UNA PRESENTACION DE LA DEMOSTRACIÓN DIRECTA DEL TEOREMA DE COMPACIDAD DE LA LOGICA DE PRIMER ORDEN QUE USA EL MÉTODO DE ULTRAPRODUCTOS

Franklin Galindo*
franklingalindo178@gmail.com

Recibido: Abril, 2016
Aceptado: Mayo, 2016
Revisión de estilo: Junio, 2016

RESUMEN

El objetivo principal de este artículo es presentar la demostración directa del Teorema de Compacidad de la Lógica de primer orden (Γ tiene un modelo si y sólo si cada subconjunto finito de Γ tiene un modelo) que se realiza al usar el método de construcción de modelos llamados 'Ultraproductos' que, a su vez, emplea 'Ultrafiltros'. Actualmente es más común demostrar el Teorema de Compacidad como un corolario del Teorema de Completitud de Gödel y usar el método de reducción al absurdo. Sin embargo, vale la pena estudiar también la prueba directa que utiliza el método de Ultraproductos porque dicha técnica tiene importantes aplicaciones en investigaciones contemporáneas de matemáticas, por ejemplo, en la Teoría de Conjuntos. Al final del artículo, se realiza un breve comentario adicional sobre compacidad, ultraproductos, grandes cardinales y modelos no estándar.

Plabaras clave: filtros – ultrafiltros - Teorema Fundamental de Ultraproductos - Teorema de Compacidad

Clasificación por temas de la Sociedad Matemática Americana: 03-XX.

---

* Doctor en Matemática egresado de la Universidad Central de Venezuela (UCV). Magister Scientiarium en Matemática de la UCV. Licenciado en Filosofía de la UCV. Docente-Investigador en el Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia de la Escuela de Filosofía de la UCV. Profesor Asociado. Profesor en pregrado y postgrado. Profesor de Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar (USB), (Departamento de Matemáticas USB). Profesor de Lógica Simbólica del Colegio Universitario Francisco de Miranda (CUFM). Su especialidad es Lógica Matemática y los fundamentos de las Matemáticas.

1 Introducción

El objetivo principal de este artículo es presentar la demostración directa del Teorema de compacidad de la Lógica de primer orden (Γ *tiene un modelo si y sólo si cada subconjunto finito de* Γ *tiene un modelo*) que se realiza usando el método de construcción de modelos llamado "Ultraproductos" que a su vez usa "Ultrafiltros", método que fue creado por Skolem (en los años 1930) y luego desarrollado por Loś en 1955, quien demostró el Teorema Fundamental de Ultraproductos. Actualmente es más común demostrar el Teorema de compacidad como un corolario del Teorema de Completitud de Gödel usando el método de reducción al absurdo, sin embargo vale la pena estudiar también la prueba directa que utiliza el método de "Ultraproductos" porque dicha técnica tiene importantes aplicaciones en investigaciones contemporáneas de matemáticas, por ejemplo en la Teoría de conjuntos. El orden de la exposición es el siguiente: En la siguiente sección (2) se presentan los conceptos de Filtro, Ultrafiltro y el Teorema del Utrafiltro. En la sección (3) se definen los lenguajes de primer orden, las estructuras, algunas relaciones entre estructuras (isomorfismo, inmersión elemental, submodelo elemental, equivalencia elemental), satisfacibilidad en una estructura, verdad en una estructura, etc. Y en la última sección (4) se definen los Ultraproductos y se demuestran el Teorema Fundamental de Ultraproductos, el Teorema de Compacidad y algunos otros colorarios clásicos del Teorema fundamental de Ultraproductos. Al final de esta sección se realiza un breve comentario adicional sobre compacidad, ultraproductos, grandes cardinales y modelos no estándar.

2 Filtros, Ultrafiltros, Teorema del Ultrafiltro

Definición 2.1.

- *Un filtro sobre un conjunto no vacío* S *es una colección* $\mathcal{F}$ *de subconjuntos de* S *tal que:*

  (i) $S \in \mathcal{F}$ *y* $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

  (ii) Si $X \in \mathcal{F}$ *y* $Y \in \mathcal{F}$, *entonces* $X \cap Y \in \mathcal{F}$.

  (iii) Si $X \in \mathcal{F}$ *y* $X \subseteq Y$, *entonces* $Y \in \mathcal{F}$.

- *Sea* $\mathcal{F}$ *un filtro sobre un conjunto* S. $\mathcal{F}$ *es un ultrafiltro si para cualquier*

$X \subseteq S$ *se cumple que:*

$$X \in \mathcal{F} \leftrightarrow S \setminus X \notin \mathcal{F}.$$

- *Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre un conjunto S. $\mathcal{F}$ es no principal si y sólo si $\forall i \in S(\{i\} \notin F)$.*

Ejemplos de filtros ([J], [Ch-K]): (1) *Filtro trivial*: $\mathcal{F} = \{S\}$. (2) Para cada $B \subseteq S$, $B \neq \emptyset$, el filtro $\mathcal{F} = \{Z \subseteq S : B \subseteq Z\}$ se llama *filtro principal* generado por B. (3) Sea S un conjunto infinito, el filtro $\mathcal{F} = \{X \in P(S) :\mid S \setminus X \mid < \aleph_0\}$ se llama *filtro de Fréchet.* Notar que el filtro de Fréchet no es principal.

Una familia G de conjuntos tiene la *propiedad de intersección finita* si para cualquier conjunto finito $H = \{X_1, \ldots, X_n\} \subseteq G$ se cumple que $H_1 \cap \ldots \cap H_n \neq \emptyset$.

Teorema 2.2. 1. *Si Δ es una familia de filtros sobre S, entonces $\bigcap \Delta$ es un filtro sobre S.*

2. *Si Ω es una $\subseteq$-cadena de filtros sobre S (es decir, $\forall X, Y \in \Omega(X \subseteq Y \, o \, Y \subseteq X)$), entonces $\bigcup \Omega$ es un filtro sobre S.*

3. *Si $G \subseteq P(S)$ tiene la propiedad de intersección finita, entonces existe un filtro $\mathcal{F}$ tal $G \subseteq \mathcal{F}$ ($\mathcal{F} = \{X \subseteq S : \exists Z_1, \ldots, Z_n \in G(Z_1 \cap \ldots \cap Z_n \subseteq X)\}$).*

Una prueba de tal resultado puede encontrarse (entre otros) en [J] y [Ch-K].

Teorema 2.3. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto S. Entonces:*

$$\mathcal{F} \text{ es un ultrafiltro} \leftrightarrow \mathcal{F} \text{es máximal.}$$

Una prueba de tal resultado puede encontrarse (entre otros) en [J].

Teorema 2.4 (Teorema del Ultrafiltro(Tarski)). *Todo filtro se puede extender a un ultrafiltro.*

Una Demostración del Teorema del Ultrafiltro usando el Lema de Zorn puede encontarse (entre otros) en [J] y [Ch-K]. A continuación se formula el Lema de Zorn después de unas definiciones previas:

Definición 2.5. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A(es decir, $R \subseteq A \times A$)*

1. *R es reflexiva si y sólo si $\forall x \in A(xRx)$*
2. *R es simétrica si y sólo si $\forall x, y \in A(xRy \to yRx)$*
3. *R es transitiva si y sólo si $\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \to xRz)$*
4. *R es antisimétrica si y sólo si $\forall x, y \in A(xRy \wedge yRx \to x = y)$.*
5. *R es una relación de equivalencia si R es una relación reflexiva, simétria y transitiva.*

Definición 2.6.

