3), es decir, si ocurre (3) se usa (1) y se obtiene una contradicción con dicho teorema. Una prueba de los Teoremas de Incompletitud de Gödel (primero y segundo) puede encontrarse en [Me] y [E2]. A continuación se enuncian todos estos resultados mencionados en dos teoremas, uno de los teoremas utiliza el término *recursivo*, una noción compleja de definir, se entenderá intuitivamente como *"efectivamente calculable"* (Tesis de Church, 1936), una definición rigurosa de *recursivo* puede encontrarse en [Me]:

Teorema 2.4.3 (Teoremas de Incompletitud de Gödel). *Sea S un sistema axiomático recursivo y suficientemente fuerte como para deducir en él la Aritmética de Peano. Entonces:*

(1) Primer Teorema: Si S es consistente, entonces S es incompleto (es decir, S tiene proposiciones indecidibles, es decir, existe al menos una proposición φ tal que $S \nvdash \varphi$ y $S \nvdash \neg\varphi$).

(2) Segundo Teorema: Si S es consistente, entonces $S \nvdash$ "S es consistente".

Teorema 2.4.4 (Cardinales inaccesibles). *(1) Si κ es un cardinal inaccesible, entonces V_κ es un modelo de ZFC.*

(2) Si ZFC es consistente, entonces ZFC $\nvdash$ "Existe un cardinal inaccesible".

(3) ZFC $\nvdash$ Si ZFC es consistente, entonces ZFC + "Existe un cardinal inaccesible" es consistente.

La proposición "Existe un cardinal inaccesible" es un ejemplo de axioma de grandes cardinales.

Ahora definiremos tipos de cardinales inaccesibles que nos permitirán dar dos ejemplos adicionales de "axiomas de grandes cardinales": *Los cardinales medibles y los cardinales supercompactos.* Primero debemos dar una definición previa de la Teoría de Modelos de *inmersión elemental* entre estructuras:

Sean dos estructuras para un lenguaje $\mathcal{L}$: $\mathfrak{A} = \langle A, < R_\beta^{\mathfrak{A}} >_{\beta\in\gamma}, < f_\mu^{\mathfrak{A}} >_{\mu\in\delta}, < c_\xi^{\mathfrak{A}} >_{\xi\in\eta}\rangle$, y $\mathfrak{B} = \langle B, < R_\beta^{\mathfrak{B}} >_{\beta\in\gamma}, < f_\mu^{\mathfrak{B}} >_{\mu\in\delta}, < c_\xi^{\mathfrak{B}} >_{\xi\in\eta}\rangle$. Se dice que una función $h : A \longrightarrow B$ es una *inmersión elemental* de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si y sólo si:

(1) h es una *inmersión* de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$, es decir:

(1.1) h es inyectiva.

(1.2) Para cada símbolo relacional R_β de $\mathcal{L}$, si n es la aridad de R_β, entonces para cada $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$:

$$R_\beta^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow R_\beta^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

(1.3) Para cada símbolo funcional f_μ de $\mathcal{L}$, si n es la aridad de f_μ, entonces para cada $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$:

$$h(f_\mu^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f_\mu^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

(1.4) Para cada símbolo constante c_ξ de $\mathcal{L}$:

$$h(c_\xi^{\mathfrak{A}}) = c_\xi^{\mathfrak{B}}.$$

(2) Para cada fórmula $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathcal{L}$ y para cada $(a_1,\ldots,a_n)\in A^n$:

$$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,\ldots,an]\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi[h(a_1),\ldots,h(an)].$$

Se dice que $\mathfrak{A}$ está *inmersa elementalmente* en $\mathfrak{B}$ si existe una inmersión elemental de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$. En otras palabras esto significa que $\mathfrak{B}$ contiene una subestructura $\mathfrak{C}$ que es isormorfa a $\mathfrak{A}$ (Ver definición de subestructura e isomorfismo entre estructuras en el capítulo 3). La estructura de los racionales con su orden usual $\langle\mathbb{Q},\leq\rangle$ está inmersa elementalmente en $\langle\mathbb{R},\leq\rangle$.

Un cardinal κ es *medible* si existe una inmersión elemental no trivial $j:V\longrightarrow M$ del universo V en una clase transitiva M que continene todos los ordinales tal que κ es el primer ordinal movido por la inyección j [D3]. Kunen probó que la clase M no puede ser el universo completo. Es conocido que si κ es medible, entonces κ es inaccesible, y que la implicación inversa no vale [D1]. Y más todavía: Si κ es medible, entonces existen κ cardinales inaccesibles menores que κ [D3] . En consecuencia el axioma "Existe un cardinal medible" es más fuerte que "Existe un cardinal inaccesible".

Hay axiomas de grandes cardinales más fuertes que los dos anteriores, por ejemplo el que afirma "Existe un cardinal supercompacto". Donde cardinal supercompacto se define así: Un cardinal κ es $\lambda-$ *supercompacto* si existe una inmersión elemental $j:V\longrightarrow M$ del universo V en una clase transitiva M que contiene todos los ordinales tal que κ es el primer ordinal movido por la inyección j, $j(\kappa)>\lambda$, y $M^\lambda\subseteq M$ (es decir, todas las λ-secuencias de elementos de M son elementos de M) [D3]. Un cardinal κ se dice que es supercompacto si es λ-supercompacto para cualquier λ. Es conocido que si κ es supercompacto, entonces κ es medible y existen κ cardinales medibles menores que κ [D3], [Ba2].

Antes de terminar esta subsección se formulará el concepto de cardinal de una estructura, isomorfismo entre estructuras y subestructura:

Sea $\mathfrak{A}$ siguiente estructura:

$$\mathfrak{A} = \langle A, < R_\beta^{\mathfrak{A}} >_{\beta \in \gamma}, < f_\mu^{\mathfrak{A}} >_{\mu \in \delta}, < c_\xi^{\mathfrak{A}} >_{\xi \in \eta} \rangle.$$

¿ Cuál es la cardinalidad de la estructura $\mathfrak{A}$? La cardinalidad de $\mathfrak{A}$ es la cardinalidad de su universo A.

Isomorfismo entre estructuras:

Sean $\mathfrak{A} = \langle A, < R_\beta^{\mathfrak{A}} >_{\beta \in \gamma}, < f_\mu^{\mathfrak{A}} >_{\mu \in \delta}, < c_\xi^{\mathfrak{A}} >_{\xi \in \eta} \rangle$, y $\mathfrak{B} = \langle B, < R_\beta^{\mathfrak{B}} >_{\beta \in \gamma}, < f_\mu^{\mathfrak{B}} >_{\mu \in \delta}, < c_\xi^{\mathfrak{B}} >_{\xi \in \eta} \rangle$ dos estructuras para un lenguaje $\mathcal{L}$. $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *isomorfas* ($\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) si existe una inmersión $h : A \longrightarrow B$ que es sobreyectiva, es decir, si h es una biyección tal que:

(1) Para cada símbolo relacional R_β de $\mathcal{L}$, si n es la aridad de R_β, entonces para cada $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$:

$$R_\beta^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow R_\beta^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

(2) Para cada símbolo funcional f_μ de $\mathcal{L}$, si n es la aridad de f_μ, entonces para cada $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$:

$$h(f_\mu^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f_\mu^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

(3) Para cada símbolo constante c_ξ de $\mathcal{L}$ se tiene que:

$$h(c_\xi^{\mathfrak{A}}) = c_\xi^{\mathfrak{B}}.$$

Subestructuras:

Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ dos estructuras para un lenguaje $\mathcal{L}$. Se dice que $\mathfrak{A}$ es una *subestructura* de $\mathfrak{B}$ si y sólo si:

(1) $A \subseteq B$

(2) Para cada símbolo relacional n-ario R de $\mathcal{L}$,

$$R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n.$$

(3) Para cada símbolo funcional n-ario f de $\mathcal{L}$,

$$f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \restriction A^n.$$

(4) Para cada símbolo constante c de $\mathcal{L}$ se tiene que:

$$c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}.$$

Otras relaciones entre estructuras, por ejemplo *inmersión elemental*, ya se ha definido anteriormente a los fines de definir ciertas clases de cardinales inaccesibles como por ejemplo cardinales medibles y cardinales supercompactos.

2.5 Topología y Medida

Definición 2.5.1. *Sea S un conjunto no vacío.*

1. *Un álgebra de conjuntos (o un cuerpo de conjuntos) sobre S es una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de S, con las siguientes propiedades:*

   (a) $S \in \mathcal{A}$

   (b) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $S - A \in \mathcal{A}$.

   (c) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$ y $A \cap B \in \mathcal{A}$.

   El conjunto $S - A$ se llama el complemento de A y se denota por A^c.

2. *Si además de (a),(b) y (c) $\mathcal{A}$ satisface (d) se dice que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de conjuntos sobre S:*

$$(d)\ Si\ \{A_i : i \in \omega\} \subseteq \mathcal{A}\ \ entonces \bigcup_{i\in\omega} A_i \in \mathcal{A}\ \ y \bigcap_{i\in\omega} A_i \in \mathcal{A}.$$

3. *Sea* $Z \subseteq P(S)$. $\sigma(Z) = \bigcap\{\mathcal{A} : Z \subseteq \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}\, es\ \sigma -\, álgebra\}$.

El conjunto $\sigma(Z)$ definido en la cláusula (3) es una σ-álgebra de conjuntos sobre S, y es la menor σ-álgebra de conjuntos sobre S que contiene a Z.

Definición 2.5.2. *El par* (X, d) *es un espacio métrico si* X *es un conjunto no vacío y* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que para todo* $x, y, z \in X$ *se cumplen (a), (b), (c) y (e):*

(a) $d(x, y) \geq 0$

(b) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$

(c) $d(x, y) = d(y, x)$

(e) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Se dice que d *es una métrica de* X.

Definición 2.5.3. 1. *Un espacio topológico es un par* $(X, \mathcal{T})$ *donde* X *es un conjunto no vacío,* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *y se cumple (a),(b)y (c):*

   (a) $X \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$

   (b) *Si* $O_1 \in \mathcal{T}$ *y* $O_2 \in \mathcal{T}$*, entonces,* $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$

   (c) *Si* $Z \subseteq \mathcal{T}$*, entonces,* $\cup Z \in \mathcal{T}$.

   Se dice que $\mathcal{T}$ *es una topología para X. Los elementos de* $\mathcal{T}$ *se llaman abiertos.* $Y \subseteq X$ *es cerrado* $\leftrightarrow$ $X - Y$ *es abierto. Sea* $W \subseteq X$*. El interior de* W, W°*, es el mayor subconjunto abierto de X que esta contenido en W. La clausura de* $W, \overline{W}$*, es el menor subconjunto cerrado de X que contiene a* W. W *es denso en* X *si* $\overline{W} = X$. X *es separable si tiene un subconjunto denso numerable.*

2. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico. Sean* $A \subseteq X$ *y* $x \in X$. x *es un punto de acumulación (o punto límite o punto derivado) de A si y sólo si para todo conjunto* $G \subseteq X$*: Si* G *es abierto y* $x \in G$*, entonces* $G - \{x\} \cap A \neq \emptyset$*. El conjunto de los puntos de acumulación de A (o el*

conjunto derivado de A) se denota por A'. x es un punto aislado de A si y sólo si $x \in A$ y existe un abierto G ($x \in G \wedge G - \{x\} \cap A = \emptyset$). A es perfecto si A es distinto de vacío, cerrado y no tiene puntos aislados. A es nunca denso si el interior de la clausura de A es vacío ($(\overline{A})^{\circ} = \emptyset$). En otros términos, si $X \setminus \overline{A}$ es denso en X. Un subconjunto $D \subseteq X$ es magro si es la unión numerable de conjuntos nunca densos. Un conjunto A tiene la propiedad de Baire si existe un abierto G tal que $A \triangle G$ es magro ($A \triangle G = (A \setminus G) \cup (G \setminus A)$). La sucesión $\{a_k : k \in \omega\} \subseteq X$ converge a un $a \in X$ (lo cual se denota por $\lim_{k \to \omega} a_k = a$) si y sólo si para todo conjunto abierto G tal que $a \in G$ $\exists n \in \omega \forall m \geq n$ ($a_m \in G$).

Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $W \subseteq X$ es denso en X, entonces para todo abierto no vacío G($W \cap G \neq \emptyset$).

Sea X un conjunto. Obviamente $P(X)$ es una topología para X. Esta topología se llama la *topología discreta* de X.

Definición 2.5.4. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $H \subseteq \mathcal{T}$.*

1. *H es una base de $\mathcal{T}$ si todo $O \in \mathcal{T}$ es la unión de elementos de H.*

2. *H es una subbase de $\mathcal{T}$ si el conjunto de todas las intersecciones finitas de elementos de H es una base de $\mathcal{T}$.*

Teorema 2.5.5. *Sean X un conjunto no vacío y $H \subseteq P(X)$. H es una base de alguna topología de X si y sólo si $X = \cup H$ y para todo $H_1, H_2 \in H$: Si $x \in H_1 \cap H_2$ entonces existe un $H_3 \in H$ tal que $x \in H_3 \subseteq H_1 \cap H_2$.*

Una prueba del teorema anterior se encuentra en [Ro].

Teorema 2.5.6. *Si X es un conjunto no vacío y $D \subseteq P(X)$ tal que $D \neq \emptyset$ y $X = \bigcup\{d : d \in D\}$, entonces D es una subbase de una topología única $\mathcal{T}$ de X. Es decir, las intersecciones finitas de los elementos de D determinan una base de la topología $\mathcal{T}$ de X. En este caso se dice que $\mathcal{T}$ es generada por D.*

Sea A un subconjunto no vacío de X y $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico . La clase $\mathcal{T}_A$ de todas las intersecciones de A con los subconjutos $\mathcal{T}$-abiertos de X es una topología de A. Esta topología se conoce como la *topología relativa* (o *inducida*) de A o la relativización de $\mathcal{T}$ de A. El espacio topológico $(A, \mathcal{T}_A)$ es un *subespacio* de $(X, \mathcal{T})$.

Sean $(X, \mathcal{T}_1)$ y $(Y, \mathcal{T}_2)$ dos Espacios Topológicos. Sea una función $f : X \longrightarrow Y$. Se dice que f es *continua* si y sólo si: Si $A \in T_2$, entonces $f^{-1}(A) \in T_1$. Se dice que $(X, \mathcal{T}_1)$ y $(Y, \mathcal{T}_2)$ son *homeomorfos* (o topológicamente equivalentes) si y sólo si existe una función biyectiva $h : X \longrightarrow Y$ tal que h y h^{-1} son continuas. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *metrizable*, si existe una métrica d de X que genera a $\mathcal{T}$. Un espacio topológico métrico $(X, \mathcal{T})$ es *completo* si toda sucesión de Cauchy converge. Un espacio topológico es un *espacio polaco* si es métrico, separable y completo. Ejemplos de espacios polacos son $\mathbb{R}$ con la topología usual y el intervalo $[0, 1]$ con la topología usual. También los espacios de Baire y Cantor que definiremos más adelante.

Sea $\{Y_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos. Y sea Y el producto cartesiano de tales conjuntos. Es decir,

$$Y = \prod_{i \in I} Y_i = \{f : f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} Y_i \ \wedge \ \forall i \in I(f(i) \in Y_i)\}.$$

Para cada $i \in I$ se define la *proyección* $p_i : Y \longrightarrow Y_i$ del siguiente modo: $p_i(\langle f(j) : j \in I\rangle) = f(i)$.

Con estas proyecciones se define la *topología producto* de la siguiente manera: Sea $\{(Y_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ una colección de espacios topológicos. Y sea $F = \bigcup_{i \in I}\{p_i^{-1}(A) : A \in \mathcal{T}_i\}$, donde p_i es la i-ésima proyección del producto cartesiano de los Y_i (Y). $F \subseteq P(Y)$. Entonces la Topología producto de Y es la topología generada por F según el Teorema anterior (2.5.6). Esta topología es la menor topología de Y respecto de la cual las proyecciones son continuas.

Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *compacto* si todo cubrimiento abierto de X admite un subcubrimiento finito. Donde un *cubrimiento abierto* de X es una familia de conjuntos abiertos $\{A_i : i \in I\}$ tal que $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Es decir: Si $(X, \mathcal{T})$ es compacto y $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, entonces existen una cantidad finita de elementos de I, $i_0, \ldots, i_{k-1}$, tal que $X \subseteq A_{i_0} \cup \ldots \cup A_{i_{k-1}}$.

Definición 2.5.7. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico.* σ*(Abiertos de* X*) es la* σ*-álgebra de Borel de* X *(o los conjuntos Borelianos de* X*).* σ*(Abiertos de* X*) se denotará por* $\mathcal{B}(X)$*.*

El siguiente teorema muestra que se puede definir por inducción transfinita a $\mathcal{B}(X)$:

Teorema 2.5.8. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico. Si* $\langle \sum_{\alpha}^{0}(X) : \alpha < \aleph_1 \rangle$ *y* $\langle \prod_{\alpha}^{0}(X) : \alpha < \aleph_1 \rangle$ *son dos* $\aleph_1$*-secuencias de subconjuntos de* X *que se definen por inducción tranfinita así:*

- $\sum_{1}^{0}(X) =$ *El conjunto de los subconjuntos abiertos de* X
- $\prod_{1}^{0}(X) =$ *El conjunto de los subconjuntos cerrados de* X
- $\sum_{\alpha}^{0}(X) = \{A = \bigcup_{n=0}^{\omega} A_n : \forall n \in \omega \, \exists \beta < \alpha (A_n \in \prod_{\beta}^{0}(X))\}$
- $\prod_{\alpha}^{0}(X) = \{B = X - A : A \in \sum_{\alpha}^{0}(X)\}$

Entonces, $\mathcal{B}(X) = \bigcup_{\alpha < \aleph_1} \sum_{\alpha}^{0}(X) = \bigcup_{\alpha < \aleph_1} \prod_{\alpha}^{0}(X)$.

Cuando $\alpha = 2$, los elementos de $\sum_{2}^{0}(X)$ tradicionalmente se llaman F_σ y los elementos de $\prod_{2}^{0}(X)$ tradicionalmente se llaman G_δ.

Una prueba del Teorema anterior se encuentra en [J3] y [D-U].

Definición 2.5.9. *Sea* (X, d) *un espacio métrico.*

1. *La sucesión* $\{a_k : k \in \omega\} \subseteq X$ *es de Cauchy si y sólo si* $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \omega$*, tal que* $\forall m, p \geq n$
$$d(a_p, a_m) < \epsilon.$$
2. *Sean* $a \in X$ *y* $r \in \mathbb{R}(r \geq 0)$*. La bola abierta de centro* a *y radio* r*, es el conjunto*
$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, a) < r\}.$$
3. *La topología métrica de* X *es la topología que tiene como base a las bolas abiertas de* X*.*

4. *Otra formulación de sucesión convergente es la siguiente: La sucesión* $\{a_k : k \in \omega\} \subseteq X$ *converge a un* $a \in X(\lim_{k\to\omega} a_k = a\ )$ *si y sólo si* $\forall\epsilon > 0 \exists n \in \omega$ *tal que* $\forall m \geq n$

$$d(a, a_m) < \epsilon.$$

Definición 2.5.10. *Sean* X *un conjunto no vacío y* $\mathcal{A}$ *una* σ*-álgebra de conjuntos sobre* X*. Una función* $\eta : \mathcal{A} \longrightarrow \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ *es una medida si y sólo si se cumple (a) ,(b) y (c):*

(a) $\eta(A) \geq 0$*,* $\forall A \in \mathcal{A}$*.*

(b) $\eta(\emptyset) = 0$*.*

(c) (σ*-aditividad) Si* $\{A_i : i \in \omega\} \subseteq \mathcal{A}$ *y* $A_i \cap A_j = \emptyset$*, si* $i \neq j$*; entonces*

$$\eta(\bigcup_{i=0}^{\omega} A_i) = \sum_{i=0}^{\omega} \eta(A_i).$$

Un ejemplo de medida es la medida de Lebesgue, la cual se denotará por μ. La manera estandar de definir μ es definiendo primero la *medida exterior* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, $\mu^*(A)$, como el ínfimo de todas las posibles sumas $\sum\{l(I_n) : n \in \omega\}$ donde $A \subseteq \bigcup\{I_n : n \in \omega\}$, I_n es un intervalo finito de $\mathbb{R}$ y $l(I_n)$ es la longitud de I_n, es decir, $l(I_n) = |b - a|$, donde $|\ |$ es la función valor absoluto, a y b son los extremos de I_n y $a < b$. Para cada A, $\mu^*(A) < \omega$ o $\mu^*(A) = \infty$. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es *medible Lebesgue* si y sólo si para cada $B \subseteq \mathbb{R}$,

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c).$$

La colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ medibles lebesgue, $\mathcal{M}$, es una σ-álgebra de conjuntos sobre $\mathbb{R}$ y $\mu = \mu^*|\mathcal{M}$. Sea $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ los Borelianos de $\mathbb{R}$ con respecto a la topología usual de $\mathbb{R}$, es decir, la topología que tiene a los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ como una base. Se cumple que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}$.

2.6 Los espacios de Baire y Cantor, Árboles y la Propiedad de Ramsey

El *Espacio topológico de Baire* es el par $(\mathbb{N}^\infty, t)$, donde $\mathbb{N}^\infty = \{f : f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\}$ y t es la topología generada por los abiertos básicos $U_s = \{f \in \mathbb{N}^\infty : s \subseteq f\}$, donde s es una sucesión finita de naturales. t es la topología producto de $\mathbb{N}^\infty$ que resulta de dotar a $\mathbb{N}$ con la topología discreta.

Es conocido que el Espacio de Baire es homeomorfo a los irracionales, considerados como un subespacio del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. [J1]

En la literatura especializada también se usa $\mathcal{N}$ y ω^ω para denotar al Espacio de Baire.

El *Espacio topológico de Cantor* es el par $(2^{\mathbb{N}}, t)$, donde $2^{\mathbb{N}} = \{f : f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\}$ y t es la topología generada por los abiertos básicos $U_s = \{f \in 2^{\mathbb{N}} : s \subseteq f\}$, donde s es una sucesión finita de ceros y unos. t es la topología producto de $2^{\mathbb{N}}$ que que resulta de dotar a 2 con la topología discreta. Obviamente el espacio de Cantor es un subespacio del Espacio de Baire.

También se usa 2^ω para denotar al Espacio de Cantor.

A continuación se presentará a dichos espacios usando árboles, una presentación que es muy útil, y luego se mencionarán algunos resultados importantes sobre dichos espacios:

Definición 2.6.1. *El par $(T, \leq)$ es un árbol si y sólo si $(T, \leq)$ es un orden parcial débil propio y para cada $x \in T$ el par $(\{y \in T : y < x\}, <)$ es un buen orden estricto. Los elementos de T se llaman nodos.*

Definición 2.6.2. *Sea $(T, \leq)$ un árbol.*

1. *Si $x \in T$, la altura de x en T, h(x,T), es el tipo de orden de $\{y \in T : y < x\}$, es decir, h(x,T) el único ordinal isomorfo a $\{y \in T : y < x\}$.*

2. *Para cada ordinal α, el α-ésimo nivel de T, $Niv(\alpha, T)$, es*

$$\{x \in T : h(x, T) = \alpha\}.$$

3. *La altura de T, $h(T)$, es el menor α tal que $Niv(\alpha, T) = \emptyset$.*

4. *Un subárbol de T es un subconjunto $T^{'} \subseteq T$ con el orden inducido tal que,*

$$\forall x \in T^{'} \forall y \in T(y < x \rightarrow y \in T^{'}).$$

Dos ejemplos de árboles son:

(1) El conjunto $2^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} 2^n$ con el orden $s \leq t$ si y sólo si $s \subseteq t$ (t extiende a s). $(2^{<\omega}, \leq)$ se denomina el *árbol binario completo*, y tiene altura ω.

(2) El conjunto $\mathbb{N}^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} \mathbb{N}^n$ con el orden $s \leq t$ si y sólo si $s \subseteq t$. $(\mathbb{N}^{<\omega}, \leq)$ tiene altura ω.

Sean $s = \langle s_0, \ldots, s_{m-1}\rangle$ y $t = \langle t_0, \ldots, t_{n-1}\rangle$ dos secuencias finitas. $s \frown t$ es la secuencia concatenación de s y t, es decir, $s \frown t = \langle s_0, \ldots, s_{m-1}, t_0, \ldots, t_{n-1}\rangle$.

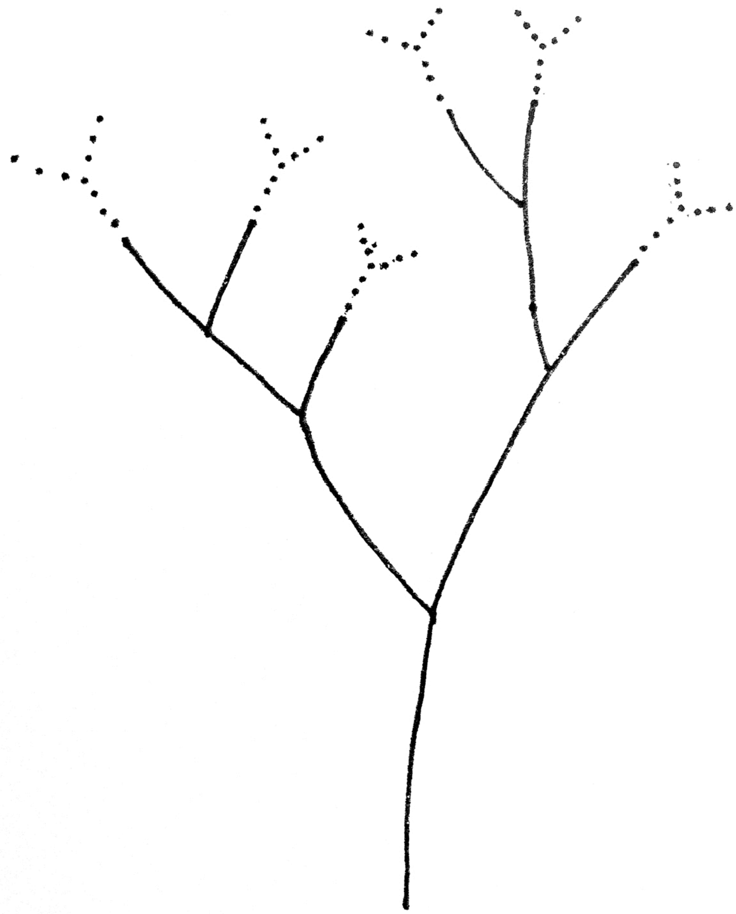
Es claro que un subconjunto $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ (o $T \subseteq 2^{<\omega}$) es un *árbol* si es cerrado hacia bajo, es decir, si $t \in T$ y $s \subseteq t$, entonces $s \in T$.

