EPISTEME NS, VOL. 37, N° 1, 2017, pp. 1-23

Ricardo Da Silva y Franklin Galindo

EL PROGRAMA ORIGINAL DE DAVID HILBERT Y EL PROBLEMA DE LA DECIDIBILIDAD

Resumen: En este artículo realizamos una reconstrucción del Programa original de Hilbert antes del surgimiento de los teoremas limitativos de la tercera década del siglo pasado. Para tal reconstrucción empezaremos por mostrar lo que Torretti llama los primeros titubeos formales de Hilbert, es decir, la defensa por el método axiomático como enfoque *fundamentante*. Seguidamente, mostraremos como estos titubeos formales se establecen como un verdadero programa de investigación lógico-matemático y como dentro de dicho programa la inquietud por la *decidibilidad* de los problemas matemáticos y en específico la *decidibilidad* de la *Lógica de primer orden* cobra peso. Luego pasamos a analizar como la inquietud por la *decibilidad* toma lugar dentro del pensamiento filosófico-matemático de Hilbert presentándose como uno de los grandes problemas a los cuales la metamatemática debe encontrar una solución, esto lo hacemos mostrando un contraste con autores, como John von Neumann y Roberto Torretti, quienes de alguna u otra manera no interpretan el problema de la decidibilidad de la *Lógica de primer orden* como un problema de peso dentro del programa original de Hilbert. Finalmente argumentamos que el resultado meta-teórico de Church puede entenderse como una refutación del optimismo intelectual que permea a todo el programa original de Hilbert.

Palabras clave: David Hilbert, Metamatemática, Teorema de indecidibilidad de Church, Axioma de resolubilidad.

Recibido 07-02-17 ☼ Aceptado 27-02-17

DAVID HILBERT'S ORIGINAL PROGRAM AND THE DECIDABILITY PROBLEM

Abstract: In this paper we make a reconstruction of Hilbert's Original Program before the apparition of the limitative theorems on last century third decade. For such a reconstruction we begin by showing what Torretti calls Hilbert's first formal steps, that is, the defense of the axiomatic method as a *fundamenting* approach. Immediately after, we show how these first formal steps establish themselves as a true program of logical/mathematical investigation and how inside this program the unease regarding the *decidability* of the mathematical problems and specially of the *decidability* of *first order Logic* takes weight. Following that, we analyze how the unease regarding *decidability* takes place inside Hilbert's philosophical/mathematical thought showing itself as one of the big problems to which mathematics must find a solution, we do this by showing a contrast between authors like John von Neumann and Roberto Torretti who, in one or another way do not take the problem of *decidability* in *first order Logic* as an important problem inside Hilbert's original program. Lastly we argue that Church's meta-theoric result can be understood as a refutation of the intellectual optimism that permeates all of Hilbert's original program.

Keywords: David Hilbert, Metamathematic, Church's indecidability theorem, Resolubility axiom

1. *Los inicios del Programa original de Hilbert: El método axiomático*

El proyecto formalista de Hilbert presenta su carta de ciudadanía como programa filosófico y de fundamentación de la matemática a partir de los años 1920. Sin embargo, existe un elemento de dicho proyecto que ya el matemático de Königsberg venía defendiendo desde finales del siglo XIX. Se trata de la presentación axiomática de las diversas ramas de la matemática. Obviamente, no se trata de la presentación axiomática clásica que tiene su formulación original en los *Analíticos posteriores* de

Aristóteles y encuentra su máximo representante en la obra *Elementos* de Euclides; se trata, más bien, de un nuevo enfoque que podemos calificar de *formal*, ante el enfoque clásico que muchos califican de *material*.[1]

El enfoque axiomático *euclidiano o material* toma a los axiomas como verdaderos y refiriéndose a una realidad, teniendo así que tales axiomáticas se llevan a cabo "considerando las propiedades y relaciones de un sistema de objetos preestablecidos."[2] Esta realidad pre-existente (con sus relaciones y propiedades) es, en el caso *euclidiano*, nuestra realidad física (la realidad espacio-temporal) y, en consecuencia, se presentaba a la intuición espacial como garantía de la validez de las pruebas geométricas, así como de la verdad de los axiomas y la aplicabilidad de las definiciones.[3] Ahora bien, la axiomatización *formal* que presenta Hilbert, por primera vez en su *Grundlagen der Geometrie* de 1899, se diferencia de la presentación *material* en varios puntos. En primer lugar, los axiomas son tomados por nuestro autor como simples puntos de partidas desde los cuales se pueden derivar proposiciones (en este caso geométricas) usando las reglas de inferencia, de tal manera que los axiomas no son tomados como verdades auto-evidentes. En segundo lugar, tenemos que Hilbert rechaza la intuición espacial como garantía de la validez de las pruebas geométricas, lo que implica "que la demostración se ve forzada a marchar dentro de los cánones de la lógica."[4] Esto a su vez implica la exigencia de una prueba de consistencia, pues a diferencia de las axiomatizaciones *materiales*, en las *formales* no existe la seguridad (ofrecida por la realidad espacio-temporal) de que sea imposible derivar una contradicción, de aquí se deriva una tercera diferencia que radica en la concepción de la existencia y la verdad matemática

1 Esta distinción entre un enfoque material y un enfoque formal en la presentación axiomática de las teorías matemáticas responde a una distinción propia de Bernays y Hilbert en su texto de 1934 titulado *Grundlagen der Mathematik I*. Dicha distinción es recogida por Carlos Torres Alcaraz en "De la matemática clásica a la matemática moderna: Hilbert y el esquematismo kantiano", en *Diánoia*, volumen LIV, número 63, noviembre 2009.

2 *Ibid.*, p. 38.

3 Cf. *Ibid.*, p. 47.

4 *Ibid.*, p. 48.

vista desde el punto de vista axiomático, pues según le comenta el mismo Hilbert a Frege:

> Si los axiomas arbitrariamente estipulados, junto con todas sus consecuencias, no se contradicen entre sí, entonces son verdaderos y existen las cosas definidas por ellos. Ese es para mí el criterio de la existencia y de la verdad.[5]

De esta manera, Hilbert coloca a la consistencia del sistema como garantía de la verdad y la existencia matemática, esto es, la imposibilidad de derivar una contradicción a partir de los axiomas mediante las reglas de inferencia implica tanto la verdad de los axiomas como la existencia de sus objetos, la propiedad de la consistencia viene así a tener consecuencias semánticas y ontológicas en el pensamiento de nuestro autor.

