

Ricerca interdipartimentale

IL PARADOSSO
DELL'ACHILLE DI ZENONE

Lo studio di Alessio Gava qui pubblicato rientra in un programma di ricerca da tempo perseguito nell'ambito di un'ampia collaborazione su diversi piani – scientifico, didattico, accademico, ecc. – fra il Dipartimento di Filosofia e i Dipartimenti di Fisica e di Matematica dell'Università di Trieste.

Fra i vari temi di ricerca affrontati, quello sui paradossi di Zenone relativi al moto è progressivamente emerso come uno dei più adatti a favorire un proficuo confronto interdisciplinare fra l'approccio filosofico e quello fisico e matematico. Si tratta di una problematica notoriamente assai complessa e difficoltosa, che nei brevi contributi qui presentati risulta necessariamente semplificata, in modo tale però da fornire una prima base per un'appropriata messa a fuoco di una delle sue componenti fondamentali, costituita dal suo nocciolo matematico.

Lo scritto di Alessio Gava costituisce uno stringato estratto di un lavoro assai più esteso e articolato sull'argomento, rappresentato dalla sua tesi di laurea, brillantemente discussa nell'anno accademico 1997/98, e di cui è stato relatore il prof. Marcello Giorgi, ordinario di Storia della fisica nella Facoltà di Scienze della nostra Università.

Il contributo del prof. Giorgio Derossi mira a mettere sinteticamente in luce alcuni aspetti tematici e problematici emergenti dalla trattazione di Alessio Gava, che verranno ulteriormente approfonditi nel prosieguo della ricerca, anche con la collaborazione di altri colleghi e ricercatori dei menzionati Dipartimenti (fra cui, in particolare, il dott. Giacomo Michelacci del Dipartimento di Matematica, che ha attivamente partecipato alla ricerca fin dal suo inizio).

LA MATEMATICA MODERNA E ZENONE

Alessio Gava

Figlio di Teleutagora, Zenone nacque intorno al principio del v secolo a.C. a Elea, piccola colonia della Magna Grecia, nella quale da qualche tempo Parmenide aveva dato vita a una scuola filosofica. Qui si sosteneva che l'essere è uno, immobile, indivisibile, affermando il primato della ragione sull'evidenza sensibile. Zenone fu allievo di questa scuola e, divenuto il discepolo prediletto di Parmenide, supportò il pensiero del proprio maestro¹ mediante una serie di argomentazioni alle quali è rimasta indissolubilmente legata la sua fama e che rappresentano, secondo i più, il primo esempio di *reductio ad absurdum*².

L'importanza di Zenone nella storia del pensiero non solo filosofico, ma anche scientifico, trova continuo conforto nell'attualità di tali argomentazioni, la cui sottigliezza ha permesso loro di superare indenni oltre due millenni di tentativi di confutazione; lo conferma Salmon³, uno degli autori contemporanei che maggiormente si è soffermato sull'opera dell'Eleate:

I paradossi di Zenone hanno interessato i filosofi di ogni epoca, ma fino alla metà del diciannovesimo secolo i paradossi vennero quasi sempre visti come meri sofismi che potevano essere elusi con poco sforzo. Negli ultimi cento anni, tuttavia, sono stati presi molto seriamente, e nel ventesimo secolo sono divenuti l'argomento di vigorose discussioni filosofiche. Questa controversia, che ancora prosegue su riviste specializzate, testimonia il fatto che Zenone ha sollevato questioni più vive che mai.

1 Cfr. F. Cajori, *The history of Zeno's arguments on motion* in "The American mathematical monthly", vol. 22 (1915), p. 1; E. Paci, *Storia del pensiero presocratico*; ERI, Torino 1957, p. 71; B. Russell, *La conoscenza del mondo esterno*; Longanesi, Milano 1980; pp. 163-164; Zenone, *Testimonianze e frammenti* a cura di M. Untersteiner; La Nuova Italia Editrice, Firenze 1970, p. 67; F. Enriques, *Storia del pensiero scientifico, vol. I: Il mondo antico*; Zanichelli, Bologna 1932, p. 113; G. Reale, *Storia della filosofia*, vol. I, Vita e Pensiero, Milano 1989, p. 134.

2 La dimostrazione per assurdo, la cui paternità viene attribuita a Zenone, rappresenta un metodo cui si fa frequente ricorso nell'odierna analisi matematica e che consiste nell'assumere per valide le ipotesi che si vogliono confutare, mostrando poi come esse conducano a delle contraddizioni, avvalorando così le ipotesi contrarie.

3 Cfr. W. C. Salmon, *Introduction*, in *Zeno's paradoxes*, The Bobbs-Merrill Company, New York 1970, p. 8.

Gli argomenti contro la molteplicità⁴

IL PARADOSSO DELLA PLURALITÀ *Dei vari argomenti contro la molteplicità i testi normalmente ne individuano e riportano i quattro principali, tutti riconducibili in ultima analisi al primo, noto come 'il paradosso della pluralità', nel quale Zenone afferma che se gli esseri sono molteplici, essi devono essere al contempo infinitamente grandi e infinitamente piccoli. Infinitamente piccoli perché le unità costituenti la realtà, per essere tali, non dovranno avere grandezza – diversamente sarebbero a loro volta suddivisibili in parti più piccole – e così il molteplice risulta essere un aggregato di entità prive di dimensione, una 'somma di zeri', da cui non si può che ottenere uno zero. Perché il molteplice esista, perciò, bisognerà ammettere che i suoi costituenti siano dotati di una qualche grandezza. Ma questi dovranno essere separati tra loro e quindi tra l'uno e l'altro dovranno esservi altre parti, ognuna delle quali ha in sé grandezza, e così via all'infinito. Esistono così infinite parti dotate di grandezza e ciò non può che costituire una grandezza infinita. Ecco spiegata la paradossalità del molteplice.*

Salmon sostiene che l'argomento appena esposto è dal punto di vista logico più importante e penetrante di quanto non lo siano gli argomenti contro il movimento, dei quali esso costituisce un antecedente logico e che non possono venire risolti – per essi si è cercata confutazione matematica mediante il richiamo alle serie convergenti⁵ – se prima non si trova una soluzione al paradosso della pluralità, in quanto esso chiama in causa la consistenza della nostra concezione del continuo⁶.

In questo caso le parti di cui un'estensione è composta non possono costituire una serie di termini via via decrescenti: deve trattarsi di una somma di grandezze uguali tra loro, possibilmente nulle. Ma una serie infinita di elementi, i cui termini siano uguali tra loro e di grandezza non nulla, è divergente, mentre una serie infinita i cui termini siano tutti nulli converge a zero⁷. Sembra che Zenone non ci lasci scampo, non si intravede una terza via praticabile.