Sea un árbol $T \subseteq 2^{<\omega}$, decimos que T es *uniforme* si para cada $s, t \in T$, que tengan la misma longitud (supongamos que la longitud es n), se cumple:

$$s \frown \langle (n, 0)\rangle \in T \longleftrightarrow t \frown \langle (n, 0)\rangle \in T \text{ y } s \frown \langle (n, 1)\rangle \in T \longleftrightarrow t \frown \langle (n, 1)\rangle \in T$$

Un árbol $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ es llamado *perfecto* si para cualquier $t \in T$ existen dos sucesiones $s_1, s_2 \in T$ tal $t \subseteq s_1$ y $t \subseteq s_2$ y s_1 y s_2 son incompatibles, es decir, ni $s_1 \subseteq s_2$, ni $s_2 \subseteq s_1$. En el caso del árbol binario completo esta propiedad podemos expresarla así: Un árbol $T \subseteq 2^{<\omega}$ es llamado *perfecto* si para cualquier $t \in T$ existe una $s \in T$ tal que $t \subseteq s$ y $s \frown \langle (n, 0)\rangle \in T$ y $s \frown \langle (n, 1)\rangle \in T$ (suponemos que el dominio de s es n).

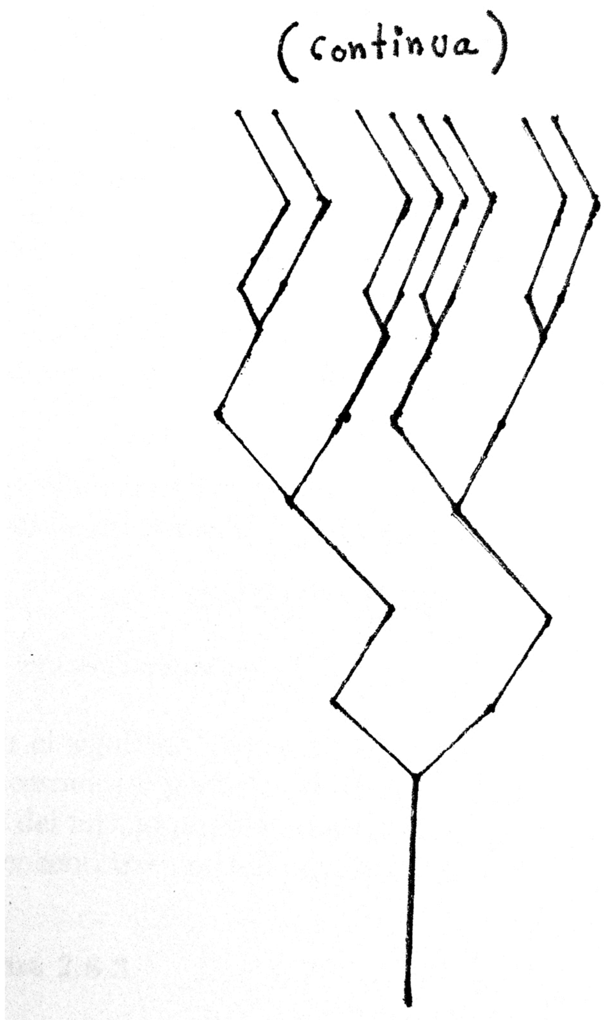
La siguiente figura suguiere la idea de árbol binario perfecto:



También en el caso de un árbol binario se dice que si p es perfecto, entonces p es *uniforme* si y sólo si $\forall s, t \in p$ que esten en el mismo nivel, se tiene que,

$$t^\wedge 0 \in p \leftrightarrow s^\wedge 0 \in p \ \wedge \ t^\wedge 1 \in p \leftrightarrow s^\wedge 1 \in p.$$

La siguiente figura suguiere la idea de árbol binario perfecto uniforme:



Una *rama* de un árbol $T \subseteq 2^{<\omega}$ es sucesión infinita $c \in 2^{\mathbb{N}}$ tal que para todo número natural n, $c \upharpoonright n \in T$. Denotamos al conjunto de las ramas de T por $[T]$. Análogamente, una *rama* de un árbol $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ es sucesión infinita $c \in \mathbb{N}^{\infty}$ tal que para todo número natural n, $c \upharpoonright n \in T$. Y su conjunto de ramas se denota por [T]. El Espacio de Cantor es el conjunto de ramas del árbol binario completo, es decir, $2^{\mathbb{N}} = [(2^{<\omega}, \leq)]$. Y el Espacio de Baire es el conjunto de ramas del árbol $(\mathbb{N}^{<\omega}, \leq)$, es decir, $\mathbb{N}^{\infty} = [(\mathbb{N}^{<\omega}, \leq)]$.

En el Espacio de Baire la convergencia de una sucesión se puede describir así: La sucesión $\{a_i : i \in \omega\} \subseteq \mathbb{N}^\infty$ converge a un $a \in \mathbb{N}^\infty$ si y sólo si $\forall n \in \omega\, \exists k \in \omega\, \forall\, m \geq k$,

$$a_m \restriction n = a \restriction n\,.$$

Es conocido que los espacios de Cantor y Baire son métricos, es decir, existe una métrica que induce su topología (común). Tal métrica se define así: Sean $x, y \in 2^{\mathbb{N}}$ (o $x, y \in \mathbb{N}^\infty$). Si $x = y$, entonces $d(x, y) = 0$. Si $x \neq y$, entonces $d(x, y) = \frac{1}{n+1}$, donde n es el menor natural tal que $x(n) \neq y(n)$. También ambos espacios son separables (un subconjunto denso numerable es el conjunto de las sucesiones constantes a partir de algún n) y completos (toda sucesión de Cauchy converge). Una diferencia entre ellos es que el Espacio de Baire no es compacto, mientras que el Espacio de Cantor si lo es [D-U].

Si p es un subárbol del árbol binario completo, entonces el *diámetro* del conjunto de las ramas de p, $diám([p])$, se define así:

$$diám([p]) = Sup\{d(x, y) : x, y \in [p]\},$$

donde *Sup* es el supremo.

Con el siguiente Teorema se presentan algunas propiedades de los conjuntos cerrados y perfectos en el Espacio de Baire (y en el de Cantor), una prueba del mismo puede encontrarse en [D-U] (La prueba de la cláusula (6) puede encontrarse en [J3], pág 285] y usa la (3) y la (4)):

Teorema 2.6.3. *1. $F \subseteq \mathbb{N}^\infty$ es cerrado si y sólo si $F = [P_F]$, donde,*

$$P_F = \{f \restriction n : f \in F \wedge n \in \omega\}.$$

2. *Un conjunto cerrado $F \subseteq \mathbb{N}^\infty$ es perfecto si y sólo si P_F es perfecto.*

3. *Si $A \subseteq N^\infty$ es perfecto, entonces $|A| = 2^{\aleph_0}$.*

4. *(Cantor-Bendixson) Si $A \subseteq \mathbb{N}^\infty$ es cerrado no numerable, entonces existe un conjunto perfecto P y un conjunto numerable C tal que $A = P \cup C$.*

5. *(Bernstein) Existe un subconjunto de $\mathbb{N}^\infty$ totalmente imperfecto, es decir, un conjunto A tal que ni A ni $\mathbb{N}^\infty \setminus A$ contienen un subconjunto perfecto.*

6. *Si $A, B \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ son perfectos no vacíos, entonces, $A \cap B$ tiene un subconjunto perfecto no vacío o $A - B$ y $B - A$ tienen subconjuntos perfectos no vacíos.* $\square$

El Espacio topológico $(\mathbb{N}^{[\infty]}, t)$*:*

Sea $\mathbb{N}^{[\infty]}$ la familia de todos los subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ y t la topología generada por los conjuntos básicos de la forma $U_a = \{X \in \mathbb{N}^{[\infty]} : a \sqsubset X\}$, donde a es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ y $\sqsubset$ es la relación de segmento inicial. De esta manera queda definido el espacio topológico $(\mathbb{N}^{[\infty]}, t)$.

Es conocido que los espacios $\mathbb{N}^\infty$ y $\mathbb{N}^{[\infty]}$ son homeomorfos [D4].

Los espacios $\mathbb{N}^\infty$, $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{[\infty]}$ y $\mathbb{R}$ tienen la misma cardinalidad ($2^{\aleph_0}$), y son métricos, separables y completos (son espacios polacos). A a los elementos de los espacios $\mathbb{N}^\infty$, $2^{\mathbb{N}}$ y $\mathbb{N}^{[\infty]}$ también se les llama *números reales*.

Propiedad de Ramsey:

Para toda (partición) $F : \mathbb{N}^{[\infty]} \longrightarrow 2$ existe un conjunto infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ tal que F es constante en $H^{[\infty]}$, donde $H^{[\infty]}$ es la familia de todos los subconjuntos infinitos de H. La Propiedad de Ramsey se denota así:

$$\omega \to (\omega)^\omega.$$

Como $H^{[\infty]}$ es el conjunto de ramas del árbol perfecto $P_{H^{[\infty]}}$, entonces por el Teorema anterior (2.6.3), cláusulas 2 y 3, se puede concluir que $H^{[\infty]}$ es un conjunto perfecto en el Espacio de Baire.

Es conocido que el resultado de Bernstein (cláusula 5 del Teorema anterior 2.6.3) implica que la Propiedad de Ramsey es falsa (recordemos que $H^{[\infty]}$ es un perfecto). Y como el resultado de Bernstein se demuestra usando el

Axioma de elección, entonces la Propiedad de Ramsey es incompatible con el Axioma de elección. Sin embargo, se conoce que la Propiedad de Ramsey es compatible con ZF, si existe un cardinal inaccesible [Mat], y es un problema abierto de la Teoría de conjuntos si se puede eliminar la hipótesis de la existencia del cardinal inaccesible en esta prueba de la consistencia relativa, es decir, ¿ se puede construir un modelo de ZF + "Propiedad de Ramsey" sin usar la hipótesis "existe un cardinal inaccesible" ? es una pregunta que todavía no se ha respondido. Este problema es mencionado en [Ka].

Existen otras propiedades de partición (tipo Ramsey) de los espacios de Baire y $\mathbb{N}^{[\infty]}$ que postulan la existencia (en una de las partes de la partición) de un conjunto (llamado *homogeneo*) que es un conjunto perfecto. Ejemplo de ello son la Propiedad de Bernstein y la Propiedad de Partición Polarizada que se definirán en la sección 3. Para más detalles sobre este asunto ver el artículo [D-G], entre otros.

2.7 Modelos transitivos, P-genéricos y fórmulas absolutas

Definición 2.7.1. *Sea* $\mathbf{M}$ *una clase. Entonces para toda fórmula* φ *nosotros definimos* $\varphi^{\mathbf{M}}$*, la relativización de* φ *a* $\mathbf{M}$ *:*

1. $(x = y)^{\mathbf{M}}$ *es* $x = y$
2. $(x \in y)^{\mathbf{M}}$ *es* $x \in y$
3. $(\chi \wedge \psi)^{\mathbf{M}}$ *es* $\chi^{\mathbf{M}} \wedge \psi^{\mathbf{M}}$
4. $(\neg\chi)^{\mathbf{M}}$ *es* $\neg(\chi^{\mathbf{M}})$
5. $(\exists x \chi)^{\mathbf{M}}$ *es* $\exists x(x \in \mathbf{M} \wedge \chi^{\mathbf{M}})$.

Definición 2.7.2. *Sea* $\mathbf{M}$ *una clase.*

1. *Para cada proposición* φ*, "*φ *es verdad en* $\mathbf{M}$*" ("*$\mathbf{M}$ *es un modelo de* φ*") es una abreviatura de* $\varphi^{\mathbf{M}}$*.*

2. *Para cada conjunto de proposiciones* Δ*, "*Δ *es verdad en* $\mathbf{M}$*" ("*$\mathbf{M}$ *es un modelo de* Δ*") es una abreviatura de:* δ *es verdad en* $\mathbf{M}$*, para cada* $\delta \in \Delta$*.*

NOTA: Con respecto a la definición anterior se harán a continuación tres comentarios, donde el segundo de ellos contiene (apróximadamente de la mitad hacia bajo) una pequeña reflexión: (I) " φ es verdad en $\mathbf{M}$" es una abreviación de una proposición del lenguaje formal: $\varphi^{\mathbf{M}}$. Mientras que "Δ es verdad en $\mathbf{M}$" no abrevia una proposición del lenguaje formal, sino más bien a la conjunción infinita $\bigwedge\{\delta^M : \delta \in \Delta\}$. (II) Si se esta trabajando con una subteoría T de ZFC y se quiere probar que φ es verdad en $\mathbf{M}$, hay que demostrar $\varphi^{\mathbf{M}}$ con los axiomas de T. Si al contrario se quiere probar que δ no es verdad en $\mathbf{M}$, hay que demostrar $\neg\varphi^{\mathbf{M}}$ con los axiomas de T. Pero, si esto es así, como consecuencia de que hay proposiciones indecidibles para T(si T es consistente y suficientemente fuerte para desarrollar la aritmética. Gödel,1931); puede pasar que no exista una respuesta acerca de si φ es verdad o no en $\mathbf{M}$. Sin embargo, si uno entiende intuitivamente(como de hecho se hace) que φ es verdad en $\mathbf{M}$ significa que $\varphi^{\mathbf{M}}$ es verdad en $\mathbf{V}$, entonces, a pesar de que no se pueda decidir con el instrumento que se esta usando(los axiomas de T) si φ es verdad o no en $\mathbf{M}$, se tiene la convicción de que alguna de las dos cosas debe ocurrir porque en $\mathbf{V}$ la proposición $\varphi^{\mathbf{M}}$ es verdadera o falsa. (III) Si se quiere probar que Δ es verdad en $\mathbf{M}$, hay que demostrar $\delta^{\mathbf{M}}$ con los axiomas de T, para cada $\delta \in \Delta$.

Dos ejemplos de modelos se expresarán mediante el siguiente teorema, teniendo presente que $\forall\alpha \in \mathbf{Ord}(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$ es la Hipótesis Generalizada del Continuo (HGC):

Teorema 2.7.3. 1. *(ZF*$^-$*)* $\mathbf{WF}$ *es un modelo de ZF.*

2. *(ZF)* $\mathbf{L}$ *es un modelo de ZFC +* $\forall\alpha \in \mathbf{Ord}(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$*.*

Una prueba de este Teorema se encuentra en [K].

Dado un conjunto M la expresión "M es un m.t.n de ZFC" se usará para abreviar: M es un modelo transitivo y numerable de ZFC.

Definición 2.7.4. *Sean M un m.t.n de ZFC y $P \in M$ un o.p.m. G es P-genérico sobre M si y sólo si G es un filtro sobre P y para todo denso $D \subseteq P$: Si $D \in M \rightarrow G \cap D \neq \emptyset$.*

Es conocido que si G es P-genérico sobre M, entonces G intersecta a cualquier abierto denso de P y cualquier anticadena máximal de P, donde una anticadena es máximal si no está contenida propiamente en otra anticadena.

El siguiente Teorema establece dos importantes propiedades de los P-genéricos sobre M. Una prueba del mismo se encuentra en [K]:

Teorema 2.7.5. *Sean M un m.t.n. de ZFC, $P \in M$ un o.p.m, $E \subseteq P$, $E \in M$ y G un P-genérico sobre M. Entonces,*

1. *O $G \cap E \neq \emptyset$ o $\exists q \in G \forall r \in E(q \perp r)$.*
2. *Si $p \in G$ y E es denso bajo p, entonces $G \cap E \neq \emptyset$.*

El siguiente Teorema es fundamental para el forcing con modelos transitivos numerables, pues garantiza la existencia de un P-genérico sobre M, para cada $p \in P$, si M es numerable. Una prueba del mismo se encuentra en [K]:

Teorema 2.7.6. *Sea M un m.t.n de ZFC , $P \in M$ un o.p.m y $p \in P$. Entonces existe un G que es P-genérico sobre M tal que $p \in G$.*

Definición 2.7.7. *Sean $\mathbf{M}$,$\mathbf{N}$ clases, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula y $F(x_1, \ldots, x_n)$ una función definida.*

1. *Si $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$, se dice que $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es absoluta para $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ si y sólo si,*
$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \in \mathbf{M}(\varphi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n))$$

2. *Se dice que $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ es absoluta para* $\mathbf{M}$ *si y sólo si $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ es absoluta para* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{V}$*; es decir, si y sólo si,*

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \in \mathbf{M}(\varphi^{\mathbf{M}}(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1,\dots,x_n)).$$

   Notar que si una fórmula φ es absulta para una clase $\mathbf{M}$*, es absoluta para otra clase* $\mathbf{N}$*, y $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{M}$, entonces φ es absulta para* $\mathbf{M}$*,* $\mathbf{N}$*.*

3. *Si $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ se dice que $F(x_1,\dots,x_n)$ es absoluta para* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{N}$ *si y sólo si la fórmula $F(x_1,\dots,x_n) = y$ lo es.*

Definición 2.7.8. 1. *Un cuantificador en la situación $\forall x \in y$ o $\exists x \in y$, se llama cuantificador acotado. Una fórmula que tiene todos sus cuantificadores acotados se llama Δ_0-fórmula .*

2. *Las Δ_0- fórmulas se pueden definir inductivamente así,*
   (a) *$x \in z$ y $x = z$ son Δ_0-fórmulas.*
   (b) *Si φ y ψ son Δ_0-fórmulas, entonces también lo son $\neg\varphi$ y $\psi \wedge \varphi$.*
   (c) *Si φ es Δ_0-fórmula, entonces también lo es $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$.*

Teorema 2.7.9 (Primer teorema de absoluticidad). *Sean* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{N}$ *modelos transivos de ZFC tal que $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$. Entonces,*

1. *Las Δ_0 fórmulas son absolutas para* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{N}$*.*

2. *Si φ y ψ son absolutas para* $\mathbf{M}$ *,* $\mathbf{N}$*; entonces $\neg\varphi$ y $\varphi \wedge \psi$ son absolutas para* $\mathbf{M}$*,* $\mathbf{N}$*.*

3. *Si φ es absoluta para* $\mathbf{M}$*,* $\mathbf{N}$*; entonces $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$ es absoluta para* $\mathbf{M}$*,* $\mathbf{N}$*.*

Una prueba del teorema anterior se encuentra en [K].

Teorema 2.7.10 (Segundo teorema de absoluticidad). *Las nociones absolutas son cerradas bajo composición. Es decir, supóngase que* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{N}$ *son dos clases tal que* $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ *y que la fórmula* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *y las funciones* $F(x_1, \ldots, x_n)$ *y* $G_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *son absolutas para* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{N}$*; entonces, también lo son la fórmula*

$$\varphi(G_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, G_n(x_1, \ldots, x_m))$$

y la función

$$F(G_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, G_n(x_1, \ldots, x_m)).$$

Una prueba del teorema anterior se encuentra en [K].

Consideremos la siguiente fórmula $\varphi(z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n)$ con exactamente $m + n$ variables libres. Si $p_1, \ldots, p_m$ son conjuntos la fórmula

$$\varphi(p_1, \ldots, p_m, x_1, \ldots, x_n)$$

determina una relación n-ária $\quad \mathbf{R} \subseteq \underbrace{\mathbf{V} \times \ldots \times \mathbf{V}}_{n-veces}$,

$$\mathbf{R} = \{(x_1, \ldots, x_n) : \varphi(p_1, \ldots, p_m, x_1, \ldots, x_n)\}.$$

También, si para todo $x_1, \ldots, x_{n-1}$ existe un único y tal que

$$\varphi(p_1, \ldots, p_m, x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$$

la fórmula anterior determina una función $\mathbf{F}$ $(n-1)$-ária

$$\mathbf{F} : \underbrace{\mathbf{V} \times \ldots \times \mathbf{V}}_{n-1-veces} \longrightarrow \mathbf{V}.$$

Definición 2.7.11. *Sean* $\mathbf{R}$ *y* $\mathbf{A}$ *dos clases, donde* $\mathbf{R}$ *es una relación binaria sobre* $\mathbf{A}$.

1. *La relación* $\mathbf{R}$ *es bien fundamentada si y sólo si se cumple (i) y (ii): (i) Para todo conjunto* $X \subseteq \mathbf{A} : X \neq \emptyset \to \exists y \in X(\forall z \in X((z, y) \notin \mathbf{R}))$. *El* y *anterior se llama* $\mathbf{R}$*-mínimal en* X. *(ii) pred*$(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \{y \in \mathbf{A} : (y, x) \in \mathbf{R}\}$ *es un conjunto, para toto* $x \in \mathbf{A}$.

2. *La relación* $\mathbf{R}$ *es extensional si y sólo si* $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ *satisface el Axioma de extensionalidad, es decir, si y sólo si* $\forall x, y \in \mathbf{A}[\forall u \in \mathbf{A}(u\mathbf{R}x \leftrightarrow u\mathbf{R}y) \rightarrow x = y]$.

3. *La clase* $\mathbf{A}$ *es extensional si y sólo si* $\forall x, y \in \mathbf{A}[\forall u \in \mathbf{A}(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y]$, *es decir, si y sólo si* $\langle \mathbf{A}, \in \rangle$ *es un modelo del Axioma de extensionalidad.*

La teoría $ZF^- - \{Axioma\, 7\}$ se denota por $ZF^- - P$. Y la teoría $ZFC - \{Axioma\, 7\}$ se denota por $ZFC - P$.

Teorema 2.7.12 (Principio de inducción transfinita (2)). *($ZF^- - P$). Sea* $\mathbf{R}$ *una relación bien fundamentada y semejante a un conjunto sobre* $\mathbf{A}$. *Entonces cualquier subclase no vacía* $\mathbf{X}$ *de* $\mathbf{A}$ *tiene un* $\mathbf{R}$*-elemento mínimal.*

Una prueba del teorema anterior se encuentra en [K].

Teorema 2.7.13 (Teorema de recursión transfinita). ($ZF^- - P$). *Sea* $\mathbf{R}$ *una relación bien fundamentada y semejante a un conjunto sobre* $\mathbf{A}$. *Si* $\mathbf{F} : \mathbf{A} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$, *entonces existe un única* $\mathbf{G} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{V}$ *tal que*

$$\forall x \in \mathbf{A}[\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G}|pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}))].$$

Una prueba del anterior teorema se encuentra en [K].

El siguiente teorema afirma que si una función es absoluta para un modelo transitivo $\mathbf{M}$, y se define otra función a partir de ella usando recursión transfinita, la nueva función también es absoluta para $\mathbf{M}$. Una prueba del mismo se encuentra en [K].

Teorema 2.7.14 (Tercer teorema de absoluticidad). *Sea* $\mathbf{R}$ *una relación bien fundamentada y semejante a un conjunto sobre* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{F} : \mathbf{A} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$. *Sea* $\mathbf{G} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{V}$ *tal que* $\mathbf{G}$ *se define como en el teorema anterior, es decir,*

$$\forall x \in \mathbf{A}[\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G}|pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}))].$$

Sea $\mathbf{M}$ *un modelo transitivo de ZFC-P y supóngase que,*

1. $\mathbf{F}$ *es absoluta para* $\mathbf{M}$.

2. $\mathbf{R}$ *y* $\mathbf{A}$ *son absolutas para* $\mathbf{M}$, ($\mathbf{R}$ *es semejante a un conjunto sobre* $\mathbf{A})^{\mathbf{M}}$, *y* $\forall x \in \mathbf{M}(pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \subseteq \mathbf{M})$.

Entonces, $\mathbf{G}$ *es absoluta para* $\mathbf{M}$.

2.8 Códigos de Borel

Existe una función que codifica a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, usando como códigos(códigos de Borel) a elementos de $\mathbb{N}^\infty$. La idea es que cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ puede ser construido a partir de los intervalos abiertos de extremos racionales, en una cantidad numerable de pasos, usando complemento y uniones numerables (Teorema 2.5.8), y entonces la información de la construcción de A puede ser registrada en una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Por ejemplo, si $I_0, I_1, I_2, I_3, \ldots$ es una enumeración de los intervalos abiertos de extremos racionales, entonces cualquier abierto O de $\mathbb{R}$ queda completamente descrito por el conjunto $\{n : I_n \subseteq O\}$. A continuación se presenta la definición del conjunto de los códigos de Borel(BC), de la función codificadora ($\beta : CB \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$), y las propiedades básicas de los códigos de Borel, la prueba de las propiedades que se mencionan se encuentran en Jech [J3], páginas 537-541.

Definición 2.8.1. *Definición del conjunto de los códigos de Borel,* $BC \subseteq \mathbb{N}^\infty$*:*

1. *Sea la función* $u : \mathbb{N}^\infty \longrightarrow \mathbb{N}^\infty$ *tal que para cada* $c \in \mathbb{N}^\infty$, $u(c)(n) = c(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. *El buen orden canónico de* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *es el siguiente:* $(n, m) < (p, q)$ *si y sólo si (i)* $máx\{n, m\} < máx\{p, q\}$ *ó (ii)* $máx\{n, m\} = máx\{p, q\}$ *y* $n < p$ *ó (iii)* $máx\{n, m\} = máx\{p, q\}$, $n = p$ *y* $m < q$.

3. *Sea* $\Theta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *la biyección canónica de* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *en* ω*, es decir, para cada* $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$*:* $\Theta(n, m) =$ *Tipo de orden*$\{(p, q) : (p, q) < (n, m)\}$.

4. *Para cada* $i \in \mathbb{N}$*: Sea la función* $v_i : \mathbb{N}^\infty \longrightarrow \mathbb{N}^\infty$ *tal que para cada* $c \in \mathbb{N}^\infty, \quad v_i(c)(n) = c(\Theta(i,n)+1), \forall n \in \mathbb{N}$.

5. *Se definen dos* $\aleph_1$*-secuencias* $\langle \sum_\alpha : \alpha < \aleph_1 \rangle$ *y* $\langle \prod_\alpha : \alpha < \aleph_1 \rangle$, *tal que* $\sum_\alpha \subseteq \mathbb{N}^\infty$ *y* $\prod_\alpha \subseteq \mathbb{N}^\infty$, *usando inducción transfinita:*

   - $\alpha = 1$
     $\sum_1 = \{c \in \mathbb{N}^\infty : c(0) > 1\}$
     $\prod_1 = \{c \in \mathbb{N}^\infty : c(0) = 0 \wedge u(c) \in \sum_1\}$
   - $\alpha > 1$
     $\sum_\alpha = \{c \in \mathbb{N}^\infty : \exists \beta < \alpha (c \in \sum_\beta \cup \prod_\beta) \;\; ó \; c(0) = 1 \wedge \forall i \in \omega : v_i(c) \in \bigcup_{\beta<\alpha} (\sum_\beta \cup \prod_\beta)\}$
     $\prod_\alpha = \{c \in \mathbb{N}^\infty : \exists \beta < \alpha (c \in \sum_\beta \cup \prod_\beta) \;\; ó \; c(0) = 0 \;\wedge\; u(c) \in \sum_\alpha\}$

   $BC = \bigcup_{\alpha<\aleph_1} \sum_\alpha = \bigcup_{\alpha<\aleph_1} \prod_\alpha$.

La propiedad de ser código de Borel es absoluta para modelos transitivos,es decir, (c es código de Borel)$^M \leftrightarrow$ c es código de Borel.

