DANS LA COLLECTION « THÉORIE »

Série Recherches

1. Louis Althusser, *Pour Marx.*
2. Louis Althusser, Jacques Rancière, Pierre Macherey, *Lire le Capital* I.
3. Louis Althusser, Etienne Balibar, Roger Establet, *Lire le Capital* II.
4. Pierre Macherey, *Pour une théorie de la production littéraire.*
5. Emmanuel Terray, *Le marxisme devant les sociétés « primitives ».*

Louis Althusser, *Lénine et la philosophie.*

Série Textes

Ludwig Feuerbach, *L'essence du christianisme*, Présentation et traduction de Jean-Pierre Osier.

ALAIN BADIOU

LE CONCEPT DE MODÈLE

Introduction à une épistémologie matérialiste des mathématiques

no author ?

FRANÇOIS MASPERO
1, place Paul-Painlevé, V[e]
PARIS
1972

© 1969, Librairie François Maspero.

QA9.7
.B33

Avertissement

Le début de ce texte (de I à V inclus) reprend un exposé fait le 29 avril 1968 par Alain Badiou dans le cadre du « Cours de philosophie pour scientifiques » donné à l'Ecole Normale Supérieure.

La suite (VI à X) aurait dû faire l'objet d'un deuxième exposé le 13 mai 1968. Ce jour-là, on le sait, les masses populaires mobilisées contre la dictature bourgeoise gaulliste affirmaient dans tout le pays leur détermination, et amorçaient le processus qui devait conduire à un affrontement de classes de grande envergure, bouleverser la conjoncture politique, et provoquer des effets dont la suite ne se fera pas attendre.

On imagine assez que dans cette tempête, l'intervention sur le front philosophique dut passer au second plan.

Aujourd'hui même, les accents quelque peu « théoricistes » de ce texte renvoient à une conjoncture dépassée. La lutte, même idéologique, exige un tout autre style de travail et une combativité politique juste et lucide. Il n'est plus question de viser une cible sans l'atteindre.

On verra dans ce texte non seulement un document et un repère mais aussi une attente heureusement interrompue.

Mais peut être autre chose : gardant bien entendu le sens des proportions quant à la signi-

0452562

fication historique de la crise, et plus encore quant à la qualité des acteurs, on se souviendra que Lénine, au lendemain de l'échec de 1905, accorda un moment une importance exceptionnelle à la lutte philosophique contre les empirio-criticistes.

C'est que les échecs apparents de la pratique politique, les diagnostics erronés de « reflux », le découragement petit-bourgeois, nourrissent toujours une race de liquidateurs, d'idéalistes et de révisionnistes, qui, faute d'avoir instantanément changé le monde, voire « la vie » s'en consolent en entreprenant tout bonnement de « changer » le marxisme-léninisme[1].

Nous n'entretenons aucune illusion : la région où se situe ce travail (la doctrine de la science) est non seulement très limitée, et très indirecte, mais elle peut être dangereuse, si on se méprend sur le sens de sa limitation. Nous croyons néanmoins utile de rappeler par quel biais, dans ce champ, peut à notre avis et de notre point de vue se poursuivre, ou se consolider, la relance du « Matérialisme Dialectique ».

Théorie, décembre 1968.

●

N. B. — Les chiffres en exposant[2], renvoient à la bibliographie indicative à la fin du texte.

L'appendice est destiné à exhiber dans leur connexion scientifique réelle des concepts seulement mentionnés, ou utilisés, dans le discours épistémologique qui précède.

1. Cf : L. Althusser : *Lénine et la philosophie*, Maspero, pp. 7-10.

2. Par exemple, p. 9, dans la première phrase, on lit : « On suppose ici connue[1] la différence... » le [1] de « connue »[1] renvoie à la Bibliographie pp. 91-92.

1. *Quelques préliminaires concernant l'idéologie*

On suppose ici connue[1] la description d'une formation idéologique particulière, distribuant le discours de la science selon une différence présupposée : la différence de la réalité empirique et de la forme théorique.

On rappelle que cette différence commande une image de la science, définie, en gros, comme représentation formelle de son objet donné. Dans cette figuration, l'élément tenu pour dominant peut être la présence effective de l'objet. Dans ce cas, on convient de la désigner comme empirisme ; mais la dominance peut aussi bien revenir à l'antériorité des dispositifs formels, au code mathématique où l'objet présent est représenté. On désigne alors la figuration comme un formalisme.

Il est bien clair qu'empirisme et formalisme n'ont ici d'autre fonction que d'être les termes du couple qu'ils forment. Ce qui constitue l'épistémologie bourgeoise n'est ni l'empirisme, ni le formalisme, mais l'ensemble des notions par lesquelles on désigne, dans un premier temps leur différence, dans un deuxième temps leur corrélation.

C'est très exactement ainsi que le positivisme logique, épistémologie dominante dans les pays anglo-saxons depuis plus de vingt ans, pose le problème de l'unité de la science.

Dans un article canonique intitulé « Les fondements logiques de l'unité de la science », article de 1938, Rudolf Carnap procède ainsi :

a) Il pose explicitement la différence constitutive dont nous sommes partis : « La première distinction que nous ayons à faire, écrit-il, est la distinction entre *science formelle* et *science empirique.* »

b) Il tente de trouver des règles de réduction qui puissent permettre de convertir les termes d'une science empirique en ceux d'une autre. Il montre ainsi que les termes de la biologie sont convertibles en termes de la physique : la physique est une « base de réduction » suffisante pour la biologie. L'usage des opérateurs de réduction permet à Carnap d'affirmer l'unité du *langage* de la science, en ce sens qu'un langage « physicaliste » est une base de réduction universelle pour les sciences empiriques.

c) Il pose le problème du rapport entre ce langage unique et les langages artificiels du premier groupe de sciences, les sciences formelles. Toute l'analyse sémantique de Carnap culmine dans cette question, par quoi se boucle la démarche qu'ouvrait la distinction des deux types de la science.

Les notions comme : sciences empiriques, réductibilité, analyse du sens etc., et leur élaboration raffinée, articulent les étapes de la position et de la déposition de la différence initiale.

Cette articulation est élaborée, spéciale. Elle n'est pas, dans son existence discursive, immédiatement réductible à la généralité de l'idéologie du donné. Du reste, Carnap l'oppose explicitement à d'autres *variantes*, par exemple à celle du logicien Quine, qui, lui, efface *d'emblée* la distinction entre vérité de fait et vérité logique. Pour Quine en effet, admettre des variables dans un calcul logique, c'est faire droit aux constantes qui sont valeurs de ces variables. Or, les constantes ne sont fixées que pour autant qu'elles ont pouvoir de dénoter des objets concrets. Réciproquement, ce qui « existe » empiriquement n'est rien d'autre que ce qui est assignable par une constante. Finalement, comme l'écrit Quine, « être, c'est être la valeur d'une variable » : l'empirique est une dimension du formel, ou l'inverse.

Seulement, l'opposition entre Carnap et Quine est *intérieure* à la même problématique. Quine, en effet, définit la particularité de son entreprise (l'originalité de son propos) par la *négation* justifiée d'une différence que Carnap, pour sa part, entreprend de *réduire*. Si le discours de Carnap a pour essence cette réduction, il n'y a d'important dans celui de Quine que la justification de ce qu'il n'y a pas à réduire ce qu'il convient de nier. La différence en question — du « fait » et des formes logiques — est le moteur commun des deux discours.

Ou plus exactement : l'instabilité de cette différence, sa perpétuelle renaissance-niée, représentent la contrainte du leurre sur des discours idéologiques, et par conséquent dépourvus de tout accès à leur propre cause. Ces caractéristiques sont au principe d'une *agitation* discursive qui déplace à l'infini la place essentiellement vide où devrait se marquer l'impraticable Science de la science.

Il faut ici comprendre que ce qui sépare deux discours idéologiques n'est pas de même nature que ce qui sépare, par exemple, la science de l'idéologie (coupure épistémologique), ou une science d'une autre. Car la règle de cette séparation est précisément aussi la forme ultime de *l'unité* des deux discours.

On comparera avec les *variations* musicales sur un thème : différentes, elles le sont, mais d'une différence qui les rapporte l'une à l'autre comme variations *du même thème*. Le système (infini) des différences entre variations est l'effet de la différence (unique) entre le thème et ce qui, n'étant pas lui, s'y rapporte néanmoins :

soit le champ des variations possibles, l'espace variationnel. N'est variation que ce qui vient dans cet espace, qu'aucune variation ne justifie, puisqu'il est le lieu où, s'annulant dans l'unité, s'avèrent les différences. Le leurre idéologique réside en ceci qu'on attribue aux variations elles-mêmes le pouvoir causal quant à l'unité systématique de leurs différences, confondant ainsi le *parcours* du système et la loi de sa *production*, puisque cette dernière, c'est au seul manque *du thème* qu'il faut la rattacher.

On a montré[1] que parler de *la* science était un symptôme idéologique. A vrai dire, parler de l'idéologie au singulier aussi. Science et Idéologie sont plurielles. Mais leur type de multiplicité est différent : les sciences forment un système discret de différences articulées ; les idéologies une combinaison continue de variations. Tenons cette assertion pour une thèse. Et proposons la *définition* suivante :

Etant donnée une formation idéologique, caractérisée par un couple de termes, on appelle *variante* tout système lié de notions qui permet de post-poser la question de l'unité des termes du couple, et, éventuellement, d'y répondre.

Je dis post-poser, puisque l'unité du couple est toujours déjà la condition d'existence du discours idéologique considéré. De sorte que la question de cette unité est une pure et simple répétition. Marx dit — à peu près — : l'homme ne se pose que les problèmes qu'il peut résoudre. Ici il faut dire : on ne pose que les questions dont la réponse est la condition déjà donnée de la question elle-même. Cependant, c'est la règle de cette répétition d'être inaperçue de qui l'opère. Et cette invisibilité se développe justement dans l'artifice des variantes. Pour reprendre la métaphore musicale : ces discours sont des variations sur un thème *qui n'est pas donné* (qui ne figure pas parmi les variations, ni en tête, ni ailleurs), en sorte que chaque variation ne peut qu'être pour soi image, prise pour sa

présence, du thème en personne. De là que toute variante dogmatise sur sa propre préséance.

La prolifération des méthodologies, dans ces pseudo-sciences que sont les soi-disant « sciences humaines », reflète l'infini du principe variationnel, ainsi que sa méconnaissance.

2. Des thèses qu'il s'agira dans la suite de justifier

On appelle *notions* les unités du discours idéologique ; *concepts* celles du discours scientifique ; *catégories*, du discours philosophique.

La philosophie étant, pour l'essentiel, recouvrement idéologique de la science, une catégorie dénote des objets « inexistants » où se combinent le travail du concept et la répétition notionnelle. Par exemple, la catégorie platonicienne du « nombre idéal » désigne, dans un ajustement « inexistant », des concepts de l'arithmétique théorique et des notions hiérarchisantes d'origine politico-morale ; les catégories kantiennes du temps et de l'espace rapportent à des notions relatives aux facultés humaines des concepts de la physique de Newton ; la catégorie sartrienne de l'Histoire combine des concepts marxistes et des notions métaphysico-morales, comme celle de la temporalité, ou de la liberté, etc.

Ceci dit, nous formulons les thèses suivantes :

Thèse 1 : Il existe deux instances épistémologiques du mot « modèle ». L'une est une notion descriptive de l'activité scientifique ; l'autre un concept de la logique mathématique.

Thèse 2 : Quand la deuxième instance sert de support à la première, on a un recouvrement idéologique de la science c'est-à-dire une catégorie philosophique, la catégorie de modèle.

Thèse 3 : La tâche actuelle de la philosophie est de désintriquer, dans les usages de la catégorie de modèle un usage *asservi*, qui n'est qu'une variante, et un usage positif, investi dans la théorie de l'histoire des sciences.

3. *De certains usages de modèles qui ne sont pas ici en question*

La première partie de la Thèse 1 s'illustre parfaitement dans un texte méthodologique connu de Lévi-Strauss, à la fin de son livre « Anthropologie structurale ». Le couple empirisme/formalisme y revêt la forme de l'opposition entre la neutralité de l'observation des faits et la production active d'un modèle. Autrement dit, la science est ici pensée comme le vis-à-vis d'un objet réel, sur lequel on doit enquêter (ethnographie), et d'un objet artificiel destiné à reproduire, à imiter dans la loi de ses effets, l'objet réel (ethnologie).

En tant qu'objet artificiel (Lévi-Strauss dit précisément : « construit »), le modèle est contrôlable. On peut « prévoir de quelle façon le modèle réagira en cas de modification d'un de ses éléments ». Cette prévision, en quoi réside la *transparence* théorique du modèle, est évidemment liée au fait qu'il est intégralement monté (Lévi-Strauss dirait volontiers : bricolé), en sorte que l'opacité attribuable au réel en est absente. De ce point de vue, le modèle n'est pas une transformation pratique du réel, de *son* réel : il appartient au registre de l'invention pure, il est doté d'une « irréalité » formelle.

Ainsi caractérisés les modèles recouvrent une

large classe d'objets[2]. Pour la commodité de l'exposition, je diviserai cette classe en deux groupes : modèles « abstraits » et montages matériels.

Le premier groupe comporte ce qu'on peut appeler des objets scripturaux, c'est-à-dire les modèles proprement théoriques, ou mathématiques. Il s'agit en fait d'un *faisceau d'hypothèses*, supposé complet relativement au domaine étudié, et dont la cohérence, puis le développement déductif, sont garantis par un codage généralement mathématique.

Un terrain d'élection de ces modèles est la Cosmologie. Dans son livre « Cosmologies du xx[e] siècle », Jacques Merleau-Ponty étudie systématiquement, sans d'ailleurs dépasser la simple chronique de la science, les *modèles d'univers :* de fait, le Tout n'étant jamais susceptible d'une inscription expérimentale, la cosmologie est liée à l'idéalisme du modèle. Ces constructions déductives sont nées d'une convergence : on avait d'une part les développements théoriques de la Relativité, d'autre part l'expérimentation astronomique, culminant dans la découverte du décalage vers le rouge du spectre des nébuleuses. Le modèle est un corps d'énoncés grâce à quoi cette convergence historique est intégrée dans un discours unique. Naturellement, ces intégrations sont diverses, et aucune n'a force de loi. C'est que les modèles ne sont pas des constructions intra-scientifiques. Comme l'enfant en vient à surmonter, dans la duperie du miroir, l'horreur de son corps morcelé, les modèles réfléchissent selon l'idéal prématuré du texte unifiant le désordre instantané de la production des savoirs. Le modèle appartient à la métathéorie sécurisante d'une conjoncture.

Dans le deuxième groupe, on trouve des montages matériels, dont la destination est triple :

1) Présenter dans l'espace, de façon synthétique, des processus non-spatiaux : graphes, diagrammes etc.

Par exemple, les informations données par la comptabilité nationale permettent la construction d'un graphe animé à cinq sommets : administrations, ménages, biens et services, entreprises, marché financier. Les flux mobiles entre les sommets figurent la structure des échanges, la théorie des graphes permettant de raffiner sur la vitesse et la dimension des flux.

C'est l'occasion d'indiquer que d'une façon générale, l'économie politique bourgeoise s'accomplit dans la construction de modèles d'expansion équilibrée : là encore, le modèle pare au « désordre » capitaliste non par le savoir de sa cause (soit la science marxiste des formations sociales et l'intelligence de la lutte des classes), mais par *l'image technique* intégrée des intérêts de classe de la bourgeoisie. « L'expansion », présentée comme norme progressiste, est en réalité l'effet inéluctable des structures où s'engendre, avec la baisse asymptotique de son taux, le profit. « L'équilibre », c'est la règle de sécurité contre l'exacerbation des contradictions, et le risque politique d'une montée aux extrêmes de la lutte des classes. Les modèles d'expansion dans l'équilibre, sous couvert de penser leur objet (l'économie des prétendues « sociétés industrielles »), *objectivent des objectifs de classe*. Une économie nationale en expansion équilibrée figure la *motivation* satisfaite des interventions étatiques au nom de « l'intérêt général ». Image portative, le modèle unifie extérieurement une politique économique, la légitime, et occulte sa cause comme sa règle.

Il est de toute pemière importance de montrer comment l'asservissement économétrique et l'usage croissant des prétendus « modèles mathématiques » en économie est une des formes les plus claires du révisionnisme, soit le dévoiement du marxisme au cœur même de sa partie la mieux constituée, et l'alignement inévitable sur les objectifs de la bourgeoisie.

2) Toujours dans le deuxième groupe, d'autres modèles tendent à réaliser des structures formelles, c'est-à-dire à transférer la matérialité scripturale dans une autre « région » d'inscription expérimentale. Le livre classique de Cundy et Rollett, *Mathematical models*, expose par exemple comment construire effectivement, carton ou bois, les cinq polyèdres réguliers convexes ; comment fabriquer une machine à tracer la lemniscate de Bernouilli ; mais, tout aussi bien, comment présenter un connecteur logique sous la forme d'un circuit électrique simple.

3) Enfin, une dernière classe de modèles vise à imiter des comportements : c'est le vaste domaine des automates.

Bien entendu, il ne saurait être question pour l'épistémologue de nier l'existence de ces dispositifs, ni même, comme en cosmologie, leur importance « régulatrice » dans l'histoire d'une science, ou, comme en automatique ou en économie, leur importance technico-politique.

On se bornera à constater que le modèle, moment technique ou figure idéale, prend place, au mieux, dans les entours de la pratique scientifique. On notera qu'adjuvant transitoire, il n'est destiné qu'à son propre démantèlement, et que le procès scientifique, loin de le fixer, le déconstruit. Bachelard[3] montre bien comment le modèle « planétaire » de Bohr n'a délivré une utile image de l'atome que dans le temps où la microphysique scandait l'effacement des orbites, le brouillage de leur tracé, et finalement le renoncement à l'image elle-même au profit d'un modèle statistique. Qui ne savait pas renoncer au modèle renonçait au savoir : tout arrêt sur le modèle fait obstacle épistémologique. C'est dire à quel point le modèle demeure aux marges de la production des connaissances. Mais enfin, à cette place, il n'est pas récusable. Il n'y fait même pas question.

4. *D'un usage purement idéologique du mot modèle*

La question épistémologique surgit en revanche de tout énoncé s'attachant à décrire la différence, et le rapport, entre le modèle et le réel empirique ; de toute entreprise nouant les manières de penser ce qui, dans le modèle, se dit de son objet ; de toute position, hors du modèle, de ce dont il est modèle.

