Divulgaciones Matemáticas Vol. 18, No. 1 (2017), pp. 34–54

Álgebras booleanas, órdenes parciales y axioma de elección

Boolean algebras, partial orders and axiom of choice

Franklin Galindo (franklin.galindo@ucv.ve)
Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia.
Escuela de Filosofía. Universidad Central de Venezuela.

Resumen

El objetivo de este artículo es presentar una demostración de un teorema clásico sobre álgebras booleanas y ordenes parciales de relevancia actual en teoría de conjuntos, como por ejemplo, para aplicaciones del método de construcción de modelos llamado “forcing"(con álgebras booleanas completas o con órdenes parciales). El teorema que se prueba es el siguiente: “*Todo orden parcial se puede extender a una única álgebra booleana completa (salvo isomorfismo)*". Donde *extender* significa “*sumergir densamente*". Tal demostración se realiza utilizando cortaduras de Dedekind siguiendo el texto “Set Theory"de Jech, y otras ideas propias del autor de este artículo. Adicionalmente, se formulan algunas versiones débiles del axioma de elección relacionadas con las álgebras booleanas, las cuales son también de gran importancia para la investigación en teoría de conjuntos y teoría de modelos, pues estas son poderosas técnicas de construcción de modelos, como por ejemplo, el teorema de compacidad (permite construir modelos no estándar, etc) y el teorema del ultrafiltro, que permite construir ultraproductos (pueden ser usados para investigar problemas de cardinales grandes, etc). Se presentan algunas referencias de problemas abiertos sobre el tema.

Palabras y frases claves: Álgebras booleanas, órdenes parciales, completación de álgebras booleanas, método de forcing, axioma de elección, teoría de modelos.

Abstract

The objective of this paper is to present a demonstration of a classical theorem on boolean algebras and partial orders of current relevance in set theory, as for example, for applications of model construction method called “forcing" (with boolean algebras complete or with partial orders). The theorem to be proved is as follows: “*Any partial order can be extended to a single complete boolean algebra (up to isomorphism)*". Where to *extend* means “*embed densely*". Such a demonstration is done using Dedekind's cuts following the text “Set Theory" of Jech, and other ideas of the author of this article. In addition, some weak versions of the axiom of choice related to boolean algebras are formulated, which are also of great importance for the research in set theory and model theory, since this are powerful model construction techniques, such as the compactness theorem (allows the construction of non-standard models, etc.) and the ultrafilter theorem, which allows the construction of

Recibido 18/05/2017. Revisado 01/10/2017. Aceptado 25/10/2017.
MSC (2010): Primary 03G05; Secondary 03E25.
Autor de correspondencia: Franklin Galindo

ultraproducts (can be used to investigate problems of large cardinals, etc). Some references of open problems on the subject are presented.

Key words and phrases: Boolean algebras, partial orders, completion of boolean algebras, method of forcing, axiom of choice, model theory.

1 Introducción

El objetivo de este artículo es presentar una demostración de un teorema clásico sobre álgebras booleanas y ordenes parciales de relevancia actual en teoría de conjuntos, como por ejemplo, para aplicaciones del método de construcción de modelos llamado "forcing"(con álgebras booleanas completas o con órdenes parciales). El teorema que se prueba es el siguiente: "*Todo orden parcial se puede extender a una única álgebra booleana completa (salvo isomorfismo)*". Donde extender significa "*sumergir densamente*". Tal demostración se realiza utilizando cortaduras de Dedekind siguiendo los textos de Jech: "Set Theory"(2002); "Set Theory"(1978) (ver [20, 21]); y otras ideas propias del autor de este trabajo, las cuales están presentes (principalmente) en la prueba que se presenta de un teorema previo (Teorema 4.1): "*Todo orden parcial separativo se puede extender a una álgebra booleana completa*". Adicionalmente, se formulan algunas versiones débiles del axioma de elección relacionadas con las álgebras booleanas, las cuales son también de gran importancia para la investigación en teoría de conjuntos y en teoría de modelos, pues estas son poderosas técnicas de construcción de modelos, como por ejemplo: el teorema de compacidad, que permite construir modelos no estándar; y el teorema del ultrafiltro, el cual permite construir ultraproductos que pueden ser usados para investigar problemas de cardinales grandes.

Los teoremas de compacidad y ultraproductos son importantes, como por ejemplo, para construir modelos no estándar como (entre otros) el cuerpo ordenado y no arquimideano de los Hiper-Reales (de Robinson) con el que se hace análisis no estándar (ver [6, 26]). Dicho análisis es usado actualmente con éxito en análisis real, teoría de la medida, probabilidades, topología, análisis funcional, física, teoría de números, finanzas, etc (ver [6]). También, ultraproductos es muy útil para probar teoremas de cardinales grandes (cardinales inaccesibles, cardinales medibles, etc) en el contexto de la teoría de modelos. Además, compacidad es muy exitosa para investigar problemas de definibilidad, categoricidad y axiomatizabilidad finita de teorías matemáticas, también en el conntexto de la teoría de modelos (ver [7, 26]).

Como se dijo anteriormente el teorema que se demuestra en este artículo es un resultado matemático clásico (vale la pena resaltar que según Jech, ver [20, p. 89], dicho resultado se debe originalmente a Stone [32]) y existen pruebas del mismo, como por ejemplo, demostraciones topológicas en [25, p. 63-64] y [19, p. 258-275]. Una prueba de que los abiertos regulares de un espacio topológico forman un álgebra booleana, lo cual está estrechamente vinculado con este hecho, puede encontrarse también en [15, p. 12-16]. Sin embargo, la prueba del teorema que se presenta es en parte propia del autor de este trabajo y se basa en la demostración ofrecida por Jech en [20, p. 81-83] y [21, p. 152-154]. Por ejemplo, usa las definiciones de las operaciones booleanas entre cortaduras regulares que se hace en [20, p. 81-83] y [21, p. 152-154], usando el método de las cortaduras de Dedekind. En tales libros se formulan las definiciones y se enuncia el teorema, pero no se hace explícito el porqué las mismas satisfacen las propiedades de álgebra booleana. Jech deja ese trabajo al lector de sus textos, y aquí se realiza una demostración detallada de tal hecho (Teorema 4.1), usando ideas propias del autor de este artículo. Jech tampoco prueba explícitamente la "unicidad del álgebra booleana completa que extiende al orden parcial", define explícitamente la función que garantiza el isomorfismo pero no prueba que dicha función es efectivamente un isomorfismo entre las dos álgebras booleanas completas involucradas en la prueba, aquí se ofrece una demostración detallada de tal hecho siguiendo ideas de varias fuentes y del autor de este trabajo.

El resultado previo que se demuestra en este trabajo de que *a cada orden parcial separativo le corresponde una única álgebra booleana completa (salvo isomorfismo)*, se puede extender a todo orden parcial y es conocido que el álgebra booleana completa de las cortaduras regulares de un orden parcial, es isomorfa al álgebra booleana completa de los abiertos regulares de un espacio topológico inducido por tal orden parcial [2, p. 3-4] y [19, 20, 21, 25], entre otros. Entre el orden parcial y su correspondiente álgebra booleana completa asociada existe una relación de "inmersión densa", dicha relación es importante desde el punto de vista de la lógica matemática pues permite inferir (entre otros) que las dos versiones del método de construcción de modelos de la teoría de conjuntos llamado "forcing"más usadas contemporáneamente, forcing con ordenes parciales y forcing con álgebras booleanas completas, son equivalentes, es decir, producen los mismos modelos de ZFC, una prueba de ello puede encontrarse en [25, p. 221-222] y en [21, pp. 154-156], entre otros.

Es conocido que el método de forcing es de gran utilidad (desde su creación en 1963-64 por parte de Cohen en [4, 5] hasta la actualidad) para realizar pruebas metamatemáticas de teoremas metamatemáticos (independencia o consistencia relativa) y también para realizar pruebas metamatemáticas de teoremas matemáticos (ver [31]). Por ejemplo, con dicho método, se prueba (junto con el método de construcción de modelos de los conjuntos constructibles de Gödel presente en [14]) que el axioma de elección, la hipótesis del continuo y la hipótesis de Suslin son independientes de los axiomas estándar de la teoría de conjuntos (ver [20, 25]). También se ha probado con forcing la consistencia relativa con ZFC de algunos candidatos a nuevos axiomas de la teoría de conjuntos, bajo la hipótesis de que existen cardinales supercompactos, por ejemplo del axioma de Martin máximo (MM) y del axioma de forcing propio (PFA) (ver [20, 23]). Vale la pena resaltar que MM y PFA implican que $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, es decir, MM y PFA implican que la hipótesis del continuo de Cantor ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) es falsa (ver [20, 23]). En conclusión, el método de forcing es importante para la investigación matemática y también para investigar los fundamentos de la matemática. Por lo tanto, el resultado lógico matemático que se demuestra en este artículo es valioso para la investigación matemática contemporánea pues, por ejemplo, permite mayor flexibilidad de trabajo con el forcing, ya que los resultados obtenidos usando forcing con órdenes parciales también se obtienen usando forcing con álgebras booleanas completas, y viceversa. Abundantes ejemplos de la aplicación del método de forcing (con órdenes parciales o con álgebras booleanas completas) pueden encontrarse en los textos [2, 20, 21, 22, 23, 25], y también en el artículo [12], entre otros.

En este artículo se presentan adicionalmente algunas (clásicas) versiones débiles del axioma de elección relacionadas con las álgebras booleanas: El teorema del ideal primo (Stone, 1936, ver [18]), el teorema del ultrafiltro (Tarski, 1930, ver [20]), el teorema de representación de Stone (1936, ver [20]) y los teoremas de completitud y compacidad para la lógica de primer orden con, lenguajes de cualquier cardinalidad (Gödel (1930), Malcev (1936), Henkin (1949), Lós (1955), ver [7]). Dichas versiones son equivalentes entre ellas [18], [22, p. 17-18], y [27, p. 121-122], y son consecuencia estricta del axioma de elección (ver [17]). Se describe la demostración usual del teorema del ideal primo (TIP), del teorema del ultrafiltro (TUF) y del teorema de representación de Stone (TRS), dichas pruebas usan el lema de Zorn (axioma de elección).

