Un problema abierto de independencia en la teoría de conjuntos relacionado con ultrafiltros no principales sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$

Dr. Franklin Galindo. UCV.

Ponencia Día Mundial de la Lógica. 14-01-2022

franklingalindo178@gmail.com

En el ámbito de la lógica matemática existe un problema sobre la relación lógica entre dos versiones débiles del *Axioma de elección* (AE) que no se ha podido resolver desde el año 2000 (aproximadamente). Es un problema de independencia relacionado con ultrafiltros no principales y con Propiedades Ramsey (Bernstein, Subretículo, Polarizada, Ramsey, Ordinales flotantes, etc). Estas propiedades Ramsey son inconsistentes con el AE, pero ellas son consistentes con ZF + DC ([Mat1]). La primera versión débil del AE a que nos referimos es la siguiente proposición existencial (A): *Existen ultrafiltros no principales sobre el conjunto de los números naturales* $\mathbb{N}$. Veamos a continuación los conceptos de "filtro", "ultrafiltro" y "ultrafiltro no principal" para entender con precisión esta proposición A:

Definición 1. • *Un filtro (filter) sobre un conjunto no vacío S es una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de S tal que:*

(i) $S \in \mathcal{F}$ *y* $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(ii) Si $X \in \mathcal{F}$ *y* $Y \in \mathcal{F}$, *entonces* $X \cap Y \in \mathcal{F}$.

(iii) Si $X \in \mathcal{F}$ *y* $X \subseteq Y$, *entonces* $Y \in \mathcal{F}$.

• *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto S. $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro si para cualquier $X \subseteq S$ se cumple que:*

$$X \in \mathcal{F} \leftrightarrow S - X \notin \mathcal{F}.$$

• *Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre un conjunto S. $\mathcal{F}$ es no principal si y sólo si* $\forall i \in S(\{i\} \notin F)$.

Ejemplos de filtros (Ver [J1] y [Ch-Ke]):

(1) *Filtro trivial*: $\mathcal{F} = \{S\}$.

(2) Para cada $B \subseteq S$, $B \neq \emptyset$, el filtro $\mathcal{F}_B = \{Z \subseteq S : B \subseteq Z\}$ se llama *filtro principal* generado por B. Para $B = \{a\} \subseteq S$, $\mathcal{F}_B$ se escribe $\mathcal{F}_a$, $\mathcal{F}_a = \{Z \subseteq S : a \in Z\}$. Notar que $\mathcal{F}_a$ es un ultrafiltro principal.

(3) Sea S un conjunto infinito, el filtro $\mathcal{F} = \{X \in P(S) :\mid S - X \mid < \aleph_0\}$ se llama *filtro de Fréchet*.

Notar que el filtro de Fréchet no es principal.

Ya se demostró anteriormente que existen ultrafiltros principales, mediante un ejemplo, $\mathcal{F}_a$. Pero, ¿Existen ultrafiltros no principales?. La existencia de tales entidades matemáticas sólo se puede garantizar usando el *Lema de Zorn* (que es equivalente al AE), no hay otra manera [[J1], p. 75]. Para construirlos se usa el *Teorema del Ultrafiltro* (Tarski, 1930) que a su vez se demuestra con el Lema de Zorn, el Teorema del Ultrafiltro (TUF) afirma lo siguiente: *Todo filtro se puede extender a un ultrafiltro.* El TUF permite contar con los ultrafiltros no princiales los cuales son importantes para la investigación matemática y lógico matemática. Es claro que si aplicamos el TUF al filtro de Fréchet tomando $S = \mathbb{N}$ tendremos un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$.