1. *Un orden parcial es un par $(P, \leq)$ donde P es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación en P que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.*
2. *Dado un orden parcial $(P, \leq)$ se dice $p < q \leftrightarrow p \leq q \wedge p \neq q$.*
3. *Sean (P, R) un orden parcial y $D \subseteq P$. $x \in P$ es un elemento minimal (máximal) de D si $x \in D \wedge$ no existe ningún $y \in D$ tal que $y \neq x \wedge yRx$ (xRy). x es una cota inferior (superior) de D si $\forall y \in D(xRy \vee y = x)\,(yRx \vee y = x)$. x es un ínfimo (supremo) de D si x es cota inferior (superior) de $D \wedge$ para todo $y \in P$, si y es una cota inferior (superior) de D, entonces $yRx \vee y = x\,(xRy \vee y = x)$. x es un menor (mayor) elemento de D si $x \in D \wedge \forall y \in D(xRy \vee y = x)\,(yRx \vee y = x)$.*
4. *Sea (P, R) un orden parcial. (P, R) es un orden total (o lineal) si la relación R satisface la propiedad de tricotomía: $\forall x, y \in P(xRy \vee yRx \vee x = y)$.*

   (Un orden parcial o total $(P, \leq)$ a veces se denotará por P)

Lema 2.7 (Lema de Zorn). *Sea (K, S) un conjunto parcialmente ordenado tal que cada $X \subseteq K$ totalmente ordenado tiene una cota superior en K. Entonces K tiene un elemento máximal.*

Es conocido que el Lema de Zorn es equivalente al Axioma de Elección y al Principio del Buen Orden. Una prueba de tal equivalencia puede encontrarse en [D2].

3 Lenguajes de primer orden, Estructuras, Relaciones entre estructuras, Satisfacibilidad y Verdad en una estructura

3.1 Lenguajes de primer orden y Estructuras

A continuación se ofrecerán los conceptos usuales de “lenguaje de primer orden” y “estructuras o interpretaciones” para dichos lenguajes, las definiciones se harán siguiendo el orden y la notación (principalmente) de los textos [D2] y [Ch-K], pero se realizarán de manera gneralizada para cualquier cardinal.

Lenguajes de cualquier cardinalidad:

Un *lenguaje* es una colección de símbolos que puede ser numerable (finito o equipotente a $\mathbb{N}$) o de cualquier otra cardinalidad $\aleph_\sigma$, para algún ordinal $\sigma > 0$. Estos símbolos serán agrupados en tres clases:

Símbolos relacionales $\quad S_0, S_1, \ldots, S_\mu, \ldots \ (\mu \in \delta)$. Donde δ es un ordinal que puede ser infinito (de cualquier cardinalidad).

Símbolos funcionales $\quad g_0, g_1, \ldots, g_\beta, \ldots \ (\beta \in \gamma)$. Donde γ es un ordinal que puede ser infinito (de cualquier cardinalidad).

Símbolos constantes $\quad d_0, d_1, \ldots, d_\theta, \ldots \ (\theta \in \zeta)$. Donde ζ es un ordinal que puede ser infinito (de cualquier cardinalidad).

$$\mathcal{L} = \{S_\mu\}_{\mu\in\delta} \bigcup \{g_\beta\}_{\beta\in\gamma} \bigcup \{d_\theta\}_{\theta\in\zeta}.$$

O expresado como una lista:

$$\begin{gathered}\mathcal{L} = \{S_0, S_1, \ldots, S_\mu, \ldots \ (\mu \in \delta); g_0, g_1, \ldots, g_\beta, \ldots \ (\beta \in \gamma); \\ d_0, d_1, \ldots, d_\theta, \ldots \ (\theta \in \zeta)\}.\end{gathered}$$

Todo símbolo relacional y todo símbolo funcional tiene asociado un número natural $n \geq 1$ (su número de argumentos), de este modo se tienen entonces símbolos relacionales o funcionales unarios, binarios, 3-arios, 4-arios, 5-arios, $\ldots$, n-arios, etc.

Como consecuencia de resultados básicos de la aritmética cardinal ([D2]) se tiene que el cardinal de $\mathcal{L}$ es:

$$\mid \mathcal{L} \mid = \mid \delta \mid + \mid \gamma \mid + \mid \zeta \mid = \text{mayor}\{\mid \delta \mid, \mid \gamma \mid, \mid \zeta \mid\}.$$

Estructuras (o Interpretaciones) para un lenguaje $\mathcal{L}$:

Una *estructura* $\mathfrak{C}$ para un lenguaje $\mathcal{L}$ (o una *interpretación* $\mathfrak{C}$ para un lenguaje $\mathcal{L}$) está cosntituída por:

(1) Un conjunto no vacío C (el universo de $\mathfrak{C}$)

(2) Para cada símbolo relacional n-ario S_μ de $\mathcal{L}$, una relación

$$S_\mu^{\mathfrak{C}} \subseteq S^n$$

.

(3) Para cada símbolo funcional n-ario g_β de $\mathcal{L}$, una función

$$g_\beta^{\mathfrak{C}} : C^n \longrightarrow C$$

.

(4) Para cada símbolo constante d_θ de $\mathcal{L}$, un elemento

$$d_\theta^{\mathfrak{C}} \in C.$$

La estructura $\mathfrak{C}$ definida se puede escribir así:

$$\mathfrak{C} = \langle C, < S_\mu^{\mathfrak{C}} >_{\mu\in\delta}, < g_\beta^{\mathfrak{C}} >_{\beta\in\gamma}, < d_\theta^{\mathfrak{C}} >_{\theta\in\zeta}\rangle.$$

Ante la pregunta ¿ Cuál es la cardinalidad de la estructura $\mathfrak{C}$? La respuesta es: La cardinalidad de $\mathfrak{C}$ es la cardinalidad de su universo C.

Algunos ejemplos de lenguajes y de estructuras para dichos lenguajes son los siguientes:

(i) El siguiente conjunto $\{\widehat{\leq}, \widehat{+}, \widehat{\bullet}, \widehat{0}, \widehat{1}\}$; donde $\widehat{\leq}$, $\widehat{+}$, $\widehat{\bullet}$ son símbolos funcionales binarios, y $\widehat{0}$ y $\widehat{1}$ son símbolos constantes; es un lenguaje. Una estructura para dicho lenguaje es por ejemplo $\langle \mathbb{N}, \leq, \bullet, 0, 1\rangle$: La estructura que tiene como universo el conjunto de los números naturales, con su relación de orden usual, su operación de suma usual, su operación producto usual, su cero usual y su uno usual.

(ii) El siguiente conjunto de símbolos $\{\widehat{+}, \widehat{0}\}$, es un lenguaje. Una estructura para este lenguaje es $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$, también $\langle \mathbb{R}, +, 0\rangle$ y $\langle \mathbb{C}, +, 0\rangle$. La primera estructura son los números enteros con su suma y cero usuales, la segunda estructura son los números reales con su suma y cero usuales, y la tercera estructura son los números complejos con su suma y cero usuales. Dichas estructuras tienen en común que son "grupos" [E-F-T], [Ch-K], [Ma].

(iii) El siguiente conjunto $\{\widehat{\leq}\}$, donde $\widehat{\leq}$ es un símbolo relacional binario, es un lenguaje. Una estructura para este lenguaje es $\langle \mathbb{R}, \leq\rangle$, y también

$\langle P(A), \subseteq \rangle$, para cualquier conjunto A. La primera estructura es un "orden total" y la segunda es un "orden parcial" si A tiene al menos dos elementos.

(iv) El siguiente conjunto de símbolos $\{\widehat{+}, \widehat{\bullet}, \widehat{'}, \widehat{0}, \widehat{1}\}$, donde $\widehat{+}$, $\widehat{\bullet}$, $\widehat{0}$ y $\widehat{1}$ son símbolos definidos anteriormente y $\widehat{'}$ es un símbolo funcional unario; es un lenguaje. Una estructura para este lenguaje es por ejemplo el álgebra booleana $\langle P(A), \cup, \cap, ', \emptyset, A \rangle$, para cualquier conjunto A. $P(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A y $'$ es la relación de complemento en $P(A)$ [J].

(v)Sea α un ordinal. El siguiente conjunto $\{\widehat{\in}\} \cup \{d_\theta : \theta \in \aleph_\alpha\}$, donde $\widehat{\in}$ es un símbolo de relacional binario, y los d_θ son símbolos constantes; es un lenguaje infinito. Una estructura para este lenguaje es por ejemplo $\langle V_{\aleph_\alpha}, \in , < \theta >_{\theta \in \aleph_\alpha} \rangle$, donde el conjunto $V_{\aleph_\alpha}$ es el $\aleph_\alpha$ nivel de la Jerarquía acumulativa de von Neumann y $\in$ es la usual relación conuntista de "pertenencia" [D2].

