ACTES DU
XIème CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHILOSOPHIE

*

PROCEEDINGS OF THE XIth INTERNATIONAL CONGRESS
OF PHILOSOPHY

VOLUME V

*

LOGIQUE
ANALYSE PHILOSOPHIQUE
PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES

*

LOGIC
PHILOSOPHICAL ANALYSIS
PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

BRUXELLES, 20—26 AOÛT 1953

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY - AMSTERDAM
ÉDITIONS E. NAUWELAERTS - LOUVAIN

KLAUS HÄRTIG

DIE „IDENTISCHEN URTEILE" DER SYLLOGISTIK

VORBEMERKUNGEN

Zunächst werde die Terminologie festgelegt.

Die Bezeichnung *Urteil* wollen wir in sehr spezieller Bedeutung gebrauchen, nämlich lediglich für die Aussageformen

Alle S sind P	(abgekürzt: SaP),
Kein S ist P	(SeP),
Einige S sind P	(SiP),
Einige S sind nicht P	(SoP)

und für jede Aussage, die aus einer dieser vier Formen hervorgeht, wenn man für beide Variablen (Allgemein-)Begriffe einsetzt. Eine Aussageform ist eine Funktion (im in der Mathematik üblichen Sinne), deren Wertevorrat aus Aussagen besteht. Die Urteile sind demnach Funktionen (oder Funktionswerte von Funktionen) zweier Variabler mit gleichem Variabilitätsbereich $\mathfrak{M}$, und $\mathfrak{M}$ ist eine Menge von (Allgemein-)Begriffen. An Veränderlichen, die auf $\mathfrak{M}$ variieren, werden M, S, P und X vorkommen.

Während jede Aussage entweder richtig oder falsch ist, ist jede Aussageform entweder gültig oder ungültig. Gültig ist sie genau dann, wenn sie bei jeder Wertekonstellation der Variablen, von denen sie abhängt, zu einer richtigen Aussage wird.

Je eine der (für S aus $\mathfrak{M}$ und P aus $\mathfrak{M}$ zu definierenden) Aussageformen SaP oder SoP und SeP oder SiP denken wir uns vorgegeben und definieren jeweils die andere durch Kontradiktion, d.h. als Negation der schon vorgegebenen.

Die unmittelbaren Schlüsse und die syllogistischen Modi werden wir ebenfalls als Aussageformen ansehen. (Man kann sie auch als Schluß-Regeln interpretieren.)

Unmittelbare Schlüsse heißen die 32 Aussageformen

$$S\alpha P \rightarrow S\beta P \quad (\alpha = \mathrm{a, e, i, o};\ \beta = \mathrm{a, e, i, o})$$

$$\text{und}\quad S\gamma P \rightarrow P\delta S \quad (\gamma = \mathrm{a, e, i, o};\ \delta = \mathrm{a, e, i, o}),$$

von denen genau 10 gültig sind, nämlich

$S\beta P \rightarrow S\beta P$,
$SaP \rightarrow SiP$, $SeP \rightarrow SoP$, (Subalternation)
$SiP \rightarrow PiS$, $SeP \rightarrow PeS$,
$SaP \rightarrow PiS$, $SeP \rightarrow PoS$. (Konversion)

$\mathfrak{A}_1$ besage, daß diese 10 unmittelbaren Schlüsse gültig sind;
$\mathfrak{A}_0$ besage, daß die restlichen 22 ungültig sind. $\mathfrak{A}$ sei $\mathfrak{A}_1$ & $\mathfrak{A}_0$.

Von den syllogistischen *Modis* setzen wir als bekannt voraus,
daß es 256 gibt,
daß 24 davon gültige Aussageformen sind, 232 ungültige,
und welche 24 Modi die gültigen sind.

$\mathfrak{B}_1$ besage, daß jene 24 Modi gültig sind;
$\mathfrak{B}_0$ besage, daß die übrigen 232 ungültig sind. $\mathfrak{B}$ sei $\mathfrak{B}_1$ & $\mathfrak{B}_0$.

