El Teorema de Completitud de Gödel, el Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski y el Principio de Reflexión.

Franklin Galindo

2014

Resumen

Es conocido que el Teorema de completitud de Gödel, el Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski y el Principio de Reflexión son resultados muy útiles en investigaciones de Lógica Matemática y de los Fundamentos de la Matemática. El objetivo de estas notas es presentar algunas demostraciones clásicas de los mismos: Dos del Teorema de completitud de Gödel, una del Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski y una del Principio de Reflexión. Se aspira que estas notas sean de útiles para estudiar dichas pruebas.

Contenido

1 Introducción

Es conocido que el Teorema de completitud de Gödel, el Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski y el Principio de Reflexión son resultados muy útiles en investigaciones de Lógica Matemática y de los Fundamentos de la Matemática. El objetivo de estas notas es presentar algunas demostraciones clásicas de los mismos: Dos del Teorema de completitud de Gödel, una del Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski y una del Principio de Reflexión. Se aspira que estas notas sean de útiles para estudiar dichas pruebas.

El orden de la exposición es el siguiente:

El la siguiente sección (2) se estudia una demostración de Church del Teorema de Completitud de Gödel para la Lógica de Primer Orden, la cual usa Forma normal prenexa y Forma normal de Skolem, vale la pena resaltar que esta prueba se parece a la demostración original de Gödel [G3]. El orden de la exposición es el siguiente: En la subsección 2.2 se presenta a la Lógica de Primer Orden con identidad, describiendo su sintaxis y su semántica, para dicha presentación se siguen (principalmente) los textos [D2], [E2], [Me],[Ch-Ke] y [J1], incluyendo la notación. En la subsección 2.3 se presenta el Sistema Axiomático para la Lógica de Primer Orden con identidad que se encuentra en [E2], también se presenta en dicha subsección algunos de los metateoremas principales de dicho Sistema Axiomático. En la subsección 2.4 se formula el concepto de Forma normal prenexa y se demuestra que existe un procedimiento efectivo para transformar cualquier fórmula ψ en una fórmula ψ', en Forma normal prenexa, tal que $\vdash \psi \leftrightarrow \psi'$. Tal prueba se realiza siguiendo (principalmente) la prueba que se encuentra en el texto [Me]. En la subsección 2.5 se formula el concepto de Forma normal de Skolem y se demuestra que existe un procedimiento efectivo para asignar a cada fórmula φ otra fórmula φ', en Forma normal de Skolem, tal que $\vdash \varphi$ si y sólo si $\vdash \varphi'$. Tal prueba se hace siguiendo (principalmente) las demostraciones que se encuentran en [Me] y [EP]. Y en la subsección 2.6 se realiza la demostración de Church del Teorema de Completitud de Gödel para la Lógica de Primer Orden, la cual usa Forma normal prenexa y Forma normal de Skolem, dicha prueba se encuentra en el texto [Ch], y la misma se hace siguiendo (principalmente) a dicho libro, aunque se reescribe adaptándola (en pequeños detalles) al sistema axiomático de [E2] presentado anteriomente, y a la notación semántica contemporánea. Vale la pena resaltar que esta prueba de completitud es para el Sistema Axiomático de la Lógica de Primer Orden sin identidad (pero se puede extender al Sistema Axiomático de la Lógica de Primer Orden con identidad, según [Ch]).

En la tercera sección se describe a la Teoría Axiomática de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el Axioma de elección (ZFC), y se presentan dos demostraciones: Una del Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski y otra del Principio de Reflexión. El orden de la exposición es el siguiente: Desde la subsección 3.2 hasta la subsección 3.9 se describe a ZFC. Dicha presentación se realiza siguiendo (principalmente) las fuentes [D1],[D3], [D4], [E1], [H-J], [K] y [J1], incluyendo la notación. Luego, en la subsección 3.10 se enuncia y demuestra el Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski, siguiendo (princialmente) la prueba que se encuentra en el libro [J1]. Y en la subsección 3.11 se enuncia y demuestra el Principio de Reflexión, siguiendo (principalmente) la prueba que se consigue en el texto [J1].

Y en la cuarta (última) sección se se describe una demostración del Teorema de Completitud de Gödel para la Lógica de primer orden con lenguajes de cualquier cardinalidad, la cual se debe a Henkin (1949) [He]. La versión que aquí se realiza utiliza ideas (principalmente) de [Ch-Ke],[E2] y [D2], y la misma consiste fundamentalmente en la demostración de tres lemas. Es importante resaltar que esta prueba usa el Axioma de elección y que dicho axioma no se necesita si se tratara de lenguajes numerables (versión que es la más encontrada en los textos actuales de introducción a la lógica matemática).

2 Una demostración de Church del Teorema de Completitud de Gödel para la Lógica de Primer Orden, la cual usa Forma normal prenexa y Forma normal de Skolem.

2.1 Introducción

El objetivo de esta sección es estudiar una demostración de Church del Teorema de Completitud de Gödel para la Lógica de Primer Orden, la cual usa Forma normal prenexa y Forma normal de Skolem, vale la pena resaltar que esta prueba se parece a la demostración original de Gödel [G3]. El orden de la exposición es el siguiente: En la subsección 2.2 se presenta a la Lógica de Primer Orden con identidad, describiendo su sintaxis y su semántica, para dicha presentación se siguen (principalmente) los textos [D2], [E2], [Me],[Ch-Ke] y [J1], incluyendo la notación. En la subsección 2.3 se presenta el Sistema Axiomático para la Lógica de Primer Orden con identidad que se encuentra en [E2], también se presenta en dicha subsección algunos de los metateoremas principales de dicho Sistema Axiomático. En la subsección 2.4 se formula el concepto de Forma normal prenexa y se demuestra que existe un procedimiento efectivo para transformar cualquier fórmula ψ en una fórmula ψ', en Forma normal prenexa, tal que $\vdash \psi \leftrightarrow \psi'$. Tal prueba se realiza siguiendo (principalmente) la prueba que se encuentra en el texto [Me]. En la subsección 2.5 se formula el concepto de Forma normal de Skolem y se demuestra que existe un procedimiento efectivo para asignar a cada fórmula φ otra fórmula φ', en Forma normal de Skolem, tal que $\vdash \varphi$ si y sólo si $\vdash \varphi'$. Tal prueba se hace siguiendo (principalmente) las demostraciones que se encuentran en [Me] y [EP]. Y en la subsección 2.6 se realiza la demostración de Church del Teorema de Completitud de Gödel para la Lógica de Primer Orden, la cual usa Forma normal prenexa y Forma normal de Skolem, dicha prueba se encuentra en el texto [Ch], y la misma se hace siguiendo (principalmente) a dicho libro, aunque se reescribe adaptándola (en pequeños detalles) al sistema axiomático de [E2] presentado anteriomente, y a la notación semántica contemporánea. Vale la pena resaltar que esta prueba de completitud es para el Sistema Axiomático de la Lógica de Primer Orden sin identidad (pero se puede extender al Sistema Axiomático de la Lógica de Primer Orden con identidad, según [Ch]).

2.2 Definición de la Lógica de Primer Orden: Sintaxis y Semántica

2.2.1 Lenguajes de primer orden y Estructuras

A continuación se ofrecerán los conceptos usuales de "lenguaje de primer orden" y "estructuras o interpretaciones" para dichos lenguajes, las definiciones se harán siguiendo el orden y la notación (principalmente) de los textos [D2] y [Ch-Ke], pero se realizarán de manera gneralizada para cualquier cardinal.

Lenguajes de cualquier cardinalidad

Un *lenguaje* es una colección de símbolos que puede ser numerable (finito o equipotente a $\mathbb{N}$) o de cualquier otra cardinalidad $\aleph_\sigma$, para algún ordinal $\sigma > 0$. Estos símbolos serán agrupados en tres clases:

Símbolos relacionales $S_0, S_1, \ldots, S_\mu, \ldots$ $(\mu \in \delta)$. Donde δ es un ordinal que puede ser infinito (de cualquier cardinalidad).

Símbolos funcionales $g_0, g_1, \ldots, g_\beta, \ldots$ $(\beta \in \gamma)$. Donde γ es un ordinal que puede ser infinito (de cualquier cardinalidad).

Símbolos constantes $d_0, d_1, \ldots, d_\theta, \ldots$ $(\theta \in \zeta)$. Donde ζ es un ordinal que puede ser infinito (de cualquier cardinalidad).

$$\mathcal{L} = \{S_\mu\}_{\mu\in\delta}\bigcup\{g_\beta\}_{\beta\in\gamma}\bigcup\{d_\theta\}_{\theta\in\zeta}.$$

O expresado como una lista:

$$\mathcal{L} = \{S_0, S_1, \ldots, S_\mu, \ldots\ (\mu \in \delta); g_0, g_1, \ldots, g_\beta, \ldots\ (\beta \in \gamma);$$
$$d_0, d_1, \ldots, d_\theta, \ldots\ (\theta \in \zeta)\}.$$

Todo símbolo relacional y todo símbolo funcional tiene asociado un número natural $n \geq 1$ (su número de argumentos), de este modo se tienen entonces símbolos relacionales o funcionales unarios, binarios, 3-arios, 4-aricos, 5-arios, $\ldots$, n-arios, etc.

Como consecuencia de resultados básicos de la aritmética cardinal ([D1],[H-J],[E1]) se tiene que el cardinal de $\mathcal{L}$ es:

$$\mid \mathcal{L} \mid = \mid \delta \mid + \mid \gamma \mid + \mid \zeta \mid = \text{mayor}\{\mid \delta \mid, \mid \gamma \mid, \mid \zeta \mid\}.$$

Estructuras (o Interpretaciones) para un lenguaje $\mathcal{L}$

Una *estructura* $\mathfrak{C}$ para un lenguaje $\mathcal{L}$ (o una *interpretación* $\mathfrak{C}$ para un lenguaje $\mathcal{L}$) está cosntituída por:

(1) Un conjunto no vacío C (el universo de $\mathfrak{C}$)

(2) Para cada símbolo relacional n-ario S_μ de $\mathcal{L}$, una relación

$$S_\mu^{\mathfrak{C}} \subseteq S^n$$

.

(3) Para cada símbolo funcional n-ario g_β de $\mathcal{L}$, una función

$$g_\beta^{\mathfrak{C}} : C^n \longrightarrow C$$

.

(4) Para cada símbolo constante d_θ de $\mathcal{L}$, un elemento

$$d_\theta^{\mathfrak{C}} \in C.$$

La $\mathfrak{C}$ definida se puede escribir así:

$$\mathfrak{C} = \langle C, < S_\mu^{\mathfrak{C}} >_{\mu \in \delta}, < g_\beta^{\mathfrak{C}} >_{\beta \in \gamma}, < d_\theta^{\mathfrak{C}} >_{\theta \in \zeta} \rangle.$$

Ante la pregunta ¿ Cuál es la cardinalidad de la estructura $\mathfrak{C}$? La respuesta es: La cardinalidad de $\mathfrak{C}$ es la cardinalidad de su universo C.

Algunos ejemplos de lenguajes y de estructuras para dichos lenguajes son los siguientes:

(i) El siguiente conjunto $\{\widehat{\leqq}, \widehat{+}, \widehat{\bullet}, \widehat{0}, \widehat{1}\}$; donde $\widehat{\leqq}$, $\widehat{+}$, $\widehat{\bullet}$ son símbolos funcionales binarios, y $\widehat{0}$ y $\widehat{1}$ son símbolos constantes; es un lenguaje. Una estructura para dicho lenguaje es por ejemplo $\langle \mathbb{N}, \leq, \bullet, 0, 1\rangle$: La estructura que tiene como universo el conjunto de los números naturales, con su relación de orden usual, su operación de suma usual, su operación producto usual, su cero usual y su uno usual.

(ii) El siguiente conjunto de símbolos $\{\widehat{+}, \widehat{0}\}$, es un lenguaje. Una estructura para este lenguaje es $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$, también $\langle \mathbb{R}, +, 0\rangle$ y $\langle \mathbb{C}, +, 0\rangle$. La primera estructura son los números enteros con su suma y cero usuales, la segunda estructura son los números reales con su suma y cero usuales, y la tercera estructura son los números complejos con su suma y cero usuales. Dichas estructuras tienen en común que son "grupos" (al final de este capítulo se definirá dicho concepto).

(iii) El siguiente conjunto $\{\widehat{\leq}\}$, donde $\widehat{\leq}$ es un símbolo relacional binario, es un lenguaje. Una estructura para este lenguaje es $\langle \mathbb{R}, \leq\rangle$, y también $\langle P(A), \subseteq\rangle$, para cualquier conjunto A. La primera estructura es un "orden total" y la segunda es un "orden parcial" casi siempre (en el siguiente capítulo se definirán ambos conceptos de orden).

(iv) El siguiente conjunto de símbolos $\{\widehat{+}, \widehat{\bullet}, \widehat{'}, \widehat{0}, \widehat{1}\}$, donde $\widehat{+}$, $\widehat{\bullet}$, $\widehat{0}$ y $\widehat{1}$ son símbolos definidos anteriormente y $\widehat{'}$ es un símbolo funcional unario; es un lenguaje. Una estructura para este lenguaje es por ejemplo el álgebra booleana $\langle P(A), \cup, \cap,', \emptyset, A\rangle$, para cualquier conjunto A. $'$ es la relación de complemento en $P(A)$. (En la sección sobre el Método de Forcing (4) se definirá el concepto de álgebra boolena).

(v)Sea α un ordinal. El siguiente conjunto $\{\widehat{\in}\} \cup \{d_\theta : \theta \in \aleph_\alpha\}$, donde $\widehat{\in}$ es un símbolo de relacional binario, y los d_θ son símbolos constantes; es un lenguaje infinito. Una estructura para este lenguaje es por ejemplo $\langle V_{\aleph_\alpha}, \in, < \theta >_{\theta\in\aleph_\alpha}\rangle$. (En el siguiente capítulo se definirán todas las entidades que conforman esta estructura).

2.2.2 Isomorfismo entre estructuras y Subestructuras

Ahora se definirán dos relaciones entre estructuras: "isomorfismo" y "subestructuras". Otras importantes relaciones como "inmersión elemental" y "submodelo elemental" se definirán más adelante en esta misma sección.

¿ Cuándo dos estructuras son isomorfas?

Sean $\mathfrak{C} = \langle C, < S_\mu^{\mathfrak{C}} >_{\mu\in\delta}, < g_\beta^{\mathfrak{C}} >_{\beta\in\gamma}, < d_\mu^{\mathfrak{C}} >_{\mu\in\zeta}\rangle$, y $\mathfrak{D} = \langle D, < S_\mu^{\mathfrak{D}} >_{\mu\in\delta}$ $, < g_\beta^{\mathfrak{D}} >_{\beta\in\gamma}, < d_\mu^{\mathfrak{B}} >_{\mu\in\zeta}\rangle$ dos estructuras para un lenguaje $\mathcal{L}$. $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ son *isomorfas* ($\mathfrak{C} \cong \mathfrak{D}$) si y sólo si existe una función biyectiva $f : C \longrightarrow D$ que satisface las siguientes tres propiedades:

(1) Para cada símbolo relacional S_μ de $\mathcal{L}$, si n es la aridad de S_μ, entonces para cada $(c_1, \ldots, c_n) \in C^n$:

$$S_\mu^{\mathfrak{C}}(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow S_\mu^{\mathfrak{D}}(f(c_1), \ldots, f(c_n)).$$

(2) Para cada símbolo funcional g_β de $\mathcal{L}$, si n es la aridad de g_β, entonces para cada $(c_1, \ldots, c_n) \in C^n$:

$$f(g_\beta^{\mathfrak{C}}(c_1, \ldots, c_n)) = g_\beta^{\mathfrak{D}}(f(c_1), \ldots, f(c_n)).$$

(3) Para cada símbolo constante d_μ de $\mathcal{L}$ se tiene que:

$$f(d_\mu^{\mathfrak{C}}) = d_\mu^{\mathfrak{D}}.$$

¿ Cuándo una estructura es subestructura de otra estructura ?

Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos estructuras para un lenguaje $\mathcal{L}$. Se dice que $\mathfrak{C}$ es una *subestructura* de $\mathfrak{D}$ si y sólo si:

(1) $C \subseteq D$

(2) Para cada símbolo relacional n-ario S de $\mathcal{L}$,

$$S^{\mathfrak{C}} = S^{\mathfrak{D}} \cap C^n.$$

(3) Para cada símbolo funcional n-ario g de $\mathcal{L}$,

$$g^{\mathfrak{C}} = g^{\mathfrak{D}} \upharpoonright C^n.$$

(4) Para cada símbolo constante d de $\mathcal{L}$ se tiene que:

$$d^{\mathfrak{C}} = c^{\mathfrak{D}}.$$

2.2.3 Formalización de un lenguaje

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje. Para formalizar a $\mathcal{L}$ se usan un conjunto de *símbolos lógicos*, los cuales se listan a continuación:

(i) Conectivas: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (negación, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional, respectivamente).

(ii) Cuantificadores: $\exists$, $\forall$ (existencial y universal, respectivamente).

(iii) Símbolo de identidad: $\equiv$ (un símbolo relacional binario)

(iv) Variables: $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_k, \ldots$ $(k \in \aleph_0)$

(v) Paréntesis: $), ($ (Paréntesis izquierdo y parénstesis derecho, respectivamente).

(vi) La coma: ,

El conjunto de las variables se denotará por VAR.

A continuación se presentarán una lista de definiciones que tienen la finalidad de indicar cómo usar los símbolos lógicos y los símbolos de $\mathcal{L}$ para construir términos y fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$, términos y fórmulas que van a permitir hablar de las estructuras para $\mathcal{L}$:

Se empieza definiendo *Término* del lenguaje $\mathcal{L}$, utilizando inducción:

Definición 2.2.3.1. *(i) Toda variable y todo símbolo constantes es un término.*

(ii) Si g es un símbolo funcional n-ario y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $g(t_1, \ldots, t_n)$ es un término.

(iii) Una sucesión de símbolos es un término sólo si se obtiene aplicando una cantidad finita de veces las cláusulas (i) y (ii).

El conjunto de los términos de $\mathcal{L}$ se denotará por $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$.

Ahora se define *fórmula atómica* de $\mathcal{L}$, las fórmulas más simples del lenguaje $\mathcal{L}$:

Definición 2.2.3.2. *(i) Si t_1 y t_2 son términos, entonces $t_1 \equiv t_2$ es una fórmula atómica.*

(ii) Si S es un símbolo relacional n-ario y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $S(t_1, \ldots, t_n)$ es una fórmula atómica.

Con el concepto de fórmula atómica se procede ahora a definir lo que es una *fórmula* (*fórmula bien formada*) de $\mathcal{L}$, dicha definición se hace usando inducción:

Definición 2.2.3.3. *(i) Toda fórmula atómica es una foŕmula.*

(ii) Si ϕ y χ son fórmulas, entonces $(\neg\phi)$, $(\phi \vee \chi)$, $(\phi \wedge \chi)$,$(\phi \rightarrow \chi)$ y $(\phi \leftrightarrow \chi)$ son fórmulas.

(iii) Si v es una variable y ϕ es una fórmula, entonces $(\forall x)\phi$ y $(\exists x)\phi$ son fórmulas.

(iv) Una sucesión de símbolos es una fórmula sólo si se obtiene usando una cantidad finita de veces las cláusulas (i),(ii) y (iii).

Por simplicidad, cuando no exista ambiguedad se eliminarán los paréntesis externos de las fórmulas y de los cuantificadores, es decir, escribirá $\neg\phi$ en lugar de $(\neg\phi)$ y $\forall x\phi$ en lugar de $(\forall x)\phi$, por ejemplo.

Como se explicitó anteriormente en cada caso, las definiciones de término y de fórmula se hicieron inductivamente, por eso cuando se vaya a probar que alguna propiedad vale para todos los términos o para todas fórmulas conviene usar inducción basada en dicha construcción. Esto aplica igualmente para el caso de hacer definiciones para todos los términos o para todas las fórmulas. En este mismo orden de ideas es importante resaltar también que toda fórmula tiene un número natural asociado, su *rango*, el cual se define como su número de conectivas y cuantificadores. También a cada término se le puede asociar un único número natural, su *longitud*, su número de símbolos. Esto trae como consecuencia interesante que se pueda aplicar inducción sobre esta longitud o sobre este rango (El Principio de inducción matemática en $\mathbb{N}$) con la finalidad de probar propiedades para todos los términos o para todas las fórmulas, y también con la finalidad de hacer definiciones relativas a todos los términos o todas las fórmulas. El tipo de inducción en el rango de las fórmulas y en la longitud de los términos se usa para demostrar el primer tipo de inducción que se mencionó: "inducción en la construcción". Todos estos tipos de inducción mencionados anteriormente se usarán en este trabajo para realizar demostraciones y definiciones.

Por lo comentado en el párrafo anterior es conveniente formular, a esta altura del trabajo, el Principio de Inducción Matemática para el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ en sus dos versiones más comunes [H-J], según [S-R-W] dicho principio se debe a Blaise Pascal (1623-1662). Luego de formular el principio se continuará con la definición de la Lógica de Primer Orden que se esta haciendo:

Teorema 2.2.3.4 (Principio de Inducción Matemática). *Para todo número natural n, sea P(n) una proposición que depende de n. Suponga que se cumplen las siguientes dos condiciones:*

(a) P(0) es verdadera.

(b) Para todo número natural k, si P(k) se verdadera, entonces P(k+1) es verdadera.

Entonces, P(n) es verdadera para todos los números naturales n.

Teorema 2.2.3.5 (Principio de Inducción Matemática fuerte). *Para todo número natural m, sea P(m) una proposición que depende de m. Suponga que, para todo número natural n,*

Si P(k) es verdadera para todo k $<$ n, entonces P(n) es verdadera.

Entonces, P(n) es verdadera para todos los números naturales n.

Una demostración de dichos principios puede hacerse por reducción al absurdo usando el hecho de que $\mathbb{N}$ es un conjunto bien ordenado. Por ejemplo en el caso de (1) se procede así : Supóngase que existe un número natural s tal que $P(s)$ es falsa. Entonces se forma el conjunto $A = \{u \in \mathbb{N} : P(u) \text{ es falsa}\}$. Como $P(s)$ es falsa, entonces $s \in A$ y por lo tanto $A \neq \emptyset$. En consecuencia, como $\mathbb{N}$ está bien ordenado, A tiene un menor elemento. Sea $w \in A$ dicho menor elemento. $w > 0$ por la hipótesis (a) del Principio. Como w es el menor elemento de A, se tiene que $P(w-1)$ es verdadera. Entonces, aplicando la hipótesis (b) del Principio, se concluye que $P(w)$ es verdadera. En consecuencia, $w \notin A$. Contradicción.