Il y a question épistémologique si on prétend faire de l'invention de modèles l'activité même de la science. Si, donc, la *connaissance* scientifique est présentée comme connaissance par modèles.

Telle est bien justement l'opinion de Lévi-Strauss dans le texte que j'ai cité, et qu'il faut donc à nouveau questionner.

Remarquons d'abord que sur ce point, les expressions qu'utilise Lévi-Strauss sont extrêmement vagues. Les modèles, nous dit-il, sont construits « d'après » la réalité empirique. Et par ailleurs, « le modèle doit être construit de telle façon que son fonctionnement puisse rendre compte de tous les faits observés ». Le mot « rendre compte » (plus loin on trouvera « décrire » et « expliquer ») supporte à lui seul la charge épistémologique.

Or, les « faits observés » dont le modèle rend raison sont dans un état de dispersion neutralisée : ils sont donnés comme tels, en dehors de toute intervention théorique, puisque cette intervention commence précisément avec la construction du modèle, avec *l'artifice* du montage. Lévi-Strauss transfère en somme au discours épistémologique l'opposition institutionnelle de l'ethnographe « sur le terrain », collecteur attentif des coutumes, et de l'ethnologue citadin, ordonnateur armé de son peuple de fiches ; voire même l'opposition spéculative de la Nature (l'opacité continue de ce qui advient) et de la Culture (bricolage des différences dénombrables). Il confronte ainsi, dans la tradition positiviste, une information passive à une activité dont le sens est de reproduire la règle où l'information se rassemble.

Mais comment *contrôler* la reproduction ? Quel est le critère du « bon » modèle ?

Dans une conception expérimentaliste de la science, comme celle de Bachelard[4] pour la physique ou de Canguilhem[5] pour la physiologie, le « fait » expérimental est lui-même un artefact : il est une scansion matérielle de la preuve, et ne lui préexiste jamais. Balibar[6] a montré que dans ces conditions la dialectique de la science est de part en part intérieure à un procès de *production* des connaissances, et que ce procès est doublement articulé : 1°) selon le *système* des concepts ; 2°) selon *l'inscription* de la preuve.

Sans doute cette conception ouvre-t-elle à de multiples problèmes théoriques. Il faut par exemple se demander quelles sont les structures d'efficace de la double articulation : quel est, en dernière instance, le *moteur* de la science (au sens même où la lutte des classes est le moteur de l'histoire). Ces questions cependant relèvent d'une théorie de la causalité structurale[7], et non d'une philosophie de la connaissance. La science y est interrogée comme effet pratique, et non comme représentation.

Dans le cas de l'épistémologie des modèles en revanche, la science se divise en intervention productrice d'une part (invention et montage des modèles), constatation empirique ou enquête d'autre part. La question du sens et de la valeur de l'intervention est dès lors inévitable, dans la logique même d'un tel dispositif.

La poser, c'est d'abord prendre acte de la multiplicité des modèles. L'empirique, étant inactif, n'en indique par soi aucun : toutes les tentatives sont possibles, dans la liberté inventive de l'artifice. Le modèle en effet n'administre aucune preuve. Il n'est pas *contraint* par un processus démonstratif, mais seulement *confronté* au réel. On conçoit qu'à ce régime, et dans les temps de recherche incertaine, les modèles « fourmillent », comme dit Serres [2].

Dès lors, si le modèle représente la vérité du travail scientifique, cette vérité n'est jamais que celle du meilleur modèle. Ainsi se trouve restaurée la dominance de l'empirisme : entre des modèles nécessairement multiples, l'activité théorique ne peut choisir, puisqu'elle est précisément l'activité fabricatrice de modèles. C'est donc le « fait » qui tranche, en désignant le meilleur modèle, c'est-à-dire la meilleure approximation de lui-même. « Le meilleur modèle, écrit Lévi-Strauss, sera toujours le modèle vrai, c'est-à-dire celui qui, tout en étant le plus simple, répondra à la double condition de n'utiliser d'autres faits que ceux considérés et de rendre compte de tous. »

Le cercle est évident : à la question qu'est-ce qu'un modèle, on répond : l'objet artificiel qui rend raison de tous les faits empiriques considérés ; mais à la question : quel est le critère du « rendre raison », quel est le vrai modèle ? On répond derechef : le vrai modèle est celui qui rend compte de tous les faits. On ajoutera, pour faire bonne mesure, la classique condition d'élégance : le modèle doit être le plus simple.

Ces critères : exhaustivité et simplicité, on y reconnaitra les normes de la raison classifiante à l'âge classique, et les catégories fondamentales d'une philosophie de la représentation. Ce sont même les critères de la critique picturale au XVIIIe siècle, et il n'y a pas lieu de s'en étonner. Pour l'épistémologie des modèles, la science n'est pas un procès de transformation pratique du réel, mais la fabrication d'une image plausible.

Aussi, de tous les types de modèles que nous

avons mentionnés, les plus évidemment imitatifs, l'automate et le simulateur économique, ont dans cette doctrine une fonction exemplaire. La référence constante de Lévi-Strauss dans son texte est le livre classique de Von Neumann et Morgenstern : *La théorie des jeux et le comportement économique*. L'apport proprement scientifique de ce livre est certes considérable. Cependant, ce n'est pas à lui que se rapporte Lévi-Strauss, mais, sous son couvert, à la détestable philosophie qui lui fait cortège. Lévi-Strauss cite avec faveur des textes où une relation aussi faible que la ressemblance est explicitement évoquée, ainsi par exemple : « les modèles doivent être semblables à la réalité sous tous les rapports qui importent à la recherche en cours ». Ou : « la ressemblance à la réalité est requise pour que le fonctionnement du modèle soit significatif ».

On voit assez comment l'analogie extérieure, la simulation, sont ici convoquées pour réduire l'écart initial entre l'opacité inerte des faits et l'activité du constructeur de modèles.

A la limite, la réduction s'achève si l'on peut construire un modèle de l'activité du constructeur de modèles. C'est le mythe régulateur de cette épistémologie. Il éclaire les textes étranges où Lévi-Strauss confère à la complexité cérébrale la dignité de structure des structures, d'ultime support de la « structuralité » elle-même. Face à cet objet dernier, on entreprendra la construction d'un modèle du fonctionnement cérébral, un « cerveau artificiel », comme l'ambitionnent les cybernéticiens, dont l'idéologie des modèles est depuis toujours la philosophie spontanée.

Si la science est un artisanat imitatif, l'imitation artisanale de cet artisanat est, en effet, le Savoir Absolu.

Résumons-nous.

1) Sous cette première forme, encore grossière, le mot « modèle » est l'opérateur d'une

variante de l'empirisme vulgaire. La dualité du « fait » et de la loi y est reproduite par celle de la réalité et du modèle. La question de l'unité de cette dualité y prend la forme de la reproduction, de la simulation fonctionnelle. L'idée du savoir total s'y rattache enfin au projet cybernétique d'une imitation des processus cérébraux.

2) Cette variante a pour *objectif* inaperçu, mais où se marque la signification politique d'un tel discours :

— d'effacer la réalité de la science comme procès de production des connaissances, procès qui nulle part ne confronte la préexistence d'un réel à des opérations idéales, mais développe, *à l'intérieur* d'une matérialité historique spécifiée, des démonstrations et des preuves.

— de brouiller la distinction entre *production* des connaissances et *régulation* technique d'un processus concret. Dans les « modèles » économiques notamment, l'asservissement technique aux conditions de la production passe pour la nécessité intemporelle d'un « type » d'économie, dont le modèle exemplifie les contraintes bénéfiques.

5. *Le concept scientifique de modèle et la doctrine néo-positiviste de la science*

Abordons maintenant la deuxième partie de notre Thèse 1. Le mot « modèle » figure dans des contextes indiscutablement scientifiques, où il ne prétend pas désigner le ressort de la pratique théorique, mais un élément assignable dans une cohérence démonstrative : ni notion, ni catégorie, mais concept.

C'est toute une branche, sans doute la plus vivante, de la logique mathématique, qui s'appelle : théorie des modèles. S'y inscrivent au terme de processus contraignants, des énoncés théoriques sans ambiguité, comme par exemple :

— Une théorie est cohérente si et seulement si elle a un modèle (théorème de complétude de Gödel/Henkin).
— Une théorie formelle qui admet un modèle infini admet nécessairement un modèle dénombrable (théorème de Löwenheim-Skolem).
— Si la théorie des ensembles sans l'axiome de choix et sans l'hypothèse du continu admet un modèle, la théorie obtenue par adjonction de ces deux énoncés en admet aussi un (théorème de Gödel) ; et la théorie obtenue par adjonction de leur négation en admet également un (théorème de Cohen).

Qu'en est-il du mot « modèle » dans ces énoncés, et dans les démonstrations, souvent fort complexes, où ces énoncés sont tenus ? Y a-t-il un rapport quelconque entre son acception ici, et, disons, dans les textes mentionnés de Lévi-Strauss et de Von Neumann ?

Une première inspection du problème paraît devoir imposer une réponse affirmative à la deuxième question. Si le positivisme logique a pu proposer une doctrine de la science constamment étayée sur la logique mathématique, c'est, entre autres choses, parce que le concept de modèle lui permettait de penser le rapport entre un système formel et son dehors « naturel ». Au reste, on sait bien que la philosophie néo-positiviste a joué un rôle de premier plan dans la généalogie de la logique mathématique. Il y a, historiquement, une complicité dialectique entre néo-positivisme logique et théorie des modèles.

C'est qu'une classique distinction entre deux aspects de la logique semble redoubler, à l'intérieur du discours scientifique, le couple inaugural de la science formelle et de la science empirique.

1) Un système formel, ou système logistique, n'est qu'un jeu sur les écritures, dont les règles sont explicites, et prévoient tous les cas sans ambiguité. A partir d'un ensemble initial d'énoncés (les axiomes), on dérive des théorèmes selon des règles de déduction. Le *sens* du jeu est lié à des caractéristiques internes : le jeu n'aurait par exemple aucun sens (aucun intérêt) si *tous* les énoncés étaient des théorèmes. On n'aurait alors, si l'on peut dire, pas besoin de jouer ; toute inscription étant licite, les règles de déduction ne serviraient à rien. On demandera donc qu'il existe au moins un énoncé qui ne soit pas dérivable à partir des axiomes par application des règles. C'est la propriété fondamentale de *consistance* du système (Cf. Appendice). C'est là une exigence formelle, dont nous dirons qu'elle exprime une norme *syntaxique*. L'ensemble des règles du système, soit la façon de *former* les écritures (grammaire pure) et la façon de *déduire* (grammaire des enchaînements), définit en effet une syntaxe. Le positivisme logique identifiera volontiers la dimension formelle de la science et la syntaxe de son langage.

2) D'un autre côté, on sait bien que la construction d'un système formel n'est justement pas un jeu gratuit. On vise essentiellement à cerner la structure déductive stricte, l'aspect mécanisable, d'un domaine scientifique existant, c'est-à-dire d'une pratique théorique dont les effets sont inscrits dans l'histoire. Pour vérifier qu'un système formel exprime bien cette structure, on doit mettre en correspondance les énoncés du système formel avec ceux où s'organise le domaine d'objets scientifiques considéré. Naturellement, on ne se contentera pas d'analogies, de ressemblances etc. On définira des règles de correspondance. Tout ce qui concerne ces règles relève de la *sémantique* du système, de son *interprétation*.

Cette fois, la question du sens se pose autrement : parler du sens du système, c'est parler

de ses diverses interprétations. L'exigence fondamentale sera la suivante : qu'une fois construite la règle de correspondance sémantique, à tout énoncé *dérivable* du système (à tout théorème) soit lié un énoncé *vrai* dans le domaine d'interprétation. La « vérité », ici, n'est que le partage en deux classes des énoncés scientifiques, partage qui résulte du *travail* des concepts : énoncés vrais (démontrés, ou prouvés, ou toute autre forme scientifiquement assignable d'évaluation), énoncés faux. La sémantique tend à établir qu'on peut organiser rétrospectivement ce partage par les procédés purement mécaniques, et entièrement contrôlables, mis en jeu dans un système formel.

Si l'on peut en effet assigner à tout énoncé dérivable un énoncé « vrai », on dit que le domaine d'interprétation est un *modèle* pour le système formel.

Une propriété plus forte est la réciproque : à tout énoncé vrai du modèle correspond une formule dérivable du système. Dans ce cas, on dit que le système est *complet* pour ce modèle, etc.

Il y a ainsi toute une gamme de propriétés sémantiques. Supposons qu'on puisse les étudier selon les canons de la rigueur mathématique : on aura produit un *concept* théorique du modèle.

La tentation est alors grande d'exporter ce concept dans l'épistémologie générale. On dira par exemple que la partie purement théorique ou mathématique de la physique est sa syntaxe ; que le moment expérimental donne des interprétations concrètes, équivalant ainsi à la sémantique des algorithmes ; que si la partie théorique de la science relève de l'évaluation par la consistance, l'expérimentation requiert qu'on s'interroge sur les modèles concrets. Les dispositifs expérimentaux seront à la fois les artifices de construction de ces modèles, et l'espace d'exercice des règles de correspondance entre le *calcul* formel et les *mesures* concrètes.

Tout choix scientifique serait impliqué, tantôt par le modèle (expérimental) et les règles de correspondance tantôt par le système, et les règles syntaxiques.

Carnap a écrit un livre, *Meaning and Necessity*, dont le titre déjà, par l'opposition-corrélation du sens et de la nécessité, reflète la problématique en question : contrainte syntaxique de la déduction, exactitude sémantique des interprétations. Carnap l'illustre d'un exemple simple : si l'expérience peut se lier à des algorithmes mathématiques, si elle est calculable, c'est en tant qu'on peut mesurer les phénomènes. La mesure, par quoi le fait se fait nombre, est ici une opération sémantique essentielle. Mais tout résultat d'une mesure s'exprime dans un *nombre rationnel* (plus précisément un nombre qui n'a qu'un nombre fini de décimales), puisque les opérations « concrètes » de mesure sont nécessairement finies. La sémantique impose seulement à la physique comme corps de nombres de base le corps des rationnels. D'un point de vue syntaxique cependant, la limitation au corps des rationnels entraînerait des complications considérables. Par exemple, l'opérateur « racine carrée » n'aurait aucune généralité, puisqu'un nombre rationnel n'a, le plus souvent, pas de racine carrée rationnelle. On préfèrera donc utiliser le corps des *nombres réels* (dont le développement décimal peut être infini). L'adoption de ce corps de base pour la physique relève par conséquent d'une exigence de simplicité syntaxique. Il apparaît alors que l'opposition entre l'investigation empirique — pour parler comme Carnap — et la nécessité mathématique est pertinente, étant repérable dans les types de contrainte qu'elle exerce sur le langage adopté.

De surcroît, l'unité de cette opposition peut aussi s'étudier : elle appartient à l'articulation de la contrainte syntaxique sur la contrainte sémantique. Dans l'exemple considéré, l'expérience peut fonctionner comme modèle de la théorie parce que le corps des nombres rationnels est un sous-corps du corps des nombres réels. Toute mesure sera ainsi exprimable dans le langage formel (système des réels), où les rationnels sont effectivement *marqués ;* et les formes du calcul, les opérations, seront, pour l'essentiel, conservées, grâce à une certaine invariance de « l'espèce de structure », nombres réels et nombres rationnels formant des corps, soit des ensembles ou addition, multiplication, et leurs inverses, sont partout définis (sauf l'opération « inverse » pour 0, bien entendu).

Il apparaîtra légitime de fonder une épistémologie des modèles sur l'étude systématique des correspondances entre concepts syntaxiques et concepts sémantiques.

Cette perspective est-elle identique à celle qu'à travers un texte de Lévi-Strauss nous avons critiquée ? Oui et non.

— Oui, en ce qu'elle restaure apparemment la différence de l'empirique et du formel, du constatable et du langage artificiel où ce constatable vient s'indiquer.

— Non, et pour plusieurs raisons.

a) D'abord, elle *retourne* la conception dont nous sommes partis. Pour Lévi-Strauss, c'est le formel, le bricolé, l'artefact, qui est modèle relativement à un domaine empirique donné. Pour la sémantique positiviste, le modèle est une interprétation d'un système formel. C'est donc l'empirique, le donné, qui sont modèles de l'artifice syntaxique. Ainsi apparaît une sorte de réversibilité du mot « modèle ».

b) Mais surtout, la thèse du positivisme logique s'appuie explicitement sur une science : la logique mathématique, où la distinction-clef entre syntaxe et sémantique fonctionne conceptuellement.

Si l'on dit que le modèle doit « rendre raison » de tous les faits, cette assertion ne fait que redoubler, que *varier* le couple fondamental de l'épistémologie vulgaire. Si l'on parle en revanche de la complétude d'un système formel, on désigne une propriété éventuellement démontrable, ou réfutable. C'est l'objet d'un des plus fameux *théorèmes* de Gödel que d'établir l'incomplétude du système formel de l'arithmétique, soit d'un système formel qui admet pour *modèle* l'arithmétique récursive, l'arithmétique « classique ». Les critères de la syntaxe pertinente relativement à un modèle donné ne sont pas laissés à l'arbitraire des ressemblances. Ce sont des propriétés théoriques.

La question de savoir ce qu'il en est finalement de la *catégorie* de modèle, se joue tout entière ici, dans la différence entre Carnap et Lévi-Strauss, c'est-à-dire dans la portée épistémologique exacte du *concept* logique, scientifique, de modèle, laquelle seule peut valider, ou non, son exportation aux fins de construire une catégorie philosophique. Nous ne pouvons éviter ici un détour purement logique.

Ce détour exigeant une certaine attention, il est juste d'en indiquer à l'avance le but, et d'en souligner la nécessité : il s'agit de placer dans l'éclairage épistémologique une construction (scientifique) de concept. De la pratique de cette construction, on attend d'abord une exacte saisie de la différence entre le concept de modèle et la notion (idéologique) homonyme. Mais en outre, par les commentaires dont elle est accompagnée, par la disposition soulignée de ses temps successifs, la construction démonstrative sert à valider une autre différence : celle qui disjoint deux usages catégoriels (philosophiques) du mot « modèle ». Autrement dit, notre lecture de la science commande ici, en amont, sa distance à l'idéologie, en aval, une ligne de démarcation dans le discours philosophique, soit : deux styles antagonistes de discours *sur* la science ; deux formes de réappropriation idéologique de la science ; finalement, deux *politiques* de la science, une progressiste, et une réactionnaire.

Je demande donc au lecteur de ne pas enjamber les explications techniques pour conclure

aussitôt. La *réalité* de l'épistémologie matérialiste à quoi j'essaie d'introduire fait corps avec une pratique effective de la science. S'agissant de la logique mathématique, cette pratique ne requiert quasiment aucune préparation technique.