Definición 2.8.2. *Sea* $\langle I_n : n < \aleph_0 \rangle$ *una* $\aleph_0$*-secuencia de los intervalos abiertos de extremos racionales de* $\mathbb{R}$*. La función codificadora*

$$\beta : CB \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

se define por inducción transfinita así:

- $\alpha = 1$

  Si $c \in \sum_1$, *entonces* $\beta(c) = \cup\{I_n : c(n) = 1\}$

  Si $c \in \prod_1$, *entonces* $\beta(c) = \mathbb{R} - \beta(u(c))$

- $\alpha > 1$

  Si $c \in \sum_\alpha \wedge c(0) = 1$, *entonces* $\beta(c) = \cup\{\beta(v_i(c)) : i \in \omega\}$

  Si $c \in \prod_\alpha \wedge c(0) = 0$, *entonces* $\beta(c) = \mathbb{R} - \beta(u(c))$.

Teorema 2.8.3. *La función β es sobreyectiva y las siguientes cláusulas se cumplen si M es un modedo transitivo de ZFC, $\{c_n : n \in \aleph_0\} \subseteq M$ y $c, d, e \in M$: (Las cláusulas siguientes expresan propiedades absolutas de códigos de Borel)*

1. $\beta(c)^M = \beta(c) \cap M$
2. $\beta(c) = \beta(d) \cup \beta(e) \leftrightarrow \beta(c)^M = \beta(d)^M \cup \beta(e)^M$
3. $\beta(c) = \beta(d) \cap \beta(e) \leftrightarrow \beta(c)^M = \beta(d)^M \cap \beta(e)^M$
4. $\beta(c) = \beta(d) \triangle \beta(e) \leftrightarrow \beta(c)^M = \beta(d)^M \triangle \beta(e)^M$
5. $\beta(e) = \mathbb{R} - \beta(c) \leftrightarrow \beta(e)^M = \mathbb{R}^M - \beta(c)^M$
6. $\beta(e) = \bigcup_{n\in\omega} \beta(c_n) \leftrightarrow \beta(e)^M = \bigcup_{n\in\omega} \beta(c_n)^M$
7. $\mu(\beta(c)) = 0 \leftrightarrow \mu^M(\beta(c)^M) = 0.$

2.9 El Método de forcing con modelos transitivos numerables

2.9.1 P-nombres y extensiones genéricas $M[G]$

Definición 2.9.1.1. *Sea P un o.p.m. τ es un P-nombre si y sólo si τ es una relación y $\forall\ (\sigma, p) \in \tau[(\sigma$ es $P-$nombre$)\ \wedge\ (p \in\ P)]$.*

La definición anterior se hace por inducción transfinita. Nótese que en la misma no se hace mención a ningún modelo.

Definición 2.9.1.2. *Sea P un o.p.m. $\mathbf{V}^P$ es la clase de los P-nombres. Si M es un m.t.n de ZFC y $P \in M$, entonces $M^P = \mathbf{V}^P \cap M$.*

Definición 2.9.1.3. *Sean M un m.t.n de ZFC , P un o.p.m en M, G un* P*-genérico sobre M y σ un P-nombre:*

1. $val(\sigma, G) = \{val(\delta, G) : \exists p \in G((\delta, p) \in \sigma)\}$*. Algunas veces se escribirá τ_G en vez de $val(\tau, G)$.*
2. $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^P\}$.
3. *Si $x \in M$, $\check{x} = \{(\check{y}, 1_P) : y \in x\}$. (Si x es un conjunto cuya expresión es muy grande, como por ejemplo $x= (\omega^\omega)^M$, entonces $\check{x}$ se escribirá así:* $\overbrace{x}^{\vee}$*).*
4. $\Gamma = \{(\check{p}, p) : p \in P\}$.
5. $up(\sigma, \tau) = \{(\sigma, 1), (\tau, 1)\}$
6. $op(\sigma, \tau) = up(up(\sigma, \sigma), up(\sigma, \tau))$.

En la definición anterior $val(\sigma, G)$ y $\check{x}$ se definen por inducccción transfinita.

El siguiente Teorema dice que $\check{x}$ y Γ son P-nombres canónicos para x y G, respectivamente. También dice el Teorema que los *up* y *op* son P-nombres canónicos para (respectivamente) pares y pares ordenados en $M[G]$.

Teorema 2.9.1.4. *Sean M un m.t.n de ZFC , P un o.p.m en M, G un P-genérico sobre M, $x \in M$ y $\sigma, \tau \in M^{\mathsf{P}}$. Entonces,*

1. $\check{x}_G = x$
2. $\Gamma_G = G$
3. $up(\sigma, \tau) \in M^P$ *y* $up(\sigma, \tau)_G = \{\sigma_G, \tau_G\}$
4. $op(\sigma, \tau) \in M^P$ *y* $op(\sigma, \tau)_G = (\sigma_G, \sigma_G)$.

El siguiente Teorema da una condición suficiente (del orden parcial) para obtener extensiones propias de M:

Teorema 2.9.1.5. *Sea M un m.t.n de ZFC , P un o.p.m en M tal que $\forall p \in P \, \exists \, q, r \in P(q \leq p \wedge r \leq p \wedge q \perp r)$, y G un P-genérico sobre M; entonces $G \notin M$.*

2.9.2 Las relaciones de forcing $\Vdash$ y $\Vdash^*$

En esta subsección se definirá la relación de forcing ($p \Vdash \varphi$) con una fórmula que tiene como parámetros a M, a $(P, \leq, 1)$, a p y a una cantidad finita de P-nombres; y además menciona a todos los modelos $M[G]$, donde G es P-genérico sobre M (Esto implica que la relación $\Vdash$ no se puede decidir dentro de M con tal fórmula). Después se definirá la relación de forcing* ($p \Vdash^* \varphi$) con una fórmula que no tiene como parámetro a M (si tiene a $(P, \leq, 1)$, a p y a una cantidad finita de P-nombres), y no menciona a los modelos $M[G]$. Luego se vinculará ambas relaciones con un Teorema: $p \Vdash \varphi \leftrightarrow (p \Vdash^* \varphi)^M$. Tal resultado muestra que la relación $\Vdash$ se puede decidir dentro de M. Para culminar se enunciará el Teorema del forcing el cuál vincula la relación $\Vdash$ con las extensiones genéricas $M[G]$, y se presentará un listado de las propiedades básicas de la relación $\Vdash$.

Definición 2.9.2.1. *Sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula , M un m.t.n de ZFC , P un o.p.m en M, $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^P$ y $p \in \mathsf{P}$. Entonces,*
$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ si y só lo si

$$\forall G[(G \, es \, \mathsf{P}{-}genérico \, sobre \, M \wedge p \in G) \rightarrow \varphi^{M[G]}(\tau_{1_G}, \ldots, \tau_{n_G})].$$

Definición 2.9.2.2. *Sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula , P un o.p.m , $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathsf{P}}$ y $p \in \mathsf{P}$. Entonces, se define inductivamente $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$:*

1. *$p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ si y sólo si (a) y (b):*

   (a) $\forall (\pi_1, s_1) \in \tau_1$ el conjunto,

$$\{q \leq p : q \leq s_1 \rightarrow \exists (\pi_2, s_2) \in \tau_2 (q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)\}$$

es denso bajo p.

(b) $\forall(\pi_2, s_2) \in \tau_2$ *el conjunto,*

$$\{q \leq p : q \leq s_2 \rightarrow \exists(\pi_1, s_1) \in \tau_1(q \leq s_1 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)\}$$

es denso bajo p.

2. $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$ *si y sólo si el conjunto,*

$$\{q : \exists(\pi, s) \in \tau_2(q \leq s \wedge q \Vdash^* \pi = \tau_1)\}$$

es denso bajo p.

3. $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ *si y sólo si,*

$$p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \ \text{ y } \ p \Vdash^* \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

4. $p \Vdash^* \neg \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ *si y sólo si no existe un* $q \leq p$ *tal que* $q \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

5. $p \Vdash^* \exists x \varphi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ *si y sólo si el conjunto,*

$$\{r : \exists \sigma \in \mathbf{V}^P(r \Vdash^* \varphi(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n))\}$$

es denso bajo p.

Teorema 2.9.2.3. *Sean* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *una fórmula, M un m.t.n de ZFC , P un o.p.m en M,* $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathsf{P}}$ *y* $p \in \mathsf{P}$*. Entonces,*

$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \leftrightarrow (p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n))^M.$$

Una prueba del Teorema anterior se encuentra en [K].

Teorema 2.9.2.4 (Teorema del forcing(TF)). *Sean* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *una fórmula, M un m.t.n de ZFC , P un o.p.m en M,* $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathsf{P}}$ *y G un* P*-genérico sobre M. Entonces,*

$$\varphi(\tau_{1_G}, \ldots, \tau_{n_G})^{M[G]} \leftrightarrow \exists p \in G(p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)).$$

Una prueba del teorema anterior se encuentra en [K] y [J3].

Teorema 2.9.2.5. *Sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula , M un m.t.n de ZFC , P un o.p.m en M, $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^P$, y $p, q \in \mathsf{P}$. Entonces,*

1. *Si $p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ y $q \leq p$, entonces $q \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.*
2. *$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ si y sólo si,*
$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \;\; y \;\; p \Vdash \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$
3. *$\{p \in P : (p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)) \vee (p \Vdash \neg\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n))\}$ es denso.*
4. *$p \Vdash \neg\, \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ si y sólo si $\neg\exists\; q \leq p$ tal que $q \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.*
5. *$p \Vdash \exists x \varphi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ si y sólo si el conjunto,*
$$\{r \leq p : \exists \sigma \in M^P(r \Vdash \varphi(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n))\}$$
es denso bajo p.
6. *Si $p \Vdash \exists x(x \in \sigma \wedge \varphi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n))$ entonces,*
$$\exists q \leq p \exists \pi \in dom(\sigma)(q \Vdash \varphi(\pi, \tau_1, \ldots, \tau_n)).$$
7. *Principio máximal o M^P es full: $p \Vdash \exists x \varphi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n)$, entonces existe un $\pi \in M^P$ tal que $p \Vdash \varphi(\pi, \tau_1, \ldots, \tau_n)$.*
8. *$p \Vdash \forall x \varphi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ si y sólo si $p \Vdash \varphi(\pi, \tau_1, \ldots, \tau_n)$, para todo $\pi \in M^P$.*

Las cláusulas (1), (2) y (8) son consecuencia directa de la la definición de la relación de forcing. Las pruebas de las cláusulas 3-7 se encuentran en [K].

2.9.3 El valor booleano de una fórmula

Veamos algunos conceptos y resultados básicos sobre los órdenes parciales que son álgebras booleanas.

Definición 2.9.3.1. *Un álgebra booleana es un conjunto $\mathcal{B}$ con al menos dos elementos, 0 y 1(cero y uno), dotado de dos operaciones binarias (suma)$+$ y (producto) $\centerdot$, y una operación unaria (complemento)$'$, las cuales satisfacen las siguientes propiedades:*

$$a + b = b + a \ ; \ a \centerdot b = b \centerdot a$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \ ; \ (a \centerdot b) \centerdot c = a \centerdot (\centerdot b \centerdot c)$$

$$a \centerdot (b + c) = (a \centerdot b) + (a \centerdot c) \ ; \ a + (b \centerdot c) = (a + b) \centerdot (a + c)$$

$$a + a = a \ ; \ a \centerdot a = a$$

$$a \centerdot (a + b) = a \ ; \ a + (a \centerdot b) = a$$

$$a + 1 = 1 \ ; \ a \centerdot 1 = a$$

$$a + 0 = a \ ; \ a \centerdot 0 = 0$$

$$a + (a') = 1 \ ; \ a \centerdot (a') = 0$$

$$(a')' = a$$

$$(a + b)' = a' \centerdot b' \ ; \ (a \centerdot b)' = a' + b'.$$

El orden parcial de $\mathcal{B}$ se define así,

$$p \leq q \leftrightarrow p \centerdot q' = 0.$$

Si $a, b \in \mathcal{B}$, entonces: $a + b$ es el supremo de a y b, $a \centerdot b$ es el ínfimo de a y b, a' es el único $c \in \mathcal{B}$ tal que $a + c = 1$ y $a \centerdot c = 0$. También: $a \leq b \leftrightarrow a + b = b \leftrightarrow a \centerdot b = a$. Dos elementos a, b de $\mathcal{B}$ son incompatibles si y sólo si $a \centerdot b = 0$. $a - b = a \centerdot b'$. $D \subseteq \mathcal{B}$ es denso en $\mathcal{B}$ si $D \subseteq \mathcal{B} - \{0\}$ y D es denso en $\mathcal{B} - \{0\}$. $\mathcal{B}$ es completa si el supremo de S ($\sum S$) y el ínfimo de S ($\prod S$) existen en $\mathcal{B}$, para cualquier $S \subseteq \mathcal{B}$. Sea κ un cardinal regular no numerable. $\mathcal{B}$ es κ-completa si $\sum X$ y $\prod X$ existen en $\mathcal{B}$, para todo subconjunto X de $\mathcal{B}$ tal que $|X| < \kappa$. Si $\mathcal{B}$ es ω_1-completa se dice que $\mathcal{B}$ es σ-completa. $\mathcal{B}$ tiene la condición de cadena contable si cualquier subconjunto de $\mathcal{B}$, de elementos incompatibles dos a dos, es numerable.

Definición 2.9.3.2. *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana.*

(1) Un ideal sobre $\mathcal{B}$ es un subconjunto $I \subseteq \mathcal{B}$ tal que,

(a) $0 \in I$, $1 \notin I$

(b) Si $x \in I$ y $z \in I$, entonces $x + z \in I$

(c) Si $x, z \in \mathcal{B}$, $x \in I$ y $z \leq x$, entonces $z \in I$.

(2) Si $\mathcal{B}$ es κ-completa, un ideal I sobre $\mathcal{B}$ es κ-completo si

$$\sum \{u : u \in X\} \in I$$

para todo $X \subseteq I$ y $|X| < \kappa$.

(Si I es $\aleph_1$-completo, se le dice σ-completo).

Definición 2.9.3.3. *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana.*

(1) Un filtro sobre $\mathcal{B}$ es un subconjunto $F \subseteq \mathcal{B}$ tal que,

(a) $1 \in F$, $0 \notin F$

(b) Si $x \in F$ y $z \in F$, entonces $x.z \in F$

(c) Si $x, z \in \mathcal{B}$, $x \in F$ y $x \leq z$, entonces $z \in F$.

(2) Sea F un filtro sobre $\mathcal{B}$. F es un ultrafiltro si $\forall x \in \mathcal{B} : x \in F \vee x' \in F$.

(3) Si $\mathcal{B}$ es κ-completa, un filtro F sobre $\mathcal{B}$ es κ-completo si

$$\prod \{u : u \in X\} \in F$$

para todo $X \subseteq F$ y $|X| < \kappa$.

(Si F es $\aleph_1$-completo, se le dice σ-completo).

(4) Sea M un m.t.n para ZFC y supóngase que $\mathcal{B}$ pertenece a M. Un ultrafiltro F sobre $\mathcal{B}$ es genérico sobre M si y sólo si,

$$X \subseteq F \ \wedge \ X \in M \to \prod X \in F.$$

Dado un ideal I de un álgebra booleana $\mathcal{B}$ la relación $x \sim y \leftrightarrow x \triangle y \in I$, donde $x \triangle y = (x - y) + (y - x)$, es una relación de equivalencia. Es decir, $\sim$ cumple con:

- $\forall x \in \mathcal{B}(x \sim x)$
- $\forall x, y \in \mathcal{B}(x \sim y \to y \sim x)$
- $\forall x, y, z \in \mathcal{B}(x \sim y \wedge y \sim z \to x \sim z)$

El conjunto cociente $\mathcal{B}/I = \{[x] : x \in \mathcal{B}\}$ es un álgebra booleana con las siguientes las operaciones y elementos destacados: $[x] + [y] = [x + y]$, $[x] \centerdot [y] = [x \centerdot y]$, $[x]' = [x']$, $1 = [1]$ y $0 = [0]$.

Teorema 2.9.3.4. *Si $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra e I es un σ-ideal sobre $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}/I$ es una σ-álgebra.*

Una prueba del anterior teorema se encuentra en [Ha].

Teorema 2.9.3.5. *Una σ-álgebra booleana que satisface la condición de cadena contable es completa.*

Una prueba del teorema anterior se encuentra en [Ha].

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ dos álgebras booleanas. Una función $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un *homomorfismo* de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{D}$ si $\forall x, y \in \mathcal{A}$ las siguientes tres condiciones son satisfechas:

- $f(x +^{\mathcal{A}} y) = f(x) +^{\mathcal{D}} f(y)$
- $f(x \centerdot^{\mathcal{A}} y) = f(x) \centerdot^{\mathcal{D}} f(y)$
- $f(x'^{\mathcal{A}}) = f(x)'^{\mathcal{D}}$

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ dos álgebras booleanas. Una función $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un *isomorfismo* de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{D}$ si f es un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{D}$ y además f es biyectiva.

El siguiente teorema muestra como asociar a cualquier orden parcial P una única (salvo isomorfismo) álgebra booleana completa $\mathcal{B}$. Una prueba del mismo puede encontrarse en [K] y [J3].

Teorema 2.9.3.6. *Sea P un orden parcial. Entonces existe una única álgebra booleana completa (la completación de P), $\mathcal{B} = a.r(P)$, y una función $i : P \longrightarrow \mathcal{B} \setminus \{0\}$ tal que:*

1. $\forall p, q \in P(p \leq q \rightarrow i(p) \leq i(q))$
2. $\forall p, q \in P(p \perp q \leftrightarrow i(p) \cdot i(q) = 0)$
3. $\{i(p) : p \in P\}$ *es denso en* $\mathcal{B} \setminus \{0\}$.

Una de las más importantes propiedades de $\mathcal{B} = a.r(P)$ es que los ordenes parciales $(\mathcal{B} - \{0\}, \leq)$ y P producen las mismas extensiones. Esto queda establecido a partir del Teorema2.10.9 que se enunciará luego de una definición y un lema previos. El Lema además de usarse en la prueba del Teorema es muy útil para trabajar con P-genéricos sobre M, por eso se explicita.

Definición 2.9.3.7. *Sean P y Q dos órdenes parciales. $i : \mathsf{P} \longrightarrow \mathsf{Q}$ es una inmersión densa si y sólo si satisface las siguientes 3 propiedades:*

1. $\forall p, q \in P(p \leq q \rightarrow i(p) \leq i(q))$
2. $\forall p, q \in P(p \perp q \rightarrow i(p) \perp i(q))$.
3. $\{i(p) : p \in P\}$ *es denso en* Q.

Lema 2.9.3.8. *Si $P \in M$, G_1,G_2 son P-génericos sobre M y $G_1 \subseteq G_2$; entonces $G_1 = G_2$.*

Una prueba del Lema anterior se encuentra en [K].

Teorema 2.9.3.9. *Sean P y Q dos órdenes parciales en M e $i : P \longrightarrow Q$ una inmersión densa también en M. Si $G \subseteq P$, sea $\hat{\imath}(G) = \{q \in Q : \exists p \in G(i(p) \leq q)\}$.*

1. *Si $H \subseteq Q$ es Q-genérico sobre M, entonces $i^{-1}(H)$ es P-genérico sobre M y $H = \hat{\imath}(i^{-1}(H))$.*
2. *Si $G \subseteq P$ es P-genérico sobre M, entonces $\hat{\imath}(G)$ es Q-genérico sobre M y $G = i^{-1}(\hat{\imath}(G))$.*
3. *En (1) o (2), si $G = i^{-1}(H)$(o, equivalentemente, si $H = \hat{\imath}(G)$), entonces $M[G] = M[H]$.*

Una prueba del Teorema anterior se encuentra en [K] o en [J3].

Se define ahora (en un álgebra booleana completa) el valor booleano de una fórmula:

Definición 2.9.3.10. *Sean M un m.t.n de ZFC , $\mathcal{B}$ un álgebra booleana completa en M, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathcal{B}-\{0\}}$. El valor booleano de $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\|\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\ \|$, se define así:*

$$\|\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\| = \sum\{p \in \mathcal{B} - \{0\} : p \Vdash_{\mathcal{B}-\{0\}} \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\}.$$

La cláusula (1) del siguiente Teorema dice que el valor booleano de una fórmula es la mayor condición que la fuerza. El resto de las cláusulas resaltan la relación existente entre conectivas, cuantíficadores y valor booleano:

Teorema 2.9.3.11. *Sean M un m.t.n de ZFC , $\mathcal{B}$ un álgebra booleana completa en M, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathcal{B}-\{0\}}$.*

1. $\forall p \in \mathcal{B} - \{0\}(p \Vdash_{\mathcal{B}-\{0\}} \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \leftrightarrow p \leq \|\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\|)$.
2. $\|\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\| = \|\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\| \cdot \|\psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\|$.

3. $\|\neg\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)\| = \|\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)\|'$.

4. $\|\exists x\varphi(x,\tau_1,\ldots,\tau_n)\| = \sum\{\,\|\varphi(\sigma,\tau_1,\ldots,\tau_n)\| : \sigma \in M^{\mathcal{B}-\{0\}}\}$.

Una prueba para las cláusulas (1) y (2) y sugerencias para las cláusulas (3) y (4) se encuentran en [K].

2.9.4 $M[G] \models ZFC$

El siguiente Teorema establece que $M[G]$ es el menor modelo transitivo de ZFC que contiene a $M \cup \{G\}$, y sus ordinales son los mismos de M. Una prueba del mismo se encuentra en [K] y [J3]:

Teorema 2.9.4.1 (Teorema del modelo genérico(TMG)). *Sean M un m.t.n de ZFC , P un o.p.m en M y G un P-genérico sobre M. Entonces,*

1. *$M[G]$ es un modelo transitivo de ZFC.*
2. *$M \subseteq M[G]$ y $G \in M[G]$.*
3. *$\mathbf{Ord}^{M[G]} = \mathbf{Ord}^{M}$.*
4. *Si $\Re$ es un modelo transitivo de ZFC tal que $M \subseteq \Re$ y $G \in \Re$, entonces $M[G] \subseteq \Re$.*

Observación : Ante la pregunta ¿ cómo se prueba que una fórmula φ es verdad en $M[G]$?, hay al menos una respuesta: Usando el Teorema del forcing (2.9.2.4). La idea es probar la parte derecha del mismo usando conjuntos densos o densos bajo p, con $p \in G$, que este en M (Teorema 2.7.5). En general, para demostrar que una condición $q \in \mathsf{P}$ con determinada propiedad esta en G la idea es usar los densos o densos bajo p, con p en G, que esten en M.

2.9.5 Forcing Producto

Sean dos o.p.m $(P, \leq_P, 1_P)$ y $(Q, \leq_Q, 1_Q)$. El *forcig producto* $(P, \leq_P, 1_P) \times (Q, \leq_Q, 1_Q) = (P \times Q, \leq, 1)$ se define de la siguiente manera:

$$(p, q) \leq (r, s) \leftrightarrow p \leq_P q \wedge r \leq_Q s$$

$$1 = (1_P, 1_Q)$$

El siguiente Teorema presenta una importante relación sobre los los filtros genéricos de los ordenes parciales P, Q y $P \times Q$ mencionados anteriormente, una prueba del mismo puede encontrarse en [K] y [J1]:

Teorema 2.9.5.1. *Si M es un modelo interno de ZFC, $P, Q \in M$, $G \subseteq P$ y $H \subseteq Q$; entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(1) $G \times H$ es $P \times Q$-genérico sobre M.
(2) G es P-genérico sobre M y H es Q-genérico sobre M[G].
(3) H es Q-genérico sobre M y G es P-genérico sobre M[H].
Adicionalmente:
Si 1-3 ocurre, entonces $M[G \times H] = M[G][H] = M[H][G]$.

El forcing producto se puede generalizar de forma tal que se preserva la propiedad descrita en el Teorema anterior, a continuación se describe como se hace basándose en [J1] y [J2]:

Forcing Producto infinito:

Sea $\{(P_i, \leq_i, 1_i) : i \in I\}$ una colección de o.p.m. El producto $P := X_{i \in I} P_i$ es el conjunto de todas las funciones $p : I \longrightarrow \cup_{i \in I} P_i$ tal que $p(i) \in P_i$, para todo $i \in I$, que tienen la siguiente condición: $p(i) \neq 1_i$ a lo sumo en una cantidad finita de i, en el resto de los i, $p(i) = 1_i$. El orden de P, $\leq$, se define cordenada a cordenada así:

$$p \leq q \leftrightarrow p(i) \leq_i q(i), \text{ para todo } i \in I$$

Es claro que el mayor elemento de P (el 1 de P) es la $r \in P$ tal que $r(i) = 1_i$ para todo $i \in I$.

Para cada $p \in P$ el conjunto finito $sop(p) = \{i \in I : p(i) \neq 1_i\}$ es llamado el *soporte* de p. Por lo tanto P consiste de todas las funciones del producto cartesiano de los P_i, $\prod_{i \in I} P_i$, que tienen soporte finito.

Sea M un modelo interno de ZFC. Si G es un P-genérico sobre M, entonces para cada $i \in I$ el conjunto,

$$G_i = \{p(i) : p \in G\},$$

es P_i-genérico sobre $M[G \restriction (I \setminus \{i\})]$. Donde para cualquier subconjunto A de I,$G \restriction A = \{p \restriction A : p \in G\}$.

3 Algunas aplicaciones del Método de forcing

3.1 Introducción

El objetivo de esta sección es describir algunas aplicaciones del método de forcing. En la primera subsección se presentan el forcing de Cohen, el forcing aleatorio, el forcing de Mathias, el forcing de Sacks y el forcing de Silver, en particular se estudiarán algunos reales que dichos forcing agregan: *real de Cohen*, *real aleatorio*, *real de Mathias*, *real de Sacks* y *real de Silver*, respectivamente. En la segunda subsección se presenta el forcing de Cohen que agrega una cantidad infinita $\alpha \geq \aleph_0$ de reales genéricos, en particular se demostrará el Teorema de Cohen: Si ZFC es consistente, entonces $ZFC + \neg HC$ es consistente. En la tercera subsección se presentará otra versión del forcing de Cohen, *forcing que agrega un árbol perfecto uniforme*, y además se formulará un problema abierto de la Teoría de conjuntos que tiene que ver con cardinales inaccesibles y la Propiedad de Partición Polarizada. Y en la cuarta y última subsección se presentarán los conjuntos cerrados y no acotados, los conjuntos estacionarios, algunos forcing que preservan estacionarios y un forcing que destruye estacionarios agregando un conjunto cerrado y no acotado; se finalizará esta subsección formulando el Axioma de Martin Máximo, un conocido axioma de forcing que es candidato a nuevo axioma de ZFC y que decide el cardinal del continuo.