En la siguiente sección (3) se formularán algunas generalizaciones del Principio de Inducción Matemática (llamadas “Inducción transfinita”), todas ellas de una sobresaliente utilidad en investigaciones lógicas y matemáticas. Ahora se continuará con la definición de la Lógica de Primer Orden que se esta realizando:

Se dice que una ocurrencia de una variable en una fórmula es *libre* si esta ocurrencia no está bajo el alcance de algún cuantificador. Y dicha ocurrencia es *ligada* en caso contrario: Si ella está bajo el alcance de algún cuantificador.

Según esta definición es evidente que una variable puede tener ocurrencias libres y ocurrencias ligadas en una fórmula. Una definición inductiva de estas nociones puede encontrarse en [D2]. Con los dos conceptos anteriores se define cuándo una variable está libre en una fórmula: Una variable está libre en una fórmula si ella tiene al menos una ocurrencia libre en dicha fórmula. En caso contrario se dice que dicha variable no está libre en la fórmula.

Dada una fórmula ϕ se escribe $\phi(y_1, \ldots, y_n)$ para indicar que las variables libres de ϕ están entre $y_1, \ldots, y_n$. Si $\phi(y)$ es una fórmula y t es un término se dice que t es *substituible* por y en ϕ si ninguna variable de t queda ligada al sustituir las ocurrencias libres de y por t en ϕ. La fórmula que resulta de sustituir un término t por una variable y en una fórmula ϕ se denota por ϕ_t^y o por $S_t^y\phi$.

2.2.4 Satisfacción y Verdad en una estructura

Se sabe que los términos del lenguaje denotan objetos en una estructura y que las fórmulas afirman hechos relativos a estos objetos en dicha estructura, en esta subsubsección se definirán rigurosamente estas nociones. Después se definirá (entre otros conceptos) cuándo una fórmula es verdadera y cuando es falsa en una estructura.

Definición 2.2.4.1. *Sea $\mathfrak{C}$ una estructura para $\mathcal{L}$ y $s : VAR \longrightarrow C$. Se define el valor de un término de $\mathcal{L}$ en $\mathfrak{C}$ según s inductivamente en la complejidad del término. Dado un término t se denotará este valor por $t_{\mathfrak{C}}[s]$ y se omitirá mencionar la estructura $\mathfrak{C}$ en los casos donde no exista posibilidad de ambiguedad.*

(i) Si t es la variable v, $t_{\mathfrak{C}}[s] = s(v)$.

(ii) Si t es el símbolo constante c, $t_{\mathfrak{C}}[s] = c^{\mathfrak{C}}$.

(iii) Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos, g es un símbolo funcional n-ario y $t = g(t_1, \ldots, t_n)$, entonces $t_{\mathfrak{C}}[s] = g^{\mathfrak{C}}(t_{1\mathfrak{C}}[s], \ldots, t_{n\mathfrak{C}}[s])$.

Informalmente, el valor de t en $\mathfrak{C}$ según s, es el elemento de C denotado por t cuando asignamos a la variables de t valores según s.

De lo anterior se desprende que si s y s' coinciden en las variables que aparecen en el término t, entonces $t_{\mathfrak{C}}[s] = t_{\mathfrak{C}}[s']$.

Sea $\mathfrak{C}$ una estructura para $\mathcal{L}$, $s : VAR \longrightarrow C$ y ϕ una fórmula de $\mathcal{L}$. Se procede a definir lo que significa que s satisface a ϕ en $\mathfrak{C}$, lo que se denota por $\mathfrak{C} \models \phi[s]$. El siginificado intuitivo de $\mathfrak{C} \models \varphi[s]$ es que el resultado de sustituir en ϕ las variables libres por sus valores según s, es una afirmación verdadera en $\mathfrak{C}$.

La definición se hace aplicando inducción en la construcción de las fórmula ϕ.

Definición 2.2.4.2. *(Caso base)*

(1) Si ϕ es una fórmulas atómica, es decir, $\phi = t_1 \equiv t_2$ o $\phi = S(t_1, \ldots, t_n)$, entonces:

(1.1) $\mathfrak{C} \models t_1 \equiv t_2[s] \iff t_{1\mathfrak{C}}[s] = t_{2\mathfrak{C}}[s]$.

(1.2) $\mathfrak{C} \models S(t_1, \ldots, t_n)[s] \iff S^{\mathfrak{C}}(t_{1\mathfrak{C}}[s], \ldots, t_{n\mathfrak{C}}[s])$.

(Caso inductivo)

(2) Si $\phi = \neg\chi$ *o* $\phi = \chi \to \sigma$ *o* $\phi = \chi \wedge \sigma$ *ó* $\phi = \chi \vee \sigma$ *o* $\phi = \chi \leftrightarrow \sigma$, *donde* χ *y* σ *son fórmulas para las cuales se ha definido lo que se quiere, entonces:*

(2.1) $\mathfrak{C} \models (\neg\chi)[s] \iff \mathfrak{C} \not\models \chi[s]$.

(2.2) $\mathfrak{C} \models (\chi \to \sigma)[s] \iff \mathfrak{C} \not\models \chi[s]$ *o* $\mathfrak{C} \models \sigma[s]$.

(2.3) $\mathfrak{C} \models (\chi \wedge \sigma)[s] \iff \mathfrak{C} \models \chi[s]$ *y* $\mathfrak{C} \models \sigma[s]$.

(2.4) $\mathfrak{C} \models (\chi \vee \sigma)[s] \iff \mathfrak{C} \models \chi[s]$ *o* $\mathfrak{C} \models \sigma[s]$.

(2.5) $\mathfrak{C} \models (\chi \leftrightarrow \sigma)[s] \iff \{\mathfrak{C} \models \chi[s]$ *y* $\mathfrak{C} \models \sigma[s]\}$ *o* $\{\mathfrak{C} \not\models \chi[s]$ *y* $\mathfrak{C} \not\models \sigma[s]\}$.

(2.6) $\mathfrak{C} \models ((\forall v)\chi)[s] \iff \mathfrak{C} \models \chi[s']$ *para toda* $s' : VAR \longrightarrow C$ *que difiere de* s *a lo sumo en la variable* v.

(2.7) $\mathfrak{C} \models ((\exists v)\chi)[s] \iff \mathfrak{C} \models \chi[s']$ *para alguna* $s' : VAR \longrightarrow C$ *que difiere de* s *a lo sumo en la variable* v.

Definición 2.2.4.3. *Sea $\mathfrak{C}$ una estructura para $\mathcal{L}$ y ϕ una fórmula de $\mathcal{L}$.*

(1) ϕ es verdad en $\mathfrak{C}$ si y sólo si $\mathfrak{C} \models \varphi[s]$, para toda $s : VAR \longrightarrow C$. Esto también se expresa diciendo que $\mathfrak{C}$ es un modelo de ϕ y se denota por $\mathfrak{C} \models \phi$.

(2) ϕ es falsa en $\mathfrak{C}$ si y sólo si $\mathfrak{C} \not\models \phi[s]$, para toda $s : VAR \longrightarrow C$.

(3) Si Γ es un conjunto de fórmulas, se dice que $\mathfrak{C}$ es un modelo de Γ si toda fórmula $\phi \in \Gamma$ es verdad en $\mathfrak{C}$.

Es importante resaltar que si ϕ es una fórmula con variables libres $v_{i1}, \ldots, v_{im}$, entonces el que $s : VAR \longrightarrow C$ satisfaga a ϕ en $\mathfrak{C}$ sólo depende de los valores de s en las variables $v_{i1}, \ldots, v_{im}$. Si $a_1 = s(v_{i1}), \ldots, a_m = s(v_{im})$, entonces se escribirá $\mathfrak{C} \models \phi[a_1, \ldots, a_m]$ en vez de $\mathfrak{C} \models \phi[s]$.

2.2.5 Validez, Consecuencia lógica

Definición 2.2.5.1. *(1) ϕ es lógicamente válida si es verdad en toda estructura (interpretación).*

(2) ϕ es satisfacible si existe una estructura $\mathfrak{C}$ y una $s : VAR \longrightarrow C$ tal que $\mathfrak{C} \models \phi[s]$.

(3) ϕ es contradictoria si $\neg\phi$ es lógicamente válida, es decir, si ϕ es falsa en toda estructura.

Definición 2.2.5.2. *Sea* Γ *un conjunto de fórmulas de* $\mathcal{L}$ *y* ϕ *una fórmula de* $\mathcal{L}$*. Se dice que* ϕ *es una consecuencia lógica de* Γ *o que* Γ *implica lógicamente a* ϕ*, y se denota por,*

$$\Gamma \models \phi,$$

si para cada interpretación $\mathfrak{C}$ *de* $\mathcal{L}$*, si toda fórmula de* Γ *es verdad en* $\mathfrak{C}$ *entonces* ϕ *es verdad en* $\mathfrak{C}$*. Se cumple que si* $\emptyset \models \phi$*, entonces* ϕ *es lógicamente válida.*

A continuación se listan algunos resultados que son consecuencia directa de la definición de satisfación:

(1) Una fórmula ϕ es falsa en una interpretación $\mathfrak{C}$ si y sólo si $\neg\phi$ es verdad en $\mathfrak{C}$.

(2) ϕ es verdad en $\mathfrak{C}$ si y sólo si $\forall v\phi$ es verdad en $\mathfrak{C}$.

(3) Si $\phi \to \chi$ y ϕ son verdad en $\mathfrak{C}$, entonces χ es verdad en $\mathfrak{C}$.

(4) Cualquier instancia de una tautología de la Lógica proposicional es verdad en cualquier estructura. (Una demostración de este hecho puede conseguirse en [D2]).

Un ejemplo de una tautología del la Lógica proposicional es la proposión:

$$A \to (B \to A),$$

donde A y B son variables proposicionales. Y una instancia de esta tautología se obtiene sustituyendo de manera uniforme fórmulas del lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ por las variables A y B. Por ejemplo:

$$\forall x T(x) \to ((K(y) \wedge U(x, y, z)) \to \forall x T(x))$$

Nota: Se define a continuación la sintaxis y la semántica de la Lógica proposicional y aunque se usarán meta-variables iguales a las usadas para denotar fórmulas de la Lógica de primer orden en este caso no denotan fórmulas de primer orden sino proposiciones de la Lógica proposicional.

El lenguaje de la Lógica proposicional se define usando inducción (de manera análoga al lenguaje de la Lógica de Primer Orden):

Sea $q_0, q_1, q_2, \ldots$ un conjunto numerable de letras proposicionales. Con estas letras, más las conectivas y los paréntesis, se define lo que es una proposición como sigue:

(i) Toda letra proposional es una proposición.

(ii) Si ϕ y χ son proposiciones, entonces $(\neg\phi)$, $(\phi \vee \chi)$, $(\phi \wedge \chi)$,$(\phi \rightarrow \chi)$ y $(\phi \leftrightarrow \chi)$ son proposiciones.

(iii) Sólo son proposiciones las sucesiones finitas de símbolos que se puedan construir aplicando una cantidad finita de veces las cláusulas (i), (ii) y (iii).

El conjunto de todas las proposiciones se denota por $PROP$.

Para formular el concepto de *Tautología* se presenta primero el concepto de *Valuación* o *Interpretación*, pues lo supone:

Una *Valuación* (o *Interpretación*) es una función $\mathcal{W} : PROP \longrightarrow \{V, F\}$ que preserva las conectivas, es decir, que satisface las siguientes cinco cláusulas:

(1) $\mathcal{W}(\neg\phi) = V \Longleftrightarrow \mathcal{W}(\phi) = F.$

(2) $\mathcal{W}(\phi \to \chi) = V \Longleftrightarrow \mathcal{W}(\phi) = F$ o $\mathcal{W}(\chi) = V$.

(3) $\mathcal{W}(\phi \wedge \chi) = V \Longleftrightarrow \mathcal{W}(\phi) = V$ y $\mathcal{W}(\chi) = V$.

(4) $\mathcal{W}(\phi \vee \chi) = V \Longleftrightarrow \mathcal{W}(\phi) = V$ o $\mathcal{W}(\chi) = V$.

(5) $\mathcal{W}(\phi \leftrightarrow \chi) = V \Longleftrightarrow \{\mathcal{W}(\phi) = V$ y $\mathcal{W}(\chi) = V\}$ o $\{\mathcal{W}(\phi) = F$ y $\mathcal{W}(\chi = F\}$.

Una proposición ϕ es una *tautología* si $\mathcal{W}(\phi) = V$, para toda valuación $\mathcal{W}$. Una proposición ϕ es una *contradicción* si $\mathcal{W}(\varphi) = F$, para toda valuación $\mathcal{W}$. Una proposición ϕ es *satisfacible* si existe una valuación $\mathcal{W}$ tal que $\mathcal{W}(\phi) = V$ (es decir, si ϕ no es una contradicción).

Existen varios procedimientos efectivos para decidir cuando una proposición es *tautología*, *contradicción* o *satisfacible*, entre ellos se encuentran los métodos de *Tablas de verdad*, *Forma normal conjuntiva* o *Forma normal disyuntiva*, *Tablas (Árboles) semánticos*, *Resolución*, etc. Una descripción contemporánea del primer método puede encontrarse en [Co], [Gar], [M-H], [Me], [D2] y [N-S]. Una descripción contemporánea del segundo método puede encontrarse [Gar], [Co], [Me] y [D2]. Una descripción contemporánea del tercero puede encontrarse en [M-H], [Gar], [Me] y [N-S]. Y una descripción del cuarto puede encontrarse en [M-H] y [Gar].

Ahora se procede a definir la importante relación de *Consecuencia lógica* para la lógica proposicional:

Sea Γ un conjunto de proposiciones y ϕ una proposición. Se dice que ϕ es una *Consecuencia lógica de* Γ, y se simboliza así,

$$\Gamma \models \phi,$$

si $\mathcal{W}(\phi) = V$, para toda valuación que satisface $\mathcal{W}(\chi) = V$ para toda $\chi \in \Gamma$.

Notar que $\emptyset \models \varphi$ si y sólo si φ es una tautología. En vez de $\emptyset \models \varphi$ se escribirá $\models \varphi$.

2.2.6 Otras relaciones entre estructuras: Inmersión elemental y Submodelo elemental

Inmersión elemental:

Sean $\mathfrak{C} = \langle C, < S_\mu^{\mathfrak{C}} >_{\mu\in\delta}, < g_\beta^{\mathfrak{C}} >_{\beta\in\gamma}, < d_\mu^{\mathfrak{C}} >_{\mu\in\zeta}\rangle$, y $\mathfrak{D} = \langle D, < S_\mu^{\mathfrak{D}} >_{\mu\in\delta}$ $, < g_\beta^{\mathfrak{D}} >_{\beta\in\gamma}, < d_\mu^{\mathfrak{B}} >_{\mu\in\zeta}\rangle$ dos estructuras para un lenguaje $\mathcal{L}$. Se dice que una función $f : C \longrightarrow D$ es una *inmersión elemental* de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$ si y sólo si f es inyectiva y satisface las siguientes cuatro propiedades:

(1) Para cada símbolo relacional S_μ de $\mathcal{L}$, si n es la aridad de S_μ, entonces para cada $(c_1, \ldots, c_n) \in C^n$:

$$S_\mu^{\mathfrak{C}}(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow S_\mu^{\mathfrak{D}}(f(c_1), \ldots, f(c_n)).$$

(2) Para cada símbolo funcional g_β de $\mathcal{L}$, si n es la aridad de g_β, entonces para cada $(c_1, \ldots, c_n) \in C^n$:

$$f(g_\beta^{\mathfrak{C}}(c_1, \ldots, c_n)) = g_\beta^{\mathfrak{D}}(f(c_1), \ldots, f(c_n)).$$

(3) Para cada símbolo constante d_μ de $\mathcal{L}$ se tiene que:

$$f(d_\mu^{\mathfrak{C}}) = d_\mu^{\mathfrak{D}}.$$

(4) Para cada fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}$ y para cada $(c_1, \ldots, c_n) \in C^n$:

$$\mathfrak{C} \models \phi[c_1, \ldots, c_n] \Leftrightarrow \mathfrak{D} \models \varphi[f(c_1), \ldots, f(c_n)].$$

Se dice que $\mathfrak{C}$ está *inmersa elementalmente* en $\mathfrak{D}$ si existe una inmersión elemental de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$. En otras palabras, esto significa que $\mathfrak{D}$ contiene una subestructura $\mathfrak{F}$ que es isormorfa a $\mathfrak{C}$. La estructura de los racionales con su orden usual $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ está inmersa elementalmente en $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$.

Submodelo elemental:

Sea $\mathfrak{A}$ una subestructura de $\mathfrak{B}$. Se dice que $\mathfrak{A}$ es una *subestructura elemental* o un *submodelo elemental* de $\mathfrak{B}$, y se denota,

$$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B},$$

si para cualquier fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y para cada $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

Dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ se dice que son *elementalmente equivalentes* si ellas satisfacen las mismas sentencias.

Un resultado clave en la construcción de submodelos elementales es el siguiente: Un subconjunto $A \subseteq B$ forma un submodelo elemental de $\mathfrak{B}$ si y sólo si para cualquier fórmula $\varphi(u, x_1, \ldots, x_n)$, y para cualquier $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$\exists b \in B \mathfrak{B} \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n) \Longrightarrow \exists b \in A \mathfrak{B} \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n). \quad (\spadesuit)$$

Una función $h : B^n \longrightarrow B$ es una *función de Skolem* para φ si:

$$\exists b \in B \mathfrak{B} \models \varphi(b, b_1, \ldots, b_n) \Longrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(h(b_1, \ldots, b_n), b_1, \ldots, b_n),$$

para cualquier $b_1, \ldots, b_n \in B$. Usando el Axioma de elección, se puede construir una función de Skolem para cualquier φ. Si un subconjunto $A \subseteq B$ es cerrado bajo las funciones de Skolem de de todas las fórmulas del lenguaje, entonces A satisface ($\spadesuit$), y por lo tanto forma un submodelo elemental de $\mathfrak{B}$.

En la siguiente sección (3) se utilizará una versión de este método de funciones de Skolem para construir "submodelos elementales" de la Jeraquía acumulativa de conjuntos de von Neumann (el universo $\mathbf{V}$). Pero dichos "submodelos elementales" son sólo para una cantidad finita de fórmulas de ZFC. Esta versión del teorema que se demostrará se llama *Principio de Reflexión.*

2.3 Un Sistema Axiomático correcto y completo para la Lógica de Primer Orden

¿ La Lógica de Primer Orden es axiomatizable?. **La respuesta es que sí**, al igual que la Lógica Proposicional, pero diferente (por ejemplo) a la Aritmética, al Análisis, a la Teoría de Conjuntos, a la Lógica de Segundo orden, a las Lógicas con cuantificadores generalizados y a las lógicas infinitarias, las cuales no son axiomatizables. Y existen varios sistemas axiomáticos completos y correctos para la Lógica de Primer Orden, a continuación se presenta uno ellos, el sistema axiomático presentado por Enderton en [E2].

AXIOMAS LÓGICOS

(ESQUEMAS DE AXIOMAS)

Los Axiomas lógicos son todas las generalizaciones de fórmulas de la formas siguientes, donde x, y son variables y ϕ y χ son fórmulas (Definición: ϕ es una generalización de χ si ϕ es $\forall x_1, \ldots, x_n \chi$, para variables $x_1, \ldots, x_n$):

(1) Todas las instancias de tautologías de la Lógica proposicional.

(2) $\forall x \phi \to \phi_t^x$, donde t es substituible por x en ϕ.

(3)$\forall x(\phi \to \chi) \to (\forall x \phi \to \forall x \chi)$.

(4) $\phi \to \forall x \phi$, donde x no ocurre libre en ϕ.

(5) $y \equiv y$.

(6) $(x \equiv y) \to (\phi \to \phi^{'})$, donde ϕ es una fórmula atómica y $\phi^{'}$ se obtiene de ϕ al reemplazar x por y en cero o más lugares (aunque no necesariamente en todos).

REGLA DE INFERENCIA

Modus Ponens: A partir de $\phi \to \chi$ y ϕ se puede inferir χ.

Definición 2.3.1. *Sea Γ un conjunto de fórmulas y ϕ una fórmula. Se dice que ϕ se deduce de Γ o que ϕ se demuestra a partir de Γ, lo que se denota por,*

$$\Gamma \vdash \phi,$$

si existe una sucesión finita $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ de fórmulas tales que $\sigma_m = \phi$, y cada σ_i es un axioma, o es un miembro de Γ, o se obtiene de dos fórmulas anteriores en la sucesión por la regla de inferencia Modus Ponens.

Si $\Gamma = \emptyset$*, entonces se escribe* $\vdash \phi$ *en lugar de* $\emptyset \vdash \phi$*.*

SE INTRODUCEN EL RESTO DE LAS CONECTIVAS Y EL CUANTIFICADOR EXISTECIAL POR DEFINICIÓN

(Definición 1) $(\phi \wedge \chi)$ por $\neg(\phi \rightarrow \neg\chi)$

(Definición 2) $(\phi \vee \chi)$ por $\neg\phi \rightarrow \chi$

(Definición 3) $(\phi \leftrightarrow \chi)$ por $(\phi \rightarrow \chi) \wedge (\chi \rightarrow \phi)$

(Definición 4) $\exists v\phi$ por $\neg\forall v\neg\phi$

2.3.1 Algunos Metateoremas del Sistema Axiomático

A continuación se enuncian algunos teoremas (metateoremas) muy útiles sobre el sistema axiomático que se presentó anteriormente, una prueba de los mismos puede encontrarse en [E2], [D2], [Me], [Ham] (en algunos casos hay que hacer las adaptaciones pertinentes para que la demostración se pueda hacer en el sistema presentado de [E2]):

Teorema 2.3.1.1. $\Sigma \vdash \phi$ *si y sólo si* $\Sigma \cup \{Axiomas\} \models \phi$*, donde* $\Sigma \cup \{Axiomas\} \models \phi$ *es la relación de consecuencia lógica de la lógica proposicional.*

Teorema 2.3.1.2 (Teorema de Generalización). *Si* $\Sigma \vdash \phi$ *y* x *no ocurre libre en ninguna fórmula de* Σ*, entonces* $\Sigma \vdash \forall x \phi$.

Teorema 2.3.1.3 (Teorema de la deducción). *Si* $\Sigma \cup \{\chi\} \vdash \phi$ *si y sólo si* $\Sigma \vdash (\chi \to \phi)$.

Teorema 2.3.1.4 (Contraposición). $\Sigma \cup \{\chi\} \vdash \neg\phi$ *si y sólo si* $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \neg\chi$.

