Divulgaciones Matemáticas Vol. 21, No. 1-2 (2020), pp. 53–76

Tópicos de Ultrafiltros

Topics of Ultrafilters

Franklin Galindo (franklingalindo178@gmail.com)
Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia.
Universidad Central de Venezuela.
Colaborardor Visitante del Departamento de Matemáticas del IVIC.

Resumen

Los ultrafiltros son objetos matemáticos muy importantes en la investigación matemática [6, 22, 23]. Existen una gran variedad de teoremas clásicos en diversas ramas de la matemática donde se aplican ultrafiltros en su demostración, y otros teoremas clásicos que tratan directamente sobre ultrafiltros. El objetivo de este artículo es contribuir (de una manera divulgativa) con la investigación sobre ultrafiltros describiendo las demostraciones de algunos de tales teoremas relacionados (de manera única o combinada) con topología, teoría de la medida, álgebra, combinaria infinita, teoría de conjuntos y lógica de primer orden, formulando además algunos problemas abiertos actuales de la teoría de conjuntos que se refieren a ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$, al Modelo de Mathias y al Modelo de Solovay.

Palabras y frases clave: ultrafiltros, aplicaciones de ultrafiltros, ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$.

Abstract

Ultrafilters are very important mathematical objects in mathematical research [6, 22, 23]. There are a wide variety of classical theorems in various branches of mathematics where ultrafilters are applied in their proof, and other classical theorems that deal directly with ultrafilters. The objective of this article is to contribute (in a divulgative way) to ultrafilter research by describing the demonstrations of some such theorems related (uniquely or in combination) to topology, measurement theory, algebra, combinatorial infinite, set theory y first-order logic, also formulating some updated open problems of set theory that refer to non-main ultrafilters on $\mathbb{N}$, the Mathias's model and the Solovay's model.

Key words and phrases: ultrafilters, ultrafilter applications, nonprincipal ultrafilter on $\mathbb{N}$.

1 Introducción

Los ultrafiltros son objetos matemáticos muy importantes en la investigación matemática [6, 22, 23]. Existen una gran variedad de teoremas clásicos en diversas ramas de la matemática donde se aplican ultrafiltros en su demostración, y otros teoremas clásicos que tratan directamente sobre

Recibido 20/02/2020. Revisado 28/04/2020. Aceptado 18/11/2020.
MSC (2010): Primary 03Exx; Secondary 03E05.
Autor de correspondencia: Franklin Galindo

ultrafiltros. El objetivo de este artículo es contribuir (de una manera divulgativa) con la investigación sobre ultrafiltros describiendo las demostraciones de algunos de tales teoremas relacionados (de manera única o combinada) con topología, teoría de la medida, álgebra, combinaria infinita, teoría de conjuntos y lógica de primer orden, formulando además algunos problemas abiertos actuales de la teoría de conjuntos que se refieren a ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$, al Modelo de Mathias y al Modelo de Solovay.

Según [6, p. V] un ultrafiltro es una asignación de valor de verdad a la familia de subconjuntos de un conjunto, y también es un método de convergencia infinita. De la primera manera de verlo (lógica) surge su conección con la lógica binaria y con la teoría de modelos, y de la segunda manera de verlo surge su conección con la topología y la teoría de conjuntos. Ambas maneras de considerarlo implican (por ejemplo) la propiedad de compacidad, en el primer caso la propiedad de compacidad de la lógica de primer orden (*Un conjunto de sentencias* Σ *tiene un modelo si, y solo si, cada subconjunto finito de* Σ *tiene un modelo*) usando ultraproductos y el Teorema de Loś (ver [6, 5]), y en el segundo caso el Teorema de Tijonoj de la topología (*El producto de espacios topológicos compactos es un espacio compacto con la topología producto*, ver [6, 21]).

La definición de "Filtro" se debe a H. Cartan (ver [22]). Cartan fue quien primero los estudió hacia 1937-1940 (ver [3, 4]) y con tales entidades desarrolló completamente el tema de la convergencia en Bourbaki (ver [2]). Más recientemente los ultrafiltros han sido estudiados exhaustivamente por W. Confort y S. Negropontis (ver [6]), entre otros.

El orden expositivo del artículo es el siguente: En la primera sección se expondrán los conceptos de Filtros y Ultrafiltros, el Lema de Zorn y el Teorema del Ultrafiltro (siguiendo, entre otros, los textos [10, 20, 19]. Es importante destacar que al final de esta primera sección también se describirá una conexión de los ultrafiltros no principales y κ-completos con los cardinales grandes, específicamente con los cardinales medibles. En la segunda sección ("Ultrafiltros y Topología") se presentará una caracterización de la propiedad de compacidad de un espacio topológico cualquiera usando ultrafiltros, siguiendo el texto [12]. En la tercera sección ("Ultrafiltros y Teoría de la medida") se expondrá la demostración de un teorema que afirma que los ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$ no son medibles (considerados como subconjuntos del espacio de Cantor $(2^{\aleph_0}, t)$), tal demostración se realizará siguiendo, entre otros, los textos [1, 11] y la página web [30]. En la cuarta sección ("Ultrafiltros y Combinatoria infinita") se realizará una demostración del Teorema de Ramsey (infinito), siguiendo ideas del texto [5], tal demostración usa ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$ (vale la pena resaltar que existen demostraciones del Teorema de Ramsey que no usan ultrafiltros). En la quinta sección ("Ultrafiltros, Lógica, Álgebra y Topología") se presentará una demostración de que el teorema de compacidad para un lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden es equivalente a la compacidad del espacio de Stone correspondiente al álgebra de Lindenbaum de la lógica de primer orden, siguiendo, entre otros, la web [31] y los textos [5, 19, 24, 26] (El universo del espacio de Stone es un conjunto de ultrafiltros). En la sexta sección ("Ultrafiltros, Álgebra, Combinatoria infinita y Lógica") se expondrán las demostraciones de dos teoremas:

(1) El Teorema de Ramsey Finito, siguiendo las sugerencias del texto [21], tal teorema es un corolario del Teorema de Ramsey infinito, y por lo tanto se usan ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$ en su demostración (también se usa en su prueba el Teorema de Compacidad de la Lógica de primer orden), y

(2) la equivalencia entre cuatro versiones débiles (estrictamente) del Axioma de elección: El Teorema del Ideal Primo, el Teorema del Ultrafiltro, el Principio de Consistencia y el Teorema de Compacidad de la lógica de primer orden. Y en la séptima y última sección se

presentarán algunos problemas abiertos sobre los ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$, el Modelo de Mathias y el Modelo de Solovay ($L(\mathbb{R})$), dos modelos de ZF donde no vale el Teorema del Ultrafiltro. Tales problemas abiertos se pueden encontrar de manera implícita en los artículos [9, p. 468] y [8, p. 21] de Di Prisco y Henle.

Finalizo esta introducción agradeciendo al profesor Carlos Di Prisco por el apoyo que me ha brindado en mi investigación sobre ultrafiltros, una parte de dicha investigación esta presentada en este artículo.

2 Filtros, Ultrafiltros, Lema de Zorn, Teorema del Ultrafiltro

Definición 2.1.

- Un *filtro* sobre un conjunto no vacío S es una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de S tal que:

  (i) $S \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

  (ii) Si $X \in \mathcal{F}$ y $Y \in \mathcal{F}$, entonces $X \cap Y \in \mathcal{F}$.

  (iii) Si $X \in \mathcal{F}$ y $X \subseteq Y$, entonces $Y \in \mathcal{F}$.

- Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto S. $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro si para cualquier $X \subseteq S$ se cumple que:
$$X \in \mathcal{F} \leftrightarrow S - X \notin \mathcal{F}.$$

- Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre un conjunto S. $\mathcal{F}$ es no principal si, y solo si, $\forall i \in S$, $\{i\} \notin \mathcal{F}$.

Ejemplos de filtros (ver [20, 5]):

(1) *Filtro trivial*: $\mathcal{F} = \{S\}$.

(2) Para cada $B \subseteq S$, $B \neq \emptyset$, el filtro $\mathcal{F}_B = \{Z \subseteq S : B \subseteq Z\}$ se llama *filtro principal* generado por B. Para $B = \{a\} \subseteq S$, $\mathcal{F}_B$ se escribe $\mathcal{F}_a$, $\mathcal{F}_a = \{Z \subseteq S : a \in Z\}$. Notar que $\mathcal{F}_a$ es un ultrafiltro principal.

(3) Sea S un conjunto infinito, el filtro $\mathcal{F} = \{X \in P(S) :\mid S - X \mid < \aleph_0\}$ se llama *filtro de Fréchet*. Notar que el filtro de Fréchet no es principal.

Dado cualquier conjunto infinito S siempre se puede construir un filtro no principal sobre S, que extiende al filtro de Fréchet sobre S usando la propiedad de intersección finita, tal como lo afirma el teorema que viene a continuación (Teorema 2.2(3)). Ya se demostró anteriormente que existen ultrafiltros principales, mediante un ejemplo, $\mathcal{F}_a$. Pero, ¿Existen ultrafiltros no principales?. La existencia de tales entidades matemáticas sólo se puede garantizar usando el Lema de Zorn, no hay otra manera [20, p. 75]. A continuación se presentará (después del Teorema 2.2) el Teorema del Ultrafiltro, el cual permitirá contar con tales entidades (ultrafiltros no princiales) las cuales son fundamentales para la investigación matemática como se ejemplificará en este artículo. El teorema del Ultrafiltro se prueba a partir del Lema de Zorn, lema que se formulará también en este trabajo.

Una familia G de conjuntos tiene la *propiedad de intersección finita* si para cualquier conjunto finito $H = \{X_1, \ldots, X_n\} \subseteq G$ se cumple que $H_1 \cap \ldots \cap H_n \neq \emptyset$.

Teorema 2.2. *1. Si Δ es una familia de filtros sobre S, entonces $\bigcap \Delta$ es un filtro sobre S.*

2. Si Ω es una $\subseteq$-cadena de filtros sobre S (es decir, $\forall X, Y \in \Omega$, $X \subseteq Y$ o $Y \subseteq X$), entonces $\bigcup \Omega$ es un filtro sobre S.

3. Si $G \subseteq P(S)$ tiene la propiedad de intersección finita, entonces existe un filtro $\mathcal{F}$ tal $\mathcal{F} \supseteq G$ ($\mathcal{F} = \{X \subseteq S : \exists Z_1, \ldots, Z_n \in G,\, Z_1 \cap \ldots \cap Z_n \subseteq X\}$).

Una prueba de este resultado puede encontrarse (entre otros) en [20, p.74] y [5, p. 212].

Teorema 2.3 (Teorema del Ultrafiltro (Tarski, 1930))**.** *Todo filtro se puede extender a un ultrafiltro.*

Como ya se dijo antes la demostración del Teorema del Ultrafiltro requiere del Lema de Zorn, una versión de dicha prueba puede encontrarse (entre otros) en [20, p. 75] y [5, p. 214]. A continuación se enuncia el Lema de Zorn después de presentar unas definiciones previas:

Definición 2.4. Sea A un conjunto y R una relación binaria en A (es decir, $R \subseteq A \times A$)

1. R es reflexiva si, y solo si, $\forall x \in A$ se tiene que (xRx).
2. R es simétrica si, y solo si, $\forall x, y \in A$ se se cumple que $xRy \to yRx$.
3. R es transitiva si, y solo si, $\forall x, y, z \in A$ se cumple la siguiente implicación $(xRy \wedge yRz) \to xRz$.
4. R es antisimétrica si, y solo si, $\forall x, y \in A$ se cumple que $(xRy \wedge yRx) \to x = y$.
5. R es una relación de equivalencia si R es una relación reflexiva, simétria y transitiva.