Schließlich definieren wir als *identische Urteile* die vier Aussageformen $X\delta X$. Uns interessieren in der vorliegenden Studie hauptsächlich die beiden gültigen identischen Urteile XaX und XiX, und zwar im Rahmen der klassischen Syllogistik, d.h. im Zusammenhang mit den Urteilen $S\delta P$, der Lehre von den unmittelbaren Schlüssen ($\mathfrak{A}$) und der Syllogistik im engeren Sinne ($\mathfrak{B}$).

Der Kürze halber habe ich mich auf sehr wenige — teils unumgängliche, teils Zusammenfassungen gestattende — Literaturhinweise beschränkt. Zitiert werden

[1]: *Opuscules et fragments inédits de Leibniz.* Extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre par Louis Couturat, Paris 1903;

[2]: Jan Łukasiewicz, *Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic*, Oxford 1951;

[3]: Klaus Härtig, Über die Struktur der klassischen Syllogistik, *Wissenschaftliche Zeitschrift der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg*, Jahrgang II, 1952/53, Heft 4, S. 165—189.

§ 1

Wer die Gültigkeit des identischen Urteils „Alle X sind X“ als „*inhaltsleer*“ ansieht, bleibt wohl bei der Vorstellung stehen, daß ein Urteil eine „Verbindung“ zwischen Subjekt und Prädikat herstelle; falls Subjekt und Prädikat übereinstimmen, sei ein „Verbinden“ weder (irgendwozu) nötig noch möglich, die Feststellung der Richtigkeit von XaX also überflüssig.

Die Gültigkeit des identischen Urteils XaX läßt sich aber auch „weniger trivial“ auffassen. Sie sagt uns nämlich etwas über den Operator a und etwas über die Mengen $\mathfrak{M}$ von Begriffen X:

1.) „Alle ... sind ...“ ist so beschaffen, daß eine *richtige* Aussage zustandekommt, wenn in beide Leerstellen der *gleiche* Begriff eingesetzt wird.

2.) Jeder (Allgemein-)Begriff ist so beschaffen, daß man, wenn man ihn in *beide* Leerstellen des Operators „Alle ... sind ...“ einsetzt, eine *richtige* Aussage erhält.

Kurz: Die Gültigkeit von „Alle X sind X“ ist ein charakteristisches Merkmal sowohl des Terminus „alle“ als auch des Terminus „(Allgemein-)Begriff“.

§ 2

Wir betrachten Beispiele für die *Verwendbarkeit* identischer Urteile bei Deduktionen innerhalb von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

(1) Leibniz gewinnt $\mathfrak{A}_1$ aus der Gültigkeit einiger Modi und der Urteile $X\mathrm{a}X$ und $X\mathrm{i}X$ ([1], S. 412 und 416); in einem geeigneten Modus setzt er entweder $M = S$ oder $M = P$ und macht dadurch entweder den Unter- oder den Obersatz zu einem identischen Urteil. Es ist reizvoll, neben den Leibnizschen Text die (im Grunde genommen ähnlichen, aber in logistischer Sprache vorgeführten) Beweisgänge von Łukasiewicz zu halten ([2], S. 91).

Als Beispiel — eins möge genügen — wollen wir einen der Konversionsschlüsse sogar auf zweierlei Art herleiten: Für $M = S$ wird

$$\frac{\begin{matrix} M\mathrm{a}P \\ M\mathrm{a}S \end{matrix}}{S\mathrm{i}P}\ \text{(Darapti) zu}\ \frac{\begin{matrix} S\mathrm{a}P \\ S\mathrm{a}S \end{matrix}}{S\mathrm{i}P}\ \text{und}\ \frac{\begin{matrix} M\mathrm{a}P \\ S\mathrm{i}M \end{matrix}}{S\mathrm{i}P}\ \text{(Darii) zu}\ \frac{\begin{matrix} S\mathrm{a}P \\ S\mathrm{i}S \end{matrix}}{S\mathrm{i}P}.$$

Demnach folgt $S\mathrm{a}P \to S\mathrm{i}P$

1.) aus $\mathfrak{B}_1$ und der Gültigkeit von $X\mathrm{a}X$,

2.) aus $\mathfrak{B}_1$ und der Gültigkeit von $X\mathrm{i}X$.