4 Cfr. G. Reale, *op. cit.*, pp. 138-140.

5 Cfr. M. Dolcher, *Analisi Matematica, fasc. VII, Serie a termini reali*, Libreria Goliardica, Trieste 1988, pp. 1-3: «Data una successione di numeri reali $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ poniamo, per ogni

$$n \in \mathbb{N}^+, s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

e consideriamo la successione di queste 'somme parziali' $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$; [...] si potrà intendere per 'serie' la legge che alla successione $\{a_n\}$ associa la $\{s_n\}$. [...] Se la successione $\{a_n\}$ ha, per $n \rightarrow \infty$, limite finito s , allora la serie è detta convergente e il numero s è detto la sua somma».

6 Salmon attribuisce a questo paradosso un'importanza maggiore rispetto ai paradossi del moto anche in considerazione del fatto che la negazione della pluralità costituisce la tesi centrale dell'opera di Parmenide (cfr. W. C. Salmon, *op. cit.*, p. 6).

7 «La serie $a + a + a + \dots + a + \dots$ ha come ridotta $s_n = n \cdot a$. Pertanto diverge se è $a \neq 0$ (infatti è $n \cdot a \rightarrow \infty$); converge con somma 0 se è $a = 0$ » (M. Dolcher, *op. cit.*, p. 4).

Di opinione diversa è Grünbaum, che al paradosso della pluralità dedica un intero capitolo del suo *Modern science and Zeno's paradoxes*⁸ (1967). Trasferendo la questione posta dall'Eleate sul piano matematico, egli si chiede se la teoria degli insiemi contemporanea riesca a evitare le antinomie insite nel postulare che una linea sia un aggregato di punti privi di estensione, se sia cioè possibile che la loro unione non dia origine a una linea di lunghezza zero, ma con essi sia invece possibile costruire una linea di lunghezza positiva. Egli ritiene infatti che i paradossi della pluralità sfidino la geometria a escogitare delle regole per la somma di lunghezze che permettano l'esistenza di intervalli estesi composti tuttavia da elementi inestesi⁹. Più in particolare, Zenone richiederebbe regole additive per le lunghezze che consentano di affermare che un segmento di spazio fisico, di lunghezza positiva, è un *continuum* lineare di punti, ciascuno dei quali ha lunghezza zero¹⁰.

Ebbene, afferma Grünbaum, se un segmento fosse costituito da una quantità numerabile di punti, il paradosso esposto da Zenone ne deriverebbe logicamente, ma la continuità della linea¹¹, così come postulata da Cantor, è la stessa di quella dei numeri reali e non vi è dunque modo di porre l'insieme dei sottointervalli degeneri – ovvero di lunghezza nulla – in corrispondenza uno a uno con l'insieme dei numeri naturali. In generale, l'operazione di addizione – anche aritmetica – è definita solo nel caso in cui la quantità di addendi sia numerabile, ne segue che l'abituale operazione di addizione geometrica¹² di segmenti non è applicabile a una quantità non numerabile; in altre parole è privo di significato determinare la lunghezza di un segmento non nullo come somma delle lunghezze nulle dei sottointervalli degeneri. Su questa base Grünbaum respinge l'argomento zenoniano.

Non tutti però hanno ritenuto che le formulazioni di Cantor fossero risolutive, e la questione della continuità è ancora aperta. Scrive in proposito von Fritz:

Il frazionamento del continuo in parti qualsiasi tramite punti ipoteticamente privi di dimensione: un'operazione intellettuale indispensabile per una esatta comprensione di determinati aspetti dei dati di fatto. Tale operazione porta naturalmente a concepire il conti-

8 A. Grünbaum, *Modern science and Zeno's paradoxes*, Wesleyan University Press, Middletown Conn. 1967, pp. 119-130.

9 Filosofi quali Aristotele hanno eluso il problema facendolo passare per sofismo senza fondamento grazie alla negazione che il continuo sia composto di punti, ma la gran parte della fisica matematica attuale si fonda logicamente su una concezione del continuo come insieme ordinato di punti privi di estensione.

10 Cfr. A. Grünbaum, *op. cit.*, p. 3.

11 Cfr. L. Scaglianti, *Geometria*, vol. II, CEDAM, Padova 1981, p. 26. Notoriamente, esiste una corrispondenza biunivoca fra i numeri reali e i punti di una retta orientata. Il cosiddetto 'assioma della continuità di Cantor' può essere enunciato come segue: «Ogni coppia (H, K) di classi contigue di punti di una retta ammette uno e un solo punto separatore, vale a dire, esiste un punto e un solo P che non precede alcun punto della classe H e non segue alcun punto della classe K».

12 «La misura della somma di due segmenti è uguale alla somma delle misure di questi segmenti, fatte rispetto a una medesima unità di misura» (L. Scaglianti, *op. cit.*, p. 16).

nuo come se fosse 'costituito' da una quantità illimitata di questi punti. Ma l'idea che una somma di elementi del tutto privi di dimensioni possa avere un'estensione non è realizzabile nella realtà. L'assiomatizzazione della teoria degli insiemi di Cantor cerca in qualche modo di rendere accessibile questo concetto ricorrendo alla tesi della diversa potenza degli insiemi e determinando la potenza del cosiddetto insieme c , cosa che peraltro le riesce nel senso che, basandosi su alcuni criteri cautelativi, riesce a evitare quelle contraddizioni che nella teoria degli insiemi si manifestarono subito in gran numero. Che però dal punto di vista matematico questa difficoltà non sia del tutto superata lo dimostra il fatto che l'insieme c , in contrasto con le aspettative di Cantor, non si lascia inserire nella serie Alef. Resta quindi l'antinomia di diverse concezioni, tutte ugualmente indispensabili ma non del tutto riducibili a un comune denominatore¹³.

Gli argomenti contro il movimento

I) IL PARADOSSO DELLA DICOTOMIA *Si immagina un corpo che debba spostarsi da un estremo all'altro di un dato segmento: prima di arrivare al termine deve percorrerne la metà. Ma ancor prima di pervenirvi deve giungere alla metà di questa e prima di questa alla metà del primo quarto, e così all'infinito, perché c'è sempre una metà della metà. Dato, quindi, che ciascuna grandezza è infinitamente divisibile, ne segue che è impossibile attraversare una qualsiasi distanza, ovvero è impossibile il movimento – esiste una seconda versione del paradosso, del tutto speculare, per la quale valgono le stesse considerazioni che seguiranno e che pertanto non è necessario esporre in dettaglio.*

A più riprese Russell, nelle sue opere, si è occupato dei paradossi di Zenone secondo una prospettiva logico-matematica. Relativamente alla Dicotomia, dopo aver distinto tra

i tutti che sono definiti estensionalmente, cioè mediante l'enumerazione dei loro termini, da quelli che sono definiti intensionalmente, cioè come la classe dei termini aventi qualche data relazione con qualche dato termine, oppure, più semplicemente, come una classe di termini¹⁴,

il filosofo britannico afferma che «la soluzione della difficoltà risiede perciò nella teoria del denotare e nella definizione intensionale della classe. Con esse si dà risposta al primo argomento di Zenone, tradotto in termini aritmetici».