Definición 2.5. 1. Un orden parcial es un par $(P, \leq)$ donde P es un conjunto no vacío y "$\leq$" es una relación en P que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

2. Dado un orden parcial $(P, \leq)$ se dice $p < q \leftrightarrow (p \leq q \wedge p \neq q)$.
3. Sean (P, R) un orden parcial y $D \subseteq P$. $x \in P$ es un elemento minimal (máximal) de D si $x \in D$ y no existe ningún $z \in D$ tal que $z \neq x$ y zRx (xRz). x es una cota inferior (superior) de D si $\forall z \in D$ se tiene que $xRz \vee z = x$ ($zRx \vee z = x$). x es un ínfimo (supremo) de D si x es cota inferior (superior) de D y, para todo $z \in P$, si z es una cota inferior (superior) de D, entonces $zRx \vee z = x$ ($xRz \vee z = x$). x es un menor (mayor) elemento de D si $x \in D$ y $\forall z \in D$ se tiene que $xRz \vee z = x$ ($zRx \vee z = x$).
4. Sea (P, R) un orden parcial. (P, R) es un orden lineal (o total) si la relación R satisface la propiedad de tricotomía: $\forall x, y \in P$ se tiene que $xRy \vee yRx \vee x = y$.
5. Sea (P, R) un orden parcial. (P, R) es un buen orden si para todo $X \subseteq P$ se cumple que: Si $X \neq \emptyset$, entonces X tiene un menor elemento. (Notar que todo conjunto bien ordenado es un conjunto linialmente ordenado). Un orden parcial o orden total o buen orden $(P, \leq)$ a veces se denotará por P.

Teorema 2.6 (Lema de Zorn)**.** *Sea (K, S) un conjunto parcialmente ordenado tal que cada $X \subseteq K$ totalmente ordenado tiene una cota superior en K. Entonces K tiene un elemento máximal.*

Es conocido que el Lema de Zorn es equivalente al Axioma de elección. Donde el Axioma de elección es la siguiente sentencia: *Todo conjunto tiene una función selectora.* (Dado un conjunto Z se dice que la función f es una función de elección - o una función selectora - para Z si el $Dom(f) = Z - \{\emptyset\}$ y para todo $W \in Dom(f)$, se tiene que $f(W) \in W$). Una prueba de la equivalencia puede encontrarse (entre otros) en [10, p. 83-85] y [13, p. 151-153]. También es conocido que el Lema de Zorn es equivalente al Principio del Buen Orden (*Todo conjunto se puede bien ordenar*). Una prueba de tal equivalencia puede encontrarse (entre otros) en [10, p. 82-85] y [13, p. 151-153, 196-197].

Volviendo a los filtros, otro ejemplo de filtro que no es ultrafiltro es el siguiente que se define después de presentar algunos conceptos previos (ver [10, 19]. Dicho filtro será importante en este artículo pues nos permitirá conectar ultrafiltros con los cardinales grandes, específicamente con los cardinales medibles:

Un número *ordinal* es un conjunto transitivo (x es transitivo si, y solo si, $\forall z$ se cumple $z \in x \to z \subseteq x$) estrictamente bien ordenado por la relación de pertenencia ($\in$). Cada número ordinal se puede considerar intuitivamente como el "tipo de orden" de un conjunto bien ordenado, pues todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único número ordinal. Un número ordinal es *límite* si no es sucesor de ningún otro ordinal. Un número *cardinal* es un número ordinal que no es equipotente a ninguno de sus elementos. Los números cardinales se pueden considerar intuitivamente como los números que miden la cantidad de elementos de un conjunto (finito o infinito).

Sea α un ordinal límite. Decimos que $\beta < \alpha$ es *cofinal* con α si existe una función creciente $f : \beta \longrightarrow \alpha$ tal que para todo $\xi < \alpha$, existe un $\delta < \beta$ tal $f(\delta) \geq \xi$ (es decir, la imagen de f es no acotada en α). Dado α, la *cofinalidad* de α, $cof(\alpha)$, es el menor ordinal cofinal con α. Con respecto a la cofinalidad se cumple lo siguiente: $cof(\alpha)$ es el menor cardinal β tal que existe una partición de α en β pedazos cada uno de los cuales tiene cardinalidad estrictamente menor que α. Un cardinal infinito κ es *regular* si es igual a su cofinalidad. Decimos que es *singular* en caso contrario ($cof(\alpha) < \alpha$). Un cardinal κ es un cardinal límite fuerte si para todo cardinal $\theta < \kappa$ se tiene que $2^\theta < \kappa$. Un cardinal $\kappa > \aleph_0$ es *inaccesible* si es regular y límite fuerte (Notar que si se quita la condición de que $\kappa > \aleph_0$ se tiene que $\aleph_0$ es un cardinal inaccesible).

Sea α un cadinal infinito. Un filtro D sobre I se llama α-*completo* si, y solo si,: $X \subseteq D$ y $\mid X \mid < \alpha$ implica $\bigcap X \in D$.

Sea $\kappa > \omega$ un cardinal regular. Se dice que un subconjunto $C \subseteq \kappa$ es *no acotado* (en κ) si para todo $\alpha < \kappa$ existe un $\beta \in C$ tal que $\beta \geq \alpha$. Se dice que un subconjunto $C \subseteq \kappa$ es *cerrado* si toda sucesión $\langle \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_\xi < \ldots \rangle$ $(\xi < \delta)$ de elementos de C, si $\delta < \kappa$, entonces el supremo de la sucesión, $\bigcup \{\alpha_\xi \mid \xi < \delta\}$, también pertenece a C. Un subconjunto $C \subseteq \kappa$ es *cerrado y no acotado* (CNA) en κ si es a la vez cerrado y no acotado en κ. Un conjunto $S \subseteq \kappa$ es *estacionario* si $S \cap C \neq \emptyset$ para todo CNA $C \subseteq \kappa$.

Consideremos el cardinal regular $\aleph_1$. Dos ejemplos de conjuntos cerrados y no acotados en $\aleph_1$ son: $\aleph_1$ (trivialmente) y $A = \{\alpha \in \aleph_1 : \alpha \text{ es límite}\}$. Y tres ejemplos de conjuntos estacionarios (en $\aleph_1$) es $\aleph_1$ (trivialmente), todo conjunto $C \subseteq \aleph_1$ que sea CNA, pues los conjuntos CNA forman una familia cerrada bajo intersecciones finitas (ver [10]), y $E_\omega^{\aleph_1} = \{\alpha < \aleph_1 : cof(\alpha) = \omega\}$ (ver [20]).

Sea κ un cardinal regular no numerable. La colección de todos los subconjuntos cerrados y no acotados de κ tiene la propiedad de intersección finita, y el filtro generado por dicha colección se puede expresar de la siguiente forma:

$$\{A \subseteq \kappa : \text{A contiene un subconjunto cerrado no acotado de } \kappa\}.$$

Tal filtro es no principal y es κ-completo. La demostración de que es κ-completo se encuentra en [[20], p. 57]. Se cumple que dicho filtro no es un ultrafiltro, pues existe un subconjunto estacionario de κ cuyo complemento es estacionario, una demostración de tal hecho puede encontrarse en [19, p. 59]. Pregunta: ¿cuándo aplicamos el Teorema del ultrafiltro a tal filtro y obtenemos un ultrafiltro que lo contiene, tal ultrafiltro es también no principal y κ-completo?. Si volvemos al Teorema del Ultrafiltro podemos ver que el mismo permite inferir que existen ultrafiltros no principales sobre ω que son ω-completo (por ejemplo, el ultrafiltro que se obtiene a partir del filtro de Fréchet sobre ω es no principal y ω-completo), al tratar de generalizar esta propiedad a cardinales no numerables (que es el sentido de la pregunta anterior) llegamos al concepto de cardinal medible (ver [10, p. 128]):

> Un cardinal $\alpha > \aleph_0$ se dice que es *medible* si, y solo si, existe un ultrafiltro no principal y α-completo sobre α (Notar que si se quita la condición de que $\kappa > \aleph_0$ se tiene que $\aleph_0$ es un cardinal medible).

Se cumple que los cardinales medibles κ son cardinales inaccesibles, y además que existen κ cardinales inaccesibles menores que κ. También se cumple que si existen cardinales medibles, entonces el Axioma de constructibilidad ($V = L$) es falso. Una prueba de ambos resultados puede encontrarse en [5], entre otros.

3 Ultrafiltros y Topología

En esta sección presentaremos una caracterización de la propiedad de compacidad de un espacio topológico cualquiera usando ultrafiltros.

Definición 3.1. 1. Un espacio topológico es un par $(X, \mathcal{T})$ donde X es un conjunto no vacío, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y se cumple:

   (i) $X \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$

   (ii) Si $O_1 \in \mathcal{T}$ y $O_2 \in \mathcal{T}$, entonces, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$

   (iii) Si $\mathcal{Z} = \{Z \subseteq X : Z \in \mathcal{T}\}$, entonces $\displaystyle\bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z \in \mathcal{T}$.

   Se dice que $\mathcal{T}$ es una topología para X. Los elementos de $\mathcal{T}$ se llaman abiertos. $Y \subseteq X$ es cerrado si, y solo si, $X - Y$ es abierto. Sea $W \subseteq X$. El interior de W, W°, es el mayor subconjunto abierto de X que esta contenido en W. La clausura de W, $\overline{W}$, es el menor subconjunto cerrado de X que contiene a W. W es denso en X si $\overline{W} = X$. X es separable si tiene un subconjunto denso numerable.

2. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Sean $V \subseteq X$ y $x \in X$. V es una vecindad de x si, y solo si, existe un conjunto abierto G tal que $G \subseteq V$ y $x \in G$.

3. Una familia de conjuntos $\mathcal{R}$ es un cubrimiento de un conjunto B si, y solo si, $B \subseteq \displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{R}} A$. La familia $\mathcal{R}$ es un cubrimiento abierto de B si, y solo si, los miembros de $\mathcal{R}$ son todos conjuntos abiertos. Un subcubrimiento de $\mathcal{R}$ es una subfamilia de $\mathcal{R}$ que también es cubrimiento. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es compacto si, y solo si, todo cubrimiento abierto de X admite un subcubrimiento finito.

Definición 3.2. Un filtro $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ converge si, y solo si, existe un $x \in X$ tal que toda vecindad de x, $V(x)$, pertenece a $\mathcal{F}$.

Teorema 3.3. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. $(X, \mathcal{T})$ es compacto si, y solo si, cualquier ultrafiltro sobre X converge.*

Demostración. (ver [12])

($\Rightarrow$): (Por reducción al absurdo). Supongamos que existe un ultrafiltro $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ que no converge. Entonces para todo $x \in X$ existe una vecindad de x, $V(x)$, tal que $V(x) \notin \mathcal{F}$. Para cada $x \in X$, sea $V'(x) \subseteq V(x)$ un abierto que contiene a x. Es claro que por ser $\mathcal{F}$ un filtro, $V'(x) \notin F$, para cada $x \in X$. Los abiertos $V'(x)$ constituyen un cubrimiento abierto de X, es decir, $X \subseteq \bigcup\limits_{x \in X} V'(x)$. Por lo tanto, como $(X, \mathcal{T})$ es compacto, existe un subcubrimieto finito de X, es decir, existen $\{V'(x_1), \ldots, V'(x_n)\} \subseteq \{V'(x) : x \in X\}$ tal que $X \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} V'(x_i)$. Como $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro los complementos $X - V'(x_i) \in \mathcal{F}$, para todo $i = 1, ..., n$. Dado que $\mathcal{F}$ es un filtro la intersección finita de tales conjuntos pertenece al mismo, es decir, $[X - V'(x_1) \cap \ldots \cap X - V'(x_n)] \in \mathcal{F}$. Como $X \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} V'(x_i)$, se tiene que $[X - V'(x_1) \cap \ldots \cap X - V'(x_n)] = \emptyset$, y por lo tanto $\emptyset \in \mathcal{F}$, esto contradice que $\mathcal{F}$ es un filtro. En conclusión, cualquier ultrafiltro sobre X converge.