¿De qué forma llevó a cabo Hilbert tales pruebas de consistencia? Es una interrogante de la que nos ocuparemos más adelante, por ahora sólo nos interesa subrayar que esta afirmación de Hilbert sobre la relación entre consistencia e existencia va en contra de la forma de entender tal relación por parte de las axiomatizaciones clásicas, en especial la postura (tradicional) de Frege, a quien le parecía absurdo una prueba de consistencia pues, bajo su enfoque, los axiomas eran enunciados verdaderos y, en tanto verdaderos, no eran contradictorios entre sí.[6] Las siguientes palabras del profesor Carlos Torres Alcaraz se refieren concretamente a los *Grundlagen der Geometrie*, pero valen en general para cualquier teoría axiomática, en ellas se refleja una síntesis de las diferencias que hemos esbozado anteriormente:

> Ya no se tiene, como en Euclides, un conjunto de objetos geométricos privilegiados de cuya realidad se está convencido, ni proposiciones en el sentido clásico del término, que no sólo enuncian un contenido sino que se afirman a título de verdades. Ahora lo único que sabemos de los objetos geométricos es lo que establecen los axiomas, y ya no viene al caso preguntar ¿qué son los puntos y las líneas?, sino ¿qué

5 Carta de Hilbert a Frege fechada en 29 de diciembre de 1899. Citada y traducida en Torretti, R., *El paraíso de Cantor: la tradición conjuntista en la filosofía de la matemática.*, Universitaria,. Santiago de Chile, 1998.

6 Cf. Mosterín, J., *Los lógicos*, Madrid, Editorial Espana Calpe, 2000, p. 79.

> propiedades tienen los puntos y las líneas? En este sentido, el *único fundamento de la teoría axiomática es su coherencia lógica*, es decir, la propiedad de ser no contradictoria.[7]

Decíamos que la cita anterior vale, en general, para cualquier teoría axiomática, pues de tal forma, pensaba el matemático de Königsberg, se lograría una presentación rigurosa de cualquier tema científico, o esfera conceptual, desde el enfoque axiomático,[8] y esto se debe a que el método axiomático ofrece una presentación definitiva y lógica de los contenidos de nuestro pensamiento,[9] concepción que el autor mantuvo a lo largo de su vida y que enfatizó en su ponencia de 1900 titulada "Acerca del concepto de número", que puede interpretarse como el primer trabajo del autor sobre los fundamentos de la aritmética y donde, visto los beneficios del método axiomático en geometría, pretende llevar tal método al análisis real, mediante un sistema que consta de cuatro grupos de axiomas para la teoría de números: axiomas de conexión, axiomas de operación, axiomas de orden y axiomas de continuidad.

Lo que ocurría en el análisis es que la presentación del concepto de número real se llevaba a cabo de *forma genética*, esto es, se llegaba al concepto de *número real* mediante sucesivas extensiones del concepto más simple de *número entero*, David Hilbert nos recuerda cómo se llega al número real a través de dichas extensiones:

> Tomando como punto de partida el concepto de número 1, se piensa normalmente que los demás números enteros positivos 2,3, 4…, así como las leyes que rigen sus operaciones, surgen gracias al proceso de contar. Se pasa después, debido a la exigencia de generalidad de la sustracción, al número negativo. Luego puede definirse el número fraccionario, por

7 Alcaraz, C., "Hilbert, Kant y el fundamento de las matemáticas", en *Theoría*, Número 8-9, 1999, p. 114.

8 Cf. Richard, Z. "Hilbert's Program", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2009 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/spr2009/entries/hilbert-program/>.

9 Cf. Hilbert, D., "Acerca del concepto de número" 1900, en Hilbert, D., *Fundamentos de la matemática*, Carlos Álvarez y Luis Felipe Segura (Comp.), MATHEMA, México D.F, 1993, p. 18.

> ejemplo, como un par de números –se tiene entonces que toda función lineal posee una raíz– y finalmente a un número real como una cortadura o como una sucesión fundamental.[10]

Sin embargo, aunque el matemático de Königsberg consideraba al método genético como un recurso pedagógico en el sentido de que muestra cómo se va pasando de un sistema numérico a otro, consideraba que el enfoque axiomático resultaba más adecuado, pues ayudaba a librarse de las dudas y objeciones que se habían generado (desde la bancada intuicionista) con respecto al conjunto de los números reales.[11]

Ahora bien, al igual que en el caso de la axiomatización de la geometría que había ofrecido en 1899, Hilbert también exigía para su axiomatización de la teoría de números una prueba de consistencia, pero la prueba de consistencia en cada caso siguió caminos muy diferentes. En el caso del sistema axiomático para la geometría la prueba fue llevada a cabo de forma relativa, esto es, se resolvió el problema de la consistencia de los axiomas demostrando que ellos valían para el modelo de los números reales, pero esto en realidad no era una solución absoluta del problema, sino parcial, pues traslada el problema de una teoría a otra. Pero esta forma de proceder con respecto a las pruebas de consistencia entraña un problema mucho más esencial, y es que para probar que un sistema axiomático es consistente deberíamos poder apoyarnos en una teoría mucho más poderosa y elemental, pero tarde o temprano llegaremos a un punto en donde no podremos valernos de una teoría más elemental, y tal punto es la aritmética y la teoría de conjuntos. Es por ello que para el caso del sistema axiomático para la teoría de números la prueba de consistencia tendrá que seguir otro rumbo, no uno de consistencia relativa, sino uno de consistencia absoluta.

2. La madurez del Programa original de Hilbert: La Metamatemática

10 *Ibid.*, p. 17.