6. Construction du concept de modèle :

I. Préliminaires syntaxiques

Au risque, inhérent à l'entreprise épistémologique, d'en dire bien trop pour qui pratique la science visée, et trop peu pour les autres, je proposerai, à titre d'exemple, la définition par étapes des modèles relativement à un langage logique très simple, mais d'un usage fréquent. Le parti pris sera d'être élémentaire au sens strict : de ne présupposer *aucune* connaissance particulière. Je ne serai pas très soigneux, désirant seulement faire saisir l'articulation d'une construction de concept. Pour un développement plus étendu, mais également attentif à introduire aux problèmes épistémologiques, on se reportera à (8). Pour un traitement rigoureux, à (9). Il sera utile de garder sous les yeux le dépliant situé à la fin du texte.

Occupons-nous d'abord de la syntaxe.

Notre langue calculable — notre jeu sur les écritures — vise à être un dispositif expérimental mathématique, c'est-à-dire un système d'inscriptions qui obéit à des conditions spécifiques. Nous devons donc disposer d'un stock de marques suffisant pour répartir plusieurs « espèces » d'inscriptions, qui sont les *pièces* du jeu.

A) Nous voulons désigner la différence *fixe* de nos objets, « objet » ne signifiant ici rien d'autre que ce qui s'enchaine à l'expérimentation scripturale. Nous utiliserons, pour ce faire, une liste, finie ou infinie — mais dénombrable —, de lettres : a, b, c, a', b', c',... Nous les appellerons les *constantes individuelles*. Disons tout de suite qu'en règle générale, elles ne seront pas interchangeables dans une écriture donnée.

B) Nous voulons désigner les propriétés des objets, c'est-à-dire marquer certaines classes de constantes, celles qui « satisfont » une propriété. Nous utiliserons des marques prédicatives, ou prédicats : P, Q, R, P', Q'...

La simplicité de notre exemple réside en ceci que nous n'admettrons que des prédicats « unaires » susceptibles de marquer une constante à la fois seulement. Dans les syntaxes mathématiques usuelles, on admet des prédicats binaires, ou relations, qui marquent des couples de constantes, et même des prédicats « n-aires », qui marquent un système de n constantes[1]. La forme générale de la construction du concept de modèle n'en est pas moins essentiellement la même.

C) Nous voulons enfin désigner la « généralité » du domaine objectif, c'est-à-dire une constante quelconque, indéterminée, une *place* où n'importe quelle constante peut venir s'inscrire. Ces marques indéterminées pourront donc éventuellement être remplacées par des constantes, raison pour laquelle on les appellera des *variables individuelles*. Nous les noterons : x, y, z, x', y',...

Nous pouvons déjà *former* certaines expressions, ou suites de marques. Toutes les suites ne seront pas correctes : le critère du sens syntaxique — que le jeu ne soit pas totalement arbitraire — intervient ici par le biais de *règles de formation*. Nous n'entrerons pas dans les détails. Il est clair qu'on règlera le marquage d'une constante (ou d'une variable) par un prédicat. Pour cela, il sera commode de disposer de *marques de ponctuation*, parenthèses et crochets. Par exemple, P(a) sera une expression correcte (bien formée), qui se lira, si l'on veut, « a possède la propriété P ». De même pour P(x). Des écritures de ce type, qui ne comportent, outre les ponctuations, que deux marques, s'appelleront des *formules élémentaires*.

L'usage des variables n'a de véritable intérêt que si l'on veut pouvoir écrire des énoncés généraux, dont l'interprétation sémantique serait : « il existe au moins une constante marquable par le prédicat P », ou « toute constante est marquable par P ». Pour cela, on introduit les classiques *quantificateurs* : universel, que nous noterons U, et qui se lit « pour tout » ; existentiel, que nous noterons E, et qui se lit « il existe ». Une règle de formation autorise alors les écritures du type :

— (Ex)P(x), qui se lit « il existe x tel que P(x) ».
— (Ux)P(x), qui se lit « pour tout x, P(x) ».

Notons bien que ces énoncés ne sont ici donnés que comme exemples d'écritures acceptables, lisibles, bien formées, et non comme « théorèmes » ou « énoncés vrais ».

Dans ces expressions la variable quantifiée x ne peut pas être remplacée par une constante. C'est bien compréhensible : l'énoncé (Ex)P(x) ne nous dit pas *quelle* constante particulière est marquable par P, mais seulement qu'il y en a une. L'énoncé (Ux)P(x) nous dit que toute constante est marquable par P, non telle ou telle. D'où une distinction relative au type d'inscription, fort importante dans la suite :

1. Soit par exemple le domaine sémantique des nombres entiers naturels. « Etre un nombre premier » s'inscrira, dans une expérimentation syntaxique, sous la forme d'un prédicat unaire : P (n) par exemple. « Etre plus grand que », d'un prédicat binaire (x est plus grand que y, O (x, y) si l'on veut). « Etre la somme de... et de... », d'un prédicat ternaire (S (x, y, z), z est la somme de x et de y), etc.

Définition : une variable qui tombe dans le champ d'un quantificateur sera dite variable *liée* ; autrement, elle est dite *libre*.

Franchissons une étape supplémentaire dans la complexité combinatoire de notre dispositif. Nous souhaitons pouvoir construire des écritures qui combinent non seulement des lettres, mais des formules élémentaires et des formules élémentaires quantifiées, puis qui combinent ces combinaisons. Pour cela, nous introduirons des opérateurs logiques, des *connecteurs* qui prennent pour argument des formules « déjà » construites. Nous en utiliserons ici deux, suffisants d'ailleurs pour les besoins de n'importe quel dispositif logico-mathématique : la *négation*, que nous noterons $\sim$, et *l'implication*, $\rightarrow$. Les règles de formation associées à ces signes sont fort simples :

— Si A est une expression bien formée, $\sim$ A l'est aussi.

— Si A et B sont des expressions bien formées, (A $\rightarrow$ B) l'est aussi.

La première expression se lit « non-A », la seconde « A implique B ».

On conviendra enfin que l'on peut *quantifier* les expressions bien formées ainsi obtenues, à la condition que la variable sur quoi porte le quantificateur soit en occurrence libre. Si par exemple la variable x est *libre* dans A et dans B (si elle n'est pas *déjà* quantifiée dans A ou dans B), l'expression : (Ux) (A $\rightarrow$ B) est bien formée.

Nous sommes maintenant en état d'écrire des expressions bien formées complexes, que l'on appelle les *formules* du système. A titre d'exemple, et pour rassembler nos conventions :

$$(\mathrm{Ux})\ [\sim \mathrm{P(x)} \rightarrow (\mathrm{Q(y)} \rightarrow \mathrm{P(a)})]$$

est une formule, qui se lira « pour tout x, si x n'a pas la propriété P, alors, le fait que y ait la propriété Q entraîne que a possède la propriété P ». Dans cette formule, la variable x est

liée et la variable y est *libre*. Une telle formule (qui contient au moins une variable libre) sera dite *ouverte*.

$$(\mathrm{Ex})\ [\mathrm{P(x)} \rightarrow \sim \mathrm{Q(x)}]$$

qui se lira « il existe x tel que, si x a la propriété P, alors il n'a pas la propriété Q », est une formule qui ne comporte aucune variable libre : c'est une formule *close*.

Reste à donner au jeu sa forme *déductive* : soit à monter un dispositif qui distingue, parmi les expressions bien formées, celles qui sont des théorèmes (celles qu'on peut déduire), et celles qui n'en sont pas.

Pour cela, on définit d'abord des *règles de déduction* qui permettent de *produire* une formule à partir d'autres, par des manipulations explicites. On veillera à ce que les formules ainsi alignées soient toutes bien formées.

Dans notre exemple, les règles sont les suivantes :

1) Etant donnée une expression déjà produite (ou un axiome) A, dans laquelle la variable x est libre, on peut « produire » l'expression (Ux) A.

Le schéma de déduction s'écrit donc (le signe $\vdash$ indiquant qu'on a « antérieurement » produit la formule A dans le système, ou qu'elle est un axiome) :

$$\frac{\vdash \mathrm{A}\ (\mathrm{x\ libre\ dans\ A})}{\vdash (\mathrm{Ux})\ \mathrm{A}}$$

C'est la règle dite de *généralisation*.

2) Etant données les deux formules (A $\rightarrow$ B) et A, on considère comme une règle de déduction d'inscrire à leur suite la formule B :

$$\begin{array}{l} \vdash \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} \\ \vdash \mathrm{A} \\ \hline \vdash \quad\ \mathrm{B} \end{array}$$

C'est la règle dite de *séparation*.

L'appendice convaincra le lecteur des possibilités offertes au jeu déductif par ces deux seules règles.

Insistons au passage sur l'importance du caractère *effectif*, mécanique, de ces règles (comme d'ailleurs des règles de formation). A vrai dire, la catégorie philosophique de la procédure effective, de ce qui est explicitement calculable, par une suite de manipulations scripturales sans ambiguïté, est au centre de toute épistémologie des mathématiques. Cela tient à ce que cette catégorie concentre l'aspect proprement expérimental des mathématiques, soit *la matérialité des marques*, le montage des écritures. Bachelard [3] note qu'en physique, le véritable principe d'identité est celui de l'identité des instruments scientifiques. Dans la question du calculable, dans l'interrogation sur l'essence des algorithmes, on rejoint le principe de l'invariance des écritures, et du contrôle de cette invariance. La démonstration mathématique *s'éprouve* dans l'explicite réglé des marques. L'écriture représente en mathématiques le moment de la vérification.

Une fois instituées les règles de déduction, il faut choisir des formules initiales : les axiomes. Ce choix caractérise la théorie considérée, il en signe la particularité, puisque toutes les autres règles de notre langage (formation et déduction) sont générales. Le choix des axiomes fait la différence démonstrative.

Nous disposons en effet maintenant d'un concept de la *déduction*.

Définition : une suite finie de formules est une déduction si chacune des formules qui la composent

— ou bien est un axiome

— ou bien résulte de l'application, à des formules qui la précèdent dans la suite, d'une règle de déduction.

Toute formule (axiome ou formule produite) qui figure dans une déduction est un *théorème* du système.

Supposons par exemple que nous ayons choisi les deux axiomes :

$$\text{ax } 1 : \vdash P(x)$$
$$\text{ax } 2 : \vdash (Ux)P(x) \rightarrow \sim Q(a)$$

Le lecteur vérifiera (sans peine !) que la suite :

$$\vdash P(x)$$
$$\vdash (Ux)P(x)$$
$$\vdash (Ux)P(x) \rightarrow \sim Q(a)$$
$$\vdash \sim Q(a)$$

est une déduction selon les deux règles introduites ci-dessus (généralisation et séparation). La formule $\sim Q(a)$ est donc un théorème du système que spécifient les deux axiomes.

On peut distinguer des axiomes *logiques* et des axiomes *mathématiques*. Les premiers n'ont pas égard, dans la forme scripturale qui les caractérise, aux constantes fixes (individuelles ou prédicatives) ; les seconds, en revanche, règlent souvent l'usage de telles constantes, qu'on peut appeler les symboles non logiques de la théorie.

En fait, on utilise fréquemment comme axiomes logiques des suites infinies de formules dont la structure (la loi de formation, ou d'inscription) est la même. C'est ainsi que *tous* les énoncés (en nombre infini) du type : $[A \rightarrow (B \rightarrow A)]$, où A et B sont des expressions bien formées quelconques, sont souvent retenus comme axiomes dans un calcul comme celui de notre exemple. Bien entendu, des constantes figurent dans la plupart des expressions de ce type. C'est ainsi que l'expression :

$$[P(a) \rightarrow [Q(b) \rightarrow P(a)]]$$

contient quatre constantes, deux individuelles et deux prédicatives. Elle est cependant du type requis $[A \rightarrow (B \rightarrow A)]$, et figure donc dans la liste des axiomes. Mais les constantes a, b, P, Q ne caractérisent en rien ce type, ni ne fondent l'appartenance de la formule à la liste. Seule la conformité globale de la « structure » d'inscription est en cause. Aussi bien, remplaçant toutes les constantes par d'autres, ou par des variables, j'obtiens une formule qui est, elle aussi, dans la liste, qui est un axiome de la même espèce. On considèrera donc que le schéma d'axiome qui commande la liste, ne dépendant que du connecteur logique qui y figure (l'implication), est un schéma *logique*.

En revanche, soit S un prédicat fixe et a une constante, considérons l'axiome éventuel suivant :

$$(Ex)\ [S(x) \rightarrow \sim S(a)]$$

Il est clair que le prédicat S est tout à fait particulier, et n'est pas remplaçable par un prédicat quelconque, non plus du reste que la constante individuelle a. L'axiome définit (implicitement) S comme un prédicat qui détient des pouvoirs de marquage *différentiels* par rapport à la constante a. L'axiome pose en effet qu'existe une constante au moins telle que, si elle est marquable par S, alors, a ne l'est pas. Il y a incompatibilité selon S entre a et cette autre constante (indéterminée).

Un tel axiome (séparateur) sera considéré comme *mathématique*. Entendons : comme lié au dispositif expérimental d'une théorie mathématique particulière.

Nous verrons cependant un peu plus loin que la différence intra-syntaxique entre axiomes logiques et axiomes mathématiques n'est pleinement pensable que dans sa référence aux modèles où ces axiomes sont « vrais ».

7. *Construction du concept de modèle :*

II. Aspects fondamentaux de la sémantique

Nous entreprendrons ici de faire « correspondre » au système, dont nous venons de décrire la syntaxe, une interprétation.

La première idée est à coup sûr de fixer le domaine d'objets où fonder la correspondance avec les marques du système. Seulement, rien n'est plus indistinct, et plus empiriste, que la notion d'une collection d'objets, au point qu'à s'y tenir, la sémantique n'aurait aucune chance de s'articuler scientifiquement : *c'est uniquement dans la mesure où elle dispose du concept mathématique d'ensemble, et transforme par son effet la notion de multiplicité domaniale, que la théorie des interprétations d'un système formel échappe à cette impuissance.*

Convenons d'appeler *structure* le dispositif suivant :

A) *Un ensemble non vide V,* qu'on appellera domaine, ou univers.

Etre un « objet » de la structure signifiera appartenir à cet ensemble. Mais l'appartenance n'est ici rien d'autre que le signe fondamental de la théorie des ensembles, $\in$, et sa rigueur est celle de cette théorie même. Il apparait déjà que la sémantique n'est une science (et le modèle un concept) qu'autant qu'elle s'établit *dans* une branche existante des mathématiques, en sorte que la loi des interprétations d'un système formel (mathématique) s'écrit dans la mathématique elle-même (non formelle). Qu'il n'y ait cependant là ni cercle ni savoir absolu, c'est ce que nous éclairerons dans la suite.

Nous utiliserons les lettres u, v, w, u', v'... pour le marquage des différences de l'univers. Nous noterons u ∈ V la propriété d'être un « objet » de l'univers, soulignant au passage qu'en fait d'objet, nous avons ici seulement une inscription *différente* de toutes celles qui figurent dans le dispositif syntaxique ; tant il est vrai que l'expérimentation mathématique n'a pas d'autre lieu matériel que ce en quoi s'avère la différence des marques.

B) *Une famille de sous-ensembles de V,* que nous noterons [pV], [qV], [rV]... On admettra que dans cette famille peut figurer l'ensemble vide (l'ensemble qui n'a aucun élément).

Avons-nous le droit de considérer une telle « famille » comme un ensemble, et de lui assigner la rigueur conceptuelle inhérente à la mathématique des ensembles ? Oui, pour autant que cette mathématique pose (axiome de l'ensemble des parties) l'existence de l'ensemble de tous les sous-ensembles de l'ensemble V donné, dont notre famille est une partie définie. Oui aussi, dans la mesure où cette théorie pose axiomatiquement l'existence de l'ensemble vide.

C) *Deux marques supplémentaires, Vri et Fax.*

On lira ces marques, si l'on veut, « vrai » et « faux ». Mais cette appellation, où résonne l'origine intuitive, c'est-à-dire idéologico-philosophique, de la sémantique, est inessentielle, voire parasitaire ; seule compte ici l'impossibilité permanente de confondre les deux marques, l'invariance du principe de couplage dont elles sont l'expérience inscrite.

Tout dispositif du type prescrit par nos conditions A), B), C) est une structure. C'est à lier à des structures un système formel que s'emploie la sémantique.

Supposons qu'il existe une *fonction,* notée f, fonction de correspondance définie sur les marques syntaxiques et telle :

1°) qu'à toute *constante individuelle du système* elle fasse correspondre un *objet de la structure.* Ainsi, f(a) = u.

2°) qu'à toute *constante prédicative* elle fasse correspondre un sous-ensemble de la famille qui définit la structure : f(P) = [pV].

Notons que f opère « entre » les marques du système formel et celles de la structure, transportant la hiérarchie constante individuelle/constante prédicative sur la hiérarchie : marque d'un élément de l'univers/marque d'un ensemble d'éléments de l'univers.

Ce transfert ne requiert pas la simplicité de notre exemple : si le système admettait, outre les constantes prédicatives, des constantes de relation binaire, soit des marques assignées à des couples de constantes, on considérerait des structures plus complexes, en faisant intervenir des ensembles de couples d'éléments de l'univers. La théorie des ensembles, par l'axiome des paires, garantit l'existence d'un ensemble dont les éléments sont deux ensembles donnés.

L'idée qui va maintenant commander la construction du concept de modèle est la suivante : utilisant les ressources ensemblistes de la structure, et la fonction f, on donnera un sens à la *validité* pour la structure, ou à la non-validité, d'une expression bien formée du système formel. Si l'on peut ensuite mettre en rapport la *déductibilité* syntaxique (le fait que l'expression A est un théorème) et la *validité* sémantique (le fait que A est valide pour une structure, ou pour tel type de structure, voire pour n'importe quelle structure), on peut espérer cerner les conditions dans lesquelles une structure particulière est un modèle pour le système.

L'évaluation d'une formule A se fait de proche en proche, grâce aux marques Vri et Fax.

On posera d'abord:

Règle 1 : P(a) = Vri si et seulement si

$$f(a) \in f(P) ;$$

sinon, P(a) = Fax. Autrement dit, à l'expression inscrivant que a possède la propriété P, on fait correspondre le marquage par Vri (la « vérité »), si l'élément u, qui correspond (par f) à la constante a, appartient au sous-ensemble [pV], qui correspond au prédicat P.

Règle 2 : ∼ A = Vri si et seulement si A = Fax. Sinon, ∼ A = Fax. C'est la classique interprétation de la négation.