3.2 Cinco forcing que agregan reales genéricos

3.2.1 Introducción

Cuando se aplica forcing con un orden parcial $(P, \leq, 1)$ a un modelo transitivo y numerable M de ZFC, se pueden agregar a M nuevos números reales. Donde por "agregar a M" se entiende pertenecer al conjunto $M[G] - M = \{x : x \in M[G] \wedge x \notin M\}$, y por número real se entiende (como se dijo en la sección 2) a un elemento de cualquiera de los siguientes conjuntos: $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}^{\infty}$, $2^{\mathbb{N}}$ y $\mathbb{N}^{[\infty]}$.

Ejemplo de reales que se agregan a M son los denominados *reales genéricos* (sobre M), los cuales se definen a partir del G (P- genérico sobre M) que se use para hacer la extensión. El objetivo general de este subsección es estudiar cinco tipos de estos reales genéricos: Los de Cohen, los aleatorios, los de Mathias, los de Sacks y los de Silver; que se obtienen usando,respectivamente, los ordenes parciales de Cohen(C), aleatorio($\mathcal{B}_\mu$), de Mathias (M), de Sacks ($\mathsf{S_a}$) y de Silver ($\mathsf{S_i}$). Una pequeña introducción a ellos es la siguiente:

1. C es el conjunto de las sucesiones finitas de naturales con el orden $p \leq q \leftrightarrow p \supseteq q$. Sean M un modelo transitivo y numerable de ZFC y G un C-genérico sobre M. La función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f = \cup G$ es un *real de Cohen sobre M*.

   C es un caso particular del siguiente orden parcial:

   Sean I,J dos conjuntos. $Fn(I, J) = \{p : p \text{ es función} \wedge |p| < \aleph_0 \wedge \text{dom}(p) \subseteq I \wedge \text{ran}(p) \subseteq J\}$. $p \leq q \leftrightarrow q \subseteq q$.

   Ya que C $=Fn(\omega, \omega)$. En la siguiente subsección se estudiará el orden parcial $Fn(I, J)$ de una marera más general y se relacionará con la Hipótesis del continuo, pues con un caso particular de $Fn(I, J)$, $Fn(\aleph_2 \times \omega, \omega)$, se demuestra el resultado de Cohen (1963) [J1]: ZFC + $\neg$ HC es consistente realativa a ZFC.

2. A $\mathcal{B}_\mu$ lo usó Solovay en 1970 [So] para probar que la teoría ZF + "Principio de elección dependiente"(DC) + "Todo conjunto de reales es medible Lebesgue" + "Todo conjunto de reales tiene la propiedad de Baire" + "Todo conjunto de reales no numerable tiene un subconjunto perfecto" es consistente relativa a ZFC + "Existe un cardinal inaccesible" [J1]. $\mathcal{B}_\mu$ es el álgebra cociente de la σ-álgebra de los Borelianos de [0,1] módulo el ideal de los Borelianos de [0,1] de medida de Lebesgue cero, con el orden: $[p] \leq [q] \leftrightarrow \mu(p - q) = 0$. Sean M un modelo transitivo y numerable de ZFC y G un $\mathcal{B}_\mu$-genérico sobre M. El $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = sup\{r : r \text{ es racional } \wedge [(r, 1]] \in G\}$ es un *real aleatorio sobre M*.

3. A M lo usó Mathias (1977) para probar que la teoría ZF + DC + "Propiedad de Ramsey"($\omega \longrightarrow (\omega)^\omega$) es consistente relativa a ZFC +

"Existe un cardinal inaccesible" [J1]. Tal prueba la hizo mostrando que $\omega \longrightarrow (\omega)^\omega$ vale en el modelo que Solovay construyó para probar el resultado referido en (2). M es el conjunto de todos los pares (s, S) donde s y S son subconjuntos de naturales, s es finito, S es infinito y el máx(s)<mín(S). El orden es: $(s, S) \leq (r, B) \leftrightarrow S \subseteq B \wedge r \subseteq s \wedge s - r \in B$. Sean M un modelo transitivo y numerable de ZFC y G un M-genérico sobre M. El $X \in \mathbb{N}^{[\infty]}$ tal que $X = \bigcup\{s : \exists A(s, A) \in G\}$ es un *real de Mathias sobre M.*

4. Con $\mathsf{S_a}$ Sacks [J1] construyó (1971) una extensión minimal con respecto a los conjuntos de ordinales, es decir, si G es un $\mathsf{S_a}$-genérico sobre M y $X \in M[G]$ es un conjunto de ordinales, entonces: $M[X] = M$ o $M[X] = M[G]$, donde si $z \in M[G]$, $M[z]$ es el menor modelo transitivo y numerable de ZFC que tiene los mismos ordinales que M y contiene a $M \cup \{z\}$, o sea,

$$M[X] = \bigcap\{A : A \text{ es transitivo} \wedge |A| = \aleph_0 \wedge A \text{ es modelo de ZFC} \wedge$$
$$A \cap \mathbf{Ord} = M \cap \mathbf{Ord} \wedge A \supseteq M \cup \{X\}\}.$$

   $\mathsf{S_a}$ es el conjunto de los subárboles perfectos y no vacíos del árbol binario completo, con el orden de la inclusión. Sean M un modelo transitivo y numerable de ZFC y G un $\mathsf{S_a}$-genérico sobre M. La función $f : \mathbb{N} \longrightarrow 2$ tal que $f = \bigcup\{s : \forall p \in G(s \in p)\}$ es un *real de Sacks sobre M.*

5. $\mathsf{S_i}$ es el conjunto de los subárboles perfectos, no vacíos y uniformes del árbol binario completo, con el orden de la inclusión. Sean M un modelo transitivo y numerable de ZFC y G un $\mathsf{S_i}$-genérico sobre M. La función $f : \mathbb{N} \longrightarrow 2$ tal que $f = \bigcup\{s : \forall p \in G(s \in p)\}$ es un *real de Silver sobre M.* Al igual que $\mathsf{S_a}$ también $\mathsf{S_i}$ permite construir una extensión minimal con respecto a los conjuntos de ordinales [J4].

Los reales de Cohen, aleatorios, de Mathias, de Sacks y de Silver sobre M tienen entre sus propiedades comunes generar la extensión $M[G]$ correspondiente. Es decir, si v es alguno de ellos, entonces

$$M[v] = M[G]. \tag{1}$$

Otras propiedades, no comunes a todos éstos tipos de reales genéricos, se presentan luego de las siguientes definiciones,

Definición 3.2.1.1. *Sean* $g, f \in \mathbb{N}^\infty$ *y* $F, H \subseteq \mathbb{N}^\infty$.

1. *g domina a f* ($f \leq^* g$) $\leftrightarrow \exists n \forall m \geq n(f(m) \leq g(m))$.
2. *g domina a F* $\leftrightarrow \forall f \in F(f \leq^* g)$.
3. *F domina a H* $\leftrightarrow \forall f \in H \exists g \in F(f \leq^* g)$.

Definición 3.2.1.2. *Sean M un modelo transitivo y numerable de ZFC y v un número real que se agrega a M en una aplicación de forcing.*

1. *v es* $\mathbb{N}^\infty -$ *dominante* $\leftrightarrow\ \exists h \in \mathbb{N}^\infty \cap M[v]$(*h domina a* $\mathbb{N}^\infty \cap M$).
2. *v es* $\mathbb{N}^\infty -$ *dominado* $\leftrightarrow\ \mathbb{N}^\infty \cap M$ *domina a* $\mathbb{N}^\infty \cap M[v]$.

Se sabe lo siguiente:

(a) Un real de Cohen sobre M no es $\mathbb{N}^\infty-$ dominante, ni $\mathbb{N}^\infty-$dominado.

(b) Un real aleatorio sobre M es $\mathbb{N}^\infty-$dominado (por lo tanto no es $\mathbb{N}^\infty-$dominante).

(c) Un real de Mathias sobre M domina a $\mathbb{N}^\infty \cap M$ (por lo tanto es $\mathbb{N}^\infty-$ dominante y no es $\mathbb{N}^\infty-$dominado).

(d) Un real de Sacks sobre M es $\mathbb{N}^\infty-$dominado (por lo tanto no es $\mathbb{N}^\infty-$dominante).

(e) Un real de Silver sobre M es $\mathbb{N}^\infty$-dominado (por lo tanto no es $\mathbb{N}^\infty$-dominante).

El objetivo específico de esta subsección es demostrar la afirmación (1) y las cláusulas (a), (b),(c),(d) y (e) anteriores. La principal bibliografía que se usa para ello es [K], [J3] , [J4], [Bar] y [D4]. Adicionalmente se demostrará que el real de Cohen no es “eventualmente diferente” mientras que el real de Mathias si [Br], donde la propiedad de ser “eventualmente diferente” se define más adelante.

3.2.2 Forcing de Cohen

Se inicia esta subsección definiendo el orden parcial de Cohen $(\mathsf{C}, \leq, 1)$. Después se presenta el concepto de *real de Cohen sobre M* , éstos reales serán elementos de $\mathbb{N}^\infty$. Luego se demuestra que si G es un C- genérico sobre M y f es el real de Cohen sobre M definido por G, entonces : (1) $M[G] = M[f]$ y (2) f no es $\mathbb{N}^\infty-$dominante, ni $\mathbb{N}^\infty-$ dominado. Para finalizar se define la noción de *real eventualmente diferente* y se demuestra que el real de Cohen no es eventualmente diferente y además, que el forncig de Cohen no agrega reales eventualmente diferentes. La bibliografía principal que se usa es [J3] y [Bar].

Definición 3.2.2.1. *El orden parcial de Cohen* $(\mathsf{C}, \leq, 1)$ *se define como sigue:*

1. $\mathsf{C} = \{p : p \text{ es función} \wedge |p| < \aleph_0 \wedge dom(p) \subseteq \omega \wedge ran(p) \subseteq \omega\}$
2. $p \leq q \leftrightarrow q \subseteq p$
3. $1 = \emptyset$.

Notar que C satisface el Teorema 2.9.1.5 y en consecuencia C produce extensiones propias de M.

Definición 3.2.2.2. *Sean M un m.t.n para ZFC, C en M y $f \in \mathbb{N}^\infty$. f es un real de Cohen sobre M si y sólo si existe un G tal que G es C-genérico sobre M y $f = \cup G$.*

Veamos porqué la f tal que $f = \cup G$ es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$:

1. No existe un $n \in \omega$ tal que $(n,i) \in f$ y $(n,j) \in f$ y $i \neq j$, ya que G es un filtro y si $p, q \in G$ entonces existe un $r \in G$ tal que $p \subseteq r \wedge q \subseteq r$.

2. $dom(f) = \omega$: Para cada $n \in \omega$ el conjunto $E_n = \{p \in \mathsf{C} : n \in dom(p)\}$ es denso. Entonces, $E_n \cap G \neq \emptyset$ y asi $n \in dom(f)$.

Teorema 3.2.2.3. *Sean M un m.t.n de ZFC , C en M, G un C-genérico sobre M y M[G] la extensión genérica correspondiente a G. Sea $f = \cup G$ el real de Cohen sobre M definido por G y sea $M[f] = \bigcap\{N : N$ es un m.t.n de ZFC $\wedge$ N tiene los mismos ordinales que $M \wedge$ $M \cup \{f\} \subseteq N\}$. Entonces,*

1. $M[f] = M[G]$,

2. f *no es* $\mathbb{N}^\infty-$*dominante, ni* $\mathbb{N}^\infty-$ *dominado.*

Demostración.(1)

1.1 $M[f] \subseteq M[G]$: Es suficiente con ver que $f = \cup G \in M[G]$ y esto se cumple ya que por el TMG se tiene que $G \in M[G]$ y sabemos por absoluticidad que la unión es absoluta para modelos transitivos de ZFC. Otra forma de ver que $f = \cup G \in M[G]$ es considerando que f tiene, un C-nombre : $\Phi = \{(op(\check{n}, \check{m}), p) : p \in \mathsf{C} \wedge n \in dom(p) \wedge p(n) = m\}$.

1.2 $M[G] \subseteq M[f]$: Basta ver que $G \in M[f]$ y esto se prueba verificando la siguiente igualdad,

$$G = \{p \in \mathsf{C} : p \subseteq f\} \tag{2}$$

pues como la fórmula $p \subseteq f$ tiene sus parámetros en M, $\mathsf{C} \in M$ y $M[f]$ es un modelo del axioma de comprensión tenemos que $G \in M[f]$. La justificación de (2) la hacemos como sigue: $(\subseteq)$ es inmediata. $(\supseteq)$: Si $p \subseteq f$, entonces para todo par $(n,m) \in p$ existe un $q_{(n,m)} \in G$ tal que $(n,m) \in q_{(n,m)}$. Entonces como G es un filtro y p es finita, existe un $s \in G$ tal que $s \leq q_{(n,m)}$, para todo par $(n,m) \in p$. En consecuencia $p \subseteq s$. Luego, $s \leq p$ y como G es un filtro, tenemos que $p \in G$.

(2)

2.1 f no es $\mathbb{N}^\infty-$dominante: Sea $h \in \mathbb{N}^\infty \cap M[G]$. Se probará que existe una función $g \in \mathbb{N}^\infty \cap M$ que h no domina. Por el TF existe un $p \in G$ tal que,

$$p \Vdash_{\mathsf{C}} \tau \text{ es una función de } \check{\omega} \text{ en } \check{\omega},$$

donde $\tau_G = h$. Sea $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ una enumeración de las condiciones de C que extienden a p. La función $g \in \mathbb{N}^\infty \cap M$ se define así:

Para cualquier n,

$$g(n) = mín \underbrace{\{k \in \omega : \exists q \leq p_n (q \Vdash_{\mathsf{C}} \tau(\check{n}) = \check{k})\}}_{A_n}$$

(a) g esta bien definida: Para cualquier n, A_n no es vacío pues $p_n \Vdash_{\mathsf{C}} \tau : \check{\omega} \longrightarrow \check{\omega}$ y por lo tanto, $p_n \Vdash_{\mathsf{C}} \exists m (m \in \check{\omega} \wedge \tau(\check{n}) = m)$. Asi que(por Teorema 2.9.2.5-6) existe un $q \leq p_n$ y existe un $k \in \omega$ tal que $q \Vdash_{\mathsf{C}} \tau(\check{n}) = \check{k}$.

(b) También $g \in M$, pues

$$g = \underbrace{\{(n,m) \in \omega \times \omega : m = mín\{k \in \omega : \exists q \leq p_n (q \Vdash_{\mathsf{C}} \tau(\check{n}) = \check{k})\}}_{T}$$

y por el Axioma de comprensión en M, T está en M.

Para probar que $g \not\leq^* h$ es suficiente con demostrar que $\exists^\infty n (h(n) \leq g(n))$, donde el cuantificador $\exists^\infty n$ significa "existen una cantidad infinita de n", pues si $\exists^\infty n (h(n) = g(n))$ se define $g' \in \mathbb{N}^\infty \cap M$ así: $\forall n \in \omega (g'(n) = g(n) + 1)$. Se probará que $\exists^\infty n (h(n) \leq g(n))$ por absurdo. Supóngase que existe un $n_0 \in \omega$ tal que $\forall n \geq n_0 (g(n) < h(n))$. Entonces (como se está en $M[G]$), por el TF, existe un $s \in G$ tal que $s \Vdash_{\mathsf{C}} \forall n \geq \check{n}_0 (\check{g}(n) < \tau(n))$. Sea $p_m \leq s$ tal que $m \geq n_0$ (Tal p_m siempre se puede encontrar pues como $p, s \in G$ y G es filtro,existe $u \in G (u \leq s \wedge u \leq p)$. Como u es una extensión de p, u tiene infinitas extensiones en la lista $p_1, \ldots, p_n, \ldots$, en especial, $|\{u \cup \{(máx\, dom(u)+1, r)\} : r \in \omega\}| = \aleph_0$). Considerando la definición de g se tiene que existe un $q \leq p_m$ tal que $q \Vdash_{\mathsf{C}} \tau(\check{m}) = \check{g}(\check{m})$. Entonces $q \Vdash_{\mathsf{C}} \tau(\check{m}) = \check{g}(\check{m}) \wedge \check{g}(\check{m}) < \tau(\check{m})$. Una contradicción.

2.2 Probaremos que f no es $\mathbb{N}^\infty-$dominado probando que ninguna $g \in (\mathbb{N}^\infty)^M$ domina a f: Sea $g \in (\mathbb{N}^\infty)^M$. Se debe probar que g no domina a f. Para cualquier $n \in \omega$ el conjunto $A_n = \{q \in \mathsf{C} : \exists m \geq n(g(m) < q(m))\}$ es denso y esta en M. De manera que para cualquier n, $A_n \cap G \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\exists^\infty n(g(n) < f(n))$. Es decir, $f \not\leq^* g$. $\square$

Antes de terminar esta subsección se presentará otra importante propiedad que tienen los reales de Cohen (Brendle, [Br]):

Definición 3.2.2.4. *Sean M un modelo interno de ZFC y M[G] una extensión genérica de M. Un real $x \in M[G]$ es eventualmente diferente si y sólo si para cada $y \in \mathbb{N}^\infty \cap M$ existe un $k \in \omega$ tal que para cualquier $i \geq k[x(i) \neq y(i)]$.*

Observación 1: Sean M un modelo interno de ZFC y M[g] una extensión genérica de Cohen, donde g es el real genérico determinado por un filtro G $\mathcal{C}$-genérico sobre M. Entonces g no es eventualmente diferente. En efecto: Dado $y \in \mathbb{N}^\infty \cap M$ y $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $D_k = \{p : \exists i \geq k[p(i) = y(i)]\}$ es denso. Más todavía, para cualquier $y \in \mathbb{N}^\infty \cap M$ y $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $E_k = \{p : \exists i \geq k[p(i) = y(i) \wedge p(i+1) = y(i+1)]\}$ es también denso, y por lo tanto, para cualquier $y \in \mathbb{N}^\infty \cap M$, el conjunto $\{i \in \mathbb{N} : g(i) = y(i) \wedge g(i+1) = y(i+1)\}$ es infinito.

Observación 2: En la extensión M[g] no se adicionan reales eventualmente diferentes. En efecto: Sea $r \in \mathbb{N}^\infty$ tal que $r \in M[g] \setminus M$, y sea τ un C-nombre para r en M. Sea $p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$ una enumeración de condiciones del forcing de Cohen C que extienden a una condición que fuerce que r es una función de ω en ω (por el Teorema del Forcing tal condición está en el genérico correspondiente a g). Definimos $x \in \mathbb{N}^\infty$ de la siguiente manera:

$$x(n) := min\{k : \exists q \leq p_n(q \Vdash \tau(\check{n}) = \check{k})\}.$$

Por su definición, $x \in M$. Veamos que $\{i \in \mathbb{N} : r(i) = x(i)\}$ es infinito. Supongamos que no ocurre esto. Es decir, $\exists d \in \omega[\forall n \geq d(r(n) \neq x(n))]$. Entonces por el Teorema del Forcing existe una condición p (en el genérico) tal que $p \Vdash \forall n \geq \check{d}(\tau(n) \neq \check{x}(n))$. Tomamos $m > d$ tal que $p_m \leq p$. Si $x(m) = k$, entonces (por definición) existe $q \leq p_m[q \Vdash \tau(\check{m}) = \check{k}]$. Entonces $q \Vdash \tau(\check{m}) = \check{x}(\check{m})]$. Esto es una contradicción.

Una vez que sabemos que $\forall x \in M[g] \exists y \in M$ tal que $\{i \in \mathbb{N} : x(i) = y(i)\}$ es infinito, podemos obtener un resultado adicional: Para cualquier $x \in M[g]$ existe un $y \in M$ tal que el conjunto $\{i \in \mathbb{N} : x(i) = y(i) \wedge x(i+1) = y(i+1)\}$ es infinito. En efecto: Sea $r_1 \in \mathbb{N}^\infty$ tal que $r_1 \in M[g] \setminus M$. Entonces consideramos al real r_2 que codifica los pares consecutivos de r_1, y a r_2 le aplicamos el resultado anterior. En consecuencia, existe en M un real r_3 tal que $\{i \in \mathbb{N} : r_2(i) = r_3(i)\}$ es infinito. Entonces descodificando a r_3 (considerandolo como una secuencia de pares consecutivos) obtenemos un real ${r_3}^*$ en M tal que el conjunto $\{i \in \mathbb{N} : r_1(i) = {r_3}^*(i) \wedge r_1(i+1) = {r_3}^*(i+1)\}$ es infinito.

Observación 3: Si la extensión genérica M[G] es obtenida utilizando el forcing de Cohen que agrega $\aleph_1$ reales de Cohen ($\mathsf{C}_{\aleph_1}$), (ver subsección xyz más adelante donde se trata el forcing que agrega una cantidad infinita de reales genéricos) , entonces ningún real eventualmente diferente es adicionado, porque cualquier nuevo real es adicionado por una cantidad numerable de reales genéricos de Cohen (ver Lema de Lévy en la subsección 3.3), por lo tanto, es adicionado por un real Cohen genérico.

3.2.3 Forcing aleatorio

Se inicia esta subsección definiendo el orden parcial aleatorio $\mathcal{B}_\mu^\bullet$. Después se definirá *real aleatorio sobre M* apoyándose en la función β que codifica a los borelianos(Teorema 2.8.3), éstos reales serán elementos de [0,1]. Por último se prueba que si G es un $\mathcal{B}_\mu^\bullet$-genérico sobre M, entonces (1) y (2): (1) Si x es el real aleatorio sobre M correspondiente a G, $M[G] = M[x]$. Y (2) x es $\mathbb{N}^\infty$-dominado. La bibliografía principal que se usa es [J3] y [J4].

Definición del orden parcial aleatorio:

Sea $\mathcal{B}([0,1])$ los borelianos del intervalo cerrado cero-uno, correspondientes a la topología usual de $\mathbb{R}$. Sea $I_\mu = \{B \in \mathcal{B}([0,1]) : \mu(B) = 0\}$ el conjunto de los Borelianos del intervalo cerrado cero-uno cuya medida de Lebesgue es cero(I_μ es un ideal sobre $\mathcal{B}([0,1])$).

Dados $B, D \in \mathcal{B}([0,1])$ se define la relación $\sim$: $\quad B \sim D \leftrightarrow B \triangle D \in I_\mu$.
$\sim$ es una relación de equivalencia.
Consideremos el álgebra cociente

$$\mathcal{B}([0,1])/I_\mu = \{[B] : B \in \mathcal{B}([0,1])\},$$

donde

$$[B] + [D] = [B \cup D],\ [B] \centerdot [D] = [B \cap D]$$
$$[B]' = [[0,1] - B],\ 1 = [[0,1]]\ y\ 0 = [\emptyset].$$

A $\mathcal{B}([0,1])/I_\mu$ se le denotará por $\mathcal{B}_\mu$.

$$\forall [B], [D] \in B_\mu,$$

$$[B] \leq [D] \leftrightarrow [B] \centerdot [D]' = [\emptyset] \leftrightarrow \mu(B - D) = 0.$$

Como I_μ es un σ-ideal sobre $\mathcal{B}_\mu$, se concluye, por el Teorema 2.9.3.4, que $\mathcal{B}_\mu$ es una σ-álgebra. En especial,

$$\sum_{i=0}^{\omega} [X_i] = [\bigcup_{i=0}^{\omega} X_i].$$

Definición 3.2.3.1. *El orden parcial aleatorio es* $(\mathcal{B}_\mu - \{0\}, \leq)$*, y el mismo se denotará por* $\mathcal{B}_\mu^\bullet$*.*

Notar que $\mathcal{B}_\mu^\bullet$ satisface el Teorema 2.9.1.5 y por lo tanto produce extensiones propias de M(Tal satisfación ocurre porque la medida de Lebesgue μ no es atómica, es decir, para cada boreliano $A \subseteq [0,1]$ tal que $\mu(A) > 0$, existen dos conjuntos $B, C \subseteq A$ tal que $B \cap C = \emptyset$, $A = B \cup C$, $\mu(B) > 0$ y $\mu(C) > 0$. Esto se puede probar considerando que la función $f : [0,1] \longrightarrow [0, \mu(A)]$ tal que $f(x) = \mu([0,x] \cap A)$, es contínua y en consecuencia existe un $z \in A$ tal que $0 < f(z) < \mu(A)$).

Definición del real aleatorio:

Sean M un $m.t.n$ de ZFC, $\mathcal{B}_\mu^M$, $\mathcal{B}([0,1])^M$ y $B^M \in \mathcal{B}([0,1])^M$. Por el Teorema 2.8.3 B^M tiene un código $c \in M$, $B^M = \beta(c)^M$, y ocurre que $\beta(c)^M = \beta(c) \cap M$, donde $\beta(c)$ es el Boreliano codificado por c en $\mathbf{V}$. Si $B = \beta(c)$, $B^M = B \cap M$.

Lema 3.2.3.2. *Si G es un $(\mathcal{B}_\mu^\bullet)^M$-genérico sobre M, entonces existe un único $x \in [0,1]$ tal que para cualquier $B^M \in \mathcal{B}([0,1])^M$,*

$$x \in B \leftrightarrow [B^M] \in G \tag{3}$$

Demostración. (I) *Unicidad*: Supongamos que existen distintos $x, y \in [0,1]$ que satisfacen (3) y que $x < y$. Entonces existe un racional r tal que $x < r < y$. Sea $Z^M = \{w \in [0,1]^M : r{<}w\}$ y la diferencia $[0,1]^M - Z^M$ (donde $[0,1]^M = [0,1] \cap M$). Como G es un ultrafiltro sobre $(\mathcal{B}_\mu)^M$, $[Z^M]$ o $[[0,1]^M - Z^M]$ pertenece a G. Si $[Z^M] \in G$, entonces por (3), $x \in Z$. Contradicción. Si $[[0,1]^M - Z^M] \in G$, entonces (por (3)) $y \in [0,1] - Z$. Contradicción.

(II) *Existencia*: Tal x es,

$$x = sup \underbrace{\{r : r \text{ es racional} \wedge [(r,1]^M] \in G\}}_{A}$$

Como [0,1] es un espacio métrico completo, $0 \in A$ y 1 es una cota superior de A, entonces el supremo x de A existe. Falta ver que x satisface (3). Esto se hará por inducción en los códigos de Borel de M: $BC^M = \bigcup_{\alpha<\aleph_1{}^M} \sum_\alpha^M = \bigcup_{\alpha<\aleph_1{}^M} \prod_\alpha^M$.

Caso base: $c \in \sum_1 \cap M$ y $c \in \prod_1 \cap M$.

Subcaso: $c \in \sum_1 \cap M$

Primero se trabaja con los códigos c que codifican intervalos abiertos de extremos racionales, es decir, los c tal $c(n) = 1$ en un sólo n. Supóngamos que c es uno de ellos y que (a,b) es el intervalo que el codifica, es decir, $\beta(c)=(a,b)$. Entonces el argumento es el siguiente:

$x \in (a,b) \leftrightarrow a < x < b \leftrightarrow a < sup\{r : [(r,1]^M] \in G\} < b \leftrightarrow [(a,1]^M] \in G \wedge [(b,1]] \notin G \leftrightarrow [(a,b)] \in G$.