Para enunciar el siguiente teorema se necesita una definición previa. Definición: Sea Σ un conjunto de fórmulas para un lenguaje $\mathcal{L}$. Σ es *inconsistente* (*o contradictorio*) si para alguna fórmula ϕ se tiene que $\Sigma \vdash \phi$ y $\Sigma \vdash \neg\phi$. Σ es *consistente* si no es inconsistente.

Teorema 2.3.1.5 (Reducción al absurdo). *(1)* $\Sigma \cup \{\chi\}$ *es inconsistente si y sólo si* $\Sigma \vdash \neg\chi$.

(2) $\Sigma \cup \{\neg\chi\}$ *es inconsistente si y sólo si* $\Sigma \vdash \chi$.

Teorema 2.3.1.6 (Leyes de la relación de identidad $\equiv$). *(i)* $\forall y(y \equiv y)$

(ii) $\forall y \forall z(y \equiv z \to z \equiv y)$

(iii) $\forall y \forall z \forall w((y \equiv z \wedge z \equiv w) \to y \equiv w)$

(iv) $\forall y \forall z(y \equiv z \to (\phi(y) \leftrightarrow \phi(z))$*, para cualquier fórmula* ϕ.

Teorema 2.3.1.7 (Teorema de existencia de varibles afabéticas (Cambio de variables ligadas)). *Sea* ϕ *una fórmula,* t *un término y* x *una varible. Entonces se puede encontrar una fórmula* ϕ'*, que difiere de* ϕ *sólo en la elección de las variables cuantificadas, tal que:*

(1) $\vdash \phi \leftrightarrow \phi'$

(2) t es sustituible por x en ϕ'.

Teorema 2.3.1.8 (Generalización sobre constantes). *Si* $\Sigma \vdash \phi$ *y c es un símbolo cosntante que no ocurre en* Σ*, entonces existe una variable y que no ocurre en* ϕ *tal que* $\Sigma \vdash \forall y \phi_y^c$*. Además, existe una deducción de* $\forall y \phi_y^c$ *a partir de* Σ *en la que no ocurre c.*

Teorema 2.3.1.9 (Corolario del Teorema de Generalización de constantes). *Si* $\Sigma \vdash \phi_c^x$ *y c es un símbolo cosntante que no ocurre en* Σ *ni en* ϕ*, entonces* $\Sigma \vdash \forall x \phi$*, y existe una deducción de* $\forall x \phi$ *a partir de* Σ *en la que no ocurre c.*

Teorema 2.3.1.10 (Instanciación existencial). *Supongamos que el símbolo constante c no ocurre en* ϕ*, ni en* χ*, ni en* Σ*; y ocurre que,*

$$\Sigma \cup \{\phi_c^x\} \vdash \chi,$$

Entonces,

$$\Sigma \cup \{\exists x \phi\} \vdash \chi.$$

Teorema 2.3.1.11 (Introducción de existencial). $\phi(t) \vdash \exists x \phi(x)$*, donde t es un término sustituible por x en* ϕ*.*

Teorema 2.3.1.12 (Regla de reemplazo). *Sean* ϕ *y* θ *dos fórmulas, y supongamos* χ' *resulta de* χ *sustituyendo* ϕ *por* θ *(en una o más apariones de* ϕ *en* χ*). Por lo tanto: Si* $\vdash \phi \leftrightarrow \theta$*, entonces,* $\vdash \chi \leftrightarrow \chi'$*.*

2.4 Forma normal prenexa

A continuación se introduce el concepto de *forma normal prenexa* (Hacia 1910, atribuido a Skolem y a Behmann [Q] [Hij]), un concepto muy importante para estudiar (por ejemplo) problemas de decidibilidad de la Lógica de Primer Orden [Mos2], [Ch], [H-A], [N-S], [Ra].

Definición 2.4.1. *Una fórmula de la forma $Q_1y_1Q_2y_2\ldots Q_ny_n\varphi$, donde cada Q_iy_i es $\forall y_i$ o $\exists y_i$, $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$, y φ no contiene cuantificadores, se dice que está en forma normal prenexa. La fórmula φ se llama matriz de la fómula y la secuencia de cuantificadores $Q_1y_1Q_2y_2\ldots Q_ny_n$ se llama el prefijo de la fórmula.*

Uno de los resutados principales sobre forma normal prenexa que tiene muchas aplicaciones es el siguiente Teorema:

Teorema 2.4.2 (Teorema de Forma normal prenexa). *Existe un procedmiento efectivo para transformar cualquier fórmula ψ en una fórmula ψ' en forma normal prenexa tal que $\vdash \psi \leftrightarrow \psi'$.*

La demostración del Teorema se hace por inducción y requiere de un Lema previo cuya prueba se puede hacer sin ninguna difultad haciendo uso del los axiomas del sistema axiomático, y en especial, utilizando los metateoremas del mismo que se presentaron en la sección anterior, una prueba de algunas cláusulas del Lema puede encontrarse en [Me]:

Lema 2.4.3 (Leyes de negación y distribución de los cuantificadores).

1. $\vdash \neg\forall x\varphi(x) \leftrightarrow \exists x\neg\varphi(x)$

2. $\vdash \neg\exists x\varphi(x) \leftrightarrow \forall x\neg\varphi(x)$

Las siguientes proposiciones valen si la variable x no está libre en φ:

3. $\vdash (\varphi \wedge \forall x\chi(x)) \leftrightarrow \forall x(\varphi \wedge \chi(x))$

4. $\vdash (\varphi \vee \forall x\chi(x)) \leftrightarrow \forall x(\varphi \vee \chi(x))$

5. $\vdash (\varphi \wedge \exists x\chi(x)) \leftrightarrow \exists x(\varphi \wedge \chi(x))$

6. $\vdash (\varphi \vee \exists x\chi(x)) \leftrightarrow \exists x(\varphi \vee \chi(x))$

7. $\vdash (\varphi \rightarrow \forall x\chi(x)) \leftrightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \chi(x))$

8. $\vdash (\varphi \rightarrow \exists x\chi(x)) \leftrightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \chi(x))$

9. $\vdash (\forall x\chi(x) \rightarrow \varphi) \leftrightarrow \exists x(\chi(x) \rightarrow \varphi)$

10. $\vdash (\exists x\chi(x) \rightarrow \varphi) \leftrightarrow \forall x(\chi(x) \rightarrow \varphi)$

Una vez que se cuenta con el Lema se procede a demostrar el teorema por inducción:

Demostración del Teorema: ([Me])

Se realizará la prueba por inducción en el rango= número de conectivas y cuantificadores. Se demostrará que $\forall n \in \mathbb{N} \forall \chi \in FORM(rango(\chi) = n \rightarrow P(\chi))$, donde $FORM$ es el conjunto de las fórmulas del lenguaje y P es la propiedad que describe el Teorema.

Caso base: $n = 0$. Se probará que $\forall \chi \in FORM(rango(\chi) = 0 \rightarrow P(\chi))$. Sea una fórmula σ tal que rango(σ)=0. Entonces σ es una fórmula atómica y $\sigma' = \sigma$. Lo que es quería probar.

Caso inductivo: Sea $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$, y supóngase para toda $s < m$ se cumle que $\forall \chi \in FORM(rang(\chi) = s \rightarrow P(\chi))$. Se debe probar que $\forall \chi \in FORM(rang(\chi) = m \rightarrow P(\chi))$.

Sea σ una fórmula de rango m. Por definición $\sigma = \neg\alpha$ o $\sigma = \alpha \rightarrow \beta$ o $\sigma = \forall x\alpha$

Caso 1: $\sigma = \neg\alpha$. Entonces como $rango(\alpha) < m$, se tiene por Hipótesis inductiva que existe una una fórmula en forma normal prenexa α' tal que $\vdash \alpha \leftrightarrow \alpha'$. Entonces $\vdash \neg\alpha \leftrightarrow \neg\alpha'$. Luego, sustituyendo se tiene que $\vdash \sigma \leftrightarrow \neg\alpha'$. Entonces aplicando reiteradamente las leyes de negación de cuantificadores a $\neg\alpha'$ se tiene una fórmula γ en forma normal prenexa tal que $\vdash \sigma \leftrightarrow \gamma$.

Caso 2: $\sigma = \alpha \rightarrow \beta$. Entonces como $rango(\alpha) < m$ y $rango(\beta) < m$, se tiene por Hipótesis que existen fórmulas en forma normal prenexa α' y β' tal que $\vdash \alpha \leftrightarrow \alpha'$ y $\vdash \beta \leftrightarrow \beta'$. Por lo tanto, $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha' \rightarrow \beta')$. Entonces $\vdash \sigma \leftrightarrow (\alpha' \rightarrow \beta')$. Luego, aplicando reiteradamente las leyes distribución de cuantificadores para la implicación se le exteriorizan todos los cuantificadores de las fórmula $\alpha' \rightarrow \beta'$ y queda una fórmula γ en forma normal prenenexa tal que $\vdash \sigma \leftrightarrow \gamma$.

Caso 3: $\sigma = \forall x\alpha$. Entonces como $rango(\alpha) < m$, se tiene por Hipótesis inductiva que existe una una fórmula en forma normal prenexa α' tal que $\vdash \alpha \leftrightarrow \alpha'$. Por lo tanto, por la regla de generalización se concluye que $\vdash \forall x(\alpha \leftrightarrow \alpha')$. En consecuencia, por la ley de distribución de cuantificadores, $\vdash \forall x(\lambda \leftrightarrow \eta) \rightarrow (\forall x\lambda \leftrightarrow \forall x\eta)$, se concluye que $\vdash \forall x\alpha \leftrightarrow \forall x\alpha'$. Entonces, sustituyendo se tiene que $\vdash \sigma \leftrightarrow \forall x\alpha'$. Y como $\forall x\alpha'$ está en formal normal prenexa ha finalizado la prueba del Teorema. $\square$

Un ejemplo de forma normal prenexa es el siguiente [N-S]: Encuentre una proposición en forma forma normal prenexa correspondiente a la siguiente proposición $\forall x\exists yP(x,y) \vee \neg\exists x\forall yQ(x,y)$:

Una forma de hacerlo es la siguiente [N-S]:

1. $\forall x\exists yP(x,y) \vee \neg\exists x\forall yQ(x,y)$

2. $\forall u[\exists y P(u,y) \vee \neg\exists x\forall y Q(x,y)]$
3. $\forall u\exists v[P(u,v) \vee \neg\exists x\forall y Q(x,y)]$
4. $\forall u\exists v[P(u,v) \vee \forall x\exists y\neg Q(x,y)]$
5. $\forall u\exists v\forall w[P(u,v) \vee \exists y\neg Q(w,y)]$
6. $\forall u\exists v\forall w\exists z[P(u,v) \vee \neg Q(w,z)$

Otra forma de hacerlo es la siguiente (notar que este ejemplo muestra que la forma normal prenexa de una proposición no es única) [N-S]:

1. $\forall x\exists y P(x,y) \vee \neg\exists x\forall y Q(x,y)$
2. $\forall u[\exists y P(u,y) \vee \neg\exists x\forall y Q(x,y)$
3. $\forall u[\exists y P(u,y) \vee \forall x\neg\forall y Q(w,y)$
4. $\forall u\forall w[\exists y P(u,y) \vee \neg\forall y Q(w,y)$
5. $\forall u\forall w\exists v[P(u,v) \vee \neg\forall y Q(w,y)]$
6. $\forall u\forall w\exists v[P(u,v) \vee \exists y\neg Q(x,y)]$
7. $\forall u\forall w\exists v\exists z[P(u,v) \vee \neg Q(x,z)]$

2.5 Forma normal de Skolem

La técnica de Forma normal de Skolen se le atribuye (como su nombre lo indica) a Skolem (1887-1963) [Q] [Hij].

Definición 2.5.1. *Un fórmula en Forma normal prenexa se dice que está en Forma normal de Skolem si todos sus cuantificadores existenciales preceden a todos sus cuantificadores universales, es decir, si ella tiene la siguiente:*

$$\exists u_1\exists u_2,\ldots,\exists u_m\forall w_1\forall w_2,\ldots,\forall w_n M(u_1,u_2,\ldots,u_m,w_1,w_2,\ldots,w_n),$$

donde $m \geq 0$, $n \geq 0$.

(Nota: Existe otro concepto de Forma normal de Skolem que elimina los cuantificadores existenciales sustituyéndolos por nuevos símbolos de función, ver texto [N-S].)

El siguiente Teorema de Forma normal de Skolem se demuestra para el *Cálculo de predicados puro* como se hace en [Me], es decir, se prueba para lenguajes de primer orden que tienen una cantidad infinita de predicados poliádicos de cualquier aridad, pero no tienen símbolos funcionales, ni constantes, ni la relación de identidad.

Teorema 2.5.2 (Forma normal de Skolem). *Existe un procedimiento efectivo para asignar a cada fórmula φ otra fórmula φ' en Forma normal de Skolem tal que $\vdash \varphi$ si y sólo si $\vdash \varphi'$.*

Demostración : ([Me], [EP])

Como toda fórmula es demostrable si y sólo si su clausura universal lo es, y también, por el Teorema anterior, toda fórmula tiene una fórmula equivalente en forma normal prenexa, entonces se puede demostrar el teorema considerando sólo fórmulas cerradas en forma normal prenexa. Sea χ una fórmula de dicha clase (χ está en forma normal prenexa y no tiene variables libres), entonces se define el *Rango*(χ)= número de cuantificadores universales que preceden cuantificadores existenciales. La prueba se realizará por inducción en el *Rango*(χ), se demostrará que $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall \phi \in FORM(Rango(\phi) = n \rightarrow P(\phi))$, donde P es la propiedad que describe el Teorema.

Caso base: $n = 0$. Se debe demostrar que $\forall \phi \in FORM(Rango(\phi) = 0 \rightarrow P(\phi))$. Sea σ tal que $Rango(\sigma) = 0$. Entonces σ ya está en Forma normal de Skolem.

Caso inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, y supongamos que para cada $s < k$ se cumple que $\forall \phi \in FORM(Rango(\phi) = s \rightarrow P(\phi))$. Se probará que $\forall \phi \in FORM(Rango(\phi) = k \rightarrow P(\phi))$. Sea σ una fórmula de *Rango* k. σ se puede escribir de la siguiente forma $\exists x_1, \ldots \exists x_m \forall y \theta(x_1, \ldots, x_m, y)$, donde $\theta(x_1, \ldots, x_m, y)$ está en forma normal prenexa, tiene sólo como varibles libres a $x_1, \ldots, x_m, y$, y su prefijo tiene al menos un cuantificador existencial, pues de lo contrario σ tendría Forma normal de Skolem. Sea S una variable de predicado $m+1$-ária que no aparezca en $\theta(x_1,\ldots,x_m,y)$. Y sea β la fórmula,

$$\exists x_1,\ldots\exists x_m\{[\exists z(\theta(x_1,\ldots,x_m,z)\wedge\neg S(x_1,\ldots,x_m,z)]\ \vee\ \forall y S(x_1,\ldots,x_m,y)\}$$

Se demostrará que $\vdash\beta$ si y sólo si $\vdash\sigma$:

($\Longrightarrow$) Sea $\vdash\beta$.

Entonces sustituyendo $S(x_1,\ldots,x_m,z)$ por $\theta(x_1,\ldots,x_m,z)$ se tiene una fórmula que se llamará β':

$$\vdash\exists x_1,\ldots\exists x_m\{[\exists z(\theta(x_1,\ldots,x_m,z)\wedge\neg\theta(x_1,\ldots,x_m,z)]\vee\forall y\theta(x_1,\ldots,x_m,z)\}$$

Por otro lado, puede probarse que:

$$\vdash\{[\exists z(Q(z)\wedge\neg Q(z))\vee R]\leftrightarrow R\}$$

Entonces sustituyendo se tiene que:

$$\vdash\{[\exists z(\theta(x_1,\ldots,x_m,z)\wedge\neg\theta(x_1,\ldots,x_m,z))\ \vee\ \forall y\theta(x_1,\ldots,x_m,z)]\leftrightarrow$$
$$\forall y\theta(x_1,\ldots,x_m,z)\}$$

Entonces aplincando la regla de generalización y distribución del cuantificador universal en bicondicional $(\forall x[D(x)\leftrightarrow A(x)]\rightarrow[\exists xD(x)\leftrightarrow\exists xA(x)])$ reiteradamete m veces veces, se obtiene:

$$\vdash\exists x_1,\ldots\exists x_m\{[\exists z(\theta(x_1,\ldots,x_m,z)\wedge\neg\theta(x_1,\ldots,x_m,z)]\vee\forall y\theta(x_1,\ldots,x_m,y)\}\leftrightarrow$$
$$\{\exists x_1,\ldots\exists x_m\forall y\theta(x_1,\ldots,x_m,z)\}$$

Entonces aplicando MP de esta última prosición con β' se obtine que:

$$\vdash \exists x_1, \ldots \exists x_m \forall y \theta(x_1, \ldots, x_m, z)$$

Es decir, $\vdash \sigma$. Por lo tanto: Si $\vdash \beta$, entonces $\vdash \sigma$. Lo que se quería demostrar.

Se probará ahora la otra dirección: $(\Longleftarrow)$

Sea $\vdash \sigma$.

Sean los siguientes dos teoremas:

$$\vdash \forall y[B(y) \rightarrow A(y)] \rightarrow [\forall y B(y) \rightarrow \forall y A(y)]$$

$$\vdash R \rightarrow (T \rightarrow S) \rightarrow [T \rightarrow (\neg R \vee S)]$$

Entonces aplicando el segundo en la primero se obtiene:

$$\vdash \forall y[B(y) \rightarrow A(y)] \rightarrow [\forall y B(y) \rightarrow \forall y A(y)] \rightarrow$$

$$\forall y B(y) \rightarrow [\neg \forall y(B(y) \rightarrow A(y)) \vee \forall y A(y)]$$

En consecuencia, aplicando MP, se tiene que:

$$\vdash \forall y B(y) \rightarrow [\neg \forall y(B(y) \rightarrow A(y)) \vee \forall y A(y)]$$

Como,

$$\vdash \neg \forall y(B(y) \rightarrow A(y)) \leftrightarrow \neg \forall y \neg(B(y) \wedge \neg A(y))$$

Y,

$$\vdash \neg\forall y\neg(B(y) \wedge \neg A(y)) \leftrightarrow \exists y(B(y) \wedge \neg A(y))$$

Entonces se concluye que:

$$\vdash \forall y B(y) \rightarrow [\exists y(B(y) \wedge \neg A(y)) \vee \forall y A(y)]$$

Entonces sustituyendo las variables de predicados tenemos,

$$\vdash \forall y\theta(x_1, \ldots, x_m, y) \rightarrow$$
$$[\exists y(\theta(x_1, \ldots, x_m, y) \wedge \neg S(x_1, \ldots, x_m, y)) \vee \forall y S(x_1, \ldots, x_m, y)]$$

Luego, aplicando la regla de generalización y la ley de distribiución del universal en implicación,

$$\vdash \forall y[B(y) \rightarrow A(y)] \rightarrow [\exists y B(y) \rightarrow \exists y A(y)],$$

reiteradamente m veces, se concluye que,

$$\vdash \exists x_1, \ldots \exists x_m \forall y\theta(x_1, \ldots, x_m, y) \rightarrow$$
$$\exists x_1, \ldots \exists x_m[\exists y(\theta(x_1, \ldots, x_m, y) \wedge \neg S(x_1, \ldots, x_m, y)) \vee \forall y S(x_1, \ldots, x_m, y)]$$

En consecuencia, como el antecedente de este condicional es la fórmula σ, usando la hipótesis de que σ es un teorema, se aplica MP y se obtiene,

$$\vdash \exists x_1, \ldots \exists x_m[\exists y(\theta(x_1, \ldots, x_m, y) \wedge \neg S(x_1, \ldots, x_m, y)) \vee \forall y S(x_1, \ldots, x_m, y)]$$

De la cual se obtiene β sustituyendo la variable y por z,

$$\vdash \exists x_1, \ldots \exists x_m[\exists z(\theta(x_1, \ldots, x_m, z) \wedge \neg S(x_1, \ldots, x_m, z)) \vee \forall y S(x_1, \ldots, x_m, y)]$$

Por lo tanto, *Si* $\vdash \sigma$, entonces $\vdash \beta$. Lo que se quería demostrar. Se ha demsotrado que $\vdash \beta$ si y sólo si $\vdash \sigma$.

La fórmula β obtenida de última se puede poner en forma normal prenexa utilizando las leyes de distribución de cuantificadores de modo que su prefijo empiece por $\exists x_1, \ldots \exists x_m$, luego venga el cuantificador $\exists z$, después los cuatificadores del prefijo de $\theta(x_1, \ldots, x_m, z)$, y por último el cuantificador $\forall y$. De modo que esta nueva fórmula tiene *Rango* exactamente un número menor que el $Rango(\sigma) = k$, por lo tanto, por Hipótesis inductiva, existe una formula η en Forma norma de Skolen tal que $\vdash \beta$ si y sólo si $\vdash \eta$. Entonces: $\vdash \sigma$ si y sólo si $\vdash \eta$. Se ha conseguido la fórmula en Forma normal de Skolen con la propiedad buscada. Fin de la demostración. $\square$

Un ejemplo de Forma normal de Skolem es el siguiente [Me]: Encontrar una fórmula en Formal normal de Skolen corespondiente a $\forall x \forall y \exists z \phi(x, y, z)$:

1. Primero se elimina $\forall x$. Se considera a $\forall y \exists z \phi(x, y, z)$ que tiene la variable libre x, entonces se elige un predicado monádico $A(x) \notin \phi(x, y, z)$, entonces:

2. $\exists w\{[\forall y \exists z \phi(w, y, z) \wedge \neg A(w)] \vee \forall x A(x)\}$

3. Ahora se busca la forma normal prenexa de la fórmula anterior:

4. $\exists w \forall y \exists z \forall x\{[\phi(w, y, z) \wedge \neg A(w)] \vee A(x)\}$

5. Ahora se elimina $\forall y$ y para ello se considera la fórmula $\exists z \forall x[\phi(x, y, z) \wedge \neg A(w)] \vee A(x)\}]$, la cual tiene dos variables libres w e y. Entonces se busca un predicado binario $B(w, y) \notin \phi(x, y, w)$, entonces:

6. $\exists w\{\exists u\{[\exists z \forall x[\phi(w, u, z) \wedge \neg A(w)] \vee A(x)] \wedge \neg B(w, u)\} \vee \forall y B(w, y)\}$

7. Ahora se busca la forma normal prenexa de la fórmula anterior,

8. $\exists w \exists u \exists z \forall x \forall y \{\{[[\phi(w,u,z) \wedge \neg A(w)] \vee A(x)] \wedge \neg B(w,y)\} \vee B(y,w)\}$

9. La fórmula anterior es la Forma normal de Skolen buscada.

Corolario 2.5.3 (Corolario). *Sea φ una fórmula y φ' su fórmula en Forma normal de Skolem correspondiente. Entonces: (1) φ es verdad en una estructura si y sólo si φ' también es verdad en la estructura ampliada a los nuevos símbolos de predicados de φ'. Y (2) φ es válida si y sólo si φ' es válida.*

Demostración: La demostración es el pararalelo semántico de la demostración que se hizo en el teorema anterior: $\vdash \beta$ si y sólo si $\vdash \sigma$. En dicha prueba se puede apreciar claramente que se pasaba de teorema a teorema hasta llegar a la conclusión que se quería, y los teoremas son verdad en cualquier estrutura y el Modus Ponens transfiera a verdad de las premisas a la conclusión, es decir, si $\phi \rightarrow \psi$ y ϕ son verdad en en una estructura $\mathfrak{A}$, entonces ψ es verdad en $\mathfrak{A}$. $\square$.