Règle 3 : (A → B) = Fax si et seulement si A = Vri et B = Fax. Sinon, (A → B) = Vri.

Une implication n'est « fausse » que si, l'antécédent étant vrai, le conséquent est faux.

Venons-en maintenant aux quantificateurs. Soit l'expression B dans laquelle la variable x est libre. Ecrivons B(a/x) l'expression obtenue en remplaçant dans B, partout où elle marquée, la variable x par la constante a. On posera :

Règle 4 : Soit B une expression qui ne contient pas d'autre variable libre que x. Alors, (Ex)B = Vri si et seulement si il existe au moins une constante, mettons a, telle que B(a/x) = Vri. Sinon, (Ex)B = Fax.

Règle 5 : Dans les mêmes conditions, (Ux)B = Vri, si et seulement si pour *toutes* les constantes a, b, c etc., on a B(a/x) = Vri, B(b/x) = Vri etc.

Reste le cas des formules élémentaires du type : P(x), et, plus généralement, le cas des formules ouvertes (qui comportent des variables non quantifiées). Nos règles ne nous permettent en effet d'évaluer de proche en proche que les

formules closes. Ceci est bien normal : la « vérité » d'une formule ouverte n'est pas fixe : elle dépend de la constante que l'on substitue à la variable. Ainsi l'expression : P(a) → P(x), où la variable x est libre, est, pour la plupart des structures, fausse si l'on remplace x par une constante différente de a. En revanche, l'expression P(a) → P(a), est vraie pour n'importe quelle structure. L'évaluation d'une formule ouverte doit donc tenir compte de toutes les substitutions possibles : on doit essayer toutes les combinaisons obtenues par le remplacement des variables libres par toutes les constantes du système.

On généralise donc la procédure utilisée pour l'évaluation des expressions quantifiées. Soit A une formule ouverte, et soit x, y, z..., les variables libres *différentes* qu'elle contient. On appelle *instance close* de A une formule du type A(a/x) (b/y) (c/z), où toutes les variables libres de A ont été remplacées par des constantes. Il y a naturellement un grand nombre d'instances pour une formule ouverte donnée : ce nombre dépend, et du nombre de variables différentes qui sont libres dans la formule, et du nombre de constantes individuelles du système formel considéré. Toutes ces instances sont évidemment des formules closes (sans variable libre). Elles peuvent donc toutes être évaluées par l'emploi répété des cinq règles précédentes.

On posera alors la définition cruciale suivante :

Définition : Une formule A du système est *valide* pour une structure, si, pour *toute* instance close A′ de A, on a, relativement à cette structure : A′ = Vri.

En particulier, une formule close A est valide si A = Vri, puisqu'elle n'a pas d'autre instance close qu'elle-même (rien n'y est remplaçable).

On remarquera que cette procédure est construite par récurrence sur la « longueur » des formules, c'est-à-dire sur le *nombre des marques* qui les constituent. On part des formules élémentaires du type P(a), qu'on évalue directement dans la structure, en examinant l'appartenance éventuelle du « représentant » sémantique de a au sous-ensemble de l'univers qui représente P. On règle ensuite le procédé qui permet d'évaluer une expresssion A à partir de l'évaluation, supposée acquise, des expressions plus courtes que A contient, ou que ses instances closes contiennent. Ainsi, l'évaluation de $\sim$ B se fait à partir de celle de B, celle de (Ex)B à partir de B(a/x) etc.

La conviction que ces règles garantissent l'existence d'une évaluation pour une formule d'une longueur quelconque revient à admettre le raisonnement par récurrence sur les nombres entiers (ici, sur le nombre de symboles entrant dans la composition d'une formule). Ceci suggère deux énoncés épistémologiques :

1) La construction rigoureuse du concept de modèle, dont l'évaluation est un moment, implique que l'écriture formalisée soit « nombrable » par les entiers naturels ; autrement dit, qu'une expression bien formée du système formel soit une suite *dénombrable*, voire, pour la plupart des systèmes, *finie*, de marques indécomposables. Parler de modèle, c'est exclure qu'un langage formel puisse être continu.

2) Après le recours explicite à la mathématique des ensembles, nous avons ici un recours, plus ou moins implicite, à la mathématique des nombres entiers, et nommément à l'axiome d'induction, qui la caractérise. Parler de modèle, c'est présupposer la « vérité » (l'existence) de ces pratiques mathématiques. On s'établit dès le début dans la science. On ne la reconstitue pas à partir de rien. On ne la fonde pas.

Nous franchirons un pas de plus en constatant que les règles de déduction du système formel « conservent » la validité : si A est valide et que B est produite par application d'une

règle à A, alors B est valide et ceci quelle que soit la structure où la validité est définie. Il va de soi qu'en réalité, on a précisément choisi les règles pour qu'elles assurent une sorte de régularité sémantique.

Vérifions rapidement cette assertion pour nos deux règles de la page 33.

Soit d'abord le schéma de la généralisation. Supposons que A soit valide, et que (Ux)A ne le soit pas. La deuxième partie de cette hypothèse implique, d'après la définition de la validité, qu'il existe une instance close (Ux)A' de (Ux)A telle que (Ux)A' = Fax. D'après la règle 5, ceci revient à dire qu'il y a au moins une constante a pour laquelle A'(a/x) = Fax. Mais A'(a/x) est une instance close de A. Or, nous avons supposé que A était valide ; toute instance close de A est donc égale à Vri. Il y a contradiction, et notre hypothèse doit être rejetée.

Remarquons au passage qu'en invoquant pour conclure le principe de non-contradiction, nous utilisons une logique « à l'état pratique ». Il va de soi en effet que les présupposés mathématiques de notre construction de concept (théorie des ensembles, théorie des nombres entiers naturels) véhiculent également la logique sous-jacente, les procédures pratiques d'enchaînement, où ces fragments mathématiques s'articulent. Ce n'est pas que de tels « principes logiques » surplombent la pensée, comme c'est justement le cas, dans la métaphysique d'Aristote, du principe de non-contradiction. Ces « principes » font au contraire partie de ce que nous expérimentons dans le champ de la production mathématique concrète, et n'ont pas d'autre existence. Aussi bien sont-ils, au même titre que les énoncés mathématiques, susceptibles d'une vérification syntaxique, dans le cadre du montage de systèmes logiques.

Soit maintenant la règle de séparation. Pour simplifier, nous supposerons que toutes les formules sont closes. Si la conclusion B = Fax, la règle 3 pose que A = Vri entraine (A $\rightarrow$ B) = Fax.

Mais nous supposons A et A → B valides. Il est donc impossible que l'on ait B = Fax. B est donc valide.

Nos règles de déduction transportent ainsi la validité. Il en résulte cette conséquence majeure que *si les axiomes d'une théorie sont valides, tout théorème de la théorie l'est aussi.* Une déduction (cf. page 34) commence en effet par un axiome, et ne comporte ensuite que des axiomes, ou des formules produites, à partir de celles qui la précèdent, par application des règles : si les axiomes sont valides, toute formule figurant dans une déduction est valide.

La fonction de correspondance, qui soutient les procédures d'évaluation, définit alors une sorte d'inférence, par le concept syntaxique d'énoncé déductible, du concept sémantique d'énoncé valide-pour-une-structure.

Nous avons atteint notre but, et nous posons :

UNE STRUCTURE EST MODELE
D'UNE THEORIE FORMELLE
SI TOUS LES AXIOMES DE CETTE THEORIE
SONT VALIDES POUR CETTE STRUCTURE.

8. *Construction du concept de modèle :*

III. Jeux sur l'exemple

J'ai évoqué plus haut le départ à faire entre logique et mathématique. Le critère le plus sûr revient à ceci qu'un axiome est *logique* s'il est valide pour *toute* structure, et mathématique autrement. Un axiome mathématique, valide seulement dans des structures particulières, en marque l'identité formelle par l'exclusion qu'il fait des autres dans ses pouvoirs sémantiques. La logique, réfléchie sémantiquement, est le

système du structural comme tel ; la mathématique, théorie, comme dit Bourbaki[10], des *espèces de structures.*

Existe-t-il vraiment, dans notre exemple, des expressions correctes valides pour toute structure ? Certes. Nous avons mentionné le schéma : $A \to (B \to A)$, où A et B sont des expressions quelconques. Une formule conforme à ce schéma est toujours valide, quelles que soient les évaluations de A et de B, donc quelle que soit la structure. En effet :

Supposons que	$[A \to (B \to A)] = \text{Fax}$	(1)
Alors (règle 3)	$A = \text{Vri}$	(2)
et (idem)	$(B \to A) = \text{Fax}$	(3)
(3) entraîne à son tour (règle 3)	$A = \text{Fax}$	(4)

(4) contredit (2) : notre hypothèse doit être rejetée, et l'on a toujours :

$$[A \to (B \to A)] = \text{Vri}.$$

Par abus de langage, on peut dire : Le schéma est toujours valide.

Le lecteur montrerait aisément que, par exemple, les schémas

— $(\sim A \to \sim B) \to (B \to A)$
— $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$

sont valides indépendamment de toute particularité de la structure. Ces énoncés sont purement logiques. Ajoutés au schéma ci-dessus, ils suffisent du reste à définir un système logique important : le calcul des propositions (Cf. Appendice). Il existe évidemment une infinité d'autres formules qui sont purement logiques, ne serait-ce que celles qu'on peut inférer des trois premières par les règles de déduction, puisqu'elles conservent la validité.

L'introduction des quantificateurs n'exclut nullement la pureté logique pour certains énoncés, bien qu'apparemment « il existe » ou « pour tout » dépendent étroitement, quant à leur validité, de l'univers choisi. Donnons encore un exemple très simple. Soit l'expression correcte :

$$\sim (Ex)P(x) \rightarrow [(Ex) \sim P(x)]$$

qui lie existence et négation pour le prédicat P.

Supposons que son évaluation donne la marque Fax. Alors (règle 3), l'antécédent est vrai et le conséquent faux. Soit :

1re partie de l'hypothèse :
$$\sim (Ex)P(x) = \text{Vri} \quad (1)$$
qui donne (règle 2) :
$$(Ex)P(x) = \text{Fax} \quad (2)$$
qui donne (règle 4), pour toute constante a :
$$P(a) = \text{Fax} \quad (3)$$

2e partie de l'hypothèse :
$$(Ex) \sim P(x) = \text{Fax} \quad (4)$$
qui donne (règle 4), pour toute constante a :
$$\sim P(a) = \text{Fax} \quad (5)$$
qui donne (règle 2) :
$$P(a) = \text{Vri} \quad (6)$$

Le résultat (6) contredit (3) : notre hypothèse doit être rejetée, et l'expression dont nous sommes partis ne peut en aucun cas valoir Fax. Elle est donc valide pour toute structure : elle est purement logique.

Si on retient cette définition sémantique des axiomes logiques, on voit donc qu'ils ne disent *rien* sur les structures où le système formel peut s'interpréter.

Tel est le résultat expérimental quant à la prétendue « transhistoricité » de la logique. Nous l'avons déjà dit : il n'y a nulle contradiction entre la *pratique* logique inhérente à toute démonstration, et la construction de *systèmes* logiques particuliers. Ou plutôt cette contradiction n'est que la dialectique vivante de la démonstration (sémantique) et de l'expérimentation (syntaxique).

Pour établir la « transhistoricité » de la logique, on argue souvent d'un apparent cercle vicieux : on ne pourrait tenir *sur* les principes logiques aucun discours rationnel (sinon le constat de leur « évidence »), puisque la rationalité se définit précisément par la conformité du discours à ces principes. La logique serait toujours déjà-là, et par conséquent condition, et non résultat, de l'histoire de la Raison.

Nous tentons de dire qu'en réalité la logique est bien elle-même une construction historique, doublement articulée en principes actifs des démonstrations concrètes, et figures explicites d'un montage formel. Le « cercle » se résoud en l'écart de la pratique démonstrative et de l'inscription expérimentale (ou « formelle »), écart qui est le *moteur* de l'histoire de cette science. Ce mode d'existence historique ne différencie en rien la logique des mathématiques.

Finalement, la « transhistoricité » de la logique se réduit à cette propriété expérimentale qu'*un système purement logique* (*dont les axiomes sont tous logiques*) *ne contient aucun marquage de ses modèles*. Ou plus exactement : toute structure étant modèle pour ce système, le concept de modèle n'est pas *logiquement* discernable de celui de structure.

Seuls les axiomes mathématiques lèvent l'indistinction sémantique, et opèrent l'inscription effective d'un *écart* structural, où se légitime le concept de modèle. De là qu'un logicien comme Church préfère nommer *postulats* les formules initiales non purement logiques.

Cependant, le concept du logique est précisément construit selon le couple qu'il forme avec celui du mathématique : il ne le surplombe pas. L'opposition du mathématique et du logique redouble syntaxiquement la distinction sémantique du modèle et de la structure. Dès lors qu'au regard d'un système formel donné, la différence de deux structures se marque à ce que l'une est modèle, et l'autre non, on peut classer dans le système les axiomes en purement logiques et mathématiques : les premiers marquent l'unité de ce dont les seconds marquent la différence.

Encore l'instrument de cette distinction conceptuelle, soit le concept de structure, et donc la théorie des ensembles, est-il, quant à lui, mathématique, en ceci que cette théorie, supposée formalisée, n'admet évidemment pas n'importe quelle structure pour modèle. Nous reviendrons sur l'effet historique de cet enchevêtrement.

Pour conclure, donnons un exemple élémentaire d'énoncé proprement mathématique.

Soit la formule :

$$(Ex)\,(Ey) \sim [(P(x) \rightarrow \sim P(y)) \rightarrow (\sim (\sim P(y) \rightarrow P(x)))]$$

Une telle formule ne saurait être valide pour une structure *dont l'univers ne comporte qu'un seul élément*. Supposons en effet que, pour une structure de ce type, on ait :

$$(Ex)\,(Ey) \sim [(P(x) \rightarrow \sim P(y)) \rightarrow (\sim (\sim P(y) \rightarrow P(x)))] = \text{Vri} \quad (1)$$

Alors (règle 4), il existe une constante a telle que :

$$(Ey) \sim [(P(a) \rightarrow \sim P(y)) \rightarrow (\sim (\sim P(y) \rightarrow P(a)))] = \text{Vri} \quad (2)$$

Donc (derechef règle 4), il existe une constante b telle que :

$$\sim [(P(a) \rightarrow \sim P(b)) \rightarrow (\sim (\sim P(b) \rightarrow P(a)))] = \text{Vri} \quad (3)$$

Or ceci est impossible. En effet, aux deux constantes a et b correspond, par la fonction sémantique, *l'unique* élément u de l'univers. Dès lors, l'évaluation de P(a) est exactement la même que celle de P(b) : si [pV] est le sous-ensemble de l'univers correspondant au prédicat P, l'évaluation revient à se demander si oui ou non l'élément u appartient à [pV] (Règle 1 de l'évaluation des formules closes).

Dans la formule (3), nous pouvons donc remplacer P(b) par P(a) sans modifier l'évaluation de l'ensemble. La formule obtenue est :

$$\sim [(P(a) \rightarrow \sim P(a)) \rightarrow (\sim (\sim P(a) \rightarrow P(a)))]$$

Or cette formule n'est *jamais* valide. On le voit aisément en la « reconstruisant ». Plaçons nous par exemple dans le cas où P(a) = Vri.

Règle 2 :	$\sim P(a) = \text{Fax}$
Règle 3 :	$(\sim P(a) \rightarrow P(a)) = \text{Vri}$
Règle 2 :	$\sim (\sim P(a) \rightarrow P(a)) = \text{Fax}$

Appelons ce résultat (1). On a par ailleurs, toujours si P(a) = Vri.

Règle 2 :	$\sim P(a) = \text{Fax}$
Règle 3 :	$(P(a) \rightarrow \sim P(a)) = \text{Fax}$

Appelons ce résultat (2). De (1) et de (2) on tire, par application de la règle 3 :

$$[P(a) \rightarrow \sim P(a)) \rightarrow (\sim (\sim P(a) \rightarrow P(a))] = \text{Vri}$$

Et finalement, par la règle 2 :

$$\sim [(P(a) \rightarrow \sim P(a)) \rightarrow (\sim (\sim P(a) \rightarrow P(a))] = \text{Fax}$$

Nous laissons au lecteur le soin d'établir, exactement par la même méthode, que si P(a) = Fax, on aboutit au même résultat. C'est dire que l'hypothèse initiale, concernant la validité de la formule :

$$(Ex)\,(Ey) \sim [(P(x) \rightarrow \sim P(y)) \rightarrow (\sim (\sim P(y) \rightarrow P(x)))]$$

doit être rejetée, si l'univers d'interprétation ne comporte qu'un élément : dans un tel univers, la formule n'est jamais valide. Elle prescrit ainsi un *type de multiplicité* pour la structure : qu'elle possède au moins deux éléments. C'est donc une formule mathématique, dont le marquage axiomatique produirait la théorie de la structure d'ensemble à deux *éléments* au moins, sans exiger d'ailleurs rien d'autre d'une structure pour qu'elle puisse être modèle du système.

Nous avons considéré l'efficace séparatrice d'un axiome, qui dégage parmi les structures un type de modèle. On peut poser le problème inverse : soit à trouver la signature syntaxique — l'axiome adéquat — d'un type de structure, supposé donné, c'est-à-dire une théorie formelle dont cette structure est modèle. Ce problème est précisément celui de la *formalisation* mathématique, la « donation » des modèles étant ici l'état historique des structures, la production mathématique réelle.

Reprenons l'exemple ci-dessus, mais inversé : cherchons un axiome tel qu'il ne soit valide *que* pour les structures dont l'univers ne comporte qu'un seul *élément*. Il est clair que pour une structure de ce type, l'interprétation des quantificateurs est très particulière : le (Ex) se confond avec le (Ux), puisque l'existence d'un *élément* de l'univers appartenant à un sous-ensemble donné entraîne que tous les éléments (il n'y en a qu'un) lui appartiennent. D'où l'idée de prendre comme axiomes de la mathématique de l'Un *toutes* les formules du type :

$$(Ex)P(x) \rightarrow (Ux)\ P(x)$$

ou P est une des constantes prédicatives admises dans la syntaxe. Il y aura donc autant d'axiomes de l'Un qu'il y a de telles constantes.

Supposons qu'une structure soit modèle de notre théorie : tous les axiomes en question sont valides. Nous distinguerons deux cas :

1) (Ux)P(x) = Vri (dans ce cas, d'après la règle 3, l'axiome est en effet valide). Ceci veut dire que pour *toute* constante a, P(a) = Vri. Autrement dit (règle 1), *tous* les éléments de l'univers qui correspondent à des constantes individuelles appartiennent au sous-ensemble [pV] qui représente P. On dira que P est *absolu pour la structure*.