Una gran cantidad de aplicaciones (o investigaciones) matemáticas del TIP, del TUF, del TRS, del teorema de completitud para el cálculo de predicados de primer orden (con lenguajes de cualquier cardinalidad) y del teorema de compacidad para el cálculo de predicados de primer orden (con lenguajes de cuaquier cardinalidad) en la teoría de modelos y en la teoría de conjuntos puede encontrarse en los textos [6, 7, 16, 18, 22, 26, 27], entre otros.

Se presentan dos referencias que contienen varios problemas abiertos relacionados con la temática de este artículo, al final de la sección 4 y en la sección 5.

El orden de exposición será el siguiente: En la sección 2 se presenta la definición de álgebra booleana y se expondrán algunos ejemplos clásicos. En la sección 3 se definen: orden parcial; orden parcial separativo; y se exponen algunos ejemplos clásicos. En la sección 4, se definen las operaciones booleanas para las cortaduras regulares de un orden parcial separativo y se demuestra que la estructura resultante es un álgebra booleana completa. Además, se prueba que tal extensión es única (salvo isomorfismo), y se explica cómo extender tal resultado a cualquier orden parcial. En la última sección, la número 6, se formulan algunas versiones débiles del axioma de elección relacionadas con las álgebras booleanas: TIP, TUF, TRS y los teoremas de completitud y compacidad para Lógica de primer orden con lenguajes de cualquier cardinalidad, y se describe la demostración usual de tres de ellas: TIP, TUF y TRS.

2 Álgebras Booleanas.

Definición 2.1. *Un álgebra booleana es un conjunto B con al menos dos elementos,* 0 *y* 1 *(cero y uno), dotado de dos operaciones binarias $+$ (suma) y $\bullet$ (producto), y una operación unaria (complemento) $'$, las cuales satisfacen las siguientes propiedades (axiomas):*

1. $a+b=b+a\ ;\ a\bullet b=b\bullet a$ *(Leyes conmutativas).*
2. $(a+b)+c=a+(b+c)\ ;\ (a\bullet b)\bullet c=a\bullet(b\bullet c)$ *(Leyes asociativas).*
3. $a\bullet(b+c)=(a\bullet b)+(a\bullet c)\ ;\ a+(b\bullet c)=(a+b)\bullet(a+c)$ *(Leyes distributivas).*
4. $a+a=a\ ;\ a\bullet a=a$ *(Leyes de idempotencia).*
5. $a\bullet(a+b)=a\ ;\ a+(a\bullet b)=a$ *(Leyes de absorción).*
6. $a+1=1\ ;\ a\bullet 1=a\ ;\ a+0=a\ ;\ a\bullet 0=0$ *(Leyes de identidad, elementos neutros y dominación).*
7. $a+(a')=1\ ;\ a\bullet(a')=0\ ;\ (a')'=a$ *(Leyes de complemento).*
8. $(a+b)'=a'\bullet b'\ ;\ (a\bullet b)'=a'+b'$ *(Leyes de De Morgan).*

Denotaremos a tal álgebra booleana así: $\mathcal{B}=\langle B,+,\bullet,',0,1\rangle$.

Por simplicidad consideraremos que $\mathcal{B}=B$, a menos que el contexto requiera distinguirlos. El orden parcial de $\mathcal{B}$ se define así, $p\leq q\leftrightarrow p\bullet q'=0$. Si $a,b\in\mathcal{B}$, entonces: $a+b$ es el supremo de a y b, $a\bullet b$ es el ínfimo de a y b, a' es el único $c\in\mathcal{B}$ tal que $a+c=1$ y $a\bullet c=0$. También: $a\leq b\leftrightarrow a+b=b\leftrightarrow a\bullet b=a$. Dos elementos a,b de $\mathcal{B}$ son incompatibles si y solo si $a\bullet b=0$. $a-b=a\bullet b'$. $D\subseteq\mathcal{B}$ es denso en $\mathcal{B}$ si $D\subseteq\mathcal{B}-\{0\}$ y $\forall b\in\mathcal{B}-\{0\}$ existe $d\in D$ tal que $d\leq b$. $\mathcal{B}$ es completa si el supremo de S ($\sum S$) y el ínfimo de S ($\prod S$) existen en $\mathcal{B}$, para cualquier $S\subseteq\mathcal{B}$. Sea κ un cardinal regular no numerable. $\mathcal{B}$ es κ-completa si $\sum X$ y $\prod X$ existen en $\mathcal{B}$, para todo subconjunto X de $\mathcal{B}$ tal que $|X|<\kappa$. Si $\mathcal{B}$ es $\aleph_1$-completa se dice que $\mathcal{B}$ es σ-completa. Un *átomo* del álgebra boolena $\mathcal{B}$ es un $a\in\mathcal{B}$ tal que $a\neq 0$ y no hay ningún elemento $x\in\mathcal{B}$ que esté entre

0 y a, es decir, $0 \leq x \leq a$ y $x \neq 0$ y $x \neq a$. Se dice que $\mathcal{B}$ es *atómica* si para cada $z \in \mathcal{B}$, $z \neq 0$, existe un átomo $w \in \mathcal{B}$ tal que $w \leq z$.

Definición 2.2. *Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{K}$ dos álgebras booleanas, entonces:*

1. *Una función $h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{K}$ es un homomorfismo de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{K}$ si $\forall x, y \in \mathcal{E}$ las siguientes tres condiciones son satisfechas:*
   - $h(x +^{\mathcal{E}} y) = h(x) +^{\mathcal{K}} h(y)$.
   - $h(x \bullet^{\mathcal{E}} y) = h(x) \bullet^{\mathcal{K}} h(y)$.
   - $h(x'^{\mathcal{E}}) = h(x)'^{\mathcal{K}}$.
2. *Una función $h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{K}$ es un isomorfismo de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{K}$ si h es un homomorfismo de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{K}$ y además h es biyectiva (inyectiva y sobreyectiva).*

Si existe un isomorfismo entre dos álgebras booleanas se dice que ellas son isomorfas.

2.1 Álgebras booleanas clásicas.

2.1.1 Álgebra booleana de Lindenbaum

Se definirá siguiendo (principalmente) los textos [8, 20, 27]. Primero se presentará el concepto de relación de equivalencia, el cual también se usará más adelante:

Definición 2.3. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A, es decir, $R \subseteq A \times A$.*

1. *R es reflexiva si y solo si $\forall x \in A$ se tiene que xRx.*
2. *R es simétrica si y solo si $\forall x, y \in A$ se tiene que $xRy \to yRx$.*
3. *R es transitiva si y solo si $\forall x, y, z \in A$ se tiene que $(xRy \wedge yRz) \to xRz$.*
4. *R es antisimétrica si y sólo si $\forall x, y \in A$ se tiene que $(xRy \wedge yRx) \to x = y$.*
5. *R es una relación de equivalencia si R es una relación reflexiva, simétria y transitiva.*

Sea $PROP$ el conjunto de todas las proposiciones del lenguaje del cálculo proposicional y $\vdash$ la relación de deducibidad en el mismo. Se define una relación de equivalencia $(\sim)$ en $PROP$ de la siguiente manera: Sean $\chi, \sigma \in PROP$. $\chi \sim \sigma$ si y solo si $\vdash \chi \leftrightarrow \sigma$. Existen procedimientos de decisión efectiva (computables) para determinar si se cumple $\vdash \chi \leftrightarrow \sigma$ o no se cumple para dos proposiciones χ y σ cualquiera. Se puede demostrar sin dificultad que la relación $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva, por lo tanto ella es una relación de equivalencia, entonces se considera el conjunto cociente:

$$\frac{PROP}{\sim} = \{[p] : p \in PROP\}$$

Y se definine el *Álgebra de Lindenbaum* $\mathcal{C} = \langle C, +, \bullet, ', 0, 1 \rangle$ de la siguiente manera:

$$C = \frac{PROP}{\sim} \qquad [\psi]' = [\neg\psi] \qquad [\psi] \bullet [\chi] = [\psi \wedge \chi]$$

$$[\psi] + [\chi] = [\psi \vee \chi] \qquad 0 = [\psi \wedge \neg\psi] \qquad 1 = [\psi \vee \neg\psi]$$

El Álgebra de Lindenbaum $\mathcal{C} = \langle C, +, \bullet, ', 0, 1 \rangle$ es un álgebra booleana.

2.1.2 Álgebra booleana de los conjuntos

Se definirá siguiendo (princialmente) a [20].

Definición 2.4. *Sea S un conjunto no vacío.*

1. *Un álgebra de conjuntos (o cuerpo de conjuntos) sobre S es una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de S, con las siguientes propiedades:*

   (a) $S \in \mathcal{F}$.

   (b) Si $A \in \mathcal{F}$, *entonces* $S - A \in \mathcal{F}$.

   (c) Si $A, B \in \mathcal{F}$, *entonces* $A \cup B \in \mathcal{F}$ *y* $A \cap B \in \mathcal{F}$.

   El conjunto $S - A$ se llama el complemento de A y se denota por A^c.

2. *Si además de (a),(b) y (c) $\mathcal{F}$ satisface (d) se dice que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de conjuntos sobre S:*

   (d) Si $\{A_i : i \in \aleph_0\} \subseteq \mathcal{F}$ *entonces* $\bigcup_{i\in\aleph_0} A_i \in \mathcal{F}$ *y* $\bigcap_{i\in\aleph_0} A_i \in \mathcal{F}$.