2.6 Demostración de Church del Teorema de Completitud de Gödel para la Lógica de primer orden, la cual usa Forma normal de Skolem

Teorema 2.6.1 (Teorema Corrección). *Todo teorema es una fórmula válida. Es decir, para cualquier formula φ,*

$$\vdash \varphi \Longrightarrow \models \varphi.$$

Demostración:

Si $\vdash \varphi$ entonces por definición existe una sucesión $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ de fórmulas tales que $\sigma_m = \varphi$, y cada σ_i es un axioma, o se obtiene de dos fórmulas anteriores en la sucesión por la regla de inferencia Modus Ponens. Sea $\mathfrak{A}$ una estructura para el lenguaje de φ. Hay que probar que $\mathfrak{A}$ es un modelo de φ. Esto se realiza probando que $\mathfrak{A}$ es un modelo de σ_i, para cada $i \in m$. La prueba se hace fácilmente por inducción en m utilizando dos hechos: (1) Todo axioma es una fórmula lógicamente válida; y (2) El Moduns Ponens transfiere la verdad de las premisas a la consclusión. $\square$

Teorema 2.6.2 (Teorema de Completitud de Gödel, 1930). *Toda fórmula válida es un teorema. Es decir, para cada fórmula φ,*

$$\models \varphi \Longrightarrow \vdash \varphi.$$

Demostración: (Versión de Church [Ch])

Sea φ una fórmula válida y φ' su fórmula correspondiente en Forma normal de Skolem. Por el Corolario del Teorema de Forma normal de Skolem φ' es válida. Y por el Teorema de Forma normal de Skolem es suficiente con demostrar que φ' es un teorema. φ' tiene la siguiente forma:

$$\exists u_1 \exists u_2, \ldots, \exists u_m \forall w_1 \forall w_2, \ldots, \forall w_n M(u_1, u_2, \ldots, u_m, w_1, w_2, \ldots, w_n),$$

donde $m \geq 0$, $n \geq 0$, y M es una fórmula sin cuantificadores.

Se probará que: (1) φ' es un teorema o (2) φ' no es válida.

Si en el prefijo se tiene que $m = 0$, entonces φ' es una fórmula universal. Y como se conoce el siguiente hecho; **Hecho**: $\forall w_1 \forall w_2, \ldots, \forall w_n M(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ es válida si y sólo si $M(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ es válida; se puede decidir qué tipo de fórmula es $M(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ usando procedimientos efectivos de la Lógica proposicional como lo son *Tablas de verdad* o *Forma normal conjuntiva.* Si en el análisis resulta que $M(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ es una tautología, entonces por el Axioma 1, se concluye que ella es un teorema, y por la regla de geralización aplicada reiteradamente se concluye que φ' es un teorema. Si en el análisis resulta que $M(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ no es tautología, entonces se puede construir un modelo que tiene exactamente n individuos donde $M(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ no es verdadera, usando la información que brinda su tabla de verdad (por ejemplo). Por lo tanto, $M(w_1, w_2, \ldots, w_u)$ no es válida. En concecuencia, φ' no es válida. Para continuar con la demostración del Teorema se asumirá que $m \geq 1$.

Considérese el buen orden del conjunto de las m-tuplas de $\{\mathbb{N} \setminus \{0\}\}^m$ definido así: $(i_1, i_2, \ldots, i_m) < (j_1, j_2, \ldots, i_m)$ si $i_1 + i_2 + \ldots + i_m < j_1 + j_2 + \ldots + i_m$ o si $i_1 + i_2 + \ldots + i_m = j_1 + j_2 + \ldots + i_m$, entonces $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2$,…,$i_k = j_k$, $i_{k+1} < j_{k+1}$, es decir, cuando la suma de las coordenadas de dos m-tuplas dan el mismo número, se decide cuál es menor entre ellas usando el orden lexicográfico de izquierda a derecha.

Según el buen orden anterior la primera m-tupla es $(1, 1, 1, \ldots, 1, 1, 1)$, la segunda es $(1, 1, 1, \ldots, 1, 1, 2)$, la tercera es $(1, 1, 1, \ldots, 1, 2, 1)$, la cuarta es $(1, 1, 1, \ldots, 2, 1, 1)$, y así sucesivamente.

Notar que si $k \geq 1$, entonces no ocurren el la k-ésima tupla coordenadas (números naturales) mayores que k. La k-ésima tupla se expresa así $([k_1], [k_2], \ldots, [k_m])$ y se dice que la coordenada (el número natural) $[k_l]$ es la l-ésima coordenada de dicha k-tupla.

Ahora se define a $B_k \quad (k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ como sigue:

$$S^{u_1 \; u_2 \; \ldots u_m \; w_1 \; w_2 \; \ldots w_n}_{x_{[k_1]} x_{[k_2]} \ldots x_{[k_m]} \; x_{(k-1)n+2} x_{(k-1)n+3} \ldots x_{kn+1}} M$$

Es decir, B_k es la fórmula que resulta de sustituir las variables libres de la matriz M, correspondientes a los cuantificadores existenciales, por variables indizadas con los valores de la k-tupla del buen orden que se ha definido anteriormente, y las variables libres de M correspondientes a los cuantificadores universales se sutituyen por varibles cuyos subíndices son de la forma

$(k-1)n+i$, donde siempre se comienza con $i \geq 2$.

Con B_k definido ahora se define C_k $(k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ como sigue: C_k es la siguiente disyunción:

$$B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k$$

Es decir, C_k es la disyunción de los k primeros B_k.

Ahora con C_k definido, se define D_k $(k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ como sigue: D_k es la siguiente fórmula universal:

$$\forall x_1 \forall x_2, \ldots, \forall x_{kn+1} C_k$$

Notar que las variables $x_{(k-1)n+2}, x_{(k-1)n+3}, \ldots, x_{kn+1}$ sustitudidas por las variables $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son todas distintas a las varibles $x_{[k_1]}, x_{[k_2]}, \ldots, x_{[k_m]}$ sustituidas por las varibles $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Además las varibales $x_{(k-1)n+2}, x_{(k-1)n+3}, \ldots, x_{kn+1}$ son distintas (dos a dos) entre ellas mismas, y difieren de todas las variables que ocurren en $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}$. Pero todas las variables $x_1, x_2, \ldots, x_{kn+1}$ ocurren libres en C_k.

Notar que por la definición de Forma normal de Skolem es posible que $n = 0$, pero este caso especial no se genera ninguna dificultad, lo que podrían es quedar algunas variables libres en D_k. En el caso de m, se está considerando que siempre $m \geq 1$.

Dado que la matriz M no tiene cuantificadores, se infiere que B_k y C_k tampoco tienen cuantificadores. Y, excepto en el caso de $n = 0$, la lista completa de variables libres de C_k es exactamente $x_1, x_2, \ldots, x_{kn+1}$, en consecuencia, si $n > 0$, entonces D_k es la clausura universal de C_k.

Lema 2.6.3. *Para cualquier* $k : D_k \vdash \varphi'$.

Demostración: (Por inducción en k)

Se asume que ninguna de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_{kn+1}$ es igual a alguna de las variables $u_1, u_2, \ldots, u_m \quad w_1, w_2, \ldots, w_m$, esto es posible asumirlo porque se puede aplicar un cambio de variable (Teorema de cambio de variable ligada 2.3.1.7) en la Forma normal de Skolem φ' si fuera necesario.

Caso base: $k = 1$. Se debe probar que de $D_1 \vdash \varphi'$.

$$D_1 = \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \ldots \forall x_{n+1} S^{u_1 \; u_2 \; ...u_m \; w_1 \; w_2 \; ...w_n}_{x_1 \; x_1 \; ...x_1 \; x_2 \; x_3 \; ...x_{n+1}} M$$

Por el Teorema de cambio de varible ligada (2.3.1.7) se tiene que:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \ldots \forall x_{n+1} S^{u_1 \; u_2 \; ...u_m \; w_1 \; w_2 \; ...w_n}_{x_1 \; x_1 \; ...x_1 \; x_2 \; x_3 \; ...x_{n+1}} M \vdash$$

$$\forall u_1 \forall w_1 \forall w_2 \ldots \forall w_n S^{x_1 \; x_1 \; ...x_1 \; w_1 \; w_2 \; ...w_n}_{u_1 \; u_1 \; ...u_1 \; w_1 \; w_2 \; ...w_n} M$$

Entonces por *Descenso cuantificacional* ($\vdash \forall x \psi(x) \rightarrow \exists x \psi(x)$) y la regla Modus Ponens se tiene que:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \ldots \forall x_{n+1} S^{u_1 \; u_2 \; ...u_m \; w_1 \; w_2 \; ...w_n}_{x_1 \; x_1 \; ...x_1 \; x_2 \; x_3 \; ...x_{n+1}} M \vdash$$

$$\exists u_1 \forall w_1 \forall w_2 \ldots \forall w_n S^{x_1 \; x_1 \; ...x_1 \; w_1 \; w_2 \; ...w_n}_{u_1 \; u_1 \; ...u_1 \; w_1 \; w_2 \; ...w_n} M$$

Entonces aplicando *Duplicación del existencial* ($\vdash \exists x \psi(x,x) \rightarrow \exists x \exists y \psi(x,y)$) reiteradamente ($m-1$ veces) y Modus Ponens se obtiene lo que se quiere probar:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \ldots \forall x_{n+1} S^{u_1 \; u_2 \; ...u_m \; w_1 \; w_2 \; ...w_n}_{x_1 \; x_1 \; ...x_1 \; x_2 \; x_3 \; ...x_{n+1}} M \vdash$$

$$\exists u_1 \exists u_2 \ldots \exists u_m \forall w_1 \forall w_2 \ldots \forall w_n S^{x_1 \; x_1 \; ...x_1 \; w_1 \; w_2 \; ...w_n}_{u_1 \; u_2 \; ...u_m \; w_1 \; w_2 \; ...w_n} M$$

Pues

$$\varphi' = \exists u_1 \exists u_2 \ldots \exists u_m \forall w_1 \forall w_2 \ldots \forall w_n S^{x_1}_{u_1}{}^{x_1}_{u_2}{}^{\ldots x_1}_{\ldots u_m}{}^{w_1}_{w_1}{}^{w_2}_{w_2}{}^{\ldots w_n}_{\ldots w_n} M$$

Paso inductivo:

Sea $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$; y supóngase que $D_{k-1} \vdash \varphi'$. Se debe probar que $D_k \vdash \varphi'$.

Por las leyes de distibución de cuantificadores (Lema 2.4.3 (4)) reiterada n-veces se tiene que:

$$\forall x_{(k-1)n+2}, \forall x_{(k-1)n+3}, \ldots, \forall x_{kn+1}[C_{k-1} \vee B_k] \vdash$$
$$C_{k-1} \vee \forall x_{(k-1)n+2}, \forall x_{(k-1)n+3}, \ldots, \forall x_{kn+1} B_k$$

En consecuencia, como $C_{k-1} \vee B_k$ es la fórmula C_k, se concluye, aplicando el Axioma 2 (eliminación del generalizador) $(k-1)n+1$ veces y la regla Modus Ponens, que:

$$D_k \vdash$$
$$C_{k-1} \vee \forall x_{(k-1)n+2}, \forall x_{(k-1)n+3}, \ldots, \forall x_{kn+1} B_k$$

Por lo tanto, realizando un cambio de variable ligada n veces, se tiene que:

$$D_k \vdash$$
$$C_{k-1} \vee \forall w_1 \forall w_2 \ldots \forall w_n S^{u_1}_{x_{[k_1]}}{}^{u_2}_{x_{[k_2]}}{}^{\ldots u_m}_{\ldots x_{[k_m]}} M$$

Se tiene también que por la regla de Introducción del cuantificador existencial (Teorema 2.3.1.11) m veces, se concluye que:

$$\vdash \forall w_1 \forall w_2 \ldots \forall w_n S^{u_1}_{x_{[k_1]}}\,{}^{u_2}_{x_{[k_2]}}\,{}^{\ldots u_m}_{\ldots x_{[k_m]}} M \rightarrow \varphi'$$

En consecuencia:

$$D_k \vdash C_{k-1} \vee \varphi'$$

Por lo tanto, aplicando la regla de Introducción del generalizador para todas las varibales libres de C_{k-1}, es decir, hasta la variable $x_{(k-1)n+1}$, y usando la ley de distribución de cuantificadores (en disyunción), se obtiene que:

$$D_k \vdash D_{k-1} \vee \varphi' \quad (\star)$$

Como por Hipótesis inductiva se tiene que $D_{k-1} \vdash \varphi'$, entonces por el Teorema de la deducción (2.3.1.3) se concluye que $\vdash D_{k-1} \rightarrow \varphi'$. Y en consecuencia (considerando $\star$) se obtiene lo buscado: $D_k \vdash \varphi'$. Fin de la prueba del lema.

Para continuar con la prueba del teorema se considerarán dos casos (se usa aquí el Principio del tercero excluído, Churh resalta este hecho en un pie de página de su prueba [Ch], p. 235):

Caso1: Para algún k, C_k es un teorema.

Caso2: Para cualquier k, C_k no es un teorema.

Caso1: Para algún k, C_k es un teorema. Entonces por generalización reiterada ($kn+1$ veces), D_k es un teorema. En consecuencia, por el Lema anterior φ' es un teorema.

Caso2: Para cualquier k, C_k no es un teorema. Entonces, C_k no puede ser instancia de una tautología de la lógica proposicional, pues toda instancia de tautología es un axioma y por lo tanto es un teorema. En consecuencia considerando a C_k como una fórmula de la lógica proposicional donde sus fórmulas atómicas son letras proposicionales se tiene que existen asignaciones de valores de verdad para sus fórmulas atómicas tal que toda valuación que se construya respetando dichos valores hace falsa a C_k. Dichas asignaciones de valores de verdad para las fórmulas atómicas de C_k que hacen falsa a C_k siempre son finitas, pues no exceden en número a la cantidad de filas de su tabla de verdad.

Sea $E_1, E_2, E_3, \ldots$ una lista de las subfórmulas atómicas de los C_k, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $(C_1, C_2, C_3, \ldots)$ definida de la siguiente manera: Primero van todas las diferentes subfórmulas atómicas de C_1 en el orden de su primera ocurrencia (de izquierda a derecha) en C_1. Después van todas las subfórmulas atómicas de C_2 que no aparecen en C_1 ordenadas según su orden de primera ocurrencia en C_2. Luego van todas las subfórmulas atómicas de C_3 que no ocurren en C_1 y C_2 ordenadas según su primera ocurrencia. Y así sucesivamente.

Ahora se define una **asignación maestra** $h : \{E_i\}_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \longrightarrow \{V, F\}$ como sigue: Si E_1 recibe el valor de verdad V en una cantidad infinita de asignaciones de valores de verdad para las foŕmulas atómicas de los C_i que falsean a C_i, entonces se define $h(E_1) = V$; en caso contrario (si es finito), entonces E_1 debe tomar el varlor F en una cantidad infinita de asignaciones de valores de verdad para las foŕmulas atómicas de los C_i que falsean a C_i, en este caso se define $h(E_1) = F$. Ahora para definir $h(E_2)$ se considera la cantidad infinita de asignaciones de valores de verdad para las foŕmulas atómicas de los C_i que permitieron definir a $h(E_1)$. Si en dichas asignaciones de valores de verdad para las foŕmulas atómicas de los C_i que falsean a C_i E_2 toma el valor V en una cantida infinita de veces, entonces se define $h(E_2) = V$; en caso contrario se define $h(E_2) = F$. Para definir $h(E_3)$ se considera la cantidad infinita de asignaciones de valores de verdad para las foŕmulas atómicas de los C_i que falsean a C_i donde E_1 y E_2 toman el mismo valor que $h(E_1)$ y $h(E_2)$ (tal cantidad es infinita porque contiene al conjunto de todas las que permitieron definir a $h(E_2)$). Si E_3 toma el valor V en una cantidad infinita de ellas, entonces se define $h(E_3) = V$, en caso contrario $h(E_3) = F$. Así sucesivamente.

Proposición: Para cada $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $h(C_k) = F$.

Demostración: Por reducción al absurdo. Supóngase que es falsa la proposición. Es decir, supóngase que existe un $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $h(C_k) = V$. Sean $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m$ todas las subfórmulas atómicas de C_k. Y sean $h(E_1), h(E_2), h(E_3), \ldots, h(E_m)$ sus valores respectivos por la asignación maestra. Entonces tomando en cuenta que las C_i son disyunciones, y también a la tabla de verdad de la disyunción, se concluye que para todo $j > k$, no existen asignaciones de valores de verdad para las fórmulas atómicas de los C_j que falsen a C_j y preserven los valores $h(E_1), h(E_2), h(E_3), \ldots, h(E_m)$. Esto contradice la definición de la asignación maestra h. Por lo tanto, para cada $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}: \;\; h(C_k) = F$. Fin de la prueba de la Proposición.

Ahora, con la ayuda de la asignación maestra, definimos una estructura $\mathfrak{A}$ donde φ' será falsa, el universo de $\mathfrak{A}$ es $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ y tendrá un relación i-aria por cada símbolo relacional i-ario de φ'. Supóngase que φ' tiene n símbolos relacionales:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, {R_1}^{\mathfrak{A}}, {R_2}^{\mathfrak{A}}, {R_3}^{\mathfrak{A}}, \ldots, {R_n}^{\mathfrak{A}} \rangle.$$

Si R_j es un símbolo relacional $i-ario$ de φ' entonces definimos:

$(u_1, u_2, \ldots, u_i) \in {R_j}^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $h(R_j(x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_i})) = V$. Y si $h(R_j(x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_i}))$ no está definida, es decir, $R_j(x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_i})$ no es ninguna E_t, entonces $(u_1, u_2, \ldots, u_i) \in R_j^{\mathfrak{A}}$.

Ahora se define una asignación $s : VAR \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ de la siguiente manera: $s(x_u) = u$, para todo $u \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Se cumple que para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathfrak{A} \not\models C_k[s]$. Porque por la Proposición anterior se tiene que $h(C_k) = F$, para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Notar que "$s$ y h le asignan el mismo valor a todas las subfórmulas atómicas de C_k": $\mathfrak{A} \models R_j(x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_i})[s]$ si y sólo si $(s(x_{u_1}), s(x_{u_2}), \ldots, s(x_{u_i})) \in {R_j}^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $(u_1, u_2, \ldots, u_i) \in {R_j}^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $h(R_j(x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_i})) = V$. Por lo tanto, " s y h le asignan el mismo valor a C_k".

En consecuencia, como $C_k = C_{k-1} \vee B_k$, se concluye que $\mathfrak{A} \not\models B_k[s]$, para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Por lo tanto, por definición de satifacibilidad, se tiene que:

$$\mathfrak{A} \not\models \forall w_1 \forall w_2 \dots \forall w_n S^{x_{(k-1)n+2}}_{w_1} {}^{x_{(k-1)n+3}}_{w_2} {}^{\dots x_{kn+1}}_{\dots w_n} M[s]$$

Es decir, reescribiendo la expresión anterior:

$$\mathfrak{A} \not\models \forall w_1 \forall w_2 \dots \forall w_n S^{u_1}_{x_{[k_1]}} {}^{u_2}_{x_{[k_2]}} {}^{\dots u_m}_{\dots x_{[k_m]}} M[s]$$

Como esto ocurre para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, todas la m-tuplas de variables $(x_{[k_1]}, x_{[k_2]}, \dots, x_{[k_m]})$ son consideradas, entonces, por definición de s, $(s(x_{[k_1]}), s(x_{[k_2]}), \dots, s(x_{[k_m]})) = ([k_1], [k_2], \dots, [k_m])$, es decir, con s quedan consideradas todas las m-tuplas de naturales.

Por lo tanto:

$$\mathfrak{A} \not\models \exists u_1 \exists u_2, \dots, \exists u_m \forall w_1 \forall w_2, \dots, \forall w_n M(u_1, u_2, \dots, u_m, w_1, w_2, \dots, w_n)[s]$$

Lo que se quería demostrar. Con esto termina la demostración del teorema. $\square$

Corolario 2.6.4. *Si φ' es una fórmula en Forma normal de Skolem :*

$$\varphi' = \exists u_1 \exists u_2, \dots, \exists u_m \forall w_1 \forall w_2, \dots, \forall w_n M(u_1, u_2, \dots, u_m, w_1, w_2, \dots, w_n),$$

donde M es una fórmula sin cuantificadores. Si B_k es la siguiente fórmula sin cuantificadores:

$$S^{u_1}_{x_{[k_1]}} {}^{u_2}_{x_{[k_2]}} {}^{\dots u_m}_{\dots x_{[k_m]}} {}^{w_1}_{x_{(k-1)n+2}} {}^{w_2}_{x_{(k-1)n+3}} {}^{\dots w_n}_{\dots x_{kn+1}} M,$$

y si C_k es la siguiente fórmula disyuntiva $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k$, entonces φ' es un teorema (y es válida) si y sólo si existe algún entero positivo k tal que C_k es una instancia de sustitución de una tautología.

Demostración: $\square$

(Nota: Existe otra prueba de este corolario que usa un concepto distinto de Forma normal de Skolem y también utiliza el Teorema de Herbrand, ver [N-S].)

Nota sobre la demostración del Teorema de Completitud: Aunque la prueba anterior se realizó para un Sistema Axiomático de la Lógica de Primer Orden sin identidad, la misma se puede extender para un Sistema Axiomático de la Lógica de Primer Orden con identidad [[Ch], p. 283], [[G3], p. 18].

