SEPARATUM

Colloquium on the Foundations of Mathematics, Mathematical Machines and their Applications

TIHANY, 11—15 SEPTEMBER 1962

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1965

ÜBER EINEN QUANTIFIKATOR MIT ZWEI WIRKUNGSBEREICHEN

von

KLAUS HÄRTIG

Berlin

Wir beschäftigen uns mit folgender Quantifizierung: dem Übergang von zwei Aussageformen, die dieselbe Variable frei enthalten mögen (und im einfachsten Falle keine weitere), zu der Aussage:

> *Es gibt gleich viele Werte, die die erste Aussageform erfüllen, wie es Werte gibt, die die zweite Aussageform erfüllen.*

Im jeweiligen Formalismus — wir beschränken uns auf elementare Theorien und den Prädikatenkalkül erster Stufe — wollen wir das Grundzeichen $\mathbf{I}$ hinzunehmen und die induktive Definition der (sinnvollen) Ausdrücke durch folgenden Zusammensetzungsschritt ergänzen:

(*) *Sind H_1 und H_2 Ausdrücke, in denen die Individuenvariable x je mindestens einmal vorkommt, nirgends jedoch $\forall x$ oder $\exists x$ oder $\mathbf{I}x$, so ist auch $\mathbf{I}xH_1H_2$ ein Ausdruck.*

Der besseren Lesbarkeit zuliebe könnte man statt $\mathbf{I}xH_1H_2$ etwa die Zeichenreihe $\mathbf{I}x[H_1; H_2]$ bilden (mit Klammern und Semikolon als zusätzlichen Grudzeichen); bei den gebräuchlichen Ausdrucksbestimmungen ist jedoch eine »Vermischung« der beiden Wirkungsbereiche ohnehin ausgeschlossen: Sind nämlich H_1, H_2, H_3, H_4 Ausdrücke, so ist die Zeichenreihe H_1H_2 mit der Zeichenreihe H_3H_4 genau dann identisch, wenn H_1 mit H_3 identisch ist und H_2 mit H_4. — Das semantische Gegenstück zu (*) wird folgende Definition:

> *Es sei M ein Modell (mit dem Individuenbereich J) und B eine Belegung der Individuenvariablen (mit Elementen von J). Für $j = 1, 2$ sei $\mathfrak{m}_j$ die Mächtigkeit der Menge derjenigen Belegungen B_0, für die erstens $B_0(y) = B(y)$ bei jeder von x verschiedenen Individuenvariablen y und zweitens B_0 den Ausdruck H_j erfüllt (der x im Sinne von (*) vollfrei enthalten möge). Dann erfüllt B in M den Ausdruck $\mathbf{I}xH_1H_2$ genau dann, wenn $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$.*

»Proper quantifiers« mit *mehreren* Wirkungsbereichen hat Borkowski [1] untersucht, wobei er Definierbarkeit durch jeweils eine (klassisch-) prädikatenlogische Zusammensetzung der in den n Wirkungsbereichen stehenden Ausdrücke voraussetzt ([1], I, S. 72); ein dortiges Beispiel, in abgeänderter Schreibweise: $\mathbf{Q}xH_1H_2 =_{\mathrm{Df}} \forall x\,(H_1 \to H_2)$. Mostowski untersucht in [7] eine interessante Klasse von Quantifikatoren mit *einem* Wirkungsbereich.

Über das hier Mitgeteilte hat der Verfasser schon 1959 in einem Vortrag vor der János-Bolyai-Gesellschaft zu Budapest kurz berichtet. Nicht zur Sprache kommen werden syntaktische Dinge wie *Schlußregeln* für **I** oder die *Nicht-Axiomatisierbarkeit* der Menge der in jedem Modell gültigen **I**-Ausdrücke. Auch allgemeinere semantische Fragen — *Endlichkeitssatz*, *Löwenheim-Skolemscher Satz* und Verwandtes — werden hier noch nicht behandelt. Es soll lediglich an einigen einfachen Beispielen gezeigt werden, wie man **I** in konkreten Zusammenhängen benutzen kann. Sobald etwas solches »Material« vorliegt, gewinnen ja die genannten theoretischeren Probleme meiner Meinung nach erheblich an Interesse.