($\Leftarrow$): (Por reducción al absurdo). Supongamos que X tiene un cubrimiento abierto, $X \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, que no admite subcubrimiento finito. Entonces consideramos el conjunto F de todos los complementos de uniones finitas de tales abiertos A_i, es decir,

$$F = \{X - (A_0 \cup \ldots \cup A_n) : \{A_0, \ldots, A_n\} \subseteq \{A_i\}_{i \in I}\}.$$

Como F tiene la propiedad de intersección finita, se tiene, por el ítem *3.* del Teorema 2.2, que existe un filtro sobre X generado por F, sea $\mathcal{F}$ dicho filtro. Luego, por el Teorema del Ultrafiltro se tiene que existe un ultrafiltro sobre X que contiene a $\mathcal{F}$, sea $\mathcal{F}^*$ dicho ultrafiltro. Para cada $x \in X$ existe un abierto A_i tal que $x \in A_i$, pues $X \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i$. Por otro lado, se cumple (por la definición de F) que $X - A_i \in \mathcal{F}^*$, para todo $i \in I$. Como $\mathcal{F}^*$ es un ultrafiltro se tiene que $A_i \notin \mathcal{F}^*$, para todo $i \in I$. En consecuencia, para cada $x \in X$, $\mathcal{F}^*$ no converge a x, es decir, $\mathcal{F}^*$ no converge. Esto contradice la hipótesis, en conclusión $(X, \mathcal{T})$ es compacto. $\square$

4 Ultrafiltros y Teoría de la medida

En esta sección presentaremos una demostración de que los ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$ no son medibles, considerados como subconjuntos del espacio de Cantor. Donde el espacio (topológico) de Cantor es el par $(2^{\aleph_0}, t)$ con t la topología generada por los abiertos básicos de la forma: $V_s = \{f \in 2^{\aleph_0} : s(i) = f(i), \forall i \in Dom(s)\}$, donde s es una sucesión finita de ceros y unos.

Para poder realizar nuestra demostración es necesario tener en cuenta que:

1. Se puede dotar al espacio de Cantor con una medida μ tal que $\mu(2^{\aleph_0})$ =1, es decir, μ es una medida de probabilidad, μ se llama *la medida producto en* $2^{\mathbb{N}}$, (ver [11, p. 119-120]).

2. Un conjunto $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ es *final* (también se denomina *conjunto cola* o *conjunto cerrado bajo conjuntos finitos*) si para todo $z \in X$ y $w \in 2^{\mathbb{N}}$ se cumple que si $\{n \in \mathbb{N} : z(n) \neq w(n)\}$ es finito, entonces $w \in X$.

Además es necesario el siguiente lema:

Lema 4.1. *[Ley 0-1] Sea $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ un conjunto final μ-medible, entonces $\mu(X) = 0$ o $\mu(X) = 1$.*

Teorema 4.2. *Los ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$ no son medibles (considerados como subconjuntos del espacio de Cantor $(2^{\aleph_0}, t)$).*

Demostración. Sea U un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$. U es un subconjunto de $P(\mathbb{N})$ que se puede ver como un subconjunto del espacio de Cantor $2^{\aleph_0}$ identificando los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que lo conforman con sus funciones características. Dotemos al espacio de Cantor con la medida producto μ, eśta se puede definir en varias etapas de la siguiente manera: En los abiertos básicos del espacio de Cantor se define $\mu(V_s) = \dfrac{1}{2^{Longitud(s)}}$, es decir, $\mu(V_s)$ está estrechamente relacionado con la longitud de s. Ejemplos:

$$\mu(V_{\langle 0\rangle}) = \frac{1}{2},\ \mu(V_{\langle 1\rangle}) = \frac{1}{2},\ \mu(V_{\langle 0,1\rangle}) = \frac{1}{4},\ \mu(V_{\langle 1,0\rangle}) = \frac{1}{4},\ \mu(V_{\langle 1,0,1\rangle}) = \frac{1}{8},\ \mu(V_{\langle 0,0,0\rangle}) = \frac{1}{8},\ \text{ etc.}$$

Esa medida se puede extender a todo conjunto abierto, pues todo conjunto abierto Z se puede expresar como la unión de vecindades básicas disjuntas dos a dos, $\mu(Z)$ es la suma infinita de la medida de las vecindades básicas. Luego, se extiende μ a $P(2^{\aleph_0})$ con una medida exterior $\mu^\star : P(2^{\aleph_0}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, donde $\overline{\mathbb{R}}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \cup \{+\infty\}$, usando el método de Carathéodory: Sea $A \subseteq 2^{\aleph_0}$,

$$\mu^\star(A) = inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu({V_s}^n) : ({V_s}^n)_{n=1}^{\infty},\ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} {V_s}^n \right\}.$$

Después se define cuando un conjunto es $\mu^\star$-medible: Un conjunto $E \subseteq 2^{\aleph_0}$ se dice $\mu^\star$*-medible* si y sólo si para todo $A \subseteq 2^{\aleph_0}$ se tiene que,

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A \cap E^c).$$

Luego, se define la clase $\mathcal{M} \subseteq P(2^{\aleph_0})$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{M} = \{E \subseteq 2^{\aleph_0} : E \text{ es } \mu^\star \text{ -medible}\}.$$

Se cumple que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra sobre $2^{\aleph_0}$ que contiene a la σ-álgebra de los borelianos $(\mathcal{B}(2^{\aleph_0}))$. También se cumple que $\mu^\star \restriction \mathcal{M}$ es una medida, por simplicidad se denotará a $\mu^\star \restriction \mathcal{M}$ por μ. Así, estamos trabajando en el espacio de medida de probabilidad $(2^{\aleph_0}, \mathcal{M}, \mu)$.

Aplicando la Ley 0-1 (Lema 4.2) procedemos de la siguiente manera: Supongamos que el ultrafiltro U de nuestra hipótesis es medible. Como U es un ultrafiltro, entonces U es una partición de $2^{\aleph_0}$, es decir, $2^{\aleph_0} = U \cup (2^{\aleph_0} - U)$. Entonces por la aditividad de μ se tiene que: $1 = \mu(2^{\aleph_0}) = \mu(U) + \mu(2^{\aleph_0} - U)$. En consecuencia, $\mu(U) = \frac{1}{2}$, pues la operación de intercambiar ceros y unos en una sucesión de ceros y unos (es decir, donde va 0 se coloca 1, y donde va 1 se coloca 0) es un automorfismo de $2^{\aleph_0}$ que preserva la medida (ver el caso de los abiertos básicos como un ejemplo), y este automorfismo manda U en $2^{\aleph_0} - U$, por lo tanto $\mu(U) = \mu(2^{\aleph_0} - U)$. Por otro lado, tenemos que por la Ley 0-1 se cumple que $\mu(U) = 0$ o $\mu(U) = 1$, pues U es un conjunto final o invariante por cambios finitos (ya que U no tiene conjuntos finitos por ser ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$). En consecuencia, $0 = \frac{1}{2}$ o $1 = \frac{1}{2}$, contradicción. Por lo tanto, U no puede ser medible. $\square$

Los detalles de la construcción de μ^*, y una prueba del Lema 4.1 (Ley 0-1), se pueden ver en el texto [11, p. 115-120]. También vale la pena ver los detalles de la construcción de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, usando el método de Carathéodory, que se encuentra en el texto [1, p. 26-37].

5 Ultrafiltros y Combinatoria infinita

En esta sección presentamos una demostración del Teorema de Ramsey (infinito) usando ultrafiltros no principales.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Definimos $[\mathbb{N}]^n = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = n\}$. Es decir, el conjunto $[\mathbb{N}]^n$ es la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que tienen exactamente n elementos. Por otro lado, simbolizaremos por $^\wedge\{y_i\}_{i=1}^n$ al conjunto de elementos $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ tal que $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$.

Teorema 5.1 (Teorema de Ramsey, versión 1)**.** *Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $[\mathbb{N}]^n$ y $\{A_0, A_1\}$ una partición de $[\mathbb{N}]^n$ en dos pedazos, es decir, $[\mathbb{N}]^n = A_0 \cup A_1$ y $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. Entonces existe un subconjunto infinito $J \subseteq \mathbb{N}$ tal que $[J]^n \subseteq A_0$ o $[J]^n \subseteq A_1$. (Se dice que el conjunto J es un homogéneo de la partición $\{A_0, A_1\}$).*

Demostración. (Ver [5]). Si $n = 1$, entonces el teorema se cumple trivialmente (es una versión infinita del "Principio del Palomar" o "Principio del Casillero").

Consideremos de ahora en adelante el orden usual de $\mathbb{N}$, es decir, $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < n < n+1 < \ldots$. Es claro que el conjunto $[\mathbb{N}]^n$ es equipotente al conjunto de todas la n-secuencias $<$-ordenadas de $\mathbb{N}$. Usaremos esta equipotencia en esta demostración.

Supongamos que $n > 1$. Sea D un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$, entonces se cumple que para cualquier $m \in \mathbb{N}$, $\{i \in \mathbb{N} : m < i\} \in D$.

Para cada $r < n$ se definen dos subconjuntos A_0^{n-r} y A_1^{n-r} de $[\mathbb{N}]^{n-r}$ por inducción sobre r como sigue:

Paso base: $r = 0$, entonces $A_0^n = A_0$ y $A_1^n = A_1$.

Paso inductivo: Supóngase que se han definido A_0^{n-r} y A_1^{n-r} tal que $[\mathbb{N}]^{n-r} \subseteq A_0^{n-r} \cup A_1^{n-r}$, entonces se definen $A_0^{n-(r+1)}$ y $A_1^{n-(r+1)}$ como sigue:

$$A_0^{n-(r+1)} = \{^\wedge\{y_i\}_{i=1}^{n-(r+1)} : \{i \in \mathbb{N} : y_{n-(r+1)} < i \text{ y } \{y_1, \ldots, y_{n-(r+1)}, i\} \in A_0^{n-r}\} \in D\},$$

$$A_1^{n-(r+1)} = \{^\wedge\{y_i\}_{i=1}^{n-(r+1)} : \{i \in \mathbb{N} : y_{n-(r+1)} < i \text{ y } \{y_1, \ldots, y_{n-(r+1)}, i\} \in A_1^{n-r}\} \in D\}.$$

(Observación sobre el paso inductivo: En la expresión anterior "$n - (r + 1)$" que se utiliza para generar los conjuntos restantes (A_0^{n-r} y A_1^{n-r} para todo $r < n$ distintos a A_0^n y a A_1^n) se procede a sustituir los valores desde $r = 0$ hasta $r = n - 2$, de esta manera se llega hasta $[\mathbb{N}]^1 \subseteq A_0^1 \cup A_1^1$, lo buscado.)