3 ZFC, el Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski y el Principio de Reflexión.

3.1 Introducción

El objetivo de esta sección es describir a la Teoría Axiomática de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el Axioma de elección (ZFC), y presentar dos demostraciones: Una del Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski y otra del Principio de Reflexión. El orden de la exposición es el siguiente: Desde la subsección 3.2 hasta la subsección 3.9 se describe a ZFC. Dicha presentación se realiza siguiendo (principalmente) las fuentes [D1],[D3], [D4], [E1], [H-J], [K] y [J1], incluyendo la notación. Luego, en la subsección 3.10 se enuncia y demuestra el Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski, siguiendo (principalmente) la prueba que se encuentra en el libro [J1]. Y en la subsección 3.11 se enuncia y demuestra el Principio de Reflexión, siguiendo (principalmente) la prueba que se consigue en el texto [J1].

3.2 Los Axiomas lógicos y propios de la Teoría Axiomática de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel

Para describir la Teoría Axiomática de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZFC) se usarán como referencia (principalmente) los textos [D1], [E1], [H-J], [K] y [J1], incluyendo la notación.

Sea $\mathcal{L}_{\in}$ el lenguaje de primer orden con identidad que tiene como único símbolo no lógico al relacional binario $\in$.

ZFC es la teoría en primer orden con identidad, constituída de la siguiente manera: (a) El lenguaje de ZFC es $\mathcal{L}_{\in}$. (b) Los axiomas lógicos de ZFC son todos los axiomas descritos en la sección anterior para la Lógica de Primer Orden con identidad. (c) Los axiomas propios de ZFC son axiomas para la teoría de conjuntos, entendiendo (intuitivamente) por teoría de conjuntos a la colección de todas las sentencias verdaderas en el UNIVERSO DE LOS CONJUNTOS. Dichos axiomas se enunciarán más abajo. Y (d) La regla de inferencia de ZFC es Modus Ponens. Sea $\vdash$ la relación de demostrabilidad de ZFC y χ una fórmula de $\mathcal{L}_{\in}$. Se dice que χ es un *teorema* de ZFC si $ZFC \vdash \chi$. A continuación se enuncian los axiomas propios de ZFC:

1. El primer axioma que se presenta es el Axioma de extensionalidad, el

cual brinda un criterio para decidir cuando dos conjuntos son iguales, la igualdad de conjuntos es extensional, es decir, dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

Axioma de extensionalidad:

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

2. El segundo axioma que se presenta es el Axioma del conjunto vacío, el cual es un axioma de existencia, tal axioma afirma que existe un conjunto que no tiene elementos.

   Axioma del conjunto vacio:

   $$\exists x \forall y (y \notin x)$$

   El conjunto sin elementos es único y se denotará por $\emptyset$.

3. El tercer axioma que se presenta es el Axioma de pares, el cual es una regla de construcción de conjuntos a partir de conjuntos dados, es decir, tal axioma afirma que si X y Y son conjuntos entonces existe un conjunto Z cuyos elementos son exactamente X y Y.

   Axioma de pares:

   $$\forall x \forall y \exists z \forall r (r \in z \leftrightarrow (r = x \vee \ r = y))$$

   El conjunto z es único y se denotará por $\{x, y\}$.

4. El cuarto axioma que se presenta es el Axioma de la unión, el cual es una regla de construcción de conjuntos a partir de conjuntos dados, tal

axioma afirma que si X es un conjunto, entonces existe un conjunto Y cuyos elementos son los elementos de los elementos de X.

Axioma de la union:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists w (w \in x \wedge \ z \in w))$$

El conjunto y es único y se denotará por $\cup y$.

5. El quinto axioma que se presenta es el Axioma (esquema de axioma) de reemplazo, el cual es una regla de construcción de conjuntos a partir de conjuntos dados, tal axioma afirma intuitivamente que si F es una función clase, entonces para todo conjunto A existe un conjunto $F[A] = \{F(x) : x \in A\}$. A continuación se formula de manera rigurosa y generalizada:

   Para expresar el Axioma de reemplazo es conveniente introducir una definición: Se dice que una fórmula $\chi(x_1, \ldots, x_n, x, y)$ es una *relación funcional* en x, y con parámetros $p_1, \ldots, p_n$ si la fórmula $\chi(p_1, \ldots, p_n, x, y)$ que se obtiene fijando los valores de $x_1, \ldots, x_n$ en $p_1, \ldots, p_n$ cumple que: $\forall x \forall y \forall z (\chi(p_1, \ldots,\ p_n, x, y) \wedge \chi(p_1, \ldots, p_n, x, z) \rightarrow y = z)$.

   Axioma (Esquema) de reemplazo: Para cada fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n, x, y)$ la siguiente proposición es un axioma(de reemplazo):

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n [\forall x \forall y \forall z (\phi(x_1, \ldots, x_n, x, y) \wedge \phi(x_1, \ldots, x_n, x, z) \rightarrow y = z)$$
$$\rightarrow \forall u \exists v \forall y (y \in v \leftrightarrow \exists x (x \in u \wedge \phi\, (x_1, \ldots, x_n, x, y)))]$$

   Es decir, si la fórmula obtenida de $\phi(x_1, \ldots, x_n, x, y)$ fijando valores para las variables $x_1, \ldots, x_n$ es una relación funcional en x, y; entonces, dado un conjunto u, existe un conjunto v cuyos elementos son las imágenes de los elementos de u por esa relación funcional. El conjunto v es único y se denotará por $\{y : \exists x \in u \phi(p_1, \ldots, p_n, x, y)\}$, si los conjuntos $p_1, \ldots, p_n$ son los valores que se le fijaron a las variables $x_1, \ldots, x_n$.

6. El sexto axioma que se presenta es el Axioma (esquema de axioma) de separación, el cual es una regla de construcción de conjuntos a partir de un conjunto dados, tal axioma afirma intuitivamente que si $\chi(x)$ es una fórmula con una variable libre, entonces para cada conjunto A existe un conjunto $B = \{a \in A : \chi(a)\}$. A continuación se formula de manera rigurosa y generalizada:

   Axioma (Esquema) de separación o de comprensión: Para cada fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n, x)$ la siguiente proposición es un axioma(de separación):

   $$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall z \exists y \forall w (w \in y \leftrightarrow w \in z \land \phi(x_1, \ldots, x_n, w))$$

   Es decir, dada la propiedad obtenida de $\phi(x_1, \ldots, x_n, x)$ fijando valores para las variables $x_1, \ldots, x_n$, por ejemplo $p_1, \ldots, p_n$, y dado un conjunto z, existe un conjunto y cuyos elementos son los elementos de z que satisfacen $\phi(p_1, \ldots, p_n, x)$.

   El conjunto y es único y se denotará por $\{x \in z : \phi(p_1, \ldots, p_n, x)\}$ o por $\{x : x \in z \land \phi(p_1, \ldots, p_n, x)\}$.

7. El séptimo axioma que se presenta es el Axioma de partes, el cual es una regla de construcción de conjuntos a partir de conjuntos dados, intuitivamente tal axioma afirma si X es un conjunto, entonces existe un conjunto Y cuyos elementos son todos los subjuntos de A. A continuación se formula de manera rigurosa:

   Dados dos conjuntos w y u se dice que w es un *subconjunto* de u $(w \subseteq u)$ si $\forall z(z \in w \to z \in u)$.

Axioma del conjunto de partes:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

El conjunto y es único y se denotará por $P(x)$.

Los axiomas que faltan se enunciarán luego de formular las siguientes definiciones: (1) $\{x\} = \{x, x\}$. (2) $x \cup y = \cup\{x, y\}$. (3) $s(x) = x \cup \{x\}$. (4) $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. (5) $x \times y = \{(z, w) : z \in x \wedge w \in y\}$. (6) z es una *relación* en $x \times y$ si $z \subseteq x \times y$. Si z es una relación en $x \times y$ a veces se escribirá vzw en vez de $(v, w) \in z$. Si z es una relación en $x \times y$ y $x = y$ se dice que z es una relación en x .(7) $dom(z) = \{x : \exists y((x, y) \in z)\}$. (8) $rango(z) = \{y : \exists x((x, y) \in z)\}$. (9) f es una *función* de x en $y\,(f : x \longrightarrow y)$ si f es una relación en $x \times y$, y para cada $v \in x$ existe un único $w \in y$ tal $(v, w) \in f$. A veces se escribirá $f(v) = w$ en vez de $(v, w) \in f$. (10) f es *sobreyectiva* si $rango(f) = y$. (11) f es *inyectiva* si: $\forall v, w \in dom(f)(f(v) = f(w) \rightarrow v = w)$. (12) f es *biyectiva* si f es inyectiva y sobreyectiva . (13) Si $w \subseteq x$, entonces $f \restriction w = \{(v, f(v)) : v \in w\}$ y $f[w] = \{f(v) : v \in w\}$. (14) $x^y = \{f : f : y \longrightarrow x\}$. (15) $x - y = \{z \in x : z \notin y\}$. (16)Si $x = \emptyset$, $\cap x = \emptyset$. Si $x \neq \emptyset$, $\cap x = \{z : \forall y \in x(z \in y)\}$. (17) $v \cap w = \cap\{v, w\}$.

8. El octavo axioma que se presenta es el Axioma del infinito, el cual es un axioma de existencia, dicho axioma afirma que existe un conjunto infinito, y una de sus consecuencias principales es que existe el conjunto de los números naturales. El Axioma del infinito no es constructivo y se puede considerar un axioma platonista. A continuación se formula rigurosamente:

   Axioma del infinito: Un conjunto x es *inductivo* si $\emptyset \in x$ y para todo conjunto z, si $z \in x$ entonces $s(z) \in x$. El axioma del infinito dice que existe un conjunto inductivo.

$$\exists x(x \text{ es inductivo})$$

9. El noveno axioma que se presenta es Axioma de fundamentación, el cual tiene por objetivo eliminar la posibilidad de que existan conjuntos fuera de la Jerarquía acumulativa de conjuntos de von Neumann, el afirma que la relación de pertenencia es una relación bien fundamentada, es decir, no existen cadenas infinitas descendientes de conjuntos con respecto a dicha relación. A continuación se formula rigurosamente:

   Axioma de fundamentación: Para cualquier conjunto x, no vacío, existe un elemento y con el cual x no tiene elementos en común. Esto quiere decir que y es minimal en x con respecto a $\in$.

   $$\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)$$

10. El décimo (y último) axioma que se presenta es el Axioma de elección, el cual es un axioma de existencia, intuitivamente tal axioma afirma que para toda familia no vacía de conjuntos no vacíos existe una función selectora. Este es un axioma no constructivo y se puede considerar un axioma platonista. A continuación se formula rigurosamente:

    Dado un conjunto x se dice que la función f es una función de elección (o una función selectora) para x si el $dom(f) = x - \{\emptyset\}$ y para todo $z \in dom(f)$, se tiene que $f(z) \in z$. El axioma de elección dice que todo conjunto tiene un función selectora.

    Axioma de elección (AE):

    $$\forall x \exists f(\, f \text{ es una función de elección para x}\,)$$

3.3 Orden parcial, Orden total, Buen orden, Principio de inducción transfinita

Definición 3.3.1. *Sea A un conjunto y S una relación en A (es decir, $S \subseteq A \times A$)*

1. *S es reflexiva si y sólo si $\forall x \in A(xSx)$*
2. *S es simétrica si y sólo si $\forall x, y \in A(xSy \rightarrow ySx)$*
3. *S es transitiva si y sólo si $\forall x, y, z \in A(xSy \wedge ySz \rightarrow xSz)$*
4. *S es antisimétrica si y sólo si $\forall x, y \in A(xSy \wedge ySx \rightarrow x = y)$.*

Definición 3.3.2.
1. *Un orden parcial es un par $(P, \leq)$ donde P es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación sobre P que es reflexiva y transitiva. Los elementos $p \in P$ se llaman condiciones, y cuando $p \leq q$ se dice que p extiende a q. Un par $(P, \leq)$ es un orden parcial propio si la relación $\leq$ es antisimétrica. En este caso se define, $p < q \leftrightarrow p \leq q \wedge p \neq q$, y se dice que $(P, <)$ es también un orden parcial (estricto). Es evidente que en el orden parcial $(P, <)$ la relación $<$ es transitiva y que $\forall p \in P(p \not< p)$.*
2. *Un par (P, R) es un orden linial (o total) si el par (P, R) es un orden parcial, y la relación R satisface la propiedad de tricotomía: $\forall x, y \in P(xRy \vee yRx \vee x = y)$. Si $\forall p \in P[\neg(pRp)]$, se dice que el par (P, R) es un orden linial (o total) estricto.*

Definición 3.3.3.
1. *Sean (P, R) un orden parcial y $E \subseteq P$. $x \in P$ es un elemento minimal (máximal) de E si $x \in D \ \wedge$ no existe ningún $y \in E$ tal que $y \neq x \wedge yRx$ (xRy). x es una cota inferior (superior) de E si $\forall y \in E(xRy \vee y = x)\,(yRx \vee y = x)$. x es un ínfimo (supremo) de E si x es cota inferior (superior) de $E \ \wedge$ para todo $y \in P$, si y es una cota inferior (superior) de E, entonces $yRx \vee y = x\,(xRy \vee y = x)$. x es un menor (mayor) elemento de E si $x \in E \ \wedge \ \forall y \in E(xRy \vee y = x)\,(yRx \vee y = x)$.*

2. *Un par (P, R) es un buen orden si y sólo si (P, R) orden parcial y cualquier subconjunto no vacío de P tiene un menor elemento. Si (P, R) es un orden parcial estricto, se dice que (P, R) es un buen orden estricto (Vale la pena resaltar que si R es un buen orden, entonces R es un orden total).*

   (En algunos casos, cuando se hable de un orden en cualquiera de sus variantes definidas se escribirá sólo su universo omitiendo la relación, por ejemplo, se secribirá P en vez de (P, R)).

Un importante y muy útil Teorema sobre conjuntos bien ordenados es el Principio de Inducción transfinita, a continuación se formula, y una demostración del mismo (o de versiones parecidas) puede encontrarse en [D1], [H-J], [E1]:

Teorema 3.3.4 (Principio de Inducción transfinita). *Sea (B, R) un conjunto bien ordenado y $\phi(x)$ una fórmula del lenguaje de la Teoría de Conjuntos. Entonces:*

$$\{\forall x \in B[\forall y \in B(yRx \to \phi(y)) \to \phi(x)]\} \to \forall x \in B\phi(x).$$

3.4 Principio del buen orden y Lema de Zorn

Otros relevantes resultados para este trabajo que se pueden enunciar de una vez son el Principio del Buen Orden, *Todo conjunto se puede bien ordenar*, y el Lema de Zorn. Se sabe que dichas proposiciones son equivalentes al Axioma de elección, una demostración de tales equivalencias puede conseguirse en [D1], [E1], [H-J]. También se conoce que existen muchas otras proposiciones equivalentes a estas tres, un estudio de ellas puede encontrase [H-R] y [J2]. A continuación se formula el Lema de Zorn:

Teorema 3.4.1 (Lema de Zorn). *Sea* (B, R) *un conjunto parcialmente ordenado tal que cada* $X \subseteq B$ *totalmente ordenado tiene una cota superior en* B*. Entonces* B *tiene un elemento maximal.*

Con el Lema de Zorn se puede demostrar (en otros) el Lema de Lindenbaum [D2] que se mencionará en la siguiente sección (4).

3.5 Clases, Ordinales, Principio de inducción transfinita para ordinales, Aritmética ordinal

Si $\phi(x)$ es una fórmula, entonces la colección $\{x : \phi(x)\}$ se llama *clase*. Y esta definición se puede generalizar: Si $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula, entonces la colección $\{x : \varphi(x, p_1, \ldots, p_n)\}$ es una *clase*, donde los $p_1, \ldots, p_n$ son conjuntos que sirven como parámetros para la definición. Hay clases que son conjuntos, en particular todo conjunto es una clase, porque si y es un conjunto, entonces la clase $\{z : z \in y \land z = z\}$ es un conjunto por el axioma de separación, y $y = \{z : z \in y \land z = z\}$ por el axioma de extensionalidad. Sin embargo, hay clases que no son conjuntos (*clases propias*), ya que el considerar como hipótesis que ellas son conjuntos, implica una contradicción. Cinco ejemplos sobrelalientes de clases en la Teoría de conjuntos son la *Clase de los ordinales*, la *Clase de las cardinales*, la *Clase de los conjuntos bien fundamentados (o La jeraquía acumulativa de conjuntos de von Neumann)*, *el Universo* y la *Clase de los conjuntos constructibles de Gödel*. En el transcurso de esta sección (3), en algunas subsecciones de la misma, se presentarán cada una de ellas siguiendo un orden conceptual.

*La clase de los números ordinales (***Ord***)*

Un conjunto x es *transitivo* si y sólo si $\forall z(z \in x \to z \subseteq x)$. Un conjunto α es un *ordinal* si es transitivo y está estrictamente bien ordenado por $\in$, es decir, si es transitivo y el par $(\alpha, \in_\alpha)$ es un buen orden estricto, donde $\in_\alpha = \{(\gamma, \delta) \in \alpha \times \alpha : \gamma \in \delta\}$.

$$\mathbf{Ord} = \{x : x \text{ es un ordinal}\}.$$

Ord está estrictamente bien ordenada por $\in$. Considérese dos ordinales α y β. Se dice que $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta$. Es conocido que la clase de los ordinales se puede construir informalmente mediante la aplicación reiterada de las operaciones "paso sucesor" y "paso límite" así: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$,$\ldots$,$n = \{0, \ldots, n-1\}$,$\ldots$, $\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$, $\omega+1 = \{0, 1, 2, 3, \ldots; \omega\}$, $\omega+2 = \{0, 1, 2, 3, \ldots; \omega, \omega+1\}$, $\omega+3 = \{0, 1, 2, 3, \ldots; \omega, \omega+1, \omega+2\}$,$\ldots$, $\omega+\omega = \{0, 1, 2, \ldots; \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots\}$, $(\omega+\omega)+1 = \{0, 1, 2, \ldots; \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots, \omega+\omega\}$,$\ldots$. Con esta construcción se puede apreciar claramente que cada ordinal es igual al conjunto de los ordinales que lo preceden. Se dice que un ordinal α es *sucesor* si $\alpha = \beta+1$, para algún ordinal β. Por ejemplo: 5, $\omega+1$, $\omega+2$ y $\omega+500$. Se dice que un ordinal es *límite* si no es cero ni sucesor. Por ejemplo, ω, $\omega+\omega$ y $(\omega+\omega)+\omega$.

Un Teorema muy sobresaliente que se cumple para cada ordinal α y para la clase **Ord**, que es consecuencia inmediata de su buen orden, es el Principio de inducción transfinita, es decir, el Principio de inducción transfinita vale para cada ordinal α y para la clase **Ord**, y es una herramienta muy útil para demostrar que todos los ordinales tienen una determinada propiedad y también para realizar definiciones sobre los ordinales. Y más todavía, su utilidad como método para hacer demostraciones transciende al universo de los ordinales, pues existen muchas aplicaciones del mismo en diversas áreas de la lógica y de la matemática, por ejemplo en Teoría de Conjuntos, Teoría de Modelos, Análisis, Combinatoria infinita y en el estudio de los fundamentos de las matemáticas. Más adelante (en esta misma sección y en el resto del trabajo) se verán varias aplicaciones importantes del mismo. A continuación se plantea la versión más utilizada para el caso de **Ord**, una demostración de la la misma se hace por reducción al absurdo de manera análoga a como se hace para los conjuntos bien ordenados (A, R) en [D1], [E1], [H-J]:

Teorema 3.5.1 (Principio de inducción transfinita modificado para Ord). *Sea $\phi(x)$ una fórmula con una variable libre del lenguaje de la Teoría de conjuntos. Entonces:*

$$\{\, \phi(0) \;\wedge \forall\alpha \in \mathbf{Ord}(\phi(\alpha) \to \phi(\alpha')) \wedge$$
$$\forall\alpha \in \mathbf{Ord}[(\,\alpha \textit{ límite} \wedge \forall\beta < \alpha\, \phi(\beta)) \to \phi(\alpha)]\} \to \forall\alpha \in \mathbf{Ord}\, \phi(\alpha).$$

Un resultado relevante que hace posible asignarle a cada conjunto bien ordenado un único número ordinal se expresa a continuación, una demostración del mismo puede encontrarse en [D1] y usa el Axioma de reemplazo:

Teorema 3.5.2 (Teorema del Tipo de Orden). *Para cualquier conjunto bien ordenado (B, R) existe un único ordinal isomorfo a dicho conjunto (B, R). Tal ordinal se denomina "el tipo de orden de (B, R)".*

Con el apoyo del resultado anterior, se definen a continuación las operaciones de suma, producto y potenciación ordinal, tales operaciones cumplen algunas propiedades de la aritmética de los números reales, pero otras no. Una demostración de los resultados básicos de las mismas puede encontrarse en [D1], [E1] y [H-J]:

La suma y el producto

Sean γ y δ dos ordinales y (A, R) y (B, S) dos buenos ordenes cuyos tipos de orden son γ y δ, respectivamente, y tales que $A \cap B = \emptyset$:

Se define $\gamma + \delta$ como el tipo de orden del buen orden $(A \cup B, R \oplus S)$, donde $R \oplus S = R \cup S \cup (A \times B)$. Es decir, $R \oplus S$ es el buen orden que se obtiene poniendo B con su orden a continuación de A.

Utilizando el Principio de inducción transfinita (modificado) $\gamma + \delta$ puede definirse por inducción en δ de la siguiente forma:

$$\gamma + 0 = \gamma$$

$$\gamma + (\sigma + 1) = (\gamma + \sigma) + 1$$

$$\gamma + \lambda = \bigcup \{\gamma + \zeta : \zeta < \lambda\} \quad (\lambda \text{ límite}).$$

Se define $\gamma.\delta$ como el tipo de orden del buen orden $(A \times B, R * S)$, donde $R * S$ se define de la siguiente manera: $(\gamma_1, \delta_1) R * S (\gamma_2, \delta_2)$ si y sólo si $(\delta_1 S \delta_2)$ o $(\delta_1 = \delta_2 \, y \, \gamma_1 R \gamma_2)$. Es decir, $\gamma.\delta$ es el tipo de orden que se obtiene si se toma un orden de tipo γ y se repite δ veces.