3.2 Isomorfismo entre estructuras, Subestructuras

Ahora se definirán dos relaciones entre estructuras: "isomorfismo" y "subestructuras". Otras importantes realciones como "inmersión elemental" y "submodelo elemental" se definirán más adelante en esta misma sección.

¿ Cuándo dos estructuras son isomorfas?

Sean $\mathfrak{C} = \langle C, < S_\mu^{\mathfrak{C}} >_{\mu \in \delta}, < g_\beta^{\mathfrak{C}} >_{\beta \in \gamma}, < d_\mu^{\mathfrak{C}} >_{\mu \in \zeta} \rangle$, y $\mathfrak{D} = \langle D, < S_\mu^{\mathfrak{D}} >_{\mu \in \delta} , < g_\beta^{\mathfrak{D}} >_{\beta \in \gamma}, < d_\mu^{\mathfrak{B}} >_{\mu \in \zeta} \rangle$ dos estructuras para un lenguaje $\mathcal{L}$. $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ son *isomorfas* ($\mathfrak{C} \cong \mathfrak{D}$) si y sólo si existe una función biyectiva $f : C \longrightarrow D$ que satisface las siguientes tres propiedades:

(1) Para cada símbolo relacional S_μ de $\mathcal{L}$, si n es la aridad de S_μ, entonces para cada $(c_1, \ldots, c_n) \in C^n$:

$$S_\mu^{\mathfrak{C}}(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow S_\mu^{\mathfrak{D}}(f(c_1), \ldots, f(c_n)).$$

(2) Para cada símbolo funcional g_β de $\mathcal{L}$, si n es la aridad de g_β, entonces para cada $(c_1, \ldots, c_n) \in C^n$:

$$f(g_\beta^{\mathfrak{C}}(c_1, \ldots, c_n)) = g_\beta^{\mathfrak{D}}(f(c_1), \ldots, f(c_n)).$$

(3) Para cada símbolo constante d_μ de $\mathcal{L}$ se tiene que:

$$f(d_\mu^{\mathfrak{C}}) = d_\mu^{\mathfrak{D}}.$$

¿ Cuándo una estructura es subestructura de otra estructura ?

Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos estructuras para un lenguaje $\mathcal{L}$. Se dice que $\mathfrak{C}$ es una *subestructura* de $\mathfrak{D}$ si y sólo si:

(1) $C \subseteq D$

(2) Para cada símbolo relacional n-ario S de $\mathcal{L}$,

$$S^{\mathfrak{C}} = S^{\mathfrak{D}} \cap C^n.$$

(3) Para cada símbolo funcional n-ario g de $\mathcal{L}$,

$$g^{\mathfrak{C}} = g^{\mathfrak{D}} \upharpoonright C^n.$$

(4) Para cada símbolo constante d de $\mathcal{L}$ se tiene que:

$$d^{\mathfrak{C}} = c^{\mathfrak{D}}.$$

3.3 Formalización de un lenguaje

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje. Para formalizar a $\mathcal{L}$ se usan un conjunto de *símbolos lógicos*, los cuales se listan a continuación:

(i) Conectivas: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (negación, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional, respectivamente).

(ii) Cuantificadores: $\exists$, $\forall$ (existencial y universal, respectivamente).

(iii) Símbolo de identidad: $\equiv$ (un símbolo relacional binario).

(iv) Variables: $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_k, \ldots$ $(k \in \aleph_0)$.

(v) Paréntesis: $), ($ (paréntesis derecho y paréntesis izquierdo, respectivamente).

(vi) La coma: ,

El conjunto de las variables se denotará por VAR.

A continuación se presentarán una lista de definiciones que tienen la finalidad de indicar cómo usar los símbolos lógicos y los símbolos de $\mathcal{L}$ para construir términos y fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$, términos y fórmulas que van a permitir hablar de las estructuras para $\mathcal{L}$:

Se empieza definiendo *Término* del lenguaje $\mathcal{L}$, utilizando inducción:

Definición 3.3.1. *(i) Toda variable y todo símbolo constantes es un término.*

(ii) Si g es un símbolo funcional n-ario y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $g(t_1, \ldots, t_n)$ es un término.

(iii) Una sucesión de símbolos es un término sólo si se obtiene aplicando una cantidad finita de veces las cláusulas (i) y (ii).

El conjunto de los términos de $\mathcal{L}$ se denotará por $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$.

Ahora se define *fórmula atómica* de $\mathcal{L}$, las fórmulas más simples del lenguaje $\mathcal{L}$:

Definición 3.3.2. *(i) Si t_1 y t_2 son términos, entonces $t_1 \equiv t_2$ es una fórmula atómica.*

(ii) Si S es un símbolo relacional n-ario y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $S(t_1, \ldots, t_n)$ es una fórmula atómica.

Con el concepto de fórmula atómica se procede ahora a definir lo que es una *fórmula* (*fórmula bien formada*) de $\mathcal{L}$, dicha definición se hace usando inducción:

Definición 3.3.3. *(i) Toda fórmula atómica es una forḿula.*

(ii) Si ϕ y χ son fórmulas, entonces $(\neg\phi)$, $(\phi \vee \chi)$, $(\phi \wedge \chi)$,$(\phi \rightarrow \chi)$ y $(\phi \leftrightarrow \chi)$ son fórmulas.

(iii) Si v es una variable y ϕ es una fórmula, entonces $(\forall x)\phi$ y $(\exists x)\phi$ son fórmulas.

(iv) Una sucesión de símbolos es una fórmula sólo si se obtiene usando una cantidad finita de veces las cláusulas (i),(ii) y (iii).

Por simplicidad, cuando no exista ambiguedad se eliminarán los paréntesis externos de las fórmulas y de los cuantificadores, es decir, escribirá $\neg\phi$ en lugar de $(\neg\phi)$ y $\forall x\phi$ en lugar de $(\forall x)\phi$, por ejemplo. El conjunto de las fórmulas de $\mathcal{L}$ se denotará por $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$.

Como se ha podido apreciar las definiciones de término y de fórmula se hicieron inductivamente, por eso cuando se vaya a probar que alguna propiedad vale para todos los términos o para todas fórmulas conviene usar inducción basada en dicha construcción. Esto aplica igualmente para el caso de hacer definiciones para todos los términos o para todas las fórmulas. En este mismo orden de ideas es importante resaltar también que toda fórmula tiene un número natural asociado, su *rango*, el cual se define como su número de conectivas y cuantificadores. También a cada término se le puede asociar un único número natural, su *longitud*, su número de ocurrencias de símbolos. Esto trae como consecuencia interesante que se pueda aplicar inducción sobre esta longitud o sobre este rango (El Principio de inducción matemática en $\mathbb{N}$) con la finalidad de probar propiedades para todos los términos o para todas las fórmulas, y también con la finalidad de hacer definiciones relativas a todos los términos o a todas las fórmulas.

Se dice que una ocurrencia de una variable en una fórmula es *libre* si esta ocurrencia no está bajo el alcance de algún cuantificador. Y dicha ocurrencia es *ligada* en caso contrario: Si ella está bajo el alcance de algún cuantificador. Según esta definición es evidente que una variable puede tener ocurrencias libres y ocurrencias ligadas en una fórmula. Una definición inductiva de estas nociones puede encontrarse en [D1]. Con los dos conceptos anteriores se define cuándo una variable está libre en una fórmula: Una variable está libre en una fórmula si ella tiene al menos una ocurrencia libre en dicha fórmula. En caso contrario se dice que dicha variable no está libre en la fórmula. Dada una fórmula ϕ se escribe $\phi(y_1, \ldots, y_n)$ para indicar que las variables libres de ϕ están entre $y_1, \ldots, y_n$.