11 Cf. *Ibid.*, pp. 21-22.

El requisito de una prueba absoluta de consistencia para los axiomas de la aritmética y en general para cualquier sistema axiomático de una teoría matemática va cobrando cada vez más preponderancia en el pensamiento y la obra de David Hilbert. En 1900 ante el *Primer congreso internacional de Matemáticos* anuncia como segundo problema a resolver en un futuro la demostración de que los axiomas para la aritmética no son contradictorios entre sí:

> Pero, sobre todo, deseo señalar la siguiente como la más importante de las preguntas, entre las varias que se pueden hacer con respecto a los axiomas: Probar que los axiomas no son contradictorios, es decir, que a partir de ellos en un número finito de pasos no se puede llegar a una contradicción.[12]

Y en dicha ponencia reconoce que no puede procederse como en el caso geométrico, sino que debe procederse de manera directa.[13] Sin embargo, para la época no existían aún los elementos para entender en qué consistía esta "forma directa de probar la consistencia", si bien hubo un primer intento, aunque imperfecto según el profesor Torretti,[14] en el año 1904 con su conferencia "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik", Hilbert propone en dicho texto un elemento que será, junto a la axiomatización, un pilar importante en lo que se conocerá como la *Teoría de la prueba o Metamatemática*. Dicho elemento es la *formalización*, que consiste en la representación de las proposiciones de una teoría mediante un lenguaje simbólico de tal forma que de una manera sintáctica y mecánica se puedan reflejar los diversos razonamientos de la teoría como relaciones entre fórmulas (carentes de contenido). De esta forma la formalización de una teoría queda resuelta, si se cumplen las siguientes condiciones:[15]

12 Hilbert., "Mathematical Problems" (trad. de Mary Winston Newson), en *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 28, American Mathematical Society, 1976, p. 10. (La traudcción al español es propia)

13 Cf. *Ibid*., pp. 10-11.

14 Cf. Torretti., *El paraíso de*…, cit., pp. 297-303.

15 Estos pasos los sugiere Torretti siguiendo la interpretación de J. von Neumann

1) Se deben enumerar todos los símbolos lógicos y matemáticos usados en la teoría. Estos son los llamados símbolos primitivos y entre ellos se encuentran las conectivas lógicas.

2) Caracterizar, sin ningún tipo de ambigüedad, todas las combinaciones de símbolos primitivos que pudiesen ser "significativos" en la matemática clásica (es decir, que pudiesen ser calificadas tanto verdaderas como falsas). A dichas combinaciones se les llama *fórmulas*.

3) Caracterizar, sin ningún tipo de ambigüedad, las reglas de inferencias usadas en la práctica matemática.

Estas labores ya habían sido llevadas a cabo, y de una forma muy exitosa, por la obra de Frege, Russell y Whitehead.[16] Con la formalización la matemática dejaba de presentarse en un lenguaje ordinario y se presentaba como un inventario de fórmulas que respondían a ciertas reglas. La formalización permitía volver objeto de estudio a las demostraciones matemáticas que se presentarían como una sucesión de fórmulas derivables una de las otras, donde dicha sucesión respondería a un conjunto de reglas previas de inferencia y, en este sentido, se arrojan luces sobre la forma en que debe ser abordado el problema de la consistencia.

Se trata ahora de investigar si es imposible derivar de la matemática formalizada una fórmula contradictoria, esto es, la consistencia de la teoría queda garantizada si es imposible obtener como teoremas tanto una fórmula φ como la fórmula $\neg\varphi$ mediante la aplicación de las reglas. Tal forma de proceder es viable dentro de los cánones finitistas pues tenemos que una derivación de una fórmula a partir de un grupo de axiomas siempre se ha de hacer en un número finito de pasos mediante un número finito de aplicaciones de las reglas de inferencia.

Otro problema que Hilbert consideraba de peso dentro de los fundamentos de la matemática cobra un nuevo sentido gracias a la formalización, se trata del problema de la completitud de una teoría axiomática, que consiste en probar que los axiomas

sobre el programa hilbertiano. Cf. *Ibid.*, p. 125.

16 Cf. Bernays, P., *El platonismo en matemática*, UCV-Ediciones de la biblioteca, Caracas, 1982, p. 37.

de la teoría son los suficientemente poderosos como para permitir derivar todos los teoremas (de la teoría intuitiva).[17] Se trata ahora de probar bajo el nuevo enfoque que para todo teorema de la matemática clásica, existe una fórmula correspondiente que resulta ser derivable en el sistema (la matemática formalizada y axiomatizada) mediante el uso de las reglas de inferencia.

Como puede observarse la formalización genera inmediatamente un nivel de abstracción más profundo en la praxis matemática, ahora las técnicas y herramientas utilizadas en el quehacer matemático se vuelven objetos de estudios. Dicho de otra forma, toda la matemática formalizada se presenta como un objeto que debe ser estudiado por una nueva teoría, mucho más poderosa, que recibe el nombre de *Teoría de la prueba o Metamatemática*, el mismo Hilbert describe tal disciplina de la siguiente manera:

> Hemos dicho ya que para realizar nuestros objetivos (se refiere aquí a la prueba de consistencia) tenemos que hacer de las demostraciones mismas el objeto de nuestra investigación. Nos vemos así obligados a desarrollar una *teoría de la demostración*, cuya materia de estudio la constituye el manejo y operación de las demostraciones mismas.[18]

Surgen inmediatamente la percepción de varias capas o niveles en el quehacer matemático (tal vez estamos hablando de al menos tres niveles: pre-teórico, teórico formal y metamatemático). En un primer nivel tenemos la teoría intuitiva y concreta donde los números resultan ser el objeto de estudio. Como en este nivel, en la matemática clásica, se usan tesis transfinitas y principios no-constructivista surge inmediatamente la duda de si se trata de una teoría consistente, es por ello que se procede a la formalización de toda la teoría como ya se explicó (segundo nivel). Tras la formalización se hace evidente de que ahora se trabaja con un número finito de objetos (símbolos, fórmulas y sucesiones de fórmulas) y, en tal sentido, se puede redirigir las dudas sobre la consistencia en términos finitistas, es aquí donde

17 Cf. Hilbert., "Acerca del concepto de número", p. 18.

18 Hilbert., "La nueva fundamentación de las matemáticas", en *Fundamentos de la...,* cit., p. 53.

aparece el (tercer) nivel de la *Metamatemática*,[19] una disciplina que en su ocasión J. von Neumann la presentó como la teoría que permitiría conciliar a la escuela de Hilbert y los intuicionistas, y no es para menos, pues uno de los objetivos de la *Metamatemática* es probar, mediante razonamientos finitistas, que el concepto de infinito actual, introducido por Cantor, no era problemático:

> Así como en los procesos de paso al límite en el cálculo infinitesimal se ha podido mostrar que lo infinito en el sentido de lo infinitamente pequeño e infinitamente grande no era más que una manera de hablar, así también lo infinito en el sentido de la colección infinita, como aún ahora se nos presenta en los modos de inferencia, tiene que reconocerse como algo meramente aparente. Y así como el operar con lo infinitamente pequeño fue reemplazado con procesos en el dominio finito que efectúan lo mismo y llevan a las mismas elegantes relaciones formales, así también en general hay que reemplazar los modos de inferencia que envuelven lo infinito con procesos finitos que efectúan lo mismo, es decir, que hacen posibles las mismas demostraciones y los mismos métodos para obtener fórmulas y teoremas.[20]

Tenemos entonces que la *Metamatemática* es la herramienta que permitiría llevar a cabo el programa original de Hilbert, esto es, la formalización de las teorías matemáticas y la demostración tanto de su completitud como de su consistencia. Pero, como veremos a continuación, en muchas partes de las obras del autor, pareciese agregarse otro problema fundamental dentro del programa, se trata pues, del problema de la decidibilidad.