1. Offensichtlich sind $\forall$ und $\exists$ durch **I** ausdrückbar — in dem Sinne, daß in jedem Modell $\exists x H(x)$ mit $\sim \mathbf{I}x\, H(x)\, (H(x) \wedge \sim H(x))$ äquivalent, ist.*

In der vollen (d. h. Addition und Multiplikation enthaltenden) elementaren Zahlentheorie läßt sich *auch umgekehrt* **I** durch $\forall$ oder $\exists$ ausdrücken, und zwar mit Hilfe des bekannten Gödelschen Kunstgriffs ([4], S. 192 f.): Der Ausdruck $\mathbf{I}xH_1(x)\, H_2(x)$ ist äquivalent mit

$$\begin{aligned}
&(\forall y\; \exists x\, (x > y \wedge H_1(x)) \wedge \forall y\; \exists x\, (x > y \wedge H_2(x))) \\
&\vee \exists n \bigwedge_{j=1,2} \exists m_j\, \exists c_j \big\{\forall x\, (H_j(x) \longleftrightarrow \exists y\, (y < n \wedge x = \mathit{Rest}\,(m_j, (y' \cdot c_j)'))) \\
&\qquad \wedge \forall x_1 \forall x_2\, (x_1 < x_2 < n \to \mathit{Rest}\,(m_j, (x_1' \cdot c_j)') \neq \mathit{Rest}\,(m_j, (x_1' \cdot c_j)'))\big\},
\end{aligned}$$

wobei

$$x = \mathit{Rest}\;(y, z) =_{\mathrm{Df}} x < z \wedge \exists t\; y = t \cdot z + x\,.$$

2. In elementaren Kalkülen *mit Identität* (d. h. mit standard-interpretiertem Relationszeichen $=$) läßt sich die Dedekindsche Unendlichkeitsdefinition sehr einfach formalisieren: Genau die Modelle, in denen die Aussage

$$\exists y\;\; \mathbf{I}x\; x = x\; x \neq y$$

wahr ist, haben unendliche Individuenbereiche. Definiert man:

$$\mathbf{U}x\; H(x) =_{\mathrm{Df}} \exists y\, \big(H(y) \vee \mathbf{I}x\; H(x)\;\; H(x) \wedge x \neq y\big)\,,$$

so kann man, ohne Unterschied bei *jedem* Modell, $\mathbf{U}x\; H(x)$ lesen als

»*für unendlich viele* $x : H(x)$«.

* Die Symbolik »$H(x)$« statt »H« soll darauf hinweisen, daß x in H vollfrei vorkommt.

Die von Mostowski — [7], S. 14, (c) — als Beispiele aufgeführten Quantifikationen »*für fast alle x. . .*« usw. lassen sich natürlich ebenfalls durch **I** umschreiben. Die Bezeichnung »**U**« ist von Lachlan [6] übernommen, der eine **U** betreffende Definierbarkeitsfrage untersucht hat.

Setzt man einen abzählbar-unendlichen Individuenbereich *voraus*, so ist **U** durch **I** ganz leicht auch ohne $=$ ausdrückbar: Es gilt ja z.B.

$$\mathbf{U}x\, H(x) \longleftrightarrow \mathbf{I}x\, H(x)\, (H(x) \vee \sim H(x)).$$

Bemerkt sei noch, daß ein Modell, in dem die Aussage

$$\mathbf{U}x\, R_1x \wedge \mathbf{U}x\, R_2x \wedge \sim \mathbf{I}x\, R_1x\, R_2x$$

wahr ist, einen *überabzählbaren* Individuenbereich besitzt.