Secondo Russell, dunque, non c'è bisogno di passare in rassegna una per una le distanze da percorrere, perché

si può dividere uno spazio a metà, e poi ancora a metà, e così via *ad infinitum*, e a ogni stadio del processo le parti saranno ancora degli spazi, non dei punti. Per poter raggiungere,

13 Cfr. K. von Fritz, *Le origini della scienza in Grecia*, Il Mulino, Bologna 1986, pp. 50-51.

14 Cfr. B. Russell, *I principi della matematica*, Newton & Compton, Roma 1989, § 330.

con tale metodo, dei punti, sarebbe necessario arrivare al termine di un processo senza fine, che è impossibile. Ma proprio come si può dare una classe infinita tutta in una volta attraverso il concetto che la definisce, benché non sia possibile raggiungerla per enumerazione successiva, così si può dare un insieme di punti infinito tutto in una volta in quanto formante una retta o un'area o un volume, anche se non è possibile raggiungerli per mezzo del processo di divisione successiva¹⁵.

Se ne ricava anche che nella visione di Russell paradosso della pluralità e Dicotomia sono in qualche misura equivalenti e pertanto se ne dispone allo stesso modo.

Traducendo invece l'argomento della Dicotomia in termini numerici, come fa Grünbaum, si ottiene che il corpo deve percorrere in rigorosa sequenza temporale un'infinita successione di sottointervalli spaziali distinti la cui lunghezza è data da $1/2, 1/4, \dots 1/2^n, \dots (n = 1, 2, 3, \dots)$ ¹⁶ – ci troviamo nell'ipotesi non restrittiva che il percorso totale abbia lunghezza unitaria.

La mancanza di un sottointervallo che sia l'ultimo da percorrere per giungere al punto stabilito – ovvero di un ultimo termine nella successione – porta, secondo Grünbaum, Zenone a concludere erroneamente che il percorso totale da compiere dovrebbe estendersi infinitamente lontano 'a destra'. Ma l'intervallo totale è noto per essere spazialmente finito e ciò non è in disaccordo con il fatto di avere un numero infinito di sottointervalli: essi sono di forma sempre decrescente e pertanto è possibile che siano tutti contenuti in un intervallo finito; che sia proprio questo il caso della successione data ci è garantito dal fatto che per ogni n , l'unione dei primi n sottointervalli della successione ha lunghezza S_n (minore del percorso totale) data da:

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1^{17}.$$

Grünbaum ritiene che l'unica possibile fonte di difficoltà risieda in un eventuale 'passaggio in rassegna', uno per uno, di tutti gli elementi della successione – operazione che richiederebbe un tempo infinito. Ma tale operazione non è necessaria, e anche il tempo totale T di percorrenza del segmento unitario è finito, in quanto il risultato della somma di una serie infinita convergente di sottointervalli temporali di durata $T/2, T/4, \dots T/2^n, \dots$, la cui relazione con quella già vista è palese.

15 B. Russell, *La conoscenza del mondo esterno*, Longanesi, Milano 1980, p. 156.

16 Cfr. A. Grünbaum, *op. cit.*, p. 41.

17 La somma s_n dei primi n termini della serie geometrica $a + a \cdot b + a \cdot b^2 + \dots + a \cdot b^{n-1} + \dots$ è data da

$$S_n = \frac{a \cdot (1 - b^n)}{1 - b}.$$

Evidentemente, come nel nostro caso, il termine b^n diviene trascurabile quando n è molto grande e $b < 1$.

Nulla di nuovo, dunque, se non nella forma, rispetto alle conclusioni di Russell. Né queste né tantomeno il ricorso alle serie geometriche hanno tuttavia rappresentato una soluzione accettata da tutti, ma prima delle repliche a Russell e Grünbaum esponiamo il celebre 'Achille e la tartaruga', argomento parallelo alla Dicotomia.

II) ACHILLE E LA TARTARUGA Nel secondo argomento Achille gareggia con una tartaruga che parte nello stesso istante, ma in posizione avvantaggiata. Il ragionamento mostra che il piè veloce Achille, per quanto rapidamente possa correre, non potrà mai raggiungere la tartaruga, per quanto lenta questa possa essere: se essa lo precede di un tratto S , infatti, egli dovrà percorrere: innanzitutto questa distanza S , poi il tratto S' percorso dalla tartaruga mentre il semidio percorreva S , poi il tratto S'' percorso dal rettile mentre Achille percorreva S' , e così all'infinito.

Anche quest'argomento, evidentemente, si presta a una descrizione in termini numerici attraverso il ricorso alle serie¹⁸: come per il complementare paradosso della Dicotomia, si possono individuare con una certa facilità una successione infinita di distanze spaziali da percorrere e una corrispondente successione infinita di intervalli di tempo durante i quali Achille è impegnato nell'attraversare gli intervalli di spazio. Sommando tutti i termini, successione per successione, ci si trova ancora una volta di fronte a due serie geometriche infinite convergenti, la cui somma è facilmente determinabile ricorrendo alla teoria dei limiti. Ciò rende superfluo riportarle, è chiaro che per esse valgono le stesse considerazioni che valgono per le serie relative alla Dicotomia e viceversa.

A dire la verità, Russell distingue tra i primi due paradossi contro il movimento, ritenendo che l'Achille si regga sull'errato assioma secondo cui il tutto non può essere equipotente alla parte e pertanto «il paradosso di Achille va ripudiato essendo direttamente contraddetto dall'aritmetica»¹⁹. A Russell ha risposto Cajori²⁰: «Le congetture che Russell fa a proposito dell'Achille sono, per la maggior parte, senza fondamento. Non esiste evidenza storica per ritenere che Zenone abbia basato l'Achille sulla dottrina secondo la quale l'intero è più grande di qualunque sua parte».

Grünbaum invece affronta l'Achille in modo del tutto analogo a quanto fatto nel caso della Dicotomia, traduce l'argomento in termini numerici sotto forma di due serie geometriche infinite convergenti, ricorre alla teoria dei limiti per determinarne la somma e ritiene perciò²¹ che Zenone sfrutti in modo non lecito il fatto che sia impossibile dal punto di vista logico trovare l'ultimo istante del moto in alcuno dei sot-

tointervalli temporali appartenenti alla successione infinita vista alla pagina precedente concludendone che l'unione dei sottointervalli dà luogo a un intervallo di durata infinita.