Y la segunda versión débil del AE a que nos referimos es la siguiente proposición existencial (B): *Existen ultraflitros sobre* $\mathbb{N}$. Veamos las nociones de "flitro" y "ultraflitro sobre $\mathbb{N}$" para entender con precisión esta proposición B:

Definición 2. *Un flitro (flitter) sobre* $\mathbb{N}$ *es un conjunto* $\mathcal{F} \subseteq P(\mathbb{N})$ *con la siguiente propiedad: Si* $A \in \mathcal{F}$ *y* $B \in \mathcal{F}$*, entonces* $A \cap B$ *o* $A^c \cap B^c$ *es infinito. Más concisamente: Si* $A, B \in \mathcal{F}$*, entonces* $A \triangle B$ *es co-infinito.* $\mathcal{F}$ *es un ultraflitro (ultraflitter) sobre* $\mathbb{N}$ *si* $\mathcal{F}$ *un es flitro sobre* $\mathbb{N}$*, y además para todo* $X \subseteq \mathbb{N}(X \in \mathcal{F}$ *o* $X^c \in \mathcal{F})$.

Notar que si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$ estonces $\mathcal{F}$ es un ultraflitro sobre $\mathbb{N}$ (es decir, notar que $A \rightarrow B$), pues los ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$ no contienen conjuntos finitos.

PROBLEMA ABIERTO: *Se sabe que $A \to B$, pero se desconoce si $B \to A$, es decir, la pregunta ¿$B \to A$? todavía no tiene respuesta.*

CONJETURA: *Di Prisco y Henle conjeturan en los artículos ([D-H1], [D-H2]) que esto no ocurre, es decir, conjeturan que $B \not\to A$, en otras palabras, conjeturan que A es más fuerte estrictamente que B, que A es independiente de B, pero esto no se ha podido demostrar todavía aunque se ha intentado hacer desde hace aproximadamente 21 años.*

Una descripción detallada de este problema abierto (¿$B \to A$?) puede encontrarse en el artículo [FG1].

Es conocido que los ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$ y los ultraflitros sobre $\mathbb{N}$ son conjuntos no medibles (considerados como subconjuntos del espacio de Cantor). Ver [FG1].

¿Y cómo se puede probar la conjetura $B \not\to A$? Como es usual en lógica matemática la idea es conseguir un modelo matemático donde B sea verdadera y A sea falsa (Notar que aquí se está usando el *Teorema de la deducción* $(\varphi \vdash \delta \Leftrightarrow \vdash \varphi \to \delta)$ y la propiedad de *corrección* $(\varphi \vdash \delta \Rightarrow \varphi \models \delta)$ de la *Lógica de primer orden con identidad*, lógica base de la *teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel*, ZF), esto es suficiente para realizar la prueba de la conjetura $B \not\to A$.