Por las propiedades de D se cumple que $[\mathbb{N}]^{n-(r+1)} \subseteq A_0^{n-(r+1)} \cup A_1^{n-(r+1)}$. En efecto, si se tiene que $[\mathbb{N}]^{n-(r+1)} \nsubseteq A_0^{n-(r+1)} \cup A_1^{n-(r+1)}$, entonces existe $^\wedge\{y_i\}_{i=1}^{n-(r+1)} \in [\mathbb{N}]^{n-(r+1)}$ tal que $^\wedge\{y_i\}_{i=1}^{n-(r+1)} \notin A_0^{n-(r+1)} \cup A_1^{n-(r+1)}$. En consecuencia:

$$\{i \in \mathbb{N} : y_{n-(r+1)} < i \text{ y } \{y_1, \ldots, y_{n-(r+1)}, i\} \in A_0^{n-r}\} \notin D,$$

$$\{i \in \mathbb{N} : y_{n-(r+1)} < i \text{ y } \{y_1, \ldots, y_{n-(r+1)}, i\} \in A_1^{n-r}\} \notin D.$$

De modo que, por ser D un ultrafiltro, se tiene que el complemento de dichos conjuntos pertenece a D, es decir,

$$S = \{i \in \mathbb{N} : (y_{n-(r+1)} < i) \to [\{y_1, \ldots, y_{n-(r+1)}, i\} \notin A_0^{n-r}]\} \in D$$

$$Q = \{i \in \mathbb{N} : (y_{n-(r+1)} < i) \to [\{y_1, \ldots, y_{n-(r+1)}, i\} \notin A_1^{n-r}]\} \in D.$$

Entonces, por ser D un filtro, se tiene que:

$$S \cap Q \in D.$$

Luego, como D es un ultrafiltro no principal, D no tiene conjuntos finitos, así que $S \cap Q$ es infinito. En consecuencia, existe un $k \in \mathbb{N}$, $k > y_{n-(r+1)}$ tal que $\{y_1, \ldots, y_{n-(r+1)}, k\} \notin A_0^{n-r}$ y $\{y_1, \ldots, y_{n-(r+1)}, k\} \notin A_1^{n-r}$. Por lo tanto, $[\mathbb{N}]^{n-r} \nsubseteq A_0^{n-r} \cup A_1^{n-r}$. Esto contradice la hipótesis inductiva. Se concluye entonces lo que se quiere: $[\mathbb{N}]^{n-(r+1)} \subseteq A_0^{n-(r+1)} \cup A_1^{n-(r+1)}$.

A partir del paso final del procedimiento inductivo anteriormente realizado tenemos el siguiente hecho $\mathbb{N} \subseteq A_0^1 \cup A_1^1$. Como $\mathbb{N} \in D$ y D es cerrado hacia arriba se tiene que $A_0^1 \cup A_1^1 \in D$, en consecuencia $A_0^1 \in D$ o $A_1^1 \in D$, porque D es un ultrafiltro. El hecho de que $A_0^1 \in D$ o $A_1^1 \in D$ también se puede demostrar por reducción al absurdo usando ideas parecidas a las que se utilizaron anteriormente para probar que $[\mathbb{N}]^{n-(r+1)} \subseteq A_0^{n-(r+1)} \cup A_1^{n-(r+1)}$.

El argumento que se realizará en lo sucesivo se divide en dos casos simétricos dependiendo de si $A_0^1 \in D$ o $A_1^1 \in D$.

Caso 1: ($A_0^1 \in D$). Se define de manera inductiva una sucesión infinita

$$j_0 < j_1 < j_2 < j_3 < j_4 < \ldots < j_m < j_{m+1} < \ldots$$

de elementos de $\mathbb{N}$ como sigue:

Paso base: Sea $j_0 \in A_0^1$ el primer elemento de A_0^1.

Paso inductivo: Sea $m \in \mathbb{N}$ y supongamos que $j_0 < \ldots < j_m$ han sido definidos de tal forma que se cumple la siguiente propiedad:

$$\forall\, r,\ 1 \leq r \leq n,\ \text{ y } \forall\, ^\wedge\{y_i\}_{i=1}^r \subset \{j_0, \ldots, j_m\},\ \text{ se tiene que } ^\wedge\{y_i\}_{i=1}^r \in A_0^r \tag{1}$$

Entonces se define j_{m+1} de la siguiente manera:

Por la propiedad (1) y por la definición de los subconjuntos A_0^{n-r} y A_1^{n-r} de $[\mathbb{N}]^{n-r}$, dado $^\wedge\{y_i\}_{i=1}^r \subset \{j_0, \ldots, j_m\}$ con $r < n$, el conjunto

$$X_{y_1 \ldots y_r} = \{i \in \mathbb{N} : y_r < i \text{ y } \{y_1, \ldots, y_r, i\} \in A_0^{r+1}\} \in D.$$

Dado que existen a lo más un número finito de conjuntos de la forma $^\wedge\{y_i\}_{i=1}^r$ con longitud a lo sumo $r = n-1$ cuyos elementos son del conjunto $\{j_0, \ldots, j_m\}$, pues para cada $r < n$ la cantidad de conjuntos $^\wedge\{y_i\}_{i=1}^r$ de logintud r es exactamente el número combinatorio o coeficiente binomial $C_{(m,r)} = \dfrac{m!}{r!.(m-r)!}$, se concluye que el número de conjuntos $X_{y_1 \ldots y_r}$ es finito, y por lo tanto su intersección Y está en D. Como D es un ultrafiltro no principal, Y es infinito, y nosotros podemos fijar un elemento $j_{m+1} \in Y$ tal que $j_{m+1} > j_m$ (tomamos el menor elemento de Y). Es claro, por la definición de j_{m+1}, que se cumple la propiedad (1) si se reemplaza m por $m+1$.

Procediendo de la manera anterior se puede apreciar que el conjunto infinito

$$J = \{j_0, j_1, j_2, j_3, j_4, \ldots, j_m, j_{m+1}, \ldots\}$$

puede ser construido. Por la propiedad (1), para cualquier conjunto $^\wedge\{y_i\}_{i=1}^n \subset J$ se cumple que $^\wedge\{y_i\}_{i=1}^n \in A_0^n = A_0$, es decir, $[J]^n \subseteq A_0$.

Caso 2: ($A_1^1 \in D$). Se procede de manera análoga al Caso 1, y se demuestra que $[J]^n \subseteq A_1$. $\square$

Corolario 5.2 (Teorema de Ramsey, versión 2)**.** *Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ y $[\mathbb{N}]^n$. Y sea $\{A_i\}_{i=1}^k$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$, una partición de $[\mathbb{N}]^n$, es decir, $[\mathbb{N}]^n = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$, y los A_i son disjuntos dos a dos. Entonces existe un subconjunto infinito $J \subseteq \mathbb{N}$ y existe un $d \in \mathbb{N}$, $0 \leq d \leq k$, tal que $[J]^n \subseteq A_d$.*

Demostración. Se demuestra aplicando reiteradamente el Teorema de Ramsey (versión 1) y aplicando reiteradamente la propiedad asociativa (de conjuntos) entre los elementos de la partición, siempre particionándolo en dos pedazos para poder aplicar el Teorema de Ramsey (versión 1). El conjunto homogéneo J se consigue en un número finito de pasos porque el número de pedazos de la partición es finito. □

6 Ultrafiltros, Lógica, Álgebra y Topología

En esta sección presentamos una demostración de que el Teorema de Compacidad para un lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden es equivalente a la compacidad del espacio de Stone correspondiente al álgebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}$.

Teorema 6.1. *El teorema de compacidad para un lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden es equivalente a la compacidad del espacio de Stone correspondiente al álgebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea K el conjunto de todas las sentencias de $\mathcal{L}$. Nosotros consideramos la relación de equivalencia $\vdash \sigma \leftrightarrow \rho$ sobre K. El conjunto cociente B de todas las clases de equivalencia $\{[\sigma] : \sigma \in K\}$, con las siguientes operaciones:

$$[\sigma] + [\rho] = [\sigma \vee \rho], \qquad [\sigma] \,.\, [\rho] = [\sigma \wedge \rho],$$

$$[\sigma]' = [\neg\sigma], \qquad 0 = [\sigma \wedge \neg\sigma],$$

$$1 = [\sigma \vee \neg\sigma].$$

es un álgebra booleana llamada *álgebra de Lindenbaum* y la denotaremos por $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ (ver la definición de álgebra booleana en la sección 7.2 de este artículo, ver [31]).

El espacio topológico de Stone $(X, \mathcal{T})$ correspondiente a $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ se define como sigue:

$$\begin{aligned} X = \{&T_{\mathcal{F}} : T_{\mathcal{F}} \text{ es una teoría completa y consistente en el lenguaje } \mathcal{L} \\ &\text{correspondiente al ultrafiltro } \mathcal{F} \text{ sobre } \mathcal{B}_{\mathcal{L}}\}, \end{aligned}$$

donde un conjunto de sentencias R del lenguaje $\mathcal{L}$ es una *teoría completa* si R es cerrada bajo la relación de deducibilidad (si $R \vdash \sigma$, entonces $\sigma \in R$. Esta propiedad significa que R es una teoría) y para cada sentencia ρ de $\mathcal{L}$ se cumple que: $\rho \in R$ o $\neg\rho \in R$ (esta propiedad significa que es R es completa). R es *consistente* si de R no se deduce una contradición: $\rho \wedge \neg\rho$. Es claro que el Teorema del Ideal Primo implica que X es distinto de vacío, pues dado $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ (por ejemplo el dual de un ideal primo sobre $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ cuya existencia esta garantizada el Teorema del Ideal Primo) el conjunto de sentencias $T_{\mathcal{F}} = \{\sigma : [\sigma] \in \mathcal{F}\}$ es una teoría completa y consistente (por lo tanto $T_{\mathcal{F}}$ es una teoría maximal consistente). En efecto, para cada sentencia ρ de $\mathcal{L}$ se cumple que $1 = [\rho \vee \neg\rho] \in \mathcal{F}$, entonces $[\rho] + [\neg\rho] \in \mathcal{F}$, y por lo tanto $[\rho] \in \mathcal{F}$ o $[\neg\rho] \in \mathcal{F}$. De modo que $\rho \in T_{\mathcal{F}}$ o $\neg\rho \in T_{\mathcal{F}}$. $T_{\mathcal{F}}$ es cerrada bajo la relación de deducibilidad: Si $T_{\mathcal{F}} \vdash \rho$, entonces existen $\phi_1, \ldots, \phi_n \in T_{\mathcal{F}}$ tal que ρ se deduce de ellas, es decir, $\vdash (\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \rightarrow \rho$. En consecuencia, $[\phi_1]. \ldots .[\phi_n] \leq [\rho]$. Y como $\mathcal{F}$ es un filtro cerrado hacia arriba se concluye que

$\rho \in T$, pues $[\phi_1].\dots.[\phi_n] \in \mathcal{F}$. También se cumple que $T_{\mathcal{F}}$ es consistente, pues si $\rho \wedge \neg\rho \in T_{\mathcal{F}}$, entonces $0 = [\rho \wedge \neg\rho] \in \mathcal{F}$. Contradicción. Por lo tanto, $T_{\mathcal{F}}$ es consistente. El procedimiento inverso también se cumple, es decir, si Q es una teoría completa y consistente de $\mathcal{L}$, entonces el conjunto $\mathcal{F} = \{[\phi] : \phi \in Q\}$ es un ultrafiltro sobre $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$.

$\mathcal{T} \subseteq P(X)$ es la topología generada por los siguientes abiertos básicos:

$$U(\phi) = \{T_{\mathcal{F}} \in X : \phi \in T_{\mathcal{F}}\},$$

para cada sentencia ϕ del lenguaje $\mathcal{L}$. Denotaremos al espacio de Stone por $S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$. Notar que todos los abiertos básicos son también conjuntos cerrados pues $U(\sigma)$ es el complemento de $U(\neg\sigma)$, y viceversa.