Quand'anche non attribuissimo a Zenone una simile conclusione, Grünbaum confuta pure l'affermazione della presunta paradossalità insita nell'idea di portare a termine un numero infinito di atti contribuendo al dibattito sulle cosiddette 'macchine d'infinito' che vede impegnati svariati pensatori quali – oltre a Grünbaum – Black, Thomson, Benacerraf, Russell e altri. Non ne daremo conto in questo lavoro, va rilevato comunque come Grünbaum non ritenga paradossale l'idea di portare a termine un numero infinito di operazioni, contrariamente a molti altri autori.

Commentando il ricorso alla somma di serie infinite come mezzo per confutare i due paradossi esposti, Black afferma invece:

questo tipo di soluzione matematica [...] io non riesco a capacitarmi che essa vada al nocciolo della questione. Essa ci dice, correttamente, dove e quando Achille e la tartaruga si incontrano, se si incontrano; ma non dimostra che Zenone sbagliava nell'asserire che non possono incontrarsi²².

Egli sottolinea come dire che la somma della serie di sottointervalli spaziali precedentemente vista è 1 significa che considerando un numero sufficientemente grande di termini della serie, la differenza tra la somma di questo numero finito (!) di termini e 1 è trascurabile, o meglio: fissato un numero positivo ϵ piccolo a piacere, è sempre possibile trovare un numero finito di termini della serie la cui somma, sottratta a 1, fa ottenere un risultato inferiore a ϵ ²³.

La somma di una serie infinita, in altri termini, viene definita attraverso un 'passaggio al limite', non si tratta perciò dell'usuale operazione di somma di un insieme finito di addendi e soprattutto non significa che si sia riusciti a sommare un numero infinito di termini. Interessante a tal proposito è quanto scrive Zellini:

Si pensi alla somma di una qualsiasi serie infinita convergente: si tratta ivi di un limite concretizzabile in un ente matematico ben definito che non appartiene tuttavia alla successione indefinita delle somme parziali che tendono a esso. Il limite non è un termine della successione e non è perciò una semplice approssimazione del risultato che si vuole conseguire; esso è raggiunto rinunciando all'analisi indefinita della successione che lo precede e ponendosi in un punto di riferimento esterno che è invisibile a chi si soffermi alla pur corretta constatazione della sua indefinita lontananza ed irraggiungibilità²⁴.

Come nel caso di Achille, eseguire la somma aritmetica comporterebbe l'esecuzione di una serie infinita di compiti, e che il tempo necessario a eseguirli eventualmente diminuisca man mano non è di aiuto alcuno. «La dimensione dei compiti

18 Storicamente, il primo ad applicare le serie geometriche infinite allo studio dell'Achille fu Gregory St. Vincent nel 1647 (cfr. F. Cajori, *op. cit.*, pp. 79-80).

19 Cfr. B. Russell, *I principi della matematica*, Newton & Compton, Roma 1989, § 340.

20 Cfr. F. Cajori, *op. cit.*, p. 295.

21 Cfr. A. Grünbaum, *op. cit.*, p. 75.

22 Cfr. M. Black, *op. cit.*, pp. 99-100.

23 Si consulti in proposito un qualunque testo di analisi matematica.

24 Cfr. P. Zellini, *Breve storia dell'infinito*, Adelphi, Milano 1980, p. 124.

– dice ancora Black²⁵ – non ha nulla a che vedere con l'impossibilità logica di portare a termine una serie infinita di operazioni». Tale conclusione, secondo Black, va estesa a tutte le 'macchine d'infinito', in quanto è in generale contraddittoria l'idea di portare a termine una serie infinita di atti.

Sono in molti i pensatori in linea con le affermazioni di Black e che come lui ritengono di dover considerare invalida la premessa di Zenone, ovvero la possibilità di applicare una serie geometrica infinita a una distanza fisica. Bergson, ad esempio, si dice convinto che il problema risieda nell'applicare il movimento alla linea attraversata e nel supporre che ciò che è vero per la linea sia vero per il movimento, e ritiene che le assurdità svaniscano assumendo la 'continuità del movimento reale'²⁶, «una continuità di cui ciascuno di noi è conscio ogniqualvolta solleva un braccio o avanza di un passo». È necessario ripensare il divenire così come effettivamente si presenta a noi, prescindendo da ricostruzioni mentali artificiali e innaturali, e dunque negare divisibilità all'intero movimento, prenderlo nella sua interezza e non considerarlo costituito di parti.

Quello che emerge dal dibattito, al di là delle proposte – più o meno realizzabili – di 'rifondazione' della matematica ai fini di una maggiore aderenza dei suoi modelli alla realtà che pretende di tradurre, è un'insoddisfazione verso gli strumenti con cui tale traduzione viene eseguita attualmente, in particolare verso «la natura 'definizionale' e perciò circolare delle soluzioni che riposano su tali artifici»²⁷. Il problema del 'passaggio dalla matematica alla fisica', come si intuisce, travalica i confini delle sole situazioni proposte da Zenone: sono innumerevoli gli eventi, anche semplici e quotidiani, che non trovano adeguata descrizione nei termini della matematica attuale. Essi sono tuttavia ben presenti agli stessi fisici – che potremmo considerare degli 'addetti ai lavori' –, consapevoli dell'urgenza del problema anche nel limitato mondo popolato da semidei, tartarughe e arcieri partorito dalla mente di Zenone. Valga per tutti quanto scritto da Hilbert a proposito dell'Achille:

un punto essenziale del paradosso non è centrato, e precisamente il paradosso che risiede nel fatto che una successione infinita, che non possiamo portare a compimento nella rappresentazione, non solo in linea di fatto ma anche in linea di principio, debba nella realtà presentarsi a noi come conclusa. In effetti esiste anche una soluzione molto più radicale del paradosso. Essa consiste nel pensare che noi non siamo in alcun modo costretti a credere che la rappresentazione matematica spazio-temporale del movimento abbia ancora un senso fisico per intervalli di spazio e di tempo piccoli a piacere, che piuttosto abbiamo tutte le ragioni per accettare l'ipotesi che quel modello matematico [...] estrapoli i dati di fatto nel senso di una semplificazione dei concetti²⁸.

Nemmeno i nuovi strumenti elaborati nell'ambito della matematica 'tradizionale', quali la 'teoria interna degli insiemi' – *internal set theory* o IST²⁹ –, risultano soddisfacenti, sembrerebbe davvero necessario un ripensamento più radicale, come invocato da Bergson.

Una delle possibili 'rifondazioni' potrebbe consistere nell'ipotizzare una struttura spazio-temporale quantizzata – in verità mai teorizzata, neppure alla luce dei risultati della meccanica quantistica –, ma nemmeno questa sarebbe esente da problemi, come Zenone mette in evidenza negli ultimi due argomenti contro il movimento.