3.4 Satisfacción y Verdad en una estructura

Se sabe que los términos del lenguaje denotan objetos en una estructura y que las fórmulas afirman hechos relativos a estos objetos en dicha estructura, en esta subsubsección se definirán rigurosamente estas nociones. Después se definirá (entre otros conceptos) cuándo una fórmula es verdadera y cuando es falsa en una estructura.

Definición 3.4.1. *Sea $\mathfrak{C}$ una estructura para $\mathcal{L}$ y $s : VAR \longrightarrow C$. Se define el valor de un término de $\mathcal{L}$ en $\mathfrak{C}$ según s inductivamente en la complejidad del término. Dado un término t se denotará este valor por $t_{\mathfrak{C}}[s]$ y se omitirá mencionar la estructura $\mathfrak{C}$ en los casos donde no exista posibilidad de ambiguedad.*

(i) Si t es la variable v, $t_{\mathfrak{C}}[s] = s(v)$.

(ii) Si t es el símbolo constante c, $t_{\mathfrak{C}}[s] = c^{\mathfrak{C}}$.

(iii) Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos, g es un símbolo funcional n-ario y $t = g(t_1, \ldots, t_n)$, entonces $t_{\mathfrak{C}}[s] = g^{\mathfrak{C}}(t_{1\mathfrak{C}}[s], \ldots, t_{n\mathfrak{C}}[s])$.

Informalmente, el valor de t en $\mathfrak{C}$ según s, es el elemento de C denotado por t cuando asignamos a la variables de t valores según s.

De lo anterior se desprende que si s y s' coinciden en las variables que aparecen en el término t, entonces $t_{\mathfrak{C}}[s] = t_{\mathfrak{C}}[s']$.

Sea $\mathfrak{C}$ una estructura para $\mathcal{L}$, $s : VAR \longrightarrow C$ y ϕ una fórmula de $\mathcal{L}$. Se procede a definir lo que significa que s satisface a ϕ en $\mathfrak{C}$, lo que se denota por $\mathfrak{C} \models \phi[s]$. El siginificado intuitivo de $\mathfrak{C} \models \varphi[s]$ es que el resultado de sustituir en ϕ las variables libres por sus valores según s, es una afirmación verdadera en $\mathfrak{C}$.

La definición se hace aplicando inducción en la construcción de las fórmula ϕ.

Definición 3.4.2. *(Caso base)*

(1) Si ϕ es una fórmulas atómica, es decir, $\phi = t_1 \equiv t_2$ o $\phi = S(t_1, \ldots, t_n)$, entonces:

(1.1) $\mathfrak{C} \models t_1 \equiv t_2[s] \Longleftrightarrow t_{1\mathfrak{C}}[s] = t_{2\mathfrak{C}}[s]$.

(1.2) $\mathfrak{C} \models S(t_1, \ldots, t_n)[s] \Longleftrightarrow S^{\mathfrak{C}}(t_{1\mathfrak{C}}[s], \ldots, t_{n\mathfrak{C}}[s])$.

(Caso inductivo)

(2) Si $\phi = \neg\chi$ o $\phi = \chi \to \sigma$ o $\phi = \chi \wedge \sigma$ ó $\phi = \chi \vee \sigma$ o $\phi = \chi \leftrightarrow \sigma$, donde χ y σ son fórmulas para las cuales se ha definido lo que se quiere, entonces:

(2.1) $\mathfrak{C} \models (\neg\chi)[s] \Longleftrightarrow \mathfrak{C} \not\models \chi[s]$.

(2.2) $\mathfrak{C} \models (\chi \to \sigma)[s] \Longleftrightarrow \mathfrak{C} \not\models \chi[s]$ *o* $\mathfrak{C} \models \sigma[s]$.

(2.3) $\mathfrak{C} \models (\chi \wedge \sigma)[s] \Longleftrightarrow \mathfrak{C} \models \chi[s]$ *y* $\mathfrak{C} \models \sigma[s]$.

(2.4) $\mathfrak{C} \models (\chi \vee \sigma)[s] \Longleftrightarrow \mathfrak{C} \models \chi[s]$ *o* $\mathfrak{C} \models \sigma[s]$.

(2.5) $\mathfrak{C} \models (\chi \leftrightarrow \sigma)[s] \Longleftrightarrow \{\mathfrak{C} \models \chi[s]$ *y* $\mathfrak{C} \models \sigma[s]\}$ *o* $\{\mathfrak{C} \not\models \chi[s]$ *y* $\mathfrak{C} \not\models \sigma[s]\}$.

(2.6) $\mathfrak{C} \models ((\forall v)\chi)[s] \Longleftrightarrow \mathfrak{C} \models \chi[s']$ *para toda $s' : VAR \longrightarrow C$ que difiere de s a lo sumo en la variable v.*

(2.7) $\mathfrak{C} \models ((\exists v)\chi)[s] \Longleftrightarrow \mathfrak{C} \models \chi[s']$ *para alguna $s' : VAR \longrightarrow C$ que difiere de s a lo sumo en la variable v.*

Definición 3.4.3. *Sea $\mathfrak{C}$ una estructura para $\mathcal{L}$ y ϕ una fórmula de $\mathcal{L}$.*

(1) ϕ es verdad en $\mathfrak{C}$ si y sólo si $\mathfrak{C} \models \varphi[s]$, para toda $s : VAR \longrightarrow C$. Esto también se expresa diciendo que $\mathfrak{C}$ es un modelo de ϕ y se denota por $\mathfrak{C} \models \phi$.

(2) ϕ es falsa en $\mathfrak{C}$ si y sólo si $\mathfrak{C} \not\models \phi[s]$, para toda $s : VAR \longrightarrow C$.

(3) Si Γ es un conjunto de fórmulas, se dice que $\mathfrak{C}$ es un modelo de Γ si toda fórmula $\phi \in \Gamma$ es verdad en $\mathfrak{C}$.

Es importante resaltar que si ϕ es una fórmula con variables libres $v_{i1}, \ldots, v_{im}$, entonces el que $s : VAR \longrightarrow C$ satisfaga a ϕ en $\mathfrak{C}$ sólo depende de los valores de s en las variables $v_{i1}, \ldots, v_{im}$. Si $a_1 = s(v_{i1}), \ldots, a_m = s(v_{im})$, entonces se escribirá $\mathfrak{C} \models \phi[a_1, \ldots, a_m]$ en vez de $\mathfrak{C} \models \phi[s]$.

3.5 Validez, Consecuencia lógica

Definición 3.5.1. *(1) ϕ es lógicamente válida si es verdad en toda estructura (interpretación).*

(2) ϕ es satisfacible si existe una estructura $\mathfrak{C}$ y una $s : VAR \longrightarrow C$ tal que $\mathfrak{C} \models \phi[s]$.

(3) ϕ es contradictoria si $\neg\phi$ es lógicamente válida, es decir, si ϕ es falsa en toda estructura.