Probemos que el Teorema de Compacidad de $\mathcal{L}$ implica la compacidad de $S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$. Sea $\{U(\phi_i) : i \in I\}$ un cubrimiento abierto de $S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$, es decir, $S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}}) = \bigcup_{i \in I} U(\phi_i)$. Esto significa que para cualquier teoría $T_{\mathcal{F}} \in S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$ existe $i \in I$ tal que $\phi_i \in T_{\mathcal{F}}$. Se afirma que tal cubrimiento admite un subcubrimento finito. En efecto: Si no admite un subcubrimiento finito, entonces el conjunto $\{\neg\phi_i : i \in I\}$ es finitamente consistente (cada subconjunto finito de dicho conjunto es consistente), porque dado un subconjunto finito $\{\neg\phi_{i1}, \dots, \neg\phi_{in}\} \subseteq \{\neg\phi_i : i \in I\}$ existe (por la hipótesis de absurdo) una teoría $T_{\mathcal{F}} \in S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$ tal $T_{\mathcal{F}} \notin U(\phi_{i1}) \cup \dots \cup U(\phi_{in})$. Luego, $\{\neg\phi_{i1}, \dots, \neg\phi_{in}\} \subseteq T_{\mathcal{F}}$ y como $T_{\mathcal{F}}$ es consistente, se tiene que $\{\neg\phi_{i1}, \dots, \neg\phi_{in}\}$ es consistente. De modo que $\{\neg\phi_i : i \in I\}$ es finitamente consistente (y por el Teorema de completitud de Gödel dicho conjunto es finitamente satisfacible, es decir, cada subconjunto finito del mismo tiene un modelo). En consecuencia, por el Teorema de Compacidad el conjunto $\{\neg\phi_i : i \in I\}$ tiene un modelo, y por lo tanto es consistente. Así que por el Lema de Lindenbaum (o por el Lema de Zorn) el conjunto $\{\neg\phi_i : i \in I\}$ se puede extender a un conjunto maximal consistente Σ, el cual es una teoría completa y consistente que se corresponde con un ultrafiltro sobre $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$, y en consecuencia, $\Sigma \in S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$, pero no existe un $i \in I$ tal que $\Sigma \in U(\phi_i)$. Contradicción. Por lo tanto, el cubrimiento abierto $\{U(\phi_i) : i \in I\}$ de $S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$ admite un subcubrimento finito.

Ahora probaremos que la propiedad de compacidad de $S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$ implica el Teorema de Compacidad de $\mathcal{L}$: (Probaremos el Teorema de Compacidad de $\mathcal{L}$ usando la ley lógica de contraposición).

Sea $\{\phi_i : i \in I\}$ un conjunto inconsistente de sentencias de $\mathcal{L}$, entonces el conjunto $\{U(\neg\phi_i) : i \in I\}$ forma un cubrimiento abierto de $S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$, pues para cada teoría $T_{\mathcal{F}} \in S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$ se cumple que $\{\phi_i : i \in I\} \nsubseteq T_{\mathcal{F}}$, ya que $T_{\mathcal{F}}$ es consistente. Por hipótesis este cubrimiento abierto admite un subcubrimiento finito: $\{U(\neg\phi_{i1}), \dots, U(\neg\phi_{in})\}$. Por lo tanto, el conjunto $\{\phi_{i1}, \dots, \phi_{in}\}$ es inconsistente. En efecto: Si $\{\phi_{i1}, \dots, \phi_{in}\}$ es consistente, entonces usando el Lema de Lindenbaum (o el Lema de Zorn) se puede extender dicho conjunto a un conjunto maximal consistente E, el cual es una teoría completa y consistente que se corresponde con un ultrafiltro sobre $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$, es decir, se cumple que $E \in S(\mathcal{B}_{\mathcal{L}})$. Pero $E \notin U(\neg\phi_{i1}) \cup \dots \cup U(\neg\phi_{in})\}$. Contradicción. $\square$

7 Ultrafiltros, Álgebra, Combinatoria infinita y Lógica

En esta sección presentamos dos demostraciones:

(a) Teorema de Ramsey Finito.

(b) Equivalencia del Teorema del Ultrafiltro, el Teorema del Ideal Primo, el Principio de Consistencia y el Teorema de Compacidad de la lógica de primer orden. (A veces nos referiremos a la lógica de primer orden utilizando la siguiente expresión: $\mathcal{L}_{\omega\omega}$).

7.1 Ultrafiltros, combinatoria y Lógica de primer orden

Demostraremos en esta subsección el Teorema de Ramsey Finito. Para enunciar dicho teorema es conveniente introducir la siguiente notación:

Dado $n \in \mathbb{N}$, y dados cardinales α, β, γ, la notación

$$\alpha \to (\beta)^n_\gamma$$

significa que para cualquier partición en γ partes del conjunto de subconjuntos de n elementos de un conjunto A de cadinalidad α, existe un subconjunto $J \subseteq A$, de cardinalidad β, cuyos subconjuntos de n elementos estan todos en la misma parte. Equivalentemente, para toda $F : [\alpha]^n \longrightarrow \gamma$ existe $J \subseteq \alpha$, $|J| = \beta$, y existe $\delta \in \gamma$ tal que $F''[J]^n = \{\delta\}$. Tal conjunto J se dice que es un homogéneo para F. Con esta notación el Teorema de Ramsey (versión 1) se puede formular así:

$$\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_2, \ \ (n \in \mathbb{N} - \{0\}).$$

Y el Teorema de Ramsey (versión 2) se puede formular así:

$$\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_k, \ \ (n \in \mathbb{N} - \{0\}, k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}).$$

Ahora vamos a enunciar y demostrar el Teorema de Ramsey Finito:

Teorema 7.1.1 (Teorema de Ramsey Finito)**.** *Dados números naturales positivos k, r y m existe un entero positivo n tal que*

$$n \to (m)^r_k.$$

Demostración. Usaremos reducción al absurdo y el Teorema de Compacidad de $\mathcal{L}_{\omega\omega}$. (ver [21])

Considere el Cálculo de primer orden que tiene k-predicados r-ários P_i $(i = 1, \ldots, k)$, y una cantidad infinita de constantes $\{c_p : p \in \mathbb{N}\}$. Y considere la sentencia φ que afirma que los P_i constituyen una partición de r-tuplas, y que ningún m forma un conjunto homogéneo de dicha partición. Además de eso, agréguele a dicha sentencia φ la siguiente cantidad infinita de sentencias $c_p \neq c_q$ $(p \neq q)$. Es decir, estamos considerando el siguiente conjunto Σ de sentencias del Cálculo de primer orden referido:

$$\Sigma = \{\varphi\} \cup \{c_p \neq c_q : p, q \in \mathbb{N} \wedge p \neq q\}.$$

¿Y quién es φ?, φ es la conjunción de las siguientes sentencias:

$$\forall x_1 \ldots x_k \ \{[x_i \neq x_j (i \neq j)] \to [P_1(x_1 \ldots x_k) \vee \ldots \vee P_k(x_1 \ldots x_k)]\}.$$

$$\forall x_1 \ldots x_k \ \{[x_i \neq x_j (i \neq j)] \to [P_1(x_1 \ldots x_k) \to \neg P_2(x_1 \ldots x_k) \wedge \ldots \wedge \neg P_k(x_1 \ldots x_k)]\}.$$

Una sentencia de la forma anterior para el resto de los P_i, $2 \leq i < k$, por ejemplo para P_k es la siguiente (estas sentencias garantizan que los P_i sean una partición):

$$\forall x_1 \ldots x_k \ \{[x_i \neq x_j (i \neq j)] \to [P_k(x_1 \ldots x_k) \to \neg P_1(x_1 \ldots x_k) \wedge \ldots \wedge \neg P_{(k-1)}(x_1 \ldots x_k)]\}.$$

$$\neg \exists x_1 \ldots x_m \{[x_i \neq x_j (i \neq j)] \to \{[P_1(...) \wedge \ldots \wedge P_1(...)] \vee \ldots \vee [P_k(...) \wedge \ldots \wedge P_k(...)]\}\},$$

donde las conjunciones $[P_i(...) \wedge \ldots \wedge P_i(...)]$ son para todos los subconjuntos de cardinalidad r de los m elementos $x_1, \ldots, x_m$, tal cantidad de subconjuntos (finita) es exactamente el número combinatorio $C_{(m,r)}$. Esta sentencia afirma que la partición no tiene homogéneo de cardinalidad m.

Ahora bien, si el Teorema de Ramsey Finito es falso, es decir, si dados $k, r, m \in \mathbb{N}$, se cumple que para todo $n \geq r$ existe una $F : [n]^r \longrightarrow k$ que es una partición de $[n]^r$ en k elementos para la que no hay conjunto homogéneo de m elementos, entonces cualquier número finito de sentencias de Σ tiene un modelo de la forma $\mathfrak{A} = \langle n, A_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, A_k^{\mathfrak{A}}, c_{p_1}^{\mathfrak{A}}, \ldots c_{p_t}^{\mathfrak{A}} \rangle$, para n suficientemente grande (se construye con la F adecuada). Y por el teorema de compacidad para $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ se concluye que Σ tiene un modelo. Esto define una partición de $[\{c_p : p \in \mathbb{N}\}]^r$ que no tiene homogéneo de tamaño m, lo cual contradice el Teorema de Ramsey (versión 2). Por lo tanto, el Teorema de Ramsey Finito se cumple. $\square$

7.2 Ultrafiltros, Álgebra, Combinatoria infinita y Lógica de primer orden

Demostraremos en esta subsección que el Teorema del Ultrafiltro, el Teorema del Ideal Primo, el Principio de Consistencia y el Teorema de Compacidad de $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ son equivalentes. Todos estos principios, cuya equivalencia se probará, son versiones débiles (estrictas) del Axioma de elección. En efecto, Harpen y Levy demostraron en 1967 que en el Modelo Básico de Cohen vale el Teorema del Ultrafiltro y no vale el Axioma de elección (ver [16]). A continuación se presentan una serie de definiciones previas para proceder a formular los principios mencionados.

Defínción 7.2.1. Un *álgebra booleana* es un conjunto B con al menos dos elementos, 0 y 1 (cero y uno), dotado de dos operaciones binarias (suma) "+" y (producto) " $\centerdot$", con una operación unaria (complemento) " $'$", las cuales satisfacen las siguientes propiedades (axiomas):

$$a + b = b + a \ ; \ a \centerdot b = b \centerdot a \qquad \text{Leyes conmutativas}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \ ; \ (a \centerdot b) \centerdot c = a \centerdot (b \centerdot c) \qquad \text{Leyes asociativas}$$

$$a \centerdot (b + c) = (a \centerdot b) + (a \centerdot c) \ ; \ a + (b \centerdot c) = (a + b) \centerdot (a + c) \qquad \text{Leyes distributivas}$$

$$a + a = a \ ; \ a \centerdot a = a \qquad \text{Leyes de idempotencia}$$

$$a \centerdot (a + b) = a \ ; \ a + (a \centerdot b) = a \qquad \text{Leyes de absorción}$$

$$\left.\begin{array}{l} a + 1 = 1 \ ; \ a \centerdot 1 = a \\ a + 0 = a \ ; \ a \centerdot 0 = 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{c}\text{Leyes de identidad} \\ \text{(elementos neutros y dominación)}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{c} a + (a') = 1 \ ; \ a \centerdot (a') = 0 \\ (a')' = a \end{array}\right\} \qquad \text{Leyes de complemento}$$

$$(a + b)' = a' \centerdot b' \ ; \ (a \centerdot b)' = a' + b' \qquad \text{Leyes de De Morgan}$$

Denotaremos a tal álgebra booleana así : $\mathcal{B} = \langle B, +, \centerdot, ', 0, 1 \rangle$.