Ahora se considera el caso de que $\beta(c) = \cup\{I_n : c(n) = 1\}$ y $c(n) = 1$ en más de un n.

$x \in \cup_{n\in\omega} I_n \leftrightarrow \exists n \in \omega(x \in I_n) \leftrightarrow \exists n \in \omega([I_n^M] \in G) \leftrightarrow \sum_{n\in\omega}[{I_n}^M] \in G \leftrightarrow [\cup_{n\in\omega}{I_n}^M] \in G$.

Subcaso: $c \in \prod_1 \cap M$. En este caso $\beta(c) = [0,1] - \beta(u(c))$.

$x \in [0,1] - \beta(u(c)) \leftrightarrow x \notin \beta(u(c)) \leftrightarrow [\beta(u(c))^M] \notin G \leftrightarrow [[0,1]^M - \beta(u(c))^M] \in G$.

Caso inductivo: $\sum_\alpha$ y $\prod_\alpha$. (Más exactamente: $\sum_\alpha \cap M$ y $\sum_\alpha \cap M$).

Supóngase que $\forall\beta < \alpha$ todo código de Borel c tal que $c \in \sum_\beta$ o $c \in \prod_\beta$ cumple con (3). Se debe probar que todo $c \in \sum_\alpha$ o $c \in \prod_\alpha$ cumple con (3).

Subcaso: $\sum_\alpha$.

$c \in \sum_\alpha$ y $c(0) = 1$ y $\beta(c) = \bigcup_{i\in\omega} \beta(v_i(c))$.

$x \in \bigcup_{i\in\omega} \beta(v_i(c)) \leftrightarrow \exists i \in \omega(x \in \beta(v_i(c)) \leftrightarrow \exists i \in \omega([\beta(v_i(c))^M] \in G) \leftrightarrow \sum_{i\in\omega}[\beta(v_i(c))^M] \in G \leftrightarrow [\bigcup_{i\in\omega} \beta(v_i(c))^M] \in G$.

Subcaso: $\prod_\alpha$.

Al igual que $\sum_\alpha$ es muy parecido al caso base $\sum_1$, $\prod_\alpha$ es muy parecido a $\prod_1$. $\square$

Definición 3.2.3.3. *Un número real x es aleatorio sobre M si y sólo si existe un G que es $(\mathcal{B}_\mu^\bullet)^M$-genérico sobre M y x satisface (3) con G.*

Teorema 3.2.3.4. *Sean M un m.t.n de ZFC , $(\mathcal{B}_\mu)^M$, G un $(\mathcal{B}_\mu^\bullet)^M$-genérico sobre M y $M[G]$ la extensión genérica correspondiente a G. Entonces:*

1. *Si x es el real aleatorio definido por G, M[G]=M[x].*

2. *x es $\mathbb{N}^\infty$-dominado.*

Demostración.(1)

(a) $M[x] \subseteq M[G]$: $x \in M[G]$, pues $A \in M[G]$, por el Axioma de comprensión en $M[G]$, y $[0,1]^{M[G]}$ es un espacio completo. Entonces, $M[x] \subseteq M[G]$.

(b) $M[G] \subseteq M[x]$: Para cada $B^M \in \mathcal{B}([0,1])^M$ se cumple que $B^M \subseteq B^{M[x]} \subseteq B$. Sea el siguiente conjunto,

$$\underbrace{\{[B^M] : x \in B^{M[x]} \wedge B^{M[x]} \text{es un Boreliano de } M[x] \text{ con código en M}\}}_{Y}.$$

Prueba de G=Y: ($G \subseteq Y$) Si $[B^M] \in G$, entonces por (3) $x \in B$. Asi que $x \in B^{M[x]}$ y por lo tanto $[B^M] \in Y$. ($Y \subseteq G$) Si $[B^M] \in Y$, entonces $x \in B^{M[x]}$ donde $B^{M[x]}$ es un Boreliano con código en M. Por lo tanto $x \in B$ y por (3) $[B^M] \in G$. Como, por comprensión en M[x], Y pertenece a M[x], se cocluye que $G \in M[x]$. Asi que $M[G] \subseteq M[x]$.

Para demostrar la segunda parte del Teorema necesitamos el siguiente resultado previo:

Sea μ la medida de Lebesgue. Se define la función m, $m : \mathcal{B}_\mu \longrightarrow [0,1]$ así,

$$m([X]) = \mu(X).$$

Es fácil verificar que m está bien definida.

Lema 3.2.3.5. *La función m satisface las siguientes propiedades,*

1. *$m([\emptyset]) = 0$; y $m([X]) > 0$, si $\mu(X) > 0$.*

2. *Si $[X_1] \leq_{\mathcal{B}_\mu} [X_2]$, entonces $m([X_1]) \leq m([X_2])$.*

3. *Sea* $\{[X_i] : i \in \omega\} \subseteq \mathcal{B}_\mu$*, donde los* $[X_i]$ *son incompatibles dos a dos, entonces,*

$$m(\sum_{i=0}^{\omega}[X_i]) = \sum_{i=0}^{\omega} m([X_i])$$

Demostración del Lema. Las cláusulas (1) y (2) son directas a partir de las propiedades de la medida de Lebesgue ([Ro], capítulo 3). Lo mismo ocurre con la cláusula (3) pues $\mathcal{B}_\mu$ satisface la igualdad,

$$\sum_{i=0}^{\omega}[X_i] = [\bigcup_{i=0}^{\omega} X_i]$$

En esta última cláusula para aplicar la σ-aditividad de μ hay que disjuntizar los borelianos usando que $[X_i] \cdot [X_j] = [\emptyset]$, $\forall i, j \in \omega\, (i \neq j)$. Es decir, que $\mu(X_i \cap X_j) = 0$, $\forall i, j \in \omega\, (i \neq j)$. $\forall i \in \omega$ se toma $X_i^* = X_i - \bigcup\{X_i \cap X_j : j \neq i\}$. Entonces, $\forall i, j \in \omega\, (i \neq j)$ se cumple $X_i^* \cap X_j^* = \emptyset$ y $m([X_i]) = m([X_i^*])$. $\square$

(Se dice que una álgebra booleana $\mathcal{A}$ es *medible* si existe una función $g : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ con las propiedades (1),(2) y (3) de m. Asi que $\mathcal{B}_\mu$ es un álgebra medible)

Como m es finita, es decir, $\forall [A] \in \mathcal{B}_\mu(m([A]) < \aleph_0)$, se tiene que $\mathcal{B}_\mu$ tiene la condición de cadena contable. Luego, aplicando el teorema 2.9.3.5 se concluye que $\mathcal{B}_\mu$ es completa. Ahora podemos definir el valor Booleano de una fórmula y demostrar la cláusula dos del Teorema.

(2) (Para simplificar llamaremos a $\mathcal{B}_\mu^{\bullet M}$ por $\mathcal{B}_\mu^\bullet$ y a $[B]^M$ por $[B]$).

Sea $h \in (\mathbb{N}^\infty)^{M[G]}$. Existe un $[B] \in G$ tal que

$$[B] \Vdash_{\mathcal{B}_\mu^\bullet} \tau : \check{\omega} \longrightarrow \check{\omega},$$

donde $\tau_G = h$.

Para demostrar lo que se quiere es suficiente con probar que el conjunto D definido a continuación es denso bajo $[B]$,

$$D = \{[E] \leq [B] : [E] \Vdash_{\mathcal{B}_\mu^\bullet} \exists x(x \in \overbrace{(\mathbb{N}^\infty)^M}^{\vee} \wedge \tau \leq^* x)\},$$

ya que esto implica que $G \cap D \neq \emptyset$, pues $D \in M$, y entonces, por el TF,

$$(\exists x(x \in (\mathbb{N}^{\infty})^M \wedge (\tau_G \leq^* x))^{M[G]},$$

lo que se quiere demostrar.

Sea $[E] \in \mathcal{B}_\mu^\bullet$ tal que $[E] \leq [B]$. Hay que encontrar una $[U] \in \mathcal{B}_\mu^\bullet$ tal que $[U] \leq [E]$ y $[U] \in D$.

Se define una función $g \in (\mathbb{N}^{\infty})^M$ así: $\forall n \in \omega$,

$$g(n) = \text{mín}\underbrace{\{k : m([E] \centerdot \|\tau(\check{n}) \geq \check{k}\|) < \frac{1}{2^{n+1}} \centerdot m([E])\}}_{A_n}.$$

La función g esta bien definida y pertenece a M. En efecto,

(a) g esta bien definida: Para cada $n \in \omega$ el conjunto $A_n \neq \emptyset$, pues el conjunto $Y = \{\|\tau(\check{n}) = \check{j}\| \centerdot [E] : j \in \omega\}$ es una partición de $[E]$, es decir, sus elementos son disjuntos dos a dos y $[E] = \sum Y$. Entonces por las propiedades de m,

$$m([E]) = \sum_{j=0}^{\omega} m(\|\tau(\check{n}) = \check{j}\| \centerdot [E])$$

De manera que dado $\epsilon = \frac{1}{2^{n+1}}.m([E])$ se tiene que existe un $r \in \omega$ tal que,

$$(\sum_{j=r}^{\omega} m(\|\tau(\check{n}) = \check{j}\| \centerdot [E])) < \epsilon$$

Por lo tanto, $j \in A_n$,$\forall j \geq r$.

(b) $g \in M$: Se hace un argumento análogo para la g del caso Cohen.

La condición $[U]$ buscada se define así,

$$[U] = [E] \centerdot \prod_{n=0}^{\omega} \|\tau(\check{n}) \leq \check{g}(\check{n})\|.$$

Para probar que $[U] \neq [\emptyset]$ (y por lo tanto que $[U] \in \mathcal{B}_\mu^\bullet$) se demostrará que $m([U]) > 0$:

(Comentario sobre la motivación de la definición de la función g: Puede ser que la elección de [U] (con las propiedades requeridas) sugiera la definición de g y no a la inversa, pues para que [U] sea distinta de 0 bastaría que el segundo miembro de la siguiente igualdad sea menor que $m([E])$: $m([E]) = m([E] \centerdot \prod_{n=0}^{\omega} \|\tau(\check{n}) \leq \check{g}(\check{n})\|) + m([E] \centerdot \sum_{n=0}^{\omega} \|\tau(\check{n}) > \check{g}(\check{n})\|)$. Y es probable que por eso Jech [J3] haya definido g de la forma como lo hace)

Usando la propiedad distributiva de $\mathcal{B}_\mu$ se tiene,

$$m([E] \centerdot \sum_{n=0}^{\omega} \|\tau(\check{n}) > \check{g}(\check{n})\|) = m(\sum_{n=0}^{\omega} [E] \centerdot \|\tau(\check{n}) > \check{g}(\check{n})\|)$$

Considerando la propiedad (3) de m,

$$m(\sum_{n=0}^{\omega} [E] \centerdot \|\tau(\check{n}) > \check{g}(\check{n})\|) \leq \sum_{n=0}^{\omega} m([E] \centerdot \|\tau(\check{n}) > \check{g}(\check{n})\|)$$

Entonces por la definición de g y propiedades de m,

$$\sum_{n=0}^{\omega} m([E] \centerdot \|\tau(\check{n}) > \check{g}(\check{n})\|) < (\sum_{n=0}^{\omega} \frac{1}{2^n}) \frac{1}{2} m([E]) = 2.\frac{1}{2}.m([E]) = m([E])$$

De las desigualdades anteriores se obtiene,

$$m([E] \centerdot \sum_{n=0}^{\omega} \|\tau(\check{n}) > \check{g}(\check{n})\|) < m([E])$$

Como $m([E]) > 0$ y $m([E])$ satisface,

$$m([E]) = m([E] \centerdot \prod_{n=0}^{\omega} \|\tau(\check{n}) \leq \check{g}(\check{n})\|) + m([E] \centerdot \sum_{n=0}^{\omega} \|\tau(\check{n}) > \check{g}(\check{n})\|).$$

Se concluye, $m([U]) > 0$.

Ahora bien, como

$$[U] \Vdash_{\mathcal{B}_\mu^\bullet} \check{g} \in \overbrace{(\mathbb{N}^\infty)^M}^{\vee}$$

pues g es una función ω en ω en M. Entonces,

$$[U] \Vdash_{\mathcal{B}_\mu^\bullet} \exists x(x \in \overbrace{(\mathbb{N}^\infty)^M}^{\vee} \wedge \tau \leq^* x).$$

Por lo tanto, $[U] \in D$. $\square$

Una pregunta extra sobre el real aleatorio: ¿ El real aleatorio es eventualmente diferente?. La respuesta a esta interrogante no la conoce quien escribe este trabajo.

3.2.4 Forcing de Mathias

Se inicia esta subsección definiendo el orden parcial de Mathias $(\mathsf{M}, \leq, 1)$. Después se presenta el concepto de *real de Mathias sobre M*, éstos reales van a ser subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Por último se demuestra que si G es un M-genérico sobre M y X es el real de Mathias sobre M definido por G, entonces: (1) $M[G] = M[X]$, y (2) la función $f \in \mathbb{N}^\infty$ definida por la enumeración creciente de X domina a $(\mathbb{N}^\infty)^M$ (por lo tanto X es $\mathbb{N}^\infty$-dominante). La bibliografía principal que se usa es [J3] y [D4].

Se denota por $\mathbb{N}^{[<\infty]}$ al conjunto de todos lo subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.

Definición 3.2.4.1. *El orden parcial de Mathias* $(\mathsf{M}, \leq, 1)$ *se define así,*

1. $\mathsf{M} = \{(s, A) : s \in \mathbb{N}^{[<\infty]} \wedge A \in \mathbb{N}^{[\infty]} \wedge \textit{máx}(s) < \textit{min}(A)\}$.
2. $(s, A) \leq (r, B) \leftrightarrow A \subseteq B \wedge r \subseteq s \wedge s - r \in B$.
3. $1 = (\emptyset, \omega)$.

Notar que: (a) M satisface el Teorema 2.9.1.5 y por lo tanto produce extensiones propias de M. Y (b) Si $(s, A) \leq (r, B)$, entonces $r \sqsubseteq s$. Donde si F es un conjunto bien ordenado por R, decimos que $D \sqsubseteq F$ (D es un segmento inicial de F) si y sólo si $D \subseteq F$ y $\forall x, y \in F(x \in D \wedge y < x \rightarrow y \in D)$.

Definición 3.2.4.2. *Sean M un m.t.n de ZFC, M el orden de Mathias en M y X un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. X es un real de Mathias sobre M si y sólo si existe un G tal que G es M-genérico sobre M y $X = \cup\{s : \exists A(s, A) \in G\}$.*

Teorema 3.2.4.3. *Sean M un m.t.n de ZFC , M en M, G un M-genérico sobre M y $M[G]$ la extensión genérica correspondiente a G. Sea $X = \cup\{s : \exists A(s, A) \in G\}$ el real de Mathias sobre M determinado por G. Entonces,*

1. *$M[X] = M[G]$.*
2. *La $f \in \mathbb{N}^\infty$ tal que $f(n)$= el n-ésimo elemento de X domina a $(\mathbb{N}^\infty)^M$ (por lo tanto X es $\mathbb{N}^\infty$-dominante).*

Demostración. (1) Se debe probar que $M[G] = M[X]$. Es suficiente con probar la siguiente igualdad,

$$G = \underbrace{\{(s, A) : s \sqsubseteq X \subseteq \ s \cup A\}}_{T}$$

Pero para realizar la prueba se requiere de un lema previo,

Lema 3.2.4.4. *Sean $(s, A), (r, B) \in \mathsf{M}$. (s,A) y (r,B) son compatibles si y sólo si $|A \cap B| = \aleph_0$ y $[(s \sqsubseteq r \wedge r - s \subseteq A) \vee (r \sqsubseteq s \wedge s - r \subseteq B)]$.*

Demostración de Lema. ($\Leftarrow$). Si $s \sqsubseteq r$ y $r - s \subseteq A$, entonces el par $(r, A \cap B) \in \mathsf{M}$ y es menor que (s, A) y (r, B). Si $r \sqsubseteq s$ y $s - r \subseteq B$, entonces el par $(A \cap B, s) \in \mathsf{M}$ y es menor que (s, A) y (r, B). ($\Rightarrow$) Por la hipótesis existe una condición $(t, T) \in \mathsf{M}$ tal que $(t, T) \leq_{\mathsf{M}} (s, A)$ y $(t, T) \leq_{\mathsf{M}} (r, B)$. En consecuencia:

$$(i)\ \ s \sqsubseteq t\ \wedge t - s \subseteq A$$

$$(ii)\ r \sqsubseteq t \wedge t - r \subseteq B$$

$$(iii)\ T \subseteq A \cap B$$

Por (iii) se obtiene una parte de la conclusión: $|A \cap B| = \aleph_0$. Y por (i)$(s \sqsubseteq t)$ y (ii) $(r \sqsubseteq t)$ se concluye que,

$$s \sqsubseteq r \ o \ r \sqsubseteq s$$

Consideremos ambos casos:
$\underline{Caso1}$: Si $s \sqsubseteq r$, entonces $r - s \subseteq t - s \subseteq A$. (Por (i) $t - s \subseteq A$)

$\underline{Caso2}$: $r \sqsubseteq s$,entonces $s - r \subseteq t - r \subseteq B$. (Por (ii) $t - r \subseteq B$)

Por lo tanto, se tiene la parte de la conclusión que faltaba:

$$(s \sqsubseteq r \wedge r - s \subseteq A) \vee (r \sqsubseteq s \wedge s - r \subseteq B). \square$$

Una vez demostrado el Lema se prueba que $G = T$. $G \subseteq T$: Sea $(s, A) \in G$. La inclusión $s \sqsubseteq X$ es inmediata por la definición de G. Para la inclusión $X \subseteq s \cup\ A$ basta probar que $X - s \subseteq A$: Si $z \in X - s$ entonces existe un a_z y existe un T_z tal que $z \in a_z$ y $(a_z, T_z) \in G$. Entonces (s, A) y (a_z, T_z) son compatibles, pues G es un filtro. Por lo tanto (usando el Lema anterior)tenemos que, $(s \sqsubseteq a_z \wedge a_z - s \subseteq A)\, o\, (a_z \sqsubseteq s \wedge s - a_z \subseteq T_z)$. La segunda opción no se cumple ya que $a_z \sqsubseteq s$ no puede ocurrir pues $z \in a_z$ pero $z \notin s$. De manera que se cumple es la primera opción y esta implica que $z \in A$. La prueba de que $T \subseteq G$ se hace como sigue: Sea $(s, A) \in T$. Entonces por el Teorema 2.3.9 el conjunto

$$D = \{(t, B) : (t, B) \leq_{\mathsf{M}} (s, A) \vee (t, B) \perp (s, A)\},$$

es denso. Entonces, $G \cap D \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe un $(t, B) \in G$ tal que $(t, B) \leq_{\mathsf{M}} (s, A)$ o $(t, B) \perp (s, A)$. Luego, como $(t, B) \perp (s, A)$ no puede ocurrir porque ambos estan en T y T es filtro en M. Entonces,$(t, B) \leq_{\mathsf{M}} (s, A)$. En consecuencia, $(s, A) \in G$. Lo que se quería probar.

(2) Prueba de que f domina a $(\mathbb{N}^\infty)^M$: Sea $g \in (\mathbb{N}^\infty)^M$. Se debe probar que $g \leq^* f$. Es suficiente con demostrar que el siguiente conjunto E es denso en M,

$$E = \{(s, A) : (s, A) \Vdash_{\mathsf{M}} \forall n > |\check{s}|(\check{g}(n) < \text{ el n-ésimo elemento de } \Theta)\},$$

donde Θ es un M-nombre canónico para X, definido así:

$$\Theta = \{(\check{n}, (s, A)) : (s, A) \in \mathsf{M} \wedge n \in \omega \wedge n \in s\}.$$

(La fórmula $\forall n > |\check{s}|(\check{g}(n) <$ el n-ésimo elemento de $\Theta)$ abrevia la siguiente: $\forall n > |\check{s}| \exists y \in \Theta(\check{g}(n) < y \wedge |pred(\Theta, y, \in)| = n - \check{1})$

Sea (s, A) una condición. Entonces existe un conjunto infinito $T \subseteq A$, tal que $\forall n > |s|$, el n-ésimo elemento de $s \cup T$, t_n, es mayor que $g(n)$ y que los t_i anteriores. Asi que $(s, T) \Vdash_{\mathsf{M}} \forall n > |\check{s}|(\check{g}(n) <$ el n-ésimo elemento de $\Theta)$, porque para todo H que es M-genérico sobre M tal que $(s, T) \in H$ se tiene que $s \sqsubseteq X \subseteq s \cup T$, donde X es el real de Mathias correspondiente a H que nombra Θ. En consecuencia, como $(s, T) \leq (s, A)$, se tiene lo deseado. $\square$

Para finalizar esta subsección vale la pena resaltar que se infiere de la demostración de que el real de Mathias es $\mathbb{N}^\infty$-dominante que el mismo es eventualmente diferente, se resaltará este hecho mediante el siguiente teorema:

Teorema 3.2.4.5. *El real de Mathias es eventualmente diferente.* $\square$

3.2.5 Forcing de Sacks

Se inicia esta subsección definiendo el orden parcial de Sacks $(\mathsf{S_a}, \leq, \mathsf{1})$. Después se da el concepto de *real de Sacks sobre M* , éstos reales serán elementos de $2^{\mathbb{N}}$. Por último se demuestra que si G es un $\mathsf{S_a}$-genérico sobre M, entonces (1) y (2). (1) Si f es el real de Sacks sobre M definido por G, $M[G] = M[f]$. Y (2) f es $\mathbb{N}^\infty$-dominado. La bibliografía principal que se usa es [J3] y [J4].

Definición 3.2.5.1. *El orden parcial de Sacks* $(\mathsf{S_a}, \leq, 1)$ *se define así,*

1. $\mathsf{S_a} = \{p : p$ *es subárbol perfecto y no vacío del árbol binario completo*$\}$.
2. $p \leq q \leftrightarrow p \subseteq q$
3. *1= El árbol binario completo.*

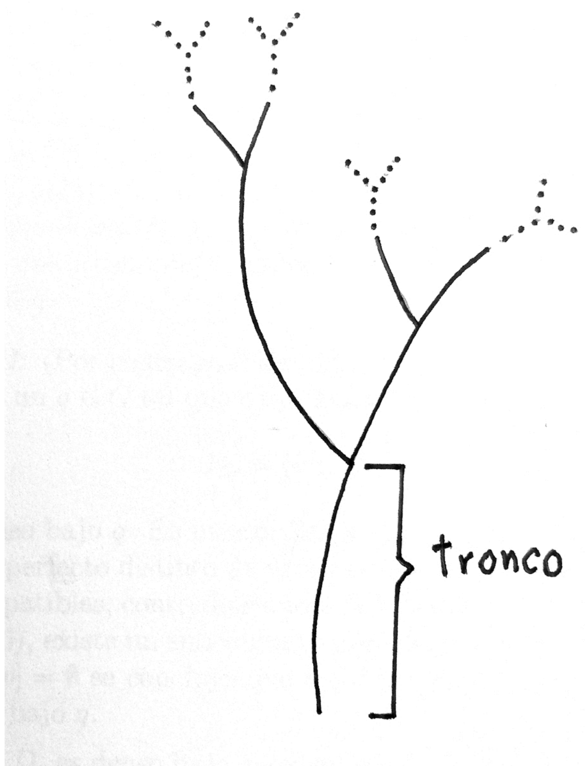
Notar que S_a satisface el Teorema 2.9.1.5 y por lo tanto produce extensiones propias de M.

Definición 3.2.5.2. *Sean* M *un m.t.n de ZFC,* $\mathsf{S_a}$ *en* M *y* $f \in 2^{\mathbb{N}}$. f *es un real de Sacks sobre M si y sólo si existe un* G *tal que* G *es* $\mathsf{S_a}$*-genérico sobre* M *y* $f = \bigcup\{s : \forall p \in G(s \in p)\}$.

Veamos porqué una f tal que $f = \bigcup\{s : \forall p \in G(s \in p)\}$ es una función de $\mathbb{N}$ en 2:

1. Unicidad: Sea $n \in \omega$. Si $(n, k_1) \in f$ y $(n, k_2) \in f$, entonces existen s_1 y s_2 tal que $\forall p \in G(s_1 \in p \wedge s_2 \in p)$ y $(n, k_1) \in s_1 \wedge (n, k_2) \in s_2$. Por otro lado, en G hay un árbol q tal $diám([q]) \leq \frac{1}{n+2}$, es decir, las s_1 y s_2 de q satisfacen $s_1(n) = s_2(n)$. En consecuencia, $k_1 = k_2$. El argumento que permite apreciar que G tiene árboles cuyo conjunto de ramas tiene diámetro arbitrariamente pequeño es el siguiente(En otras palabras, G tiene árboles de tronco arbitrariamente altos, siendo el tronco la parte que va desde el arranque de la raíz hasta el de las ramas (Ver (*)): Para cada $n \in \omega$ el conjunto $E_n = \{p \in \mathsf{S_a} : diam([p]) \leq \frac{1}{n}\}$ es denso, pues si $p \in \mathsf{S_a}$, entonces, como el $diám([p]) = \frac{1}{k+1}$, donde k es el menor natural donde el p se ramifica, podemos encontrar un $q \leq_{\mathsf{S_a}} p$ tal que $q \in E_n$ así: Si el $diám([p]) \leq \frac{1}{n}$, entonces $q = p$. Si no, entonces "Le quitamos todas las ramas a p hasta el nivel n" y q será el subárbol que resulta de tal poda.

(*) La siguiente figura sugiere la idea de tronco:



2. $dom(f) = \omega$: Sea $n \in \omega$, entonces existe(porque los E_n de (1) son densos) un $p \in G$ tal que $diám([p]) \leq \frac{1}{n+2}$. p tiene una sola $s \in 2^{n+1}$. Entonces, como para cualquier $q \in G$ existe un $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$, se concluye que $s \in q$ para cualquier $q \in G$. Asi que, $n \in dom(f)$.

Teorema 3.2.5.3. *Sean M un m.t.n de ZFC, $\mathsf{S_a}$ en M, G un $\mathsf{S_a}$-genérico sobre M y $M[G]$ la extensión genérica correspondiente a G. Sea $f = \bigcup\{s : \forall p \in G(s \in p)\}$ el real de Sacks sobre M determinado por G. Entonces,*

1. $M[f] = M[G]$.
2. f *es* $\mathbb{N}^{\infty}$*-dominado.*

Demostración. (1) Evidentemente $M[f] \subseteq M[G]$. Para $M[G] \subseteq M[f]$ basta con probar que

$$G = \underbrace{\{q \in \mathsf{S_a} : f \in [q]\}}_{A}$$

(a) $G \subseteq A$: Sea $q \in G$ y $n \in \omega$. Se cumple que $f \restriction n = \{(k, f(k) : k \in n)\} \in q$. En efecto, para cualquier par $(k, f(k))$ existe una $s_k \in 2^{<\omega}$ tal que $(k, f(k)) \in s_k$ y $\forall p \in G(s_k \in p)$. Luego, como en G hay un árbol r tal que $diám([r]) \leq \frac{1}{n+2}$, se tiene que $f \restriction n \in r$. Y como para r y q existe una extensión de ambos en $G(G$ es un filtro)), se concluye que $f \restriction n \in q$.