2) (Ux)P(x) = Fax. Dans ce cas (règle 3), l'axiome n'est valide que si l'antécédent de l'implication, soit (Ex)P(x), est également évalué par Fax. Ce qui entraîne (règle 4) qu'il n'existe *aucune* constante a telle que P(a) = Vri. C'est dire qu'*aucun* élément u de l'univers correspondant à une constante n'appartient à [pV]. On dira que le prédicat P est *vide pour la structure*.

La liste de nos axiomes épuisant tous les prédicats du système, nous obtenons le résultat suivant : une structure n'est modèle de la théorie signée par les axiomes du type

$$(Ex)P(x) \rightarrow (Ux)P(x)$$

que si *tous* les prédicats de la théorie sont ou absolus, ou vides pour la structure.

Il en résulte que l'existence de constantes individuelles différentes dans la syntaxe du système n'a aucune influence sur l'évaluation des formules. Soit en effet deux constantes a et b et un prédicat P. Ou bien P est absolu, et alors P(a) = P(b) = Vri. Ou bien P est vide, et alors P(a) = P(b) = Fax. Sémantiquement, la théorie considérée est équivalente à la même théorie où l'on ne dispose que d'une seule constante.

De la même façon, on peut fort bien ramener la liste des prédicats à deux seulement : le prédicat « absolu » et le prédicat « vide ». Car si P et Q sont absolus, P(a) = Q(a) = Vri pour la constante unique a. Et si P et Q sont vides, P(a) = Q(a) = Fax.

Dès lors, le *modèle fondamental* de notre théorie, modèle qui s'impose à l'évidence pour la théorie réduite, à une seule constante individuelle et à deux constantes prédicatives, l'une absolue, l'autre vide, est le suivant :

— l'univers est un ensemble à un seul élément, qu'on écrira { u }

— les sous-ensembles sont l'ensemble vide et l'ensemble { u } lui-même.

A la constante a, on fait correspondre l'élément u. Au prédicat vide, l'ensemble vide ; au prédicat absolu l'ensemble $\{ u \}$. Qu'on obtienne ainsi un modèle est trivial.

Nous avons donc démontré le théorème (faible !) suivant : une théorie dont les axiomes sont les formules $(Ex)P(x) \rightarrow (Ux)P(x)$ est sémantiquement équivalente à une théorie qui admet pour modèle une structure dont l'univers ne comporte qu'un seul élément. C'était bien, en gros, le résultat souhaité.

Ces exemples suffisent à montrer en quel sens *un modèle est le concept, mathématiquement constructible, du pouvoir différentiant d'un système logico-mathématique.*

La double occurence des mathématiques dans cet énoncé constituera l'appui de mon développement final.

9. *La catégorie de modèle et l'expérimentation mathématique*

La leçon la plus claire de notre détour est que la construction du concept de modèle est étroitement dépendante, dans toutes ses étapes successives, de la théorie (mathématique) des ensembles. De ce point de vue, il est déjà inexact de dire que ce concept rapporte la pensée formelle à son dehors. En vérité, les marques « hors système » ne peuvent déployer un domaine d'interprétation pour celles du système que dans un *enveloppement mathématique*, qui préordonne les unes aux autres. L'état des « forces productives » mathématiques, non mentionné comme tel dans l'interprétation, n'en est pas moins ce qui conditionne sa scientificité, et assure l'unité du plan où syntaxe formelle et domaines « intuitifs » peuvent entrer en rapport. Les instruments de la correspondance font partie d'une théorie mathématique dont on demande de pouvoir faire un usage « naïf ». On présuppose en effet que jouent conceptuellement (mathématiquement) des mots ou des marques comme ensemble, sous-ensemble, fonction, $\in$, réunions, puissance d'un ensemble, ensemble vide etc. La sémantique est ici un rapport *intra-mathématique* entre certains dispositifs expérimentaux raffinés (les systèmes formels) et certains produits mathématiques plus « grossiers », c'est-à-dire acceptés, tenus pour démontrés, sans avoir été soumis à toutes les exigences d'inscription dont le dispositif règle la contrainte vérifiante.

Mais précisément, la mise en correspondance sémantique n'est *rien d'autre* que cette vérification même. Elle permet d'évaluer le type de rigueur scripturale auquel peut prétendre le domaine considéré. Le contrôle (technique) du système formel permet d'inscrire une *preuve de déductibilité* relativement aux démonstrations informelles qui constituent ses divers modèles.

La sémantique est un protocole expérimental. Non pas du tout au sens où les systèmes seraient le « formel » dont les modèles figurent les réalisations concrètes, mais, à l'inverse, au sens où les systèmes formels sont le temps expérimental, l'enchaînement *matériel* de la preuve, après celui, conceptuel, des démonstrations.

On ne perdra pas de vue, en effet, les thèses fondamentales de Lacan relatives à la matérialité du signifiant [11] : à leur lumière, la célèbre définition par Bachelard des instruments scientifiques comme « théories matérialisées » s'applique de plein droit à ces dispositifs scripturaux que sont les syntaxes formalisées : syntaxes qui sont en réalité des *moyens de production mathématiques*, au même titre que le sont, de la physique, tube à vide ou accélérateur de particules.

La nécessité technique, sur laquelle nous avons insisté, d'un contrôle effectif des procédures syntaxiques, le caractère explicite des critères pour l'expression correcte ou la déduction, reflètent la fonction de vérification-rectification dévolue aux systèmes formels : il s'agit d'une matérialité « rigide », manipulable et ouverte. Ajoutons que la parenté, de plus en plus évidente, entre la théorie de ces systèmes et la théorie des automates, ou des machines à calculer, illustre de façon frappante la vocation expérimentale des formalismes. Encore faut-il bien comprendre que la matérialité ne commence pas avec les machines « proprement dites ». Un système formel *est* une machine mathématique, une machine *pour* la production mathématique, et placée dans le procès de cette production.

Il y a cependant un autre aspect, essentiel, de la définition de Bachelard. L'instrument scientifique, moyen d'enchaînement de la preuve, est lui même un *résultat* scientifique. Sans optique théorique, pas de microscope ; sans rupture avec l'idéologie aristotélicienne du « plein naturel », pas de tube à vide etc. Ajoutons : sans arithmétique récursive, pas de système formel ; et sans théorie des ensembles pas de règle d'usage scientifique, de protocole expérimental rigoureux pour ces systèmes, donc pas de système non plus.

Nous avons en effet montré que les opérations sémantiques requièrent un matériel mathématique ensembliste non formalisé, mais on montrerait facilement que l'étude des propriétés syntaxiques elles-mêmes requiert des fragments de la théorie des nombres entiers, et notamment — nous l'avons mentionné au passage — un usage constant du raisonnement par récurrence sur la longueur des écritures. Ce sont là — parmi d'autres — des régions de la science mathématique *incorporées* aux dispositifs matériels où s'éprouve cette science. Ces incorporations attestent que les moyens de production mathématiques sont eux-mêmes mathématiquement produits : racine même de la « double occurence » des mathématiques dans notre définition du concept de modèle. Loin d'indiquer un dehors de la pensée formelle, la théorie des modèles règle une dimension de *l'immanence pratique* des sciences, procès, non seulement de production des connaissances, mais de reproduction des conditions de production.

Dans l'unité de ce procès, la distinction entre syntaxe et sémantique a la fragilité de celle entre *existence* et *usage* d'un dispositif expérimental. Cette distinction n'a de valeur qu'à mentionner l'incorporation, par le dispositif, de régions scientifiques qui ne sont pas directement en cause dans la preuve où ce dispositif figure : ainsi de qui attend, des perfectionnements optiques d'un microscope, une avancée décisive dans la connaissance des virus.

De la même façon, la distinction pertinente entre sémantique et syntaxe renvoie au choix de la partie des mathématiques admise à figurer *dans le métalangage*.

On appelle ici « métalangage » tout ce qui est requis du langage courant (non formalisé), y compris la mathématique « intuitive », pour que les opérations syntaxiques et sémantiques puissent être rationellement expliquées et pratiquées.

De ce point de vue, et pour l'essentiel, il faut dire : la syntaxe est une discipline arithmétique, la sémantique une discipline ensembliste. Entendons : la théorie des dispositifs d'inscription, conçus comme *objets* mathématiques, emprunte l'essentiel de ses concepts à l'arithmétique récursive — ou à l'arithmétique des ordinaux transfinis —. Ces arithmétiques permettent en effet d'ordonner, et de nombrer inductivement, le *montage* expérimental, comme d'en évaluer la force, la complexité etc., par des raisonnements portant sur la structure des inscriptions que le système autorise ou rejette. En revanche, la théorie des *usages* du dispositif, conçus comme opérations expérimentales, cherche à *classer* les régions de la mathématique-matériau, de la mathématique à traiter dans le dispositif : c'est la visée même du concept de structure, lui-même produit dans la théorie la plus générale, la plus enveloppante dont on puisse disposer : la théorie des ensembles (ou, maintenant, celle des catégories [12]).

Cet aspect des choses a été partiellement vu par Kreisel et Krivine dans leurs « Eléments de logique mathématique » (1967), précisément sous-titrés : théorie des modèles. Reprenant la terminologie (idéologique) relative aux « fondements des mathématiques », ils distinguent deux perspectives :

— les « fondements sémantiques ensemblistes », dont « les notions de base sont : les ensembles, la relation d'appartenance (entre ensembles) et les opérations « logiques » de réunion, complémentation et projection (d'ensembles) »

— les « fondements combinatoires » dont « les notions de base dont celles de *mots* (suite finie de symboles) d'un alphabet fini, de *fonction combinatoire* (dont les arguments et les valeurs sont des mots), et de *preuve combinatoire* d'identités (entre deux fonctions combinatoires) ».

Dans un cas comme dans l'autre, les auteurs soulignent la référence mathématique dominante où s'origine chaque perspective : la sémantique est réaliste, elle « (accepte) la terminologie ensembliste dans son sens propre et ne la considère pas comme une façon de parler » ; la combinatoire repose sur des notions (arithmétiques) « assez familières, parce qu'elles interviennent implicitement dans toutes les mathématiques élémentaires ».

Mais faute d'en finir avec l'idéologie unilatérale des « fondements », Kreisel et Krivine ne saisissent pas la différence comme moment d'un procès expérimental unique, où la combinatoire n'est que le montage expérimental pour une

vérification scripturale dont la sémantique règle les formes pratiques. Ils en sont donc réduits à donner leur *opinion* sur les mérites respectifs de chaque approche, dont la séparation est justement l'impuissance.

Reste que le seul support possible pour penser la différence-unité du modèle et du formel, de la sémantique et de la syntaxe, est par eux clairement désigné : c'est le rapport intra-mathématique entre un « matériel de base » arithmétique et un matériel de base ensembliste.

Dès lors que le concept de modèle articule cette différence, il faut s'attendre à ce que les résultats théoriques le concernant *adhèrent* à la pratique mathématique, et n'autorisent aucune exportation. Non seulement parce que ces résultats concernent des expérimentations mathématiques, mais parce que la règle d'usage du mot « modèle », les principes qu'engagent les démonstrations où il figure, renvoient aux systèmes conceptuels des mathématiques.

C'est en effet le cas : le théorème fondamental de complétude, pour un système du type de celui qui m'a servi d'exemple, pose qu'un tel système est cohérent si, et seulement si, il possède un modèle. (Cf l'appendice). Ce théorème lie un concept syntaxique (la cohérence) et un concept sémantique (modèle). Il se tient — dans le projet de l'épistémologie des modèles — au point crucial de la *jointure* du « formel » et du « concret ». Mais sa démonstration exige qu'on puisse bien-ordonner *toutes* les formules correctes du système : ce qui, dans le cas général, revient à utiliser un énoncé très fort de la théorie des ensembles : l'axiome de choix. Le théorème de complétude n'a donc de sens que dans l'espace de travail des mathématiques. En fait, c'est un théorème de la théorie des ensembles, et même d'*une* théorie des ensembles, puisque nous savons, depuis les travaux de Cohen, que l'axiome de choix est indépendant des autres axiomes, en sorte qu'on peut construire une théorie des ensembles où l'axiome de choix est explicitement nié. C'est dire que toute exportation hors du domaine propre à l'expérimentation mathématique est illégitime, si du moins on prétend garder la rigueur des propriétés du concept, et ne pas les dégrader en variantes d'une notion idéologique.

Ainsi avons-nous établi que la *catégorie* philosophique de modèle, telle qu'elle fonctionne dans le discours du positivisme logique, est doublement inadéquate.

Elle l'est d'abord en ce qu'elle prétend penser la science en général selon une différence (syntaxe/sémantique) qui n'est elle-même qu'une *rechute* idéologique d'une différence régionale intra-mathématique (entre arithmétique récursive et théorie des ensembles).

Elle l'est surtout en ce qu'elle prétend revêtir l'idéologie empiriste de *mots* qui désignent les moments d'un processus mathématique. Dans son discours en effet, « langages formels » et « faits empiriques » sont confrontés comme deux régions hétérogènes. Que les seconds soient éventuellement « modèles » des premiers permet de « penser » la confrontation comme rapport. Mais précisément, en mathématiques, le dispositif formel est ce par quoi, advenant comme modèle, une région mathématique se voit *transformée*, éprouvée, expérimentée, quant au statut de sa rigueur, ou de sa généralité. Il est inconçevable qu'une pareille transformation soit celle d'autre chose que de ce qui, étant toujours *déjà* mathématique, est sémantiquement assignable comme susceptible de s'articuler au dispositif syntaxique. C'est parce qu'il est lui-même théorie matérialisée, résultat mathématique, que le dispositif formel peut entrer dans le procès de production des connaissances mathématiques ; et dans ce procès, le concept de modèle ne désigne pas un dehors à formaliser, mais un matériau mathématique à éprouver.

Le discours de Carnap, comme celui de Lévi-Strauss, est une variante de l'épistémologie bourgeoise. Dans la combinaison, qu'il exhibe, de

notions empiristes relatives au « problème de la connaissance », et de concepts scientifiques empruntés à la logique mathématique, combinaison qui définit la *catégorie* philosophique de modèle, l'idéologie est dominante, et la science asservie.

10. La catégorie de modèle et le temps historique de la production mathématique

Est-ce à dire qu'aucun usage épistémologique du mot « modèle » ne soit reçevable ? Assurément non, si l'on y pointe justement *l'historicité* des mathématiques, sous la forme de leur dialectique expérimentale. La catégorie de modèle sert alors à penser le temps, très particulier, de cette histoire.

Précisons bien la portée de ce développement : je ne prétends évidemment pas tirer du concept de modèle une doctrine de l'histoire des mathématiques. Bien au contraire, cette doctrine ne peut s'approprier la catégorie de modèle que pour autant qu'elle a *déjà* commandé implicitement, et la polémique contre les usages notionnels (idéologiques) du terme, et la lecture du concept (scientifique).

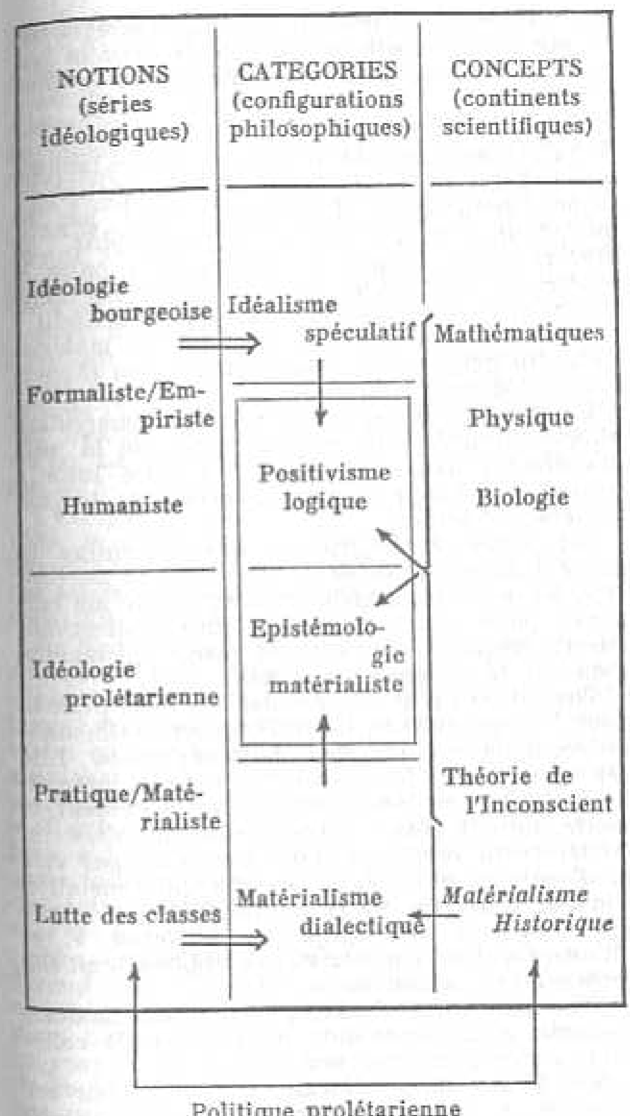
Je dis seulement ceci : si l'on assume, dans le cadre du matérialisme dialectique, une doctrine de la *production historique* des connaissances scientifiques, on est en droit de reconnaître, dans le concept de modèle, un *indice épistémologique*, dès lors qu'on y déchiffre la dialectique expérimentale de la production mathématique, et qu'on arrache ainsi cette dernière à son statut idéaliste de connaissance

« pure », « formelle », « a priori », etc. Autrement dit, éclairé par le matérialisme dialectique, l'examen rigoureux du concept scientifique de modèle permet de tracer une ligne de démarcation entre deux *usages* catégoriels (philosophiques) de ce concept : l'un, positiviste, qui l'asservit à la notion (idéologique) de la science comme représentation du réel ; l'autre, matérialiste, qui, l'accordant à la théorie de l'histoire des sciences, région spécifique du matérialisme historique, rend indirectement plus facile son intégration efficace à l'idéologie prolétarienne.

Finalement, les usages du mot « modèle » se trouveraient distribués dans un tableau du type de celui de la page 61, au centre duquel on trouve la lutte épistémologique qui concerne en fait l'ensemble du « cours de philosophie » dont notre développement n'est qu'une partie.