Por simplicidad consideraremos que $\mathcal{B} = B$, a menos que el contexto requiera distinguirlos. El orden parcial de $\mathcal{B}$ se define así, $p \leq q \leftrightarrow p \centerdot q' = 0$. Si $a, b \in \mathcal{B}$, entonces: $a + b$ es el supremo de a y b, $a \centerdot b$ es el ínfimo de a y b, a' es el único $c \in \mathcal{B}$ tal que $a + c = 1$ y $a \centerdot c = 0$. También: $a \leq b \leftrightarrow a + b = b \leftrightarrow a \centerdot b = a$. Dos elementos a, b de $\mathcal{B}$ son incompatibles si, y solo si, $a \centerdot b = 0$. $a - b = a \centerdot b'$. $D \subseteq \mathcal{B}$ es denso en $\mathcal{B}$ si $D \subseteq \mathcal{B} - \{0\}$ y D es denso en $\mathcal{B} - \{0\}$, es decir, si $\forall\, b \in \mathcal{B} - \{0\}\, \exists\, d \in D\ (d \leq b)$. $\mathcal{B}$ es completa si el supremo de S ($\sum S$) y el ínfimo de S ($\prod S$) existen en $\mathcal{B}$, para cualquier $S \subseteq \mathcal{B}$. Sea κ un cardinal regular no numerable. $\mathcal{B}$ es κ-completa si $\sum X$ y $\prod X$ existen en $\mathcal{B}$, para todo subconjunto X de $\mathcal{B}$ tal que $|X| < \kappa$. Si $\mathcal{B}$ es $\aleph_1$-completa se dice que $\mathcal{B}$ es σ-completa. Un *átomo* del álgebra boolena $\mathcal{B}$ es un $a \in \mathcal{B}$ tal que $a \neq 0$ y no hay ningún elemento $x \in \mathcal{B}$ que esté entre 0 y a, es decir, $0 \leq x \leq a$ con $x \neq 0$ y $x \neq a$. Se dice que $\mathcal{B}$ es *atómica* si para cada $z \in \mathcal{B}$, $z \neq 0$, existe un átomo $w \in \mathcal{B}$ tal que $w \leq z$.

El álgebra de conjuntos $\langle \mathcal{F}, \cup, \cap, {}^c, \emptyset, S \rangle$ es un álgebra booleana. También ocurre la dirección inversa, es decir, que toda álgebra booleana es un álgebra de conjuntos, en rigor, se cumple el Teorema de Representación de Stone (1936) (ver [29]): "Toda álgebra booleana es isomorfa a un álgebra de conjuntos". Una prueba de este resultado puede encontrarse en [20, p. 81], [14], entre otros. Un caso bastante usado de álgebra de conjuntos es cuando $\mathcal{F} = P(S)$, es decir, $\langle P(S), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, S \rangle$. Sea S un conjunto con al menos dos elementos, entonces el álgebra booleana $\langle P(S), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, S \rangle$ es atómica. Los átomos son precisamente todos los subcojuntos unitarios $\{x\}$ de S. Vale la pena resaltar que dos ejemplos de álgebra booleana de conjuntos muy usados en matemáticas son la "σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue" y la "σ-álgebra de los conjuntos borelianos de un espacio topológico", la definición de ambas σ-álgebras puede encontrarse (entre otros) en los textos [1, 11, 20, 27].

Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana.

- Un *ideal* sobre $\mathcal{B}$ es un subconjunto $I \subseteq \mathcal{B}$ tal que:
  - (a) $0 \in I$, $1 \notin I$
  - (b) Si $x \in I$ y $z \in I$, entonces $x + z \in I$
  - (c) Si $x, z \in \mathcal{B}$, $x \in I$ y $z \leq x$, entonces $z \in I$.
- Un ideal I sobre $\mathcal{B}$ es primo si: $\forall\, b \in \mathcal{B} \rightarrow (b \in I \vee b' \in I)$.

Ejemplos de ideales son (ver [20, 28]):

(1) Sea $\langle \mathcal{F}, \cup, \cap, {}^c, \emptyset, S \rangle$ un álgebra de conjuntos sobre S. Sea $K \in \mathcal{F}$ tal que $K \neq S$. Si definimos $I_K = \{X \in \mathcal{F} : X \subseteq K\}$, entonces I_K es un ideal sobre $\mathcal{F}$, el ideal generado por K.

(2) Sea $\mathcal{B} = \langle B, +, \centerdot, ', 0, 1 \rangle$ un álgebra booleana:

- $\{0\}$ es un ideal sobre $\mathcal{B}$.
- Sea $b \in \mathcal{B}$, $b \neq 1$. Si definimos $I_b = \{x \in \mathcal{B} : x \leq b\}$, entonces I_b es un ideal sobre $\mathcal{B}$, el ideal generado por b.

(3) Los conjuntos borelianos de medida de Lebesgue cero son un ideal sobre la σ-algebra booleana de los borelianos del conjunto de los números reales ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

(4) Sea $(Y, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un conjunto $X \subseteq Y$ es *nunca denso* si $(\overline{X})^{\circ} = \emptyset$. Un conjunto E se dice que es *magro* si E es una unión numerable de conjuntos nunca densos. El conjunto de los conjuntos borelianos magro forman un ideal sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Teorema 7.2.2 (Teorema del Ideal Primo (Stone, 1936))**.** *Toda álgebra boleana tiene un ideal primo.*

La demostración del Teorema del Ideal Primo (TIP) se realiza usando el Lema de Zorn. Otra formulación equivalente del Teorema del Ideal Primo es la siguiente (ver [21]): *En cualquier álgebra booleana, cualquier ideal puede ser extendido a un ideal primo.*

La siguiente noción de "filtro" que se formulará a continuación, usando álgebras boolenas, generaliza el concepto de "filtro" ofrecido anteriormente en la sección 2, en dicha sección también se puede haber definido la noción de "ideal" en términos de conjuntos como se hizo con los "filtros" ver [19, 20], entre otros.

Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana.

(1) Un *filtro* sobre $\mathcal{B}$ es un subconjunto $F \subseteq \mathcal{B}$ tal que,

  (a) $1 \in F$, $0 \notin F$

  (b) Si $x \in F$ y $z \in F$, entonces $x.z \in F$

  (c) Si $x, z \in \mathcal{B}$, $x \in F$ y $x \leq z$, entonces $z \in F$.

(2) Sea F un filtro sobre $\mathcal{B}$. F es un ultrafiltro si $\forall\, x \in \mathcal{B}$ se tiene que $x \in F \,\vee\, -x \in F$.

Ejemplos de filtros son (ver [10, 26, 28]):

(1) Sea el álgebra de conjuntos sobre $\mathbb{N}$, $\langle P(\mathbb{N}), \cup, \cap, ^c, \emptyset, \mathbb{N}\rangle$. EL conjunto $F = \{X \in P(\mathbb{N}) : \mathbb{N} - X \text{ es finito}\}$ es un filtro sobre $\mathcal{F}$, el *Filtro de Fréchet* que se mencionó anteriormente en la sección 2.

(2) Sea $\langle \mathcal{F}, \cup, \cap, ^c, \emptyset, S\rangle$ un álgebra de conjuntos sobre S. Sea $K \in \mathcal{F}$ tal que $K \neq \emptyset$. Se define $I_K = \{D \in \mathcal{F} : K \subseteq D\}$. I_K es un filtro sobre $\mathcal{F}$, el filtro generado por K que mencionó anteriormente en este artículo en la sección 2.

Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana. Sea I un ideal sobre $\mathcal{B}$, y definamos el filtro dual de I por $F^{DI} = \{b' \in \mathcal{B} : b \in I\}$. Sea F un filtro sobre $\mathcal{B}$, y definamos el ideal dual de F por $I^{DF} = \{b' \in \mathcal{B} : b \in F\}$. Existe un función inyectiva entre el conjunto de los ideales de $\mathcal{B}$ y el conjunto de los filros de $\mathcal{B}$. Recíprocamente: Existe una función inyectiva entre el conjunto de los filros de $\mathcal{B}$ y el conjunto de los ideales de $\mathcal{B}$ (ver [28]).

Teorema 7.2.3 (Teorema del Ultrafiltro (Tarski, 1930))**.** *Todo filtro en un álgebra booleana se puede extender a un ultrafiltro.*

Al igual que el TIP el Teorema del Ultrafiltro (TUF) se puede demostrar usando el Lema de Zorn (tal como se dijo en la sección 2).

Como se ha dicho anteriormente en este artículo, los ultrafiltros son fundamentales para la investigación matemática, en las secciones anteriores se han presentado algunos ejemplos. Otra aplicación de los ultrafiltros que se puede mencionar antes de continuar, es la que tiene que ver con el método de construcción de modelos llamado "ultraproductos" el cual tiene mucha utilidad en investigaciones matemáticas contemporáneas: En la Teoría de Conjuntos (por ejemplo en la investigación sobre cardinales grandes), en la Teoría de Modelos (por ejemplo en la prueba del Teorema de Compacidad usando el Teorema de Loś), en el Análisis no estándar (usando directamente el Teorema de Loś y el filtro de Fréchet, o usando el Teorema de Compacidad directamente), etc. (ver [7, 5, 24, 26]).

Veamos la siguiente definición para luego formular el Principio de Consistencia, según [21]:

Sea S un conjunto y M un conjunto de funciones definidas sobre subconjuntos finitos de S y valores en $\{0,1\}$. Se dice que M es un *desorden binario* sobre S si M satisface las siguientes propiedades:

(i) Para cada subconjunto finito $P \subseteq S$ existe una $t \in M$ tal que $Dom(t) = P$.

(ii) Para cada $t \in M$ y para cada subconjunto finito $P \subseteq S$, se cumple que la restricción $t \restriction P \in M$.

Sea $f : S \longrightarrow 2$, entonces f es *consistente* con un desorden binario M si para cualquier subconjunto finito $P \subseteq S$ se cumple que la restricción $f \restriction P \in M$.

Teorema 7.2.4 (Principio de Consistencia)**.** *Para cualquier desorden binario M sobre S existe una función $f : S \longrightarrow 2$ la cual es consitente con M.*

Más adelante ofreceremos una demostración del Principio de Consistencia que usa el TUF. Ahora formularemos el Teorema de Compacidad para $\mathcal{L}_{\omega\omega}$.

Teorema 7.2.5 (Teorema de Compacidad)**.** *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden de cuaquier cardinalidad, no necesariamente numerable. Sea Σ un conjunto de senencias de $\mathcal{L}$. Si cualquier subconjunto finito de Σ tiene un modelo, entonces Σ tiene un modelo.*

Existen varias maneras de probar el Teorema de Compacidad, como un corolario del Teorema de Completitud de Gödel, de manera directa usando ultraproductos (los cuales usan a su vez ultrafiltros), etc. (ver [5, 24]). Más adelante presentaremos una prueba del mismo usando el Principio de Consistencia.

Ahora probaremos el siguiente teorema:

Teorema 7.2.6. *La siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *Teorema del Ideal Primo*
2. *Teorema del Ultrafiltro*
3. *Principio de Consistencia*
4. *Teorema de Compacidad*

Demostración. (ver [21])

(1) $\Rightarrow$ (2): La prueba es directa usando la dualidad que existe entre ideales y filtros.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sea M un desorden binario sobre S. Debemos encontrar una función $f : S \longrightarrow 2$ que sea consistente con M. Sea I el conjunto de todos los subconjuntos finitos P de S. Para cada $P \in I$ sea M_P el conjunto finito de todas la $t \in M$ tal que $Dom(t) = P$. Notar que si P tiene n elementos, entonces M_P tiene a lo sumo 2^n elementos.

Sea Z el conjunto de todas las funciones z tal que:

(a) $Dom(z) \subseteq I$,

(b) $z(P) \in M_P$, para cada $P \in Dom(z)$,

(c) Para cada $P, Q \in Dom(z)$, las funciones $t_1 = z(P)$ y $t_2 = z(Q)$ son compatibles.