Utilizando el Principio de inducción transfinita $\gamma.\delta$ puede definirse por inducción en δ de la siguiente forma:

$$\gamma.0 = 0$$

$$\gamma.(\sigma + 1) = (\gamma.\sigma) + \gamma$$

$$\gamma.\lambda = \bigcup \{\alpha.\zeta : \zeta < \lambda\} \quad (\lambda \text{ límite}).$$

La potenciación

Utilizando el Principio de inducción transfinita γ^δ puede definirse por inducción en δ de la siguiente forma:

$$\gamma^0 = 1$$

$$\gamma^{\sigma+1} = \gamma^\sigma.\gamma$$

$$\gamma^\lambda = \bigcup \{\gamma^\zeta : \zeta < \lambda\} \quad (\lambda \text{ límite}).$$

3.6 Cardinales, Aritmética cardinal, la Hipótesis del continuo

*La clase de los cardinales (***Card***)*

Se dice que dos conjuntos x y y son *equipotentes* si existe una función $g : x \longrightarrow y$ que sea biyectiva. Un conjunto η es un *cardinal* si es un ordinal y no es equipotente a ningún ordinal menor (es decir, si no es equipotente a ninguno de sus elementos).

$$\mathbf{Card} = \{x : x \text{ es un cardinal}\}.$$

Cualquier cardinal infinito tiene la forma $\aleph_\beta$ (o ω_β), para algún ordinal β, donde los $\aleph_\beta$ se definen por inducción transfinita en los ordinales de la siguiente manera:

$$\aleph_0 = \omega$$

$$\aleph_{\beta+1} = (\aleph_\beta)^+ = \{\zeta \in Ord : \zeta \text{ es equipotente a algún subconjunto de } \aleph_\beta\}$$

$$\aleph_\lambda = \bigcup_{\rho<\lambda} \aleph_\rho, \text{ si } \lambda \text{ es límite}$$

Notar que (de manera análoga a los números ordinales) la anterior definición da una regla para construir la secuencia infinita de los números cardinales usando reiteradamente las operaciones "paso sucesor" y "paso límite".

Se dice que un cardinal es *sucesor* si tiene la forma $\aleph_{\beta+1}$ para algún ordinal β. Por ejemplo $\aleph_1$, $\aleph_2$ y $\aleph_{30}$. Y se dice que es *límite* si tiene de la forma $\aleph_\lambda$, para algún ordinal límite λ. Por ejemplo $\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega+\omega}$ y $\aleph_{(\omega+\omega)+\omega}$.

Sean μ y η dos cardinales. $\mu \leq \eta \leftrightarrow$ existe una función $f : \mu \longrightarrow \eta$ que sea inyectiva. Sea z un conjunto. Se denotará por $|z|$ al único cardinal θ equipotente con z. Dicho cardinal existe como consecuencia del Axioma de elección: En efecto, como *Todo conjunto se puede bien ordenar(AE)*, entonces existe un buen orden para z, $<$. Entonces, como para todo conjunto bien ordenado existe un único ordinal isomorfo al mismo (Teorema del Tipo de

Orden), su tipo de orden, sea α el tipo de orden de $(z, <)$. Considérese el conjunto de todos los ordinales equipotentes a z,

$$T = \{\beta \in \mathbf{Ord} : \beta \approx z\}.$$

Como $\alpha \in T$, $T \neq \emptyset$, y **Ord** está bien ordenada por $\in$, se infiere que T tiene un menor elemento. Sea θ dicho menor elemento. θ es un cardinal, pues si no lo fuera se contradice el hecho de que es el menor elemento de T. Entonces se define $\mid z \mid = \theta$.

Se dice que el conjunto z es *finito* si existe un $m \in \omega$ tal que $|z| = m$. Y que z es *infinito* si no es finito. z es *numerable* si $|z| \leq \aleph_0$.

Considérese un orden parcial $(P, \leq)$ y η un cardinal. P tiene la condición de η-cadena si y sólo si cualquier anticadena en P tiene cardinal $< \eta$. Si $\eta = \aleph_1$ se dice que P tiene la condición de cadena contable y se puede simplificar diciendo: P es *c.c.c.*

Aritmética de los números cardinales

Se definen a continuación las operaciones de suma, producto y potenciación cardinal, tales operaciones cumplen algunas propiedades de la aritmética de los números reales, pero otras no. También tienen similitudes y diferencias con la aritmética ordinal. Una demostración de los resultados básicos sobre las mismas puede encontrarse en [D1], [E1] y [H-J]:

Sean η y μ dos cardinales y dos conjuntos A y B tales que $\eta = \mid A \mid$, $\mu = \mid B \mid$ y $A \cap B = \emptyset$.

$$\eta + \mu = \mid A \cup B \mid$$

$$\eta . \mu = \mid A \times B \mid$$

$$\eta^{\mu} = \mid A^{B} \mid$$

Después de formulada la definición de la potención cardinal se puede responder la siguiente la interrogante ¿ Cuál es Hipótesis del continuo de Cantor (HC)? :

Cantor sabía que $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Y también probó, usando la famosa prueba de la diagonal [Mos1], que $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Entonces, surge la pregunta ¿ Qué $\aleph_\alpha$ es $2^{\aleph_0}$? : ¿$2^{\aleph_0} = \aleph_1$? ¿ $2^{\aleph_0} = \aleph_2$? ¿ $2^{\aleph_0} = \aleph_3$? ¿ $2^{\aleph_0} = \aleph_4$? ¿ $2^{\aleph_0} = \aleph_\omega$?, etc. ¿ Existirá algún cardinal intermedio entre $|\mathbb{N}|$ y $|\mathbb{R}|$?. Cantor conjeturó que NO EXISTE, es decir, Cantor conjeturó que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, pero nunca logró demostrar tal hipótesis. La proposición $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ es lo que se llama *Hipótesis del continuo (HC)*. Hoy en día se conoce que la HC es independiente de ZFC (y que el AE es independiente de ZF) gracias a los trabajos de *Gö*del y Cohen. *Gö*del (1938-1940) demostró que $ZF + AE + HC$ es consistente relativa con ZF, creando para ello una técnica de construcción de modelos para la teoría de conjuntos llamada *los conjuntos construtibles* [G5], [G1]. Y Cohen creó otro método de construcción de modelos, el *forcing* (1963-1964), y demostró que $ZFC + \neg HC$ es consistente relativa con ZFC, y que $ZF + \neg AE$ es consistente relativa con ZF (en esta prueba usó también automorfismos) [C1], [C2]. Es decir, por *Gö*del y Cohen se tienen los siguientes resutados:

$$ZFC \nvdash \neg HC \ \ (Gödel)$$

$$ZF \nvdash \neg AE \ \ (Gödel)$$

$$ZFC \nvdash HC \ \ (Cohen)$$

$$ZF \nvdash AE \ \ (Cohen)$$

Desde su creación, constructibles y forcing, ambas técnicas, han revolucionado los estudios de la teoría de conjuntos y de los fundamentos de las matemáticas, y con el pasar de los a*ñ*os las mismas han sido refinadas y generalizadas de varias formas [Ka], [J1], [K], [Bel], [J4].

Nota con respecto a la HC: En la actualidad algunos lógicos matemáticos piensan (en conformidad con Gödel [G6] y con otros resultados que se han obtenido en la investigación conjuntista [J1]) que $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, es decir, que Cantor estaba equivocado, y trabajan a los fines de demostrar tal conjetura [A], [D3].

Nota con respecto al AE: Es conocido que tal axioma tiene argumentos a favor (por ejemplo, que es rico en consecuencias matemáticas interesantes) y también que tiene argumentos en contra (por ejemplo, que no es constructivo), sin embargo, en la actualidad la mayoría de comunidad matemática universal lo acepta como un principio matemático indispensabe en su disciplina, es decir, con un principio de razonamiento esencial en su "quehacer matemático cotidiano".

3.7 La Jerarquía acumulativa de conjuntos de von Neumann, la Clase de los conjuntos contructibles de Gödel

La clase de los conjuntos bien fundamentados **WF** *o la Jerarquía acumulativa de conjuntos de von Neumann*

A continuación se define a **WF** por inducción transfinita en los ordinales de la siguiente forma:

$$R_0 = \emptyset$$

$$R_{\beta+1} = P(R_\beta)$$

$$R_\lambda = \bigcup\nolimits_{\sigma<\lambda} R_\sigma, \ \lambda \text{ límite.}$$

$$\mathbf{WF} = \bigcup_{\theta \in Ord} R_\theta.$$

Si $z \in \mathbf{WF}$ entonces el *rango* de z, $\rho(z)$, es el menor ordinal β tal que $z \in R_{\beta+1}$.

*El universo (**V**)*

Se define la clase $\mathbf{V}$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{V} = \{x : x = x\}.$$

Por el Axioma de Fundamentación se tiene que $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$.

Observación: Varios libros nombran a los conjuntos R_β anteriores así: V_β. Y a la secuencia creciente de los R_β o (V_β) se le llama: "Jerarquía acumulativa de conjuntos de von Neumann".

*Los conjuntos constructibles de Gödel (**L**)*

Antes de definir a $\mathbf{L}$ se introducirá la definición de definibilidad en una estructura [Ch-Ke], [D2]: Considérese una estructura $\mathfrak{C} = \langle C, < R_\beta^{\mathfrak{C}} >_{\beta\in\gamma}, < f_\mu^{\mathfrak{C}} >_{\mu\in\delta}, < c_\xi^{\mathfrak{C}} >_{\xi\in\eta}\rangle$ para un lenguaje $\mathcal{L}$. Se dice que un subconjunto $D \subseteq C$ es *definible* en $\mathfrak{C}$ si existe una fórmula $\phi(x)$ del lenguaje $\mathcal{L}$ tal que $D = \{z \in C : \mathfrak{C} \models \phi[z]\}$. Se dice que D es definible en $\mathfrak{C}$ con parámetros si existe fórmula $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ del lenguaje $\mathcal{L}$ y existen $c_1, \ldots, c_n \in C$ tal que: $D = \{z \in C : \mathfrak{C} \models \varphi[z, c_1, \ldots, c_n]\}$.

Se procede ahora a definir a L por inducción transfinita en los ordinales de la siguiente forma:

$$L_0 = \emptyset$$

$$L_{\beta+1} = \{X \subseteq L_\beta : X \text{ es definible en la estructura } \langle L_\beta, \in, \langle a : a \in L_\beta \rangle \rangle\}$$

$$L_\lambda = \bigcup_{\sigma \in \lambda} L_\sigma \ , \quad \lambda \text{ límite.}$$

$$\mathbf{L} = \bigcup_{\theta \in \mathbf{Ord}} L_\theta$$

En la definición anterior se puede apreciar que en el paso sucesor la expresión "X es definible en la estructura $\langle L_\beta, \in, \langle a : a \in L_\alpha \rangle \rangle$" supone que se cuenta con un lenguaje de primer orden con identidad, cuyos símbolos no lógicos son: Una constante $\underline{a}$ para cada $a \in L_\beta$ y un símbolo relacional binario $\underline{\in}$ para la relación de pertenencia $\in$. Formalizaciones (en ZF) de la definición informal de $\mathbf{L}$ que se acaba de formular pueden encuentrarse en [K] y [J1].

El concepto de clase transitiva es análogo al de conjunto transitivo. Es decir, una clase $\mathbf{D}$ es *transitiva* si $\forall z(z \in \mathbf{D} \rightarrow z \subseteq \mathbf{D})$. Las clases $\mathbf{Ord}$, $\mathbf{WF}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{L}$ son transitivas. Las clases transitivas poseen sobresalientes propiedades con respecto a la preservación de fórmulas, por ejemplo.

A continuación se presenta el concepto de "relativización de de una fórmula a una clase", noción que es muy importante para estudiar "Teoría de Modelos de la Teoría Axiomática de Conjuntos dentro de la Teoría Axiomática de Conjuntos". Es muy importante esta noción en el estudio de la Teoría Axiomatica de Conjuntos.

Definición 3.7.1. *Sea* $\mathbf{A}$ *una clase. Entonces para toda fórmula* ϕ *se define* $\phi^{\mathbf{A}}$*, la relativización de* ϕ *a* $\mathbf{A}$ *:*

(La definición se hace por inducción en la complejidad de las fórmulas)

1. $(x = y)^{\mathbf{A}}$ *es* $x = y$

2. $(x \in y)^{\mathbf{A}}$ *es* $x \in y$

3. $(\chi \wedge \psi)^{\mathbf{A}}$ *es* $\chi^{\mathbf{A}} \wedge \psi^{\mathbf{A}}$

4. $(\neg\chi)^{\mathbf{A}}$ *es* $\neg(\chi^{\mathbf{A}})$

5. $(\exists x\chi)^{\mathbf{A}}$ *es* $\exists x(x \in \mathbf{A} \wedge \chi^{\mathbf{A}})$.

Definición 3.7.2. *Sea* $\mathbf{A}$ *una clase.*

1. *Para cualquier proposición* ϕ*, "*ϕ *es verdad en* $\mathbf{A}$*" ("*$\mathbf{A}$ *es un modelo de* ϕ*") es una abreviatura de* $\phi^{\mathbf{A}}$*.*

2. *Para cualquier conjunto de proposiciones* Φ*, "*Φ *es verdad en* $\mathbf{A}$*" ("*$\mathbf{A}$ *es un modelo de* Φ*") es una abreviatura de:* ϕ *es verdad en* $\mathbf{A}$*, para cada* $\phi \in \Phi$*.*

Observación: Con respecto a la definición anterior se realizarán algunos comentarios, donde el segundo de ellos contiene una reflexión: (1) " ϕ es verdad en $\mathbf{A}$" es una abreviación de una proposición del lenguaje formal: $\phi^{\mathbf{A}}$. Mientras que "Φ es verdad en $\mathbf{A}$" no abrevia una proposición del lenguaje formal, sino más bien a la conjunción infinita $\bigwedge\{\phi^{A} : \phi \in \Phi\}$. (2) Si se esta trabajando con una subteoría S de ZFC y se desea demostrar que ϕ es verdad en $\mathbf{A}$, hay que probar $\phi^{\mathbf{A}}$ con los axiomas de S. Si al contrario se desea probar que ϕ no es verdad en $\mathbf{A}$, hay que probar $\neg\phi^{\mathbf{A}}$ con los axiomas de S. Entonces, como consecuencia de que hay proposiciones indecidibles para S(si S es recursivo, consistente y suficientemente fuerte como para desarrollar la aritmética con ella. Gödel,1931, [G4]); puede pasar que no exista una respuesta acerca de si ϕ es verdad o no en $\mathbf{A}$. Sin embargo, si uno entiende informalmente (como se hace comunmente) que ϕ es verdad en $\mathbf{A}$ significa que $\phi^{\mathbf{A}}$ es verdad en $\mathbf{V}$, se infiere que, a pesar de que no se pueda decidir con el instrumento que se esta usando (los axiomas de S) si ϕ es verdad o no en $\mathbf{A}$, se tiene la convicción de que alguna de las dos cosas debe ocurrir porque en $\mathbf{V}$ la proposición $\phi^{\mathbf{A}}$ es verdadera o falsa (esta es una posición platonista de la matemática, pero es bastante común [Bea], [Fe]). (3) Si se quiere demostrar que Φ es verdad en $\mathbf{A}$, hay que probar $\phi^{\mathbf{A}}$ con los axiomas de S, para cada $\phi \in \Phi$.

A continuación se presentan dos ejemplos de modelos por medio del siguiente teorema, teniendo presente que $\forall \beta \in \mathbf{Ord}(2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1})$ es la Hipótesis Generalizada del Continuo (HGC), ZF es ZFC sin el Axioma de elección y ZF^- es ZF sin el Axioma de fundamentación:

Teorema 3.7.3. *1. (ZF^-)* **WF** *es un modelo de ZF.*

2. (ZF) **L** *es un modelo de ZFC + HGC.*

Una demostración de este Teorema se encuentra en [K]. Vale la pena resaltar que en la prueba que se hace en [K] de (2) se usan dos importantes teoremas que se demostrarán más adelante en esta sección: EL Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski y el Principio de Reflexión. También el Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski se usa (entre otros) en algunas aplicaciones del método de construcción de modelos llamado "Ultraproductos" y en el estudio de cardinales grandes [D4], [Ka]. Más adelante se definirán algunos cardinales grandes aunque en estas notas no se demostrará ningún resultado sobre los mismos, para tal fin ver [D4] y [Ka], entre otros.

3.8 Cardinales regulares e inaccesibles

Considérese un ordinal límite θ. Se dice que $\sigma < \theta$ es *cofinal* con θ si existe una función creciente $f : \sigma \longrightarrow \theta$ tal que para todo $\xi < \theta$, existe un $\delta < \sigma$ tal $f(\delta) \geq \xi$ (es decir, la imagen de f es no acotada en θ).

Dado θ, la *cofinalidad* de θ, $cof(\theta)$, es el menor ordinal cofinal con θ. Con respecto a la cofinalidad se cumple lo siguiente: $cof(\theta)$ es el menor cardinal κ tal que existe una partición de θ en κ pedazos cada uno de los cuales tiene cardinalidad estrictamente menor que θ.

Se dice que un cardinal infinito η es *regular* si es igual a su cofinalidad. Y que η es *singular* en caso contrario. Algunos ejemplos son: ω es regular y $\aleph_\omega$ es singular. Otros ejemplos: Se puede probar que para cualquier ordinal β, el cardinal $\aleph_{\beta+1}$ es regular [D1].

Un cardinal η es un *límite fuerte*, si para todo cardinal $\mu < \eta$ se tiene que $2^\mu < \eta$. Un cardinal $\eta > \omega$ es *fuertemente inaccesible* (o simplemente *inaccesible*) si es regular y límite fuerte. Se dice que η es *débilmete inaccesible* si es regular y límite.

Entre los resultados que se concen sobre los cardinales inaccesibles se encuentran: (a) Si η es un cardinal inaccesible, entonces V_η (o R_η) es un modelo de ZFC [J3], (b) a partir de ZFC no se puede demostrar que existan cardinales inaccesibles [J3], y (c) no se puede construir un modelo con ZFC donde valga ZFC + "Existe un cardinal inaccesible" [K]. Una prueba de estos resultados puede conseguirse en las referencias mencionadas. El Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel (1931) es importante en la prueba de (c), es decir, si ocurre (c) se usa (a) y se obtiene una contradicción con dicho teorema. A continuación se enuncian estos resultados en forma de Teorema:

Teorema 3.8.1 (Cardinales inaccesibles). *(a) Si η es un cardinal inaccesible, entonces V_η es un modelo de ZFC.*

(b) Si ZFC es consistente, entonces ZFC $\nvdash$ "Existe un cardinal inaccesible".

(c) ZFC $\nvdash$ Si ZFC es consistente, entonces ZFC + "Existe un cardinal inaccesible" es consistente.

Un ejemplo de axioma de cardinales grandes es la proposición "Existe un cardinal inaccesible". Solovay uso esta hipótesis para construir un modelo donde todo conjunto de reales es medible Lebesgue [J1], [So1]. Y luego Mathias probó que en dicho modelo vale también la Propiedad de Ramsey [Mat].

3.9 Cardinales medibles y supercompactos

A continuación se procede a definir "cardinal medible" y "cardinal supercompacto" usando el concepto de inmersión elemental entre estructuras que se ha definido en la sección anterior (2).

Se dice que un cardinal η es *medible* si existe una inmersión elemental no trivial $i : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{M}$ del universo $\mathbf{V}$ en una clase transitiva $\mathbf{M}$ que contiene todos los ordinales tal que η es el primer ordinal movido por la inyección i [D3]. Es conocido que Kunen probó que la clase $\mathbf{M}$ no puede ser el universo completo. También se sabe que si η es medible, entonces η es inaccesible y además η es el η-ésimo cardinal inaccesible, es decir, existen η cadinales inaccesibles menores que η [D3]. Esto implica que cardinal medible implica cardinal inaccesible, pero cardinal inccesible no implica cardinal medible [D1]. Es decir, la proposición "Existe un cardinal medible" es un ejemplo de un axioma más fuerte que "Existe un cardinal inaccesible".

Existen axiomas de cardinales grandes más fuertes que los dos anteriores, por ejemplo el que afirma "Existe un cardinal supercompacto". Donde cardinal supercompacto se define de la siguiente forma: Un cardinal η es $\lambda -$ *supercompacto* si existe una inmersión elemental $i : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{M}$ del universo $\mathbf{V}$ en una clase transitiva $\mathbf{M}$ que contiene todos los ordinales tal que η es el primer ordinal movido por la inyección i, $i(\eta) > \lambda$, y $\mathbf{M}^{\lambda} \subseteq \mathbf{M}$ (es decir, todas las λ-secuencias de elementos de $\mathbf{M}$ son elementos de $\mathbf{M}$) [D3]. Se dice que un cardinal η es *supercompacto* si es λ-supercompacto para cualquier λ. Se sabe que si η es supercompacto, entonces η es medible y existen η cardinales medibles menores que η [D3], [Ba1]. Los cardinales supercompactos son utilizados en el estudio de los fundamentos de la matemáticas (entre otros), por ejemplo las pruebas de que los candidatos a nuevos axiomas, El Axioma de Martin Máximo y el Axioma de Forcing propio, son consistentes con ZFC, se realizan utilizando como hipótesis que existe un cardinal supercompacto [J1].

3.10 El Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski

Definición 3.10.1. *Sean* $\mathbf{R}$ *y* $\mathbf{A}$ *dos clases, donde* $\mathbf{R}$ *es una relación binaria sobre* $\mathbf{A}$.

1. *La relación* $\mathbf{R}$ *es bien fundamentada si y sólo si se cumple (i) y (ii): (i) Para todo conjunto* $X \subseteq \mathbf{A} : X \neq \emptyset \to \exists y \in X(\forall z \in X((z, y) \notin \mathbf{R}))$. *El* y *anterior se llama* $\mathbf{R}$*-mínimal en* X. *(ii)* $pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \{y \in \mathbf{A} : (y, x) \in \mathbf{R}\}$ *es un conjunto, para toto* $x \in \mathbf{A}$.

2. *La relación* $\mathbf{R}$ *es extensional si y sólo si* $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ *satisface el Axioma de extensionalidad, es decir, si y sólo si* $\forall x, y \in \mathbf{A}[\forall u \in \mathbf{A}(u\mathbf{R}x \leftrightarrow u\mathbf{R}y) \to x = y]$. *Equivalentemente,* $\mathbf{R}$ *es extensional si* $x \neq y$ *implica que* $pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \neq pred(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})$.

3. *La clase* $\mathbf{A}$ *es extensional si y sólo si* $\forall x, y \in \mathbf{A}[\forall u \in \mathbf{A}(u \in x \leftrightarrow u \in y) \to x = y]$, *es decir, si y sólo si* $\langle \mathbf{A}, \in \rangle$ *es un modelo del Axioma de extensionalidad.*

En el siguiente Teorema se usa la notación "$ZF^- - P$". $ZF^- - P$ es ZFC menos el Axioma de fundamentación y el Axioma de partes.

Teorema 3.10.2 (Principio de inducción transfinita para relaciones bien fundamentadas). *($ZF^- - P$). Sea* $\mathbf{R}$ *una relación bien fundamentada sobre* $\mathbf{A}$. *Entonces cualquier subclase no vacía* $\mathbf{X}$ *de* $\mathbf{A}$ *tiene un* $\mathbf{R}$*-elemento mínimal.*

Una prueba del teorema anterior se encuentra en [K].