(b) $A \subseteq G$: (Por contraposición) Si $p \notin G$, entonces por el Teorema 2.7.5 existe un $q \in G$ tal que $q \perp p$. Entonces el conjunto,

$$D_q = \{r \in \mathsf{S_a} : [r] \cap [p] = \emptyset\}$$

es denso bajo q. En efecto: Sea $s \leq q$. $[s] \cap [p]$ no contiene un subconjunto perfecto distinto de vacío ya que lo tendría $[q] \cap [p]$, y serían p y q compatibles, contradiciendose la hipótesis. Entonces, por el Teorema 2.6.3(6), existe un subconjunto perfecto no vacío $[r] \leq [s] - [p]$, y como $[r] \cap [p] = \emptyset$ se concluye que $r \in D_q$. Como $r \leq s$ se infiere que D_q es denso bajo q.

Como D_q es denso bajo q, existe un $s \in G$ tal que $s \leq q$ y $[s] \cap [p] = \emptyset$. Como $s \in G$, $s \in A$ y entonces $f \in [s]$. Entonces $f \notin [p]$, es decir, $p \notin A$. Lo que se quería probar.

(2) La prueba de esta cláusula usa la técnica de fusión la cual se expone a continuación:

Definición 3.2.5.4. *1. Sea $n \in \omega$ tal que $n \geq 1$ y sea p un subárbol del árbol binario completo. Un nodo $u \in p$ es un n-ésimo punto de ramificación de p si y sólo si $u^\wedge 0 \in p$ y $u^\wedge 1 \in p$ y existen exactamente n nodos $t \subseteq u$ tal que $t^\wedge 0 \in p$ y $t^\wedge 1 \in p$.*

(Un subárbol perfecto tiene exactamente 2^{n-1} n-ésimos puntos de ramificación)

2. *Sean p ,q subárboles del árbol binario completo. $p \leq_0 q$ si y sólo si $p \leq q$. Si $n > 0$ entonces; $p \leq_n q$ si y sólo si $p \leq q$ y cualquier n-ésimo punto de ramificación de q es un punto de ramificación de p.*

3. *Una secuencia $\{p_i : i \in \omega\} \subseteq \mathsf{S_a}$ es una secuencia de fusión si y sólo si,*

$$p_0 \geq_0 p_1 \geq_1 p_2 \geq_2 p_3 \ \ldots$$

Hecho 3.2.5.5. *Una consecuencia inmediata de la definición de $\leq_n$ es que si $p \leq_n r$ entonces todo n-ésimo punto de ramificación de p es un n-ésimo punto de ramificación de r.*

La propiedad fundamental de las secuencias de fusión se enuncia a continuación:

Lema 3.2.5.6. *Si $\{p_i : i \in \omega\} \subseteq \mathsf{S_a}$ es una secuencia de fusión, entonces $q = \bigcap\{p_i : i \in \omega\} \in \mathsf{S_a}$ y $q \leq_n p_n$, $\forall n \in \omega$.*
(q se denomina la fusión de $\{p_i : i \in \omega\}$)

Demostración del Lema. (a) Sea $n \in \omega$. $q \leq_n p_n$ ocurre fundamentalmente por dos razones: (a.1) $\forall k \geq n$, p_n y p_k considerados hasta sus nodos $s^\frown 0$ y $s^\frown 1$ (donde s es un n-ésimo punto de ramificación de p_n) son idénticos. (a.2) $p_n \leq p_i$, $0 \leq i \leq n-1$. (b) Para probar que $q \in \mathsf{S_a}$ hay que probar que q es un perfecto no vacío: (i) q no es vacío,pues $\emptyset \in q$, ya que $\forall n \in \omega(\emptyset \in p_n)$. (ii) Veamos que $\forall s \in q \exists t \supseteq s$ tal que $t^\frown 0 \in q$ y $t^\frown 1 \in q$: Sea $k \in \omega$ tal que $k \geq 0$ y sea $x \in 2^k \cap q$. x esta en el nivel k en todos los p_n y tiene k predecesores en ellos: $x \restriction 0 = \emptyset, x \restriction 1, \ldots, x \restriction k-1$. En todos los p_n existe un $u \supseteq x$ tal que $u^\frown 0$ y $u^\frown 1$ estan en p_n y el menor de esos u, en cada p_n, es a lo sumo un $k+1$-ésimo punto de ramificación de p_n, pues x es a lo sumo un $k+1$-ésimo punto de ramificación de p_n. Como $q \leq_{k+1} p_{k+1}$ (q y p_{k+1} son idénticos hasta los nodos $s^\frown 0$ y $s^\frown 1$, donde s es un $k+1$-ésimo punto de ramificación de p_{k+1}), se tiene lo buscado. $\square$

Ahora se procede a probar la cláusula (2) del Teorema: Sea $h \in (\mathbb{N}^\infty)^{M[G]}$ y sea s tal que $s \in G$ y $s \Vdash_{\mathsf{S_a}} \tau : \check{\omega} \longrightarrow \check{\omega}$, donde $\tau_G = h$. Hay que probar que existe una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que pertenece a M y domina a h. Basta con demostrar que el conjunto,

$$D = \{p \in \mathsf{S_a} : p \Vdash_{\mathsf{S_a}} \exists x(x \in \widecheck{(\mathbb{N}^{\infty})^M} \wedge \tau \leq^* x)\},$$

es denso bajo s. (Basta por la misma razón que se expuso en el caso del real aleatorio).

Sea $p \in \mathsf{S_a}$ tal que $p \leq s$. Se debe probar que existe un $q \leq p$ tal que $q \in D$. Para ello se define una secuencia de fusión a partir de p,

$$r_0 \geq_0 r_1 \geq_1 r_2 \geq_2 r_3 \ \ldots$$

y una secuencia de conjuntos en M ,

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots$$

usando inducción y amalgamación.

Caso base

$$r_0 = u \ \text{ y } \ A_0 = \{\check{k_0}\}$$

donde $u \leq p$, $u \Vdash_{\mathsf{S_a}} \tau(\check{0}) = \check{k_0}$ y $\check{k_0} \in dom(\check{\omega})$. Tal u y $\check{k_0}$ se obtienen aplicando la cláusula 6 del Teorema 2.9.2.5 a $p \Vdash_{\mathsf{S_a}} \exists m(m \in \check{\omega} \wedge \tau(\check{0}) = m)$.

Caso inductivo

Sea $n > 0$ y supóngase que para cada $m < n$ se ha definido r_m. Se define r_n y A_n así: Sean

$$s_1, \ldots, s_{2^{n-1}}$$

todos los n-ésimos puntos de ramificación de r_{n-1}. Se toman los sucesores inmediatos de los s_i, $t_i = s_i^\frown w$, donde $w = 0$ o $w = 1$. La cantidad de t_i es 2^n .

Para cada $i < 2^n$ existe un $q_i \leq r_{n-1} \restriction t_i$ y algún $\check{k}_n^i \in dom(\check{\omega})$ tal que,

$$q_i \Vdash_{\mathsf{S_a}} \tau(\check{n}) = \check{k}_n^i.$$

(Los q_i y los $\check{k}_n^i$ se obtienen como en el caso base aplicando la cláusula 6 del Teorema 2.9.2.5)

Sea $A_n = \{\check{k}_n^i : i < 2^n\}$. Se define r_n como la amalgamación de $\{q_i : i < 2^n\}$ en r_{n-1}. Es decir, $r_n = \bigcup\{q_i : i < 2^n\}$. Entonces, por construcción:

(a) $r_n \leq_{n-1} r_{n-1}$

(b) $r_n \Vdash_{\mathsf{S_a}} \tau(\check{n}) = \check{k_n^0} \vee \ldots \vee \tau(\check{n}) = \check{k_n^{(2^n-1)}}$, donde $\check{k_n^i} \in A_n$.

La cláusula (a) no requiere comentario adicional, pero (b) si: ¿ Por qué (b) ocurre para r_n, $n > 0$?. La razón es que existe un $i \in 2^n$ tal que $q_i \in G$, pues el conjunto

$$D = \{p \in \mathsf{S_a} : p \leq q_1 \vee \ldots \vee p \leq q_{2^n}\}$$

es denso bajo r_n.

Así que se ha definido la secuencia de fusión $\{r_i\}_{i\in\omega}$ y la secuencia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in\omega}$. Sea $r = \bigcap\{r_i : i \in \omega\}$ su fusión.

Veamos que,

$$r \Vdash_{\mathsf{S_a}} \exists x(x \in \overbrace{(\omega^\omega)^M}^{\vee} \wedge \tau \leq^* x). \tag{4}$$

Sea U un $\mathsf{S_a}$-genérico sobre M tal que $r \in U$. Se define una función $g \in (\mathbb{N}^\infty)^M$ tal que $\tau_U \leq^* g$ así,

$$g(0) = k_0$$

donde $r_0 \Vdash_{\mathsf{S_a}} \tau(\check{0}) = \check{k_0}$
Y para cada $n > 0$,

$$g(n) = m\acute{a}x\{k_n^i \in \omega : \check{k_n^i} \in An\}.$$

La función g esta bien definida y pertenece a M.
Tomando $x = \check{g}_U = g$ y considerando la cláusula (b) se cumple (4). □

Una pregunta extra sobre el real de Sacks: ¿ El real de Sacks es eventualmente diferente?. La respuesta a esta interrogante no la conoce quien escribe este trabajo.

3.2.6 Forcing de Silver

Se inicia esta subsección definiendo el orden parcial de Silver (o de Prikry-Silver), $(\mathsf{S_i}, \leq, 1)$. Luego se da el concepto de *real de Silver(o de Prikry-Silver) sobre M*, éstos reales serán elementos de $2^{\mathbb{N}}$. Y por último se demuestra que si G es un $\mathsf{S_i}$-genérico sobre M, entonces (1) y (2). (1) Si f es el real de Silver sobre M definido por G, $M[G] = M[f]$. Y (2) f es $\mathbb{N}^\infty$-dominado. La bibliografía principal que se usa es [J4].

Ahora bien, como $\mathsf{S_i}$ se parece mucho a $\mathsf{S_a}$, no es necesario hacer las pruebas mencionadas pues sus análogas relizadas en $\mathsf{S_a}$ se puden reescribir para $\mathsf{S_i}$ sin ningún inconveniente. Lo único que si es necesario hacer aca es precisar cómo se eligen los q_i para amalgamar en el orden de Silver y construir los r_n de la secuencia de fusión que se requiere para probar la cláusula (2) mencionada anteriormente. La elección de los q_i en $\mathsf{S_i}$ difiere del caso $\mathsf{S_a}$ porque en $\mathsf{S_i}$ los r_n además de perfectos, deben ser uniformes.

Definición 3.2.6.1. *El orden parcial de Silver* $(\mathsf{S_i}, \leq, 1)$ *se define así,*

1. $\mathsf{S_i} = \{p :$ *p es un subárbol perfecto, uniforme y no vacío del árbol binario completo*$\}$
2. $p \leq q \leftrightarrow p \subseteq q$
3. *1= El árbol binario completo.*

Notar que $\mathsf{S_i}$ satisface el Teorema 2.9.2.5, por lo tanto produce extensiones propias de M.

Definición 3.2.6.2. *Sean M un m.t.n de ZFC, $\mathsf{S_i}$ en M y $f \in 2^{\mathbb{N}}$. f es un real de Silver sobre M si y sólo si existe un G tal que G es $\mathsf{S_i}$-genérico sobre M y $f = \bigcup\{s : \forall p \in G(s \in p)\}$.*

Teorema 3.2.6.3. *Sean M un m.t.n de ZFC , $\mathsf{S_i}$ en M, G un $\mathsf{S_i}$-genérico sobre M y $M[G]$ la extensión genérica correspondiente a G. Sea $f = \bigcup\{s : \forall p \in G(s \in p)\}$ el real de Silver sobre M determinado por G. Entonces,*

1. $M[f] = M[G]$.

2. f *es* $\mathbb{N}^\infty$*-dominado.*

Demostración. (1) Ver S_a para este caso específico.

(2) Sea $h \in (\mathbb{N}^\infty)^{M[G]}$ y sea s tal que $s \in G$ y $s \Vdash_{\mathsf{S_i}} \tau : \check{\omega} \longrightarrow \check{\omega}$, donde $\tau_G = h$. Hay que probar que existe una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que pertenece a M y domina a h. Basta con demostrar que el conjunto,

$$D = \{p \in \mathsf{S_i} : p \Vdash_{\mathsf{S_i}} \exists x(x \in \overbrace{(\mathbb{N}^\infty)^M}^{\vee} \wedge \tau \leq^* x)\},$$

es denso bajo s.

Sea $p \in \mathsf{S_i}$ tal que $p \leq s$. Se debe probar que existe un $q \leq p$ tal que $q \in D$. Para ello se define una secuencia de fusión a partir de p,

$$r_0 \geq_0 r_1 \geq_1 r_2 \geq_2 r_3 \ \ldots$$

y una secuencia de conjuntos en M ,

$$A_0, \ A_1, \ A_2, \ A_3, \ldots$$

usando inducción y amalgamación.

Caso base
r_0 se define exactamente igual al r_0 de $\mathsf{S_a}$.

Caso inductivo

Definición 3.2.6.4. 1. *Sean* $A_0, \ldots, A_n$ *conjuntos totalmente ordenados. Se define un orden total (lexicográfico) en* $A_0 \times \ldots \times A_n$*, así:*

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n) < (b_0, b_1, \ldots, b_n) \leftrightarrow \exists i \leq n[(a_i < b_i) \wedge \forall j < i(a_j = b_j)].$$

2. *Sean* p *y* q *dos subárboles del árbol binario completo. Se dice que* p *es una copia de* q *si para cada* $n \in \omega$ *las condiciones (2.1) y (2.2) son satisfechas:*

(2.1) $|Niv(n, p)| = |Niv(n, q)|$

(2.2) Si $n_0(p), \ldots, n_{2^{n-1}}(p)$ son los nodos de p que pertencen a $Niv(n,p)$, ordenados lexicográficamente, y $n_0(q), \ldots, n_{2^{n-1}}(q)$ son los nodos de q que pertencen a $Niv(n,q)$, ordenados también lexicográficamente, entonces para cada i, $0 \leq i \leq 2^{n-1}$, se cumple (2.2.1) y (2.2.2) :

(2.2.1) $n_i(p)^\wedge 0 \in Niv(n+1,p) \leftrightarrow n_i(q)^\wedge 0 \in Niv(n+1,q)$.

(2.2.2) $n_i(p)^\wedge 1 \in Niv(n+1,p) \leftrightarrow n_i(q)^\wedge 1 \in Niv(n+1,q)$.

El procedimiento que se realizará para elegir los q_i que se van a amalgamar, se ejemplifica a continuación definiendo a r_1 y A_1:

Sea s el 1-ésimo punto de ramificación de r_0. Se toman los sucesores inmediatos de s, $t_0 = s^\wedge 0$ y $t_1 = s^\wedge 1$. Se define $r_1 = q_0 \cup q_1$, donde:

$$q_0 \leq r_0 \restriction t_0 \ \wedge \ q_0 \Vdash_{\mathsf{S_i}} \tau(\check{0}) = \check{k}_0^0 \ \wedge \ \check{k}_0^0 \in dom(\check{\omega})$$

$$q_1 \leq r_0 \restriction t_1 \ \wedge \ q_1 \Vdash_{\mathsf{S_i}} \tau(\check{0}) = \check{k}_0^1 \ \wedge \ \check{k}_0^1 \in dom(\check{\omega}).$$

El q_0 y el q_1 con los cuales se define a r_1 se obtienen así (Ver la matriz AS(1)): El primer paso es obtener a $q_{00} \leq r_0 \restriction t_0$ tal que $q_{00} \Vdash_{\mathsf{S_i}} \tau(\check{0}) = \check{k}_0^0$. Por las razones dadas en el caso de $\mathsf{S_a}$, se sabe que esto siempre se puede hacer. Luego, como r_0 es uniforme, existe un subárbol de $r_0 \restriction t_1$ con la misma forma de q_{00} (existe una copia de q_{00} en $r_0 \restriction t_1$). Esta copia se denota por ${q_{00}}^\bullet$. Entonces, se obtiene un $q_{11} \leq {q_{00}}^\bullet$ tal que $q_{11} \Vdash_{\mathsf{S_i}} \tau(\check{0}) = \check{k}_0^1$. Por último (también por la uniformidad de r_0), se considera la copia de q_{11} que está en q_{00}, la cual se denota por ${q_{11}}^\bullet$. Entonces se define: $q_0 = {q_{11}}^\bullet$ y $q_1 = q_{11}$.

$$\mathrm{AS}(1) = \begin{pmatrix} r_0 \restriction t_0 & r_0 \restriction t_1 \\ q_{00} & {q_{00}}^\bullet \\ {q_{11}}^\bullet & q_{11} \end{pmatrix}$$

Sea $n > 1$ y supóngase que para cada $m < n$ se ha definido r_m. Se define r_n y A_n así: Sean

$$s_0, \ldots, s_{2^{n-2}}$$

todos los n-ésimos puntos de ramificación de r_{n-1}. Se toman los sucesores inmediatos de los s_i, $t_i = s_i^\frown w$, donde $w = 0$ o $w = 1$. La cantidad de t_i es 2^n .

Extendiendo el procedimiento anterior se contruye una matriz para amalgamar en el orden de Silver, caso n (Ver AS(n)): Se define q_{00} a partir de $r_{(n-1)} \restriction t_0$ y luego se consigue una copia $q_{00}^\bullet$ de q_{00} en cada uno de los restantes $r_{(n-1)} \restriction t_j$. Cada copia es colocada debajo de su correspondiente $r_{(n-1)} \restriction t_j$. Luego, se define q_{11} a partir de la copia de q_{00} que está en un puesto anterior en su columna, $q_{00}^\bullet \leq r_{(n-1)} \restriction t_1$. Y se coloca una copia de q_{11}, $q_{11}^\bullet$ en cada una de las columnas restantes (por su puesto la copia depende de la columna). Luego, se define q_{22} a partir de la copia de q_{11} que lo precede en su columna, $q_{11}^\bullet \leq q_{00}^\bullet \leq r_{(n-1)} \restriction t_2$. Y se coloca una copia de q_{22}, $q_{22}^\bullet$, en cada una de las columnas restantes. Asi sucesivamente. El procedimiento términa en 2^n pasos.

$$\text{AS(n)} = \begin{pmatrix} r_{(n-1)} \restriction t_0 & r_{(n-1)} \restriction t_1 & r_{(n-1)} \restriction t_2 \cdots & r_{(n-1)} \restriction t_{2^{n-1}} \\ q_{00} & q_{00}^\bullet & q_{00}^\bullet \cdots & q_{00}^\bullet \\ q_{11}^\bullet & q_{11} & q_{11}^\bullet \cdots & q_{11}^\bullet \\ q_{22}^\bullet & q_{22}^\bullet & q_{22} \cdots & q_{22}^\bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{2^{n-1}2^{n-1}}^\bullet & q_{2^{n-1}2^{n-1}}^\bullet & q_{2^{n-1}2^{n-1}}^\bullet \cdots & q_{2^{n-1}2^{n-1}} \end{pmatrix}$$

Entonces, para cada $i \in 2^n$, se define q_i como la copia $q_{2^{n-1}2^{n-1}}^\bullet$ correspondiente a la columna i (la cual a su véz corresponde al subárbol $r_{(n-1)} \restriction t_i$).

Sea $A_n = \{\check{k_n^i} : i \leq 2^n\}$. Se define $r_n = \bigcup\{q_i : i \leq 2^n\}$. Entonces, por construcción:

(a) $r_n \leq_{n-1} r_{n-1}$

(b) $r_n \Vdash_{\mathsf{S_i}} \tau(\check{n}) = \check{k_n^0} \vee \ldots \vee \tau(\check{n}) = k_n^{\check{(n-1)}}$, donde $\check{k_n^i} \in A_n$. $\square$

Una pregunta extra sobre el real de Silver: ¿ El real de Silver es eventualmente diferente?. La respuesta a esta interrogante no la conoce quien escribe este trabajo.

Para finalizar esta subsubsección (3.2.6) y la subsección 3.2 (*Cinco forcing que agregan reales genéricos*) se presenta a continuación un cuadro que resume los resutados de $\mathbb{N}^\infty$-dominado y $\mathbb{N}^\infty$-dominante de los reales genéricos estudiados:

	$\mathbb{N}^\infty$-dominante	$\mathbb{N}^\infty$-dominado
Reales de Cohen	NO	NO
Reales de Mathias	SI	NO
Reales de Sacks	NO	SI
Reales de Silver	NO	SI
Reales aleatorios	NO	SI

3.3 Forcing que agrega una cantidad infinita $\alpha \geq \aleph_0$ de reales de Cohen. Prueba de la consistencia de $ZFC + \neg HC$

Teorema 3.3.1. *ZFC es consistente* $\longrightarrow$ *ZFC*$+\neg$*HC es consistente.*

Demostración: La prueba de este teorema se realiza siguiendo (principalmente) los textos [K], [J1] y [J3]:

El forcing de Cohen que agrega una cantidad infinita de reales genéricos:

Sea M un $m.t.n$ de ZFC. Sea $M[G]$ la extensión genérica que se obtiene utilizando el forcing de Cohen que agrega $\alpha \geq \aleph_0$ reales genéricos (α un ordinal). Es decir, $M[G]$ es la extensión genérica de M que se obtiene usando un filtro $G \subseteq \mathsf{C}_\alpha$ que es C_α-genérico sobre M, donde C_α es el orden de Cohen que se define como sigue:

$$\mathsf{C}_\alpha = \{p :\mid p \mid < \aleph_0 \wedge \, dom(p) \subseteq \alpha \times \omega \, \wedge rango(p) \subseteq 2\}.$$

$$p \leq q \leftrightarrow q \subseteq p$$

Tal forcing agrega la función $F := \bigcup G = \alpha \times \omega \longrightarrow 2$. La cual permite definir α nuevos reales genéricos (distintos y que no están en M, ver [K], página 205) de la siguiente forma: Para cada $\beta < \alpha$ definimos la función $f_\alpha : \omega \longrightarrow 2$ así: $f_\beta(n) = F(\beta, n)$, para cada $n \in \omega$.

Los α nuevos reales genéricos también pueden ser definidos de la siguiente manera: Sea $\beta \in \alpha$. Se define,

$$a_\beta = \{m \in \omega : \exists p \in G(p(\beta, m) = 1)\}.$$

Los a_β así definidos son subconjuntos de ω y estan en $M[G]$. Obviamente los f_β son las funciones características de los a_β.

Cada real genérico a_β y el conjunto A tienen un C_α-nombre canónico. Denotamos a estos C_α-nombres por $\bar{a_\beta}$ y $\bar{A}$, respectivamente. Se definen así:

$$\bar{a_\beta} = \{(\check{m}, p) : p(\beta, m) = 1\}.$$
$$\bar{A} = \{(\bar{a_\beta}, 1) : \beta \in \alpha\}.$$

La extensión $M[G]$ se denota a veces por $M[\{a_\beta : \beta < \alpha\}]$ para resaltar los reales genéricos que se agregan. Esta extensión genérica se puede obtener usando *forcing producto*, el cual se definió en la sección 2 y se mencionaron alguna de sus propiedades: Por ejemplo que cada real genérico es genérico sobre la extensión obtenida con el resto, es decir, a_γ es genérico sobre $M[\{a_\beta : \beta < \alpha \setminus \{\gamma\}\}]$, para cualquier ordinal $\gamma < \alpha$.

Entonces, para probar que $M[G] \models \neg HC$ se considera el forcing $Fn(\aleph_2 \times \omega, 2)$ que agrega a M $\aleph_2$ nuevos reales. Es decir, Si $\aleph_2 \in M$ y G es $Fn(\aleph_2 \times \omega, 2)$-genérico sobre M, entonces $(2^{\aleph_0} \geq \aleph_2)^{M[G]}$. Pero no hay seguridad de que $(\aleph_2)^M$ siga siendo $(\aleph_2)^{M[G]}$ pues existen forcing que colapsan cardinales, por ejemplo hay forcing que hacen que cardinales no numerables en M sean ordinales numerables en $M[G]$. Entonces hay que asegurarse que $Fn(\aleph_2 \times \omega, 2)$ preserva cardinales para tener que $(\aleph_2)^M = (\aleph_2)^{M[G]}$, y esto concluye la prueba de que $(2^{\aleph_0} \geq \aleph_2)^{M[G]}$, es decir, $M[G] \models \neg HC$. Lo que permite concluir:

$$\text{ZFC es consistente} \longrightarrow \text{ZFC} + \neg HC \text{ es consistente.}$$

Los siguientes resultados permiten concluir que $Fn(\aleph_2 \times \omega, 2)$ preserva cardinales:

Se empieza enunciando y demostrando un resultado de combinatoria infinita, el Δ-*Lema*, demostrado por Shanin en 1946 (Dicho resultado después (1960) fue generalizado a grandes cardinales por Erdös y Rado, asumiendo la HGC [J1]):

Lema 3.3.2 (Shanin). *Sea W es una familia no numerable de conjuntos finitos. Entonces existe un conjunto no numerable $Z \subseteq W$, y un conjunto finito S tal que $X \cap Y = S$ para cualquier dos elementos distintos $X, Y \in Z$. (El conjunto Z es llamado Δ-sistema).*

Demostración: Como W es no numerable, es claro que existen una cantidad no numerable de $X \in W$ que tienen el mismo tamaño. Por lo tanto se puede suponer que existe un $n \in \omega$ tal que $\mid X \mid= n$, para todo $X \in W$. Se utilizará este hecho para probar el lema por inducción en n. Caso base: $n = 1$. Este caso es trivial pues $S = \emptyset$. Caso inductivo: Sea $k \in \omega$ y supóngase que el lema ocurre para k. Se debe probar que el lema se cumple para $k+1$. Sea W tal que $\mid X \mid= k+1$ para todo $X \in W$.

Si existe un elemento a tal que a pertenece a una cantidad no numerable de elemetos X de W, entonces se aplica la Hipótesis Inductiva al siguiente conjunto $\{X \setminus \{a\} : X \in W \wedge a \in X\}$, y se obtiene el conjunto Z con la propiedad buscada.