3. *Sea* $Z \subseteq P(S)$. $\sigma(Z) = \bigcap\{\mathcal{F} : Z \subseteq \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \text{ es } \sigma - \text{álgebra}\}$. $\sigma(Z)$ *es la menor σ-álgebra de conjuntos sobre S que contiene a Z.*

El álgebra de conjuntos $\langle \mathcal{F}, \cup, \cap, {}^c, \emptyset, S\rangle$ es un álgebra booleana. También ocurre la dirección inversa, es decir, que toda álgebra booleana es un álgebra de conjuntos, en rigor, se cumple el teorema de representación de Stone (1936, [32]): "*Toda álgebra booleana es isomorfa a un álgebra de conjuntos*". Una prueba del mismo se realizará en este artículo en la última sección siguiendo ideas de [20, p. 81], entre otros. Un caso bastante usado de álgebra de conjuntos es cuando $\mathcal{F} = P(S)$. Es decir, $\langle P(S), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, S\rangle$. Sea S un conjunto con al menos dos elementos. Entonces el álgebra booleana $\langle P(S), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, S\rangle$ es atómica. Los átomos son precisamente todos los subconjuntos unitarios $\{x\}$ de S. Vale la pena resaltar que dos ejemplos de álgebra booleana de conjuntos muy usados en matemáticas son la "σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue" y la "σ-álgebra de los conjuntos borelianos de un espacio topológico", la definición de la "σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue"puede encontrarse (entre otros) en los textos [3, 13, 20, 29], y la definición de la "σ-álgebra de los conjuntos borelianos de un espacio topológico"se define a continuación siguiendo los textos [3, 13, 20, 29].

Definición 2.5. *Un espacio topológico es un par $(Y, \mathcal{T})$ donde Y es un conjunto no vacío, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ y se cumple:*

(a) $Y \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$.

(b) Si $O_1 \in \mathcal{T}$ *y* $O_2 \in \mathcal{T}$, *entonces,* $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.

(c) Si $Z \subseteq \mathcal{T}$, *entonces,* $\cup Z \in \mathcal{T}$.

Se dice que $\mathcal{T}$ es una topología para Y. Los elementos de $\mathcal{T}$ se llaman abiertos. $Z \subseteq Y$ es cerrado $\leftrightarrow$ $Y - Z$ es abierto. Sea $W \subseteq Y$. El interior de W, W°, es el mayor subconjunto abierto de Y que está contenido en W. La clausura de W, $\overline{W}$, es el menor subconjunto cerrado de Y que contiene a W.

Definición 2.6. *Sea $(Y,\mathcal{T})$ un espacio topológico. σ(Abiertos de Y) es la σ-álgebra de Borel de Y (o los conjuntos borelianos de Y). σ(Abiertos de Y) se denotará por $\mathcal{B}(Y)$.*

Es importante destacar que $\mathcal{B}(Y)$ se puede construir inductivamente a partir de los conjuntos abiertos de Y, si Y es un *espacio polaco* (es decir, si Y es "métrico", "separable" y "completo", por ejemplo el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología usual, el espacio de Baire y el espacio de Cantor), se utiliza para dicha construcción inducción transfinita en el cardinal $\aleph_1$, la idea es partir de los abiertos de Y y cerrarlos (inductivamente) bajo complemento y unión numerable. Un ejemplo de tal definición puene encontrarse en [13, 20].

2.1.3 Álgebra de los intervalos cerrados-abiertos del intervalo [0,1].

Se definirá siguiendo (principalmente) a [28]: Sea $\langle J([0,1]),\cup,\cap,{}^c,\emptyset,[0,1)\rangle$, donde $[0,1]$ es el intervalo cerrado de los números reales de extremos cero y uno, es decir, $[0,1]=\{x\in\mathbb{R}: 0\leq x\leq 1\}$, $J([0,1])$ es el conjunto de todas las uniones finitas de intervalos cerrados-abiertos $[a,b)$, con $a\leq b$, incluídos en $[0,1]$, $\cup$ es la unión conjuntista usual, $\cap$ es la intersección conjuntista usual, y la operación ^{c} no es el complemento (relativo) usual de los conjuntos, el complemento de un $[a_1,b_1)\cup[a_2,b_2),\cup[a_3,b_3)\cup\ldots\cup[a_k,b_k)\in J([0,1])$, $([a_1,b_1)\cup[a_2,b_2)\cup[a_3,b_3)\ldots\cup[a_k,b_k))^c$, es el conjunto diferencia $[0,1)\setminus$ *Unión finita de intervalos cerrados-abiertos*, es decir, es la unión finita de intervalos cerrados abiertos complementarios de la unión anterior, tal conjunto es: $[0,a_1)\cup[b_1,a_2)\cup[b_2,a_3)\cup\ldots\cup[b_k,1)$. Es claro que cada $x\in J([0,1])$ cumple que $x\cap x^c=\emptyset$, y $x\cup x^c=[0,1)$. Es decir: $([a_1,b_1)\cup[a_2,b_2)\cup[a_3,b_3)\ldots\cup[a_k,b_k))\cap([0,a_1)\cup[b_1,a_2)\cup([b_2,a_3)\cup\ldots\cup[b_k,1))=\emptyset$, y que $([a_1,b_1)\cup[a_2,b_2)\cup[a_3,b_3)\ldots\cup[a_k,b_k))\cup([0,a_1)\cup[b_1,a_2)\cup([b_2,a_3)\cup\ldots\cup[b_k,1))=[0,1)$. $\langle J([0,1]),\cup,\cap,{}^c,\emptyset,[0,1)\rangle$ es un álgebra booleana. Notar que tal álgebra booleana no es atómica.

3 Ordenes parciales y ordenes parciales separativos.

A continuación se presenta la definición de "orden parcial" y de "orden parcial separativo" junto con otros conceptos relacionados que se usarán más adelante en este artículo:

Definición 3.1. *Un orden parcial es un par $(P,\leq)$ donde P es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación en P que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Además,*

1. *Dado un orden parcial $(P,\leq)$ se dice $p<q$ si y solo si $p\leq q\wedge p\neq q$.*

2. *Sea $(P,\leq)$ un orden parcial y $p,q\in P$. Se dice que p y q son compatibles si existe un $r\in P$ tal que $r\leq p\wedge r\leq q$. Y se dice que p y q son incompatibles si no existe un $r\in P$ tal que $r\leq p\wedge r\leq q$.*

3. *Un orden parcial $(P,\leq)$ es separativo si para todo $p,q\in P$ se cumple que: si $p\not\leq q$, entonces existe $r\leq p$ tal que r es incompatible con q. Un orden parcial $(P,\leq)$ a veces se denotará por P.*

4. *Sean (P,R) un orden parcial y $D\subseteq P$. $x\in P$ es un elemento minimal (maximal) de D si $x\in D\wedge$ no existe ningún $y\in D$ tal que $y\neq x\wedge yRx$ (xRy). x es una cota inferior (superior) de D si $\forall y\in D$ se tiene que $xRy\vee y=x$ $(yRx\vee y=x)$. x es un ínfimo (supremo) de D si x es cota inferior (superior) de $D\wedge$ para todo $y\in P$, si y es una cota inferior (superior) de D, entonces $yRx\vee y=x$ $(xRy\vee y=x)$. x es un menor (mayor) elemento de D si $x\in D\wedge\forall y\in D$ se tiene que $xRy\vee y=x$ $(yRx\vee y=x)$.*

5. *Sea* (P, R) *un orden parcial.* (P, R) *es un orden total (o lineal) si la relación* R *satisface la propiedad de tricotomía:* $\forall x, y \in P$ *se tiene que* $xRy \vee yRx \vee x = y$.

3.1 Ordenes parciales separativos (y uno que no lo es).

Ejemplo 3.1.1. *El orden parcial (simple con mayor elemento) de Cohen* $(\mathsf{C}, \leq, 1)$ *se define como sigue:*

- $\mathsf{C} = \{p : p \textit{ es función} \wedge |p| < \aleph_0 \wedge \textit{dom}(p) \subseteq \aleph_0 \wedge \textit{ran}(p) \subseteq \aleph_0\}$.
- $p \leq q \leftrightarrow q \subseteq p$.
- $1 = \emptyset$.

Este orden parcial es separativo. Tal orden parcial aparece referido en relación con el método de forcing en [23], entre otros.

Ejemplo 3.1.2. *Sea* $A = \{1, 2\}$. *El orden parcial* $\langle P(A), \subseteq\rangle$ *no es separativo, pues* $P(A)$ *tiene dos átomos,* $\{1\}$ *y* $\{2\}$, *y el conjunto vacío está incluído en todo conjunto.*

Ejemplo 3.1.3. *Sea* $\alpha \geq \aleph_0$ *un ordinal.* C_α *es un orden parcial de Cohen que se define como sigue:*

$$\mathsf{C}_\alpha = \{p :\mid p \mid< \aleph_0 \ \wedge \ \textit{dom}(p) \subseteq \alpha \times \aleph_0 \ \wedge \textit{rango}(p) \subseteq 2\},$$

$$p \leq q \leftrightarrow q \subseteq p.$$

Este orden parcial es separativo. Tal orden parcial aparece referido en ralación con el método de forcing en [20, 23, 25] entre otros.

Ejemplo 3.1.4. *El orden parcial (con mayor elemento) de Sacks* $(\mathsf{S_a}, \leq, 1)$ *se define así,*

- $\mathsf{S_a} = \{p : p \textit{ es subárbol perfecto y no vacío del árbol binario completo}\}$.
- $p \leq q \leftrightarrow p \subseteq q$.
- $1 =$ *El árbol binario completo.*

Este orden parcial es separativo.