3. Für die elementare Zahlentheorie läßt sich *Kategorizität* mit Hilfe von **I** sehr leicht erzwingen: Man fordert die Wahrheit von

$$\forall x \sim \mathbf{I}y\; x < y\;\; y < x$$

und schließt dadurch die Modelle mit Ordnungstypen

$$\omega + (\omega^* + \omega) \cdot (\tau_1 + 1 + \tau_2)$$

aus.

In dem Ausdruck

$$\mathbf{I}x\; x < y\; H(x)$$

(*»es gibt genau y Zahlen x derart, daß H(x)«*)

ist y nicht Meta-, sondern Objekt-Variable, darf also im Kalkül z. B. quantifiziert oder durch einen Term ersetzt werden.

Bekanntlich ist die *Addition* durch die Kleiner-Beziehung im Bereich der natürlichen Zahlen nicht elementar explizit definierbar, denn in der ($\leqq$, $\forall$, $\exists$)-Theorie besitzen genau die endlichen Mengen und ihre Komplemente definierende Ausdrücke, weshalb z. B. die Eigenschaft, gerade zu sein ($\exists y\; y + y = x$) sicherlich nicht durch $\leqq$ definierbar ist. Anders, wenn man **I** statt $\forall$ und $\exists$ verwendet: Im Standardmodell gilt

$$x + y = z \longleftrightarrow \mathbf{I}t\; t \leqq y\; x \leqq t \leqq z.$$

Hier liegt die Frage nahe, ob sich auch die Ausdrucksfähigkeit der Presburgerschen Arithmetik ($+$, $\forall$, $\exists$) erhöht, wenn man zu ($+$, **I**) übergeht.

4. Mir ist nicht bekannt, ob man durch *eine* geeignete einstellige zahlentheoretische Funktion (zuzüglich Identitätsrelation) Addition und Multiplikation elementar explizit definieren kann. In [5] habe ich nur zeigen können, daß man mit zweien auskommt (von denen die eine die Nachfolgerfunktion sein darf) und daß, wenn man mit »*schwacher* Definierbarkeit« ([5], S. 211 f.) zufrieden ist, wirklich *eine* — rekursive — einstellige Funktion ausreicht.

Verwendet man **I** *statt* $\forall$ *und* $\exists$, *so läßt sich die Potenzierung (und damit Addition und Multiplikation) explizit durch eine geeignete (rekursive) einstellige Funktion ausdrücken.* Dieser anzugebenden Funktion φ soll im Formalismus das Zeichen f entsprechen.

Man zählt alle geordneten Zahlentripel $[\alpha, \beta, \gamma]$ mit $\alpha^\beta = \gamma$ ab: $[\alpha_0, \beta_0, \gamma_0]$, $[\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]$, ... und setzt

$$\varphi(3\cdot(6n^2+\nu)+2) = \begin{cases} 3\cdot 3n + 1 & \text{für } \quad 1 \leqq \nu \leqq 4n+1, \\ 3\cdot(3n+1)+1 & \text{für } 4n+2 \leqq \nu \leqq 8n+3, \\ 3\cdot(3n+2)+1 & \text{für } 8n+4 \leqq \nu \leqq 12n+6; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varphi(3\cdot 3n + 1) &= 3\alpha_n , \\ \varphi(3\cdot(3n+1)+1) &= 3\beta_n , \\ \varphi(3\cdot(3n+2)+1) &= 3\gamma_n ; \\ \varphi(3m) &= m . \end{aligned}$$

