

///// studie / article //////////////////////////////////////

ŘÍKÁ LOGICISMUS NĚCO, CO SE ŘÍKAT NEMÁ?**Does Logicism Say Something That Should Not Be Said?**

Abstrakt: *Cílem tohoto článku je diskuse širšího významu Fregova logicistického projektu na pozadí Wittgensteinovy filosofie z Tractatu a Filosofických zkoumání. Čerpám při tom ze dvou základních pozorování, totiž (1) že se Fregův projekt snaží říci něco, co bylo pouze implicitní v každodenní aritmetické praxi, jak to demonstruje tzv. rekurzivní teorém, a (2) že se explicitnost zahrnutá v logicismu netýká samotných aritmetických operací, ale spíše způsobu, jímž byly definovány. Spíše než samotná (aritmetická) pravidla představuje tento pokus explikaci pravidel toho, jak se jimi řídit, tj. pravidel druhého řádu. Tyto poznámky dále rozpracovávám se stručnými odkazy na Brandomovo rozvinutí Fregova expresivistického a Wittgensteinova pragmatického projektu.*

Klíčová slova: *logicismus; Wittgenstein; řízení se pravidlem; inferencialismus; rekurzivní teorém*

Abstract: *The objective of this paper is to analyze the broader significance of Frege's logicist project against the background of Wittgenstein's philosophy from both Tractatus and Philosophical Investigations. The article draws on two basic observations, namely (1) that Frege's project aims at saying something that was only implicit in everyday arithmetical practice, as the so-called recursion theorem demonstrates, and (2) that the explicitness involved in logicism does not concern the arithmetical operations themselves, but rather the way they are defined. It thus represents the attempt to make explicit not the (arithmetical) rules alone, but rather the rules governing their following, i.e. rules of second-order type. I elaborate on these remarks with short references to Brandom's refinement of Frege's expressivist and Wittgenstein's pragmatist project.*

Keywords: *logicism; Wittgenstein; rule-following; inferentialism; recursion theorem*

VOJTĚCH KOLMAN

Filosofická fakulta, Univerzita Karlova v Praze
Nám. J. Palacha 2, 116 38 Praha 1
email / vojtech.kolman@ff.cuni.cz

Ve svém *Tractatu*¹ obviňuje Wittgenstein Fregovy a Russellovy pokusy o redukci aritmetiky na logiku, z nichž *de facto* vyrostl fenomén moderní logiky, z toho, že se snaží říci něco, co se *explicitně* říci nedá, ale nanejvýš se to jen *ukazuje v implicitním* použití jistých výrazů. Tím znovu oživil téma kantovského apriori jako toho, co je pro jistou teorii, případně typ poznání konstitutivní, tj. musí to platit, aby toto poznání bylo vůbec možné a daná teorie smysluplná, zároveň to ale není tematizovatelné po způsobu této teorie samé, jinak bychom dospěli ke sporům po vzoru antinomií čistého rozumu. Ve Fregově systému se zdají být symptomy tohoto prohřešku věty jako

pojem koně není pojem,²

či jejich méně technické varianty

přísudek nemůže být podmět,

především ale Russellův paradox, jenž znehodnotil, jak se má tradičně za to, celý logicistický projekt. Wittgensteinovu kritiku logicismu lze přitom správně považovat za problematickou ze stejných důvodů jako Kantův apriorismus, totiž s ohledem na absolutní nárok, jež ve svých distinkcích (apriori vs. aposteriori, říkat vs. ukazovat) kladou. Obě filosofické koncepce jsou z tohoto důvodu okamžitě vystaveny námitkám dogmatismu, či rovnou považovány za vyvrácené, v Kantově případě typicky s odkazem na objev neeuklidovských geometrií. Těmto výtkám se zdá Wittgensteinova verze apriorismu unikat jen tím, že blíže nespecifikuje, jaká že to logika či geometrie konkrétně tvoří formy našeho světa.

V tomto článku bych se chtěl zamyslet nad tím, do jaké míry je Wittgensteinova kritika Fregova logicismu oprávněná a využít příslušného filosofického pozadí k osvětlení širšího významu Fregova logicistického programu, a tím i ideje moderní logiky. Tvrdím, že problém Fregova logismu

Tento článek vznikl s podporou výzkumného záměru MSM 0021620839 financovaného Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky jako podstatné rozšíření a přepracování příspěvku předneseného na konferenci *Trends in Logic 2009* ve Frankfurtu nad Mohanem. Za připomínky k článku a podněty, které ovlivnily jeho finální podobu, patří díky Jaroslavu Peregrinovi, Vítu Punčochářovi a dvěma anonymním recenzentům statě.

¹ Ludwig WITTGENSTEIN, *Tractatus logico-philosophicus*. London: Routledge & Kegan Paul 1922.

² Gottlob FREGE, „Ueber Begriff und Gegenstand.“ *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, roč. XVI, 1892, s. 192–205.

nespočívá v tom, že by se snažil říci něco, co říci nelze, a již vůbec ne v jeho nekonzistenci (kterou, jak později ukázali neologicisté, lze celkem úspěšně eliminovat),³ ale v základní ideji, že je možné, ba dokonce nutné vyjádřit vše explicitně do té míry, že již nic nezůstane nevyřčeno. To je, jak ukáží, jádro Wittgensteinovy kritiky z *Filosofických zkoumání*,⁴ vzniklé relativizací dogmatického stanoviska z *Tractatu*.

Abychom se nepohybovali jen na úrovni čistě historické, pokusím se zároveň zasadit vše do kontextu současných debat a trendů analytické filosofie, které se hlásí jak k Fregovi a Wittgensteinovi, tak ke Kantovi, se specifickým důrazem na inferencialismus Roberta Brandoma. Ve svém projektu vymezuje totiž Brandom⁵ logiku jako podnik, v němž činíme implicitní pravidla naší jazykové praxe pravidly explicitními. V příoměru, který načrtává, se uživatelé jazyka hodni toho jména snaží vyjádřit své inferenční závazky (něco, co *dělají*) jako explicitní tvrzení (něco, co *říkají*), čímž dále rozvíjejí hru na dávání a požadování důvodů, přičemž je to právě účast na této hře, co odlišuje uživatele pojmu od konceptuálních „zpravodajů“, jako jsou teploměr nebo papoušek. Z hlediska našeho problému jsou významná dvě související rozlišení, totiž: (1) rozdíl mezi „implicitním“ a „explicitním“ a (2) možnost vyjádřit to první jako to druhé. V nich je *de facto* shrnut problém Wittgensteinovy kritiky Fregova logicismu. Z širšího úhlu pohledu zde bude Brandomův inferencialismus prezentován jako dědic obou, totiž (1) Fregova expresivistického a (2) Wittgensteinova pragmatického projektu, včetně jejich nejvíce problematických rysů, jmenovitě přesvědčení, že lze usilovat o univerzálně platnou logiku, na straně Fregově, a Wittgensteinovy, či spíše wittgensteinovské tendence užívat praxi jako vševysvětlující a dále nevyšetřovaný prostředek.