El par $(T, \leq)$ *es un árbol si y solo si* $(T, \leq)$ *es un orden parcial y para cada* $x \in T$ *el par* $(\{y \in T : y < x\}, <)$ *es un buen orden estricto (Un conjunto parcialmente ordenado por* $<$ *es un buen orden estricto si cada subcojunto distinto de vacío de dicho conjunto tiene un menor elemento según* $<$, *y además se cumple que para cada* x, $x \not< x$.*). Los elementos de* T *se llaman nodos. Un subárbol de* T *es un subconjunto* $T^{'} \subseteq T$ *con el orden inducido tal que,* $\forall x \in T^{'}$, $\forall y \in T$ *se cumple:* $y < x \to y \in T^{'}$. *El árbol binario completo es el orden parcial* $(2^{<\aleph_0}, \leq)$ *constituído por todas las sucesiones finitas de ceros y unos, ordenadas por la relación de extensión. Es decir,* $2^{<\aleph_0} = \bigcup\{2^n : n \in \aleph_0\}$ *y* $s \leq t$ *si y solo si* $s \subseteq t$ *si y solo si* t *extiende a* s. $(2^{<\aleph_0}, \leq)$ *se denomina el árbol binario completo de altura* $\aleph_0$. *Si* $s \in 2^{<\aleph_0}$ *tal que* $dom(s) = n$ *y* $i = 0$ *o* $i = 1$, *entonces* $s^\wedge i = s \cup \{(n, i)\}$. *Sea* p *un subárbol del árbol binario completo. El conjunto de las ramas de* p, $[p]$, *es* $\{f \in 2^{\aleph_0} : f \restriction n \in p, \ \forall n\}$. *Por ejemplo,* $[2^{<\aleph_0}] = 2^{\aleph_0}$. p *es perfecto si y sólo si* $\forall s \in p$ *existe* $t \supseteq s$ *tal que* $t^\wedge 0 \in p$ *y* $t^\wedge 1 \in p$. *Tal orden parcial aparece referido en relación con el método de forcing en [23], entre otros.*

4 Extensión de un orden parcial a un álgebra booleana completa

A continuación se define el álgebra booleana completa de las cortaduras regulares de un orden parcial separativo siguiendo a [20, 21]: Sea $(P, \leq)$ un orden parcial separativo. Un subconjunto $W \subseteq P$ es una *cortadura* en P si W es cerrado hacia abajo, es decir, si para todo $p, q \in P$ se cumple que si $p \leq q$ y $q \in W$, entonces $p \in W$. Notar que esta definición de cortadura se parece a la definición de cortadura que usó Dedekind para definir los números reales a partir de los números racionales (ver [9, 11], entre otros). Para cualquier $p \in P$, sea $W_p = \{x : x \leq p\}$. Por definición de W_p y la definición de cortadura se tiene que W_p es una cortadura en P. Una cortadura W en P es *regular* si para todo $p \in P$ se tiene que si $p \notin W$, entonces existe $q \leq p$ tal que $W_q \cap W = \emptyset$. Como P es separativo se cumple que W_p es regular, para todo $p \in P$. Sea D el conjunto de todas las cortaduras regulares en P. Si W es una cortadura en P se define $\overline{W} = \{p : W \cap W_q \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\}$. Se cumple (por definición) que $\overline{W}$ es una cortadura regular y además que es la menor (con respecto a la inclusión $\subseteq$) cortadura regular que contiene a W, esto se puede probar sin dificultad usando reducción al absurdo. Entonces se define para todo $X, Y \in D$ las siguientes tres operaciones:

$$X \bullet Y = X \cap Y \qquad\qquad X + Y = \overline{X \cup Y}$$

$$X' = \{p : W_p \cap X = \emptyset\} \qquad 1 = P \qquad 0 = \emptyset$$

Sea $\mathcal{D} = \langle D, +, \bullet, ', 0, 1\rangle$.

Una propiedad importante de las cortaduras, que será de utilidad en la demostración del teorema principal de esta sección, es la siguiente:

Proposición 4.1. *Si X es una cortadura regular, entonces $X = \overline{X}$.*

Demostración. $X \subseteq \overline{X}$. Como $X \subseteq X$ y $\overline{X}$ es la menor cortadura regular (con respecto a la relación de inclusión) que contiene a X, entonces $\overline{X} \subseteq X$. Por lo tanto, $X = \overline{X}$. □

Teorema 4.1. *$\mathcal{D}$ es un álgebra booleana completa (El álgebra booleana de las cortaduras regulares en P).*

Demostración. Para demostrar el teorema basta comprobar las leyes presentes en la Definición 2.1. Es claro que

$$A + B = B + A \quad \equiv \quad \overline{A \cup B} = \overline{B \cup A} \tag{4.1}$$

pues $A \cup B = B \cup A$ es una ley del álgebra booleana de conjuntos. También se cumple que,

$$A \bullet B = B \bullet A \tag{4.2}$$

porque $A \cap B = B \cap A$ es una ley del álgebra booleana de los conjuntos, con lo que se cumplen las leyes conmutativas.

Mostremos ahora que se cumplen las leyes asociativas. Primero veamos que

$$(A + B) + C = A + (B + C) \tag{4.3}$$

se desarrolla la definición del lado izquierdo de la igualdad (4.3) y se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \underbrace{\overline{\overline{A \cup B} \cup C}}_{\clubsuit} &= \{p : (\overline{A \cup B} \cup C) \cap W_q \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\} \\ &= \{p : \left(\overline{A \cup B} \cap W_q\right) \cup (C \cap W_q) \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Y también que:

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \{s : (A \cup B) \cap W_r \neq \emptyset,\ \forall r \leq s\} \\ &= \{s : (A \cap W_r) \cup (B \cap W_r) \neq \emptyset,\ \forall r \leq s\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\overline{A \cup B} \cap W_q = \{s : (A \cap W_r) \cup (B \cap W_r) \neq \emptyset,\ \forall r \leq s\} \cap W_q \tag{4.6}$$

Luego, desarrollando la definición del lado derecho de la igualdad (4.3) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \underbrace{\overline{A \cup \overline{B \cup C}}}_{\spadesuit} &= \{p : (A \cup \overline{B \cup C}) \cap W_q \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\} \\ &= \{p : (A \cap W_q) \cup (\overline{B \cup C} \cap W_q) \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Y también que:

$$\begin{aligned} \overline{B \cup C} &= \{s : (B \cup C) \cap W_r \neq \emptyset,\ \forall r \leq s\} \\ &= \{s : (B \cap W_r) \cup (C \cap W_r) \neq \emptyset,\ \forall r \leq s\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\overline{B \cup C} \cap W_q = \{s : (B \cap W_r) \cup (C \cap W_r) \neq \emptyset,\ \forall r \leq s\} \cap W_q \tag{4.9}$$

Veamos ahora el siguiente *hecho*, relacionado con la notación anterior, que permitirá concluir la prueba de que se cumple (4.3).

Hecho 4.1.

1. *$p \in \clubsuit \Leftrightarrow$ Para todo $q \leq p$ se tiene que: $W_q \cap A \neq \emptyset \vee W_q \cap B \neq \emptyset \vee W_q \cap C \neq \emptyset$.*

2. *$p \in \spadesuit \Leftrightarrow$ Para todo $q \leq p$ se tiene que: $W_q \cap A \neq \emptyset \vee W_q \cap B \neq \emptyset \vee W_q \cap C \neq \emptyset$.*

Demostración del hecho. Para demostrar el ítem *1.* se utiliza la definición desarrollada en (4.4), (4.5) y (4.6).

($\Rightarrow$): Aplicando reducción al absurdo, tomemos $p \in \clubsuit$ y supongamos que existe un $q \leq p$ tal que $W_q \cap A = \emptyset \wedge W_q \cap B = \emptyset \wedge W_q \cap C = \emptyset$, entonces $p \notin \clubsuit$. Por la definición de $\clubsuit$ desarrollada en (4.4), (4.5) y (4.6), se tiene una contradicción.

($\Leftarrow$): Basta ver que $p \in \clubsuit$. Sea $q \leq p$, considerando la definición de $\clubsuit$ desarrollada en (4.4), (4.5) y (4.6) veamos que $\overline{A \cup B} \cap W_q \cup C \cap W_q \neq \emptyset$. Esto se hace directamente estudiando los posibles casos: $W_q \cap C \neq \emptyset$; $W_q \cap B \neq \emptyset$; y $W_q \cap A \neq \emptyset$. Pero, se puede apreciar claramente, por la definición de $\clubsuit$ desarrollada en (4.4), (4.5) y (4.6), que en cada caso se cumple $\overline{A \cup B} \cap W_q \cup C \cap W_q \neq \emptyset$. Por lo tanto, $p \in \clubsuit$.

De manera análoga se demuestra el ítem *2.*, considerando la definición desarrollada en (4.7), (4.8) y (4.9), tanto la dirección ($\Rightarrow$) como la dirección ($\Leftarrow$). $\square$

Considerando el hecho anterior se tiene que $\clubsuit \subseteq \spadesuit$ y que $\spadesuit \subseteq \clubsuit$, por lo tanto, $\clubsuit = \spadesuit$, mostrando que se cumple (4.3).

La ley asociativa $(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C)$ es claramente cierta pues $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ es una ley del álgebra boolena de conjuntos.

Concentrémonos ahora en demostrar las leyes distributivas. Comencemos por ver que:

$$A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C) \quad \equiv \quad A \cap \overline{B \cup C} = \overline{(A \cap B) \cup (A \cap C)} \tag{4.10}$$

Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad (4.10) se tiene que:

$$\begin{aligned} \underbrace{A \cap \overline{B \cup C}}_{\clubsuit} &= A \cap \{p : (B \cup C) \cap W_q \neq \emptyset, \ \forall q \leq p\} \\ &= A \cap \{p : (B \cap W_q) \cup (C \cap W_q) \neq \emptyset, \ \forall q \leq p\} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Desarrollando el lado derecho de la igualdad (4.10) se tiene que:

$$\begin{aligned} \underbrace{\overline{(A \cap B) \cup (A \cap C)}}_{\spadesuit} &= \{p : [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cap W_q \neq \emptyset, \ \forall q \leq p\} \\ &= \{p : [(A \cap B \cap W_q) \cup (A \cap C \cap W_q)] \neq \emptyset, \ \forall q \leq p\} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Es claro que $\clubsuit \subseteq \spadesuit$ se cumple por el desarrollo expuesto en (4.11) y (4.12). La prueba de que $\spadesuit \subseteq \clubsuit$ usa el desarrollo (4.11) y (4.12), reducción al absurdo y regularidad: Sea $p \in \spadesuit$ y supongase que $p \notin A$, entonces como A es regular se tiene que existe un $q \leq p$ tal que $A \cap W_q = \emptyset$, así $p \notin \spadesuit$. Contradicción, pues por hipótesis: $p \in \spadesuit$. Por lo tanto, $p \in A$. Luego, considerando el desarrollo (4.11) y (4.12) se concluye que $p \in \clubsuit$. En consecuencia $\spadesuit \subseteq \clubsuit$, de manera que $\clubsuit = \spadesuit$.