S'agissant des acceptions du mot « modèle », on devra en énumérer quatre :

1) *Notion* : la connaissance est représentation par modèles du réel-empirique-donné.
2) *Concept* (mathématique) : théorie des modèles.
3) *Catégorie, 1* (positiviste) : Le réel empirique fournit la sémantique (les modèles) de la syntaxe que proposent les sciences « pures ». L'expérimentation est une évaluation-réalisation.
4) *Catégorie 2* (matérialiste-dialectique) : Toutes les sciences sont expérimentales. La mathématique est un processus de production des connaissances, doublement articulé. « Modèle » désigne l'articulation conceptuelle, *pour autant* qu'on la rapporte à un dispositif expérimental particulier : un système formel. « Système formel » désigne ainsi l'articulation expérimentale, ou inscription. Il y a enveloppement de l'articulation-2 par l'ar-



ticulation-1 : l'intelligence des montages formels mathématiques se déploie dans la pratique conceptuelle des mathématiques elles-mêmes.

On remarquera par ailleurs, à lire le tableau, que l'effet attendu de l'intervention épistémologique (matérialiste dialectique) n'est pas de mettre fin à ce qui définit la philosophie : la pratique d'un rapport « impossible » entre la science et l'idéologie. Ce qui caractérise cette intervention est en effet son rapport réfléchi à *une* science tout à fait particulière : le matérialisme historique ; et, conjointement, son rapport à l'idéologie prolétarienne.

En dernière instance, la ligne de démarcation philosophique a pour référent pratique la lutte des classes dans l'idéologie ; et cette lutte a pour *enjeu* l'appropriation-de-classe de la pratique scientifique.

Cet arrière-fond général, qui détermine la conception marxiste de la philosophie, ne peut être, ici, que violemment schématisé. Je me bornerai pour l'instant à quelques indications, encore risquées, sur le juste usage épistémologique de la catégorie de modèle.

Tout d'abord la théorie des modèles permet, nous l'avons montré, de différencier mathématiquement la logique des mathématiques. Elle règle un usage des dispositifs formels permettant d'y repérer les formules qui spécifient la mathématicité d'une structure, savoir celles qui contraignent certaines structures à *ne pas être* modèles pour le système. Or cette différenciation s'inscrit dans un vieux débat épistémologique (qu'est-ce qui est logique, « universel », et qu'est-ce qui est mathématique, régional), qu'elle diversifie et rationalise.

D'un autre côté, l'usage principal des modèles s'attache à la production de preuves de *cohérence relative* et *d'indépendance*.

Soit T une théorie formalisée définie par ses axiomes, et soit A une expression bien formée

du langage formel adopté. Désignons par (T + A) la théorie obtenue par l'adjonction de A aux axiomes de T. On dira que la formule A est *cohérente avec* T si, T étant supposée cohérente, (T + A) l'est aussi. Comment établir de semblables résultats, dont l'apparence est purement syntaxique ?

Le théorème fondamental de complétude nous garantit qu'une théorie est cohérente si et seulement si elle admet un modèle. L'hypothèse concernant la cohérence de T revient à considérer cette théorie comme l'inscription expérimentale d'une structure. En « travaillant » cette structure — en développant la cohérence supposée de T — on cherchera à produire un modèle de (T + A), c'est-à-dire une structure qui soit modèle de T et où, de surcroît, A soit valide. La cohérence de (T + A) est alors garantie.

C'est par ce biais que Gödel a démontré, en 1939, la cohérence de l'axiome de choix et de l'hypothèse du continu relativement à la théorie des ensembles sans axiome de choix ni hypothèse du continu.

Or l'intérêt de cette démonstration, son *poids épistémologique*, tenait à ce que l'axiome de choix était discuté, voire rejeté, par de nombreux mathématiciens et logiciens, qui admettaient en revanche le reste de la théorie. Cette suspicion relevait d'une certaine vision des mathématiques, qui privilégiait les opérations « effectives » et la fonction fondatrice des nombres entiers. Elle dépendait donc d'une catégorie (philosophique) : la catégorie séparant ce qui est mathématique, ou rationnel, et ce qui ne l'est pas.

L'expérimentation gödelienne, où le dispositif formel, soit l'axiomatisation de la théorie des ensembles, joue un rôle décisif, *intervient* donc dans une conjoncture épistémologique, par les moyens de la science. Elle prouve que l'axiome de choix n'est, du point de vue de la cohérence, pas plus « risqué » que le reste de la théorie des ensembles. Elle dissipe le soupçon. Elle garantit l'usage. Ce faisant, elle transforme, non pas la théorie, mais son *statut* dans le procès historique de production des connaissances : la question, un moment obsédante, de savoir si tel ou tel énoncé est indépendant, pour sa démonstration, de l'axiome « douteux », perd l'essentiel de son intérêt.

Sans doute cette intervention, par la minutie même des montages expérimentaux qu'elle exige, vient-elle toujours après-coup. La *pratique* avait déjà largement tranché en faveur de l'axiome de choix. Mais précisément, l'intervention modifie ce « choix » par l'épreuve à quoi elle le soumet. Qu'il en sorte confirmé, et se trouve établi qu'il était moins un « choix » qu'une nécessité intérieure au processus mathématique. Ainsi en physique le *retard de la preuve* (expérimentale) opère-t-il rétroactivement sur *l'anticipation mathématique*.

Rappelons maintenant un exemple classique. Appelons GE la théorie, supposée formalisée, de la géométrie euclidienne dans l'espace. On la suppose cohérente : elle admet donc un modèle, d'après le théorème de complétude. On considérera, pour simplifier, que ce modèle est l'espace euclidien, tel que nous en avons « l'intuition » scolaire (mais ce sont là des noms, pour des structures complexes exprimables dans le langage de la théorie des ensembles).

Soit maintenant la théorie obtenue en remplaçant, dans la géométrie euclidienne *du plan* (sous-théorie de GE) le célèbre postulat d'Euclide : « par un point extérieur à une droite, il passe une parallèle à cette droite et une seule », par l'axiome (qui implique la négation du précédent) : « par un point extérieur à une droite, il ne passe *aucune* parallèle à cette droite. » On appellera GRP (géométrie plane de Riemann) cette nouvelle théorie.

On va *interpréter GRP dans une structure constructible à partir du modèle de GE.* Soit, dans ce modèle, dont l'univers est un espace

euclidien, une *sphère* (euclidienne). Elle sera l'univers de notre sous-structure.

— Aux constantes de GRP qui marquent les points (du plan), on fait correspondre les points de la sphère. Mais on convient *d'identifier deux points diamétralement opposés* : les « éléments » de notre structure sont ainsi des *paires* de points.
— Aux constantes de GRP qui marquent les droites (du plan), on fait correspondre les grands cercles de la sphère (cercles dont le plan passe par le centre de la sphère).
— La relation entre droites : « avoir un point commun » s'interprète sans changement.

On vérifie aisément que cette structure est modèle pour les axiomes « normaux » de GRP : par exemple, l'axiome (commun à GRP et GE) : « par deux points il passe une droite et une seule » s'interprète : « par deux points différents, c'est-à-dire non-diamétralement opposés, de la sphère, il passe un grand cercle et un seul », ce qui est vrai dans tout modèle *de GE* (c'est un théorème de GE, ou plutôt son interprétation).

On constate en outre que l'axiome qui caractérise GRP (l'inexistence des parallèles) est valide pour cette structure, puisque deux grands cercles d'une sphère se coupent *toujours*.

Si donc GE admet notre modèle, on y peut construire un modèle pour GRP. Il résulte de ce dispositif que la cohérence de GRP est garantie par celle de GE.

Il en résulte aussi que le fameux postulat d'Euclide est indépendant des autres axiomes de GE. Si en effet on pouvait le déduire de ces axiomes, tout modèle de (GE - A) — inscription formelle de la géométrie euclidienne moins le postulat — serait *aussi* un modèle de GE, puisque la déduction conserve la validité. Mais notre modèle de GRP *est* un modèle de (GE - A), car les axiomes autres que le postulat d'Euclide sont conservés dans GRP, et par conséquent tous validides pour la structure-sphère. Or cette structure n'est certainement pas un modèle de GE, puisque *la négation* du postulat y est valide. Il en résulte qu'on ne peut espérer déduire ce postulat (non valide pour une structure) des autres axiomes (valides pour cette structure).

C'est ainsi qu'en produisant un modèle euclidien de la géométrie de Riemann, Poincaré *étayait* rétrospectivement l'avancée des géométries « nouvelles » sur des concepts, ceux de la géométrie classique, dont une pratique séculaire paraissait exclure tout soupçon d'incohérence.

Et c'est également ainsi que ce modèle, par la preuve d'indépendance qu'il administrait, transformait rétrospectivement le statut des vains efforts déployés depuis des siècles pour démontrer le postulat d'Euclide : échec nécessaire, et non de circonstance. Impossibilité, et non impuissance. Du même coup, le modèle met fin à la pratique qu'il juge.

Ceci nous conduit à la véritable portée de la catégorie de modèle.

Supposant assumée une configuration mathématique inscrite dans l'histoire de cette science, la faire apparaître comme modèle d'un système formel, c'est-à-dire la traiter par ce mécanisme, produit l'effet principal d'en *placer* la particularité, de l'exporter, hors des illusions immédiates de sa production singulière, dans un espace mathématique plus général, celui *des* modèles du système : le dispositif expérimental est un carrefour de pratiques.

Ces opérations de placement peuvent être historiquement décisives : au début du XIX^e siècle, en fait de groupe, on ne connaît guère que le calcul sur les substitutions ; le dégagement progressif des axiomes de la structure de groupe résulte de manipulations scripturales qui font apparaître les « groupes de substitutions » comme des modèles parmi d'autres. On sait quel élan cette généralisation devait donner à l'algèbre tout au long du siècle.

Cependant, comme un mathématicien me le faisait remarquer, le véritable problème posé par cet élan est que la généralisation dont il résulte n'est qu'apparente : en effet on sait bien que *tout* groupe est isomorphe à un groupe de substitutions. C'est que le formalisme est l'épreuve rétrospective du concept. Il commande le temps de la preuve, non celui de l'enchevêtrement démonstratif. Le placement qu'il opère sous la juridiction du concept de modèle ***réajuste les concepts traités à leurs propres pouvoirs implicites.*** Identique et déplacé, le concept de groupe de substitutions a traversé l'expérimentation dont le montage spécifique était la théorie formelle des groupes quelconques. Ainsi s'est trouvée *vérifiée* son importance, déjà marquée dans sa prédominance pratique au début du XIX^e siècle, et *rectifié* le type de généralité auquel il pouvait prétendre.

Cet usage du mot « modèle » délivre à mon sens une catégorie épistémologique féconde. Dans le procès historique d'une science, je propose d'appeler *modèle* le statut qu'assigne rétrospectivement à ses premières instances pratiques leur transformation expérimentale par un dispositif formel défini.

Inversement, l'historicité conceptuelle, c'est-à-dire la valeur « productrice » du formalisme, lui vient et de sa dépendance théorique en tant qu'instrument, et de ce qu'il a des modèles : de ce qu'il s'incorpore doublement aux conditions de production, et de reproduction, des connaissances. Telle est la *garantie pratique* des montages formels.

La catégorie de modèle désignera ainsi la causalité rétroactive du formalisme sur sa propre histoire scientifique, histoire conjointe d'un objet et d'un usage. Et l'historicité du formalisme sera l'intelligibilité anticipante de ce qu'il constitue rétrospectivement comme son modèle.

Le problème n'est pas, ne peut pas être, celui des rapports représentatifs du modèle et du concret, ou du formel et des modèles. Le problème est celui de *l'histoire de la formalisation*. « Modèle » désigne le réseau croisé des rétroactions et des anticipations qui tissent cette histoire : soit ce qu'on a désigné[13], quant à l'anticipation, comme coupure, quant à la rétroaction, comme refonte.

Appendice

1 : Le but.

Mon intention est de donner ici quelques indications sur le théorème de complétude, notamment en ce qui concerne les théories purement logiques construites dans le langage de mon exemple fondamental. On se reportera donc de nouveau au dépliant.

Ces remarques, outre qu'elles exerceront le lecteur au « va-et-vient » caractéristique des méthodes sémantiques et au raisonnement syntaxique type (récurrence sur la longueur des écritures), ont le mérite de légitimer l'exemple en question. Une forme du théorème est en effet la suivante : tout théorème ou axiome du système est valide pour toute structure ; inversement toute formule valide pour toute structure est un axiome ou un théorème du système.

Ce système permet donc de déduire toutes les formules purement logiques exprimables au moyen de son stock de marques, et elles seules. N'importe quelle structure est modèle pour ce système. Cette équivalence sémantico-syntaxique nous assure que notre dispositif est une logique formelle complète (à ce niveau, qui ne comporte que des prédicats à un seul argument).

Il s'agit moins de démontrer complètement le théorème, ou de mentionner les méthodes les plus efficaces, que de parcourir certaines procédures usuelles, selon un rythme délibérément ralenti, ou accéléré. En principe, un peu d'attention doit suffire, rien n'est requis. Au passage, des « fins de preuve » seront laissées au lecteur à titre d'exercice.

2 : Description du dispositif SP

Nous appellerons ce système SP (système prédicatif). Le stock de marques et les règles de formation sont celles de notre exemple (cf. le dépliant). Les schémas d'axiomes sont les suivants (sauf précision contraire, A et B sont des expressions bien formées quelconques)

Ax 1 :

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

Ax 2 :

$$[A \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow D)]$$

Ax 3 :

$$A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$$

Ax 4 :

$$(A \rightarrow \sim A) \rightarrow \sim A$$

Ax 5 :

$$\sim \sim A \rightarrow A$$

Ax 6 :

$(Ux)A \rightarrow A\,(f/x)$, où x est libre dans A, et où f est soit une constante, soit une variable non liée dans une partie de A où x est libre.

Ax 7 :

$(Ux)\ (A \rightarrow B) \rightarrow [A \rightarrow (Ux)B]$, si x n'est pas libre dans A.

Nous ne posons pas la question de savoir si ces axiomes sont indépendants. En fait, ils ne le sont pas : les axiomes 3 et 4 se déduisent des axiomes 1, 2 et 5. Mais notre choix simplifie les démonstrations.

On pourrait s'étonner de ce qu'aucun des axiomes ne mentionne le quantificateur existentiel. C'est que ce quantificateur est définissable à partir de l'universel et de la négation. L'assertion « il existe x ayant la propriété P » équivaut (sémantiquement) à l'assertion : « il est faux que tout x soit marquable par non-P. » Nous considérerons donc que $(Ex)A$ n'est qu'une écriture abrégée pour $\sim (Ux) \sim A$. Dans la suite, on considérera que toute expression quantifiée comporte exclusivement des quantificateurs universels.

Les règles de déduction de SP sont celles que nous avons déjà mentionnées : règle de séparation et règle de généralisation. Le système est ainsi complètement décrit (monté).

3 : Tout théorème de SP est purement logique

Notre intention est d'établir que toute formule déductible dans SP est valide pour toute structure. Il suffit pour cela de vérifier que les axiomes le sont, et que les règles de déduction conservent la validité. Nous conviendrons de noter « L-valide » (logiquement valide) la propriété d'être valide pour toute structure.

En ce qui concerne les axiomes, nous laissons partiellement le travail aux lecteurs. J'ai déjà montré dans le texte que le schéma $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ était toujours valide. La méthode est la même pour les axiomes 2, 3, 4 et 5 (emploi répété des règles sémantiques 2 et 3). Pour l'axiome 6, on verra qu'il est certainement L-valide d'après la règle 5.

Traitons le cas de l'axiome 7. S'il n'est pas L-valide, il existe une structure telle qu'une instance close de cet axiome y prenne la valeur Fax. A ne contenant pas la variable libre x, ceci s'écrit :

$$(Ux)\ (A' \rightarrow B') \rightarrow [A' \rightarrow (Ux)B'] = \text{Fax} \qquad (1)$$

où A′ est une instance close de A et B′ une formule dont la seule variable libre est x.

La règle 3 exige, pour que (1) soit vérifiée :

$$(Ux)\ (A' \rightarrow B') = \text{Vri}$$

soit pour toute constante a (règle 5) :

$$(A' \to B'(a/x)) = \text{Vri} \qquad (2)$$

La règle 3 exige que simultanément :

$$(A' \to (Ux)B') = \text{Fax}$$

soit (règle 3) $A' = \text{Vri}$ (3)

et (idem) $(Ux)B' = \text{Fax}$

ce qui veut dire (règle 5) que pour une constante a au moins :

$$B'(a/x) = \text{Fax} \qquad (4)$$

Si les égalités (3) et (4) sont satisfaites, (2) ne peut l'être. L'hypothèse doit être rejetée, et notre axiome est L-valide.

En ce qui concerne les règles de déduction de SP, nous avons déjà montré (page 43) qu'elles conservaient la validité.

Nous sommes donc assurés que, partant d'axiomes valides pour toute structure, nous déduirons exclusivement des formules valides pour toute structure. Notre système SP ne comporte aucune déduction mathématique : il n'expérimente pas les différences structurales. Il est une machine logique.

Reste à établir que cette machine épuise le domaine logique exprimable par ses ressources d'inscription. Autrement dit, que toute formule L-valide est certainement déductible dans SP. Ce point est beaucoup plus délicat, et exige quelques détours.

4 : Théorème de la déduction

Dans la pratique mathématique informelle, on a souvent besoin, pour établir un théorème, d'une condition *supplémentaire* par rapport à la généralité structurale dans laquelle on travaille. C'est le fameux usage scolaire des « hypothèses » : si je suppose l'énoncé A, alors, je peux démontrer l'énoncé B.

Apparemment, ceci se traduit dans notre langage logique par la formule : A → B. Apparemment seulement. Dans un système formel en effet, la supposition n'a aucune place. (A → B) signifie à la rigueur : si j'ai *déduit* A et (A → B), je peux déduire B. C'est le sens même de la règle de séparation. Mais si, dans SP, je ne peux pas déduire A, la déduction de (A → B) ne dit rien quant à la déductibilité de B. Comment dès lors traduire l'idée que l'hypothèse A permet de conclure quelque chose pour B ?

Nous allons montrer que notre système est apte à inscrire ce problème.

Au fond supposer que A est vraie revient à l'ajouter aux axiomes. Soit (SP + A) le système obtenu par adjonction de « l'hypothèse » A aux axiomes de SP. Pour simplifier, nous ne considérerons que des formules A closes. Alors, nous avons le résultat suivant, qui commande en fait l'efficace déductive du dispositif :

Théorème de la déduction : Si la formule B est déductible dans le système (SP + A), la formule (A → B) est déductible dans le système SP.

