Gottfried Wilhelm Leibniz.
Las bases de la modernidad

Coordinadores
Luis Antonio Velasco Guzmán • Víctor Manuel Hernández Márquez

FES UNAM ACATLÁN

Universidad Nacional Autónoma de México • Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Gottfried Wilhelm Leibniz.
Las bases de la modernidad

Coordinadores
Luis Antonio Velasco Guzmán • Víctor Manuel Hernández Márquez

FES UNAM ACATLÁN

Universidad Nacional Autónoma de México • Facultad de Estudios Superiores Acatlán

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ
LAS BASES DE LA MODERNIDAD

Luis Antonio Velasco Guzmán
Víctor Manuel Hernández Márquez
(coordinadores)

Portada: Norma Guadalupe Rojas Borja
Corrección de estilo: Claudia Eliuth Colomer Hernández
Formación: Zita Patricia Flores Angeles

Primera edición: 2018

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN
Av. Alcanfores y San Juan Totoltepec s/n,
C.P. 53150, Naucalpan de Juárez, Estado de México.
Unidad de Servicios Editoriales.

ISBN: 978-607-30-0189-2

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

ÍNDICE

IV. PROBLEMAS ÉTICOS Y POLÍTICOS

V. EL PROBLEMA DEL FUNDAMENTO

LEIBNIZ Y LAS MATEMÁTICAS: PROBLEMAS EN TORNO AL CÁLCULO INFINITESIMAL

Alberto Luis López[1]
Facultad de Estudios Superiores Acatlán, UNAM

El lema de Leibniz fue: en el ámbito del espíritu
se busca la claridad,
en el mundo material se busca la utilidad.[2]

[1] Agradezco al Programa de Apoyo a la Investigación para el Desarrollo y la Innovación (PAIDI) "Filosofía Moderna: las bases de la Modernidad" de la Facultad de Estudios Superiores Acatlán, por el generoso apoyo brindado al Seminario Permanente de Filosofía Moderna, coordinado por el Dr. Luis Antonio Velasco, sin el cual no hubiera sido posible la realización de este trabajo.

[2] Nef, Fréderic. *Leibniz et le langage*, Paris, PUF, 2000, p. 44. *Cfr.* Benson Mates, *The Philosophy of Leibniz, Metaphysics and Language*, Nueva York, Oxford University Press, 1986, p. 15 y Kuno Fischer, Gottfried Wilhelm Leibniz: Leben, Werke und Lehre. 5th ed. Heidelberg, Carl Winter Verlag, 1920, p. 31.

Introducción

El cálculo infinitesimal elaborado por Leibniz en la segunda mitad del siglo XVII tuvo, como era de esperarse, muchos adeptos pero también importantes críticos. Uno pensaría que cuatro siglos después de haber sido presentado éste, en las revistas, academias y sociedades de la época, habría ya poco qué decir sobre el mismo; sin embargo, cuando uno se acerca al cálculo de Leibniz –tal y como me sucedió hace tiempo–[3] fácilmente puede percatarse de que el debate en torno al cálculo leibniziano ha trascendido las fronteras temporales del siglo XVII y XVIII y aún sigue vigente, al menos en parte y sobre ciertos puntos específicos. Lo anterior resulta un tanto inquietante, entre otras cosas porque implica que hay que revisar el cálculo leibniziano para tratar de entender el motivo por el que se sigue debatiendo actualmente.

El propósito de este artículo no es presentar las tesis principales del cálculo, tampoco hacer una defensa del mismo y mucho menos desarrollar una crítica de sus fundamentos matemáticos, epistémicos u ontológicos. Mi propósito es menos ambicioso, pretendo mostrar, en primer lugar, dos de las primeras objeciones que se formularon contra el cálculo infinitesimal y que fueron hechas por dos contemporáneos de Leibniz, a saber, Rolle y Nieuwentijit; por otro lado, y sirviéndome de lo anterior, quiero presentar dos comentaristas actuales que abordan el tema del cálculo. Lo anterior con el objetivo de ilustrar cuál es el estado de la cuestión, es decir, en qué momento está el debate sobre el cálculo infinitesimal y en qué se enfocan actualmente los comentaristas al hablar sobre él, pues al hacerlo –e incluso a veces sin pretenderlo– mantienen abierto el debate sobre los aciertos y desaciertos del método infinitesimal.