Veamos ahora que

$$A + (B \bullet C) = (A + B) \bullet (A + C) \quad \equiv \quad \overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A \cup B} \cap \overline{A \cup C} \tag{4.13}$$

Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad (4.13) se tiene que:

$$\begin{aligned} \underbrace{\overline{A \cup (B \cap C)}}_{\clubsuit} &= \{p : [A \cup (B \cap C)] \cap W_q \neq \emptyset, \ \forall q \leq p\} \\ &= \{p : [(A \cup B) \cap (A \cup C)] \cap W_q \neq \emptyset, \ \forall q \leq p\} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Desarrollando el lado derecho de la igualdad (4.13) se tiene que:

$$\overline{A \cup B} = \{p : (A \cup B) \cap W_q \neq \emptyset, \ \forall q \leq p\} = \{p : (A \cap W_q) \cup (B \cap W_q) \neq \emptyset, \ \forall q \leq p\}$$

$$\overline{A \cup C} = \{p : (A \cup C) \cap W_q \neq \emptyset, \ \forall q \leq p\} = \{p : (A \cap W_q) \cup (C \cap W_q) \neq \emptyset, \ \forall q \leq p\}$$

$$\underbrace{\overline{A \cup B} \cap \overline{A \cup C}}_{\spadesuit} = \{p : [(A \cap W_q) \cup (B \cap W_q) \neq \emptyset] \wedge [(A \cap W_q) \cup (C \cap W_q) \neq \emptyset], \ \forall q \leq p\} \tag{4.15}$$

Entonces por el desarrollo en (4.14) y (4.15) es claro que $\clubsuit \subseteq \spadesuit$. Por otro lado, sea $p \in \spadesuit$, vamos que $p \in \clubsuit$. Si $q \leq p$, se cumple que $W_q \cap A = \emptyset$ o $W_q \cap A \neq \emptyset$. Si $W_q \cap A \neq \emptyset$, entonces por el desarrollo en (4.14) y (4.15) se tiene que $[(A \cup B) \cap (A \cup C)] \cap W_q \neq \emptyset$. Si $W_q \cap A = \emptyset$, entonces $B \cap W_q \neq \emptyset$ y $C \cap W_q \neq \emptyset$. De modo que existe $t \in C \cap W_q$ y $s \in B \cap W_q$ tal que $s \in C$ o $t \in B$, pues si $s \notin C$ y $t \notin B$, entonces por reguralidad de las cortaduras existen $i \leq s$

y $j \leq t$ tal que $W_i \cap C = \emptyset$ y $W_j \cap B = \emptyset$. Por lo tanto, como $i, j \leq q$ y $W_q \cap A = \emptyset$, se tiene que $W_i \cap A = \emptyset$ y $W_j \cap A = \emptyset$. También $W_i \cap C = \emptyset$ y $W_j \cap B = \emptyset$. En consecuencia, i, j no cumplen con la condición del último conjunto del desarrollo (4.15) e $i, j \leq p$. De manera que $p \notin \spadesuit$, contradiciendo la hipótesis. Luego, $s \in C$ o $t \in B$ y, por lo tanto, $C \cap B \cap W_q \neq \emptyset$. Así, $p \in \clubsuit$, es decir, $\spadesuit \subseteq \clubsuit$, en conclusión $\clubsuit = \spadesuit$.

Mostremos ahora las leyes de idempotencia. Primero veamos que

$$A + A = A \tag{4.16}$$

Usando la Proposición 4.1 y la ley del álgebra booleana de conjuntos $A \cup A = A$, la demostración de (4.16) es la siguiente: $\overline{A \cup A} = \overline{A} = A$. Es claro que $A \bullet A = A$ se cumple, pues $A \cap A = A$ es una ley del álgebra booleana de conjuntos.

Las leyes de absorción $A \bullet (A + B) = A$ y $A + (A \bullet B) = A$ resultan obvias cuando se escribe su definición: $[A \cap (\overline{A \cup B})] = A$ y $[A \cup (A \cap B)] = A$, respectivamente. Por otro lado, tomando en cuenta la Proposición 4.1 y las leyes del álgebra booleana de conjuntos, las leyes de identidad (elementos neutros y dominación) $A + 1 = 1$, $A \bullet 1 = A$, $A + 0 = A$ y $A \bullet 0 = 0$ resultan evidentes cuando se escribe su definición: $\overline{A \cup P} = P$, $A \cap P = A$; $\overline{A \cup \emptyset} = A$; y $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Veamos la validez de las leyes de complemento. Primero, tenemos que:

$$A + (A') = 1 \quad \equiv \quad \underbrace{\overline{A \cup \{p : W_p \cap A = \emptyset\}}}_{\clubsuit} = P \tag{4.17}$$

Es claro que $\clubsuit \subseteq P$, por definición de cortadura regular de P. Para demostrar que $P \subseteq \clubsuit$ se realiza el siguiente desarrollo y luego se aplica reducción al absurdo:

$$\begin{aligned} \overline{A \cup \{p : W_p \cap A = \emptyset\}} &= \{i : (A \cup \{p : W_p \cap A = \emptyset\}) \cap W_j \neq \emptyset, \ \forall j \leq i\} \\ &= \{i : (A \cap W_j) \cup (\{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cap W_j) \neq \emptyset, \ \forall j \leq i\} \end{aligned}$$

Supongamos que $p \in P$ y $p \notin \clubsuit$, entonces existe un $j \leq p$ tal que $(A \cap W_j) \cup (\{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cap W_j) = \emptyset$. Así, $j \notin A$, pues si $j \in A$ se cumple que $A \cap W_j \neq \emptyset$. En consecuencia, por la regularidad de A, se tiene que existe $k \leq j$ tal que $W_k \cap A = \emptyset$. Por lo tanto, $k \in \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cap W_j$. Luego $(A \cap W_j) \cup (\{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cap W_j) \neq \emptyset$, contradiciendo la hipótesis. De manera que $p \in \clubsuit$, con lo que se obtiene (4.17)

Por otro lado, veamos que

$$A \bullet (A') = 0 \quad \equiv \quad A \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} = \emptyset \tag{4.18}$$

Supongamos que $A \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \neq \emptyset$, entonces existe un $z \in A$ tal que $W_z \cap A = \emptyset$, pero $z \in W_z \cap A$, lo que es una contradicción. Comprobando así (4.18).

Verifiquemos que

$$(A')' = A \quad \equiv \quad \underbrace{\{q : W_q \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} = \emptyset\}}_{\clubsuit} = A$$

Se probará que $\clubsuit \subseteq A$ por reducción al absurdo. Supongamos que existe un $z \in \clubsuit$ tal que $z \notin A$, entonces por regularidad de A existe $l \leq z$ tal que $W_l \cap A = \emptyset$. En consecuencia $l \in \{p : W_p \cap A = \emptyset\}$ y, como $l \in W_z$, se tiene que $W_z \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \neq \emptyset$. Por lo tanto $z \notin \clubsuit$, contradiciendo la hipótesis. Luego, $\clubsuit \subseteq A$. Por otro lado, sea $z \in A$, entonces $W_z \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} = \emptyset$. En consecuencia $z \in \clubsuit$. Luego, $A \subseteq \clubsuit$, concluyendo que $\clubsuit = A$.

Veamos ahora que se cumplen las leyes de De Morgan. Primero probemos que

$$(A+B)' = A' \bullet B' \quad \equiv \quad \{p : W_p \cap \overline{A \cup B} = \emptyset\} = \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cap \{p : W_p \cap B = \emptyset\}$$

$$\begin{aligned}\underbrace{\{p : W_p \cap \overline{A \cup B} = \emptyset\}}_{\clubsuit} &= \{p : W_p \cap \{z : \forall l \leq z(W_l \cap (A \cup B) \neq \emptyset)\} = \emptyset\} \\ &= \{p : W_p \cap \{z : \forall l \leq z(W_l \cap A \cup W_l \cap B) \neq \emptyset)\} = \emptyset\}\end{aligned}$$

$$\underbrace{\{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cap \{p : W_p \cap B = \emptyset\}}_{\spadesuit} = \{p : W_p \cap A = \emptyset \wedge W_p \cap B = \emptyset\}$$

Considerando el desarrollo realizado, se demostrará que $\clubsuit = \spadesuit$. Veamos que $\clubsuit \subseteq \spadesuit$. Si $m \in \clubsuit$, entonces $W_m \cap \{z : (W_l \cap A) \cup (W_l \cap B) \neq \emptyset,\ \forall l \leq z\} = \emptyset$. Si $m \notin \spadesuit$, se concluye que $W_m \cap A \neq \emptyset \vee W_m \cap B \neq \emptyset$. Tomando en cuenta el primer caso de la disyunción se tiene que existe $k \in W_m \cap A$. Luego, $W_k \cap A \neq \emptyset$ y más todavía, $k \in \{z : (W_l \cap A) \cup (W_l \cap B) \neq \emptyset,\ \forall l \leq z\}$, pues como $k \in A$ se cumple que $W_l \cap A \neq \emptyset,\ \forall l \leq k$. En consecuencia, como $k \in W_m$ se tiene que:

$$W_m \cap \{z : (W_l \cap A) \cup (W_l \cap B) \neq \emptyset,\ \forall l \leq z\} \neq \emptyset$$

entonces $m \notin \clubsuit$, contradiciendo la hipótesis. Si se toma el segundo caso de la disyunción, $W_m \cap B \neq \emptyset$, se aplica el mismo procedimiento y se obtiene la misma contradicción. Por tanto, $\clubsuit \subseteq \spadesuit$.

Probemos ahora que $\spadesuit \subseteq \clubsuit$. Sea $z \in \spadesuit$, entonces $W_z \cap A = \emptyset$ y $W_z \cap B = \emptyset$. También $(W_l \cap A = \emptyset) \wedge (W_p \cap B = \emptyset),\ \forall l \leq z$. Si $z \notin \clubsuit$, entonces:

$$W_z \cap \{z : (W_l \cap A) \cup (W_l \cap B) \neq \emptyset,\ \forall l \leq z\} \neq \emptyset$$

En consecuencia, existe un $s \leq z$ tal que $(W_l \cap A) \cup (W_l \cap B) \neq \emptyset,\ \forall l \leq s$. De modo que $(W_z \cap A \neq \emptyset) \vee (W_z \cap B \neq \emptyset)$, contradiciendo la hipótesis. Por tanto, $z \in \clubsuit$. Luego, $\spadesuit \subseteq \clubsuit$.