3.6 Otras relaciones entre estructuras: Inmersión elemental y Submodelo elemental

Inmersión elemental:

Sean $\mathfrak{C} = \langle C, < S_\mu^{\mathfrak{C}} >_{\mu\in\delta}, < g_\beta^{\mathfrak{C}} >_{\beta\in\gamma}, < d_\mu^{\mathfrak{C}} >_{\mu\in\zeta}\rangle$, y $\mathfrak{D} = \langle D, < S_\mu^{\mathfrak{D}} >_{\mu\in\delta}, < g_\beta^{\mathfrak{D}} >_{\beta\in\gamma}, < d_\mu^{\mathfrak{B}} >_{\mu\in\zeta}\rangle$ dos estructuras para un lenguaje $\mathcal{L}$. Se dice que una función $f : C \longrightarrow D$ es una *inmersión elemental* de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$ si y sólo si f es inyectiva y satisface las siguientes cuatro propiedades:

(1) Para cada símbolo relacional S_μ de $\mathcal{L}$, si n es la aridad de S_μ, entonces para cada $(c_1, \ldots, c_n) \in C^n$:

$$S_\mu^{\mathfrak{C}}(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow S_\mu^{\mathfrak{D}}(f(c_1), \ldots, f(c_n)).$$

(2) Para cada símbolo funcional g_β de $\mathcal{L}$, si n es la aridad de g_β, entonces para cada $(c_1, \ldots, c_n) \in C^n$:

$$f(g_\beta^{\mathfrak{C}}(c_1, \ldots, c_n)) = g_\beta^{\mathfrak{D}}(f(c_1), \ldots, f(c_n)).$$

(3) Para cada símbolo constante d_μ de $\mathcal{L}$ se tiene que:

$$f(d_\mu^{\mathfrak{C}}) = d_\mu^{\mathfrak{D}}.$$

(4) Para cada fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}$ y para cada $(c_1, \ldots, c_n) \in C^n$:

$$\mathfrak{C} \models \phi[c_1, \ldots, c_n] \Leftrightarrow \mathfrak{D} \models \varphi[f(c_1), \ldots, f(c_n)].$$

Se dice que $\mathfrak{C}$ está *inmersa elementalmente* en $\mathfrak{D}$ si existe una inmersión elemental de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$. En otras palabras, esto significa que $\mathfrak{D}$ contiene una subestructura $\mathfrak{F}$ que es isormorfa a $\mathfrak{C}$. La estructura de los racionales con su orden usual $\langle \mathbb{Q}, \leq\rangle$ está inmersa elementalmente en $\langle \mathbb{R}, \leq\rangle$.

Submodelo elemental:

Sea $\mathfrak{A}$ una subestructura de $\mathfrak{B}$. Se dice que $\mathfrak{A}$ es una *subestructura elemental* o un *submodelo elemental* de $\mathfrak{B}$, y se denota,

$$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B},$$

si para cualquier fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y para cada $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

Dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ se dice que son *elementalmente equivalentes* si ellas satisfacen las mismas sentencias.

Un resultado clave en la construcción de submodelos elementales es el siguiente: Un subconjunto $A \subseteq B$ forma un submodelo elemental de $\mathfrak{B}$ si y sólo si para cualquier fórmula $\varphi(u, x_1, \ldots, x_n)$, y para cualquier $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$\exists b \in B \mathfrak{B} \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n) \Longrightarrow \exists b \in A \mathfrak{B} \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n). \quad (\spadesuit)$$

Una función $h : B^n \longrightarrow B$ es una *función de Skolem* para φ si:

$$\exists b \in B \mathfrak{B} \models \varphi(b, b_1, \ldots, b_n) \Longrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(h(b_1, \ldots, b_n), b_1, \ldots, b_n),$$

para cualquier $b_1, \ldots, b_n \in B$. Usando el Axioma de elección, se puede construir una función de Skolem para cualquier φ. Si un subconjunto $A \subseteq B$ es cerrado bajo las funciones de Skolem de todas las fórmulas del lenguaje, entonces A satisface $(\spadesuit)$, y por lo tanto forma un submodelo elemental de $\mathfrak{B}$ [J].

4 Ultraproductos, el Teorema Fundamental de Ultraproductos y el Teorema de Compacidad

Construcción de la estructura (el modelo) llamado Ultraproductos usando ultrafiltros siguiendo a [Ch-K], [Me] y [J]:

Supongamos que I es un subconjunto no vacío, D es un filtro sobre I y que para cada $i \in I$, A_i es un subconjunto no vacío. Entonces se considera el producto cartesiano de los conjuntos A_i, es decir:

$$C = \prod_{i \in I} A_i = \{f : f : I \longrightarrow \cup A \wedge \forall i \in I(f(i) \in A_i)\}$$

Ahora se define una relación de equivalencia $\sim$ en $\prod_{i\in I} A_i$ de la siguiente manera:

$$f \sim g \longleftrightarrow \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in D$$

Se cumple que la relación $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva, por lo tanto $\sim$ es una relación de equivalencia. Entonces se considera el conjunto cociente de $\prod_{i\in I} A_i$ determinado por $\sim$ (llamado *producto reducido de los* A_i *modulo* D):

$$\prod_{i\in I} A_i/\!\sim\, = \{[f] : f \in \prod_{i\in I} A_i\}$$

Se denotará al conjunto cociente $\prod_{i\in I} A_i/\!\sim$ por $\prod_D A_i$ y la clase de equivalencia $[f]$ se denotará por $f_D \quad (\forall f \in \prod_{i\in I} A_i)$. Cuando D es un ultrafiltro $\prod_D A_i$ es llamado un *Ultraproducto*. Y en el caso de que todos los conjuntos A_i esan iguales, digamos, $A_i = A$ $(\forall i \in I)$,$\prod_D A$ es llamado la *Ultrapotencia de* A *modulo* D.

Ahora se definirá el *producto reducido de modelos* para un lenguaje $\mathcal{L}$ fijo:

Sea I un conjunto no vacío, D un filtro sobre I y para cada $i \in I$ sea $\mathfrak{A}_i$ una estructura para un lenguaje $\mathcal{L}$. Supongamos que para cada símbolo relacional P de $\mathcal{L}$ la interpretación de P en $\mathfrak{A}_i$ es R_i, los símbolos de función F son interpretados en $\mathfrak{A}_i$ por G_i y los símbolos constantes c son interpretados en $\mathfrak{A}_i$ por a_i.

El *producto reducido* $\prod_D \mathfrak{A}_i$ es una estructura para $\mathcal{L}$ definida de la siguiente manera:

(i) El universo de $\prod_D \mathfrak{A}_i$ es $\prod_D A_i$.

(ii) Sea P un símbolo de relación n-ário de $\mathcal{L}$. La interpretación de P en $\prod_D \mathfrak{A}_i$ es la relación n-ária S definida de la siguiente manera:

$$S(f_D^1, \ldots, f_D^n) \longleftrightarrow \{i \in I : R_i(f^1(i), \ldots, f^n(i))\} \in D$$

(iii) Sea F un símbolo de función n-ário de $\mathcal{L}$. Entonces F es interpretado en $\prod_D \mathfrak{A}_i$ por la función n-ária H definida de la siguiente manera:

$$H(f_D^1, \ldots, f_D^n) = \langle G_i(f^1(i), \ldots, f^n(i)) : i \in I\rangle_D$$

(iv) Sea c una constanta de $\mathcal{L}$. Entonces la interpretación de c en $\prod_D \mathfrak{A}_i$ es un $b \in \prod_D \mathfrak{A}_i$ que se define como sigue:

$$b = \langle a_i : i \in I \rangle_D$$

Se cumple que las definiciones realizadas anteriormente de $S(f^1_D, \ldots, f^n_D)$ y $H(f^1_D, \ldots, f^n_D)$ dependen solamente de las clases de equivalencia y no de sus representantes $f^1, \ldots, f^n$. Es decir, $f^1 \sim g^1, \ldots, f^n \sim g^n$, entonces:

$$\{i \in I : R_i(f^1(i), \ldots, f^n(i))\} \in D \leftrightarrow \{i \in I : R_i(g^1(i), \ldots, g^n(i))\} \in D$$

y

$$\langle G_i(f^1(i), \ldots, f^n(i)) : i \in I \rangle_D = \langle G_i(g^1(i), \ldots, g^n(i)) : i \in I \rangle_D.$$

Ahora de enunciará y demostrará el Teorema Fundamental de Ultraproductos (Loś-1955):

Teorema 4.1 (Teorema Fundamental de Ultraproductos (Loś)). *Sea $\mathfrak{B}$ el ultraproducto $\prod_D \mathfrak{A}_i$, donde I es el conjunto de índices de los $\mathfrak{A}_i$. Entonces:*

(i) Para cada término $t(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}$ y elementos $f^1_D, \ldots, f^n_D \in B = \prod_D A_i$ se tiene que:

$$t_{\mathfrak{B}}[f^1_D, \ldots, f^n_D] = \langle t_{\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I \rangle_D$$

(ii) Dada una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}$ y $f^1_D, \ldots, f^n_D \in B$ se tiene que:

$$\mathfrak{B} \models \varphi[f^1_D, \ldots, f^n_D] \leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in D$$

(iii) Para cada sentencia φ de $\mathcal{L}$ se tiene que:

$$\mathfrak{B} \models \varphi \leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in D$$

(Inuitivamente (iii) afirma que φ es verdadera en el ultraproducto $\mathfrak{B} = \prod_D \mathfrak{A}_i$ si y sólo si φ es verdadera en **"casi todos"** *los factores $\mathfrak{A}_i$ de $\mathfrak{B}$)*

Demostración: Es claro que la cláusula (iii) se deduce inmediatamente a partir de la cláusula (ii). Entonces se probarán sólo las cláusulas (i) y (ii), y esto se realizará utilizando inducción en la longitud de los términos y en el rango de las fórmulas.