(**) *Bei dieser eindeutigen Abbildung φ hat jede Zahl $3k+2$ genau ein Urbild, nämlich $3\cdot(3k+2)$; jede Zahl $9n+1$ bzw. $9n+4$ bzw. $9n+7$ hat genau $4n+2$ bzw. $4n+3$ bzw. $4n+4$ Urbilder, davon $4n+1$ bzw. $4n+2$ bzw. $4n+3$ von der Form $3k+2$ und außerdem nur noch jeweils ihr Dreifaches; jede Zahl der Form $3k$ schließlich hat unendlich viele Urbilder,*

denn $k = \alpha_n$ (und auch $k = \beta_n$, wenn auch nicht $k = \gamma_n$) für unendlich viele n. Zur Abkürzung setzen wir fest:

$$x \equiv 0 =_{\mathrm{Df}} \mathbf{I}t\, ft = x\, t = t;$$

eine Belegung B erfüllt dieses Definiens genau dann, wenn $B(x)$ durch 3 teilbar ist. Wir behaupten:

Eine Belegung B mit $B(a) = \alpha$, $B(b) = \beta$, $B(c) = \gamma$ erfüllt den Ausdruck

$$\begin{aligned} \exists u\, \exists v\, \exists w\, \exists x\, \exists y_1\, \exists y_2\, (fu \equiv 0 \wedge fv \equiv 0 \wedge fw \equiv 0 \wedge u \not\equiv 0 \wedge v \not\equiv 0 \wedge w \not\equiv 0 \\ \wedge fx = v \wedge fy_1 = w \wedge fy_2 = w \wedge y_1 \neq y_2 \\ \wedge \mathbf{I}t \quad ft = u \quad (ft = v \wedge t \neq x) \\ \wedge \mathbf{I}t \quad ft = u \quad (ft = w \wedge t \neq y_1 \wedge t \neq y_2) \\ \wedge ffu = a \wedge ffv = b \wedge ffw = c) \end{aligned}$$

genau dann, wenn $\alpha^\beta = \gamma$.

In dem definierenden Ausdruck bezeichnen wir den auf $\exists y_2$ folgenden (bis zum Schluß gehenden) Teilausdruck als H_0. Bei gegebener Belegung B werden wir abkürzend $B(u) = \dot{u}$, $B(v) = \dot{v}$, ... setzen.

Ist $\alpha^\beta = \gamma$, so gibt es ein n mit $\alpha = \alpha_n$, $\beta = \beta_n$, $\gamma = \gamma_n$, und für

$$\dot{u} = 9n + 1,\ \dot{v} = 9n + 4,\ \dot{w} = 9n + 7,$$
$$\dot{x} = 3 \cdot (6n^2 + 8n + 3) + 2,\ \dot{y}_1 = 3 \cdot (6n^2 + 12n + 5) + 2,$$
$$\dot{y}_2 = 3 \cdot (6n^2 + 12n + 6) + 2$$

wird H_0 von B erfüllt. Damit ist die eine Richtung der Behauptung bestätigt. Hat man umgekehrt eine H_0 erfüllende Belegung B, so sind $\varphi(\dot{u})$, $\varphi(\dot{v})$, $\varphi(\dot{w})$ durch 3 teilbar, dagegen $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ selbst von der Form $3k + 1$. Hat $\dot{u}$ genau j Urbilder (j ist gewiß endlich!), so hat $\dot{v}$ genau $j + 1$ und $\dot{w}$ genau $j + 2$; deshalb gibt es ein n mit $j = 4n + 2$, denn wegen (**) kann j nicht eine der Formen $4n$, $4n + 1$, $4n + 3$ haben. Dann ist aber

$$\dot{u} = 9n + 1,\ \dot{v} = 9n + 4,\ \dot{w} = 9n + 7\,,$$
$$\alpha_n = \varphi(\varphi(\dot{u})) = \alpha,\ \beta_n = \varphi(\varphi(\dot{v})) = \beta,\ \gamma_n = \varphi(\varphi(\dot{w})) = \gamma\,,$$

und aus $\alpha_n^{\beta_n} = \gamma_n$ folgt $\alpha^\beta = \gamma$.