1. Rekurzivní teorém

Začal bych stručným náčrtem příběhu Fregova logicismu coby součástí projektu činění něčeho explicitním, a to na modelovém příkladě tzv. *rekurzivního teorému*. tj. klasické věty, nejprve dokázané Dedekindem a později (nepřímo) Fregem, která říká, že existuje právě jedna funkce definovaná

³ K otázkám adekvátní interpretace neologicistických výsledků srovnej můj článek: Vojtěch KOLMAN, „Lässt sich der Logizismus retten?“ *Allgemeine Zeitschrift für Philosophie*, roč. 30, 2005, č. 2, s. 159–174.

⁴ Ludwig WITTGENSTEIN, *Philosophische Untersuchungen*. Frankfurt am Main: Suhrkamp 1984.

⁵ Viz Robert BRANDOM, *Making It Explicit*. Cambridge, MA: Harvard University Press 1994.

obvyklým rekurzivním způsobem, totiž (i) stanovením hodnoty pro 0 a (ii) stanovením pravidel pro výpočet hodnoty $n + 1$ z hodnoty n . Abych byl zcela konkrétní: Vezmeme-li např. obvyklá pravidla pro sčítání

$$(i) \quad x + 0 = x$$

$$(ii) \quad \text{jestliže } x + n = y, \text{ pak } x + (n + 1) = y + 1,$$

jak byla zavedena Grassmannem, pak podle rekurzivního teorému existuje na přirozených číslech funkce splňující rovnice (i), (ii), tj. funkce, která nule v kombinaci s dalším číslem přiřazuje toto číslo samotné a která za předpokladu, že je číslu n a nějakému číslu x přiřazeno číslo y přiřazuje číslu $n + 1$ v kombinaci s x číslo $y + 1$; a je jen jedna taková.

V jednom z mimořádně temných míst *Grundlagen*⁶ vytýká Frege Grassmannovi právě to, že své rekurzivní definice aritmetických operací nedoplnil příslušným důkazem existence a jedinečnosti, který by – jak tvrdí – teprve zajistil jejich korektnost a smysluplnost. To, co dělá i z dnešního pohledu Fregovu kritiku mimořádně nesrozumitelnou, je naproste ignorování faktu, že z perspektivy praktické matematiky neexistuje žádná potřeba, a ve skutečnosti ani prostor pro takovouto licenci, neboť rekurze je jednoduše brána za přirozenou cestu, jak v aritmetice něco dokázat či definovat. Termíny analytické tradice to lze vyjádřit tak, že pro Frega narozdíl od Grassmanna nejsou rekurzivní definice základním výrazovým prostředkem, tj. *vlastními jmény* zaváděných funkcí, ale až odvozenou formací, *určitými deskripcemi*, jejichž pojmotvornou roli je třeba teprve explicitně obhájit, což je právě úkol pro rekurzivní teorém. Jak zmíníme záhy, přechod od jména k určité deskripci je prominentním případem činnosti něčeho implicitního explicitním.

Skutečnost, že byl rekurzivní teorém po dlouhou dobu vynecháván z knih věnovaných základům, a to dokonce takovými matematiky, jako byli Peano či Landau,⁷ můžeme sledovat zpět ke kantovské ideji matematiky založené na čistých názorech prostoru a času. V případě geometrie je tento odkaz celkem snadno uvěřitelný, neboť ke zdůvodňování geometrických pravd používáme, alespoň zpočátku, prostorových konstrukcí. V případě aritmetiky je takovéto zdůvodnění komplikovanější, primárně zde lze ale

⁶Gottlob FREGE, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau: W. Koebner 1884, § 6.

⁷Viz poznámka in: Michael POTTER, *Reason's Nearest Kin*. Oxford: Oxford University Press. 2003, s. 83.

zopakovat Coffův⁸ postřeh, že Kantovo studium kalkulu čerpalo z ostrovní tradice Newtonovy, která hýřila kinematickými příměry a pojmy, sekundárně, a pro nás významněji, obecnou souvislostí zdůvodňování aritmetických pravd s procesem počítání (v čase) v souladu s nějakými (rekurzivně danými) pravidly.

Vezmeme-li v úvahu základní protikantovský postoj logicistického programu, můžeme dále usoudit, že se Frege a Dedekind pokoušeli v aritmetice o to samé, o co Bolzano pro geometrii ve svém analytickém důkazu věty o mezihodnotě,⁹ kde z demonstrace zcela eliminoval prostorové příměry, totiž odstranit z aritmetiky názor času, a tím i celou předvědeckou praxi počítání. Máme-li před sebou kantovský protiklad názoru a pojmu, konstruktivního a diskurzivního, syntetického a analytického, pak můžeme říci, že Frege a Dedekind ve svém rekurzivním teorému ukázali, jak nahradit

1. dynamické, rekurzivní definice, zrcadlící ve své dvojfázové formě kalkulující činnost, tj. něco, co děláme,
2. explicitními prostředky moderní logiky, tj. něčím, co říkáme.

Rekurzivní teorém je v tomto čtení dokladem, že se Fregův logicistický projekt snaží říci něco, co bylo pouze implicitní v každodenní aritmetické praxi. Tato explikace se ale netýká aritmetických operací samotných, ale spíše způsobu, jímž byly definovány. Nejsou tak vyjadřována samotná (rekurzivní) pravidla, ale pravidla týkající se jejich následování, tj. pravidla druhého řádu. Tím je vysvětleno moderní povinné doplňování definic rekurzivních pojmů o další klauzuli typu „nic jiného než“, např.

(iii) $x + y = z$ neplatí pro *nic jiného*, než pro co to bylo definováno v klauzulích (i-ii),

či ekvivalentně

$x + y = z$ právě tehdy, když $(\forall f)((\forall u)(f(u,0) = u \wedge (\forall v,u)(f(u,v) + 1) = f(u,v) + 1) \rightarrow f(x,y) = z)$.

⁸ Alberto COFFA, *The Semantic Tradition from Kant to Carnap. To the Vienna Station*. Cambridge: Cambridge University Press 1991, s. 23–24.