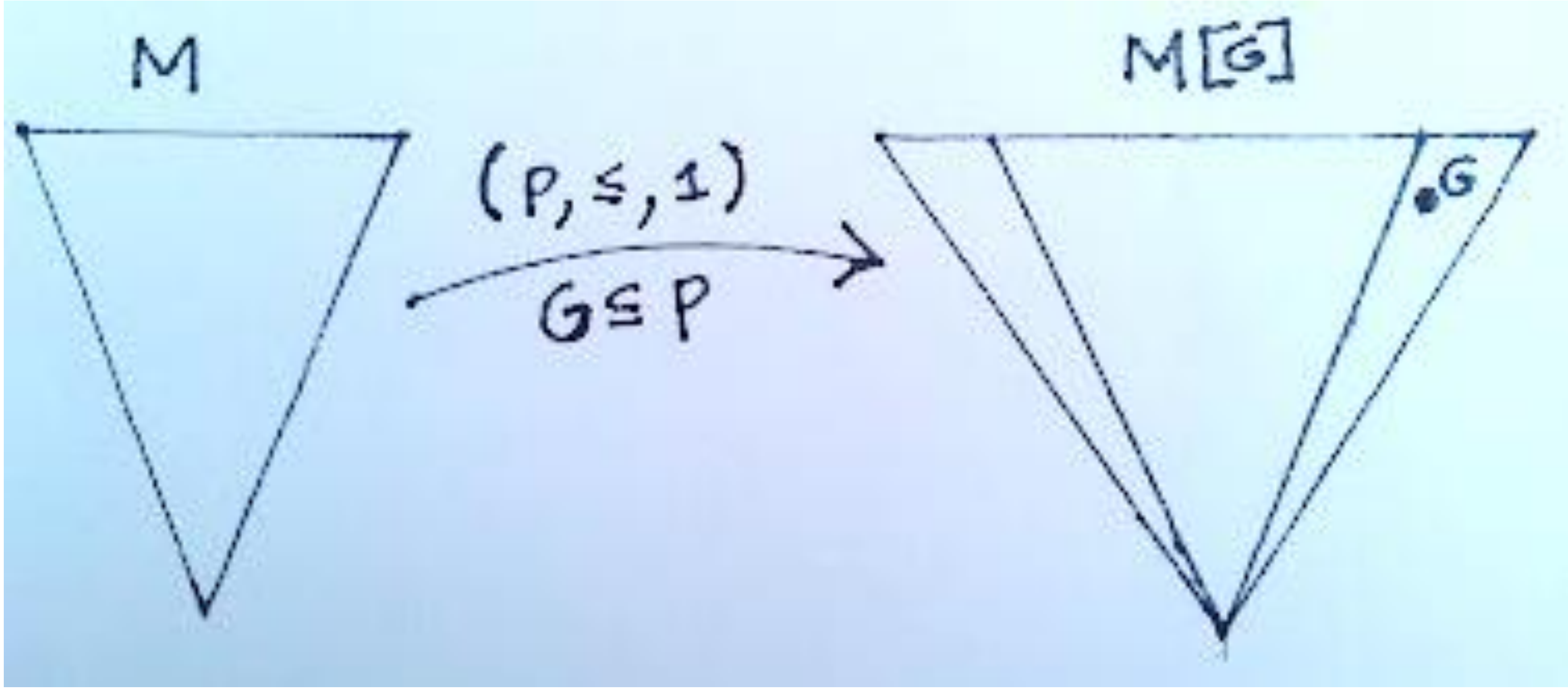
Los candidatos naturales para realizar esta demostración que se han sugerido desde el inicio del problema son el *Modelo de Mathias* (M_3) donde vale la versión débil del AE, *Todo conjunto se puede ordenar linealmente* (OP), y el *Modelo de Solovay* $L(\mathbb{R})$.

Es importante resaltar que en ambos modelos mencionados no vale el AE, pues $M_3 \not\models TUF$ y $L(\mathbb{R}) \models$ Todo conjunto de reales es medible Lebesgue. Si valiera el AE en ambos modelos no se podría distiguir en los mismos entre A y B, pues A y B son consecuencias estrictas del AE (son versiones débiles del AE).

El Modelo de Mathias (M_3) es un modelo simétrico que se construye usando la técnica de *forcing* y automorfismos, utilizando un orden parcial homogéneo universal. Ver [J2] y [H-R].

Y el Modelo de Solovay $L(\mathbb{R})$ se construye suponiendo que existe un *cardinal inaccesible* y usando las técnicas de forcing y *constructibilidad relativizada* $L(A)$ (o *hereditariamente definible por ordinales*, HOD(A)). Ver [J1] y [Ku].

La siguiente figura sugiere la idea de la extensión de M a M[G] usando forcing con modelos transitivos numerables. Los modelos anteriormente mencionados son modelos intermedios que se pueden ver en este contexto:



¿Y por qué el Modelo de Mathias M_3 es un candidato natural para hacer la prueba de que $B \not\to A$? Porque ya se sabe que en dicho modelo existen ultraflitros sobre $\mathbb{N}$ (ya que $M_3 \models OP$ ([Mat2]), y OP implica que existe un orden lineal del conjunto cociente $P(\mathbb{N})/fin$ ($X \sim Y \leftrightarrow X \triangle Y$ es finito), lo cual implica a su vez que existen ultraflitros sobre $\mathbb{N}$, resultado probado en un artículo (todavía no publicado) de Di Prisco, Bowler, Delhommé, Morillón y Mathias [D], usando una función selectora particular). Y entonces solo falta probar que en M_3 no existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$. Y esto culminaría la prueba de que $B \not\to A$. No obstante, tal resultado no se ha podido demostrar todavía.