Comprobemos la última ley de De Morgan

$$(A \bullet B)' = A' + B' \quad \equiv \quad \{p : W_p \cap (A \cap B) = \emptyset\} = \overline{\{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cup \{p : W_p \cap B = \emptyset\}}$$

Llamemos $\underbrace{\{p : W_p \cap (A \cap B) = \emptyset\}}_{\clubsuit}$ y hagamos

$$\underbrace{\overline{\{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cup \{p : W_p \cap B = \emptyset\}}}_{\spadesuit} =$$

$$= \{k : W_m \cap (\{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cup \{p : W_p \cap B = \emptyset\}) \neq \emptyset,\ \forall m \leq k\} =$$

$$= \{k : [(W_m \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\}) \cup (W_m \cap \{p : W_p \cap B = \emptyset\})] \neq \emptyset,\ \forall m \leq k\}$$

Se debe probar que $\clubsuit = \spadesuit$. Veamos que $\clubsuit \subseteq \spadesuit$. Sea $z \in \clubsuit$, entonces $W_z \cap (A \cap B) = \emptyset$. Sea $m \leq z$, aquí se deben estudiar 5 casos:

Caso 1: Si $W_m \subseteq A$, entonces por hipótesis $W_m \cap B = \emptyset$ y en consecuencia

$$W_m \cap \{p : W_p \cap B = \emptyset\} \neq \emptyset.$$

Caso 2: Si $W_m \subseteq B$, entonces por hipótesis $W_m \cap A = \emptyset$ y en consecuencia

$$W_m \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \neq \emptyset.$$

Caso 3: Si $W_m \cap A = \emptyset$ y $W_m \cap B = \emptyset$, entonces

$$W_m \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \neq \emptyset \quad \text{y} \quad W_m \cap \{p : W_p \cap B = \emptyset\} \neq \emptyset.$$

Caso 4: Si $W_m \cap A \neq \emptyset$, entonces existe $r \in W_m$ tal que $r \in A$. r no puede estar en B, pues si estuviera, como él pertenece a $W_m \subseteq W_z$ se tendría que $W_z \cap (A \cap B) \neq \emptyset$, lo cual contradice la hipótesis. Luego $r \notin B$, entonces por regularidad de la cortadura B existe un $d \leq r$ tal que $W_d \cap B = \emptyset$. $d \in W_m$, por lo tanto $W_m \cap \{p : W_p \cap B = \emptyset\} \neq \emptyset$.

Caso 5: Si $W_m \cap B \neq \emptyset$, se procede de manera análoga al *Caso 4* y se obtiene el resultado buscado $W_m \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \neq \emptyset$. En consecuencia $z \in \spadesuit$, de modo que $\clubsuit \subseteq \spadesuit$.

Ahora se realiza la prueba de que $\spadesuit \subseteq \clubsuit$. Aplicando reducción al absurdo, supongamos que existe un $z \in \spadesuit$ y que $z \notin \clubsuit$, entonces $W_z \cap (A \cap B) \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe un $d \leq z$ tal que $d \in A \cap B$. Si $W_d \cap \{p : W_d \cap A = \emptyset\} \neq \emptyset$, entonces existe un $s \leq d$ tal que $W_s \cap A = \emptyset$. Pero $s \in A$ y $s \in W_s$, contradicción. Luego, $W_d \cap \{p : W_d \cap A = \emptyset\} = \emptyset$. Si $W_d \cap \{p : W_d \cap B = \emptyset\} \neq \emptyset$, entonces existe un $s \leq d$ tal que $W_s \cap B = \emptyset$. Pero $s \in B$ y $s \in W_s$, contradicción. Luego, $W_d \cap \{p : W_d \cap A = \emptyset\} = \emptyset$ y $W_d \cap \{p : W_d \cap B = \emptyset\} = \emptyset$. En consecuencia $z \notin \spadesuit$, contradiciendo la hipótesis. Por tanto, $\spadesuit \subseteq \clubsuit$.

Para terminar la prueba del teorema solo falta mostrar que $\mathcal{D}$ es completa. Recordemos que $\mathcal{D}$ es completa si el supremo de S $(\sum S)$ y el ínfimo de S $(\prod S)$ existen en $\mathcal{D}$, para cualquier $S \subseteq \mathcal{D}$. Esto se cumple pues si $S = \{S_j : j \in J\} \subseteq \mathcal{D}$, entonces se prueba sin dificultad que $\prod S = \bigcap_{j \in J} S_i \in \mathcal{D}$ y $\sum S = \overline{\bigcup_{j \in J} S_j} \in \mathcal{D}$, usando las definiciones de cortaduras regulares. □

Como $\mathcal{D}$ es el álgebra booleana completa de las cortaduras regulares en P se denota $\mathcal{D} = c.r(P)$. Vale la pena resaltar que la función $e : P \longrightarrow \mathcal{D}$, definida por $e(p) = W_p$, es una función que preserva el orden y, además, el conjunto $\{e(p) : p \in P\} \subseteq \mathcal{D} \setminus \{0\}$ es denso en $\mathcal{D}$. Se dice que la función e es una *inmersión densa* de P en $\mathcal{D}$.

También se puede probar que $\mathcal{D}$ es única salvo isomorfismo (ver [2, 19, 20, 21, 25]). Veamos un prueba de esto en el siguiente lema:

Lema 4.1. *Dadas dos álgebras booleanas completas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$ que tienen a P como subconjunto denso, la función $\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ definida así:*

$$\pi(c) = \sum^{\mathcal{E}} \{p \in P : p \leq_{\mathcal{C}} c\},$$

es un isomorfismo entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$.

Demostración. Sea $h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ definida por

$$h(e) = \sum^{\mathcal{C}} \{p \in P : p \leq_{\mathcal{E}} e\}.$$

Probemos que las funciones compuestas $h \circ \pi = 1_{\mathcal{C}}$ y que $\pi \circ h = 1_{\mathcal{E}}$, para concluir que $\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ es una función biyecctiva. Veamos que $h \circ \pi = 1_{\mathcal{C}}$, para esto probemos que

$$p \leq_{\mathcal{C}} c \Longleftrightarrow p \leq_{\mathcal{E}} \pi(c), \tag{4.19}$$

para cada $p \in P$ y cada $c \in \mathcal{C}$. Si $p \leq_{\mathcal{C}} c$, entonces $\pi(p) = p \leq_{\mathcal{E}} \pi(c)$, por la propiedad del supremo. Ahora, si $p \leq_{\mathcal{E}} \pi(c)$, entonces $p \bullet \pi(c) = p$ y $p \bullet \sum^{\mathcal{E}}\{q \in P : q \leq_{\mathcal{C}} c\} = \sum^{\mathcal{E}}\{p \bullet q : q \leq_{\mathcal{C}} c\} = p$, porque $\mathcal{E}$ es una álgebra booleana completa y satisface la propiedad de distributividad generalizada. Dado que si $q \leq_{\mathcal{C}} c$, entonces $p \bullet q \leq_{\mathcal{C}} p \bullet c \leq_{\mathcal{C}} c$, se tiene que $p \leq_{\mathcal{C}} c$ (por la propiedad del supremo, ya que c es una cota superior). Así, se obtiene la ecuación (4.9).

Por otro lado, por la densidad de P en $\mathcal{C}$ se tiene que,

$$c = \underbrace{\sum^{\mathcal{C}}\{q \in P : q \leq_{\mathcal{C}} c\}}_{Sup},$$

En efecto, se tiene que $Sup \leq_{\mathcal{C}} c$, ya que c es una cota superior del conjunto $\{q \in P : q \leq_{\mathcal{C}} c\}$ y, además, se tiene que $c \leq_{\mathcal{C}} Sup$ ya que si $c \not\leq_{\mathcal{C}} Sup$, entonces $c \bullet (Sup)' \neq 0$. Luego, por la densidad de P se tiene que existe un $q \in P$, con $q \neq 0$, tal que $q \leq_{\mathcal{C}} c \bullet (Sup)'$. De modo que $q \leq_{\mathcal{C}} c$ y $q \leq_{\mathcal{C}} (Sup)'$. Como $q \leq_{\mathcal{C}} c$, entonces $q \in \{q \in P : q \leq_{\mathcal{C}} c\}$ y, por tanto, $q \leq_{\mathcal{C}} Sup$. Así, $q \leq_{\mathcal{C}} (Sup)'$ y $q \leq_{\mathcal{C}} Sup$. Esto implica que $q = 0$ (pues en toda álgebra booleana se cumple que $z \leq w$ y $x \leq y$, entonces $z \bullet x \leq w \bullet y$).

De lo anterior se concluye que,

$$c = \sum^{\mathcal{C}}\{q \in P : q \leq_{\mathcal{C}} c\} = \sum^{\mathcal{C}}\{q \in P : q \leq_{\mathcal{E}} \pi(c)\} = h(\pi(c)),$$

es decir, $h \circ \pi = 1_{\mathcal{C}}$.

Por último, probemos que $\pi \circ h = 1_{\mathcal{E}}$, para esto veamos que $p \leq_{\mathcal{E}} e$ si y solo si $p \leq_{\mathcal{C}} h(e)$, para cada $p \in P$ y cada $e \in \mathcal{E}$. La prueba se realiza de manera análoga al caso anterior. Por lo tanto, $\pi \circ h = 1_{\mathcal{E}}$. De modo que $\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ es una función biyecctiva.