⁹ Bernard BOLZANO, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, das zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. Prag: Gottlieb Haase 1817.

V elementárním případě přirozených čísel musí být rekurzivní definice

0 je číslo,
je-li x číslo, je $x + 1$ číslo

doplněna buďto o dodatek

nic jiného není číslo, než co bylo získáno výše uvedeným způsobem,

nebo nahrazena definicí explicitní

x je číslo tehdy a jen tehdy, když $(\forall X)(X(0) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow X(y + 1)) \rightarrow X(x))$,

která má zachytit (množinu) všech čísel 0, 1, 2, 3, 4, atd. a *nic jiného*. Obecným cílem těchto transformací je uchopit aritmetické předměty konceptuálně (odtud název *Begriffsschrift*), ne jako výsledek nějaké konstrukce, ale skrze pojmové vydělení – tj. prostřednictvím jediné formule – z nějaké větší domény objektů. Tato expresivní část projektu, reprezentovaná otázkou z Fregových *Grundlagen*:

co jsou a jak jsou nám dána čísla (či aritmetické funkce)?

byla vyřešena už ve Fregově *Begriffsschrift*¹⁰ spolu se zavedením druhořadových *explicitních* definic aritmetických pojmů. Zůstala otázka, jak je nám dán či jak je pojmenován příslušný *rod*, z něhož mají být konceptuálně vydělena čísla jako *druh*, nikoli samostatná kategorie. Nazvěme tento cíl nalezení příslušného základního oboru *ontologickou* částí projektu. Ve Fregových *Grundgesetze*¹¹ ji reprezentuje otázka formulovaná až na samém konci knihy, totiž

co jsou a jak jsou nám dány logické předměty?

Jelikož explicitní definici nelze tentokrát použít, protože předpokládá své *definiens* již jako dané, rozhoduje se Frege rozšířit logický slovník o druhořadový operátor $\{x:Fx\}$, jehož význam chce stanovit kontextuálně, skrze *Grundgesetz V (GV)*:

¹⁰ Gottlob FREGE, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle: L. Nebert 1879.

¹¹ Gottlob FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet I-II*. Jena: H. Pohle 1893/1903.

$\{x:F(x)\}=\{x:G(x)\}$ tehdy a jen tehdy, když $(\forall x)(F(x)\leftrightarrow G(x))$.

Tato stipulace mu má zajistit předměty zcela nezávislé na mimologic-kém, deskriptivním slovníku, tj. výše zmíněné *logické předměty*, dnes známé spíše pod názvem *čistých množin*.¹²

Je zřejmé, že Grundgesetz V, na němž leží tíha ontologické části Fregova projektu, odpovídá axiomu extenzionality teorie množin. Narozdíl od ní je ovšem Fregův plán pevně zakotven v tradici obratu k jazyku, jak ji rozvinul ve svých *Grundlagen*, podle nichž konstituce nějakých předmětů (např. čísel) obnáší popis systému příslušných jmen (reprezentací) a stanovení kritérií jejich identity.¹³ V případě logických předmětů by tato kritéria měla být analytické povahy. Fregův systém tak rozhodně není teorií množin, ale logikou obohacenou o specifický operátor, logikou s abstrakcí.

Jelikož se GV ukázal být pravým opakem analytického principu, totiž princip kontradiktorický, je vhodné zaměřit se na jeho původní technický cíl, jímž bylo zajistit obor předmětů dostatečně velký pro logicistické potřeby. A tento cíl lze splnit překvapivě snadno: Začneme objektem náležejícím logickému predikátu „být neroven sám sobě“, pokračujeme shromažďováním předmětů dosud vygenerovaných a dospějeme tak k posloupnosti čistých množin

$\{x:x \neq x\}$, $\{x:x = \{x:x \neq x\}\}$, $\{x:x = \{x:x \neq x\} \vee x = \{x:x = \{x:x \neq x\}\}$ atd.

Pouze s odkazem na GV lze ukázat, že jsou od sebe navzájem odlišné, a je jich tedy nekonečno. Jak jsme již zmínili, je GV nekonzistentní, to ale v tomto případě nevádí, neboť naprosto analogický výsledek může být dosažen pomocí tzv. *Humova principu* (HP)

$NxF(x) = NxG(x)$ tehdy a jen tehdy, když jsou F a G rovnopočetné,¹⁴

¹² Množina všech koček je sice abstraktní předmět – na rozdíl od koček nemá empirické vlastnosti, např. chlupy – ale je stále ještě ušpiněna kočičinou, empirickou vlastností, která ji vydělila. Nárok na logický předmět mají až množiny vydělené čistě logickými predikáty, např. množina všech předmětů, které se nerovnájí.

¹³ Pro detaily srov. moji fregovskou monografii Vojtěch KOLMAN, *Logika Gottloba Frega*. Praha: Filosofia 2002.

¹⁴ Rovnopočetností je míněna rovnost extenzí, tedy to, že každému prvku spadajícímu pod pojem F odpovídá právě jeden prvek spadající pod G a vice versa. Podstatná je, že tato relace je zachytitelná čistě logickými prostředky.

kteřý je, jak neologicisté ukázali, konzistentní. Celý logicistický příběh, doplníme-li jej o neologicistický epilog a obětujeme-li čistě logický charakter projektu, má tak, zdá se, šťastný konec. Vše se ale opět zkomplikuje ve chvíli, kdy vstoupí na scénu Wittgenstein.

2. Dva druhy proměnných

V *Tractatu* obviňuje Wittgenstein logicismus v první řadě z toho, že se snaží říci explicitně něco, co lze jen implicitně ukázat, např. co je „objekt“, „funkce“ nebo „číslo“. Podle Wittgensteina se ale nejedná o vlastní pojmy, jako jsou „kočka“, „strom“ či „číslo“, ale tzv. pojmy formální, které nelze něčemu smysluplně odepřít, a tedy ani připsat, ale jen naznačit pomocí vhodné proměnné. V případě čísla je tato proměnná identifikována s tím, co Lorenzen později ve své konstruktivistické matematice¹⁵ nazval proměnnou vlastní (Eigenvariable). Vlastní proměnná, používaná v definicích jako

0 je číslo,
je-li x číslo, je číslo $x + 1$,

odkazuje pouze ke znakům dosud vygenerovaným. Oproti tomu Fregeovy explicitní definice jako

$$(\forall X)(X(0) \wedge (\forall y)(X(y) \rightarrow X(y + 1)) \rightarrow X(x))$$

užívají tzv. objektovou proměnnou x referující k preexistujícímu či předem specifikovanému oboru hodnot.