III) IL PARADOSSO DELLA FRECCIA Una freccia in volo occupa in ciascun istante – che si suppone indivisibile – uno spazio identico a sé stessa, in quanto manca di 'tempo' e di 'spazio' per muoversi, e ciò vale per ciascun istante del volo. Il 'movimento' della freccia, conseguentemente, non può che essere composto da una successione di 'immobilità'. Ancora di più, un eventuale cambiamento di posizione non può aver luogo all'interno dell'istante, ma nemmeno 'tra' gli istanti: questi sono consecutivi, non vi è nulla tra di essi. Quindi la freccia in moto, finché è in moto, non si muove per tutto il tempo del suo moto.

Proprio nell'idea che non vi sia nulla 'tra' gli istanti sta l'arcano, ad opinione di Russell, il quale considera invalida l'implicita assunzione di uno spazio-tempo discreto e ritiene perciò che la soluzione del paradosso risieda nella teoria delle serie continue: «non c'è né posizione successiva né momento successivo, e una volta capito questo, si vede che la difficoltà scompare»³⁰.

In verità, assumere una struttura spazio-temporale continua non elude il problema sollevato da Zenone, nemmeno alla luce della definizione di velocità istantanea – perché, a dispetto del nome, in essa non si prende in considerazione un unico istante come fa l'Eleate. In effetti, parlare di moto risulta appropriato solamente se si considerano intervalli di tempo nei quali la freccia abbia la possibilità di muoversi. Dice bene Owen: «Non è falso che il movimento possa aver luogo nell'istante: è assurdo sia sostenere che negare questo, perché gli istanti non sono intervalli di tempo tali che al loro interno un qualunque processo possa aver luogo o non abbia il tempo di farlo»³¹.

È chiaro che anche assumendo eventualmente 'quanti' temporali dotati di una qualche estensione, questi risulterebbero ulteriormente suddivisibili e perciò non potrebbero rappresentare la particella temporale 'minima', ma ciò verrà messo in evidenza dal paradosso dello stadio.

29 Alle possibili applicazioni di questa teoria ai paradossi di Zenone, la rivista "Le Scienze" ha dedicato nel gennaio 1995 un articolo a firma del matematico statunitense William Mc Laughlin, il quale sembra tuttavia fraintendere sia la teoria citata che gli argomenti proposti dall'Eleate, e del quale perciò non faremo altra menzione.

30 B. Russell, *La conoscenza del mondo esterno*, Longanesi, Milano 1980, p. 170.

31 G. E. L. Owen, *Zeno and the Mathematicians*, in W. C. Salmon, *op. cit.*, p. 162.

25 Cfr. M. Black, *op. cit.*, p. 108.

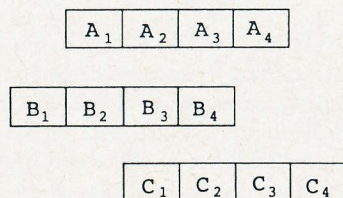
26 Cfr. H. Bergson, *The cinematographic view of becoming*, in W. C. Salmon, *op. cit.*, p. 65.

27 E. Te-Hennepe, in A. Grünbaum, *op. cit.*, pp. 108-109.

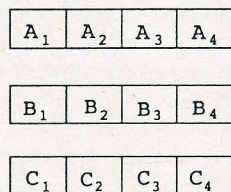
28 Cfr. H. Meschkowski, *Mutamenti nel pensiero matematico*, Boringhieri, Torino 1963, p. 42.

IV) IL PARADOSSO DELLO STADIO Si confrontano qui tre file parallele di punti materiali allineati a distanze uniformi. Siano dati A_1, A_2, A_3, A_4 , corpi di uguale dimensione, immobili; siano dati B_1, B_2, B_3, B_4 , corpi di uguale dimensione degli A, che si muovono verso destra in modo che ciascun B superi ciascun A nel minimo intervallo di tempo possibile. Siano C_1, C_2, C_3, C_4 , della stessa dimensione degli A e dei B, che si muovano verso sinistra con velocità in modulo uguale a quella dei B.

La situazione iniziale sia quella descritta dal seguente disegno³²:



Supponiamo ora che trascorso un singolo istante, ossia dopo un intervallo di tempo indivisibile, la situazione sia la seguente:



In un istante, dunque, C_1 avrà superato due B, e ciò nega la possibilità che l'istante sia il minimo intervallo di tempo, dato che si potrebbe assumere come nuova, e più piccola, unità il tempo che C_1 impiega a superare un singolo B.

Nell'analizzare questo paradosso, Russell propone l'interessante osservazione secondo cui nell'assumere che un periodo di tempo sia costituito da una successione discreta di istanti consecutivi e che il moto consista nell'attraversare una successione discreta di punti consecutivi, la massima – ma anche la minima! – velocità possibile è un punto per istante³³. Nei *Principi della matematica* (§322) egli inoltre dimostra che se le lunghezze sono costituite da 'quanti spaziali' dotati di estensione, allora tutto ciò che si muove deve muoversi alla stessa velocità. Ritenendo che queste siano ulteriori conclusioni paradossali derivanti dall'assunzione di una struttura spazio-tem-

porale discreta, il filosofo britannico rigetta definitivamente l'ipotesi e con essa l'argomento di Zenone.

È Grünbaum a offrire inaspettatamente una via d'uscita che salva le premesse dell'Eleate, proponendo di vedere l'argomento in una luce nuova. Pur essendo un acceso sostenitore della continuità dello spazio-tempo, egli ritiene³⁴ che nell'ambito di una struttura spazio-temporale quantizzata, come quella ipotizzata nello Stadio, esistano allineamenti verticali che si qualificano come eventi e altri che non lo fanno. Sostenere che A_2 e B_1 si sono scavalcati reciprocamente significa fare un'assunzione di densità non lecita: in sostanza, se non esiste un istante in cui A_2 e B_1 sono allineati, ciò non è avvenuto; questo offre una prospettiva diversa, in quanto sembrerebbe eludere le paradossali conclusioni di Zenone salvando le premesse, ma Grünbaum non va oltre e non prova a trarne conseguenze generali.

In verità nessuno l'ha mai fatto, come si è già detto una struttura spazio-temporale quantizzata non è mai stata teorizzata, Schrödinger tuttavia avverte che

pur accettando dai Greci l'atomismo della materia ordinaria, noi abbiamo ancora fatto un uso improprio della nostra familiarità col continuo, e precisamente usando questo concetto per l'energia: ma la scoperta di Planck dei quanti d'azione ha fatto sorgere il dubbio della sua adeguatezza. Lo usiamo ancora per lo spazio ed il tempo e difficilmente esso sarà bandito dalla geometria astratta; ma esso potrà benissimo essere trovato inadatto per lo spazio fisico ed il tempo fisico³⁵.