[3] Luis López, Alberto. "Berkeley: el origen de la crítica a los infinitesimales", *Cuadernos Salmantinos de filosofía*, núm. 41, 2014, pp. 195-217.

Contexto del cálculo leibniziano

En 1684, Leibniz publicó en la revista *científica Acta Eruditorum*[4] el texto fundador del cálculo infinitesimal, a saber, *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque Tangentibus, quae nec Fractas nec Irrationales Quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* ("Nuevo método para las máximas y mínimas así como para las tangentes, que no se detiene ante las cantidades fraccionarias o irracionales y es un singular género de cálculo para estos problemas"); en dicho texto –por cierto– presenta sin demostrar el método para diferenciar todo tipo de cantidades racionales, irracionales, enteras o fraccionarias. Dos años después, en 1686, volvió a retomar la cuestión en un segundo artículo publicado nuevamente en el *Acta Eruditorum*; ese escrito fue presentado a modo de *addendum* y llevó por título *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* ("Sobre geometría oculta y análisis de indivisibles y de infinitos").[5] Este artículo estaba consagrado a los métodos de integración y "en él se encuentra el primer uso del signo de integración (la primera letra de la palabra *Summa*) y la ecuación de la cicloide escrita bajo la forma:

$$y = \vee 2x - x^2x^2 + \int dx : \vee 2x - x^2$$

[4] Las *Acta Eruditorum* constituyeron la primera revista científica alemana. La revista fue fundada por Leibniz en la ciudad de Leipzig, su primer número apareció en 1682 y el último (de la primera época) en 1731; a partir de entonces fue nombrada *Nova Acta Eruditorum* y duró, ya con ese nombre, hasta 1782. Leibniz publicó varias de sus obras en ella y lo hizo desde el primer volumen, en el que apareció su escrito matemático *De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus*.

[5] Debo decir que ambos textos aparecen en la edición de Javier de Lorenzo, trad. Teresa Martín Santos, Madrid, Tecnos, 1994, segunda edición. Por otro lado, el primer texto, *Nova methodus*, se reproduce en la edición de Javier Echeverría de los escritos de Leibniz, Madrid, Gredos, 2011, pp. 326-337.

donde las abscisas x son contadas perpendicularmente en la base de la cicloide y la radio del círculo generador es tomado por unidad."[6]

A finales de los años ochenta del siglo diecisiete Leibniz presentó su nuevo cálculo, pero su difusión no fue inmediata sino más bien gradual y se debió en gran medida a los hermanos Jakob Bernoulli y Johann Bernoulli; sobre todo este último fue especialmente relevante para la difusión del cálculo, porque lo introdujo en los medios franceses de inspiración malebranchista con motivo de las lecciones dadas por el marqués Guillaume de L'Hôpital en 1691-1692. Los primeros textos en los que se implementó el nuevo cálculo, dentro de la Academia de Ciencias de París, datan de 1693 y aparecen en los registros de las Actas de las reuniones de dicha Academia, primero bajo la firma del marqués de L'Hôpital y de Pierre Varignon y después bajo las de Joseph Sauveur y Thomas Fantet de Lagny.[7] En esa época, en 1696, el marqués Guillaume de L'Hôpital, alumno de Johann Bernoulli, publicó en París el primer tratado (casi un libro de texto) consagrado al nuevo cálculo: *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes* ("Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas").

El resumen más claro de la historia del cálculo leibniziano lo hizo el propio Leibniz en su ensayo de 1714 *Historia et origo calculi differentialis,*[8] que redactó con la clara intención de presentarse como el verdadero inventor del cálculo.