5. Dieses Resultat kann man verallgemeinern auf beliebige elementare Theorien mit endlich oder abzählbar unendlich vielen Relationenkonstanten (mit fester Interpretation, etwa im Bereich der natürlichen Zahlen):

Zu jeder Folge $\varrho_0, \varrho_1, \ldots$ von zahlentheoretischen Eigenschaften oder Relationen (endlicher, nicht notwendig beschränkter Stellenzahl) *gibt es eine einstellige zahlentheoretische Funktion φ derart, daß jedes ϱ_i in der elementaren Theorie mit Quantifikator* **I**, *Identität und — als φ interpretierter — Funktionskonstante f explizit definierbar ist.*

Einen (zu langen) *ad-hoc*-Beweis dieses Satzes — durch Verallgemeinerung der Konstruktion aus dem vorigen Abschnitt — teile ich nicht mit, sondern ziehe der Einfachheit halber ein Resultat von Craig und Quine [3] heran (das unmittelbar auf die Church-Quinesche Untersuchung [2] aufbaut): Man kann die ϱ_i durch *eine zweistellige symmetrische* Relation ϱ ausdrücken. Wir wählen Zahlenfolgen α_n und β_n so, daß jedes Paar $[\alpha, \beta]$, *für das* $\alpha\varrho\beta$, in der Folge $[\alpha_0, \beta_0]$, $[\alpha_1, \beta_1]$, … *unendlich oft* auftritt, jedoch kein anderes Paar. Dann setzen wir

$$\varphi(3 \cdot (n^2 + n + \nu) + 2) = \begin{cases} 6n + 1 \text{ für } & 1 \leqq \nu \leqq n + 1; \\ 6n + 4 \text{ für } & n + 2 \leqq \nu \leqq 2n + 2; \end{cases}$$
$$\varphi(6n + 1) = 3\alpha_n,$$
$$\varphi(6n + 4) = 3\beta_n;$$
$$\varphi(3m) = m.$$

Wie in Abschnitt **4**, nur noch bequemer, beweist man:

Eine Belegung B mit $B(a) = \alpha$, $B(b) = \beta$ *erfüllt den Ausdruck*

$$\exists x\ \exists y\ (fx \equiv 0 \wedge fy \equiv 0 \wedge x \not\equiv 0 \wedge y \not\equiv 0$$
$$\wedge\ \mathbf{I}t\ ft = x\ ft = y \wedge ffx = a \wedge ffy = b)$$

genau dann, wenn $\alpha\varrho\beta$.

Dabei war $x \equiv 0$ wie in **4** zu definieren. (Statt der Zahlen $3k$ könnte man auch die Zahlen $3k + 2$ auszeichnen, die sich ja — als die einzigen mit nur einem Urbild — hier ebenso leicht charakterisieren lassen.)

Aus diesem Definierbarkeitssatz ergibt sich sofort die *Unentscheidbarkeit der (abstrakten) elementaren Theorie einer einstelligen Funktion mit* **I** *als Quantifikator*. Ein Beweis läßt sich z. B. Wort für Wort aus [2], S. 183f., übertragen.

LITERATUR

[1] Bobkowski, L., On proper quantifiers I/II, *Studia Logica* (1958), Bd. 8, S. 65—130; (1960), Bd. 10, S. 7—28.

[2] Church, A. und W. V. Quine, Some theorems on definability and decidability, *J. Symb. Log.* (1952), Bd. 17, S. 179—187.

[3] Craig, W. und W. V. Quine, On reduction to a symmetric relation, *J. Symb. Log.* (1952), Bd. 17, S. 188.

[4] Gödel, K., Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Mh. Math. Phys.* (1931), Bd. 38, S. 173—198.

[5] Härtig, K., Einstellige Funktionen als Grundbegriffe der elementaren Zahlentheorie, *Zschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.* (1959), Bd. 5, S. 209—215.

[6] Lachlan, A. H., The U-quantifier, *Zschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.* (1961), Bd. 7, S. 171—174.

[7] Mostowski, A., On a generalization of quantifiers, *Fund. Math.* (1957), Bd. 44, S. 12—36.

65.60993 Akadémiai Nyomda, Budapest – Felelős vezető: Bernát György