3. La inquietud por la decidibilidad dentro del programa original de Hilbert

El problema de la decidibilidad aparece en la obra de Hilbert en el año 1900, pero lo hace bajo coordenadas que podríamos

---

19 La relación entre el nivel formal y el metamatemático de la praxis matemática también se puede expresar de la siguiente manera: Un nivel es la derivación de nuevas fórmulas a partir de los axiomas mediante reglas de inferencias formales, el otro nivel es la introducción de nuevos axiomas con su respectiva prueba de consistencia, se trata del meta-nivel o del estudio del sistema como un todo.

20 Hilbert., *Über das Unendliche*, 1926, p. 162. Citado y traducido en Torretti., *El paraíso de…*, cit., pp. 310-311.

considerar filosóficas o especulativas, más no formales. En ese año Hilbert dicta una ponencia titulada "*Mathematische Probleme*", ponencia que tenía por propósito iluminar las investigaciones sobres las diversas áreas de la matemática en el siglo XX, es por ello que en dicho texto se proponen una serie de problemas vinculados a los fundamentos de la matemática, por un lado, y a las matemáticas aplicadas, por otro lado. Pero, lo que nos importa ahora es la convicción que tenía Hilbert sobre la resolubilidad de todo problema matemático, convicción que se encuentra detrás de los 23 problemas planteados; las siguientes palabras del matemático de Königsberg son consideradas por Zach, Mancosu y Badesa[21] como el origen del problema de la decisión en la obra hilbertiana:

> La convicción en la resolubilidad de todo problema matemático es un incentivo para el trabajador. Escuchamos dentro de nosotros el canto imperecedero: he ahí un problema. Busca su solución. La podrás encontrar mediante la razón pura, pues en la matemática no hay *ignorabimus*.[22]

Lo que Hilbert planteaba es que en matemática quizás ignoramos (*Ignoramus*) pero no ignoraremos (*Ignorabimus*), muy por el contrario, el famoso matemático alemán respondía al pesimismo intelectual de los años 80 del siglo XIX con un *ideal epistemológico*[23] según el cual, no sólo los problemas que se plantea la matemática son resolubles, sino que los problemas que se plantea la ciencia también lo son, es por ello que con optimismo intelectual aclamaba "en lugar del necio *ignorabimus*, nuestra respuesta es la contraria: Debemos saber, sabremos."[24] Obviamente existe toda

---

21 Cf. Mancosu, P., Zach, R. y Badesa, C., *The development of mathematical logic. From Russell to Tarski: 1900-1935*, Oxford University Press, New York and Oxford, 2005, p. 71.

22 Hilbert., "Mathematical Problems", *Cit.*, p. 7. Citado y traducido por Carlos Torres Alcaraz, "¿Ignoramus et ignorabimus?", en *Anuario de filosofía*, Vol 1, 2007, p. 35.

23 Cf. Detlefsen. D., "Formalism", en *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Shapiro, Steward (Ed.), Oxford University Press, New York, 2005.

24 Hilbert., "Logic and the Knowledge of Nature", en William B. Ewald, (Comp.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Vol. 2, Trad. de W. B. Ewald, Oxford, Clarendon, 1996, p. 1 165. Citado y traducido por Alcaraz, T, C., "¿Ignoramus et ignorabimus?", p. 36.

una reflexión filosófica por parte del autor que justifica el hecho de que todo problema matemático sea susceptible de una solución exacta, pero de tal reflexión nos ocuparemos en el apartado siguiente, ahora nuestro interés gira en torno a la explicitación del problema de la decidibilidad como un problema propio del Programa original de Hilbert.

Como ya sabemos en la conferencia de 1917 nuestro autor introduce el problema de la decidibilidad bajo coordenadas matemáticas, para ser más concretos, bajo las coordenadas del nuevo método metamatemático. El autor reconoce la prioridad del problema de la consistencia para la matemática formalizada y de la búsqueda satisfactoria de una respuesta positiva –que como sabemos, gracias a Gödel, la respuesta que se obtuvo no era la esperada por el programa original de Hilbert–[25], pero admite que dicha cuestión forma parte de una problemática aún mayor, y en el seno de ese conjunto de problemas se encuentra el de "la *decidibilidad* de un problema matemático por medio de un número finito de operaciones".[26] Esta vez el problema de la decidibilidad

---

25 El articulo original de Gödel donde aparecen los resultados de incompletitud que mencionamos es Gödel, K. "Sobre sentencias formalmente indecidibles en *Principia Mathematica* y sistemas afines" (1931), en Gödel, K., *Obras completas*, Mosterín, J., (Ed.). Alianza Editorial. Madrid. 1989 (2da edición); Para una presentación formal y rigurosa de los Teoremas de Incompletitud de Gödel consúltese a Mendelson, E., *Introduction to the Mathematical Logical,* Chapman and Hall, London, 1997 (4ta Ed.). Finalmente se puede consultar Da Silva, R., "Los Teoremas de Incompletitud de Gödel, Teoría de Conjuntos y el Programa de David Hilbert", en *EPISTEME NS*, Volumen 34, N° 1, enero-junio, 2014. Con respecto al Segundo Teorema de incompletitud de Gödel nos parecen muy interesantes las reflexiones que Solomon Feferman hace sobre el mismo en su artículo "Arithmetization of methamathematics in a general setting", en *Fundamenta Mathematicae*, Volumen 46, 1960, pp. 35-92.