La non totale adeguatezza dei risultati matematici per la descrizione dei processi fisici viene dunque messa drammaticamente in evidenza da Zenone, i cui paradossi ben si prestano a una traduzione mediante simboli numerici, ma che come qualunque rendiconto in termini algebrici di un evento non possono che riflettere i generali limiti umani nell'acquisizione di conoscenza del mondo esterno – e difatti Zenone si esprime in termini generali e non numerici.

Mantenendo la discussione sul piano matematico, in ogni caso, l'attualità del dibattito e la diffusa insoddisfazione nei confronti delle soluzioni proposte – anche quelle più recenti – sembrano confermare il giudizio di Salmon, secondo cui quelli dell'Eleate sono «paradossi della matematica applicata. Nessuna teoria matematica astratta può risolverli appieno»³⁶, un'affermazione che reca in sé una previsione di fama imperitura e di costante 'modernità' per Zenone e le sue argomentazioni.

34 Cfr. A. Grünbaum, *op. cit.*, pp. 112-114. Grünbaum si richiama anche a Whitrow ed Evellin.

35 Cfr. E. Schrödinger, *L'immagine del mondo*, Boringhieri, Torino 1963, p. 218.

36 Cfr. W. C. Salmon, *op. cit.*, p. 30.

32 Cfr. C. Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano 1980, pp. 89-90.

33 Cfr. B. Russell, *The problem of infinity considered historically*, in W. C. Salmon, *op. cit.*, p. 54.

Bibliografia

- AGENO MARIO, *La costruzione operativa della fisica*, Boringhieri, Torino 1970.
- BERNAL JOHN DESMOND, *Storia della scienza*, Editori Riuniti, Firenze 1956.
- BLACK MAX, *Problemi di analisi*, Ubaldini, Roma 1968.
- BOYER CARL B., *Storia della matematica*, Mondadori, Milano 1980.
- CAJORI FLORIAN, *The history of Zeno's arguments on motion*, "The American mathematical monthly", 22 (1915).
- CALOGERO GUIDO, *Studi sull'Eleatismo*, La Nuova Italia, Firenze 1977.
- COPLESTON FREDERICK, *Storia del pensiero filosofico*, vol. I, Paideia, Brescia 1967.
- DOLCHER MARIO, *Analisi matematica*, fasc. VII, serie a termini reali, Libreria Goliardica, Trieste 1988.
- ENRIQUES FEDERIGO, *Storia del pensiero scientifico. I: Il mondo antico*, Zanichelli, Bologna 1932.
- ENRIQUES FEDERIGO - DE SANTILLANA GIORGIO, *Histoire de la pensée scientifique, Le problème de la matière. II: Pythagoriciens et Eléates*, Hermann & C., Paris 1936.
- VON FRITZ K., *Le origini della scienza in Grecia*, Il Mulino, Bologna 1986.
- GEYMONAT LUDOVICO, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, vol. I, Garzanti, Milano 1970.
- GRÜNBAUM ADOLF, *Modern science and Zeno's paradoxes*, Wesleyan University Press, Middletown, Conn. 1967.
- KRAMER EDNE, *The main stream of mathematics*, Oxford University Press, New York 1955.
- LOMBARDO RADICE LUCIO, *L'infinito*, Editori Riuniti, Roma 1981.
- MC LAUGHLIN W. I., *La risoluzione dei paradossi di Zenone sul moto*, "Le Scienze", 317 (1995).
- MESCHKOWSKI HERBERT, *Mutamenti nel pensiero matematico*, Boringhieri, Torino 1963.
- PACI ENZO, *Storia del pensiero presocratico*, ERI, Torino 1957.
- PIAGET JEAN - INHELDER BÄRBEL, *L'immagine mentale nel bambino*, La Nuova Italia, Firenze 1974.
- PRETT GIULIO, *Storia del pensiero scientifico*, Mondadori, Milano 1957.
- REALE GIOVANNI, *Storia della filosofia*, vol. I, Vita e Pensiero, Milano 1989.
- RUSSELL BERTRAND, *I principi della matematica*, Newton & Compton, Roma 1989.
- RUSSELL BERTRAND, *Introduzione alla filosofia matematica*, Longanesi, Milano 1962.
- RUSSELL BERTRAND, *La conoscenza del mondo esterno*, Longanesi, Milano 1980.
- SALMON WESLEY C., *Zeno's paradoxes*, The Bobbs-Merrill Company, New York 1970.
- SCAGLIANTI LUCIANO, *Geometria*, vol. II, CEDAM, Padova 1981.
- SCHRÖDINGER ERWIN, *L'immagine del mondo*, Boringhieri, Torino 1963.
- SZABÓ ÁRPAD, *The beginning of Greek mathematics*, Reidel Publishing Company, Boston 1978.
- VEGETTI MARIO, *Filosofie e società*, Zanichelli, Bologna 1980.
- WIENER PHILIP P., *Le radici del pensiero scientifico*, Feltrinelli, Milano 1971.
- ZELLER EDUARD - MONDOLFO RODOLFO, *La filosofia dei Greci nel suo sviluppo storico, Parte I: I Presocratici*, La Nuova Italia, Firenze 1938.
- ZELLINI PAOLO, *Breve storia dell'infinito*, Adelphi, Milano 1980.
- ZENONE, *Testimonianze e frammenti*, a cura di M. Untersteiner, La Nuova Italia, Firenze 1970.

ABBOZZO DI UN'ANALISI FENOMENOLOGICA DELL'ACHILLE'

Giorgio Derossi

Il paradosso dell'Achille' – che il più veloce non potrà mai raggiungere il meno veloce – è essenzialmente generato dalla sottrazione del tempo necessario al primo per raggiungere il secondo, resa in apparenza inevitabile dall'argomentazione zenoniana.

Quest'ultima – al di là delle diverse formulazioni e interpretazioni – è ben identificabile e raffigurabile, come noto, nella forma che matematicamente può configurarsi come una 'serie convergente' (interpretazione invalsa, come ricorda Gava, fin dal secolo XVII). Tale configurazione ha spinto i matematici moderni a inquadrare la procedura zenoniana nell'ambito del calcolo infinitesimale e/o della teoria degli insiemi.

Come documenta lo studio di Gava, si è così pervenuti, però, non tanto a una vera e propria 'soluzione' del paradosso quanto a una 'risoluzione', nei termini di dette teorie, della problematica sul continuo e sull'infinito da esso (come dagli altri paradossi zenoniani sul moto) implicata; ma ciò non vuol dir altro, appunto, che i paradossi evidenziati da Zenone sono stati tradotti nei *problemi* propri di ciascuna di queste teorie – problemi *concettualmente* tuttora aperti, com'è testimoniato dalle rinnovate e anche recenti revisioni delle teorie medesime.