Na tomto pozadí lze hlavní chybu logicismu spatřit v neopatrném míšení obou, vlastní a objektové proměnné. Na levé straně principů jako je GV či HP jsou zaváděny nové objekty (skrže generování jejich jmen), o nichž se zároveň předpokládá, že jsou v oboru kvantifikace proměnné na straně pravé. Tentýž fenomén se mj. vyskytuje v teorii množin, kde je role axiomů popsána jak konstruktivně coby zachycení procesu postupného budování iterativní hierarchie, tak staticky, kdy jsou axiomy chápány jako popis (definice) třídy modelů splňujících relace explicitně vyjádřené axiomy.

Kolize obou typů proměnných není obecně nebezpečná, pouze ilustruje, jak může přechod od implicitního k explicitnímu výrazně proměnit původní

¹⁵ Viz Paul LORENZEN, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*. Berlin: Springer 1955.

kontext. Jádro logicistického selhání spočívá spíše ve spřízněné myšlence, že je explicitní část v nějakém smyslu základnější nežli ta implicitní, a může ji tedy zcela nahradit. Tentýž problém je na podstatně obecnější rovině spojen s Russellovým¹⁶ a Quinovým¹⁷ nahrazováním vlastních jmen určitými deskripcemi, jehož je logicistický přechod od rekurzivních k explicitním formacím prominentním případem.

Dovolil bych si teď s ohledem na jeho důležitost stručně rekapitulovat celý problém: Jméno je tím, co musí jednoznačně denotovat, aby věta, v němž je použito, měla vůbec nějakou pravdivostní hodnotu. To znamená, že tvrzení, že

existuje jeden a právě jeden objekt odpovídající N,

je implicitním předpokladem, tzv. *presupozicí*, smysluplnosti věty

A(N).

Je-li výraz N klasifikován jako deskripce, stává se v Russellově čtení existenční presupozice součástí věty A(N), která tak má po příslušné logické analýze formu

$$(\exists x)(x \text{ je } N \wedge (\forall y)(y \text{ je } N \rightarrow x = y) \wedge A(x)),$$

tj. implicitně presuponované – existence a jedinečnost N – se stává explicitně spolutvrzeným. To má samozřejmě jisté konsekvence, které demonstrují na civilnějším příkladě. Chci-li na otázku

přestal jsi bít svoji ženu?

dostat i ve zcela obecném případě jednoznačnou odpověď „ano“, či „ne“, musím si buďto zajistit, že je splněn implicitní předpoklad, tj. že dotazovaný nějakou ženu vůbec měl a bil ji, nebo učinit tento předpoklad součástí otázky samé, tj. zeptat se:

měl jsi ženu, bil jsi ji a přestal jsi ji už s tím?

¹⁶ Viz Bertrand RUSSELL, „On Denoting.“ *Mind*, roč. 14, s. 479–493.

¹⁷ Viz eseje „On What There Is.“ In: Willard Van Orman QUINE, *From a Logical Point of View*. Cambridge, MA: Harvard University Press 1953.

Touto transformací se dotazovaný zjevně vyvážá z nezbytného mlčení v situaci, kdy ženu nebil či neměl, protože jakákoli odpověď na danou otázku by tuto situaci již presuponovala. Odpovědí „ne“ ale pak, narozdíl od prvního případu, netvrdí, že ženu bít přestal, ale že ji také eventuálně neměl nebo vůbec nezačal bít. To znamená, že přechod od implicitního k explicitnímu změnil radikálně diskurz uvedené otázky, resp. to, co je v něm nyní považováno za implicitní.

S ohledem na údajnou arbitrárnost vztahu jméno-pojmenované a s ní spjatý výskyt nedenujících jmen v přirozeném jazyce je podle Quinovy a Russellovy devízy vhodné většinu obvyklých jmen z jazyka eliminovat právě ve prospěch určitých deskripcí. Tím je ontologická část Fregova programu, snažící se vysvětlit

co je jméno N?,

redukována na otázku

co jsou hodnoty proměnné x v určité deskripci $ix(Px)$ nahrazující N?

Tato redukce ale vede zpět k původnímu problému, neboť, jak jsme již řekli, v analytickém rámci, vycházejícím z Frega, je dotaz po nějakém oboru předmětů (hodnot) dotazem po třídě příslušných jmen (a s nimi spojenými kritérii identity). Wittgenstein zaujímá ve svém *Tractatu* dosti schizofrenní stanovisko, když Russellovu teorii deskripcí na jednu stranu schvaluje jako způsob, jak dát větám o komplexech jednoznačný smysl (jednoznačné pravdivostní podmínky),¹⁸ na druhou stranu uznává, že tuto eliminaci – tj. proměňování presupozice do explicitní součásti presuponované věty – nelze provádět *ad infinitum*, jinak by svět neměl substanci,¹⁹ rozuměj: neexistoval by *de facto* žádný vztah věty a světa, ale jen vět navzájem. Rozličná postmoderní tvrzení typu: všechno je text, či symbolické orgie románů Dana Browna, vznikají právě nedoceněním tohoto argumentu.

V neologicistickém pokusu o ospravedlnění Fregova programu skrze důkaz bezespornosti HP lze rozpoznat tutéž kruhovost, formulujeme-li příslušné výsledky adekvátním způsobem:

HP je bezesporný jen tehdy, jestliže existuje nekonečná množina, či konverzí,

¹⁸ Viz WITTGENSTEIN, *Tractatus logico-philosophicus*, § 2.0201.

¹⁹ *Ibid.*, § 2.0211.

HP je sporný, jestliže nekonečná množina neexistuje.²⁰

Jak ukázat existenci takové množiny logicisticky přijatelnými prostředky, tj. bez užití vlastní proměnné, ale zůstává nevyřešený problém. A ačkoli si jej logicisté, narozdíl třeba od Hilberta a moderní modelových teoretiků, byli plně vědomi, Dedekindovy²¹ a Bolzanovy²² těžkopádné příklady nekonečných množin typu

věta A,
věta, že je A pravdivá,
věta, že je věta, že je A pravdivá, pravdivá,
atd.

ukazují velmi názorně, proč se tento plán nakonec ukázal neproveditelný: rekurze je očividně nejjednodušší způsob, jak něco konstituovat nebo pojmenovat v aritmetice a není jasné, jak ji obejít vynalezením větší domény, z níž by byly aritmetické pojmy vyděleny jako druh, když je tato doména opět specifikována rekurzivně.

