Ber. Math. Tagung
Berlin 1953

AXIOMATISCHE PROBLEME IN DER KLASSISCHEN SYLLOGISTIK

Von KLAUS HÄRTIG in Halle

1. Liegen zwei Komplexe von Sätzen vor, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{H}$ genannt, so werde ein dritter Komplex von Sätzen, $\mathfrak{K}'$, genau dann als ein *Axiomensystem von* $\mathfrak{K}$ (*bezüglich* $\mathfrak{H}$) bezeichnet, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:

(1) $\mathfrak{K}'$ ist ein Teilkomplex von $\mathfrak{K}$.
(2) Aus $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{H}$ läßt sich ganz $\mathfrak{K}$ herleiten[1].
(3) Ist $\mathfrak{K}''$ irgendein echter Teilkomplex von $\mathfrak{K}'$, so läßt sich aus $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{H}$ nicht ganz $\mathfrak{K}$ herleiten.

Man kann etwa sagen, man kenne den „*tieferen Grund*" von $\mathfrak{K}$ (bei Voraussetzung der Hilfsmittel $\mathfrak{H}$), wenn man *sämtliche* Axiomensysteme $\mathfrak{K}'$ kennt; die Kenntnis nur *eines* $\mathfrak{K}'$ wird man als unbefriedigend ansehen, solange die Bevorzugung gerade dieses $\mathfrak{K}'$ willkürlich ist.

Fragen nach *sämtlichen* Axiomensystemen $\mathfrak{K}'$ zu vorgegebenem $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{H}$ innerhalb eines („bequemen") *speziellen* Bereichs von Sätzen bilden den Gegenstand des Vortrags.

2. Als *syllogistische Aussageformen* kann man die 4 *Urteile*[2,3], die 4 *identischen Urteile*[2,4], 32 *unmittelbare Schlüsse*[2,5] und die 256 syllogistischen *Modi*[2] bezeichnen. Diese Aussageformen kann man sich als Funktionen von 2 bzw. 1 bzw. 2 bzw. 3 Variablen gleichen Variabilitätsbereichs vorstellen — mit Aussagen als Funktionswerten.

Ordnet man jeder syllogistischen Aussageform denjenigen Satz zu, der sie — in Übereinstimmung mit der klassischen Logik — für gültig bzw. für ungültig erklärt, so erhält man denjenigen Komplex von Sätzen, der im Vortrag *klassische Syllogistik* heißt. Zu ihr gehören als Teilkomplex $\mathfrak{B}$ die 256 Sätze, in denen 24 Modi für gültig und 232 für ungültig erklärt werden; der Rest heiße $\mathfrak{A}$.

Das erste Drittel des Vortrags enthielt außer der Beschreibung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Beispiele für Herleitungen innerhalb von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

[1] Herleitungsmittel werden entweder vorher fixiert oder „naiv", wie in nichtformalisierten mathematischen Beweisen, benutzt.

[2] Philosophischerseits übliche Terminologie.

[3] $SaP =$ Alle S sind P, $SeP =$ Kein S ist P, $SiP = \overline{SeP}$, $SoP = \overline{SaP}$.

[4] $X\,\delta\,X$ mit $\delta = a, e, i, o$.

[5] $S\,\delta_1 P \to S\,\delta_2 P$ und $S\,\delta_3 P \to P\,\delta_4 S$ mit $\delta_\mu = a, e, i, o$.

3. Im zweiten Teil des Vortrages wurde ein kürzlich veröffentlichtes[1] axiomatisches Ergebnis wiedergegeben: die Auffindung *aller* $\mathfrak{K}'$ für $\mathfrak{K} = \mathfrak{B}$ bei $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}$. Genau 432 Axiomensysteme gibt es; jedes besteht aus 4 Axiomen.