Por otro lado, se cumple que $\pi(0_{\mathcal{C}}) = 0_{\mathcal{E}}$ y $\pi(1_{\mathcal{C}}) = 1_{\mathcal{E}}$, entonces falta probar que π preserva las funciones de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$. Como tales funciones se pueden definir con el orden parcial de cada una de ellas (definido a su vez por sus operaciones booleanas), es suficiente probar que π preserva el orden entre ambas estructucturas, es decir, que $(\mathcal{C}, \leq_{\mathcal{C}})$ es isomorfa con $(\mathcal{E}, \leq_{\mathcal{E}})$. Probemos que:

$$c_1 \leq_{\mathcal{C}} c_2 \Longleftrightarrow \pi(c_1) \leq_{\mathcal{E}} \pi(c_2).$$

Si $c_1 \leq_{\mathcal{C}} c_2$, entonces $\pi(c_1) \leq_{\mathcal{E}} \pi(c_2)$, por la propiedad de supremo. Luego, si $\pi(c_1) \leq_{\mathcal{E}} \pi(c_2)$, entonces $c_1 \leq_{\mathcal{C}} c_2$ ya que, por reducción al absurdo, si $c_1 \not\leq_{\mathcal{C}} c_2$, entonces $c_1 \bullet c_2{}' \neq 0$. Luego, como P es un subconjunto denso de $\mathcal{C}$, existe un $p \in P$, con $p \neq 0$, tal que $p \leq_{C} (c_1 \bullet c_2{}')$. En consecuencia, $p \leq_{C} c_1$ y $p \leq_{C} c_2{}'$. Por tanto $p \bullet c_2{}' = p \neq 0$, es decir, $p \not\leq_{\mathcal{C}} c_2$. Así, por la ecuación (4.19) se concluye que

$$p \not\leq_{\mathcal{E}} \pi(c_2) \tag{4.20}$$

Por otro lado, por la hipótesis y por la propiedad de supremo, se tiene que $p \leq_{\mathcal{E}} \pi(c_1) \leq_{\mathcal{E}} \pi(c_2)$, entonces

$$p \leq_{\mathcal{E}} \pi(c_2) \tag{4.21}$$

Las ecuaciones (4.20) y (4.21) son contradictorias. Por lo tanto, $c_1 \leq_{\mathcal{C}} c_2$. Así, $\mathcal{C} \cong \mathcal{E}$. $\square$

Vale la pena resaltar que $\mathcal{D}$ tiene una versión topológica (ver [2, 15, 19, 20, 21, 25, 30]). En efecto, en dicha topología para P, los abiertos básicos son los subconjuntos W_p de P, para cada $p \in P$. Un conjunto abierto X de un espacio topológico se dice que es *abierto regular* si $X = (\overline{X})^{\circ}$, es decir si X es igual al interior de su clausura. Sea Z el conjunto de los abiertos regulares de la topología para P cuya base es $\{W_p : p \in P\}$. Se definen la operaciones booleanas de la siguiente manera:

$$X \bullet Y = X \cap Y \qquad\qquad X + Y = (\overline{X \cup Y})^{\circ}$$

$$X' = P \setminus \overline{X} \qquad 0 = \emptyset \qquad 1 = P$$

Se cumple que $\mathcal{Z} = \langle Z, +, \bullet, ', 0, 1\rangle$ es un álgebra booleana completa, el álgebra de los abiertos regulares de P, por eso algunos libros la denotan así: $\mathcal{Z} = a.r(P)$. Tal álgebra aparece referida (entre otros) en [15, 19, 20, 21, 25, 30], y una demostración de que es álgebra booleana completa puede encontrarse en [15, 19, 25], entre otros. Por la unicidad de la completación de P, que se mencionó anteriomente, se puede concluir que $\mathcal{D}$ y $\mathcal{Z}$ son isomorfas.

En el Teorema 4.1 se supuso que el orden parcial $(P, \leq)$ era separativo, si P no fuera separativo se puede construir un orden parcial $(Q, \preceq)$ que es separativo, tal que existe una función $h : P \to Q$ que cumple:

(i) Si $x \leq y$, entonces $h(x) \preceq h(y)$.

(ii) x y z son compatibles en P si y solo si $h(x)$ y $h(z)$ son comptibles en Q.

Se define una relación de equivalencia en P así: $x \sim y$ si y solo si se cumple que y es compatible con z si y solo si x es compatible con z, $\forall\, z \in P$. Sea

$$Q = \frac{P}{\sim} = \{[p] : p \in P\},$$

donde $[p] = \{q \in P : p \sim q\}$. Luego, $[x] \preceq [y]$ si y solo si $\forall\, z \leq x$ se cumple que z y y son compatibles. Así, $(Q, \preceq)$ es separativo. La función h se define por $h(p) = [p]$, para todo $p \in P$. Se puede probar que $(Q, \preceq)$ es único salvo isomorfismo (ver [20, 21]).

Ahora, tomando en cuenta: este resultado sobre $(P, \leq)$ y $(Q, \preceq)$; el Teorema 4.1; y el isomorfismo π, se puede inferir el siguiente resultado general como corolario (ver [2, 20, 21, 25]).

Corolario 4.1. *Para cualquier orden parcial $(P, \leq)$ existe un álgebra booleana completa única, salvo isomorfismo, $\mathcal{D} = c.r(P)$ (o $\mathcal{D} = a.r(P)$) y una función $e : P \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que:*

1. *Si $p \leq q$ entonces $e(p) \leq e(q)$.*

2. *p y q son compatibles si y solo si $e(p) \bullet e(q) \neq \emptyset$.*

3. *$\{e(p) : p \in P\} \subseteq \mathcal{D} \setminus \{0\}$ es denso en $\mathcal{D}$.*

La función e se llama "inmersión densa" de P en $\mathcal{D}$.

Observación 4.1. *Antes de pasar a la siguiente sección vale la pena destacar que una interesante lista de 25 problemas abiertos sobre Álgebras booleanas, que relaciona álgebra, topología, lógica, teoría de conjuntos y teoría de órdenes, puede encontrarse en el artículo [1] de Bekkali.*

5 Versiones débiles del Axioma de elección, relacionadas con álgebras booleanas

Definición 5.1. *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana.*

- *Un ideal sobre $\mathcal{B}$ es un subconjunto $I \subseteq \mathcal{B}$ tal que:*

  (a) $0 \in I$, $1 \notin I$

  (b) Si $x \in I$ y $z \in I$, entonces $x + z \in I$

  (c) Si $x, z \in \mathcal{B}$, $x \in I$ y $z \leq x$, entonces $z \in I$.

- *Un ideal I sobre $\mathcal{B}$ es primo si $\forall b \in \mathcal{B}$ se cumple que $b \in I \vee b' \in I$.*

Ejemplos de ideales son (ver [20, 30]):

1. Sea $\langle \mathcal{F}, \cup, \cap, ^c, \emptyset, S \rangle$ un álgebra de conjuntos sobre S. Y sea $K \in \mathcal{F}$ tal que $K \neq S$. Se define $I_K = \{D \in \mathcal{F} : D \subseteq K\}$. I_K es un ideal sobre $\mathcal{F}$, el ideal generado por K .

2. Sea $\mathcal{B} = \langle B, +, \bullet, ', 0, 1 \rangle$ un álgebra booleana:

   - $\{0\}$ es un ideal sobre $\mathcal{B}$.
   - Sea $b \in \mathcal{B}$, $b \neq 1$, se define $I_b = \{x \in \mathcal{B} : x \leq b\}$. I_b es un ideal sobre $\mathcal{B}$, el ideal generado por b.

3. Los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$ de medida de Lebesgue cero son un ideal sobre la σ-algebra de los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

4. Sea $(Y, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un conjunto $X \subseteq Y$ es *nunca denso* si $(\overline{X})^\circ = \emptyset$. Un conjunto D se dice que es *magro* si D es una unión numerable de conjuntos nunca densos. El conjunto de los conjuntos borelianos magro forman un ideal sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

A continuación se presenta la definición de *función selectora* que nos permitirá comprender el enunciado del axioma de elección, a saber: *Todo conjunto tiene una función selectora.*

Definición 5.2. *Dado un conjunto B se dice que una función g es una* función selectora (o una función de elección) *para B si $g : B \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \bigcup B$ tal que para todo $b \in B \setminus \{\emptyset\}$ se cumple que $g(b) \in b$.*

Es importante notar que el axioma de lección y el lema de Zorn son equivalentes. Una demostración de este hecho puede encontrarse en [9, 11], entre otros. A continuación se formula el lema de Zorn, el cual permite demostrar todos los resultados principales de esta sección:

Lema 5.1 (Lema de Zorn, 1935)**.** *Sea (K, S) un conjunto parcialmente ordenado tal que cada $X \subseteq K$ totalmente ordenado tiene una cota superior en K, entonces K tiene un elemento maximal.*

Teorema 5.1 (Teorema del ideal primo (TIP), Stone, 1936)**.** *Toda álgebra boleana tiene un ideal primo.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana. Sean $b \in \mathcal{B}$, con $b \neq 1$ e I_b el ideal sobre $\mathcal{B}$, generado por b. Sea F el siguiente conjunto parcialmente ordenado por la relación de inclusión:

$$F = \{I \subseteq \mathcal{B} : I_b \subseteq I \wedge I \text{ es un ideal sobre } \mathcal{B}\}.$$

F cumple con todas las hipótesis del lema de Zorn, entonces por dicho lema existe un ideal H maximal en F. H también es maximal en $\mathcal{B}$ y como un ideal es maximal si y sólo si es primo, se tiene que H es el ideal buscado, es decir, $\mathcal{B}$ tiene un ideal primo. □

Definición 5.3. *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana.*

(1) Un filtro sobre $\mathcal{B}$ es un subconjunto $F \subseteq \mathcal{B}$ tal que:

(a) $1 \in F$, $0 \notin F$.

(b) Si $x \in F$ y $z \in F$, entonces $x.z \in F$.

(c) Si $x, z \in \mathcal{B}$, $x \in F$ y $x \leq z$, entonces $z \in F$.

(2) Sea F un filtro sobre $\mathcal{B}$. F es un ultrafiltro si $\forall x \in \mathcal{B} : x \in F \vee -x \in F$.

Ejemplos de filtros son (ver [9, 27, 30]):

1. Sea el álgebra de conjuntos sobre $\mathbb{N}$, $\langle P(\mathbb{N}), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, \mathbb{N}\rangle$. $F = \{X \in P(\mathbb{N}) : \mathbb{N} \setminus X \text{ es finito}\}$ es un filtro sobre $\mathcal{F}$, el *Filtro de Frechet*.