Un ejemplo de una función $z_0 \in Z$ se define a continuación usando las propiedades de M: Sean $E, H, D \in I$, entonces $E \cup H \cup D \in I$. En consecuencia, por las propiedad (i) de M, existe $g \in M$ tal que $Dom(g) = E \cup H \cup D$, es decir, $g \in M_{E\cup H\cup D}$. También, por la propiedad (ii) de M, se cumple que $g_1 = g \restriction E \in M$, $g_2 = g \restriction H \in M$ y $g_3 = g \restriction D \in M$. Se cumple que $g_1 \in M_E$, $g_2 \in M_H$ y $g_3 \in M_D$, también ocurre que (por construcción) g_1, g_2 y g_3 son compatibles dos a dos. $Dom(z_0) = \{E, H, D\}$, $z_0(E) = g_1$, $z_0(H) = g_2$, $z_0(D) = g_3$. Así, $z_0 \in Z$.

Para cada $P \in I$, sea

$$X_P = \{z \in Z : P \in Dom(z)\}.$$

Formamos el conjunto $F = \{X_P : P \in I\}$. Se cumple que F tiene la propiedad de intersección finita (por las propiedades de M). En efecto, sea $X_{P_1}, \ldots, X_{P_n} \in F$, es claro que $P_1 \cup \ldots \cup P_n$ es un conjunto finito (porque todos los P_i son finitos) y que por lo tanto $P(P_1 \cup \ldots \cup P_n) \subseteq I$. Entonces existe una función $h \in M$ tal que $Dom(h) = P_1 \cup \ldots \cup P_n$. Para cada subconjunto $X \subseteq P_1 \cup \ldots \cup P_n$ se cumple que $h(X) = h \restriction X \in M$. $h(X) \in M_X$. Como la cantidad de subconjuntos X es finita la cantidad de $h(X)$ es finita. Y como las $h(X)$ provienen de h ellas son compatibles dos a dos. Ahora se define la función $z_1 : P(P_1 \cup \ldots \cup P_n) \longrightarrow 2$ como sigue: $z_1(X) = h(X)$, para todo $X \subseteq P_1 \cup \ldots \cup P_n$. Se cumple que $z_1 \in Z$ y $z_1 \in X_{P_1} \cap \ldots \cap X_{P_n}$. Así que $X_{P_1} \cap \ldots \cap X_{P_n} \neq \emptyset$. Es decir, F tiene la propiedad de intersección finita.

Sea F^* el filtro sobre Z generado por F (según el Teorema 2.2(3)). Por el TUF sea F^{**} el untrafiltro sobre Z que extiene a F^*.

Para cualquier $P \in I$ el conjunto X_P es la siguiente unión disjunta:

$$X_P = X_{t_1} \cup \ldots \cup X_{t_m},$$

donde

$$\{t_1, \ldots, t_m\} = M_P \text{ y } X_t = \{z \in Z : z(P) = t\}.$$

En consecuencia, como F^{**} es un ultrafiltro y para cada $P \in I$

$$X_P = X_{t_1} \cup \ldots \cup X_{t_m} \in F^{**},$$

se cumple que existe un único $t = t(P) \in M_P$ tal que $X_t \in F^{**}$.

Sea $f = \bigcup\{t_P : P \subset S \text{ finito}\}$. Se cumple que $f : S \longrightarrow 2$, pues las funciones t_P son compatibles dos a dos. (Dados t_P y t_Q se tiene que $X_{t_P} \cap X_{t_Q} \in F^{**}$. Entonces, como F^{**} es un filtro, existe una función $z \in Z$ tal que $z \in X_{t_P} \cap X_{t_Q}$. En consecuencia, por la propiedad (c) de Z, se infiere que t_P y t_Q son compatibles). Por la definición de f se infiere que f es consistente con M.

(3) $\Rightarrow$ (4): Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje $\mathcal{L}$, y supongamos que cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo. Demostremos que Σ tiene un modelo.

Sea S el conjunto de todas las sentencias del lenguaje $\mathcal{L}$. Definimos un desorden binario M sobre S de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} t \in M \leftrightarrow \{ & t \text{ función con dominio finito} \wedge Dom(t) \subseteq S \wedge rango(t) \subseteq 2 \\ & \wedge \exists \mathfrak{A}[\mathfrak{A} \text{ es un modelo de } \Sigma \cap Dom(t) \wedge \forall\theta \in Dom(t)\,(t(\theta) = 1 \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \theta)]\}. \end{aligned}$$

Como por hipótesis cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo, entonces se cumple que M es un desorden binario sobre S. En consecuencia, por el Principio de Consistencia, existe una función $f : S \longrightarrow 2$ la cual es consistente con M. Sea

$$\Sigma^* = \{\theta \in S : f(\theta) = 1\}.$$

Por la definición de M y por las propiedades de f, se infiere que $\Sigma \subseteq \Sigma^*$ y Σ^* es una teoría consistente y completa (por lo tanto es maximal consistente). Entonces, aplicamos la técnica de construcción de modelos a partir de constantes de Henkin para construir un modelo de Σ^* (ver [5]), es decir, usando la propiedad de consistencia de Σ^* se puede extender dicho conjunto a un conjunto Σ^{**} que es maximal consistente y que tiene a un conjunto de testigos C ($\Sigma^{**} \vdash \exists x\phi(x) \to \phi(c)$, para toda sentencia $\exists x\phi(x) \in S$), donde C es un conjunto de nuevas constantes que no estan en $\mathcal{L}$ tal que $|C| = |S|$, y con el conjunto de constantes C se construye un modelo para para Σ^{**}, sea $\mathfrak{B}$ dicho modelo, en consecuencia, como $\Sigma \subseteq \Sigma^* \subseteq \Sigma^{**}$, se concluye que $\mathfrak{B} \restriction \mathcal{L}$ es un modelo para Σ.

(4) $\Rightarrow$ (1): Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje para $\mathcal{B}$ que tiene una constante para cada elemento del universo de $\mathcal{B}$ (por simplicidad, identificamos cada $u \in \mathcal{B}$ con su correspondiente constante). También el lenguaje $\mathcal{L}$ tiene un símbolo de predicado monádico I y un símbolo de predicado relacional binario para la relación de orden del álgebra booleana $\leq$. Sea Σ el siguiente conjunto de sentencias (que afirman que la interpretación de I es un ideal primo sobre $\mathcal{B}$):

$I(0)\ \ \neg I(1)$,

$I(u) \vee \neg I(u')$ (para todo $u \in \mathcal{B}$),

$I(u_1) \wedge \ldots \wedge I(u_k) \to I(u_1 + \ldots + u_k)$ (para todo $u_1 \ldots u_k \in \mathcal{B}$),

$(I(u) \wedge v \leq u) \to I(v)$, (para todo $u, v \in \mathcal{B}$).

(Vale la pena resaltar que también se pueden haber agregado al conjunto de sentencias que se listaron anteriormente todos los axiomas de álgebra booleana y una caracterización completa de $\mathcal{B}$ usando a $\mathcal{L}$ (ver [26, p. 121-122]), pero por simplicidad esto no se hace, es suficiente con lo que realizamos).

Se cumple que cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo, porque cada subconjunto finito de $\mathcal{B}$ genera una subálgebra booleana finita de $\mathcal{B}$ y toda álgebra booleana finita tiene un ideal primo. Entonces por Teorema de Compacidad se tiene que Σ tiene un modelo. Usando la interpretación de I en tal modelo se define un ideal primo sobre $\mathcal{B}$. $\square$

Observación: Vale resaltar que el TUF es equivalente al Teorema de Representación de Stone formulado en la subsección 7.2 de este artículo, entre otras proposiciones (ver [21]). También con el TUF se puede demostrar el Teorema de Hahn-Banach (THB) del Análisis Funcional y tal implicación es estricta, es decir, el THB no implica el TUF (ver [21]). El TUF también implica que existe un conjunto de reales que no es medible Lebesgue (ver [17]). De igual forma el TUF implica al Teorema de Completitud para la lógica de primer orden (ver [26]). Para conocer otras consecuencias y proposiciones equivalentes del TUF ver [21] y [18], entre otros.

8 Algunos problemas abiertos en la Teoría de conjuntos relacionados con ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$

8.1 El modelo simétrico de Mathias y la proposición "Existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$"

Defineción 8.1.1 (Orden parcial homogéneo universal)**.** Sea $(P, <)$ un orden pacial numerable. $(P, <)$ es universal si cualquier orden parcial finito $(E, \prec)$ puede ser sumergido en $(P, <)$. $(P, <)$ es homogéneo si para cualesquiera subconjuntos finitos E_1 y E_2 de P, se cumple que si existe un isomorfismo i entre $(E_1, <)$ y $(E_2, <)$, entonces tal isomorfismo puede ser extendido a un automorfismo sobre $(P, <)$.

A continuación se presenta una definición (en ZFC) del Modelo Simétrico de Mathias ($\mathcal{M}_3$) que realiza Jech en [21, p. 113-114], ejercicio 8. La versión original de este modelo se encuentra en [25]. Jech usa el orden parcial de Cohen $(P, <)$ que agrega un cantidad numerable de reales genéricos a un modelo transitivo base M de ZFC, es decir,

$$P = \{p : p \text{ es una función finita} \wedge Dom(p) \subseteq \omega \times \omega \wedge rang(p) \subseteq \{0,1\}\},$$

$$p < q \leftrightarrow p \supseteq q.$$

Consideremos el conjunto de los nombres canónicos $\{\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}, \ldots\}$ de los reales genéricos $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ agregados a M, es decir, $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \subseteq M[G] - M$. Dotamos a ω con un orden parcial homogeno universal $\ll$ (tal orden existe por el Lema 7.6 de [21, p. 102], y es único salvo isomorfismo, problema 7, [21, p. 113]). Sea $\mathcal{G}$ el grupo de automorfismos de $(P, <)$ inducidos por $\ll$-automorfismos del conjunto $\{\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}, \ldots\}$. Sea $\mathcal{F}$ el filtro normal generado por $fix(e)$, e finito (si $e \subseteq \omega$, entonces $fix(e) = \{\pi \in \mathcal{F} : \pi(n) = n, \forall n \in e\}$). Sea $\mathcal{M}_3$ el modelo simétrico dado por $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{M}_3 = \{i_G(x) : x \in HS\}$, donde HS es la clase de los P-nombres hereditariamente simétricos. Se cumple que $M \subsetneqq \mathcal{M}_3 \subsetneqq M[G]$. $\mathcal{M}_3$ es un modelo transtivo de ZF. También en $\mathcal{M}_3$ es verdad OP (*Principio del Orden:* Todo conjunto se puede ordenar linealmente), pero es falso OEP (*Principio de Extensión del Orden*: Cualquier orden parcial de un conjunto P puede ser extendido a un orden lineal de P) pues el orden parcial $\ll$ del conjunto $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ no puede ser extendido a un orden lineal. Por lo tanto en $\mathcal{M}_3$ es falso el TUF, pues TUF $\rightarrow$ OEP $\rightarrow$ OP. En resumen, estos resultados indican que:

(a) OP $\not\rightarrow$ TUF (a pesar de que TUF $\rightarrow$ OP),

(b) OP $\not\rightarrow$ OEP (a pesar de que OEP $\rightarrow$ OP). Ver [17, 18, 21] para ampliar en las definiciones y demostraciones de estos resultados.

La siguiente pregunta se puede encontrar de manera implícita en los artículos [9, p. 468] y [8, p. 21] de Di Prisco y Henle:

Pregunta 8.1.2. *¿En $\mathcal{M}_3$ existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$?.*

Esta pregunta es pertinente pues en $\mathcal{M}_3$ no vale el TUF. Además de eso, responderla permitiría resolver la siguiente interrogante planteada en [9, p. 468] y [8, p. 21], la cuál formularemos luego de presentar la siguiente definición:

Definición 8.1.1. Un flitro (flitter) sobre $\mathbb{N}$ es un conjunto $\mathcal{F} \subseteq P(\mathbb{N})$ con la siguiente propiedad: Si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B$ o $A^c \cap B^c$ es infinito. Más concisamente: Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \triangle B$ es co-infinito. $\mathcal{F}$ es un ultraflitro (ultraflitter) sobre $\mathbb{N}$ si para todo $X \subseteq \mathbb{N}$ se tiene que $X \in \mathcal{F}$ o $X^c \in \mathcal{F}$.