To ovšem není nic jiného než pointa Poincarého kritiky logicistických definic,²³ výstižně zobecněná ve Wittgensteinově radě těm, kdo se snaží poskytnout aritmetice nebo jiné vědě nějaké základy:

nauč nás ji, tím jsi ji založil.²⁴

Takové námitky ale reprezentují jen druhý extrém, v němž je původní praxe (to, co děláme) jednoduše postavena na pedestal, aniž by nám bylo vysvětleno, v čem spočívá hodnota našich teorií (toho, co říkáme). Říkat něco (či činit něco explicitním) je přitom také něčím, co děláme, takže zbavit se logicistického programu tímto způsobem nedává zcela dobrý smysl. Pokusím se to vysvětlit podrobněji.

²⁰ Detaily viz třeba má kniha Vojtěch KOLMAN, *Filosofie čísla. Základy logiky a aritmetiky v zrcadle analytické filosofie*. Praha: Filosofia 2008, kap. 5.

²¹ Richard DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen*. Braunschweig: Vieweg 1888, teorém 66.

²² Bernard BOLZANO, *Paradoxien des Unendlichen*. Leipzig: Reclam 1951, § 13.

²³ Viz Henri POINCARÉ, *Science et méthode*. Paris: Flammarion 1908.

²⁴ Ludwig WITTGENSTEIN, *Philosophische Grammatik*. Frankfurt am Main: Suhrkamp 1973, s. 297.

3. Tři předpoklady

Spíše než *tractatovské* dictum, podle něhož se logicismus snaží říci něco, co lze jen ukázat, jsou pro naše účely vhodná *Filosofická zkoumání*, s jejich regresivním argumentem proti tezi, že každé pravidlo, jímž se řídíme, musí být explicitní. K tomu totiž, abychom se mohli řídit explicitním pravidlem, je třeba ho interpretovat, tj. vysvětlit, jak ho užívat korektně, což znamená řídit se dalším pravidlem, a kdyby obě měla být explicitní, následoval by nekonečný regres podobný tomu z Carrollova dialogu Achilla s želvou.²⁵ V něm je založení inference

1. od A k B

přeneseno na *modus ponens*

2. A, $A \rightarrow B$, tedy B;

a této inference zase na *meta-modus ponens*

3. $A \wedge (A \rightarrow B)$, $A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$, tedy B;

atd. Ve světle tohoto příkladu lze pak problémy logicismu identifikovat s následujícími předpoklady:

- a) V aritmetice (či v obecné inferenční praxi) je bezpodmínečně zapotřebí *modu ponens*, tj. výše uvedeného kroku (2), což znamená, že nelze pracovat pouze na základní úrovni (1) materiálních (např. aritmetických) inferencí.
- b) Krok (2) je v nějakém smyslu dokonce základnější než krok (1), neboť teprve skrze něj je exaktně zdůvodněn první – předvědecký – stupeň.
- c) Logika objevující se na úrovni (2) je nejobecnější možná. Tím pádem nejsou zapotřebí další kroky (3–), neboť jen opakují již dosažené. To se zdá být podpořené tím, že se logiky třetího a vyšších řádů dají redukovat na logiku řádu druhého.

²⁵Lewis CARROLL, „What the Tortoise Said to Achilles.” *Mind*, roč. 3, 1895, s. 278–280.

Ve zbytku článku bych tyto předpoklady či domněnky opatřil doplňujícím komentářem se stručnými odkazy k Brandomově rozpracování Fregova expresivistického a Wittgensteinova pragmatického projektu.

4. K čemu je logika?

Předpoklad (a) odpovídá otázce, proč a zda vůbec je zapotřebí druhý stupeň, tj. úroveň logiky. Je činění něčeho explicitním nutným předpokladem hry na podávání a vyžadování důvodů? Brandom na tuto otázku odpovídá záporně, i když zároveň přiznává, že obětováním kroku (2) ztrácíme mnoho, včetně rozkladu věty na nevětné části.²⁶ Jiní, např. McDowell,²⁷ nesouhlasí, tvrdíce, že diskurzivita není možná bez sémantického sebe-vědomí, či formulováno jinak: jazyk je univerzální médium, a tudíž jazyk bez možnosti hovořit o sobě samém (*a fortiori* o svých pravidlech) přestává být jazykem. Jelikož se celá diskuse může snadno zvrhnout v hádku o slova, navrhneme předběžně něco v tom smyslu, že logika je zapotřebí k hladkému fungování materiální praxe a nedává smysl ptát se, co bylo dříve a co později, neboť vztah logiky k tomu, čeho je logikou, je přísně atemporální. Co tím konkrétně myslím, bych rád vysvětlil na následujícím příkladu.

V reformované Cauchyho analýze bylo na praktické úrovni od počátku rozlišováno mezi stejnoměrnou a bodovou konvergencí, stejně jako se vědělo, že z prvního případu vyplývá druhý, nikoli *vice versa*. S ohledem na neadekvátnost přirozeného jazyka nebylo ale možné učinit tyto rozdíly explicitními, což způsobilo známé konfúze ohledně platnosti některých teorémů, jak je proslavil – byť v poněkud jiném kontextu – Lakatos.²⁸ Fregova *Begriffsschrift* eliminovala tyto problémy tím, že učinila zmíněné kvantifikační závislosti, stejně jako závislosti inferenční, explicitními. Skutečnost, že posloupnost funkcí $f : M \rightarrow R$ stejnoměrně, resp. bodově konverguje k funkci f , tak může být vyjádřena takto:

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in M)(\forall n \geq x) \left| f_n(y) - f(y) \right| < \varepsilon, \\ & (\forall \varepsilon > 0)(\forall y \in M)(\exists x \in \mathbb{N})(\forall n \geq x) \left| f_n(y) - f(y) \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

²⁶ Viz Robert BRANDOM, „Responses.“ In: STEKELER-WEITHOFER, P. (ed.), *The Pragmatics of Making It Explicit*. Amsterdam: John Benjamin 2008, s. 209–230.

²⁷ John McDOWELL, „Motivating Inferentialism: Comments on Making It Explicit (Ch. 2).“ In: STEKELER-WEITHOFER, P. (ed.), *The Pragmatics of Making It Explicit*. Amsterdam: John Benjamin 2008, s. 109–126.

²⁸ Viz Imre LAKATOS, „Cauchy and the Continuum: The Significance of Non-Standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics.“ *Mathematical Intelligencer*, roč. 1, 1978, s. 151–161.