(i) Sea el conjunto $E = \{m \in \mathbb{N} : \forall u \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}(longitud(u) = m \Rightarrow Q(u)\}$, donde Q es la propiedad descrita en (i). Se probará que $E = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ por inducción.

Caso Base: Se probará que $1 \in E$. Sea t un término tal que $longitud(t) = 1$. Se debe probar que $Q(t)$ es cierta. t es una constante o una variable:

Caso 1: t es una constante c:

$t_{\mathfrak{B}}[f_D^1, \ldots, f_D^n] = \langle a_i : i \in I \rangle_D$. Por la definición de $\mathfrak{B}$ y definición 3.4.1 sobre el valor de un término en una estructura según una asignación. Esto es lo que se quería probar.

Caso 2: t es una variable x_j tal que $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$t_{\mathfrak{B}}[f_D^1, \ldots, f_D^n] = f_D^j = \langle f^j(i) : i \in I \rangle_D$. Por la definición 3.4.1 .Esto es lo que se quería probar.

Caso inductivo: Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > 1$ y supóngase que para cada $k \in \mathbb{N}$(si $k < m$ entonces $k \in E$). Se debe probar que $m \in E$. Sea t un término tal que $longitud(t) = m$. Se debe probar que $Q(t)$ es cierta. t de longitud m tiene la forma siguiente:

$$t(x_1, \ldots, x_n) = F(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_n(x_1, \ldots, x_n))$$

Por la definición 3.4.1 se tiene que:

$$t_{\mathfrak{B}}[f_D^1, \ldots, f_D^n] = H(t_{1\mathfrak{B}}[f_D^1, \ldots, f_D^n], \ldots, t_{n\mathfrak{B}}[f_D^1, \ldots, f_D^n])$$

Por la Hipótesis Inductiva se tiene que para cada k, $1 \leq k \leq n$, se cumple que:

$$t_{k\mathfrak{B}}[f_D^1, \ldots, f_D^n] = \langle t_{k\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I \rangle_D$$

Para cada k, $1 \leq k \leq n$, se denota $\langle t_{k\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I \rangle_D$ por g_D^k y a $\langle t_{k\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I \rangle$ por g^k.

Aplicando la cláusula (iii) de la definición del ultraproducto $\mathfrak{B}$ se tiene que:

$$H(g_D^1, \ldots, g_D^n) = \langle G_i(g^1(i), \ldots, g^n(i)) : i \in I \rangle_D$$

Por otro lado, aplicando la definición 3.4.1 se tiene que:

$$t_{\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] = G_i(t_{1\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)], \ldots, t_{n\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)])$$

Entonces combinando todo el desarrollo anterior se concluye que:

$$t_{\mathfrak{B}}[f^1_D, \ldots, f^n_D] = H(g^1_D, \ldots, g^n_D) = \langle t_{\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I\rangle_D$$

Lo que se quería probar. Por lo tanto $E = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ha terminado la prueba de la cláusula (i) del Teorema.

(ii) Sea el conjunto $Z = \{m \in \mathbb{N} : \forall \delta \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}(rango(\delta) = m \Rightarrow K(\delta)\}$, donde K es la propiedad descrita en (ii). Se probará que $Z = \mathbb{N}$ por inducción.

Caso base: Se debe probar que $0 \in Z$. Sea una fórmula φ tal que $rango(\varphi) = 0$. Se debe probar que $K(\varphi)$ es cierta. φ es una fórmula atómica de alguna de estas dos formas: (1) $P(t_1, \ldots, t_n)$ o (2) $t_1 \equiv t_2$.

Caso 1: $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$.

$$\mathfrak{B} \models P(t_1, \ldots, t_n)[f^1_D, \ldots, f^n_D] \leftrightarrow$$

(por definición de satisfacibilidad en una estructura y definición del ultraproducto)

$$S(t_{1\mathfrak{B}}[f^1_D, \ldots, f^n_D], \ldots, t_{n\mathfrak{B}}[f^1_D, \ldots, f^n_D]) \leftrightarrow$$

(por la cláusula (i))

$$S(\langle t_{1\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I\rangle_D, \ldots, \langle t_{n\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I\rangle_D) \leftrightarrow$$

(Procediendo como en la prueba de la cláusula (i): Para cada k, $1 \leq k \leq n$, se denota $\langle t_{k\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I\rangle_D$ por g^k_D y a $\langle t_{k\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I\rangle$ por g^k. Con esta definición y la definición de ultraproducto)

$$S(g^1_D, \ldots, g^n_D) \longleftrightarrow \underbrace{\{i \in I : R_i(g^1(i), \ldots, g^n(i))\}}_{\spadesuit} \in D$$

Se quiere probar que:

$$\mathfrak{B} \models P(t_1, \ldots, t_n)[f^1_D, \ldots, f^n_D] \leftrightarrow$$
$$\underbrace{\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models P(t_1, \ldots, t_n)[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\}}_{\clubsuit} \in D$$

Y esto se cumple porque los conjuntos $\spadesuit$, $\clubsuit$ y $\triangle$ son iguales.

$$\underbrace{\{i \in I : R_i(t_{1\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)], \ldots, t_{n\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)])\}}_{\triangle} \in D$$

Fin de la prueba del Caso 1.

Caso 2: $\varphi = t_1 \equiv t_2$.

$$\mathfrak{B} \models t_1 \equiv t_2[f_D^1, \dots, f_D^n] \leftrightarrow$$

(por definición de satisfacibilidad en una estructura)

$$t_{1\mathfrak{B}}[f_D^1, \dots, f_D^n] = t_{2\mathfrak{B}}[f_D^1, \dots, f_D^n]) \leftrightarrow$$

(por la cláusula (i))

$$\langle t_{1\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \dots, f^n(i)] : i \in I\rangle_D = \langle t_{2\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \dots, f^2(i)] : i \in I\rangle_D \leftrightarrow$$

(Procediendo como en el caso anterior y en la prueba de la cláusula (i): Para cada k, $1 \leq k \leq 2$, se denota $\langle t_{k\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \dots, f^n(i)] : i \in I\rangle_D$ por g_D^k y a $\langle t_{k\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \dots, f^n(i)] : i \in I\rangle$ por g^k. Y por la definición de la relación de equivalencia $\sim$ con que se definió el ultraproducto)

$$g_D^1 = g_D^2 \longleftrightarrow \underbrace{\{i \in I : (g^1(i) = g^2(i))\}}_{\spadesuit} \in D$$

Se quiere probar que:

$$\mathfrak{B} \models t_1 \equiv t_2[f_D^1, \dots, f_D^n] \leftrightarrow$$
$$\underbrace{\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models t_1 \equiv t_2[f^1(i), \dots, f^n(i)]\}}_{\clubsuit} \in D$$

Y esto se cumple porque los conjuntos $\spadesuit$, $\clubsuit$ y $\triangle$ son iguales.

$$\underbrace{\{i \in I : t_{1\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \dots, f^n(i)] = t_{2\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \dots, f^n(i)]\}}_{\triangle} \in D$$

Fin de la demostración del Caso 2.