A continuación se enuncia y demuestra el Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski (Mostowski, 1949-Montague, 1955). Dicho Teorema tiene muchas aplicaciones en la Teoría de conjuntos porque permite obtener modelos transitivos, en la sección anterior se mencionaron al menos dos aplicaciones del mismo, una en relación con $\mathbf{L}$ y $ZFC + HGC$, y otra con "Ultraprductos" y cardinales grandes. La formulación y prueba que aquí se realiza sigue las ideas de [J1] y [K].

Teorema 3.10.3 (Teorema del Colapso Transitivo de Mostowski). *(1) Si $\mathbf{E}$ es una relación bien fundamentada y extensional sobre una clase $\mathbf{P}$, entonces existe una clase transitiva $\mathbf{M}$ y un isomorfirmo π entre $\langle \mathbf{P}, \mathbf{E} \rangle$ y $\langle \mathbf{M}, \in \rangle$. La clase transitiva $\mathbf{M}$ y el isomorfismo π son únicos.*

(2) En particular, cualquier clase extensional $\mathbf{P}$ es isomorfica a una clase transitiva $\mathbf{M}$. La clase transitiva $\mathbf{M}$ y el isomorfismo π son únicos.

(3) En el caso (2), si $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{P}$ es transitiva, entonces $\pi(x) = x$ para todo $x \in \mathbf{T}$. $\square$

Demostración: ([J1])

Dado que (2) es un caso especial de (1) $(\mathbf{E} = \in$ en el caso (2)$)$, se probará (1) y (3).

Como $\mathbf{E}$ es una relación bien fundamentada, se definirá π usando inducción para relaciones bien fundamentadas. Es decir, $\pi(x)$ puede ser definido en términos de los $\pi(z)$, donde $z\mathbf{E}x$. Para cada $x \in \mathbf{P}$ se define $\pi(x)$ como sigue:

$$\pi(x) = \{\pi(z) : z\mathbf{E}x\}. \quad (\star)$$

En particular, en el caso de que $\mathbf{E} = \in$,

$$\pi(x) = \{\pi(z) : z \in x \cap \mathbf{P}\}.$$

Por la definición $(\star)$, π es una función sobreyectiva de $\mathbf{P}$ en $\mathbf{M} = \pi(\mathbf{P})$, y es inmediato de la definición $(\star)$ que $\mathbf{M}$ es transitiva.

Se demostrará que π es inyectiva usando la hipótesis de que $\mathbf{E}$ es extensional. Se prueba la inyectividad por reducción al absurdo. Supongamos que π no es inyectiva. Entonces existen $c, d \in \mathbf{P}$ tal que $c \neq d$ y $\pi(c) = \pi(d)$. Sea $\mathbf{K} = \{\rho(\pi(c) = \pi(d)) : c \neq d\}$, donde ρ es el rango en $\mathbf{V}$. Entonces $\mathbf{K}$ es una clase de ordinales distinta de vacía. En consecuencia (por el buen orden de los ordinales) $\mathbf{K}$ tiene un menor elemento. Sea α dicho menor elemento. Y sea $z \in \mathbf{M}$ un conjunto de menor rango ($\rho(z) = \alpha$) tal que $z = \pi(x) = \pi(y)$ para algún $x \neq y$. Entonces, como $\mathbf{E}$ es extensional, $pred(\mathbf{P}, x, \mathbf{E}) \neq pred(\mathbf{P}, y, \mathbf{E})$. Y existe, por ejemplo, (sin perder generalidad), algún $u \in pred(\mathbf{P}, x, \mathbf{E})$ tal que $u \notin pred(\mathbf{P}, y, \mathbf{E})$. Sea $t = \pi(u)$. Dado que $t \in z = \pi(y)$, existe un $v \in pred(\mathbf{P}, y, \mathbf{E})$ tal que $t = \pi(v)$. En consecuencia, $t = \pi(u) = \pi(v)$, $u \neq v$. Y t es de menor rango que z dado que $t \in z$. Esto contradice el menor rango de z. Por lo tanto, π es inyectiva.

Con la inyectividad de π se probará la otra propiedad que falta para que π sea un isomorfismo:

$$x\mathbf{E}y \longleftrightarrow \pi(x) \in \pi(y).$$

Si $x\mathbf{E}y$, entonces $\pi(x) \in \pi(y)$, por la definición $(\star)$. En la otra dirección: Si $\pi(x) \in \pi(y)$, por $(\star)$, $\pi(x) = \pi(z)$ para algún $z\mathbf{E}y$. Como π es inyectiva, se cumple que $x = z$, entonces $x\mathbf{E}y$. Lo que se quería probar.

La unicidad del isomorfismo π y de la clase transitiva $\mathbf{M} = \pi(\mathbf{P})$, se sigue del siguiente Lema:

Lema 3.10.4. *Sea $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ dos clases transitivas, y g un $\in$-isomorfismo de $\mathbf{T}_1$ en $\mathbf{T}_2$, es decir, g es una función biyectiva de $\mathbf{T}_1$ en $\mathbf{T}_2$ tal que $x \in y \longleftrightarrow g(x) \in g(y)$. Entonces: $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ y $g(u) = u$ para todo $u \in \mathbf{T}_1$.*

Demostración del Lema:

Sea demostrará $g(u) = u$ para todo $u \in \mathbf{T}_1$, usando $\in$-inducción. Sea $x \in \mathbf{T}_1$ y supóngase que para todo $z \in x$ se cumple lo que se quire, es decir, que $g(z) = z$. Sea $y = g(x)$. Se probará que $x = y$. $x \subseteq y$, porque si $z \in x$, entonces por Hipótesis inductiva $z = g(z) \in g(x) = y$. También se tiene que $y \subseteq x$: Sea $t \in y$. Como $y \subseteq \mathbf{T}_2$, existe un $z \in \mathbf{T}_1$ tal que $g(z) = t$. Como $g(z) \in y$, entonces $z \in x$, y $t = g(z) = z$ por la Hipóteis inductiva. En consecuencia, $t \in x$. Por lo tanto, $g(u) = u$ para todo $u \in \mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$. Fin de la prueba del Lema.

Con el Lema anterior, y continuando con la demostración del Teorema, la demostración de la unicidad del isomorfismo π y de la clase transitiva $\mathbf{M} = \pi(\mathbf{P})$ se realiza de la siguiente manera: Si π_1 es un isomorfismo de $\mathbf{P}$ en $\mathbf{M}_1$, y π_2 es un isomorfismo de $\mathbf{P}$ en $\mathbf{M}_2$, entonces $\pi_2 \circ {\pi_1}^{-1}$ es un isomorfismo entre $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$, y por el Lema, $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2$ y $\pi_2 \circ {\pi_1}^{-1}$ es la función identidad, por lo tanto,$\pi_2 = \pi_1$.

Falta probar (3): Por hipótesis $\mathbf{P}$ es es extensional, es decir, $\mathbf{E} =\in$, entonces se considera $\pi(x) = \{\pi(z) : z \in x \cap \mathbf{P}\}$. Si $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{P}$ es transitiva, entonces se tiene que $x \subseteq \mathbf{P}$ para cualquier $x \in \mathbf{T}$, y por lo tanto $x \cap \mathbf{P} = x$, y se tiene que,

$$\pi(x) = \{\pi(z) : z \in x\},$$

para todo $x \in \mathbf{T}$. En consecuencia, se sigue fácilmente por $\in$-inducción que $\pi(x) = x$ para todo $x \in \mathbf{T}$. Con esto termina la demostración del Teorema. $\square$

3.11 El Principio de Reflexión

A continuación se enuncia y demuestra el Teorema de Reflexión (Montague, 1960- Lévy, 1961), este Teorema es una versión del Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski hacia abajo (1956) de la Teoría de Modelos, como se comentó en la sección anterior (2). El Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski hacia bajo establece que cualquier modelo tiene un submodelo elemental, y el

Principio de Reflexión provee, para cualquier número finito de fórmulas, un conjunto M que es igual a un "submodelo elemental" del universo $\mathbf{V}$ (la Jeraruía de acumulativa de conjuntos de von Neumann). La formulación y la prueba que aquí se hace sigue las ideas de [J1] y [K].

Teorema 3.11.1 (Principio de Reflexión). *(1) Sea $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula. Para cada conjunto M_0 existe un conjunto $M \supseteq M_0$ tal que,*

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)^M \longleftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n),$$

para cada $x_1, \dots, x_n \in M$. (Se dice que M refleja a φ.)

(2) Más todavía, existe un conjunto transitivo $M \supseteq M_0$ tal que M refleja a φ. Y más todavía, existe existe un ordinal α tal que $V_\alpha \supseteq M_0$ y V_α refleja a φ.

(3) Si se asume el Axioma de elección, entonces existe un conjunto $M \supseteq M_0$ tal que M refleja a φ y $\mid M \mid \leq$ máx$(\mid M_0 \mid, \aleph_0)$. En particular, existe un conjunto numerable M que refleja a φ. $\square$

Demostración: ([J1])

Primero se demostrará el siguiente Lema:

Lema 3.11.2. *(1) Sea $\varphi(u_1, \dots, u_n, x)$ una fórmula. Para cada conjunto M_0 existe un conjunto $M \supseteq M_0$ tal que,*

$$\exists x \varphi(u_1, \dots, u_n, x) \Longrightarrow \exists x \in M \varphi(u_1, \dots, u_n, x), \quad (\spadesuit)$$

para cualquier $u_1, \dots, u_n \in M$. Asumiendo el Axioma de elección, existe un $M' \supseteq M_0$ tal que ($\spadesuit$) ocurre para M' y $\mid M' \mid \leq \mid M_0 \mid .\aleph_0$.

(2) Si $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ son fórmulas, entonces para cada conjunto M_0 existe un conjunto $M \supseteq M_0$ tal que ($\spadesuit$) ocurre para cada $\varphi_1, \dots, \varphi_k$.

Demostración del Lema:

Se ofrecerán los detalles de la prueba de (1), después con dicha prueba se puede demostrar (2) reiterando el mismo procedimiento un número finito de veces para cada una de las fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$.

El equivalente a las funciones de Skolem en la prueba del Teorema de Löwenheim-Skolem que se mencionaron en la sección anterior (2) cuando se definió "submodelo elemental" serán las operaciones $H(u_1, \ldots, u_n)$ que se definen de la siguiente manera:

Sea C una clase cualquiera, y sea,

$$\hat{C} = \{x \in C : (\forall z \in C)\rho(x) \leq \rho(z)\}.$$

$\hat{C}$ es siempre un conjunto. Y si C es no vacío, entonces $\hat{C}$ es también es no vacío.

Para cada $u_1, \ldots, u_n$, sea,

$$H(u_1, \ldots, u_n) = \hat{C},$$

donde,

$$C = \{x : \varphi(u_1, \ldots, u_n, x)\}.$$

En consecuencia, $H(u_1, \ldots, u_n)$ es un conjunto que tiene la siguiente propiedad:

$$\exists x \varphi(u_1, \ldots, u_n, x) \Longrightarrow \exists x \in H(u_1, \ldots, u_n)\varphi(u_1, \ldots, u_n, x).$$

Ahora se construye el conjunto M, por inducción en $\mathbb{N}$, a partir del conjunto M_0 de la siguiente manera:

$$M_0 = M_0$$

$$M_{i+1} = M_i \cup \bigcup\{H(u_1, \ldots, u_n) : u_1, \ldots, u_n \in M_i\}$$

$$M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i.$$

Por la construcción anterior de M se puede concluir que si $u_1, \ldots, u_n \in M$, entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $u_1, \ldots, u_n \in M_i$. Y si $\varphi(u_1, \ldots, u_n, x)$ ocurre para algún x, entonces ocurre para algún $x \in M_{i+1}$. Con esto termina la prueba de la primera parte de (1). Para la segunda parte que tiene que ver con el Axioma de elección se procede como sigue:

Asumiendo el Axioma de elección, sea F una función selectora sobre el conjunto $P(M)$. Para cualquier $u_1, \ldots, u_n \in M$, sea $h(u_1, \ldots, u_n) = F(H(u_1, \ldots, u_n))$. (Notar que $h(u_1, \ldots, u_n)$ no está definido si $H(u_1, \ldots, u_n)$ es vacío).

Ahora se define inductivamente el conjunto M' de manera análoga a como se definió el conjunto M, pero usando la función selectora h:

$$M_0^{'} = M_0$$

$$M_{i+1}^{'} = M_i^{'} \cup \bigcup \{h(u_1, \ldots, u_n) : u_1, \ldots, u_n \in M_i^{'}\}$$

$$M^{'} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i^{'}.$$

En consecuencia, por la contrucción de M' la condición ($\spadesuit$) también se cumple para M' de igual manera a como se cumple para M. Y adicionalmente, como cada $M_i^{'}$ tiene cardinalidad a lo sumo $\mid M_0 \mid .\aleph_0$, entonces la cardinalidad de M' será también a lo sumo $\mid M_0 \mid .\aleph_0$. Con esto termina la demostración de la cláusula (1) del Lema, la cláusula (2) del mismo sale con la cláusula (1) reiterando el mismo procedimiento un número finito de veces para cada una de las fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ (como se dijo anteriormente). Fin de la prueba del Lema.

Con el Lema demostrado, ahora se procederá con la demostración del Teorema (El Principio de Reflexión):

Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula. Se puede asumir que en φ no ocurren cuantificadores universales pues se pueden reeplazar por existenciales de la forma conocida ($\forall x$ por $\neg\exists x\neg$).

Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ todas las subfórmulas de φ.

Dado un conjunto M_0 existe por el Lema anterior un conjunto $M \supseteq M_0$ tal que,

$$\exists x \varphi_j(u, \ldots, x) \Longrightarrow \exists x \in M \varphi(u \ldots, x), \;\; j = 1, \ldots, k$$

para cualquier $u, \ldots \in M$ $\quad$ ($\clubsuit$).

Se afirma que que M refleja a cada subfórmula de φ, es decir, a cada φ_j, donde $j = 1, \ldots, k$. Por lo tanto M refleja φ. Esta afirmación se demstrará por inducción en el rango de las subfórmulas φ_j.

Se demostrará que $\forall n \in \mathbb{N} \forall \chi[(\chi$ es subfórmula de φ y $rango(\chi) = n) \rightarrow P(\chi)]$, donde P es la propiedad: "M refleja a χ".

Caso base: $n = 0$. Se probará que $\forall \chi[(\chi$ es subfórmula de φ y $rango(\chi) = 0) \rightarrow P(\chi)]$. Sea σ una subfórmula de φ tal que rango(σ)=0. Entonces σ es una subfórmula atómica y trivialmente "M refleja a σ".

Caso inductivo: Sea $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$, y supóngase para toda $s < m$ se cumple que $\forall \chi[(\chi$ es subfórmula de φ y $rango(\chi) = s) \rightarrow P(\chi)]$. Se debe probar que $\forall \chi[(\chi$ es subfórmula de φ y $rango(\chi) = m) \rightarrow P(\chi)]$.

Sea σ una subfórmula de φ de rango m. Por definición $\sigma = \neg\alpha$ o $\sigma = \alpha \rightarrow \beta$ o $\sigma = \alpha \wedge \beta$ o $\sigma = \alpha \vee \beta$ o $\sigma = \alpha \leftrightarrow \beta$ o $\sigma = \exists x \alpha$. Donde α y β son subfórmulas de φ.

Primer caso: σ es una subfórmula de los cinco primeros casos, es decir, σ es una negación, o una conjunción, o una disyunción, o una implicación o un bicondicional. Entonces como $rango(\alpha) < m$ y $rango(\beta) < m$, se tiene por Hipótesis inductiva que M refleja a α y a β, y la prueba concluye fácilmente en estos casos aplicando la Hipótesis inductiva y la definición de satisfacibilidad.

Segundo caso: $\sigma = \exists x\alpha$. Entonces como $rango(\alpha) < m$, se tiene por Hipótesis inductiva que M refleja a α. Entonces:

Si $u_1, \ldots, u_n \in M$, entonces:

$$M \models \exists x\alpha(u_1, \ldots, u_n, x) \longleftrightarrow \exists x \in M\alpha^M(u_1, \ldots, u_n, x)$$

(Por definición de satisfacibilidad)

$$\exists x \in M\alpha^M(u_1, \ldots, u_n, x) \longleftrightarrow \exists x \in M\alpha(u_1, \ldots, u_n, x)$$

(Por Hipótesis Inductiva)

$$\exists x \in M\alpha(u_1, \ldots, u_n, x) \longleftrightarrow \exists x\alpha(u_1, \ldots, u_n, x)$$

(de derecha izquierda ocurre por (♣))

Por lo tanto,

$$M \models \exists x\alpha(u_1, \ldots, u_n, x) \longleftrightarrow \exists x\alpha(u_1, \ldots, u_n, x).$$

Con esto finaliza la prueba cláusula (1) del teorema. La parte (3) se puede probar haciendo M de tamaño a lo sumo $\mid M_0 \mid .\aleph_0$, tal como se hizo en la prueba del Lema. Para demostrar la cláusula (2) se tiene que modificar la prueba del Lema de modo que el conjunto M usado en ♠ sea transitivo o sea un V_γ específico. Esto se logra reemplazando en la prueba del Lema a M_{i+1} por su clausura transitiva o por el menor V_γ tal que $M_{i+1} \subseteq V_\gamma$, siempre existe tal V_γ porque M_{i+1} es un conjunto. Con esto concluye la prueba del Teorema. $\square$

4 El Teorema de Completitud de Gödel para lenguanjes de cualquier cardinalidad

4.1 Introducción

En esta sección se describe una demostración del Teorema de Completitud de Gödel para la Lógica de primer orden con lenguajes de cualquier cardinalidad, la cual se debe a Henkin (1949) [He]. La versión que aquí se realiza utiliza ideas (principalmente) de [Ch-Ke], [E2] y [D2], y la misma consiste fundamentalmente en la demostración de tres lemas. Es importante resaltar que esta prueba usa el Axioma de elección y que dicho axioma no se necesita si se tratara de lenguajes numerables (versión que es la más encontrada en los textos actuales de introducción a la lógica matemática).

La versión generalizada del Teorema de Completitud de Gödel (para lenguajes de cualquier cardinalidad) que se presenta aquí es importante porque (entre otras razones) permite demostrar resultados relevantes para la Teoría de Modelos como por ejemplo el Teorema de Compacidad, el Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski hacia abajo y el Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski hacia arriba [Ch-Ke], [Ma].

4.2 El Teorema de Corrección

Teorema 4.2.1 (Teorema Corrección). *Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje $\mathcal{L}$ y φ una sentencia de $\mathcal{L}$. Entonces:*

$$\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \Sigma \models \varphi.$$

Demostración:

Se demuestra de manera análoga a la prueba realizada en la sección (2) la única diferencia es que aquí existe un conjunto de premisas Σ. $\square$

El siguiente Corolario es una proposición equivalente al Teorema de Corrección:

Corolario 4.2.2.

$$\Sigma \text{ tiene un modelo} \Rightarrow \Sigma \text{ es consistente.}$$

4.3 El Teorema de Completitud de Gödel con lenguajes de cualquier cardinalidad

Teorema 4.3.1 (El Teorema de Completitud de Gödel generalizado). *Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje $\mathcal{L}$ y φ una sentencia de $\mathcal{L}$. Entonces:*

$$\Sigma \models \varphi \Rightarrow \Sigma \vdash \varphi.$$

Demostraremos el Teorema de Completitud generalizado demostrando una propososición que es equivalente al mismo:

Proposición 4.3.2.

$$\Sigma \text{ es consistente} \Rightarrow \Sigma \text{ tiene un modelo.}$$

La demostración de la Proposición se realizará utilizando (esencialmente) tres lemas previos (*Primer Lema*, *Segundo Lema* y *Tercer Lema*), los cuales probaremos a continuación y al final de la prueba de los mismos se hará la prueba de la Proposición:

Definición 4.3.3. *Sea Σ un conjunto de sentencias del lenguaje $\mathcal{L}$ y C un conjunto de constantes de $\mathcal{L}$. Decimos que C es un* **conjunto de testigos para Σ en $\mathcal{L}$** *si para toda fórmula φ de $\mathcal{L}$ con a lo sumo una variable libre(digamos, x) existe una $c \in C$ tal que:*

$$\Sigma \vdash \neg\forall x\varphi(x) \rightarrow \neg\varphi(c).$$

(Utilizando el cuantificador existencial se podría reescribir la expresión anterior así: $\Sigma \vdash \exists x\neg\varphi(x) \rightarrow \neg\varphi(c)$).

Lema 4.3.4 (Primer Lema). *Sea Σ un conjunto consistente de sentencias de $\mathcal{L}$ y C un conjunto de nuevas constantes tal que $\mid C \mid = \mid \mathcal{L} \mid$. Sea $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup C$. Entonces Σ se puede extender a un conjunto consistente de sentencias Σ' en $\mathcal{L}'$ tal que C es un conjunto de testigos para Σ' en $\mathcal{L}'$.*

Demostración del Lema:

Supongamos que $\mid \mathcal{L} \mid = \aleph_\alpha$ para algún ordinal α, y sea $C = \{c_\gamma : \gamma < \aleph_\alpha\}$.

Sea $\varphi_0(x_0)$, $\varphi_1(x_1)$,..., $\varphi_\beta(x_\beta)$, ... $(\beta < \aleph_\alpha)$ una lista de todas las fórmulas con a lo sumo una varible libre de $\mathcal{L}'$, donde x_β es la variable libre de φ_β y $x_\beta = v_0$ en caso contrario.

Ahora se definirá, a partir de Σ y por inducción transfinita en $\aleph_\alpha$, una secuencia creciente de conjuntos de setencias de $\mathcal{L}'$ $\Sigma = \Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \ldots \Sigma_\beta \ldots$ $(\beta < \aleph_\alpha)$, y una secuencia de constantes de C $c_{\gamma_0}, \ldots, c_{\gamma_\beta}, \ldots$

$\beta < \aleph_\alpha$, con unas características que permitirán obtener el resultado buscado:

Definición:

$$\Sigma_0 = \Sigma$$

$$\Sigma_{\xi+1} = \Sigma_\xi \bigcup \{\neg \forall x_\xi \varphi_\xi(x_\xi) \rightarrow \neg(\varphi_\xi)^{x_\xi}_{c_{\gamma_\xi}}\},$$

donde γ_ξ es el menor ordinal de $\aleph_\alpha$ tal que c_{γ_ξ} no aparece en Σ_ξ ni en $\varphi_\xi(x_\xi)$. Tal constante siempre existe pues si A es un conjunto infinito y $B \subseteq A$ tal que $\mid B \mid < \mid A \mid$, entonces $\mid A \setminus B \mid = \mid A \mid$ [D1].

$$\Sigma_\lambda = \bigcup_{\theta \in \lambda} \Sigma_\theta$$
(λ un ordinal límite)

Una vez concluída la definición de las secuencias ahora definimos a Σ':

$$\Sigma' = \bigcup_{\delta \in \aleph_\alpha} \Sigma_\delta$$

Por la construcción de Σ' se tiene que C es un conjunto de testigos para Σ' en $\mathcal{L}'$. Falta probar que Σ' es consistente y para probar esto es suficiente con demostrar que $\forall\delta \in \aleph_\alpha(\Sigma_\delta$ es consistente). Se probará esto por inducción transfinita en δ:

(1) $\delta = 0$

$\Sigma_0 = \Sigma$, por lo tanto Σ_0 es consistente por la hipótesis.