Jelikož se tentýž typ inferenční závislosti, jenž byl rozpoznán v přechodu od stejnoměrné konvergence k bodové, vyskytuje také u spojitosti a jiných pojmu, je možné ospravedlnit všechny najeďnou odkazem k následujícímu inferenčnímu schématu:

$$(\exists x)(\forall y)A / (\forall y)(\exists x)A,$$

tj. bez odvolání se k obsahu části A. To samozřejmě výrazně zjednodušuje usuzování, neboť se nám tak snáze kontroluje původní materiální praxe. Podle Brandomovy expresivistické doktríny může být takováto kontrola považována za hlavní úkol logického slovníku.

V jistém smyslu tedy neměl vynález Fregovy logiky na výslednou podobu kalkulu žádný vliv, neboť všechny materiální inference v něm již byly přítomny. Jejich velký (a potenciálně nekonečný) počet ale stál v cestě jejich efektivní kontrole, což znamená, že nebyly vyloučeny příležitostné výjimky. Ty se samozřejmě vyskytují i po explicitní formulaci jistých inferenčních pravidel či norem, ale nyní jsme je – právě odkazem na tyto normy – oprávněni ignorovat coby produkty zmateného či nesprávného použití. V tomto smyslu tedy vynález adekvátní logiky mění mnoho, neboť jakmile je dosaženo kontroly nad původní, materiální praxi je možné tuto praxi také rozvíjet dále, a to směry zcela nepředvídatelnými předem, jak to ukazuje vznik mnoha zbrusu nových matematických disciplín spjatých s Fregovou logikou.

Tentýž druh transcendentálně-pragmatického argumentu, jenž byl právě použit k dedukci (praktické) nezbytnosti logického slovníku, může ospravedlnit také nutnou existenci nevětných výrazů (slov): je možné pracovat výhradně s monolitickými větami, ale jak zdůraznil již Frege,²⁹ jejich rozklad na části a opětovné skládání dohromady umožňuje vystavět a tím i kontrolovat nesrovnatelně více vět, z nichž většinu z nich ještě nikdo neslyšel ani nevslovil. Skutečnost tedy, že Brandom spojuje svoji transcendentální dedukci existence nevětných výrazů s existencí logického slovníku (speciálně implikace a negace)³⁰ činí jeho projekt koherentní jak z expresivistického, tak pragmatického hlediska.

²⁹ Gottlob FREGE, *Nachgelassene Schriften*. HERMES, H. – KAMBARTEL, F. – KAULBACH, F. (eds.). 2 vydání. Hamburg: Felix Meiner 1983, s. 243.

³⁰ Viz BRANDOM, *Making It Explicit*, s. 378 nn.

5. Relativita logického

Co se týče předpokladu (b), podle něhož je úroveň logických inferencí základnější než těch materiálních, Brandom stejně jako my v předchozím příkladě zastává zrcadlově opačné stanovisko, když definuje formálně platné inferenze či pravdy jako speciální případ těch materiálních, totiž těch, které nemohou být proměněny v neplatné úsudky či pravdy substitucí neprivilegovaného (mimologického) za neprivilegovaný (mimologický) slovník.³¹ Zbývá zodpovědět, podle čeho je vybírán privilegovaný či logický slovník. Existuje zde nějaká přirozená báze, nějaká *univerzálně* platná logika, nebo je volba logických výrazů zcela závislá na kontextu? K druhé možnosti se zdají ukazovat různé Fregovy poznámky, které jako ta následující, relativizují distinkci „formální vs. materiální“:

Stejně jako má geometrie pojem bodu, má i logika své vlastní pojmy a relace a ty také tvoří její obsah. Vůči těmto se nechová formálně. Žádná věda není zcela formální, ale do jisté míry je i gravitační mechanika formální, pokud jsou jí všechny optické a chemické vlastnosti lhostejné. Tělesa různé hmotnosti pro ni zaměnitelná nejsou; ale nic nestojí v cestě zaměnitelnosti těles odlišných vlastností chemických.³²

Ve světle tohoto pozorování a našeho výše uvedeného příkladu se nám snadno vnucuje závěr, že Fregova logika je *de facto* logikou Cauchyho a Weierstrassova kalkulu (kvantifikačních závislostí) bez jakéhokoli univerzálního nároku. V širší perspektivě však nelze nezaznamenat, že se Frege od tohoto transcendentálního pojetí odchyluje, když např. popisuje svou logiku jako vědu nejobecnějších zákonů pravdivosti.³³ V tomto bodě se Brandom překvapivě příklání k Fregovi, když se pokouší dospět ke slovníku zcela nezávislému na konkrétním diskurzu tak, že jeho výrazy nechá explikovat rysy souzení *per se*, či jak to vyjádřil Lorenzen ve své podobně koncipované dialogické sémantice, pravidla racionální argumentace.³⁴ V této výkladové linii lze pak roli implikace

³¹ *Ibid.*, s. 104.

³² Gottlob FREGE „Über die Grundlagen der Geometrie I–III.“ *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, roč. 12, 1906, s. 293–309, 377–403, 423–430, s. 428.

³³ FREGE, *Nachgelassene Schriften*, s. 139.

³⁴ Paul LORENZEN – Wilhelm KAMLAH. *Logische Propädeutik. Vorschule des vernünftigen Redens*. Mannheim: Bibliographisches Institut 1973.

$$A \rightarrow B$$

vysvětlit jako něco, čím je explikován obecný přechod od věty k větě, roli negace poněkud komplikovaněji jako kodifikací inkompatibilit v tom smyslu, že

$$\neg A$$

odpovídá tvrzení vyplývající ze všeho, co je inkompatibilní s A. (Materiální) inkompatibilita je zde stejně jako (materiálně) správná inference základní pojem. Co se týče zbytku logického slovníku, lze úlohu rovnosti

$$M = N$$

specifikovat jakožto explikaci vzájemné substituovatelnosti výrazů M a N ve větách *salva veritate*, kvantifikátor

$$(\forall x)A(x)$$

jako substituovatelnost *salva veritate* každého M za N v pravdivé větě A(N) a abstraktor

$$\{x:Fx\}$$

jako substituovatelnost *salva veritate* predikátu G za F, kde G je každý predikát koextenzionální s F. Žádný z těchto explikujících tahů není neškodný či redundantní, jak to ukazuje zvláště drasticky případ logické abstrakce, která činí příslušný vztažný kontext tím nejsilnějším možným, totiž sporným. Stejně jako převedení jména na určitou deskripci vypadá přitom nejprve celý tah mimořádně nevinně, nejde totiž zprvu o nic jiného nežli o převedení libovolné věty tvaru

$$F(N),$$

predikující nějakou vlastnost F předmětu N, do standardizovaného tvaru vztahu dvou předmětů

$$N \in \{x:F(x)\},$$

tj. explikaci implicitního vztahu elementární predikace. Tento přechod má ale za důsledek smysluplnost predikátu „ $x \in x$ “, jeho negace „ $x \notin x$ “, abstraktu „ $\{x: x \notin x\}$ “ a věty

$$\{x: x \notin x\} \in \{x: x \notin x\},$$

kteřá je podle úvodní konvence pravdivá tehdy, když je nepravdivá a *vice versa*. Abychom uvedli méně dramatický příklad, věnujme ještě pár slov kvantifikaci.