Hier nur der Grundgedanke des Beweises:

Er beruht auf einer geeigneten Einteilung der 256 Modi in 44 „Familien". Aus dem Einteilungsprinzip geht hervor, daß jeder Familie entweder lauter gültige oder lauter ungültige Modi angehören. Man erhält 2 bzw. 18 bzw. 2 bzw. 12 bzw. 10 Familien mit je 1 bzw. 3 bzw. 4 bzw. 6 bzw. 12 Modis. In 4 Familien sind die $(6 + 3 + 3 + 12 =)$ 24 gültigen Modi untergebracht.

Als $\mathfrak{K}$ wählt man zunächst nicht $\mathfrak{B}$, sondern die 4 Sätze, die jene 4 Familien für gültig erklären, samt den 40 Sätzen, die die anderen 40 Familien für ungültig erklären; als $\mathfrak{H}$ behält man $\mathfrak{A}$ bei. *Dieses* $\mathfrak{K}$ besitzt *genau ein* Axiomensystem $\mathfrak{K}'$ (bezüglich $\mathfrak{A}$); *das* $\mathfrak{K}'$ heiße $\mathfrak{K}^*$. Es besagt die Gültigkeit zweier Familien und die Ungültigkeit zweier Familien. Außer (2) muß gezeigt werden, daß jeder der 4 Sätze K^* aus $\mathfrak{K}^*$ in *jedem* Axiomensystem $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{K}$ vorkommt; man gibt zu jedem K^* ein Modell an, in dem K^* nicht erfüllt ist, während $\mathfrak{A}$ und jeweils das restliche $\mathfrak{K}$ zutreffen[2].

Die 4 Familien, um die es sich in $\mathfrak{K}^*$ handelt, bestehen aus 12 bzw. 3 bzw. 3 bzw. 4 Modis — daher im Resultat die Zahl $432 = 12 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4$.

4. Im letzten Drittel des Vortrags wurden andere axiomatische Aufgaben aus der Syllogistik genannt. Von Interesse ist natürlich besonders der Fall $\mathfrak{K} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ bei leerem $\mathfrak{H}$.

Nach *allen* Axiomensystemen kann man auch in der von J. ŁUKASIEWICZ lehrbuchmäßig dargestellten[3], vor allem von J. SŁUPECKI untersuchten verallgemeinerten Syllogistik fragen, in der es *unendlich viele* syllogistische Aussageformen gibt.

Bei ein und demselben Bereich syllogistischer *Aussageformen* (also z.B. dem klassischen oder dem eben erwähnten erweiterten) läßt sich auch der Bereich der *Sätze über sie* ausdehnen — wenn man außer der *einen* Quantifikation, die in der Alternative gültig[4]-ungültig[5] ausgesprochen ist, Aussageformen noch auf andere Weise quantifiziert. In der „Gültig-Ungültig-Syllogistik" ist z.B. die Gültigkeit von XiX nicht aus dem übrigen $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ herleitbar, aber sie folgt z.B. aus $\Pi\, Y \Sigma\, X\ (X a\, Y)$ und der Gültigkeit des Modus Ferio (sowie einiger unmittelbarer Schlüsse).

5. Übrigens gibt es selbst auf dem engen Gebiet $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ auch außer den axiomatischen Problemen noch unbeantwortete Fragen, z.B. über die zueinander isomorphen Systeme mit der Struktur der klassischen Syllogistik[6].

---

[1] K. HÄRTIG, Über die Struktur der klassischen Syllogistik, Wissenschaftliche Zeitschrift der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Jahrgang II, 1952/53, Heft 4, S. 165–189; insbes. Kap. IV.

[2] Zum Nachweis, daß $\mathfrak{K}^*$ *ein* Axiomensystem ist, genügen Modelle, in denen K^* nicht erfüllt ist, während $\mathfrak{A}$ und jeweils das restliche $\mathfrak{K}^*$ zutreffen.

[3] J. ŁUKASIEWICZ, Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic, Oxford 1951; insbes. chap. V.

[4] = richtig bei jedem Wert aller auftretenden Variablen.

[5] = falsch bei mindestens einer Wertekonstellation der Variablen.

[6] Siehe HÄRTIG, loc. cit., Kap. V.