¿Y por qué el Modelo de Solovay $L(\mathbb{R})$ también es un candidato natural para hacer la prueba de que $B \nrightarrow A$? Porque ya se sabe también [FG2] que existe una extensión genérica del mismo, $L(\mathbb{R})[G]$, que se construye con la técnica del forcing, donde existe un orden lineal $\leq$ del conjunto cociente $P(\mathbb{N})/fin$ que extiende al orden parcial $\leq^*$ de $P(\mathbb{N})/fin$ ($[X] \leq^* [Y] \leftrightarrow X - Y$ es finito), y esto a su vez implica que existen ultraflitros sobre $\mathbb{N}$, es decir, en $L(\mathbb{R})[G]$ existen ultraflitros sobre $\mathbb{N}$. Y entonces en este caso sólo falta probar que en dicha extensión $L(\mathbb{R})[G]$ no existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$, se sabe que en $L(\mathbb{R})$ no existen ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$ porque se conoce que en $L(\mathbb{R})$ todo conjunto de reales es medible

Lebesgue (y la existencia de ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$ implica que existen conjuntos de reales que no son medibles Lebesgue), pero no se sabe si cuando se hizo la extensión de $L(\mathbb{R})$ (al modelo ampliado $L(\mathbb{R})[G]$) se agregó (junto con otros objetos matemáticos) algún ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$, y hay que asegurarse que esto no ocurrió. Sin embargo, tampoco esto se ha podido probar hasta estos momentos.

Finalizo esta ponencia diciendo que la investigación sobre este problema abierto (¿$B \to A$?) continúa hoy en día. ¿Será cierta la conjetura de Di Prisco y Henle ($B \not\to A$)? ¿y si es cierta, se demostrará la misma con alguno de los modelos sugeridos anteriorente (M_3 o $L(\mathbb{R})[G]$), o se probará con otro modelo distinto?.

Referencias

[Ch-Ke] C. Chang y H. Keisler. *Model Theory*. Dover Publications. 2012.

[D] C. Di Prisco. Comunicación personal. 2018.

[D-H1] C. Di Prisco y H. Henle. *Doughnuts, Floating Ordinals, Square Brackets, and Ultraflitters*. Journal of Symbolic Logic 65 (2000) 462-473.

[D-H2] C. Di Prisco y H. Henle. *Partitions of the reals and choice*. En "Models, algebras and proofs". X. Caicedo y C.M. Montenegro. Eds. Lecture Notes in Pure and Appl. Math, 203, Marcel Dekker, 1999.

[FG1] F. Galindo. *Tópicos de ultrafiltros*. Divulgaciones Matemticas. Vol. 21, No 1-2, 2020.

[FG2] F. Galindo. *Un teorema sobre $P(\mathbb{N})/fin$*. Divulgaciones Matemticas. Vol. 21, No 1-2, 2020.

[H-R] P. Howard y J. Rubin. *Consecuences of the Axiom of Choice*. American Mathematical Society. 1998.

[J1] T. Jech. *Set Theory*. Springer. 2000.

[J2] T. Jech. *The Axiom Choice*. North-Holland Publishing Company. 1973.

[Ku] K. Kunen. *Set Theory*. Elsevier. 2006.

[Mat1] A.R. D. Mathias. *Happy families*. Annals of Pure and Applied Logic 12 (1977) 59-111.

[Mat2] A.R. D. Mathias. *The Order Extension Principle*. Procedings of Symposia in Pura Mathematics, Volume 13, Part II, 1974.

Fin
¡Muchas gracias!