Caso inductivo: Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > 0$, y supóngase que para todo $k \in \mathbb{N}$(si $k < m$ entonces $k \in Z$). Se debe probar que $m \in Z$. Sea una fórmula φ tal que $rango(\varphi) = m$. Se debe probar que $K(\varphi)$es cierta. Es suficiente con considerar a φ con las siguiente tres formas, pues toda fórmula se puede reexpresar de esa manera: (1) $\varphi = \neg\chi(x_1, \dots, x_n)$, (2) $\varphi = (\chi \wedge \sigma)(x_1, \dots, x_n)$ y (3) $\varphi = (\exists v)\chi(v, x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Caso 1: $\varphi = \neg\chi(x_1, \dots, x_n)$.

$$\mathfrak{B} \models \neg\chi[f^1_D, \ldots, f^n_D] \leftrightarrow$$

(Definición de satisfacibilidad)

$$\text{no}\, \mathfrak{B} \models \chi[f^1_D, \ldots, f^n_D] \leftrightarrow$$

(Hipótesis Inductiva)

$$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \chi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \notin D \leftrightarrow$$

(D es ultrafiltro)

$$\{i \in I : \text{ no}\, \mathfrak{A}_i \models \chi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in D \leftrightarrow$$

(Definición de satisfacibilidad)

$$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \neg\chi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in D.$$

Caso 2: $\varphi = (\chi \wedge \sigma)(x_1, \ldots, x_n)$.

$$\mathfrak{B} \models (\chi \wedge \sigma)[f^1_D, \ldots, f^n_D] \leftrightarrow$$

(Definición de satisfacibilidad)

$$\mathfrak{B} \models \chi[f^1_D, \ldots, f^n_D] \wedge \mathfrak{B} \models \sigma[f^1_D, \ldots, f^n_D] \leftrightarrow$$

(Hipótesis Inductiva)

$$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \chi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in D \wedge$$
$$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \sigma[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in D \leftrightarrow$$

(D es filtro)

$$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \chi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \cap$$
$$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \sigma[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in D \leftrightarrow$$

(intersección y satisfacibilidad)

$$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models (\chi \wedge \sigma)[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in D$$

Caso 3: $\varphi = (\exists v)\chi(v, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$$\mathfrak{B} \models (\exists v)\chi[f_D^1, \dots, f_D^n] \leftrightarrow$$

(satisfacibilidad)

$$\text{Existe } f_D \in B \text{ tal que } \mathfrak{B} \models \chi[f_D, f_D^1, \dots, f_D^n] \leftrightarrow$$

(Hipótesis Inductiva)

$$(*) \text{ Existe } f_D \in B \text{ tal que } \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \chi[f_D(i), f^1(i), \dots, f^n(i)]\} \in D$$

Como ocurre que si $\mathfrak{A}_i \models \chi[f_D(i), f^1(i), \dots, f^n(i)]$, entonces $\mathfrak{A}_i \models (\exists v)\chi[f^1(i), \dots, f^n(i)]$, (*) implica que:

$$(**)\, \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models (\exists v)\chi[f^1(i), \dots, f^n(i)]\} \in D$$

Para probar que (*) es equivalente a (**) falta probar que (**) implica a (*). Si (**) ocurre se usa el Axioma de elección para definir una función $f \in \prod_{i \in I} A_i$ tal que (*) ocurra. Por lo tanto (*) y (**) son equivalentes. En consecuencia $Z = \mathbb{N}$, lo que se quería probar. La prueba de la cláusula (ii) del Teorema ha terminado, y la prueba de Teorema también. $\square$

Algunos colorarios (clásicos) del Teorema Fundamental de Ultraproductos son los siguientes:

Corolario 4.2. *Sea $\mathfrak{A}$ una estructura para un lenguaje $\mathcal{L}$ y sea $\prod_D \mathfrak{A}$ una ultrapotencia de $\mathfrak{A}$. Entonces $\mathfrak{A} \equiv \prod_D \mathfrak{A}$.*

Para enunciar el segundo corolario se requiere de una difinición previa: Sea I un conjunto no vacío, D un filtro sobre I y $\mathfrak{A}$ una estructura para un lenguaje $\mathcal{L}$. La *inmersión natural* de $\mathfrak{A}$ dentro de $\prod_D \mathfrak{A}$ es la función $d : \mathfrak{A} \longrightarrow \prod_D \mathfrak{A}$ definda com sigue: $\forall a \in A(d(a) = \langle a : i \in I \rangle)_D$. El rango de d es denotado por $d(A)$ y la restricción de $\prod_D \mathfrak{A}$ a $d(A)$ es donotada por $d(\mathfrak{A})$.

Corolario 4.3. *Sea $\mathfrak{A}$ una estructura para un lenguaje $\mathcal{L}$ y D un ultrafiltro. Entonces la inmersión natural de $\mathfrak{A}$ dentro de la ultrapotencia $\prod_D \mathfrak{A}$ es una inmersión elemental.*

Demostración: La función d es inyectiva y se puede chequear fácilmente que d cumple con las cláusulas (1), (2) y (3) de la definición de inmersión elemental. La prueba de la cláusula (4) se hace usando el Teorema Fundamental de Ultraproductos de la siguiente manera: Sea $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula de $\mathcal{L}$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$. Entonces:

$$\prod_D \mathfrak{A} \models \psi[d(a_1), \ldots, d(a_n)] \leftrightarrow$$

(Cláusula (ii) del Teorema Fundamental de Ultraproductos)

$$\{i \in I : \mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]\} \in D \leftrightarrow$$

(saisfacibilidad)

$$\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]. \square$$

Vale la pena resaltar que el corolario anterior (4.3) muestra que la inmersión natural d es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ sobre $d(\mathfrak{A})$ y que $d(\mathfrak{A})$ es un submodelo elemental de la ultrapotencia $\prod_D \mathfrak{A}$ [Ch-K].

Corolario 4.4 (Teorema de Compacidad). *Sea Γ un conjunto de sentencias de un lenguaje $\mathcal{L}$, sea $I = S_\omega(\Gamma)$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de Γ, y para $i \in I$, sea $\mathfrak{A}_\mathbf{i}$ un modelo de i. Entonces existe un ultrafiltro D sobre I tal que el ultraproducto $\prod_D \mathfrak{A}_\mathbf{i}$ es un modelo de Γ.*

Demostración: Para cada $\gamma \in \Gamma$, se define $\hat{\gamma} = \{i \in I : \gamma \in i\}$. El conjunto $K = \{\hat{\gamma} : \gamma \in \Gamma\} \subseteq P(I)$ tiene la propiedad de intersección finita ya que para todo $\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_n \in K$ se cumple que $\{ \gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \in \hat{\gamma}_1 \cap \ldots \cap \hat{\gamma}_n$. Entonces se considera el filtro K^* sobre I generado por K que proporciona el Teorema 2.2 ($K \subseteq K^*$). Por el Teorema del ultrafiltro (2.4) K^* se puede extender a un ultrafiltro sobre I, sea D dicho ultrafiltro ($K \subseteq K^* \subseteq D$). Si $i \in \hat{\gamma}$, entonces $\gamma \in i$ y $\mathfrak{A}_\mathbf{i} \models \gamma$. En consecuencia:

$$\forall \gamma \in \Gamma(\hat{\gamma} \subseteq \{i \in I : \mathfrak{A}_\mathbf{i} \models \gamma\}),$$

y como $\hat{\gamma} \in D$, entonces $\{i \in I : \mathfrak{A}_\mathbf{i} \models \gamma\} \in D$, porque D es filtro. Por lo tanto, por el Teorema Fundamental de Ultraproductos (cláusula (iii)) se tiene que,

$$\forall \gamma \in \Gamma(\prod_D \mathfrak{A}_\mathbf{i} \models \gamma),$$

es decir, $\prod_D \mathfrak{A}_\mathbf{i}$ es un modelo de Γ. Lo que se quería demostrar. $\square$.