Se puede demostrar, por un razonamiento análogo al usado en este artículo para el caso de los ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$, que los ultraflitros sobre $\mathbb{N}$ no son medibles, considerados como subconjuntos del espacio de Cantor.

Es claro que todo ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$ es un ultraflitro sobre $\mathbb{N}$, pero no se sabe si la dirección inversa vale, se sospecha que no, es decir, se tiene la conjetura de que la proposición "Existen ultraflitros sobre $\mathbb{N}$" es más débil que la proposición "Existen ultrafiltros no princiaples sobre $\mathbb{N}$", (ver [9, p. 468] y [8, p. 21]). Y por un trabajo no publicado de Carlos Di Prisco, Nathan Bowler, Christian Delhommé, Marianne Morillon y Adrian Mathias titulado "Flutters an Chameleons", se tiene la demostración de que OP implica que "Existen ultraflitros sobre $\mathbb{N}$", de modo que en el Modelo de Mathias $\mathcal{M}_3$ existen ultraflitros. Entonces si la respuesta a la Pregunta 8.1.2 es NO, quedaría probado que "Existen ultraflitros sobre $\mathbb{N}$" $\not\to$ "Existen ultraflitros no principales sobre $\mathbb{N}$". En conclusión, quedaría demostrado que la proposición "Existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$" es más fuerte estrictamente que la proposición "Existen ultraflitros sobre $\mathbb{N}$", lo que se conjetura en [9, p. 468] y [8, p. 21].

8.2 El Modelo de Solovay y la proposición "Existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$"

Para construir al Modelo de Solovay ($L(\mathbb{R})$) necesitamos dos métodos de construcción de modelos de la teoría de conjuntos:

(I) El siguiente teorema nos ofrece un método ("el Colapso de Lévy") para colapsar cardinales usando la técnica de forcing:

Teorema 8.2.1. *Sea κ un cardinal regular y $\lambda > \kappa$ un cardinal inaccesible. Entonces existe un orden parcial $(P, <)$ tal que:*

(a) Cualquier α, $\kappa \leq \alpha < \lambda$, tiene cardinal κ en M[G], y

(b) Cualquier cardinal $\leq \kappa$ y cualquier cardinal $\geq \lambda$ sigue siendo un cardinal en M[G],

En particular $M[G] \models \lambda = \kappa^+$.

Una demostración de este teorema puede encontrarse en [20]. El orden parcial $(P, <)$ utilizado, que se denota por $Col(\kappa, < \lambda)$, es el siguiente: P son todas las funciones cuyo dominio está contenido en $\lambda \times \kappa$ tal que

(i) $|Dom(p)| < \kappa$,

(ii) $p(\alpha, \xi) < \alpha$, para todo $(\alpha, \xi) \in Dom(p)$.

El orden parcial de P es: $p < q \leftrightarrow p \supseteq q$.

(II) *Constructibilidad relativizada* $L(A)$: Sea A un conjunto cualquiera, éste se dice transitivo si, y solo si, $\forall z$ se cumple que $(z \in X \to z \subseteq A)$. Además, se define la *clausura transitiva* de A como el menor conjunto (respecto a $\subseteq$) transitivo y que contiene a A. Se denotará por $Cl(A)$. Ahora, definimos el modelo $L(A)$ por inducción transfinita sobre los ordinales de la siguiente manera (ver [20]):

$$L_0(A) = Cl(\{A\})$$

$$L_{\alpha+1}(A) = \{X \subseteq L_\alpha(A) : X \text{ es definible con parámetros en la estructura } (L_\alpha(A), \in)\}$$

$$L_\lambda(A) = \bigcup_{\beta\in\lambda} L_\beta(A)\ , \quad \lambda \ \text{ límite}$$

$$L(A) = \bigcup_{\alpha\in Ord} L_\alpha(A).$$

Es importante destacar que el modelo $L(A)$ definido anteriormente se puede definir dentro de ZFC. Se cumple que $L(A)$ es un modelo transitivo de ZF que contiene a todos los ordinales. $L(A)$ es el menor modelo transitivo de ZF que contiene a los ordinales y a A.

(*Nota*: Este segundo método de construcción de modelos se puede haber sustituido por otro método, $HOD(A)$, la clase de todos los conjuntos hereditariamente definibles con ordinales con parámetros de A, y el propio A. Ver [20] o [19], entre otros.)

(III) Sea M un modelo transitivo de ZFC (M puede ser V, L, o un conjunto numerable). Sea λ un cardinal inaccesible en M. Sea $M[G]$ la extensión genérica que se obtiene aplicado el Colapso de Lévy: $Col(\aleph_0, < \lambda)$. Sea $\mathbb{R}$ en $M[G]$, y sea $L(\mathbb{R})$ en $M[G]$. $L(\mathbb{R})$ es el Modelo de Solovay, y la manera como se construyó es una de las formas que se utiliza para hacerlo.

Se cumple que $L(\mathbb{R})$ es un modelo de ZF (el Axioma de elección es falso en $L(\mathbb{R})$), y además se cumple en éste:

- El Principio de elecciones dependientes (DC).
- Todo conjunto de reales es medible Lebesgue y tiene la propiedad de Baire.
- Todo subconjunto no numerable de reales contiene un subconjunto perfecto.

Ver [20] o [19], entre otros, para las definiciones y la demostración de este teorema.

Como el TUF implica que existe un subconjunto de reales que no es medible Lebesgue, se infiere que en $L(\mathbb{R})$ es falso el TUF. Lo mismo ocurre con el principio "Existe un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$", ya que éste implica que existe un subconjunto de reales que no es medible Lebesgue (ver [6, p. 161-162]), entonces se concluye que en $L(\mathbb{R})$ no existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$.

Veamos ahora las siguientes preguntas sobre $L(\mathbb{R})$ y $\dfrac{P(\mathbb{N})}{fin}$. Donde $\dfrac{P(\mathbb{N})}{fin}$ es el conjunto cociente determinado por la relación de equivalencia en $P(\mathbb{N})$ definida así: $x \sim y$ si, y solo si, $x \triangle y$ es finito (es decir, x es equivalente a y si ellos son casi iguales). Tales preguntas están relacionadas con la proposición "Existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$" (y con la subsección anterior), y las mismas se pueden encontrar de manera implícita en los artículos [9, p. 468] y [8, p. 21] de Di Prisco y Henle:

Pregunta 8.2.2.

(1) ¿Existe una extensión genérica de $L(\mathbb{R})$, $L(\mathbb{R})[G]$, que contenga un orden lineal de $\dfrac{P(\mathbb{N})}{fin}$?

(2) ¿Y en tal extensión, $L(\mathbb{R})[G]$, existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$?.

Las preguntas tienen pertinencia pues en $L(\mathbb{R})$ no existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$ y no se sabe si en la extensión $L(\mathbb{R})[G]$ se agregó alguno (si se logra demostrar que existe tal extensión). Además, si en $L(\mathbb{R})[G]$ existe un orden lineal de $\dfrac{P(\mathbb{N})}{fin}$, y con dicho orden lineal se puede construir un ultraflitro sobre $\mathbb{N}$ (este es uno de los resultados demostrados en el trabajo no publicado -mencionado anteriormente- de Carlos Di Prisco, Nathan Bowler, Christian Delhommé, Marianne Morillon y Adrian Mathias titulado "Flutters an Chameleons"), entonces si la respuesta a la segunda pregunta de 8.2.2 es NO, se estaría demostrando, como en el caso del Modelo de

Mathias anterior que la proposición "Existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$" es más fuerte estrictamente que la proposición "Existen ultraflitros sobre $\mathbb{N}$", lo que se conjetura en [9, p. 468] y [8, p. 21]. El Modelo de Mathias ($\mathcal{M}_3$) y la posible extensión del modelo de Solovay $L(\mathbb{R})[G]$ son dos maneras naturales de tratar de responder tal interrogante abierta sobre ultraflitros sobre $\mathbb{N}$ y ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$.

Referencias

[1] Betz, C., *Introducción a la teoría de la medida e integración*. Univesidad Central de Venezuela. 1992.

[2] Bourbaki, N., *Topologie générale*, Actualités Sci. Ind. 858 (1940), 916 (1942), 1029 (1947), 1045 (1948), 1084 (1949), Paris.

[3] Cartan, H., *Théorie des filtres*, C.R. Acad. Sci. Paris (1937), 595–598.

[4] Cartan, H., *Filtres et ultrafiltres*, C. R. Acad. Sci. Paris (1937), 777–779.

[5] Chang, C. and Keisler, H., *Model Theory*. Dover Publications. 2012.

[6] Confort, W. and Negropontis, S., *The Theory of Ultrafilters*. Springer-Verlag. 1974.

[7] Corbillón, M., *Análisis real no estándar*. Tesis de licenciatura en Matemáticas. Tutor: Dr. Josep Maria Font Llovet. Facultat de Matemátiques. Universitat de Barcelona. 2015.

[8] Di Prisco, C. and Henle, H., *Doughnuts, Floating Ordinals, Square Brackets, and Ultraflitters*. Journal of Symbolic Logic **65**(2000), 462–473.

[9] Di Prisco, C. and Henle, H., *Partitions of the reals and choice*. En "Models, algebras and proofs". X. Caicedo y C. M. Montenegro. Eds. Lecture Notes in Pure and Appl. Math, 203, Marcel Dekker, 1999.

[10] Di Prisco, C., *Teoría de conjuntos*. Universidad Central de Venezuela. 2009.

[11] Di Prisco, C. y Uzcátegui, C., *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*. 2019. (En prensa).

[12] Dudley, R., *Real Analysis and Probabiblity*. Cambridge University Press. 2002.

[13] Enderton, H., *Elements of Set Theory*. Academic Press. New York. 1977.

[14] Galindo, F., *Álgebras booleanas, órdenes parciales y el axioma de elección*. Divulgaciones Matemáticas, **18**(1) (2017), 34–54.

[15] Halmos, P., *Measure Theory*. Springer-Verlag. 1970.

[16] Halpern, J. and Lévy, A., *The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice*. En " Axiomatic Set Theory" (D. S. Scoott, ed), Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, 1967.

[17] Herrlich, H., *Axiom of Choice*. Springer. 2006.

[18] Howard, P. and Rubin, J., *Consecuences of the Axiom of Choice*. American Mathematical Society. 1998.

[19] Jech, T., *Set Theory*. 1978

[20] Jech, T., *Set Theory*. Springer. 2000.

[21] Jech, T., *The Axiom Choice*. North-Holland Publishing Company. 1973.

[22] Kelley, J., *General Topology*. Springer. 1991.

[23] Kunen, K., *Set Theory*. Elsevier. 2006.

[24] Manzano, M., *Teoría de Modelos*. Alianza. Madrid. 1989.

[25] D. Mathias, A. R., *The Order Extension Principle*. Procedings of Symposia in Pura Mathematics, Vol. 13, Part II, 1974.

[26] Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman and Hall/CRL. U.S.A. 2009.

[27] Royden, H., *Real Analysis*. Pearson. 2010.

[28] Sikorski, R., *Boolean Algebras*. Springer-Verlag. 1960.

[29] Stone, M., *The theory of representations for Booleam algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 37–111. Zbl.014.34002

[30] `https://math.stackexchange.com/questions/1130615/non-measurability-of-ultrafilter-on-omega`

[31] Mathematics: Why is compactness in log called compactness? `https://math.stackexchange.com/questions/842/why-is-compactness-in-logic-called-compactness`