Considérons une déduction quelconque dans le système (SP + A). C'est une suite finie de formules, que nous numérotons (dans l'ordre déductif) de la façon suivante : B1, B2, B3,... Bn. Nous allons raisonner par récurrence pour établir que (A → Bn) est un théorème de SP (sans l'axiome A).

Examinons d'abord le cas de B1, première formule de la déduction dans (SP + A). Toute déduction commence par un axiome : B1 est donc, ou un axiome de SP, ou l'axiome supplémentaire A.

— Si B1 est un axiome de SP, on a la déduction suivante *dans SP* :

B1	(axiome par hypothèse)
B1 → (A → B1)	(axiome 1)
A → B1	(séparation)

— si B1 est l'axiome supplémentaire A, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la suite suivante est une déduction de SP :

$$\begin{array}{l} A \to [(C \to A) \to A] \\ [A \to [(C \to A) \to A]] \to [[A \to (C \to A)] \to (A \to A)] \quad \text{(Ax. 2)} \\ \qquad [A \to (C \to A)] \to (A \to A) \\ \qquad A \to (C \to A) \\ \qquad\qquad A \to A \\ \qquad\qquad A \to B1 \end{array}$$

Ainsi, (A → B1) est toujours déductible dans SP.

Nous formulons maintenant *l'hypothèse de récurrence* : Supposons que pour toute formule Bi précédant Bn dans une déduction de (SP + A), la formule (A → Bi) est déductible dans SP. Nous allons montrer qu'alors, (A → Bn) est également déductible dans SP.

Dans (SP + A), on peut produire Bn de trois façons :

a) Bn est un axiome de (SP + A), donc un axiome de SP, ou l'axiome A. Dans ce cas, le raisonnement appliqué, ci-dessus à Bi montre que (A → Bn) est déductible dans SP.

b) Bn est produite par la règle de séparation. Dans ce cas, il existe des formules (Bi → Bn) et Bi qui précèdent Bn dans la déduction (dans le système (SP + A)). On a alors la déduction suivante dans SP :

$$\begin{array}{ll} A \to (Bi \to Bn) & \text{, d'après l'hypothèse de récurrence.} \\ [A \to (Bi \to Bn)] \to & [(A \to Bi) \to (A \to Bn)] \quad \text{(axiome 2)} \\ & (A \to Bi) \to (A \to Bn) \quad \text{(séparation)} \\ & (A \to Bi) \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ & (A \to Bn) \quad \text{(séparation)} \end{array}$$

c) Bn est produite par la règle de généralisation. Il existe alors Bi qui précède Bn dans la dé-

duction, avec Bn s'écrivant : (Ux)Bi. On a alors la déduction suivante dans SP :

A → Bi, par l'hypothèse de récurrence
(Ux) (A → Bi) (règle de généralisation)
(Ux) (A → Bi) → [A → (Ux)Bi] (axiome 7).

Il est sûrement applicable, car A étant une formule close, x n'est pas libre dans A).

$$\begin{array}{ll} A \to (Ux)Bi & \text{(séparation)} \\ A \to Bn & \text{(écriture de Bn)} \end{array}$$

Rassemblons nos résultats : étant donnée une déduction dans le système (SP + A), sa première formule, B1, est telle que (A → B1) est un théorème de SP.

Et si les formules qui précèdent Bn ont cette propriété, Bn l'a aussi.

Toute déduction étant finie, un théorème de (SP + A) est toujours au rang n (fini) dans une déduction. L'usage métathéorique, informel, du schéma de raisonnement par récurrence nous autorise à conclure :

Si la formule B est déductible dans le système (SP + A) où A est une formule close, (A → B) est déductible dans SP.

5 : Cohérence relative de certaines extensions de SP

Supposons que la formule close ∼ A *ne soit pas* déductible dans SP. Ajoutons la formule A aux axiomes : nous obtenons ainsi une nouvelle théorie, (SP + A). Nous allons montrer que cette théorie est *cohérente*.

Rappelons qu'une théorie est cohérente s'il existe au moins une formule A qui ne puisse pas être déduite dans la théorie. Si donc (SP + A) est incohérente, on y peut déduire n'importe quelle formule, et en particulier la formule ∼ A.

Or, si $\sim A$ est déductible dans $(SP + A)$, le théorème de la déduction nous garantit que $(A \rightarrow \sim A)$ est déductible dans SP. Mais

$$(A \rightarrow \sim A) \rightarrow \sim A$$

est un axiome de SP (axiome 4). Par séparation, $\sim A$ serait donc déductible dans SP. Comme nous avons justement supposé qu'elle ne l'était pas, l'hypothèse de l'incohérence de $(SP + A)$ doit être rejetée.

Si la négation d'une formule close A de SP n'est pas un théorème de SP, le système $(SP + A)$ est cohérent.

6 : Portée du théorème de complétude

Si nous arrivons à démontrer le théorème de complétude, soit : toute théorie consistante admet un modèle, nous serions assurés que notre système SP est bien une logique déductive complète, autrement dit que toute formule close valide dans toute structure (universalité sémantique) est un théorème du système.

En effet, soit A une formule close L-valide. $\sim \sim A$ l'est aussi (règle sémantique 2). Si A n'est pas déductible dans SP, $\sim \sim A$ non plus. En effet si $\sim \sim A$ est déductible,

$$\begin{array}{ll} \sim \sim A \rightarrow A & \text{(axiome 5)} \\ \sim \sim A & \\ \hline \quad A & \text{(séparation)} \end{array}$$

est une déduction de SP, et A est un théorème, contrairement à l'hypothèse. Mais si $\sim \sim A$ n'est pas déductible dans SP, la théorie

$$(SP + \sim A)$$

est cohérente (théorème du paragraphe précédent). Donc elle admet un modèle si le théorème de complétude est vrai. Dans ce modèle, $\sim A$, axiome de la théorie $(SP + \sim A)$ est évidem-

ment valide (définition du modèle). Comme A est supposée L-valide, elle est en particulier valide pour la structure qu'est ce modèle. Mais deux formules A et $\sim A$ ne peuvent être simultanément valides dans la même structure : notre hypothèse initiale doit être rejetée ; si A est L-valide, elle est certainement un théorème de SP.

Ainsi, sous la condition du théorème de complétude, toute formule purement logique de SP est déductible dans SP.

Remarquons au passage que ce résultat, comme le précédent, et comme le théorème de la déduction, valent pour toute théorie qui comporte les axiomes de SP. Donc, en particulier, pour les théories mathématiques obtenues en ajoutant à SP des axiomes non purement logiques. Soit pour des dispositifs expérimentaux mathématiques, dont la logique sous-jacente est articulée par SP.

7 : Le lemme de Lindenbaum

Une question syntaxique intéressante concernant les pouvoirs expérimentaux d'une théorie formalisée est celle de sa *saturation* : le dispositif permet-il effectivement de classer *toutes* les formules closes en démontrables ou réfutables (une formule est réfutable si sa négation est démontrable) ? Si tel est le cas, on dit que la théorie est *saturée*. Etant donnée la formule close A, ou bien A est un théorème, ou bien non-A est un théorème.

Remarquons tout de suite que, pour un système purement logique comme le nôtre, la *saturation* (syntaxique) entraîne la *complétude* (sémantique). Si en effet une formule A est L-valide et n'est pas un théorème, $\sim A$ est un théorème (saturation). Mais alors, $\sim A$ est L-valide, puisque notre système est purement logique. Comme il est impossible que A et $\sim A$ soient l'une et l'autre L-valide, notre hypothèse initiale est intenable : il faut admettre que toute formule L-valide est un théorème. Le système est donc complet pour les formules purement logiques.

En règle générale, pour une théorie mathématique déterminée, la question de savoir si elle est saturée n'est pas simple. Un résultat fameux dans ce sens est celui de Gödel pour un dispositif formel de l'arithmétique : ce dispositif *n'est pas* saturé. Gödel y construit explicitement une formule close *indécidable* (ni elle ni sa négation ne sont déductibles, si du moins le système est cohérent). Cette formule, cependant, est bien évaluable dans le modèle « normal » du dispositif : les nombres entiers naturels dotés de leurs opérations usuelles. Dans ce modèle, la négation de la formule indécidable est valide. C'est dire que le système formel de l'arithmétique est sémantiquement incomplet pour son modèle normal.

Nous allons cependant établir le résultat général suivant : *Toute théorie cohérente admet une extension saturée* (Lindenbaum).

Une théorie T sera simplement un système qui admet tous les axiomes de SP, plus, éventuellement, d'autres axiomes.

Une extension d'une théorie T est ici une théorie T' telle que tous les théorèmes de T sont aussi des théorèmes de T'. T' est exprimée avec le même langage que T, et a donc les mêmes expressions bien formées. Le lemme de Lindenbaum joue un rôle décisif en théorie des modèles. Dans la version élémentaire que nous en donnons, il repose essentiellement sur la finitude des suites de marques (des formules), et sur l'idée que le stock de marques dont on dispose est dénombrable.

On suppose en effet qu'on a pu ranger et numéroter *toutes* les formules closes de T. Soit F1, F2..., Fn..., cet ordonnancement. Chaque formule Fn étant une suite finie de marques, et les marques étant elles-mêmes numérotables (dénombrables), cette supposition est justifiée.

On examine alors l'une après l'autre les formules, pour définir par récurrence une *suite de théories*.

— La théorie T0 est la théorie T elle-même.

— Si $\sim$ F1 est déductible dans T0, T1 est la théorie TO,
si $\sim$ F1 n'est pas déductible dans T0, T1 est la théorie (T0 + F1),

— Si $\sim$ F2 est déductible dans T1, T2 est la théorie T1,
si $\sim$ F2 n'est pas déductible dans T1, T2 est la théorie (T1 + F2).

....

— Si $\sim F_{n+1}$ est déductible dans T_n, T_{n+1} est la théorie T_n,
si $\sim F_{n+1}$ n'est pas déductible dans T_n, T_{n+1} est la théorie $(T_n + F_{n+1})$.

....

Le lecteur se servira du résultat de notre paragraphe 5 pour montrer que si la théorie T_n est cohérente, la théorie T_{n+1} l'est aussi. Si donc T0, c'est-à-dire T, est cohérente, la récurrence nous permet de conclure que toutes les théories T_n de la suite le sont aussi.

Considérons la théorie T' obtenue en prenant tous les axiomes de toutes les théories T0, T1..., T_n..., Cette théorie est elle aussi cohérente, si T est cohérente comme on peut le vérifier. D'autre part, elle contient (entre autres) tous les axiomes de T0, donc tous ses théorèmes. C'est bien une extension de T. Reste à établir sa saturation.

Soit F_n une formule quelconque, donnée avec son rang n dans le numérotage. Ou bien $\sim F_n$ se déduit des axiomes de la théorie T_{n-1}. Elle est alors un théorème de T', qui contient tous ces axiomes. Ou bien elle ne s'en déduit pas. Mais alors, la règle de construction de la suite des théories montre que T_n est $(T_{n-1} + F_n)$. F_n est donc un axiome de T_n, et par suite de T'. Par conséquent, quelle que soit F_n ou $\sim F_n$ ou F_n sont déductibles dans T', qui est une théorie saturée.

On remarquera que ce théorème est proprement sémantique en ce qu'il n'est pas effectif : on peut très bien ne pas savoir décider à l'avance, par une procédure mécanique invariable, par un montage scriptural, si, à l'étape de rang n, la formule $\sim F_{n+1}$ est, ou n'est pas, déductible dans la théorie T_n. Si on le peut toujours, c'est que la théorie T_n est *décidable* : c'est là une propriété très forte, mais malheureusement très rare, pour un dispositif formel. C'est ainsi que SP est décidable, mais que la théorie admettant des relations binaires — des expressions du type R(x, y) —, avec les mêmes schémas d'axiomes que SP, ne l'est déjà plus.

8 : Le théorème de complétude

L'idée qui gouverne la démonstration du théorème de complétude est de prendre pour modèle d'une théorie, supposée cohérente, des écritures de la théorie elle-même. C'est là une procédure remarquable, où le montage formel articule deux fonctions simultanées : l'inscription des théorèmes et le traitement sémantique de certaines de ses propres pièces.

Remarquons d'abord que les marques syntaxiques peuvent toujours être elles-mêmes traitées comme un matériau sémantique dans la mesure où leurs listes forment des *ensembles* de marques.

L'univers du modèle que nous allons construire est, en fait, une extension d'un ensemble de marques particulières : celui des constantes individuelles de la théorie considérée.

On notera qu'il est en effet possible d'ajouter arbitrairement de nouvelles marques de constantes à un système mathématico-logique : cette extension est cohérente si la théorie de départ l'est aussi, comme on le vérifie aisément (cf. par exemple, dans la bibliographie (9), page 65).

C'est ainsi à des constantes que nous allons assigner la fonction d'être les *éléments* d'un univers. Les prédicats s'interprètent alors de la façon suivante : au prédicat P, on fait correspondre le sous-ensemble composé des marques a tel que P(a) soit un théorème de la théorie considérée. Notons que si notre système admettait des relations binaires (par exemple), on ferait correspondre à une relation R les couples de constantes (a, b) tels que R(a, b) soit déductible. La procédure est générale, et ne dépend pas de la restriction de notre exemple aux seuls prédicats à un argument.

C'est là que se nouent les deux fonctions : P(a) est *valide* si et seulement si P(a) est *déductible*. Ce point de saturation entre syntaxe et sémantique commande le développement de la preuve, comme certains de ses effets paradoxaux, sur lesquels nous reviendrons.

Enumérons maintenant, comme précédemment, non pas toutes les formules de T, mais toutes les formules qui ont une seule variable libre. Soit F1, F2..., Fn..., cette énumération. A chacune de ces formules, on *associe* une constante individuelle du modèle envisagé.

Pour cette numérotation, on prend quelques précautions de différence dans les marques, en utilisant librement la possibilité d'ajouter de nouvelles constantes.

Le but essentiel de ces précautions est :

1°) éviter que la constante associée à Fn figure déjà, soit dans l'écriture de Fn, soit dans celle des formules Fn-k qui la précèdent dans la liste.

2°) éviter que la constante associée à Fn figure dans les axiomes *mathématiques* (autres que ceux de SP) que la théorie comporte éventuellement.

Considérons maintenant toutes les formules S_n du type :

$$S_n : \sim (Ux)\ F_n \rightarrow \sim F_n\ (b/x)$$

où x est la variable libre de F_n, et b la constante associée à F_n.

On va construire, à l'aide des formules S_n, une suite infinie d'extensions de la théorie initiale T, en procédant de la façon suivante :

$T0 = T$
$T1 = T + S1$
$T2 = T + S1 + S2$
....
$T_n = T_{n-1} + S_n$, soit : $T + S1 + ... + S_n$
....

Ces théories adjoignent donc à T des axiomes (les formules S_n) où se marque une connexion, interne au montage, entre les formules à une seule variable libre et des constantes individuelles, connexion garantie par le numérotage sériel des pièces de ce montage. Ce dispositif est en somme contrôlé par un étiquetage particulier des formules à une variable libre.

La valeur principale de ce contrôle s'attache au résultat suivant :

Si T est cohérente, toute théorie T_n l'est aussi.

Nous allons une fois de plus raisonner par une sorte de récurrence descendante, combinée à un raisonnement par l'absurde : nous allons montrer que si T_n est incohérente, T_{n-1} l'est aussi, et donc, finalement, T0 (soit T).

Le lecteur commencera par relire la démonstration du théorème de la déduction (paragraphe 4 de l'Appendice). Il se convaincra que son résultat suppose seulement que la théorie considérée comprenne les axiomes de SP, et n'ait pas d'autres règles de déduction que la séparation et la généralisation. Autrement dit.

étant donnée une extension mathématico-logique de SP, il est toujours vrai que si B est déductible dans la théorie (T + A), où A est une formule close, (A → B) est déductible dans la théorie de T.

Supposons que T_n soit incohérente. On y peut alors déduire n'importe quelle formule, et, par exemple, $\sim S_n$. Mais T_n n'est autre que $(T_{n-1} + S_n)$. Le théorème de la déduction nous permet donc d'affirmer que $(S_n \rightarrow \sim S_n)$ est un théorème de T_{n-1}.

T_{n-1} étant une extension de T, donc de SP, on y a la déduction :

$$\vdash (S_n \rightarrow \sim S_n) \rightarrow \sim S_n \quad \text{Axiome 4}$$
$$\vdash \sim S_n \quad \text{Séparation}$$

Ainsi, en remplaçant S_n par son écriture complète, on a, dans T_{n-1}, le théorème :

(1) $\vdash \sim [\sim (Ux)F_n \rightarrow \sim F_n(b/x)]$

Nous admettrons ici sans démonstration les deux schémas de théorèmes suivants, déductibles, par l'emploi de la seule règle de séparation, des axiomes 1, 2 et 5 de SP (exercice éventuel) :

(2) $\vdash \sim (\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A$

(3) $\vdash \sim (\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow B$

Remplaçons A par la formule $(Ux)F_n$, et B par $F_n(b/x)$, b étant toujours la constante associée à la formule F_n. Nous avons alors le théorème suivant de SP (donc de T_{n-1}, qui est une extension de SP), simple variante du schéma (2) ci-dessus :

(4) $\vdash \sim [\sim (Ux)\ F_n \rightarrow \sim F_n\ (b/x)] \rightarrow \sim (Ux)\ F_n$

Ce théorème de T_{n-1} et le théorème (1) établi ci-dessus donnent, par séparation :

(A) $\vdash \sim (Ux)F_n$

Maintenant, le schéma (3), avec les mêmes substitutions, justifie (toujours dans T_{n-1} :

$$\vdash \sim [\sim (Ux)F_n \rightarrow \sim F_n(b/x)] \rightarrow F_n(b/x)$$

Soit, par séparation encore :

$$(B) \vdash F_n(b/x)$$

Nous allons montrer que (A) et (B), théorèmes de T_{n-1}, impliquent l'incohérence de cette théorie.

Examinons une déduction de (B) dans T_{n-1}. Remplaçons partout, dans cette déduction, la constante b par une variable y *qui ne figure dans aucune des formules de cette déduction*. Cette opération est toujours possible, puisque la liste des variables est infinie, et que toute déduction est finie. Mais d'autre part, cette opération n'altère pas le caractère déductif de la suite. En effet, les axiomes purement logiques sont par elle transformés en d'autres axiomes logiques, correspondants au même schéma (vérification élémentaire). Les axiomes mathématiques ne sont pas concernés, puisque nos précautions dans le choix des constantes associées garantissent que la constante b ne figure dans aucun de ces axiomes. Les axiomes S1, S2,... S_{n-1} enfin ne sont pas non plus concernés, et pour la même raison. Quant aux règles de déduction, il est clair qu'elles jouent toujours : la séparation, parce que la substitution est uniforme ; la généralisation, parce qu'elle ne concerne pas la constante b, ni n'atteint la variable y qui, ne figurant pas dans la déduction initiale, n'est nulle part quantifiée.