(2) In [3] (Abschnitt 2, 2) wird vorgerechnet, daß aus $\mathfrak{A}_1$ und der Nicht-Konvertierbarkeit von $S\mathrm{o}P$ fast ganz $\mathfrak{A}_0$ folgt, nämlich die Ungültigkeit von 21 von den 22 zu $\mathfrak{A}_0$ gehörigen unmittelbaren Schlüssen; übrig bleibt nur

$$S\mathrm{a}P \to P\mathrm{o}S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (x)$$

(„$S\mathrm{o}P$ ist nicht konvertierbar“ bedeutet: Die vier Aussageformen $S\mathrm{o}P \to P\delta S$ sind ungültig. „$S\mathrm{o}P$ ist nicht konvertierbar“ ist also ein „Teil“ von $\mathfrak{A}_0$.)

Man überzeugt sich leicht, daß die Ungültigkeit von (x) nicht aus $\mathfrak{A}_1$ und dem restlichen $\mathfrak{A}_0$ herleitbar ist:

Besteht $\mathfrak{M}$ aus den beiden Elementen A und B, und sind

$$\begin{array}{ll} AoA & AaB \\ AeA & AiB \\ BoA & BoB \\ BiA & BeB \end{array}$$

allesamt richtige Aussagen, so trifft erstens $\mathfrak{A}_1$ und zweitens $\mathfrak{A}_0$ bis auf (x) bei *diesem* $\mathfrak{M}$ und bei *dieser* Wahl der vier Funktionen $S\delta P$ zu, doch (x) ist gültig statt ungültig.

Satz. Ist der Modus Barbara gültig, so ist (x) dann und nur dann ungültig, wenn das identische Urteil XoX ungültig ist.

Beweis. 1. Ist XoX ungültig, so gibt es in $\mathfrak{M}$ ein Element A mit falschem AoA, also richtigem AaA. Daher ist (x) für $S = P = A$ falsch, weil die Prämisse richtig, die Konklusion aber falsch wird.

2. Ist (x) ungültig, so gibt es in $\mathfrak{M}$ ein A und ein B derart, daß $AaB \rightarrow BoA$ falsch ist. Dann ist AaB richtig, BoA falsch, BaA richtig. Da nach Voraussetzung

$$\frac{\begin{matrix} MaP \\ SaM \end{matrix}}{SaP} \text{ (Barbara) gültig, also } \frac{\begin{matrix} AaB \\ BaA \end{matrix}}{BaB} \text{ richtig}$$

ist, wird BaB richtig, also BoB falsch und damit XoX ungültig.

(3) In [3] (Abschnitt 4, 1.4.3) wird gezeigt, daß $\mathfrak{M}$ gewiß dann mindestens 3 Elemente besitzt, wenn $\mathfrak{A}$ zutrifft und überdies XaX gültig ist.

(4) Aus der Gültigkeit von XaX und XiX folgt auch die Ungültigkeit gewisser Modi, z.B. hier gleich eines ganzen Bündels:

Jeder Modus mit positiven Prämissen und negativer Konklusion ist ungültig. (32 derartige Modi gibt es.) Für $S = P = M$ werden nämlich bei jedem Wert von M die Prämissen richtig, die Konklusion falsch, so daß eine falsche Aussage dasteht.

§ 3

Nach diesen *einzelnen* Ableitungszusammenhängen, in denen identische Urteile vorkamen, seien Beispiele *systematischer* syllogistischer Untersuchungen genannt, bei denen identische Urteile in Beweisen verwendet werden.

(1) Leibniz deduziert $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ aus der Gültigkeit von Barbara, Celarent, Darii, Ferio, XaX und XiX ([1], S. 410—416).