La validità delle 'soluzioni' matematiche via via proposte (come del resto anche di quelle filosofiche) dipende dunque strettamente da quella delle teorie in base alle quali esse sono state ottenute. Per poter essere considerata definitiva, una 'soluzione' dei paradossi zenoniani dovrebbe venir sottratta all'ipoteca della relativa teoria – ma in tal caso essa rischierebbe, d'altro canto, di ridursi a un mero calcolo non esplicativo, non idoneo cioè a sciogliere i nodi *concettuali* di fondo.

Una soluzione di questo tipo invero esiste, e può essere ottenuta «senza usare affatto le serie infinite» (come ha fatto notare M. Black, *Problemi di analisi*, tr. it. Ubaldini, Roma 1968, p. 99). Supponendo, ad esempio, che Achille corra dieci volte più velocemente della tartaruga e le dia un vantaggio di cento metri, la velocità relativa del primo rispetto alla seconda risulta di nove metri al secondo: a tale velocità, il numero di secondi necessari ad annullare lo scarto iniziale di cento metri è 100 diviso 9, ossia $11 + 1/9$, che è esattamente lo stesso numero ottenuto sommando la serie geometrica rappresentante i tempi di Achille (e il medesimo calcolo vale per gli spazi da lui percorsi, che assommano precisamente a $10 \times 11 + 1/9$, cioè $111 + 1/9$).

Lo stesso Black, peraltro, non attribuisce alcun valore esplicativo a tale 'soluzione' – in apparenza meramente calcolatoria e perciò priva di significato teorico-concettuale. E tuttavia proprio la sua 'ingenua' semplicità può esser indice del fatto che *uno scioglimento non esclusivamente teorico-concettuale dei menzionati nodi concet-*

tuali apre forse una via più diretta e persuasiva verso un'autentica soluzione. È su questo specifico punto che vorrei qui brevemente soffermarmi (rinviando ad altra occasione le necessarie integrazioni e gli eventuali sviluppi).

Una tale via non potrebbe essere percorsa – alla luce delle osservazioni fatte – né con il solo supporto di analisi teorico-concettuali, né con quello di un mero approccio caloroso. Essa dunque va intrapresa con uno strumentario diverso, che vorrei definire *analisi fenomenologica*: con una metodologia, cioè, la quale adotti costantemente come suo criterio fondamentale quello che ogni 'concetto' (nel senso più ampio) sia *raffigurabile* all'interno di una struttura figurativa più ampia capace di fornire un'articolata descrizione dimostrativa dei termini del problema e della sua soluzione (*trasformando* quindi previamente il paradosso in problema).

Un simile approccio sembra inoltre tanto più appropriato in quanto richiesto in primo luogo dalla *forma* stessa del paradosso. Essa infatti non è né una forma meramente empirica, né logica, né matematica, bensì figurativa, tale cioè che traduce i fattori sensibili, da un lato, e quelli concettuali (siano essi filosofici, logici o matematici), dall'altro, in una forma che viene a esser dimostrativa proprio *in quanto figurativa*. L'apparente 'insolubilità' del paradosso è dipesa e dipende dunque verosimilmente da un ricorrente quanto fondamentale errore di prospettiva: dall'aver cercato, cioè, di risolvere in forma concettuale ciò che può esser risolto solo in forma figurativa, perché in tale forma è stato e va originariamente posto.

Da quanto precede consegue – da un punto di vista epistemologico – che un'autentica soluzione del paradosso non può consistere che nel risolverlo in un'altra forma figurativa che confuti quella zenoniana e, con ciò stesso, di-mostri la possibilità della 'realtà' da essa negata (o, meglio, *la realtà della possibilità*). Propongo qui un abbozzo di una tale forma, ripromettendomi di tornare su di essa e sull'intera questione in maniera più esauriente.

Il primo basilare 'concetto figurato' – per dir così – che incontriamo è quello di 'distanza': se non ci fosse infatti una distanza fra A (Achille) e T (Tartaruga), a favore di T, non ci sarebbe ovviamente alcun problema o paradosso. Quest'ultimo si presenta, come si è già rilevato, per il fatto che non è concesso ad A, nella forma zenoniana, tutto il tempo necessario per raggiungere T. La soluzione quindi – è evidente – dovrà consistere nel trovare una forma che di-mostri come, al contrario, sia possibile che A abbia il tempo che gli occorre per raggiungere T.

Consideriamo dunque il concetto di distanza come è figurato nella forma zenoniana: esso è rappresentato dai segmenti, sempre più brevi, che separano le successive posizioni di A e di T. Tale 'rappresentazione' raffigura gli *spazi* che, dall'inizio della rincorsa, si frappongono via via fra i due corridori; ma raffigura (o *dovrebbe* raffigurare) anche i relativi tempi, che diminuiscono proporzionalmente agli spazi. Senonché la distanza *temporale* non si riduce soltanto alla somma (o sommatoria) dei tempi impiegati via via da A e da T per superare le rispettive distanze spaziali. Essa implica anche un rapporto di *successione*, nel senso preciso e specifico che *gli stessi spazi o segmenti* (tranne quello iniziale) vengono *prima* percorsi da T e *poi* da A. Quindi il tratto *ora* percorso da A è *già* stato percorso da T: di volta in volta ciò che è *presente* rispetto ad A è *passato* rispetto a T.

Ciò vuol dire che A deve recuperare non solo i tratti spaziali che lo separano da T ma anche i corrispondenti tratti temporali, ossia deve ridurre a presente ciò che, rispetto a T, è passato (anche se via via più *recente*). Ebbene, proprio questa componente puramente temporale (la *successione*) non è figurata nella rappresentazione zenoniana. La *formulazione verbale* del paradosso parla bensì di tratti 'successivamente' percorsi, ma manca il riscontro raffigurativo. Poiché quest'ultimo è inevitabilmente spaziale, sembra inverosimile che la 'successione' non possa essere rappresentata per suo tramite, o che tutt'al più lo possa essere solo implicitamente – e che dunque la sua esplicitazione debba essere di necessità verbale. Se così fosse, si ricadrebbe nell'approccio tradizionale, che in fondo deriva, come ora vediamo, da un deficit di raffigurabilità.

Verifichiamo allora se, al contrario, la distanza temporale (ovvero il *successivo* ridursi dell'originaria distanza spaziale) è figurabile anche nella sua componente più peculiare. Va notato, in primo luogo, che la 'successione', nel senso prima specificato, implica un incremento di tempo – ossia una maggior durata della corsa – per il fatto stesso che il 'traguardo' di A – cioè T – è mobile e quindi tende, per questo rispetto (ossia rispetto al terreno), ad *allontanarsi* da A medesimo.