Breve comentario adicional sobre compacidad, ultraproductos, grandes cardinales y modelos no estándar:

(1) Un ejemplo de aplicación del método de ultraproductos en la Teoría de conjuntos es con cardinales medibles, con dicho método se puede demostrar que: *Si α es un cardinal medible, entonces α es un cardinal inaccesible y además α es el α-ésimo cardinal inaccesible, es decir, existen α cardinales inaccesibles menores que α.* Esto siginifica (entre otros) que la hipótesis conjuntista "Existen cardinales medibles" es más fuerte que a hipótesis "existen cardinales inaccesibles". Es conocido que la existencia de cardinales inaccesibles no se puede demostrar de los axiomas estándar de la Teoría de conjuntos, por el Segundo Teorema de incompletitud de Gödel(1931) [Ch-K], [D3], [D4], [K], [J]. A continuación se presenta la definición de "cardinal inaccesible" y también la de "cardinal medible":

Sea α un ordinal límite.Decimos que $\beta < \alpha$ es *cofinal* con α si existe una función creciente $f : \beta \longrightarrow \alpha$ tal que para todo $\xi < \alpha$, existe un $\delta < \beta$ tal $f(\delta) \geq \xi$ (es decir, la imagen de f es no acotada en α). Dado α, la *cofinalidad* de α, $cof(\alpha)$, es el menor ordinal cofinal con α. Con respecto a la cofinalidad se cumple lo siguiente: $cof(\alpha)$ es el menor cardinal β tal que existe una partición de α en β pedazos cada uno de los cuales tiene cardinalidad estrictamente menor que α. Un cardinal infinito κ es *regular* si es igual a su cofinalidad. Decimos que es *singular* en caso contrario. Un cardinal κ es un cardinal límite fuerte si para todo cardinal $\theta < \kappa$ se tiene que $2^\theta < \kappa$. Un cardinal $\kappa > \aleph_0$ es inaccesible si es regular y límite fuerte.

Sea α un cadinal infinito. Un filtro D sobre I se llama *α-completo* si y sólo si: $X \subseteq D$ y $\mid X \mid < \alpha$ implica $\bigcap X \in D$. Un cardinal α se dice que es *medible* si y sólo si existe un ultrafiltro no principal y α-completo sobre α.

(2) La propiedad de compacidad para lenguajes infinitarios permite caracterizar los cardinales inaccesibles que satisfacen la relación combinatoria $\kappa \rightarrow \kappa^2_2$. Explicación:

(2.1) Los lenguajes infinitarios $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$ [D2], [E-F-T]: Dados dos cardinales θ y δ, sea $\mathcal{L}_{\theta\delta}$ el lenguaje que se obtiene añadiendo dos nuevas operaciones a las reglas de construcción de fórmulas de los lenguajes de primer orden vistos al inicio de este artículo (Definición 3.3.3):

(i) Conjunciones (y disyunciones) infinitas de cardinalidad menor que θ.

(ii) Cuantificación infinita para bloques de variables de cardinalidad menor que δ

(2.2) Un cardinal $\kappa > \omega$ es *débilmente compacto* si para todo conjunto Γ de sentencias de $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$ tal que $\mid \Gamma \mid \leq \kappa$ ocurre lo siguiente: Si cada subconjunto de Γ de cardinalidad menor que κ tiene un modelo, entonces Γ tiene un modelo. Notar que el Teorema de compacidad demostrado anteriormente para $\mathcal{L}_{\aleph_0\aleph_0}$ implica que $\aleph_0$ es débilmente compacto, es decir, la definición de cardinal débilmente compacto es una generalización de una propiedad de $\aleph_0$ para cardinales no numerables.

(2.3) La relación combinatoria $\kappa \to \kappa_2^2$ significa que para toda partición en dos clases del conjunto de subconjuntos de dos elementos de κ existe un subconjunto $H \subseteq \kappa$ cuyos subconjuntos de dos elementos están todos en el misma clase y H tiene cardinal κ. Esta definición se puede re-expresar de la siguiente manera teniendo presente que $[A]^2 = \{\{x, y\} : x \in A \wedge y \in A\}$ y que $F''[A] = \{F(x) : x \in A\}$. Entonces $\kappa \to \kappa_2^2$ significa que para toda función $F : [\kappa]^2 \longrightarrow \{0, 1\}$ existe un subconjunto $H \subseteq \kappa$ tal que $\mid H \mid = \kappa$ y existe un $i \in \{0, 1\}$ tal que $F''[H]^2 = \{i\}$.

(2.4) Se cumple el siguiente Teorema: Si κ es inaccesible, entonces κ es débilemte compacto si y sólo si $\kappa \to \kappa_2^2$. [D2].

(3) Una de las consecuencias matemáticas del Teorema de compacidad es que con el mismo se pueden construir modelos no estándar para la Aritmética en primer orden, es decir, modelos donde valen las mismas sentencias (de primer orden) que en el sistema estándar de los naturales, pero que no son isomorfos al mismo . También con dicho teorema se demuestra que existen importantes clases de estructuras matemáticas que no se pueden definir en primer orden,es decir, la Lógica de primer orden tiene limitaciones expresivas [Ma], [E-F-T], [N-S]. Esto también ocurre con el Teorema de Löwenheim -Skolem-Tarski hacia bajo (*Cualquier teoría consistente T en un lenguaje $\mathcal{L}$ tiene un modelo de cardinalidad a lo sumo el cardinalidad de $\mathcal{L}$*) y con el Teorema Teorema de Löwenheim -Skolem-Tarski hacia arriba (*Si una teoría T en un lenguaje $\mathcal{L}$ tiene modelos infinitos, entonces tiene modelos de cualquier cardinalidad mayor o igual que el cardinal de $\mathcal{L}$*), es decir, como consecuencia de dichos teoremas con la Lógica de primer orden no se pueden definir importantes estructuras matemáticas y clases de estructuras matemáticas, como por ejemplo el Sistema de los números reales, pues se pueden contruir modelos no estandar para la teoría de los reales en primer orden (de estos resultados surgió el Análisis no estándar, por ejemplo) [Ma], [E-F-T]. Es

decir, la Lógica de primer orden tiene limitaciones expresivas como consecuencia de los Teoremas de Compacidad y Löwenheim -Skolem, y entonces surge una interrogante ¿ las lógicas de mayor capacidad expresiva que la Lógica de primer orden que se han construído (Lógicas infinitarias, Lógicas con cuantificadores generalizados, Lógica de segundo orden, etc) satisfacen ambas propiedades? la respuesta es que NO, ellas no satisfacen alguna de dichas propiedades (o ambas), tal resultado lo demostro Lindström (en 1969): *Toda lógica de mayor capacicad expresiva que Lógica de primer orden pierde alguna (o ambas) propiedades*, una demotración de tal teorema puede encontrare en [E-F-T] o [Ch-K].

Referencias

[Ch-K] C. Chang - H. Keisler. *Model Theory*. Dover Publications. 2012.

[D1] C. Di Prisco. *Introdución a la Lógica Matemática*. Emalca Amazonia. 2009.

[D2] C. Di Prisco. *Teoría de Conjuntos*. Universidad Central de Venezuela: Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico. 2009.

[D3] C. Di Prisco. *Inmersiones elementales y grandes cardinales*. Notas no publicadas. 1982.

[D4] C. Di Prisco. *Are we closer to a solution of the continuum problem?*. Rev. Int. Fil., Campinas, V. 28, n. 2, p. 331-350. 2005.

[E-F-T] H. Ebbingahaus - J. Flum - W. Thomas. *Mathematical Logic*. Springer. 1996.

[E] H. Enderton. *Una Introducción Matemática a la Lógica*. Universidad Nacional Autónoma de México. 2004.

[J] T. Jech. *Set Theory*. Springer. 2006.

[K] K. Kunen. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*. College Publications. 2011.

[Ma] M. Manzano. *Teoría de Modelos*. Alianza. 1989.

[Me] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman and Hall/CRL. 2009.

[Mo] G. Moore. *A House divide against itself: The emergence of first-Order logic as the basis for mathematics*. En "Studies in the History of Mathematics". Esther R Phillips (ed.). Mathematical Association of America. pp. 98-136. 1987.

[N-S] A. Nerode - R. Shore. *Logic for Applications*. Springer. 1997.