Si no ocurre el caso anterior, es decir, si cada elemento a pertenece a lo sumo a una cantidad numerable de elementos X de W, entonces se construye una colección disjunta (dos a dos) $Z = \{X_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ por inducción en α como sigue: Si $\{X_\beta : \beta < \alpha\}$ han sido definidos, entonces $X_\alpha = X$ tal que $X \in W$ y X es disjunto a todos los anteriores X_β, $\beta < \alpha$. Siempre se puede encontrar X porque α es numerable, W es no numerable y los elementos de W son finitos. $\square$

Lema 3.3.3. *Si I es arbitrario y J es numerable, entonces Fn(I,J) tiene la c.c.c.*

Demostración: Sea $p_\alpha \in Fn(I, J)$ tal que $\alpha < \aleph_1$ y sea $a_\alpha = dom(p_\alpha)$. Entonces por el Teorema anterior de Δ-sistema anterior se conscluye que existe un conjunto no numerable $X \subseteq \aleph_1$ tal que $\{a_\alpha : \alpha \in X\}$ forma un Δ-sistema con raíz r. Como J es numerable, entonces J^r también es numerable. Por lo tanto existen solamente una cantidad numerable de posibilidades para $p_\alpha \restriction r$. En consecuencia existe un conjunto no numerable $Y \subseteq X$ tal que todas las $p_\alpha \restriction r$ para $\alpha \in X$ son iguales. Entonces todas las p_α para $\alpha \in Y$ son todas compatibles. Por lo tanto no puede existir un conjunto $\{p_\alpha : \alpha \in \aleph_1\}$ de condiciones incompatibles. $\square$

Lema 3.3.4. *Suponga que $P \in M$, $(P\, es\, c.c.c)^M$, y A, $B \in M$. Sea G un P-genérico sobre M, y $f \in M[G]$ tal que $f : A \longrightarrow B$.Entonces existe una función $F : A \longrightarrow P(B)$ tal que $F \in M$, $\forall a \in A(f(a) \in F(a))$ y $\forall a \in A((| F(a) | \leq \omega)^M)$.*

Demostración: Sea $\tau \in M^P$ tal que $f = \tau_G$. Por el Teorema del Forcing se tiene que existe un $p \in G$ tal que

$$p \Vdash \tau \, \text{es una función de} \, \check{A} \, \text{en} \, \check{B}.$$

Ahora se define:

$$F(a) = \{b \in B : \exists q \leq p(q \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b})\}.$$

$F \in M$ porque $\Vdash$ es definible en M.

Sea $a \in A$. Para demostrar que $f(a) \in F(a)$, sea $b = f(a)$. Entonces existe un $r \in G$ tal que $r \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b})$. r y p tienen una extensión común en G,sea q dicha extensión. En consecuencia $q \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b})$. Por lo tanto, $b \in F(a)$.

Para demostrar que $(\mid F(a) \mid \leq \omega)^M$ se aplica el Axioma de elección en M para encontrar una función Q en M tal que $Q : F(a) \longrightarrow \mathsf{P}$, y para $b \in F(a)$, $Q(b) \leq p$ y $Q(b) \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b})$. Si $b, b' \in F(a)$ y $b \neq b'$, entonces $Q(b) \perp Q(b')$. (En efecto, si $Q(b)$ y $Q(b')$ fueran compatibles existe un filtro genérico H que las contiene a ambas y en $M[H]$, $\tau_H(a) = b$ y $\tau_H(a) = b'$. Contradicción.). En consecuencia, $\{Q(b) : b \in F(a)\}$ es una anticadena en P. Dado que $Q \in M$ y $(P\, es\, c.c.c)^M$, se cocluye que $(\mid F(a) \mid \leq \omega)^M$. $\square$

Se define $\circ(M) = M \cap \mathbf{Ord}$.

Antes del siguiente resultado se introducirán dos definiciones previas para demostrar la relevancia de la condición c.c.c. con la absolutes de cardinales.

Sea $P \in M$. P *preserva cardinales* si y sólo si para cada G que sea P-genérico sobre M se cumple que,

$$\forall \beta \in \circ(M)[(\beta \,\text{es cardinal})^M \longleftrightarrow (\beta \,\text{es cardinal})^{M[G]}].$$

Como ω es absoluto y todo cardinal en $M[G]$ es un cardinal en M entonces se cumple que P *preserva cardinales* si y sólo si,

$$\forall \beta \in \circ(M)[\beta > \omega \wedge (\beta \,\text{es cardinal})^M \longrightarrow (\beta \,\text{es cardinal})^{M[G]}].$$

Sea $P \in M$. P *preserva cofinalidades* si y sólo si para cada G que sea P-genérico sobre M y γ un ordinal límite en M se cumple que,

$$cf(\gamma)^M = cf(\gamma)^{M[G]}.$$

Lema 3.3.5. *Si P preserva cofinalidades, entonces P preserva cardinalidades.*

Demostración: Supóngase que P preserva cofinalidades. Si $\alpha \geq \omega$ es un cardinal regular de M, entonces $cf(\alpha)^{M[G]} = cf(\alpha)^M = \alpha$. Por lo tanto α es un cardinal regular en $M[G]$. Si $\beta > \omega$ es un cardinal límite de M, entonces los cardinales regulares (sucesores) en M que son no acotados en β siguen siendo regulares en $M[G]$, en consecuencia β sigue siendo un cardinal límite en $M[G]$. Dado que cualquier cardinal es regular o límite (o ambos), se cocluye que cualquier cardinal infinito de M es un cardinal de $M[G]$. □

Lema 3.3.6. *Suponga que $P \in M$, G es un P-genérico sobre M y que si κ es un cardinar regular no numerable de M, entonces $(\kappa \text{ es regular})^{M[G]}$. Entonces P preserva cofinalidades.*

Demostración: Sea γ un ordinal límite en M y sea $(\kappa = cf(\gamma))^M$. Entonces existe un $f \in M$ tal que $f : \kappa \longrightarrow \gamma$ estrictamente creciente y no acotada. Entonces como la cofinalidad de un ordinal límite es un cardinal regular ([K]) se concluye que $(\kappa \text{ es regular})^M$. En consecuencia, por hipótesis, $(\kappa \text{ es regular})^{M[G]}$.Luego, como $f \in M[G]$, se infiere que $(\kappa = cf(\gamma))^{M[G]}$ (porque si α es un ordinal límite y $g : \alpha \longrightarrow \beta$ estrictamente creciente y no acotada, entonces $cf(\alpha) = cf(\beta)$, [K]). □

Lema 3.3.7. *Si $P \in M$ y $(P \text{ es c.c.c})^M$, entonces P preserva cofinalidades (y también cardinales).*

Demostración: Supóngase que P no preserva cofinalidades. Entonces por el lema anterior existe un cardinal $\kappa \in M$ tal que $\kappa > \omega$, $(\kappa \text{ es regular})^M$ y $(\kappa \text{ no es regular})^{M[G]}$. Entonces existe un $\alpha < \kappa$ y una función cofinal $f : \alpha \longrightarrow \kappa$ en $M[G]$. Usando el Lema 3.4.3, sea F en M tal que $F : \alpha \longrightarrow P(\kappa)$, $\forall \xi < \alpha(f(\xi) \in F(\xi))$ y $\forall \xi < \alpha((\mid F(\xi) \mid \leq \omega)^M)$. Sea $S = \bigcup\{F(\xi) : \xi < \alpha\}$. Entonces $S \in M$ y S es un subconjunto no acotado de κ. Aplicando en M el hecho de que la unión de $\mid \alpha \mid$ conjuntos numerables tiene cardinalidad $\mid \alpha \mid$, se concluye que $(|\ S\ |=|\ \alpha\ |<\kappa)^M$. Esto contradice la regularidad de κ en M. $\square$

Con esto termina la prueba del Teorema 3.3.1: ZFC es consistente $\longrightarrow$ ZFC $+\neg HC$ es consistente. $\square$

Para continuar con esta subsección se enunciará un importante resultado sobre el forcing de Cohen que agrega una cantidad infinita de reales genéricos, el *Lema de Lévy* [Le]:

Sea $M[G]$ la extensión de Cohen obtenida con C_α que se describió anteriormente. Sea $A \in M$, $A \subseteq \alpha$. Sea C_A el subconjunto de C_α cuyos elementos son todas las condiciones p que tienen el dominio incluido en $A \times \omega$. Sea $G_A := \{p \in \mathsf{C}_A : p \in G\}$. Sea $F_A := \bigcup G_A : A \times \omega \longrightarrow 2$. Se cumple que $F_A = F \restriction A \times \omega$.

Teorema 3.3.8 (Lema de Lévy). *Para cualquier número real $a \in M[G]$, existe un conjunto $A \in M$, $A \subseteq \alpha$, el cual es numerable en M, y tal que $a \in M[G_A]$.* $\square$

Una prueba de este Teorema puede encontrarse en [Le], página 138. También puede encontrarse en [K], página 256.

Para finalizar esta subsección se enunciará un resultado que afirma que el forcing de Cohen que agrega una cantidad de reales genéricos se puede factorizar, una prueba del mismo puede encontrarse en [K], página 255:

Teorema 3.3.9. *Sea $M[G]$ la extensión de Cohen obtenida con el forcing C_α que se describió anteriormente. Sea $A \in M$, $A \subseteq \alpha$. Entonces G_A es C_A-genérico sobre M, $G_{\alpha\setminus A}$ es $\mathsf{C}_{\alpha\setminus A}$-genérico sobre $M[G_A]$ y $M[G] = M[G_A][G_{\alpha\setminus A}]$.* $\square$

3.4 Otra versión del forcing de Cohen: Forcing que agrega árboles perfectos uniformes

Un forcing que genera la misma extensión que el de Cohen es el de los árboles uniformes finitos con el orden de la extensión final (más adelante se definirá al mismo). En general, vale el suguiente resultado para el forcing de Cohen (ejercicio C4 de [K], página 242):

Definición previa: Un forcing P es *no atómico* si no tiene átomos, donde $p \in P$ es un *átomo* si $\neg\exists q, r \in P(q \leq p \wedge r \leq p \wedge q \perp r)$.

Teorema 3.4.1. *Sea P un forcing numerable y no atómico. Entonces existe una inmersión densa del forcing de Cohen (el de las sucesiones finitas de números naturales) en P.* $\square$

Del Teorema anterior se puede inferir que el forcing de las sucesiones finitas de ceros y unos, el forcing de las sucesiones finitas de números naturales, el forcing de los árboles uniformes finitos (que se definirá a continuación) y el forcing que agrega una cantidad numerable de reales genéricos (que se definió en subsección anterior) generan las mismas extensiones. Este hecho es muy útil (por ejemplo) para hacer pruebas de consistencia relativa con el forcing de Cohen.

Sea UNF el forcing de los árboles $T \subseteq 2^{<\omega}$ uniformes finitos ordenados por extensión final. Es decir, $T_1 \leq T_2$ si y sólo si $T_1 \supseteq T_2$ y $T_1 \upharpoonright Altura(T_2) = T_2$. Donde $Altura(T_1)$ es la longitud de cualquiera de las ramas de T_1 (todas las ramas de un árbol uniforme finito tienen la misma longitud).

Dado que UNF es numerable y no es atómico, entonces por el Teorema anterior UNF es el forcing de Cohen C. Sea G un UNF-genéricos sobre M, entonces en $M[G]$, $\bigcup G$ es un árbol $T \subseteq 2^{<\omega}$ perfecto uniforme. Es decir UNF agrega nuevos árboles perfectos uniformes a M, y se puede considerar que el real genérico $a \in \mathbb{N}^{\infty}$ que se agrega a M usando C es un código de dicho árbol.

Teniendo en cuenta la relación expresada en el párrafo anterior, entre otras técnicas como por ejemplo la de los constructibles de *Gö*del generalizada ($L(A)$ que permite construir el *Modelo de Feferman*, [D-G]) y los reales de Cohen eventualmente diferentes, se puede demostrar [D-G] que la Propiedad de Bernstein (se definirá a continuación), no implica la Propiedad de Partición Polarizada (se definirá a continuación), la implicación inversa si ocurre, es decir, la Propiedad de Partición Polarizada si implica a la Propiedad de Bernstein.

Definición de las Propiedades de Bernstein y polarizada:

Propiedad de Bernstein: Para toda (partición) $F : \mathbb{N}^{\infty} \longrightarrow 2$ existe un conjunto perfecto $P \subseteq \mathbb{N}^{\infty}$ tal F es constante en P. La Propiedad de Bernstein se denota en [D5] así: $\omega \rightarrow (perfecto)^{\omega}$.

Propiedad de Partición Polarizada: La expresión

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \omega \\ \omega \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_3 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

significa que para toda (partición) $F : \mathbb{N}^{\infty} \longrightarrow 2$ existe una sucesión de conjuntos $\{H_i\}_{i\in\omega}$ tal que:

- $H_i \subseteq \omega$, $\mid H_i \mid = n_i$, y
- F es constante en $\prod_{i\in\omega} H_i$.

Vale la pena resaltar que (al igual que la Propiedad de Ramsey mencionada en la sección 2) la Propiedad de Partición Polarizada (PPP) y la Propiedad de Bernstein (PB) no son compatibles con el Axioma de Elección [Bes], pero son consistentes con ZF, si ZFC + " Existe un cardinal inaccesible" es consistente [Mat]. Detallando un poco más este asunto hoy en día se conoce una prueba de la consistencia de ZF + PB que no usa la hipótesis de la existencia de cardinales inaccesibles (Shelah construyó un modelo de ZF donde vale PB sin usar la hipótesis de la existencia de cardinales inaccesibles en su construcción [Sh]). Pero no se ha podido probar lo mismo con la

PPP, es decir, es un problema abierto de si la hipótesis de la existencia de cardinales inaccesibles es necesaria o no para la consistencia de la PPP con ZF.

3.5 Forcing, conjuntos estacionarios y el Axioma de Martin Máximo

Sea $\kappa > \omega$ un cardinal regular. Se dice que un subconjunto $C \subseteq \kappa$ es *no acotado* (en κ) si para todo $\alpha < \kappa$ existe un $\beta \in C$ tal que $\beta \geq \alpha$. Se dice que un subconjunto $C \subseteq \kappa$ es *cerrado* si toda sucesión $\langle \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_\xi < \ldots \rangle$ $(\xi < \delta)$ de elementos de C, si $\delta < \kappa$, entonces el supremo de la sucesión, $\cup\{\alpha_\xi \mid \xi < \delta\}$, también pertenece a C. Un subconjunto $C \subseteq \kappa$ es *cerrado y no acotado* (CNA) en κ si es a la vez cerrado y no acotado en κ. Un conjunto $S \subseteq \kappa$ es *estacionario* si $S \cap C \neq \emptyset$ para todo CNA $C \subseteq \kappa$.

Consideremos el cardinal regular $\aleph_1$. Dos ejemplos de conjuntos cerrados y no acotados en $\aleph_1$ son: $\aleph_1$ (trivialmente) y $A = \{\alpha \in \aleph_1 : \alpha \; es \, \text{límite}\}$. Y tres ejemplos de conjuntos estacionarios (en $\aleph_1$) es $\aleph_1$ (trivialmente), todo conjunto $C \subseteq \aleph_1$ que sea CNA, pues los conjuntos CNA forman una familia cerrada bajo intersecciones finitas [D1], y $E_\omega^{\aleph_1} = \{\alpha < \aleph_1 : cof(\alpha) = \omega\}$ [J1].

Se dice que un orden parcial $(P, <)$ preserva estacionarios si cualquier subconjunto estacionario de $\aleph_1$ en el modelo base M sigue siendo estacionario en la extensión genérica $M[G]$.

Ejemplos de ordenes parciales (forcing) que preservan estacionarios son el *forcing de Cohen*, el *forcing de Sacks* y el *forcing de Mathias* [J1]. A continuación se define un forcing que no preserva estacionarios [J4] agregando un genérico CNA disjunto al estacionario respectivo:

Para cualquier conjunto estacionario S existe un forcing P_s que preserva a $\aleph_1$ y agrega un conjunto (genérico) CNA C tal que $C \subseteq S$. Entonces si S y $-S$ (el complemeto de S) son estacionarios, se tiene que P_s destruye estacionarios pues en $M[G]$ se cumple que $C \cap (-S) = \emptyset$. Y existen subconjuntos estacionarios de $\aleph_1$ cuyo complemeto es estacionario (como consecuencia del Axioma de elección [J1]). P_s se define como sigue:

Sea S un conjunto estacionario.

1. P_s= El conjunto de todos los conjuntos cerrados de ordinales p tal que $p \subseteq S$.
2. $p \leq q$ si y sólo si p es una extensión final de q, es decir, para algún ordinal $\alpha : q = p \cap \alpha$.

Sean M un $m.t.n$ de ZFC y G un P_s -genérico sobre M, entonces el conjunto CNA C ($C \subseteq S$) que agrega P_s es $C = \bigcup G$.

El axioma de Martin Máximo (MM) es un axioma de forcing que fue formulado por Foreman, Magidor y Shelah en 1988 [F-M-S] y es la siguiente proposición:

Axioma de Martin Máximo 3.5.1. *Si $(P, <)$ es un orden parcial que preserva estacionarios y $\mathcal{D}$ es una familia de $\aleph_1$ subconjuntos densos de P, entonces existe un filtro F $\mathcal{D}$-genérico sobre P, es decir, $F \cap D \neq \emptyset$ para cada $D \in \mathcal{D}$.*

Es conocido que MM es un candidato a nuevo axioma de ZFC que implica que $\mid \mathbb{R} \mid = \aleph_2$, (es decir que la hipótesis del continuo es falsa) y que él es consistente con ZFC si existen cardinales supercompactos, y como él no es constructivo y la existencia de cardinales supercompactos no se puede demostrar a partir de ZFC como consecuencia del Segundo Teorema de incompletitud de Gödel, entonces se ha dificultado su aceptación definitiva como nuevo axioma [D3], [A], [J1], [J4].

4 Una apróximación a los fundamentos metamatemáticos del método de forcing

4.1 Introducción

El objetivo de esta sección es estudiar los fundamentos metamatemáticos de dos maneras de aplicar el método de forcing: (1) *Forcing con modelos transitivos numerables*, el usado en este trabajo siguiendo el texto de Kunen [K] y (2) *Forcing con modelos sintácticos o forcing sobre* $\mathbf{V}$, que no se usó en este trabajo pero es utilizado en los textos [J1],[J2], [J4] y [Bel], por ejemplo. El forcing con modelos sintácticos o Forcing sobre $\mathbf{V}$ tiene a su vez al menos dos maneras de aplicarlo: (2.1) *Con la relación de forcing estrella* $\Vdash^*$ y (2.2) *Con modelos a valores booleanos.* Se tratará de explicar metamatemáticamente (usando ideas de Kunen [K] y Jech [J3], entre otras) por qué se pueden hacer pruebas de consistencia relativa en la Teoría de conjuntos con dichos métodos.

Vale la pena resaltar algo que se podrá apreciar en el desarrollo de esta sección, las tres presentaciones del forcing referidas se definen en el contexto de la Lógica de primer orden con identidad, es decir, en el contexto de la Teoría de conjuntos escrita en primer orden. Esto no debería de sorprender pues la lógica de primer orden se consolidó, a pesar de sus limitaciones expresivas, como la lógica base para las matemáticas (en los años 1930-40) gracias a su propiedad de *completitud* y a su *simplicidad* [Moo1], [Moo4].

El orden expositivo será el siguiente: En la primera subsección se enunciarán algunos teoremas relevantes para desarrollar el tema, en la segunda trataremos al forcing con modelos transitivos numerables; en la tercera al forcing con modelos sintácticos o forcing sobre $\mathbf{V}$, con la relación de forcing estrella $\Vdash^*$; y en la cuarta y última subsección trataremos al forcing con modelos sintácticos o forcing sobre $\mathbf{V}$, con modelos a valores booleanos.

4.2 Algunos teoremas relevantes para el tema

A continuación se enuncia el Teorema de Completitud de Gödel (1930) [G3], una demostración del mismo puede encontrase en [E2], [Me] y [Ch-Ke] :

Teorema 4.2.1 (Teorema de Completitud de Gödel). *Sea* Σ *un conjunto de setencias de un lenguaje de primer orden con identidad* $\mathcal{L}$*, entonces,*

$$\Sigma \ \textit{es} \quad \textit{consistente} \longleftrightarrow \Sigma \ \textit{tiene un modelo.} \square$$

Es conocido que en la dirección $\longleftarrow$ se llama *Teorema de Corrección* y en la dirección $\longrightarrow$ se llama propiamente *Teorema de Completitud*.

A continuación se enuncia el Teorema de Reflexión (Montague, 1960-Lévy, 1961), este Teorema es una versión del Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski hacia abajo (1956) de la Teoría de Modelos, una prueba del mismo puede encontrarse en [J1] y [K]:

Teorema 4.2.2 (Principio de Reflexión). *(1) Sea* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *una fórmula. Para cada conjunto* M_0 *existe un conjunto* $M \supseteq M_0$ *tal que,*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n)^M \longleftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

para cada $x_1, \ldots, x_n \in M$*. (Se dice que* M *refleja a* φ*.)*

(2) Más todavía, existe un conjunto transitivo $M \supseteq M_0$ *tal que* M *refleja a* φ*. Y más todavía, existe existe un ordinal* α *tal que* $V_\alpha \supseteq M_0$ *y* V_α *refleja a* φ*.*

(3) Si se asume el Axioma de elección, entonces existe un conjunto $M \supseteq M_0$ *tal que* M *refleja a* φ *y* $\mid M \mid \leq \text{ máx}(\mid M_0 \mid, \aleph_0)$*. En particular, existe un conjunto numerable* M *que refleja a* φ*.* $\square$

A continuación se enuncia el Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski (Mostowski, 1949-Montague, 1955), una demostración del mismo puede encontrarse en [J1] y [K]:

Teorema 4.2.3 (Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski). *(1) Si* $\mathbf{E}$ *es una relación bien fundamentada y extensional sobre una clase* $\mathbf{P}$*, entonces existe una clase transitiva* $\mathbf{M}$ *y un isomorfirmo* π *entre* $\langle \mathbf{P}, \mathbf{E} \rangle$ *y* $\langle \mathbf{M}, \in \rangle$*. La clase transitiva* $\mathbf{M}$ *y el isomorfismo* π *son únicos.*

(2) En particular, cualquier clase extensional $\mathbf{P}$ *es isomorfica a una clase transitiva* $\mathbf{M}$*. La clase transitiva* $\mathbf{M}$ *y el isomorfismo* π *son únicos.*

(3) En el caso (2), si $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{P}$ *es transitiva, entonces* $\pi(x) = x$ *para todo* $x \in \mathbf{T}$*.* $\Box$

4.3 Forcing con modelos transitivos numerables

El forcing con modelos transitivos numerables que se considerará en esta subsección es el forcing que se describió y usó en este trabajo (secciones 2 y 3), es decir, el forcing con modelos transitivos numerables tal como es desarrolla por Kunen [K], siendo la idea básica del mismo la siguiente: Si se quiere probar que ZFC + φ es consistente relativa a ZFC se supone la existencia de un modelo transitivo y numerable M (llamado *modelo base*) de ZFC y luego se extiende M a otro modelo transitivo y numerable $M[G]$ de ZFC + φ tal que $M[G]$ es el menor modelo transitivo de ZFC que contiene a $M \cup \{G\}$, y $M[G]$ y M tienen los mismos ordinales. $M[G]$ se llama la *extensión genérica* de M correspondiente a G, donde G es un P-*genérico* sobre M, es decir, G cumple con (a) y (b): (a) G es un filtro sobre un orden parcial con un mayor elemento $(\mathsf{P}, \leq, \mathbb{1})$, orden parcial que pertenece a M. Y (b) G intersecta a cualquier subconjunto denso D de $(\mathsf{P}, \leq, \mathbb{1})$ que este en M. En síntesis, dado un $(\mathsf{P}, \leq, 1) \in M$ y un G P-*genérico* sobre M se define

$M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^{\mathsf{P}}\}$, donde M^{P} es el conjunto de todos los P-nombres de M y τ_G es la interpretación (o el valor) de τ en G.

Pero ¿ Por qué si se hace el procedimiento expresado anteriormente se puede concluir que es verdad la siguiente proposición,

$$\text{ZFC es consistente} \longrightarrow \text{ZFC} + \varphi \text{ es consistente?.}$$

A continuación se trata de responder esta interrogante.

En el contexto de la Teoría de Modelos se denotará por **ZFC** a la Teoría de conjuntos informal de Zermelo-Fraenkel constituída por los axiomas usuales y las reglas de inferencia de deducción natural. Se supone que esta teoría es consistente y se usará para investigar la metateoría del sistema axiomático ZFC (el sistema axiomático formal de Zermelo-Fraenkel con que se ha venido trabajando y que se definió al inicio de este trabajo). Se quiere responder la siguiente pregunta Metamatemática de consistencia relativa ¿ Cómo se prueba (con **ZFC**) la siguiente proposición,

$$\text{ZFC es consistente} \longrightarrow \text{ZFC} + \varphi \text{ es consistente,}$$

usando el forcing con modelos transitivos numerables?.

Supongamos que se ha demostrado (con **ZFC**) que ZFC tiene un modelo, es decir,

$$\mathbf{ZFC} \vdash \text{Existe un modelo de ZFC.}$$

Entonces por el Teorema de Corrección,

$$\mathbf{ZFC} \vdash \text{ ZFC es consistente.}$$

Esto contradice el Segundo Teorema de Completitud Gödel, por lo tanto la hipótesis del método de forcing con modelos transitivos numerables, *“Existe un modelo transitivo y numerable de ZFC”*, no se puede realizar (en **ZFC**), no se puede demostrar la existencia de un tal modelo en (**ZFC**) ¿ y cómo se supera este inconveniente? Este problema se resuelve considerando *"fragmentos finitos suficientemente grandes de ZFC"* teniendo presente que en la construcción de $M[G]$ y en la prueba de que $< M[G], \in > \models ZFC + \varphi$ sólo se utilizaron una cantidad finita de axiomas que son verdad en M. Sea ZFC* un fragmento finito sufientemente grande de ZFC de tal modo que se pueda aplicar el método de forcing para la fórmula $\varphi \quad (\diamondsuit)$.