Zavedení kvantifikátoru totiž vyvolává konfúze týkající se právě problému logické pravdy, resp. logicky platného úsudku. Bolzano ve *Vědosloví*³⁵ navrhuje obejít potřebu konkrétního vymezení logického slovníku tím, že za logicky pravdivou (analytickou) větu prohlásí každou, v níž existuje alespoň jedna část (představa), kterou lze substituovat *salva veritate*. Když ale přijmeme pojem „pro každý“ do logického slovníku, není již možné považovat prostou substituovatelnost *salva veritate* za znak logické pravdivosti či analytičnosti, protože by se pak stala analytickou i (kontingentně) obecná věta typu:

Když v Praze prší, je v Praze mokro.

Proto rozlišujeme mezi valuací a interpretací. V Aristotelově logice, která kvantifikátor nemá, je toto rozlišení zbytečné a Bolzanova definice funguje, což také ukazuje, proč jsou úvahy o nutnosti existenčních presupozic v sylogistice pomýlené.

V rozporu s běžným míněním neplatí, že by Tarski ve svém článku „O pojmu pravdy“³⁶ tuto situaci nějak ujasnil, neboť se v něm, při popisu toho, co nazýváme Tarského teorií pravdy, zabývá pouze valuacemi (to jsou ony posloupnosti).³⁷ Důvod je jednoduše ten, že jeho jazyk není formální, ale formalizovaný. Rozdíl formule a věty, valuace a interpretace, neznal ani Frege, v důsledku čehož – přes četná prohlášení o odlišném, normativním

³⁵ Bernard BOLZANO, *Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und größtentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherigen Bearbeiter*. Sulzbach: Seidel 1837, § 148.

³⁶ Alfred TARSKI, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*. Warsaw: Towarzystwo Naukowe Warszawskie 1933.

³⁷ V článku „O pojmu pravdy“ se zdá Tarski krátce uvažovat i tzv. relativní pojem pravdivosti, v němž je pravdivost definována ve vztahu k určité doméně a jenž Tarski připisuje Hilbertově göttingenské škole. Viz Alfred TARSKI, *Logic, Semantics, Metamathematics*. CORCORAN, J. (ed.). Indianapolis: Hackett Publishing Company 1983, s. 199.

charakteru logiky³⁸ – nebyl s to její pravdy odlišit od pravd obvyklých jinak než stupněm obecnosti. Všechny základní zákony jeho aritmetiky jsou pro něj pak plně kvantifikované věty typu

$$(\forall F)(\forall x)(F(x) \vee \neg F(x)),$$

tj. věty platné o každém objektu a predikátu všeobírajícího univerza diskurzu. Uvedený výraz není různě interpretovatelnou formulí, ale dematerializovanou větou. Tím se vytrácí normativní rozměr logiky, interně zachycený ve formulaci, že logická pravda je ta, která platí ve všech interpretacích. Fregovi a Tarskému stačí jen sada valuací. Tím dochází ke konfúzi normativního a deskriptivního čtení, který je pro pochopení toho, co je a co není formální logika, zásadní.

6. Chiméra univerzální logiky

Existence univerzálně expresivního slovníku by každopádně potvrzovala předpoklad (c), tj. tvrzení, že logika dosažená na úrovni (2) je nejobecnější možná. Co je ale garantem toho, že závazky spojené např. s implikací \rightarrow nevariiují kontext od kontextu? Ve skutečnosti, jak před námi poznamenal již např. Stekeler ve vztahu k Lorenzenově dialogické logice,³⁹ neexistuje žádný *a priori* důvod, proč preferovat jeden kondicionál (např. konstruktivní) před jiným (např. klasickým), což znamená, že dostaneme-li se do potíží, potřebujeme explicitní (třetířádomá) pravidla či sémantiku. V Lorenzenově herní (dialogické) sémantice je tento závěr zvláště patrný, neboť v ní k odlišným pojetím logických spojek dospíváme okamžitě poté, co vedle pravidel *jak* táhnout, tj. hájit a napadat příslušné komplexní věty, musíme řešit i stanovení pravidel *kdy* táhnout, pro což se – na bázi obvyklého úzu – nedá najít žádné přirozené či bezprostřední opodstatnění.

To vše ovšem nevyklučuje velkorysejší čtení předpokladu (c), podle něhož je úroveň (2) dostačující, protože jejím dosažením byl již zvládnut přechod na jakoukoli další úroveň, tj. schopnost reflexe. V tomto smyslu se zdají být platné i předpoklady (a) a (b). Omyl logicismu spočívá nicméně v tom, že se tuto reflektující schopnost snaží chápat jako ovládanou nějakou super-

³⁸ Viz FREGE, *Nachgelassene Schriften*, s. 139, 157.

³⁹ Pirmin STEKELER-WEITHOFER, *Grundprobleme der Logik*. Berlin: de Gruyter 1986. Srov. také kritiku Brandoma in: Friderich KAMBARTEL – Pirmin STEKELER-WEITHOFER, *Sprachphilosophie*. Stuttgart: Reclam 2005.

logikou, logikou vědeckého bádání či něčím podobným. To je ale tentýž omyl, jehož se dopouští pragmatisté jako Lorenzen⁴⁰ (v dialogické logice), a Brandom (v inkompatibilistické sémantice) ve snaze artikulovat obecné zákony racionality či pragmatického chování. I když mohou být docela dobře ochotni uznat, že existuje pluralita logik více či méně závislých na odlišných cílech, s nimiž byly vytvořeny, stejně inklinují k závěru, že volba té které logiky musí být vedena také nějakou logikou, která je z definice nejobecnější ze všech. V tomto ale pouze napodobují intelektuální vývoj Fregův, jenž začal také slibně u myšlenky logiky jako nástroje vhodného pro jisté vědecké cíle,⁴¹ příležitostně zdůrazňoval její preskriptivní a relativní charakter, aby pak skončil u nejkonvenčnějšího, čistě deskriptivního určení logiky jako vědy o nejobecnějších zákonech pravdivosti.