Ma, per un altro rispetto (ossia rispetto all'altro mobile, A), il traguardo tende, invece, ad *avvicinarsi* ad A. Difatti, nella raffigurazione zenoniana, pur non potendo mai raggiungerla, A si avvicina progressivamente a T: talché in ciò consiste il paradosso – che il *raggiungimento* non avviene nonostante esso sia implicato dall'*avvicinamento*. Ma perché non avviene? La risposta a questa domanda cruciale è che, nella figurazione zenoniana, l'avvicinamento non è rappresentato per se stesso, bensì in funzione dell'allontanamento dalla posizione iniziale: ricalcato, per dir così, su quest'ultimo – e reso, perciò, invisibile o poco visibile, e dunque di-mostrativamente irrilevante.

Occorre pertanto mettere a fuoco l'avvicinamento fra A e T in quanto tale, senza confonderlo con la sua scansione spaziale, pur avendo nel contempo di mira il loro convergere rispetto al comune sistema di riferimento costituito dal terreno su cui si svolge la corsa. Per poter fare ciò, dobbiamo raffigurarci il fenomeno non solo come se A si avvicinasse a T (il che implica l'allontanamento di T sul terreno), bensì anche come se la seconda si avvicinasse al primo – come cioè un reciproco andarsi incontro. In effetti è ciò che si vedrebbe se si percepisse il moto reciproco dei due mobili, senza percepire contemporaneamente la sua proiezione sul terreno.

La suddetta convergenza però dev'essere evidenziata, giacché altrimenti si perderebbe di vista la scansione spaziale: ma è appunto il rapporto reciproco di avvicinamento, così visualizzato, che deve venir proiettato sul sistema di riferimento – e non i moti separati dei due mobili. Orbene, la loro velocità reciproca è quella risultante dalla differenza tra le rispettive velocità in rapporto al terreno (e quindi minore della velocità di A e superiore a quella di T). Ciò significa che A deve impiegare più tempo per compiere ciascuna delle quote-parti del percorso, dato che queste diventano più estese corrispondentemente alla minor velocità sussistente tra i due mobili. È qui, allora, che si apre il varco decisivo nella cittadella della raffigurazione zenoniana, in quanto si vede così come spetti ad A una quota di tempo superiore a quella da

essa riconosciutiagli, in misura sufficiente a fargli raggiungere, in un punto e in un istante ben determinati e determinabili, il traguardo mobile rappresentato da T.

Per illustrare sommariamente questo tipo di approccio con un esempio concreto, possiamo immaginare il caso in cui A superi in 1 secondo una distanza iniziale da T di 4 metri, mentre T compie 1 metro: quindi la velocità reciproca fra A e T è di 3 metri al secondo. Per il primo rispetto (riferimento separato delle velocità di A e di T al terreno) la distanza iniziale va figurata come suddivisa in 4 parti di 1 metro ciascuna, sicché vale a questo riguardo la rappresentazione zenoniana per cui, mentre A supera tale quadruplica scansione spaziale, T ne supera una sola (che, sommata alle altre quattro, costituisce la *quinta*). Per il secondo rispetto, invece, la distanza iniziale va figurata come suddivisa in 3 parti di 1.33333... metri ciascuna, a cui segue una *quarta* contemporaneamente percorsa da T. Ma A deve *continuare* la sua corsa sino al superamento della quarta parte, alla fine (spaziale e temporale) del quale necessariamente raggiunge T.

È chiaro che la seconda figurazione *non può essere ridotta* alla prima (quella zenoniana), la quale, di per sé, rappresenta esclusivamente la velocità di A e di T rispetto al terreno, ma non la loro velocità reciproca, che è rappresentata invece in quella. La forma data da Zenone al paradosso palesa così incontestabilmente la propria unilateralità ed esige perciò di essere *trasformata* in quella che abbiamo visualizzato e che ne costituisce la necessaria integrazione, poiché raffigura, in organica sintesi, la velocità dei due mobili *sia* rispetto al terreno *sia* nel loro reciproco rapporto. La figurazione integrata pertanto fornisce l'autentica soluzione del paradosso nella misura in cui reintegra, mostrandone il ruolo essenziale, il fattore temporale implicato dalla velocità reciproca dei due mobili – e trascurato invece nella rappresentazione dell'Eleate.

Non per questo, però, l'«Achille» va squalificato come un mero sofisma, giacché esso è generato da un'effettiva difficoltà a visualizzare le componenti meno «visibili» del moto (e in particolare quella puramente temporale). Ora, lo strumento logico-matematico, quanto è potente nel trattare fenomeni di questo tipo (e i concetti di «continuo», «infinito», ecc. da essi implicati) sotto il profilo della loro linearità spaziale, altrettanto sembra impotente a valutarne adeguatamente gli aspetti, come appunto quelli temporali, che sfuggono a una presa concettuale troppo rigida. A questa va sostituito pertanto un approccio più flessibile, capace di produrre una forma veramente completa e perciò valida dei fenomeni nel loro effettivo di-mostrarsi: approccio di cui una significativa esemplificazione può essere costituita dall'«analisi fenomenologica» applicata all'«Achille».

Un'analoga applicazione potrebbe essere tentata anche nei confronti degli altri tre paradossi zenoniani sul moto. Non essendo qui possibile farlo in maniera esauriente, mi limito a dei sommari cenni, a titolo puramente indicativo. Detti paradossi potrebbero essere considerati, insieme con l'«Achille», come diversi casi di correlazione fra le velocità reciproche di due mobili rispetto al comune sistema di riferimento in quiete. Così il paradosso della Freccia potrebbe essere interpretato come il caso in cui due mobili, coincidenti con i *limiti* iniziale e finale della freccia, s'inseguono a pari velocità (e, ovviamente, nella stessa direzione); e quello dello Stadio, a

sua volta, come il caso di due mobili allontanantisi l'uno dall'altro muovendosi in direzioni opposte e divergenti: debitamente configurate e computate, tali interpretazioni potrebbero dar luogo a «soluzioni» dei corrispettivi paradossi simili a quella ottenuta per l'«Achille». E si scorgerebbero inoltre probabilmente importanti quanto impreviste attinenze con le fondamentali problematiche relative ai principi d'inerzia e di relatività. Il paradosso della Dicotomia, infine, potrebbe essere vantaggiosamente ricondotto al caso in cui il «traguardo» è fisso, e non più mobile, ma proprio per questo non può venir continuamente spostato indietro rendendolo così appunto, incongruamente, mobile.

Naturalmente tali rapide indicazioni non intendono essere di-mostrative, ma solo allusive alle possibilità di espansione di una metodologia di tipo fenomenologico, che del resto trova non pochi riscontri nelle «sperimentazioni ideali» proficuamente effettuate nel corso dell'evoluzione scientifica, e che altri non meno rilevanti potrà averne se ulteriormente approfondita e perfezionata.