2. Sea $\langle \mathcal{F}, \cup, \cap, {}^c, \emptyset, S\rangle$ un álgebra de conjuntos sobre S. Sea $K \in \mathcal{F}$ tal que $K \neq \emptyset$. Se define $I_K = \{D \in \mathcal{F} : K \subseteq D\}$. I_K es un filtro sobre $\mathcal{F}$, el filtro generado por K.

Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana. Sea I un ideal sobre $\mathcal{B}$. El *filtro dual* de I es $F^{DI} = \{b' \in \mathcal{B} : b \in I\}$. Sea F un filtro sobre $\mathcal{B}$. El *ideal dual* de F es $I^{DF} = \{b' \in \mathcal{B} : b \in F\}$. Existe una función inyectiva entre el conjunto de los ideales de $\mathcal{B}$ y el conjunto de los filtros de $\mathcal{B}$. Recíprocamente: Existe una función inyectiva entre el conjunto de los filros de $\mathcal{B}$ y el conjunto de los ideales de $\mathcal{B}$ (ver [30]).

Teorema 5.2 (Teorema del ultrafiltro (TUF), Tarski, 1930)**.** *Todo filtro en un álgebra booleana se puede extender a un ultrafiltro.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana y F un filtro sobre $\mathcal{B}$. Se aplica el lema de Zorn como en el caso del TIP usando el siguiente conjunto parcialmente ordenado por la inclusión:

$$\{G \subseteq \mathcal{B} : F \subseteq G \wedge G \text{ es filtro sobre } \mathcal{B}\}.$$

□

Vale la pena resaltar que los ultrafiltros son fundamentales para el método de construcción de modelos llamado “ultraproductos", los cuales tienen mucha utilidad en investigaciones matemáticas contemporáneas, por ejemplo en la teoría de conjuntos, teoría de modelos, análisis no estándar, etc. (ver [6, 7, 26, 27]). Una interesante lista de problemas abiertos de teoría de modelos relacionados con ultrafiltros, ultraproductos, teorías matemáticas, cardinales, cardinales medibles, ZFC, etc, puede encontrarse en el texto de Chang y Keisler [7, p. 597-602].

Teorema 5.3 (Teorema de representación de Stone (TRS), 1936)**.** *Toda álgebra booleana es isomorfa a un ágebra de conjuntos.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana. Sea:

$$T = \{F : F \text{ es un ultrafiltro sobre } \mathcal{B}\}.$$

Para cualquier $b \in \mathcal{B}$ sea Z_b el conjunto de todos los ultrafiltros F de T tal que $b \in F$, es decir, $Z_b = \{F \in T : b \in F\}$. Sea $\mathcal{F} = \{Z_b : b \in \mathcal{B}\}$, así $\mathcal{F} \subseteq P(T)$. Por las propiedades de ultrafiltro se cumple que $\mathcal{F}$ es un álgebra de conjuntos sobre T. En efecto: $T = Z_1 \in \mathcal{F}$. Si $Z_a \in \mathcal{F}$ y $Z_b \in \mathcal{F}$, entonces $Z_a \cup Z_b = Z_{(a+b)} \in \mathcal{F}$, $Z_a \cap Z_b = Z_{(a\bullet b)} \in \mathcal{F}$, y $T - (Z_b) = Z_{b'} \in \mathcal{F}$. Ahora se define una función $j : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{F}$ por $j(b) = Z_b$, para toda $b \in \mathcal{B}$. Por la definición de filtro, se cumple que $j(1) = T$ y que $j(0) = \emptyset$. También, por las propiedades de ultrafiltro, se tiene que j es una función sobreyectiva que satisface: $j(a \bullet b) = j(a) \cap j(b)$, $j(a + b) = j(a) \cup j(b)$ y $j(a') = T \setminus j(a)$. Para probar la inyectividad de j supóngase que $a \neq b$, entonces se considera el filtro generado por $a \bullet b'$, es decir, $F_{(a\bullet b')} = \{x \in \mathcal{B} : (a \bullet b') \leq x\}$. Luego, por el TUF existe un ultrafiltro $F' \supseteq F_{(a\bullet b')}$. Así, por la propiedad de ultrafiltro, $a \bullet b' \in F'$ si y sólo si $a \in F'$ y $b' \in F'$. De manera que $b \notin F'$. En consecuencia $F' \in j(a)$ y $F' \notin j(b)$. De modo que $j(a) \neq j(b)$. Por tanto, j es inyectiva. Teniendo que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{F}$ son isomorfas. □

Ahora se enuncia el *teorema de completitud para el cálculo de predicados en primer orden* (con lenguajes de cualquier cardinalidad):

Teorema 5.4 (Teorema de completitud de Gödel (1930), Malcev (1936), Henkin (1949))**.** *Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje de primer orden con cualquier cardinalidad. Σ es consistente si y solo si Σ un modelo.*

Una prueba de este resultado puede encontrarse en [7, p. 61-66] y [27, p. 114], entre otros. El teorema de compacidad para el cálculo de predicados en primer orden (con lenguajes de cualquier cardinalidad) es la siguiente proposición:

Teorema 5.5 (Teorema de compacidad (1930), extendido)**.** *Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje de primer orden con cualquier cardinalidad. Σ tiene un modelo si y sólo si cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo.*

Este resultado se puede probar como un corolario del teorema de completitud o directamente (usando el método de construcción de modelos llamado “ultraproductos", por ejemplo). Una prueba como corolario del teorema de completitud y otra prueba usando “ultraproductos"puede encontrarse en [7, p. 67; 219-220], entre otros.

Como se dijo en la introducción de este artículo el TIP, el TUF, el TRS, el teorema de completitud para el cálculo de predicados de primer orden (con lenguajes de cualquier cardinalidad) y el teorema de compacidad para el cálculo de predicados de primer orden (con lenguajes de cualquier cardinalidad) son equivalentes y son consecuencia estricta del axioma de elección. La consecuencia estricta fue probada por Halpern y Lévy en 1967, tales autores probaron que el TIP vale en el modelo básico de Cohen en el cual no vale el axioma de elección (ver [17]). Es importante resaltar que en dicha prueba Halpern y Lévy usaron un resultado de combinatoria infinita llamado el teorema de Halpern-Läuchli, una versión para árboles del teorema de Ramsey (y al teorema de Halpern-Läuchli lo utilizaron combinado con el médodo de forcing y automorfismos).

Referencias

[1] M. Bekkali. *Open problems in boolean algebras over partially ordered sets*. University Side Mohamed Ben Abdullah (USMBA). Fez, Marocco. 2010. (bekka@menara.ma).

[2] J. Bell. *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.* Clarendon Press. Oxford.1979.

[3] C. Betz. *Introducción a la Teoría de la Medida e Integración.* Universidad Central de Venezuela-Facultad de Ciencias. 1992.

[4] P. Cohen. *The Independence of continuum Hypothesis II.* Procedings of the National Academy of Science U.S.A. 51 (1964), 105-110.

[5] P. Cohen. *Set Theory and The Continuum Hypothesis.* W. A. Benjamin, Inc. 1966.

[6] M. Corbillón. *Análisis real no estándar.* Tesis de licenciatura en Matemáticas. Tutor: Dr. Josep Maria Font Llovet. Facultat de Matemátiques. Universitat de Barcelona. 2015.

[7] C. Chang - H. Keisler. *Model Theory.* Dover Publications. 2012.

[8] C. Di Prisco. *Introdución a la Lógica Matemática.* Emalca Amazonia. 2009.

[9] C. Di Prisco. *Teoría de Conjuntos.* Universidad Central de Venezuela: Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico. 2009.

[10] H. Enderton. *Una Introducción Matemática a la Lógica.* Universidad Nacional Autónoma de México. 2004.

[11] H. Enderton. *Elements of Set Theory.* Academic Press. New York. 1977.

[12] C. Di Prisco and F. Galindo. *Perfect set properties in models of ZF.* Fundamenta Mathematicae 208(2010), 249-262.

[13] C. Di Prisco y C.Uzcátegui. *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos.* Asociación Matemática Venezolana, 1991.

[14] K. Gödel. *Obras completas.* Alianza. Madrid. 1981.

[15] P. Halmos. *Lectures on Boolean Algebras.* Van Nostrand, 1963.

[16] H. Herrlich. *Axiom of Choice.* Springer. Berlin. 2006.

[17] J. Halpern and A. Lévy. *The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice.* En “Axiomatic Set Theory"(D. S. Scoott, ed), Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, 1967.

[18] P. Howard and J. Rubin. *Consequences of the Axiom of Choice.* American Mathematical Society. 1998.

[19] I. Jané. *Álgebras de Boole y Lógica.* Publicacions Universitat de Barcelona. 1989.

[20] T. Jech. *Set Theory.* Springer. 2002.

[21] T. Jech. *Set Theory.* Academic Press. New York. 1978.

[22] T. Jech. *The Axiom of Choice.* North-Holland Publishing Company. Amsterdam. 1973.

[23] T. Jech. *Multiple Forcing.* Cambridge University Press. 1986.

[24] J. Kelley. *General Topology.* Springer. 1991.

[25] K. Kunen. *Set Theory.* Elsevier. Amsterdam. 2006.

[26] M. Manzano. *Teoría de Modelos.* Alianza. Madrid. 1989.

[27] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic.* Chapman and Hall/CRL. 2009.

[28] A. Petrovich. *Álgebras de Boole.* Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca. 2007. www.matematica.uns.edu.ar/IXCongresoMonteiro/Comunicaciones/Boolean.pdf.

[29] H. Royden. *Real Analysis.* Pearson. 2010.

[30] R. Sikorski. *Boolean Algebras.* Springer-Verlag. 1960.

[31] R. Solovay. *On the cardinalidad de Σ_1^2 sets of reals.* "Foundations of Mathematics. Symposium Papers commemorating the sixtieth birthday of Kurt Gödel". Jack J. Bullof, Thomas, C. Holyoke and S. W. Hahn, Editors. Springer-Verlag. 1969.

[32] M. Stone. *The theory of representations for Boolean algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 37-111. Zbl. 014.34002