26 Hilbert., "El pensamiento axiomático", *Fundamentos de la matemática*…, cit., p. 32. En "El pensamiento axiomático" el autor se centra en dos requisitos para juzgar a nuestras axiomatizaciones como adecuadas: el primero consiste en ofrecer una visión de conjunto de la *dependencia* (o *independencia*) de los axiomas de la teoría y el otro consiste en la obtención de una prueba de *consistencia* del sistema, pero luego nos dice que la problemática por la *consistencia* y por la axiomatización de una teoría no es algo aislado sino que viene ligado a otra serie de inquietudes teórico-cognoscitivas. Estas inquietudes son: (1) La solubilidad de cualquier problema matemático; (2) La posibilidad ulterior de control de los resultados de una investigación matemática; (3) La elección de un criterio que determine cuándo

no se presenta desde una perspectiva filosófica, sino que por el contrario se enuncia desde coordenadas formales; inclusive se ofrece una de las características que debe tener un procedimiento de decisión: este debe ser llevado a cabo en un número finito de pasos. Esta explicitación es la que le permitirá al autor plantear luego la inquietud de la decidibilidad sobre sistemas formales, en especial sobre el sistema de la *Lógica de primer orden*.

Ahora bien, el *Entscheidungsproblem* no ha sido defendido de forma unánime como una inquietud de peso dentro del programa metamatemático original de David Hilbert. Existen intérpretes y filósofos de la matemática que de alguna u otra forma han desplazado el problema de la decidibilidad a un segundo plano dentro de las investigaciones que llevaba a cabo el matemático de los 23 problemas.

Una forma de entender el desplazamiento del problema de la decidibilidad como un problema central del programa original de Hilbert puede verse al estudiar las interpretaciones del lógico y matemático húngaro J. von Neumann sobre la *Teoría de la prueba*[27]. El lógico húngaro era reconocido como uno de los continuadores del programa original de Hilbert y como uno de sus grandes exponentes. Dos son los escritos donde mayor propaganda se le hace al programa hilbertiano, los artículos "Sobre la teoría hilbertiana de la prueba"[28] de 1927 y "The formalist foundations of mathematics"[29] de 1930.

En el artículo de 1927 de von Neumann se explicitan conceptos como los de *matemática clásica, matemática intuicionista, formalismo,* además de mostrar los conceptos que deben definirse rigurosamente ante los argumentos intuicionistas que se han for-

---

una demostración matemática es más sencilla que otra; (4) La relación entre el contenido intuitivo de las teorías y el formalismo en matemática y lógica; (5) La *decidibilidad* de un problema matemático mediante un número finito de pasos.

27 Cf. Bernays., *El platonismo en*…, cit., p. 38.

28 Un estudio de este artículo puede encontrarse en Torretti., *El paraíso de*..., cit., p. 232 y ss.

29 Cf. von Neumann, J., "The formalist foundations of mathematics" (1930), en *Philosophy of mathematics*, Benacerraf, P. y Putnam, H. (Ed.), Cambridge University Press, 1983.

mulado en contra, se trata del concepto de *todos* y el concepto de *conjunto*, en palabras del autor:

> Es necesario destacarlo expresamente: Hay dos puntos en que el edificio de la matemática clásica está inseguro y expuesto a los ataques de los escépticos, a saber, el concepto "todos" y el concepto de "conjunto". Estas dos cosas fundamentalmente diferentes no deben identificarse (como suele ocurrir), pero tampoco puede permitirse que una de ellas nos haga olvidar la otra. La crítica de la matemática comenzó por el concepto de "conjunto" y lentamente ha avanzado hasta el de "todos", que hoy, empero, es el principal punto de ataque de los intuicionistas. Pero no hay que olvidar que, aun cuando sus objeciones contra "todos" hayan sido refutadas en cierto sentido, con eso no se ha rescatado aún el concepto de conjunto.[30]

Por otro lado, el artículo presenta una de las primeras pruebas de consistencia absoluta, aunque no se trata de una prueba de consistencia de la matemática clásica, sino más bien de un fragmento propio,[31] la prueba resulta de valor por anticipar algunos métodos semánticos que son propios de la teoría de modelos que se desarrolla a partir de 1930.[32] En dicho artículo el autor afirma, adelantándose a lo que nueve años más tarde probaría Church, que pareciese no existir un método universal de decisión para determinar cuándo una fórmula de la aritmética es demostrable o no. Sin embargo, el autor reconoce que para la época no se había probado aún esa *intuición* que tenía y que "no hay tampoco ninguna indicación de cómo podría probarse dicha indecidibilidad,"[33] tal vez esto responde a que no se contaba aún con caracterizaciones formales de la noción intuitiva de *procedimiento efectivamente calculable*.

Sin embargo, en su conferencia de 1930 ante el Simposio sobre fundamentos de la matemática, celebrado en Königsberg, el

30 von Neumann., "Sobre la teoría hilbertiana de la prueba", p. 271. Citado y traducido en Torretti., *El paraíso de…*, cit., p. 237.

31 Cf. Torretti., *El paraíso de...*, cit., p. 232.

32 *Ibidem.*

33 von Neumann., "Sobre la teoría…," cit., p. 266. Citado y traducido en Torretti., *El paraíso de…*, cit., p. 235.

autor, de forma indirecta, le resta peso al problema de la decisión como un problema de Programa original de David Hilbert al no colocarlo como una de las tareas que la *Teoría de la prueba* debía llevar a cabo, dichas tareas serían:[34]

1. La matemática clásica, con sus tesis infinitistas y sus métodos no- constructivos, es formalizada y axiomatizada bajo métodos constructivos y finitistas.
2. Estudiando el sistema ya formalizado se busca obtener mediante métodos constructivos y finitistas una prueba de completitud del sistema.
3. De igual manera aplicando solo métodos constructivos y finitistas se busca demostrar la consistencia del sistema.

Al problema de la decidibilidad el autor sólo le dedica unas breves palabras diciendo que se trata de un problema complicado para tratar en la conferencia.[35] Esta omisión se verá luego reforzada por quienes consideren a J. von Neumann como un portavoz del Programa original de David Hilbert, cuando en realidad se trata del programa de Hilbert bajo la interpretación del lógico húngaro. Un ejemplo de esto podemos verlo en *El Paraíso de Cantor: La tradición conjuntista de la filosofía matemática* de Roberto Torretti. En tal magnífica obra el autor realiza una exposición a detalle del problema de la decisión (*Entscheidungsproblem*) dentro de las teorías formales mostrando que debemos entender por una solución positiva del mismo. Pero cuando enuncia las tareas prioritarias del programa de Hilbert lo hace siguiendo la interpretación antes mencionada (la de von Neumann) y, por ende, excluye al problema de la decidibilidad. Inclusive el filósofo chileno va más allá y asegura "no hay indicios de que Hilbert mismo se haya interesado por él."[36]