Entonces, puede demostrarse (en **ZFC**) que existe un modelo transitivo y numerable de ZFC* aplicando El Principio de Reflexión y el Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski, es decir,

$$\mathbf{ZFC} \vdash \exists M (M \,\text{es transitivo} \wedge \mid M \mid = \aleph_0 \wedge < M, \in > \models ZFC^*). \ (\bullet)$$

(Notar que en la expresión $< M, \in > \models ZFC^*$ se debe considerar la conjunción finita de los axiomas de ZFC^*, esto es posible porque ZFC* es finito)

Ahora bien, considerando $(\bullet)$ y $(\diamondsuit)$ se puede obtener:

$$\mathbf{ZFC} \vdash \exists M[G] \{ M[G] \,\text{es transitivo} \wedge \mid M[G] \mid = \aleph_0 \wedge$$
$$< M[G], \in > \models ZFC^* \wedge \varphi \}. \quad (\circ)$$

Entonces, por el Teorema de la deducción se concluye que:

$$\mathbf{ZFC} \vdash \{ \exists M (M \,\text{es transitivo} \wedge \mid M \mid = \aleph_0 \wedge < M, \in > \models ZFC^*) \} \longrightarrow$$

$$\exists M[G] \{ M[G] \,\text{es transitivo} \wedge \mid M[G] \mid = \aleph_0 \wedge$$
$$< M[G], \in > \models ZFC^* \wedge \varphi \}. \quad (\spadesuit)$$

Entonces usando (♠) y aplicando el Teorema de la deducción, el Principio de Reflección, el Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski y el Teorema de Corrección, se concluye que,

$$\mathbf{ZFC} \vdash \text{ ZFC}^{*} \text{ es consistente } \longrightarrow \text{ ZFC}^{*} + \varphi \text{ es consistente. } (\clubsuit)$$

Entonces,

$$\mathbf{ZFC} \vdash \text{ ZFC es consistente } \longrightarrow \text{ ZFC} + \varphi \text{ es consistente.}$$

En efecto, para probar dicha implicación aplicamos el Teorema de la deducción y el Método de reducción al absurdo. Supongamos que ZFC es consistente y que ZFC + φ es inconsistente. Entonces existen una cantidad finita de axiomas de ZFC, $\psi_1, \ldots, \psi_n$, tal que a partir de ellos y de φ se obtiene una contradicción. Luego, se toma otro fragmento finito suficientemente grande de ZFC que incluya los axiomas $\psi_1, \ldots, \psi_n$ y se pueda aplicar (nuevamente) el argumento de forcing correspondiente a φ que se supone realizado en ($\diamondsuit$). Tal fragmento se denotará por ZFC**. Entonces, se concluye un resultado análogo a ♣, es decir,

$$\mathbf{ZFC} \vdash \text{ ZFC}^{**} \text{ es consistente } \longrightarrow \text{ ZFC}^{**} + \varphi \text{ es consistente.}$$

Como ZFC** + φ es inconsistente (consecuencia de la hipótesis de absurdo y la elección de ZFC**), se infiere que ZFC** es inconsistente (aplicando Moduns Tollens en la implicación anterior).

Entonces, ZFC es incosistente ya que ZFC** $\subseteq$ ZFC.

De modo que se tiene una contradicción: ZFC es consistente y ZFC es inconsistente. Por lo tanto no puede ocurrir la hipótesis de absurdo (ZFC + φ es inconsistente). En consecuencia: ZFC + φ es consistente. Entonces ahora cerramos el Teorema de la deducción inicial y se tiene:

$$\mathbf{ZFC} \vdash \text{ ZFC es consistente } \longrightarrow \text{ ZFC} + \varphi \text{ es consistente. } \square$$

4.4 Forcing con modelos sintácticos o Forcing sobre V: Con la relación de forcing estrella $\Vdash^*$

En esta subsección no se usan en absoluto modelos que son conjuntos,es decir, modelos en el sentido usual de la Teoría de Modelos estándar.

En la sección 2 se definió inductivamente (en **V**, sin considerar ningún modelo M) la relación $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, donde $p \in (\mathsf{P}, \leq, 1)$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbf{V}^{\mathsf{P}}$. Y luego se enunció el Teorema,

$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \leftrightarrow (p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n))^M,$$

para mostrar que la relación $\Vdash$ es definible en el modelo base M. Luego se trabajó con $\Vdash$ en todas las aplicaciones que se hicieron en este trabajo. Sin embargo, se puede haber aplicado forcing sólo con esta relación $\Vdash^*$ sin considerar para nada modelos en el sentido usual de la Teoría de Modelos. Si uno optará por esta vía, para responder la pregunta Metamatemática de consistencia relativa ¿ Cómo se prueba (con **ZFC**) que

$$\text{ZFC es consistente} \longrightarrow \text{ZFC} + \varphi \text{ es consistente?},$$

se procedería así:

(a) Primero se demuestra que $1 \Vdash^* \psi$, para todo axioma ψ de ZFC. (Esto ya está demostrado, ver Kunen [K].)

(b) Después se demuestra que $1 \Vdash^* \varphi$. (Esto sí se debe demostrar.)

(c) Luego se demuestra que la relación de $\Vdash^*$ se preserva bajo deducibilidad ($\vdash$), es decir,

Si $\theta_1, \ldots, \theta_n \vdash \gamma$ y $p \Vdash^* \theta_1, \ldots, p \Vdash^* \theta_n$ entonces $p \Vdash^* \gamma$. (Esto ya está demostrado, al final de esta subsección se ofrecerá una prueba.)

Supongangase que se cumplen (a), (b) y (c), entonces por qué vale la proposición,

$$\text{ZFC es consistente} \longrightarrow \text{ZFC} + \varphi \text{ es consistente.}$$

Supongamos que no vale, es decir, ZFC es consistente y ZFC + φ es inconsistente. En consecuencia, existen una cantidad finita de fórmulas de ZFC + φ, $\phi_1, \ldots, \phi_n$, tal que $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \delta \wedge \neg\delta$. Entonces por (a), (b) y (c) se cumple que $1 \Vdash^* \delta \wedge \neg\delta$. Esto contradice la definición de $\Vdash^*$ (relación que se ha definido con ZFC consistente). Por lo tanto se cumple que:

$$\text{ZFC es consistente} \longrightarrow \text{ZFC} + \varphi \text{ es consistente.}$$

¿ Y cómo se prueba la cláusula (c)? Por la definición del sistema axiomático ZFC y especialmente la definición de deducibilidad $\vdash$ es suficiente con demostrar que la relación $\Vdash^*$ se preserva bajo la regla Moduns Ponens: *De $\eta \to \xi$ y η, podemos inferir ξ.* Supongamos que $p \Vdash^* \eta \to \xi$ y que $p \Vdash^* \eta$. Se debe probar que $p \Vdash^* \xi$. Por el siguiente Lema:

Lema 4.4.1. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$
2. $\forall r \leq p\, (r \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n))$
3. $\{r : r \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\}$ *es denso bajo p.* $\square$

Donde una prueba del mismo se encuentra en Kunen [K], página 197, basta con demostrar que el conjunto $\{r : r \Vdash^* \xi\}$ es denso bajo p. Sea $q \leq p$. Entonces $q \Vdash^* \eta \to \xi$. En consecuencia, definiendo las conectivas, se tiene que $q \Vdash^* \neg(\eta \wedge \neg\xi)$. De modo que,

$$\neg\exists t \leq q(t \Vdash^* \eta \wedge \neg\xi).$$

Es decir,

$$\neg\exists t \leq q(t \Vdash^* \eta \text{ y } t \Vdash^* \neg\xi).$$

Entonces, como $q \Vdash^* \eta$ se concluye que $q \nVdash^* \neg\xi$. En consecuencia, existe un $s \leq q(s \Vdash^* \xi)$. $s \leq q \leq p$ y $s \in \{r : r \Vdash^* \xi\}$. $\square$

Observación: Vale la pena resaltar que para realizar una prueba de consistencia relativa usando la relación $\Vdash^*$ sólo hay definir el orden parcial a utilizar y demostrar la cláusula (b) antes mencionada porque ya las cláusulas (a) y

(c) se sabe que valen para cualquier orden parcial entonces no hace falta probarlas.

4.5 Forcing con modelos sintácticos o Forcing on V: Con modelos a valores booleanos

Al igual que en la subsección anterior en esta subsección no se usan en absoluto modelos que son conjuntos, es decir, modelos en el sentido usual de la Teoría de Modelos estándar. Aquí se trabaja también con $\mathbf{V}$. Pero una diferencia con el caso anterior es que aquí se trabaja (necesariamente) con ordenes parciales que son álgebras booleanas completas.

Se empezará respondiendo la siguiente interrogante ¿ Qué es un modelo a valores booleanos del lenguaje de la Teoría de conjuntos?.

Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana completa. Un *modelo a valores booleanos* del lenguaje de la Teoría de conjuntos $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{U}, \mathbf{I}, \mathbf{E} \rangle$ consiste de un *universo booleano* $\mathbf{U}$ y dos funciones binarias $\mathbf{I}$ y $\mathbf{E}$ sobre $\mathbf{U}$ con valores en $\mathcal{B}$. En vez de $\mathbf{I}(x, y)$ y $\mathbf{E}(x, y)$ se escribirá $\|x = y\|$ y $\|x \in y\|$, respectivamente. (Los valores booleanos de $=$ y $\in$). $\mathbf{I}$ y $\mathbf{E}$ deben satisfacer las siguientes cuatro cláusulas:

1. $\|x = x\| = 1$
2. $\|x = y\| = \|y = x\|$
3. $\|x = y\| \centerdot \|y = z\| \leq \|x = z\|$
4. $\|x \in y\| \centerdot \|v = x\| \centerdot \|w = y\| \leq \|v \in w\|$

Después de definir el modelo a valores booleanos $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{U}, \mathbf{I}, \mathbf{E} \rangle$ se define el valor booleano de cada fórmula del lenguaje de la Teoría de conjuntos usando inducción en la complejidad de la fórmula (Notar que esta forma de definir el valor booleano de una fórmula es distinto a como se hizo en la sección 2 de este trabajo, en la sección 2 se definió el valor booleano usando la relación de forcing, aquí no se usa la relación de forcing en la definición, pero después de definido el valor booleano de una fórmula si se define, con dicho valor booleano, una relación de forcing. Son procedimientos inversos, sin embargo en ambos casos el valor booleano y la relación de forcing tienen las mismas propiedades [K],[J3]:

Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{U}$. El valor booleano de $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$, $\|\varphi(a_1, \ldots, a_n)\|$, es el siguiente:

(a) Si φ es atómica:

$$\|a = b\| = \mathbf{I}(a, b)$$
$$\|a \in b\| = \mathbf{E}(a, b)$$

(b) Si φ es una negación o una conjunción o una disyunción o un condicional o un bicondicional:

$$\|\neg\psi(a_1, \ldots, a_n)\| = \|\psi(a_1, \ldots, a_n)\|'$$

$$\|\psi \wedge \chi(a_1, \ldots, a_n)\| = \|\psi(a_1, \ldots, a_n)\| \cdot \|\chi(a_1, \ldots, a_n)\|$$
$$\|\psi \vee \chi(a_1, \ldots, a_n)\| = \|\psi(a_1, \ldots, a_n)\| + \|\chi(a_1, \ldots, a_n)\|$$

$$\|\psi \to \chi(a_1, \ldots, a_n)\| = \|\neg\psi \vee \chi(a_1, \ldots, a_n)\|$$

$$\|\psi \leftrightarrow \chi(a_1, \ldots, a_n)\| = \|(\psi \to \chi) \wedge (\chi \to \psi)(a_1, \ldots, a_n)\|$$

(c) Si φ es $\exists x\psi$ o $\forall x\psi$:

$$\|\exists x\psi(x, a_1, \ldots, a_n)\| = \sum\{\, \|\psi(a, \tau_1, \ldots, \tau_n)\| : a \in \mathbf{U}\}$$

$$\|\forall x\psi(x, a_1, \ldots, a_n)\| = \prod\{\, \|\psi(a, \tau_1, \ldots, \tau_n)\| : a \in \mathbf{U}\}$$

Ha finalizado la definición del valor booleano de φ. Se dice que $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ es *válida* en $\mathbf{U}$ si y sólo si $\|\varphi(a_1, \ldots, a_n)\| = 1$. Notar que un condicional $\psi \to \chi$ es válido exactamente cuando $\|\psi\| \leq \|\chi\|$.

EL MODELO A VALORES BOOLEANOS $\mathbf{V}^{\mathcal{B}}$

Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana completa. Se define $\mathbf{V}^{\mathcal{B}}$ por inducción transfinta en los ordinales de la siguiente manera:

$$\mathbf{V}_0^{\mathcal{B}} = \emptyset$$

$$\mathbf{V}_{\alpha+1}^{\mathcal{B}} = \text{El conjunto de todas las funciones } x \text{ tal que} \\ dom(x) \subseteq \mathbf{V}_\alpha^{\mathcal{B}} \ y \ rango(x) \subseteq \mathcal{B}$$

$$\mathbf{V}_\lambda^{\mathcal{B}} = \bigcup\{\mathbf{V}_\delta^{\mathcal{B}} : \delta < \lambda\} \quad (\lambda \text{ límite})$$

$$\mathbf{V}^{\mathcal{B}} = \bigcup\{\mathbf{V}_\alpha^{\mathcal{B}} : \alpha \in Ord\}$$

A cada $x \in \mathbf{V}^{\mathcal{B}}$ se le puede asignar un rango en $\mathbf{V}^{\mathcal{B}}$ de la siguiente manera: $rango(x) =$ el menor α tal que $x \in \mathbf{V}_{\alpha+1}^{\mathcal{B}}$.

Ahora falta definir sobre $\mathbf{V}^{\mathcal{B}}$ las funciones $\mathbf{I}$ y $\mathbf{E}$. Ellas se definen por inducción sobre los pares $(rango(x), rango(y))$ usando el buen orden canónico. Se hace de la siguiente manera:

(Notación auxiliar: Se define una operación booleana $u \Rightarrow v = u' + v$ considerando la equivalencia $\psi \rightarrow \chi$ si y sólo si $\neg\psi \vee \chi$.)

$$\|x \in y\| = \sum\{(\|x = t\| \cdot y(t)) : t \in dom(y)\}$$

$$\|x \subseteq y\| = \prod\{(x(t) \Rightarrow \|t \in y\|) : t \in dom(x)\}$$

$$\|x = y\| = \|x \subseteq y\| \cdot \|y \subseteq x\|$$

Entonces $\langle \mathbf{V}^{\mathcal{B}}, \mathbf{I}, \mathbf{E}\rangle$ es un modelo a valores booleanos. Una prueba de ello puede encontrarse en Jech [J3]. También en dicho texto está la demostración que todo axioma ψ de ZFC es válido en $\mathbf{V}^{\mathcal{B}}$, es decir, $\|\psi\| = 1$.

Ahora bien, en este contexto ¿ Cómo se prueba (con **ZFC**) que

$$\text{ZFC es consistente} \longrightarrow \text{ZFC} + \varphi \text{ es consistente?},$$

se procede de manera parecida a como se hizo con la relación forcing estrella de la subsección anterior:

(a) Primero se demuestra que $\|\psi\| = 1$, para todo axioma ψ de ZFC. (esto ya está demostrado y una prueba puede encontrarse en Jech [J3].)

(b) Después se demuestra que $\|\varphi\| = 1$. (Esto sí se debe demostrar.)

(c) Luego se demuestra que:

Si $\theta_1, \ldots, \theta_n \vdash \gamma$, entonces $\|\theta_1\| \centerdot \ldots \centerdot \|\theta_n\| \leq \|\gamma\|$. (esto ya está demostrado y una prueba de ello se ofrecerá al final de esta subsección.)

Supongangase que se cumplen (a), (b) y (c), entonces por qué vale la proposición,

$$\text{ZFC es consistente} \longrightarrow \text{ZFC} + \varphi \text{ es consistente.}$$

Supongamos que no vale, es decir, ZFC es consistente y ZFC $+ \varphi$ es inconsistente. En consecuencia, existen una cantidad finita de fórmulas de ZFC $+ \varphi$, $\phi_1, \ldots, \phi_n$, tal que $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \delta \wedge \neg\delta$. Entonces por (a), (b) y (c) se cumple que $\|\delta \wedge \neg\delta\| = 1$. Esto contradice la definición de valor booleano ($\|\delta \wedge \neg\delta\| = 0$), relación que se ha definido con ZFC consistente. Por lo tanto se cumple que:

$$\text{ZFC es consistente} \longrightarrow \text{ZFC} + \varphi \text{ es consistente.}$$

¿ Y cómo se prueba la cláusula (c)? Por la definición del sistema axiomático ZFC y especialmente la definición de deducibilidad $\vdash$ es suficiente con demostrar que la relación $\leq$ se preserva bajo la regla Moduns Ponens: *De $\eta \to \xi$ y η, podemos inferir ξ.* Se debe probar que $\|\eta \to \xi\| \centerdot \|\eta\| \leq \|\xi\|$. Prueba: $\|\eta \to \xi\| \centerdot \|\eta\| = \|(\neg\eta \vee \xi) \wedge \eta\| = \|(\neg\eta \wedge \eta)\| + \|\xi \wedge \eta\| = 0 + \|\xi \wedge \eta\| = \|\xi\| \centerdot \|\eta\| \leq \|\xi\|$. $\square$

Observación: Vale la pena resaltar que para realizar una prueba de consistencia relativa usando modelos a valores booleanos $\mathbf{V}^{\mathcal{B}}$ sólo hay que definir el álgebra booleana completa a utilizar y demostrar la cláusula (b) antes mencionada porque ya las cláusulas (a) y (c) se sabe que valen para cualquier álgebra booleana completa entonces no hace falta probarlas.

Para culminar esta subsección también vale la pena resaltar que esta manera de aplicar el método de forcing (con modelos a valores booleanos) permite trabajar con ordenes parciales $(\mathsf{P}, \leq, 1)$ que no necesariamente son álgebras booleanas completas. La relación auxiliar de forcing $\Vdash$ que se define tiene las mismas propiedades que la relación usada en este trabajo (secciones 2 y 3). Se procede así: Dado un orden parcial $(\mathsf{P}, \leq, 1)$ se busca su completación, es decir, el álgebra booleana completa asociada al mismo según el Teorema 2.9.3.6: $\mathcal{B} = a.r(\mathsf{P})$. Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{V}^{\mathcal{B}}$ y $p \in \mathsf{P}$,

$$p \Vdash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \longleftrightarrow i(p) \leq \|\varphi(a_1, \ldots, a_n)\|.$$

Referencias

[A] J. Amor. *El Problema del Continuo después de Cohen (1964-2004).* Aportaciones Matemáticas. Memorias 35 (2005), 71-80.

[Ba1] J. Bagaria. *Models of Set Theory.* Master's Course, 2007-2008. Universidad de Barcelona.

[Ba2] J.Bagaria. *The many faces of the Continunn.* XI Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática. Universidad de los Andes. 1998.

[Ba3] J.Bagaria. *Natural Axioms of set theory and the continuum problem.* Institució Catalana de Recerca i Estudis Avacats (ICREA), and Departament de Lógica, História i Filosofia de la Ciéncia. Universitat de Barcelona. 2004.

[Bar] T.Bartoszyński-H.Judah. *Set Theory: On the Structure of the Real Line.* AK Peters,1995.

[Bea] P. Bernays. *El Platonismo en Matemáticas* (1934). Universidad Central de Venezuela. 1982.

[Bel]J. Bell. *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.* Clarendon Press. Oxford.1979.

[Br]J. Brendle. *Comunicación personal.* 16-02-2010.

[Bes] F. Bernstein. *Zur Theorie der Trigonometrischen Reihe.* Berichte *ü*ber die Verhandlungen der Königlich Sächsischen gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig Mathematisch-Physiche Klasse. 60 (1908), 325 - 338.

[B-P] P.Benacerraf - H. Putnam. *Philosophy of Mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press. 1998.

[C1] P. Cohen. *The Independence of continuum hypothesis I.* Procedings of the National Academy of Science U.S.A. 50 (1963), 1143-1148.

[C2] P. Cohen. *The Independence of continuum hypothesis II.* Procedings of the National Academy of Science U.S.A. 51 (1964), 105-110.

[C3] P. Cohen. *Set Theory and The Continuum Hypothesis*. W.A. Benjamin, Inc. 1966.

[Ca1] G. Cantor. *Contributions to the founding of the theory of transinite numbers* (1895-97). Dover Publications, Inc. 1955.

[Ca2] C. Cantor. *Fundamentos para una Teoría General de Conjuntos* (1883). Crítica. 2005.

[Cr] C. Betz. *Introducción a la teoría de la medida e integración*. Universidad Central de Venezuela. 1992.

[C-D] W. Carnielli - C. Di Prisco. *Some Results an Polarized Relations of Higler Dimension*. Math. Logic Quaterly. 39 (1993), 461-474.

[Ch] A. Churd. *Introduction to mathematical logic*. Princeton: Princeton University Press. 1956.

[Ch-Ke] C. Chang - H. Keisler. *Model Theory*. North-Holland. 1990.

[D1] C. Di Prisco. *Teoría de Conjuntos*. Universidad Central de Venezuela: Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico. 2009.

[D2] C. Di Prisco. *Introdución a la Lógica Matemática*. Emalca Amazonia. 2009.

[D3] C. Di Prisco. *Are we closer to a solution of the continuum problem?*. Rev. Int. Fil., Campinas, V. 28, n. 2, p. 331-350. 2005.

[D4] C. Di Prisco. *Temas Avanzados de Teoría de Conjuntos*. Notas para un curso dictado en el Postgrado de Matemáticas. Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela. Septiembre 2000 - Febrero 2001.

[D5] C. Di Prisco. *Mathematics versus metamathematics in Ramsey theory of the real numbers*. En *Logic, Methology and Phylosophy of Science. Proccedings of the twelfth International Congress*. Petr Hajek, Luis Valdes-Villanueva, Dag Westerstalhl. Eds. Kings College Publications. London. 2005.

[D-G] C. Di Prisco - F. Galindo. *Perfect set properties in models of ZF*. Fundamenta Mathematicae. 208 (2010), 249-262.

[D-U] C. Di Prisco - C. Uzcátegui. *Una Introdución a la teoría descriptiva de conjuntos*. Asociación Matemática Venezolana. 1991.

[E1] H. Enderton. *Elements Set Theory*. Academic Press. 1977.

[E2] H. Enderton. *Una Introducción Matemática a la Lógica*. Universidad Nacional Autónoma de México. 2004.

[E-F-T] H. Ebbingahaus - J. Flum - W. Thomas. *Mathematical Logic*. Springer-Verlag. 1984.

[F] J. Fraleigh. *Álgebra abstracta* . Addison-Wesley Iberoamerica,S.A. E.U.A. 1987.

[F-M-S] M. Foreman - M. Magidor - S. Shelah. *Martin's maximun, saturated ideals and nonregular ultrafilters*. I. Ann. of Math. (2) 127 (1988), no. 1, 1-47.

[G1] K. Gödel. *Obras Completas*. Alianza. 1981.

[G2] K. Gödel. *¿ Qué es el problema del continuo de Cantor ?* (1947). En "Obras Completas" de Gödel. Alianza. 1981.

[G3] K. Gödel. *La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden* (1930). En "Obras Completas" de Gödel. Alianza. 1981.

[G4] K. Gödel. *Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines* (1931). En "Obras Completas" de Gödel. Alianza. 1981.

[G5] K. Gödel. *La consistencia del Axioma de Elección y la Hipótesis generalizada del continuo con los axiomas de la teoría de conjuntos* (1940). En "Obras Completas" de Gödel. Alianza. 1981.

[G6] K. Gödel. *Some cosiderations leading to the probable conclusion that the true power of the continuum is* $\aleph_2$. En K. Gödel *Collected Works* , vol. 3. S. Feferman, J. Dawson Jr., W. Goldfarb, C. Parsons and R. Solovay(eds.). Oxford: Oxford niversity Press. 2001.

[Gal] F. Galindo. *Forcing y reales genéricos*. Tesis de Maestría en Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Central de Venezuela. 2003. Tutor: Dr. Carlos Augusto Di Prisco.

[Gar] M. Garrido. *Lógica Simbólica*. Tecnos. 2001.

[G-D] F. Galindo - C. Di Prisco. *Constructibilidad relativizada y el Axioma de elección*. Mixba'al Rev. Met. de Mat. Número 1, Vol. I, Junio 2010. 23-40.

[Ha] P. Halmos. *Lectures on Boolean Algebras*. Van Nostrand, 1963.

[He] L. Henkin. *The completenes of first-order lenguages*. The Journal of Symbolic Logic 14 (1949) 159-166.

[H-J] K. Hrbacek - T. Jech. *Introduction to set theory*. Marcel Dekker, Inc. 1999.

[H-R] P. Howard - J. Rubin. *Consequences of the Axiom of Choice*. American Mathematical Society. 1998.

[J1] T. Jech. *Set Theory*. Springer. 2000.

[J2] T. Jech. *The Axiom of Choice*. North-Holland Publishing Company. 1973.

[J3] T. Jech. *Set Theory*. Academic Press, Inc. 1978.

[J4] T. Jech. *Multiple Forcing*. Cambridge: Cambridge University Press. 1986.

[K] K. Kunen. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*. Elsevier. 1980.

[Ka] A. Kanamori. *The Higler Infinite*. Springer Verlag. 1997.

[Ke] J. Kelley. *Topología General*. Editorial Universitaria de Buenos Aires. 1962.

[Le] A. Lévy. *Definability in Axiomatic Set Theory II*. En "Mathematical Logic and Foundations of Set Theory" (Y. Bar-Hillel,ed). Proc. Internt. Colloq. Jerusalem, 1968. North-Holland Publishing Co. Amsterdam, 1970, pp 129-145.

[Li] P. Lindström. *On extensions of elementary logic*. Theoria, vol.39, pp. 1-11.

[Lip] S. Lipschutz. *Teoría y Problemas de Topología General*. McGraw-Hill. 1978.

[Ma] M. Manzano. *Teoría de Modelos*. Alianza. 1989.

[Me] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman & Hall/CRL. 1997.

[Moo1] G. Moore. *A House divide against itself: The emergence of first-Order logic as the basis for mathematics*. En "Studies in the History of Mathematics". Esther R Phillips (ed.). Mathematical Association of America. pp. 98-136. 1987.

[Moo2] G. Moore. *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development, and Influence*. Springer-Verlag. 1982.

[Moo3] G. Moore. *The Origins of forcing*. Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), 1988.

[Moo4] G. Moore. *The emergence of First-Order Logic*. En "History and Philosophy of Modern Mathematics". Volume XI. Editores: W. Aspray y P. Kitcher. University of Minesota Press, Minneapolis. 1988.

[Mos] J. Mosterín. *Los Lógicos*. Espasa. 2000.

[M-T] J. Mosterín - R. Torretti. *Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencia*. Alianza. 2002.

[N-S] A. Nerode - R. Shore. *Logic for Applications*. Springer-Verlag. 1993.

[Q1] W. Quine. *El Alcance de la Lógica*. En "Filosofía de la lógica". Alianza. 1973.

[Q2] W. Quine. *Acerca de lo que hay*. En "Desde un punto de vista lógico". Ariel. 1962.

[Mat] A.R.D. Mathias. *Happy families*. Annals of Pure and Applied Logic 12 (1977) 59-111.

[Ro] H. Royden. *Real Analysis*. Macmillan,1988.

[St] Juris Steprāns. *Combinatorial Consequences of Adding Cohen Reals*. Israel mathematical conference proceedings. Volumen 6,1993.

[Sh] S. Shelah. *Can you Solovay's anaccesible away ?*. Israel Journal of Mathematics 48(1984) 1-47.

[So] R. Solovay. *A model of set theory where every set of reals is Lebesgue measurable* . Annals of Mathematics 92 (1970) 1-56.

[To] R. Torretti. *El Paraíso de Cantor. La tradición conjuntista en la filosofía de la matemática*. Universidad Nacional Andrés Bello. 1998.

[W-R] A. Whithehead - B. Russell. *Principia Mathematica* (1910). Cambridge: Cambridge University Press. 1962.