(2) $\delta = \mu + 1$, y se supone que Σ_μ es consistente.

$\Sigma_{\mu+1} = \Sigma_\mu \ \bigcup\{\neg\forall x_\mu \varphi_\mu(x_\mu) \rightarrow \neg(\varphi_\mu)^{x_\mu}_{c_{\gamma_\mu}}\}$

Si $\Sigma_{\mu+1}$ es inconsistente, entonces por el Teorema antes formulado ($\Gamma \vdash \neg\varphi$ si y sólo si $\Gamma \bigcup\{\varphi\}$ es inconsistente) se tiene que:

$$\Sigma_\mu \vdash \neg[\neg\forall x_\mu \varphi_\mu(x_\mu) \rightarrow \neg(\varphi_\mu)^{x_\mu}_{c_{\gamma_\mu}}]$$

Esto implica, por el Axioma 1, que:

$$\Sigma_\mu \vdash \neg\forall x_\mu \varphi_\mu(x_\mu) \qquad (\star)$$

$$\Sigma_\mu \vdash (\varphi_\mu)^{x_\mu}_{c_{\gamma_\mu}} \qquad (\circ)$$

Entonces, como c_{γ_μ} no aparece en Σ_μ ni en φ_μ, aplicando el Corolario del Teorema de Genaralización de Constantes en $(\circ)$ se tiene que $\Sigma_\mu \vdash \forall x_\mu \varphi_\mu(x_\mu)$. Este hecho y $(\star)$ indican que Σ_μ es inconsistente, lo cual contradice la Hipótesis Inductiva.

(3) $\delta = \lambda$, donde λ es un ordinal límite y se supone que para todo $\theta < \lambda$, Σ_θ es consistente.

$\Sigma_\lambda = \bigcup_{\theta \in \lambda} \Sigma_\theta$

Si Σ_λ es inconsistente, entonces (por el carácter finito de la demostración) existe un $\theta \in \lambda$ tal que Σ_θ es inconsistente. Esto contradice la Hipótesis Inductiva.

Con esto concluye la demostración del Lema. $\square$

Para continuar con la demostración se necesita una definición previa.

Definición 4.3.5. *Sea Δ un conjunto de fórmulas para un lenguaje $\mathcal{L}$. Δ es maximal consistente si Δ es consistente y no existe un conjunto de sentencias consistente Γ que contenga propiamente a Δ, es decir, un Γ tal que $\Delta \subseteq \Gamma$ y exista una fórmula γ tal $\gamma \in \Gamma$ y $\gamma \notin \Delta$.*

Algunas propiedades sobresalientes de los conjuntos de fórmulas que son maximal consistentes se enuncian a continuación mediante el siguiente lema (el cual se puede demostrar sin dificultad usando las definiciones).

Lema 4.3.6 (Propiedades de maximal consistencia). *Sea Δ un conjunto de fórmulas para un lenguaje $\mathcal{L}$ que es maximal consistente, sean φ y ψ fórmulas de $\mathcal{L}$. Entonces:*

(1) $\Delta \vdash \varphi$ si y sólo si $\varphi \in \Delta$.

(2) $\neg\varphi \in \Delta$ si y sólo si $\varphi \notin \Delta$.

(3) $(\varphi \wedge \psi) \in \Delta$ *si y sólo si* $\varphi \in \Delta$ *y* $\psi \in \Delta$.

(4) $(\varphi \vee \psi) \in \Delta$ *si y sólo si* $\varphi \in \Delta$ *o* $\psi \in \Delta$.

(5) $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Delta$ *si y sólo si* $\varphi \notin \Delta$ *o* $\psi \in \Delta$.

(6) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \Delta$ *si y sólo si* $\{\varphi \in \Delta$ *y* $\psi \in \Delta\}$ *o* $\{\varphi \notin \Delta$ *y* $\psi \notin \Delta\}$.

Lema 4.3.7 (Segundo Lema (Lema de Lindenbaum)). *Todo conjunto consistente de sentencias* Σ *tiene una extensión maximal consistente.*

Demostración del Lema:

Usando el Lema de Zorn (ver el enunciado en la sección anterior (3)) se puede obtener una extensión maximal consistente de Σ. Sin embargo, también se puede demostrar dicho resultado haciendo una construcción inductiva en el cardinal del lenguaje $\mathcal{L}$ de Σ, esta es la manera como se realizará la demostración.

Supongamos que $\mid \mathcal{L} \mid = \aleph_\alpha$, para algún ordinal α. Listamos todas las sentencias de $\mathcal{L}$:

$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\beta, \ldots$ $(\beta < \aleph_\alpha)$. Y definimos, a partir de Σ y por inducción transfinita en $\aleph_\alpha$, una secuencia creciente de conjuntos de sentencias de $\mathcal{L}$:

Definición:

$$\Sigma_0 = \Sigma$$

$$\Sigma_{\gamma+1} = \begin{cases} \Sigma_\gamma \cup \{\varphi_\gamma\} & \text{si } \Sigma_\gamma \cup \{\varphi_\gamma\} \text{ es consistente} \\ \Sigma_\gamma & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\Sigma_\lambda = \bigcup_{\theta \in \lambda} \Sigma_\theta$$
$$(\lambda \, \text{un ordinal límite})$$

Una vez concluída la definición de la secuencia ahora definimos a Σ':

$$\Sigma' = \bigcup_{\delta \in \aleph_\alpha} \Sigma_\delta$$

Se cumple que Σ' es maximal consistente:

(1) Σ' es consistente: Esto ocurre porque por construcción $\forall \gamma \in \aleph_\alpha (\Sigma_\gamma$ es consistente).

(2) Σ' es maximal consistente:

Si no es maximal, entonces existe un conjunto consistente de setencias de $\mathcal{L}$, Γ, tal que $\Gamma \supseteq \Sigma'$ y existe una sentencia ψ tal que $\psi \in \Gamma$ y $\psi \notin \Sigma'$. En consecuencia, por la construcción de Σ' se tiene que para algún $\mu \in \aleph_\alpha$,

$$\Sigma_\mu \cup \{\varphi_\mu\} \text{ es inconsistente,}$$

donde $\varphi_\mu = \psi$.

Pero $\Sigma_\mu \cup \{\varphi_\mu\} \subseteq \Gamma$ y por lo tanto Γ es incosnsistente. Contradicción.

Con esto termina la demostración del Lema. $\Box$

Lema 4.3.8 (Tercer Lema). *Si Σ es un conjunto consistente de sentencias de $\mathcal{L}$ y tiene un conjunto de testigos C, entonces Σ tiene un modelo de cardinalidad a lo sumo $\mid \mathcal{L} \mid$.*

Demostración del Lema:

Se puede suponer que Σ es maximal consistente, pues de no serlo se extendería (usando el lema anterior) a un conjunto Σ' maximal consistente que también tendría a C como un conjunto de testigos en $\mathcal{L}$. En consecuencia supongamos que Σ es maximal consistente.

Ahora se procederá a definir la estructura o interpretación $\mathfrak{A}$ para $\mathcal{L}$, la cual será el modelo buscado de Σ.

Sea T el conjunto de todos los términos cerrados de $\mathcal{L}$. Para no tener problemas con las sentencias atómicas de Σ se define sobre T una relación de equivalencia de la siguiente manera:

$$t_1 \sim t_2 \text{ si y sólo si } t_1 \equiv t_2 \in \Sigma.$$

Notar que $\sim$ es una relación de equivalencia porque la relación de identidad es reflexiva, simétrica y transitiva (Teorema anterior 3.3.6).

Sea $T/\sim = \{[t] : t \,\text{es un término cerrrado de}\, \mathcal{L}\}$ el conjunto cociente determinado por $\sim$.

Notar que el cardinal de $T/\sim$ es a lo sumo $\mid \mathcal{L} \mid$. En efecto, $\alpha \times \alpha \approx \alpha$ para todo ordinal α [D1], y además: Si cualquier miembro de un conjunto X tiene cardinalidad a lo sumo κ, entonces $\mid \bigcup X \mid \leq \mid X \mid . \ \kappa$ (la prueba de este resultado usa el AE) [E1].

El universo A de la estructura $\mathfrak{A}$ es el conjunto cociente $T/\sim$. Y las interpretaciones en $\mathfrak{A}$ para los símbolos de $\mathcal{L}$ son las siguientes:

(1) Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos cerrados de $\mathcal{L}$ y R es un símbolo relacional n-ario de $\mathcal{L}$ entonces,

$$R^{\mathfrak{A}}([t_1], \ldots, [t_n]) \Longleftrightarrow R(t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma.$$

(2) Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos cerrados de $\mathcal{L}$ y f es un símbolo funcional n-ario de $\mathcal{L}$ entonces,

$$f^{\mathfrak{A}}([t_1], \ldots, [t_n]) = [f(t_1, \ldots, t_n)].$$

(3) Si c es una constante de $\mathcal{L}$, entonces,

$$c^{\mathfrak{A}} = [c].$$

Notar que para cada $s : VAR \longrightarrow A$ el valor de t en $\mathfrak{A}$ según s es $[t]$, para todo término cerrado t, es decir, $t_{\mathfrak{A}}[s] = [t]$.

Una vez que se ha definido la estructura $\mathfrak{A}$ se demostrará que para cada sentencia φ,

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in \Sigma. \quad (\otimes)$$

Dicha demostración se realizará por inducción en el rango de φ ($rango(\varphi)$), donde el $rango(\varphi)$= número de conectivas y cuantificadores de φ.

(i) $rango(\varphi) = 0$.

(i.1) $\varphi = t_1 \equiv t_2$:

$\mathfrak{A} \models t_1 \equiv t_2$ si y sólo si $[t_1] = [t_2]$ si y sólo si $t_1 \equiv t_2 \in \Sigma$.

(i.2) $\varphi = R(t_1, \ldots, t_2)$:

$\mathfrak{A} \models R(t_1, \ldots, t_2)$ si y sólo si $R^{\mathfrak{A}}([t_1], \ldots, [t_n])$ si y sólo si $R(t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma$.

(ii) $rango(\varphi) = k$, donde $k \in \mathbb{N}$ y $k > 0$. Y supongamos que para toda sentencia de rango menor que k se cumple ($\otimes$).

(ii.1) $\varphi = \neg\psi$:

$\mathfrak{A} \models \neg\psi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \not\models \psi$ si y sólo si (H.I) $\psi \notin \Sigma$ si y sólo si (maximal) $\neg\psi \in \Sigma$.

(ii.2) $\varphi = \phi \rightarrow \psi$:

$\mathfrak{A} \models \phi \to \psi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \not\models \phi$ o $\mathfrak{A} \models \psi$ si y sólo si (H.I) $\phi \notin \Sigma$ o $\psi \in \Sigma$ si y sólo si (máximal) $\phi \to \psi \in \Sigma$.

(ii.3) $\varphi = \forall x \psi$:

Se probará por contraposición que si $\mathfrak{A} \models \forall x\psi$, entonces $\forall x\psi \in \Sigma$. Si $\forall x\psi \notin \Sigma$, entonces (maximal) $\neg\forall x\psi \in \Sigma$. En consecuencia, como C es un conjunto de testigos para Σ en $\mathcal{L}$, se tiene que existe un $c \in C$ tal que $\Sigma \vdash \neg\forall x\psi(x) \to \neg\psi(c)$. Por lo tanto, $\Sigma \vdash \neg\psi(c)$. De modo que por ser Σ maximal se infiere que $\neg\psi(c) \in \Sigma$. Entonces por la Hipótesis inductiva $\mathfrak{A} \models \neg\psi(c)$. Entonces, $\mathfrak{A} \not\models \forall x\psi$.

Ahora se probará la otra dirección: Si $\forall x\psi \in \Sigma$, entonces $\mathfrak{A} \models \forall x\psi$. Si $\forall x\psi \in \Sigma$, entonces como la siguiente fórmula es un axioma,

$$\forall x\psi \to \psi^x_t,$$

donde t se puede sustituir por x en ψ. En consecuencia $\psi^x_t \in \Sigma$ (maximal).

Entonces por Hipótesis inductiva se tiene que $\mathfrak{A} \models \psi^x_t$, para cualquier término cerrado t. Esto implica que $\mathfrak{A} \models \forall x\psi$.

Con esto termina la demostración del Lema. $\square$

Finalmente se demuestra la Proposición equivalente al Teorema de Completitud generalizado usando los tres Lemas demostrados anteriormente: Primer Lema (Lema 4.3.4), Segundo Lema (Lema 4.3.7) y Tercer Lema (Lema 4.3.8):

$$\Sigma \text{ es consistente} \Rightarrow \Sigma \text{ tiene un modelo.}$$

Sea Σ un conjunto consistente de sentencias de un lenguaje $\mathcal{L}$ y supogamos que $\aleph_\alpha =\mid \mathcal{L} \mid$, para algún ordinal α. Sea C un conjunto de nuevas constantes tal que $\mid C \mid = \aleph_\alpha$. Usando el primer lema podemos extender Σ a un conjunto consistente de sentencias Σ' de modo que C sea un conjunto de testigos para Σ' en $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \mathcal{C}$. Luego, usando el segundo Lema podemos extender Σ' a un conjunto Σ'' de $\mathcal{L}'$ que sea maximal consistente y tenga a C como un conjunto de testigos en $\mathcal{L}'$. Entonces usando el tercer Lema se construye el modelo $\mathfrak{A}$ para Σ''. La cardinalidad del universo de $\mathfrak{A}$ es a lo sumo $\aleph_\alpha$. Como $\Sigma \subseteq \Sigma''$, $\mathfrak{A}$ es también un modelo para Σ, y más específicamente el modelo buscado es $\mathfrak{A}$ restringido al lenguaje $\mathcal{L}$ de Σ. Con esto termina la demostración del Teorema de Completitud de Gödel para lenguajes de cualquier cardinalidad.
$\square$

Algunas consecuencias muy conocidas de los Teoremas de Corrección y Completitud (generalizados) son las siguientes:

Corolario 4.3.9 (Teorema de Lӧwenheim-Skolem-Tarski hacia abajo). *Todo conjunto de sentencias Σ de $\mathcal{L}$ que sea consistente tiene un modelo de cardinalidad a lo sumo $\mid \mathcal{L} \mid$.*

Corolario 4.3.10 (Teorema de Completitud de Gӧdel, 1930).

$$\models \varphi \quad \textit{entonces} \ \vdash \varphi.$$

Corolario 4.3.11 (Teorema de Compacidad). *Un conjunto de sentencias Σ tiene un modelo si y sólo si cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo.*

Corolario 4.3.12 (Teorema de Lӧwenheim-Skolem-Tarski hacia arriba). *Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje $\mathcal{L}$. Si Σ tiene un modelo infinito, entonces Σ tiene modelos de cualquier cardinalidad $\kappa \geq \mid \mathcal{L} \mid$.*

Referencias

[A] J. Amor. *El Problema del Continuo después de Cohen (1964-2004).* Aportaciones Matemáticas. Memorias 35 (2005), 71-80.

[A-K] W. Aspray - P. Kitcher. *History and Philosophy of Modern Mathematics.* Volumen 11. University of Minnesota Press. 1988.

[Ba1] J.Bagaria. *The many faces of the Continunn.* XI Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática. Universidad de los Andes. 1998.

[Ba2] J.Bagaria. *Natural Axioms of set theory and the continuum problem.* Institució Catalana de Recerca i Estudis Avacats (ICREA), and Departament de Lógica, História i Filosofia de la Ciéncia. Universitat de Barcelona. 2004.

[Bel]J. Bell. *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.* Clarendon Press. Oxford.1979.

[Bea] P. Bernays. *El Platonismo en Matemáticas* (1934). Universidad Central de Venezuela. 1982.

[C1] P. Cohen. *The Independence of continuum hypothesis I.* Procedings of the National Academy of Science U.S.A. 50 (1963), 1143-1148.

[C2] P. Cohen. *The Independence of continuum hypothesis II.* Procedings of the National Academy of Science U.S.A. 51 (1964), 105-110.

[C3] P. Cohen. *Set Theory and The Continuum Hypothesis.* Dover Publications. 2008.

[Co]I. Copi. *Lógica Simbólica.* Compañía Editorial Continetal, S. A. 1998.

[Ch-Ke] C. Chang - H. Keisler. *Model Theory.* Dover Publications. 2012.

[Ch] A. Church. *Introduction to mathematical logic.* Princeton: Princeton University Press. 1996.

[D1] C. Di Prisco. *Teoría de Conjuntos.* Universidad Central de Venezuela: Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico. 2009.

[D2] C. Di Prisco. *Introdución a la Lógica Matemática.* Emalca Amazonia. 2009.

[D3] C. Di Prisco. *Are we closer to a solution of the continuum problem?*. Rev. Int. Fil., Campinas, V. 28, n. 2, p. 331-350. 2005.

[D4] C. Di Prisco. *Inmersiones elementales y cardinales grandes*. Notas no publicadas. 1982.

[E-F-T] H. Ebbingahaus - J. Flum - W. Thomas. *Mathematical Logic*. Springer. 1996.

[E1] H. Enderton. *Elements Set Theory*. Academic Press. 1977.

[E2] H. Enderton. *Una Introducción Matemática a la Lógica*. Universidad Nacional Autónoma de México. 2004.

[EP] Blog: especulacionpura.blogspot.com.ar. Entrada: *La forma normal de Skolem, segunda parte*. 12-10-2012.

[Fe] J. Ferreirós. *Matemáticas y platonismo(s)*. La Gaceta de la Real Sociedad Española de Matemáticas 2 (1999), 446-473.

[Gar] M. Garrido. *Lógica Simbólica*. Tecnos. 2003.

[G1] K. Gödel. *Obras Completas*. Alianza. 1981.

[G2] K. Gödel. *¿ Qué es el problema del continuo de Cantor ?* (1947). En "Obras Completas" de Gödel. Alianza. 1981.

[G3] K. Gödel. *La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden* (1930). En "Obras Completas" de Gödel. Alianza. 1981.

[G4] K. Gödel. *Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines* (1931). En "Obras Completas" de Gödel. Alianza. 1981.

[G5] K. Gödel. *La consistencia del Axioma de Elección y la Hipótesis generalizada del continuo con los axiomas de la teoría de conjuntos* (1940). En "Obras Completas" de Gödel. Alianza. 1981.

[G6] K. Gödel. *Some cosiderations leading to the probable conclusion that the true power of the continuum is* $\aleph_2$. En K. Gödel *Collected Works* , vol. 3. S. Feferman, J. Dawson Jr., W. Goldfarb, C. Parsons and R. Solovay(eds.). Oxford: Oxford niversity Press. 2001.

[Ham] A. Hamiltom. *Lógica para Matemáticos*. Paraninfo. 1981.

[He] L. Henkin. *The completenes of first-order lenguages*. The Journal of Symbolic Logic 14 (1949) 159-166.

[Hij] J. Hijenoort.*From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Harvard University Press. 1976.

[H-A] D. Hilbert - W. Ackermann. *Elementos de lógica teórica*. Tecnos. 1962.

[H-R] P. Howard - J. Rubin. *Consequences of the Axiom of Choice*. American Mathematical Society. 1998.

[H-J] K. Hrbacek - T. Jech. *Introduction to set theory*. Marcel Dekker, Inc. 1999.

[J1] T. Jech. *Set Theory*. Springer. 2006.

[J2] T. Jech. *The Axiom of Choice*. Dover Publications. 2008.

[J3] T. Jech. *Set Theory*. Academic Press, Inc. 1978.

[J4] T. Jech. *Multiple Forcing*. Cambridge: Cambridge University Press. 1986.

[J5] T. Jech. *El Infinito*. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Vol. 8, número 2, 2005.

[Ka] A. Kanamori. *The Higler Infinite*. Springer. 2009.

[K] K. Kunen. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*. College Publications. 2011.

[Ma] M. Manzano. *Teoría de Modelos*. Alianza. 1989.

[M-H] M. Manzano - A. Huertas. *Lógica para principiantes*. Alianza. 2004.

[Mat] A.R.D. Mathias. *Happy families*. Annals of Pure and Applied Logic 12 (1977) 59-111.

[Me] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman and Hall/CRL. 2009.

[Moo1] G. Moore. *A House divide against itself: The emergence of first-Order logic as the basis for mathematics*. En “Studies in the History of Mathematics”. Esther R Phillips (ed.). Mathematical Association of America. pp. 98-136. 1987.

[Moo2] G. Moore. *Zermelo’s Axiom of Choice. Its Origins, Development, and Influence*. Dover Publications. 2013.

[Moo4] G. Moore. *The emergence of First-Order Logic*. En “History and Philosophy of Modern Mathematics”. Volume XI. Editores: W. Aspray y P. Kitcher. University of Minesota Press, Minneapolis. 1988.

[Mos1] J. Mosterín. *Los Lógicos*. Espasa. 2000.

[Mos2] J. Mosterín. *El Problema de la desición en la lógica de predicados*. Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia. Universidad de Barcelona.

[Mos3] J. Mosterín. *Teoría Axiomática de Conjuntos*. Ariel. 1971.

[M-T] J. Mosterín - R. Torretti. *Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencia*. Alianza. 2002.

[N-N]E. Naguel - J. Neumann. *El Teorema de Gödel*. Tecnos. 2005.

[N-S] A. Nerode - R. Shore. *Logic for Applications*. Springer. 1997.

[Q] W. Quine. *Los métodos de la lógica*. Ariel. 1981.

[Ra] F. Ramsey. *On a problem of formal logic*. Proceedings of the London Mathematical Society, 30 (1930), 264 - 286.

[Ro] H. Royden. *Real Analysis*. Pearson.2010.

[So1] R. Solovay. *A model of set theory where every set of reals is Lebesgue measurable* . Annals of Mathematics 92 (1970) 1-56.

[S-R-W] J. Stewar - L. Redlin - S. Watson.*Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. Thomson. 2007.

[W-R] A. Whithehead - B. Russell. *Principia Mathematica* (1910). Cambridge: Cambridge University Press. 1962.