Torretti apoya sus palabras en una cita tomada del artículo de Hilbert titulado "Acerca del infinito,"[37] la cita en cuestión es

34 Cf. von Neumann., "The formalist foundations of…," cit., p. 63.
35 Cf. *Ibid*., p. 64.
36 Torretti., *El paraíso de*..., cit., p. 249.
37 Hilbert., "Acerca del infinito", *Fundamentos de la matemática*…, cit.

la siguiente: "Por cierto, mi teoría de la prueba no puede indicar en general una vía por la cual todo problema matemático pueda resolverse: tal vía tampoco existe."[38] Obviamente la cita le ayuda a fundamentar su comentario sobre la poca importancia que tendría el problema para Hilbert, pero el intérprete parece descontextualizar la cita y olvidar la importancia que le da el matemático de Königsberg al problema de la decisión en otros lugares. Primero que todo, en el mismo artículo el autor asegura que la solubilidad de todos los problemas matemáticos es una suposición compartida por la comunidad matemática[39] y cuando el autor asegura que la *Teoría de la prueba* no puede ofrecer una *vía general* para mostrar cómo se solucionan todos los problemas matemáticos, no parece estar restándole peso al problema de la decidibilidad. Más bien parece indicar que la cuestión de la resolubilidad debe formalizarse y esto queda justificado por las siguientes palabras de Hilbert: "lo que si cae dentro del campo de acción de nuestra teoría es la prueba misma de la consistencia de la suposición del carácter resoluble de todo problema matemático."[40]

Existe otro lugar de la obra de Hilbert donde resulta más claro el hecho de que el problema de la decidibilidad debe estar enmarcado como un problema propio de interés para la *Metamatemática*, se trata de la conferencia "El pensamiento axiomático" de la que ya nos hemos ocupado anteriormente. Si bien en tal conferencia no se usa los rótulos de *Teoría de la prueba o Metamatemática*, la idea general de tal método ya aparece bajo la exigencia de una teoría crítica del concepto de *demostración matemática* y en el seno de esa teoría se encuentra el problema de la decidibilidad, así lo afirma el autor:

> Todos los problemas básicos que hemos caracterizado, de entre los cuales este último no es sino uno más (el de la de-

38 Torretti., *El paraíso de*…, cit., p. 249

39 Cf. Hilbert., "Acerca del infinito…," cit., p.108.

40 *Ibidem.* Tal vez existe un paralelismo entre lo que sugiere la cita anterior y la prueba de la consistencia de ZF+AE, bajo la hipótesis de que ZF es consistente (Gödel 1938). Y con la prueba de que si ZF es consistente entonces ZF+¬AE es consistente (Cohen 1963). En general, creemos que existe un paralelismo entre lo que Hilbert presenta en la cita y todas las pruebas de consistencia relativa.

> cidibilidad), conforman un nuevo e importante campo de investigación. Su exploración y desarrollo requieren esencialmente de un estudio a fondo del concepto de demostración matemática, de manera análoga a como el astrónomo está obligado a considerar el movimiento de su punto de referencia, el físico a preocuparse por la teoría de sus instrumentos y el filósofo a hacer una crítica de la razón.[41]

Por último, no podemos dejar de mencionar las referencias que Hilbert y Ackermann hacen del problema de la decisión en su obra *Grundzüge der theoretischen Logik*,[42] en dicha obra no sólo aparece en 1928 el problema como una cuestión abierta que debe resolverse,[43] sino que es calificado como el problema más importante de la lógica matemática.[44] Además, debe agregarse que,

41 Hilbert., "El pensamiento axiomático…", cit., p. 34.

42 Existen traducciones de esta obra al inglés y al español. La primera traducción al inglés (1950), que recibe el título *Principles of mathematical logic*, se realiza a partir de la segunda edición de la versión alemana (1938). La presentación en español recibe el nombre de *Elementos de lógica teórica*. La primera edición de la presentación en habla hispana (1962) responde a la traducción de la cuarta edición alemana (1958), mientras que la segunda edición española (1975) corresponde a una traducción de la sexta edición alemana (1972). Vale la pena resaltar que el problema de la decibilidad de la lógica de primer orden fue eliminado como problema abierto en las ediciones posteriores a 1928, probablemente porque Alonzo Church en 1936 probó la indecibilidad de la *Lógica de primer orden*. El artículo original de Church donde aparece el *Teorema de Indecidibilidad* para la *Lógica de primer orden* es Church, A., "An unsolvable problem of elementary number theory" (1936), en Davis, M., (Ed.), *The undecidable. Basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable functions*, Raven Press, Nueva York, 1965. Consúltese también Mendelson, E., *Introduction to the Mathematical Logical*. Véase también los artículos por aparecer: Galindo, F. y Da Silva, R., "El *Teorema de indecidibilidad de Church* (1936): Formulación y presentación de las ideas principales de su prueba" y Da Silva, R. y Galindo, F., "Fragmentos decidibles e indecidibles en la *Lógica de primer orden*" que fueron arbitrados y aceptados para su publicación en la revista *Apuntes filosóficos*, revista arbitrada e indizada de la Escuela de Filosofía de la Universidad Central de Venezuela.

43 Citamos a continuación un extracto de la obra donde aparece la inquietud de la decibilidad de la Lógica de primer orden planteada por Hilbert y Ackermann: "The decision problem is solved, if one knows a procedure which allows for any given logical expression, to decide whether it is valid or satisfiable, respectively. (Hilbert and Ackermann 1928,73)". Dichas líneas están traducidas y citadas en Mancosu, P., Zach, R. y Badesa, C., *The development of mathematical logic. From Russell to Tarski: 1900-1935*, Oxford University Press, New York and Oxford, 2005, p. 72.

44 Cf. Mancosu, P., Zach, R. y Badesa., *The development of mathematical…*, cit. Lue-

desde la solución negativa del problema, las subsiguientes ediciones han dedicado una sección a casos de especiales de la *Lógica de primer orden* que sí resultan decidibles.