(2) Nach Łukasiewicz folgen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}$ aus der Gültigkeit von XaX, XiX, Barbara, Datisi und der Ungültigkeit zweier bestimmter Modi ([2], S. 88—98). Bei der in [2], ch. V, dargestellten Verallgemeinerung der klassischen Syllogistik werden XaX und XiX als Axiome beibehalten.

(3) In [3] werden $\mathfrak{A}$ und die Gültigkeit von XaX vorausgesetzt, und gesucht werden dann sämtliche Axiomensysteme $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$. Dabei ist unter einem Axiomensystem von $\mathfrak{B}$ (kurz gesagt) ein „Teil" $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$ zu verstehen, der zur Herleitung van ganz $\mathfrak{B}$ hinreicht, wobei aber kein (echter) Teil $\mathfrak{B}''$ des Teils $\mathfrak{B}'$ die Herleitung von ganz $\mathfrak{B}$ ermöglicht. Es stellt sich heraus, daß es genau 432 Axiomensysteme $\mathfrak{B}'$ gibt. Sie werden in [3], Abschnitt 4, 7. 1, angegeben. Jedes besagt die Gültigkeit zweier bestimmter Modi und die Ungültigkeit zweier bestimmter Modi, besteht also aus vier Axiomen.

§ 4

In [2], S. 48, sind als „simplest logical formulae" XaX und $p \rightarrow p$ gegenübergestellt. Die Gültigkeit von $p \rightarrow p$ („the propositional law of identity") gehört in den Aussagenkalkül und ist leicht aus dessen gebräuchlichen Axiomen herleitbar (siehe z.B. [2], S. 81). Die Gültigkeit von XaX („the Aristotelian law of identity") gehört zur Syllogistik, aber

aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist die Gültigkeit von XaX oder von XiX nicht herleitbar.

Zum *Beweis* dieser Behauptung lassen wir $\mathfrak{M}$ aus den 3 Elementen A, B, C bestehen und wählen für

AoA	AoB	AaC
AeA	AeB	AiC
BoA	BaB	BaC
BeA	BiB	BiC
CoA	CoB	CaC
CiA	CiB	CiC

irgendwelche richtigen Aussagen. Wir werden zeigen, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bei diesem $\mathfrak{M}$ und dieser Wahl von $S\delta P$ zutreffen. Damit wird die Behauptung bewiesen sein, denn XaX und XiX sind hier ungültig, weil AaA und AiA falsch sind.

Subalternation und Konversion sind hier offensichtlich gültig. Als nächstes findet man, daß sich SoP nicht konvertieren läßt. Wie wir wissen, trifft $\mathfrak{A}$ zu, wenn überdies

$$SaP \rightarrow PoS \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (x)$$

ungültig ist; in der Tat ist (x) für $S = B$, $P = B$ falsch.

Zur Bestätigung von $\mathfrak{B}_1$ genügt, da jetzt $\mathfrak{A}$ gesichert ist, der (hier recht einfache) Nachweis, daß Barbara und Celarent gültig sind. (Außer Barbara & Celarent gibt es übrigens genau 35 weitere Modus-Paare, deren Gültigkeit für $\mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{B}_1$ hinreicht; vgl. [3], Abschnitt 4, 8. 2.)

Nun bleiben noch die 232 ungültige Modi. Wieder stützen wir uns auf [3]; dem dortigen Abschnitt 4, 5 entnimmt man, daß $\mathfrak{B}_0$ gewiß dann zutrifft, wenn sowohl die Modi

$$
\begin{array}{ccccc}
(1) & (2) & (3) & (4) & (5) \\
MeP & MaP & MaP & MoP & PoM \\
SeM & SeM & SeM & SaM & MaS \\
\hline
SiP & SiP & SoP & SoP & SoP
\end{array}
$$

als auch diejenigen Modi ungültig sind, die zwei positive Prämissen und eine negative Konklusion besitzen. Die zuletzt genannten Modi werden für $M = S = P = B$ zu falschen Aussagen, sind also ungültig. Wir bestätigen zum Schluß die Ungültigkeit der fünf vorher genannten Modi: Die Aussagen

$$
\begin{array}{ccccc}
(1) & (2) & (3) & (4) & (5) \\
AeA & BaB & AaC & CoB & CoB \\
AeA & AeB & AeA & BaC & BaC \\
\hline
AiA & AiB & AoC & BoB & CoC
\end{array}
$$

sind durchweg falsch.