7. Závěr

Shrňme tedy dosažené: Existují dobré důvody pro to, mít nějakou logiku, stejně jako existují dobré důvody pro to, mít logiku aritmetického diskurzu, neexistuje ale žádný dobrý důvod, proč by měl existovat právě jeden provždy fixovaný a nerevidovatelný logický systém. Fregova logika plní své cíle uspokojivě, jsme-li si vědomi jejich mezí stejně jako mezí každého jiného teoretického podniku. Logicismus se to rozhodl ignorovat, či, řečeno s Wittgensteinem, uchopit pravidla (aritmetické pojmy) jako naráz aktualizovaný celek, s cílem eliminovat jejich „pravidlovost“, tj. podstatnou spjatost s příslušnou materiální (aritmetickou) praxí zahrnující možnost dalšího vývoje a revizí. To se ukázalo být neproveditelné.

V jistém smyslu měl tedy Kant pravdu. V aritmetice spíše než s explicitními definicemi a axiomy začínáme generováním základní číselné posloupnosti a osvojením si aritmetických operací. Toho dosahujeme skrze konečný počet příkladů a protipříkladů (např. tabulek malé a velké náso-

⁴⁰ Paul LORENZEN – Kuno LORENZ. *Dialogische Logik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1978.

⁴¹ Viz FREGE, *Begriffsschrift*, s. V: „Vztah mého pojmového písma k jazyku života, mohu, domnívám se, nejzřetelněji znázornit, když jej přirovnám ke vztahu mikroskopu k oku. Oko má rozsahem svého použití, pohyblivostí, již se dovede přizpůsobit nejrůznějším okolnostem, nad mikroskopem velkou převahu. [...] Jakmile však začnou vědecké účely klást vysoké nároky na ostrost rozlišení, ukazuje se oko jako nedostatečné. Mikroskop se naproti tomu nejdokonaleji hodí přesně pro takové účely, ale právě kvůli tomu je nepoužitelný pro jakékoli jiné. Tak je toto pojmové písmo pomůckou vymyšlenou pro určité vědecké cíle a není možné ho odsuzovat proto, že se nehodí pro jiné.“

bilky) a dospíváme tak, skrze praxi pozitivních a negativních sankcí, k situačně-nezávislým, a tedy *potenciálně* nekonečným pravidlům, implicitně zakotveným v úzu. Vezmeme-li v úvahu jejich konečný, empirický původ, tato pravidla (instituce) jsou podstatně otevřená, tj. existují a vždy budou existovat případy, které jsou jimi nerozhodnuty, a tedy i důvod k revizi. Některým z těchto revizí se lze částečně vyhnout tím, že příslušná pravidla učiníme explicitními, čímž je spojíme s jinými pravidly a v důsledku relativně stabilizujeme příslušnou praxi. Snaha o definitivní stabilitu je ale iluzorní, stejně tak jako logicistický cíl vyjádřit vše explicitně tak, aby již nic nezůstalo na pochybách.

Takový závěr nám může samozřejmě připomínat standardní antiskeptický argument, podle něhož nejsme oprávněni zpochybňovat něco (např. vědeckou hodnotu pre-axiomatických pojmů), co je méně pochybné než toto pochybování samotné. Ten je ale stejně jako celá filosofie praxe také kontroverzní, neboť nedoceňuje teoretickou dimenzi poznání, či, skeptickou terminologií, hypotetickou možnost pochybovat o všem. Zatímco tedy logicisté podceňují význam praxe, příznivci Wittgensteina, zvláště pak v tradici tzv. oxfordské jazykové školy, inklinují k tomu, redukovat teoretický aspekt poznání na vlastnost nějakého náhodného úzu, aby nakonec došli k chápání pravidel po logicistickém způsobu jako nerevidovatelně daných, např. ve formě hesel nějakého slovníku.

Skutečnost, že to je v ostrém rozporu s Wittgensteinovými vlastními úmysly, ukazuje např. jeho reformulace slavného Brouwerova motta „matematika je činnost, nikoli teorie“⁴² jako „matematika je samozřejmě v jistém smyslu teorie, ale také činnost.“⁴³

Z širší filosofické perspektivy není toto tvrzení – a náš úplný závěr – ničím jiným nežli jednou z řady spřízněných dialektických tezí, počínaje Platónovým prohlášením, že bytí musí být jak nehybné (jak tvrdili eleaté), tak v pohybu (jak říkal Hérakleitos), jinak by nebylo možné poznání ani omyl,⁴⁴ a konče Kantovým tvrzením, že poznání je vzájemný produkt obou,

⁴² Luitzen Egbertus Jan BROUWER, *Over de grondslagen der wiskunde*. Amsterdam: Universiteit Amsterdam 1907, s. 61. Odkaz na stránku podle anglického překladu otištěného in: Luitzen Egbertus Jan BROUWER, *Collected Works I*. HEYTING, A. (ed.). Amsterdam: North-Holland 1975, s. 13–101.

⁴³ WITTGENSTEIN, *Philosophische Untersuchungen*, s. 573.

⁴⁴ Viz PLATÓN, *Sofisté*. Praha: OIKOYMENH 1995, 249c-d: „Tu tedy je, jak se podobá, člověku milovnému moudrosti a těchto věcí si nade všechno vážícímu naprosto nutno, počínati si z těchto důvodů takto: od těch, kdo hlásají buď jedno, nebo množství idejí, nepřijímat tvrzení, že všechno stojí, a na druhé straně zase od těch, kteří ve všem všudy uvádějí jsoucnou

názoru a pojmu.⁴⁵ Takto interpretován reprezentuje logicismus se svým cílem založit aritmetiku na logice pouhou antitezi ke Kantově tvrzení, že matematika je názorné povahy. Příslušná syntéza obou může být nalezena např. v Hilbertově pozdní kombinaci finitistického postoje s axiomatickou doktrínou nebo v jejich Lorenzenově rozpracování v operativní logice a aritmetice. Wittgensteinova (především) pozdní filosofie zde přitom hraje důležitou roli speciálně pro své pragmatické akcenty, především ale s ohledem na pravidelná varování, že neexistuje nic takového jako definitivní základy, nýbrž jen různé články v řetězci nikdy nekončícího dialektického vývoje.

v pohyb, vůbec ani neposlouchat, nýbrž podle dětského přání, aby ,to, co je nehybné, se také pohybovalo', soudit, že jsoucno a vše jest jedno i druhé.“

⁴⁵ Immanuel KANT, *Kritik der reinen Vernunft*. Riga: Johann Friedrich Hartknoch 1781/1787, A 50/B 74.