Obviamente no es universal esta interpretación del problema de la decidibilidad como un problema que no cobra interés en el programa hilbertiano de los fundamentos de la matemática. Si revisamos el artículo "The Development of Proof Theory" de Jan von Plato, el autor le dedica una sección a la Teoría de la prueba en la obra de Hilbert.[45] Allí habla de los problemas fundamentales[46] y centrales de la matemática de inicios del siglo XX y cita los siguientes problemas: (1) La formalización de una teoría matemática, (2) la prueba de la consistencia de los axiomas, (3) La prueba de independencia y completitud de los axiomas y (4) El problema de la decisión: ¿existe un método para contestar cualquier pregunta que podría plantearse dentro de la teoría? De esta forma vemos como el autor asume una posición diferente a la de Torretti, o la del mismo J. von Neumann, al introducir el problema de la decidibilidad como un problema central de la *Teoría de la prueba*. El autor, además, hace un breve recorrido por diversos sistemas formales, dejando en claro que los cuatro problemas fundamentales se solucionaron de forma positiva para la *Lógica proposicional*, mientras que para la *Lógica de primer orden* el cuarto problema se solucionó, pero de manera negativa.

4. El axioma de resolubilidad como trasfondo del problema de la decidibilidad.

Como ya hemos señalado en varias oportunidades, existe una convicción filosófica por parte de Hilbert que respalda la

---

go de citar la propia cita de Hilbert y Ackerman de 1928 donde se presenta el problema abierto de la indecidibilidad los autores pasan a decir que el problema de la decidibilidad es presentado como el problema principal de la lógica matemática, en palabras de los autores: "Hilbert and Ackermann (1928) call the decision problem the main problem of mathematical logic. No wonder that it was pursued with as much vigour as the consistency problem for arithmetic."

45 von Plato, Jan, "The Development of Proof Theory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2014 Edition), Edward N. Zalta (Ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/proof-theory-development/>.

46 El nombre de "Problemas fundamentales" para referirse a los problemas que debe solucionar el programa de Hilbert es propio de Jan von Plato.

idea de que todo problema matemático es susceptible de una solución exacta. Esta convicción se suma a una interpretación filosófica más general sobre la matemática y su praxis, en la cual se considera a la matemática desde un punto de vista epistemológico y ontológico, es decir, el autor en cierta media, aunque no de forma sistemática y no siempre de forma consistente, trata de dar respuesta a la pregunta sobre la posibilidad del conocimiento matemático y sobre la naturaleza del objeto matemático.

Lo primero que debemos decir es que Hilbert adopta tal *optimismo epistemológico*, o *fe racionalista* como la llama Gambra,[47] en una contienda contra una *especie de pesimismo epistémico*[48] del siglo XIX que había sido heredado del criticismo kantiano y liderado, entre otros, por científicos como Emil y Paul Du Bois-Reymond y Rudolf Virchow, y por otro lado por matemáticos como el intuicionista Luitzen Brouwer. Este grupo de intelectuales afirmaban la limitación del conocimiento humano y sostenían la presencia de problemas trascendentales que resultaban irresolubles (ejemplo de dichos problemas son "la naturaleza de la materia y la fuerza, (…) el origen del movimiento, la sensación y la conciencia"[49]). Así, surgió, en el último tercio del siglo XIX, una doctrina de la ignorancia en donde por tesis principal se afirmaba, no sólo la limitación del pensamiento científico, sino que se trataba de una limitación irremediable y permanente; naturalmente, este pesimismo se extendió hasta la matemática.

Ante este *Ignoramus et ignorabimus* —ignoramos e ignoraremos—Hilbert se reveló defendiendo la postura contraria —sabemos y sabremos— no sólo para su ciencia en particular, la matemática, sino para toda la ciencia en general. Hilbert apostaba tanto por esta convicción que la eleva al rango de axioma, de principio inherente al pensamiento matemático y, eventualmente, se hace la pregunta de si se trata de una cualidad propia de todo tipo de pensamiento científico:

---

47 Cf. Gambra, J., "La Filosofía de David Hilbert", en *La filosofía de los científicos,* AA.VV., 1995.

48 Cf. Detlefsen, D., "Formalism…", cit., p. 280.

49 Alcaraz., ¿Ignoramus et ignorabimus?..., cit., p. 36.

> ¿Es el axioma de resolubilidad de todo problema matemático una característica peculiar del pensamiento matemático, o es acaso una ley general inherente a la naturaleza de la mente, el que toda cuestión que se pregunta debe tener respuesta?[50]

La pregunta obviamente parece capciosa. Hilbert desde una coordenada racionalista parece estar pensando que no hay límites para la razón pura, esto es, que los problemas como creaciones de la razón son transparentes a la misma razón. Quizás un respaldo de tal forma de pensar pudiese verse en su conferencia de retiro, a los 68 años de edad, cuando afirma:

> Alguna vez el filósofo Comte dijo – con el propósito de mencionar un problema ciertamente irresoluble – que la ciencia nunca podría descubrir el secreto de la composición química de los cuerpos celestes. Unos pocos años más tarde este problema fue resuelto mediante el análisis espectral de Bunsen y Kirchhoff [...] La verdadera razón por la cual Comte no pudo hallar un problema irresoluble es, en mi opinión, que no hay en absoluto problemas irresolubles [...][51]

Ahora bien, dado el caso en que el *Teorema de indecidibilidad* se presente como una refutación rigurosa y formal del axioma de resolubilidad (entendiendo "resolubilidad" como "decidibilidad") esto podría usarse como fundamento para afirmar que el programa original de Hilbert es irrealizable. Esto significa que el T*eorema de indecidibilidad de Church*[52] es una segunda refutación del programa original de Hilbert; la primera refutación fueron los *Teoremas de incompletitud de Gödel.*

Sin embargo, aunque los *Teoremas de Incompletitud de Gödel* y el *Teorema de indecidibilibidad de Church* suponen una primera y segunda demostración de que el Programa original de Hilbert es irrealizable, esto no implica un abandono por completo de la meto-

---

50 Hilbert., "Mathematical Problems...", cit., p. 7. Citado y traducido en Alcaraz., ¿Ignoramus et ignorabimus?..., cit., p. 35.

51 Hilbert., "Logic and the Knowledge of Nature", en William B. Ewald, (Comp.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*. 2 vols., Trad. de W. B. Ewald, Oxford, Clarendon, 1996, pp. 1-165. Citado y traducido en Alcaraz., ¿Ignoramus et ignorabimus?..., cit., p. 35.