Nous obtenons ainsi le résultat suivant : s'il existe, dans T_{n-1}, une déduction de $F_n(b/x)$, il en existe certainement aussi une de $F_n(y/x)$.

Par généralisation, nous obtenons alors dans T_{n-1} :

$$(C) \vdash (Uy)F_n(y/x)$$

Mais nous avons aussi démontré :

$$(B) \vdash \sim (Ux)F_n$$

Or nous avons dans T_{n-1} le fragment déductif suivant :

$\vdash (Uy)F_n(y/x) \rightarrow F_n$ Axiome 6

(remplacement de y par x, qui n'est pas lié dans F_n)

$\vdash (Ux)\ [(Uy)\ F_n\ (y/x) \rightarrow F_n]$

$\vdash (Ux)\ [(Uy)\ F_n\ (y/x) \rightarrow F_n] \rightarrow [(Uy)\ F_n\ (y/x) \rightarrow (Ux)\ F_n]$

(Axiome 7 : applicable ici, car x ne figure pas dans $(Uy)F_n(y/x)$)

$\vdash (Uy)F_n(y/x) \rightarrow (Ux)F_n$ Séparation

$\vdash (Ux)F_n$ Séparation (par C)

Ainsi $(Ux)F_n$ est déductible dans T_{n-1} ; mais $\sim (Ux)F_n$ l'est aussi (ci-dessus, proposition (B)). Il en résulte que T_{n-1} est certainement incohérente. On y a en effet, A étant une formule quelconque, le schéma déductif suivant :

$\vdash (Ux)F_n \rightarrow [\sim (Ux)F_n \rightarrow A]$ Axiome 3

$\vdash \sim (Ux)F_n \rightarrow A$ Séparation

$\vdash A$ Séparation

Comme A est quelconque, il est bien clair que n'importe quelle formule est un théorème de T_{n-1}, ce qui est la définition même de l'incohérence.

Si donc T_n est incohérente, T_{n-1} l'est aussi. Par « descente » on voit immédiatement que $T_0 = T$ est incohérente. Nous pouvons affirmer que réciproquement, si T est cohérente, T_n l'est aussi, quel que soit n.

Appelons maintenant TU la théorie obtenue par adjonction aux axiomes de T de *tous* les énoncés du type S_n ; ou, si l'on veut, la théorie union de toutes les théories Tn. Si T est cohérente, TU l'est aussi. En effet, supposons qu'on puisse déduire A et ~ A dans TU. Ces deux déductions sont finies, et n'utilisent qu'un nombre fini d'axiomes du type Sn. Elles sont donc intérieures à une théorie Tn (celle qui contient l'axiome Sn de rang le plus élevé utilisé dans les déductions de A et de ~ A). Tn, où l'on déduit A et ~ A, est alors incohérente (raisonnement déjà indiqué et repris ci-dessous), ce qui, nous l'avons montré, est impossible, si T ne l'est pas.

Maintenant, d'après le lemme de Lindenbaum, si T est cohérente, donc TU, il existe une extension saturée de TU, soit TU' ; comme TU est une extension de T, TU' est une extension saturée de T. Nous pouvons travailler dans TU' avec la structure suturante envisagée (P(a) valide si et seulement si, P(a) déductible). Si cette structure est modèle pour TU', tous les axiomes de TU' y sont valides, donc tous ceux de T, dont TU' est une extension.

Nous allons en fait établir directement un résultat plus fort : une formule close de TU' est un théorème si et seulement si elle est valide pour TU ; « être un théorème » et « être une formule valide dans la structure-suturante » sont des énoncés équivalents.

La restriction aux formules closes est sans importance.

Le lecteur montrera en effet que :

— Si F, où x est libre, est valide (Ux)F l'est aussi, et réciproquement (utiliser la règle 5 et la définition de la validité).

— Si F, où x est libre, est un théorème, (Ux)F l'est aussi (généralisation) et réciproquement (axiome 6).

Nous raisonnerons par récurrence sur le *nombre de signes logiques* qui figurent dans une formule close. On entend par signes logiques : (Ux), ~, →.

a) Si la formule ne contient *aucune* marque de ce type, elle est de la forme P(a). La définition même de notre structure est que P(a) n'est un théorème que si P(a) est valide, et réciproquement.

b) On formule l'hypothèse de récurrence ; supposons que toutes les formules closes comportant moins de n signes logiques soient des théorèmes si et seulement si elles sont valides pour la structure. On va démontrer qu'il en va de même pour une formule close qui comporte n signes logiques.

c) Soit A une telle formule. Elle peut s'écrire : ou ~ B (B possède n — 1 signes logiques) ; ou (B → C) (B et C ont à eux deux n — 1 signes logiques) ; ou (Ux)B (B ayant n — 1 signes logiques).

1er cas : A s'écrit ~ B.

— Si ~ B est valide, B ne l'est pas. D'après l'hypothèse de récurrence, B n'est donc pas un théorème. Mais TU' est saturée. Donc ~ B est un théorème.

— Si ~ B n'est pas valide, B l'est. Donc B est un théorème (hypothèse de récurrence). Alors, ~ B ne l'est pas. En effet, TU' est supposée cohérente (puisque T est supposée telle). Or, si ~ B et B étaient l'une et l'autre des théorèmes, on pourrait déduire dans TU' n'importe quelle formule C, et TU' serait incohérente. Rappelons qu'en effet, la suite :

$$\begin{array}{r} B \to (\sim B \to C) \\ \sim B \to C \\ C \end{array}$$

serait alors une déduction (exercice-généralisation d'une démonstration faite ci-dessus).

Notons au passage l'équivalence, pour notre système SP, de la définition « classique » de la cohérence (ne pas admettre à la fois un énoncé et sa négation) et de celle que nous avons donnée (ne pas pouvoir déduire n'importe quoi).

2ᵉ cas : A s'écrit $(B \to C)$.

— Si $(B \to C)$ n'est pas valide, C = Fax et B = Vri (règle 3). L'hypothèse de récurrence impose que B soit un théorème, et que C ne le soit pas. Mais la saturation de TU′ impose : si C n'est pas un théorème, $\sim C$ l'est. Dans ces conditions, $(B \to C)$ n'est certainement pas un théorème. Car s'il l'était, B l'étant, C le serait (règle de séparation), et $\sim C$ l'étant aussi, TU′ serait incohérente.

— Si $(B \to C)$ est valide : Ou bien C est valide, et est donc un théorème, par l'hypothèse de récurrence ; mais $C \to (B \to C)$ est un axiome ; par séparation, $(B \to C)$ est un théorème. Ou bien C n'est pas valide, mais alors B non plus (règle 3). Il en résulte (hypothèse de récurrence et saturation) que $\sim B$ est un théorème. On a alors la déduction :

$$\begin{array}{lr} \sim B \to (\sim\sim B \to C) & \text{(axiome 3)} \\ \quad\;\; (\sim\sim B \to C) & \text{(séparation)} \end{array}$$

Nous admettrons, sans autre développement, que dans toute déduction, $\sim\sim B$ peut être remplacé par B (ceci implique diverses manipulations déductives à partir des axiomes 5, 2 et 1). Donc, $(B \to C)$ est un théorème.

3ᵉ cas : A s'écrit $(Ux)B$

— Si $(Ux)B$ n'est pas un théorème, $\sim (Ux)B$ l'est (saturation). Mais TU′ contient tous les axiomes de TU, dont il est une extension, et donc toutes les formules du type

$$\sim (Ux)Fn \to \sim Fn(a/x),$$

où Fn est une formule à une seule variable libre, et a la constante « associée » à Fn. Comme $(Ux)B$ est une formule close, B ne contient que

la variable libre x. Parmi les axiomes de TU′, il y a donc une formule :

$$\sim (Ux)B \to \sim B(b/x)$$

Par séparation, $\sim B(b/x)$ s'avère être un théorème de TU′. Donc $B(b/x)$ ne l'est pas (cohérence de TU′), et par conséquent (hypothèse de récurrence) $B(b/x)$ n'est pas valide. Il en résulte que $(Ux)B$ ne saurait être valide (règle 5).

— Si $(Ux)B$ est un théorème, quelle que soit la constante a, on sait que $(Ux)B \to B(a/x)$ est un axiome (cf. schéma d'axiome 6), et que donc, par séparation, $B(a/x)$ est un théorème. L'hypothèse de récurrence garantit alors la validité de $B(a/x)$ pour tout a, et donc celle de $(Ux)B$ (règle 5).

Finalement :

1) Les formules closes avec zéro signe logique sont déductibles dans TU′ si, et seulement si, elles sont valides (pour la structure-suturante).
2) Toutes les formules closes avec moins de n signes logiques étant supposées déductibles si et seulement si elles sont valides, il en va de même des formules closes avec n signes.

Donc (par usage informel du schéma de récurrence sur les nombres naturels), pour les formules closes de TU′, déductibilité et validité (dans la structure en question) sont équivalentes. En particulier, la structure est modèle pour TU′, donc modèle pour T, dont TU′ est une extension.

Les seules hypothèses concernant T sont sa cohérence (qui garantit celle de TU′) et sa logique sous-jacente (nos axiomes pour SP). Nous pouvons donc conclure :

A) Toute théorie mathématico-logique cohérente qui est une extension de SP admet un modèle (théorème de Henkin).

D'où l'on tire, comme nous l'avons fait remarquer au paragraphe 6 :

B) Le système SP permet de déduire toutes les formules purement logiques dont son matériel de signes autorise l'inscription (théorème de Gödel).

Ces résultats sont la pierre angulaire de toute la logique mathématique. Ajoutons un résultat « paradoxal » : notre modèle est dénombrable, puisque son univers est composé d'une liste numérotée de marques. Donc :

C) Toute théorie mathématico-logique consistante qui est une extension de SP admet un modèle dénombrable (théorème de Löwenheim-Skolem).

Ainsi, même une théorie formalisée visant à inscrire la structure de domaines mathématiques non numérotables (comme par exemple les points d'une droite) admet aussi des modèles dénombrables.

C'est dire qu'aucun dispositif formel n'échappe à la nécessité de pouvoir inscrire sa propre finitude, soit la matérialité discrète des marques qui déploient en son sein le processus d'inscription. Un montage expérimental est toujours en même temps expérimentation du montage.

Indications bibliographiques

Les sigles ad, d, td, marquent la difficulté des textes. La notion vague de l'assez-difficile (ad), du difficile (d) et du très difficile (td) visent en fait l'étendue des connaissances, philosophiques ou mathématiques, que présuppose la lecture efficace de ces textes.

1. L. Althusser : *Cours de philosophie pour scientifiques*, fascicule I, à paraître.
P. Macherey, *idem*, fascicule 2, à paraître.
2. Pour une série d'exemples, voir : M. Serres et A. Badiou, *Modèle et Structure*, texte d'une émission de la télévision scolaire (surtout la 5e partie). Dans, *Emissions de philosophie pour l'année scolaire 1967-8*, publication de l'Institut Pédagogique National.
3. G. Bachelard, *L'activité de la physique rationaliste*. Le chapitre II, et plus spécialement la partie 7 de ce chapitre.
4. G. Bachelard, *Le nouvel esprit scientifique*. Introduction et chapitre 6.
5. G. Canguilhem, L'expérimentation en biologie animale. Dans le recueil : *La connaissance de la vie*.
6. E. Balibar, *Cours de philosophie pour scientifiques*, fascicule 2.
7. d. Pour un exposé de ces problèmes : J.A. Miller, L'action de la structure. Dans les *Cahiers pour l'Analyse*, n° 9, deuxième trimestre 1968.
8. R. Martin, Logique contemporaine et formalisation. Surtout, chapitre 4.
9. ad. E. Mendelson, *Introduction to mathematical logic*. Chapitres 1 et 2.
10. d. Cf. la construction du concept d'espèce de structure dans Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Chapitre 4, n° 1.
11. d. J. Lacan, *Ecrits*. Plus spécialement : L'Instance de la lettre dans l'inconscient (493/528) ; et (mais td) : Le séminaire sur « La Lettre volée » (11/60).
12. Le concept mathématique de catégorie est une refonte généralisante du concept d'espèce de structure.

On se reportera :

d. G. Poitou : Cours polycopié, *Introduction à la théorie des catégories*, chapitres 1 et 2.

td. En ce qui concerne la possibilité de développer toutes les mathématiques connues dans le langage des catégories : F. William Lawvere, The Category of Categories as a Foundation for Mathematics. Dans : *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra.*

13. F. Regnault, *Cours de philosophie pour scientifiques*, fascicule 3.

Table

Syntaxe

a) *Alphabet*

— constantes individuelles : a, b, c, a′, b′, c′...
— variables individuelles : x, y, z, x′, y′, z′...
— constantes prédicatives : P, Q, R, P′, Q′, R′...
— connecteurs logiques : négation : ∼ ; implication : →.
— quantificateurs : universel : U ; existentiel : E.

b) *Règles de formation*

— P(a), P(x), etc. sont des expressions bien formées ;
— si A et B sont des expressions bien formées, ∼ A, (A → B) sont des expressions bien formées ; et (Ux)A, (Ex)A, sont des expressions bien formées (si x est libre dans A et A bien formée).

c) *Règles de déduction*

Si A et B sont des expressions bien formées, et le signe ⊢ indiquant que la formule qui suit a déjà été déduite, on a les schémas déductifs suivants :

Généralisation $\dfrac{\vdash \quad A}{\vdash (Ux)\, A}$ Séparation $\dfrac{\begin{array}{l}\vdash (A \to B)\\ \vdash A\end{array}}{\vdash \qquad B}$

d) *Axiomes*, logiques (valides dans toute structure), et mathématiques (caractérisant la théorie formelle considérée).

d') *Exemple* : axiomes du système purement logique SP (Cf. Appendice).

Ax 1 : $A \to (B \to A)$
Ax 2 : $[A \to (C \to D)] \to [(A \to C) \to (A \to D)]$
Ax 3 : $A \to (\sim A \to B)$
Ax 4 : $(A \to \sim A) \to \sim A$
Ax 5 : $\sim \sim A \to A$
Ax 6 : $(Ux)A \to A\,(f/x)$, où x est libre dans A, et où f est soit une constante, soit une variable non liée dans une partie de A où x est libre.
Ax 7 : $(Ux)\,(A \to B) \to [A \to (Ux)\,B]$, si x n'est pas libre dans A.

e) *Quelques définitions et écritures*

— Une variable est dite *libre* dans une expression bien formée si elle ne tombe pas dans le champ d'un quantificateur. Autrement, elle est *liée*. Ex. : dans la formule $(Ex)(P(y) \to Q(x))$, y est libre, et x liée.

— Une formule est *close* si elle ne contient aucune variable libre. Autrement, elle est *ouverte*.

— $A(f/x)$ désigne la formule obtenue en remplaçant, dans la formule A, la variable libre x par la marque f (constante individuelle ou variable).

— Si une formule A contient les variables libres x, y, z..., une *instance close* de A est une formule du type $A(a/x)(b/y)(c/z)$..., où toutes les variables libres de A sont remplacées par des constantes.

Sémantique

a) *Structure*

— Un ensemble V, appelé univers, dont les éléments sont notés u, v, w... On a donc : $u \in V$.

— Une famille de sous-ensembles, éventuellement vides, de V, notés [pV] [qV], [rV]...

— Deux marques : Vri et Fax.

b) *Interprétation dans une structure donnée.*

— Une fonction f qui :

à chaque constante individuelle du système (syntaxique) assigne un élément de l'univers V. On a par exemple : $f(a) = u$;

à chaque constante prédicative du système assigne un sous-ensemble de la famille qui définit la structure. Par exemple : $f(P) = [pV]$.

c) *Evaluation des formules closes pour une structure donnée.*

Règle 1 : $P(a) = \text{Vri}$ si, et seulement si, $f(a) \in f(P)$ (par exemple, si $u \in [pV]$). Sinon, $P(a) = \text{Fax}$.

Règle 2 : $\sim A = \text{Vri}$ si, et seulement si, $A = \text{Fax}$. Sinon, $\sim A = \text{Fax}$.

Règle 3 : $(A \to B) = \text{Fax}$ si, et seulement si, $A = \text{Vri}$ et $B = \text{Fax}$. Dans tous les autres cas, $(A \to B) = \text{Vri}$.

Règle 4 : $(Ex)B = \text{Vri}$ si, et seulement si, il existe au moins une constante individuelle a telle que $A(a/x) = \text{Vri}$. Sinon, $(Ex)A = \text{Fax}$.

Sémantique

a) *Structure*

— Un ensemble V, appelé univers, dont les éléments sont notés u, v, w... On a donc : $u \in V$.
— Une famille de sous-ensembles, éventuellement vides, de V, notés [pV] [qV], [rV]...
— Deux marques : Vri et Fax.

b) *Interprétation dans une structure donnée.*

— Une fonction f qui :

à chaque constante individuelle du système (syntaxique) assigne un élément de l'univers V. On a par exemple : f(a) = u ;

à chaque constante prédicative du système assigne un sous-ensemble de la famille qui définit la structure. Par exemple : f(P) = [pV].

c) *Evaluation des formules closes pour une structure donnée.*

Règle 1 : P(a) = Vri si, et seulement si, $f(a) \in f(P)$ (par exemple, si $u \in$ [pV]). Sinon, P(a) = Fax.

Règle 2 : $\sim$ A = Vri si, et seulement si, A = Fax. Sinon, $\sim$ A = Fax.

Règle 3 : $(A \rightarrow B)$ = Fax si, et seulement si, A = Vri et B = Fax. Dans tous les autres cas, $(A \rightarrow B)$ = Vri.

Règle 4 : (Ex)B = Vri si, et seulement si, il existe au moins une constante individuelle a telle que A(a/x) = Vri. Sinon, (Ex)A = Fax.

Règle 5 : (Ux)A = Vri si, et seulement si, pour toute constante individuelle a on sait que A(a/x) = Vri. Sinon, (Ux)A = Fax.

d) *Validité*

Une formule A d'un système formel est *valide pour une structure* si, pour toute instance close de A, soit A′, on a A′ = Vri.

e) *Modèle*

UNE STRUCTURE EST MODÈLE POUR UN SYSTÈME FORMEL SI TOUS LES AXIOMES DE CE SYSTÈME SONT VALIDES POUR LA STRUCTURE.