§ 5

Identische Urteile ermöglichen, wie wir in § 2 sahen, gewisse Deduktionen. Aber sie lassen sich („trotz“ § 4) auch selber herleiten.

Ehe wir uns solchen Herleitungen zuwenden, sei erwähnt, daß man XiX aus XaX auch ohne Hilfe der Subalternation gewinnen kann: Man wählt in Barbari oder Darapti oder Bamalip $M = S = P$.

Der Übersichtlichkeit zuliebe setzen wir bei den beiden folgenden Sätzen ganz $\mathfrak{A}_1$ und ganz $\mathfrak{B}_1$ voraus, obgleich nur ein kleiner Teil davon gebraucht wird.

Definition. Wenn SaP richtig ist, nennen wir S einen Unterbegriff von P, P einen Oberbegriff von S.

Satz 1. Wenn es zu jedem Begriff X mindestens einen Begriff X^* gibt, der sowohl Unterbegriff von X als auch Oberbegriff von X ist, dann ist das identische Urteil XaX gültig.

Beweis. Bei festem X ist nach Voraussetzung sowohl $X^*\mathrm{a}X$ als auch $X\mathrm{a}X^*$ richtig. Der Modus Barbara geht für $S = X$, $M = X^*$, $P = X$ in die Aussage

$$\frac{\begin{array}{c} X^*\mathrm{a}X \\ X\mathrm{a}X^* \end{array}}{X\mathrm{a}X}$$

über, aus deren Richtigkeit die von $X\mathrm{a}X$ folgt — und das bei jedem Wert von X.

Satz 2. Wenn es zu jedem Begriff X mindestens einen Unterbegriff X' gibt, ist das identische Urteil $X\mathrm{i}X$ gültig.

Beweis. Angenommen, $X\mathrm{i}X$ sei bei einem bestimmten Wert von X falsch. Dann ist $X\mathrm{e}X$ richtig. Nach Voraussetzung gibt es ein X' derart, daß auch $X'\mathrm{a}X$ richtig ist, so das $X'\mathrm{o}X$ falsch (Kontradiktion) und $X'\mathrm{i}X$ richtig ist (Subalternation). Die Aussage

$$\frac{\begin{array}{c} X\mathrm{e}X \\ X'\mathrm{i}X \end{array}}{X'\mathrm{o}X} \qquad (*)$$

ist demnach falsch — wegen falscher Konklusion bei richtigen Prämissen. Das steht im Widerspruch zur Gültigkeit des Modus Ferio:

$$\frac{\begin{array}{c} M\mathrm{e}P \\ S\mathrm{i}M \end{array}}{S\mathrm{o}P,}$$

der ja für $S = X'$, $M = X$, $P = X$ in (*) übergeht.

Also ist $X\mathrm{i}X$ bei jedem Wert von X richtig.

Anmerkung. Es gibt 9 analog verlaufende Beweise, in denen statt Ferio je einer der 9 Modi.

Celarent, Celaront,
Cesare, Cesaro, Cemestres, Festino,
Ferison,
Calemes, Fresison

herangezogen wird.

§ 6

Noch heute trifft man gelegentlich auf das Vorurteil, die identischen Urteile seien inhaltsleer und nutzlos, aber unableitbar.

In § 1, § 2 und § 5 sahen wir etwas von ihrem „Inhalt", ihrer Verwendbarkeit und ihrer Ableitbarkeit.

Universität, Mathematisches Seminar
HALLE/SAALE
Allemagne D.D.R.