52 Intuitivamente lo que nos dice el *Teorema de Indecidibilidad de Church* es que la *Lógica de primer* orden es indecidible.

dología y herramientas que propuso Hilbert en su programa para el tratamiento de la matemática. La *Metamatemática* ha permitido formular con gran claridad problemas de fundamentación en matemática,[53] que han permitido precisar y resolver problemas abiertos de la matemática, aunque en la actualidad los requerimientos originales del programa de Hilbert se han flexibilizado.[54]

Siguiendo la idea de la última parte del párrafo anterior, a continuación, presentamos unas palabras del profesor Manuel Garrido que describe otro camino que ha seguido la *Metamatemática* de Hilbert impulsado por Tarski, tal camino rememora a la Teoría de modelos actual:

> No todos, sin embargo, han seguido a Hilbert por este camino. Alfred Tarski y su escuela, por ejemplo, continúan considerando que la metamatemática y la metalógica son teorías metalingüísticas de teorías formales, pero sin conceder por ello que las pruebas metamátemáticas hayan de renunciar al uso de los principios de la lógica clásica. Frente a la metamatemática hilbertiana, finitista y constructiva, la metamatemática de Tarski es clásica e infinitista.[55]

5. A modo de conclusión

El matemático G. H. Hardy afirma en su A*pología de un matemático,*[56] que la *belleza y seriedad*[57] de un teorema matemático no se mide por las consecuencias prácticas que pueda tener, sino por la relevancia de los conceptos matemáticos que se ven relacionados con el teorema, tanto en su enunciación como en su

53 Cf. Toranzos, F., "El panorama actual de la filosofía de la matemática y la influencia en él de D. Hilbert", en A*ctas del Primer Congreso Nacional de Filosofía*, Mendoza, Argentina, marzo-abril 1949, tomo 3, p. 1636

54 Cf. Chang, C. C. y Keisler, H., *Model Theory*, Editorial North-Holland, New York, 1990 (3ra. Ed.) y Mendelson, E., ., *Introduction to the Mathematical*…, cit.; Jech, T., *Set Theory,* Springer, 2002, Edición revisada; Kunen, K., *Set Theory. An introduction to Independence Proofs*, Editorial North-Holland, Amsterdam, 1992.

55 Garrido, M., *Lógica simbólica*, Tecnos, Madrid. 2001, p. 325.

56 Hardy, G.H., *Apologia de um matemático*, Gradiva, Lisboa, 2007.

57 Cf. *Ibid.*, p. 75. Hardy entiende la seriedad de la matemática en el sentido de que es importante, únicamente no usa el predicado "importante" pues dice que es algo ambiguo.

demostración. De esa *belleza y seriedad* que habla G. H. Hardy no escapa el *Teorema de indecidibilidad de Church*, pues el teorema se relaciona con importantes conceptos dentro de la lógica matemática, entre los que cabe destacar el *sistema axiomático para la Lógica de primer orden*, el concepto de *fórmula válida*, el concepto de *función recursiva*, el *sistema axiomático para la Aritmética de Robinson*, la técnica de la *numeración de Gödel*, el concepto de *representación*, etc.[58]

Pero también existe *belleza y seriedad* en lo que el *Teorema de Church* de 1936 significa para el trabajo real (el trabajo que ejercen en su cotidianidad) de los lógicos y los matemáticos, pues si bien nos indica que no existe un método efectivo para determinar la validez de toda fórmula de la *Lógica de primer orden*, y en consecuencia, mucho menos puede existir un método tal para la matemática en general, tal resultado es visto como una iniciativa para seguir haciendo matemática, esto es, la creatividad es intrínseca al quehacer matemático, ese es el espíritu que se muestra en la siguientes palabras de J. von Neumann:

> Parece, pues, que no hay ninguna vía para descubrir el criterio universal de decisión (*allgemeine Entscheidungskriterium*) sobre si una dada fórmula normal A es demostrable. […] Y que ello sea indecidible es incluso la *conditio sine qua non* para que tenga sentido hacer matemáticas con los métodos heurísticos de hoy. El día mismo que la indecidibilidad cese, también dejará de existir la matemática en el sentido actual; en su lugar habría una receta completamente mecánica con ayuda de la cual cualquiera podría decidir acerca de cualquier aseveración si se la puede o no demostrar.[59]

Ahora bien, la posición de J. von Neumann, que comparten la mayoría de lógicos y matemáticos en la actualidad, no era compartida por Hilbert, pues como ya vimos anteriormente, el matemático de Königsberg creía fuertemente en la tesis de que todo problema matemático podía resolverse en un número finito de pasos, esto es, que para todo problema matemático enmarcado dentro del proceder axiomático, existe un algoritmo

58 Cf. Mendelson., *Introduction to the Mathematical*…, cit.

59 von Neumann., "Zur Hilbertschen Beweistheorie", *Mathematische Zeitschrift,* 26: 1–46 (1927). Citado y traducido en Torretti., *El paraíso de*…, cit., pp. 234-235.

para determinar su solución, y el *Teorema limitativo de Church* viene precisamente a derrumbar tal ideal epistemológico. La postura epistemológica de Hilbert, ya defendida en cierto modo en la época medieval por Ramón Llull y en la modernidad por Leibniz y Hobbes,[60] se aprecia en su máximo esplendor en las siguientes palabras del autor:

> ¿En qué pararía la verdad de nuestro saber en general y la existencia y el progreso de la ciencia si ni siquiera en las matemáticas hubiese una verdad segura? Y en efecto, hoy por hoy, el escepticismo y el desánimo con respecto a la ciencia suelen expresarse incluso en la literatura especializada y en conferencias públicas. Esto es como una especie de ocultismo, que juzgo dañina. La Teoría de la prueba hace imposible tal actitud y nos procura la convicción entusiasta de que al menos el entendimiento matemático no tiene límites y puede incluso rastrear las leyes del pensamiento mismo.[61]

Sin embargo, sabemos que el entendimiento matemático tal como lo planteó nuestro autor tiene límites, que vienen dados por los teoremas limitativos probados durante la tercera década del siglo pasado. Pero esto no significa que debamos abandonar el proyecto *hilbertiano*, y de hecho en la actualidad muchos lógicos y matemáticos interesados en los fundamentos de la matemática han adoptado una versión infinitista y clásica de la *Metamatemática,* versus la finitista y constructivista que defendía Hilbert.

Escuela de Filosofía-UCV
Departamento de Lógica
franklingalindo178@gmail.com
ricardo6337@gmail.com

60 Cf. Kneale, W. y Kneale, M., *El desarrollo de la lógica*, Tecnos, Madrid, 1972.

61 Hilbert., "Probleme der Grundlegung der Mathematik" (1928), en *Grundlagen der Geometrie. Siebente umgearbeitete und vermehrte Auflage*, Leipzig, Teubner, 1930, p. 323 Citado y traducido en Torretti, R., *El paraíso de*…, cit., p. 120.