---

[6] Boudenot, Samueli, J. J. *30 ouvrages de mathématiques qui ont changé le monde*, París, Ellipses, 2006, p. 139.

[7] Para más detalles véanse las notas de Michel Blay en "Deux moments de la critique du calcul infinitésimal: Michel Rolle et George Berkeley", *Revue d'histoire des sciences*, núm. 39, 3, 1986, pp. 223-253.

[8] Gerhardt, C. I., (ed) *Mathematische Schriften von Leibniz*, vols. I-VII, Berlin y Halle, reimp. Georg Olms Verlag. Hildesheim-Nueva York, 1843-63/1962. De aquí en adelante utilizaremos la forma canónica GM, volumen, páginas. En este caso GM, V, pp. 392–410.

Leibniz y el cálculo infinitesimal

Leibniz consideraba que todas las ciencias constituían una unidad, en gran medida por eso abordó tantas áreas del saber, como las matemáticas, la física, la historia, la filosofía, el derecho y algunas otras más. Un ejemplo de esto fue su *scientia infiniti*, como él mismo llamó a su cálculo diferencial e integral en una carta a Wolff de 1713,[9] sobre la que pretendió dar una exposición sistemática que –por cierto– nunca llevó a cabo.[10] En relación con esto, y sin entrar en la conocida polémica sobre la invención del cálculo (que desde hace más de un siglo fue zanjada salomónicamente diciendo que tanto Newton como Leibniz usaron vías y métodos diferentes para llegar [cada uno por su cuenta] al mismo descubrimiento[11]), hay que decir que a Leibniz no le resultó fácil obtener la aprobación sobre su nuevo método, pese a lo que algunos pudieran pensar, como es el caso de Knecht quien afirma laxamente que "el cálculo diferencial e integral tiene éxito y rápidamente se impone al mundo científico tanto por los nuevos resultados que pueden alcanzarse con él como por la elegancia, simplicidad y certeza de su uso."[12] Entre quienes no se mostraron del todo convencidos con el método

---

[9] Carta a Christianum Wolfium de 1713, GM V, p. 382 ss. Al menos en un principio el cálculo infinitesimal se presentó bajo dos aspectos: cálculo diferencial (derivado del problema de la tangente) y cálculo integral (derivado del problema de la cuadratura); sin embargo, Leibniz se encargó de mostrar la reciprocidad entre ambas nociones al publicar en las *Acta Eruditorum* de 1693 su *Supplementum geometriae dimensoriae*, donde dio la demostración de que la integración es la operación inversa de la diferenciación.

[10] GM I, p. 7.

[11] Hace mucho tiempo que ésta es la postura dominante, véase, por ejemplo, la actitud de Bertrand Russell en su *libro Leibniz: A critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*, Cambridge, Cambridge University Press, 1900, p. 6.

[12] Knecht, Herbert H. *La logique chez Leibniz*, Lausanne, L'age d'homme, 1981, p. 303.

leibniziano, al menos en un principio, se encontraba el importante matemático neerlandés Christiaan Huygens, de ahí que Leibniz se esforzase especialmente para obtener su reconocimiento debido a que, por algún tiempo, aquél se mostró escéptico respecto a los fundamentos de su método, hasta que al constatar que podía resolver problemas antes irresolubles decidió finalmente aprobar el método leibniziano. El reconocimiento del neerlandés puede constatarse en una carta del 1° de septiembre de 1691, en la que señala que se alegra del descubrimiento de Leibniz porque lo llevará a tener un conocimiento mucho mayor, entre otras cosas, "de las cuadraturas y sus relaciones y dependencias mutuas."[13]

Fue característico del pensamiento de Leibniz que le interesase más el método que los propios resultados, y eso fue justamente lo que sucedió con el cálculo infinitesimal, pues para cuando lo desarrolló ya se conocían muchos resultados parciales en matemáticas pero había que encontrar un método general que englobara dichos resultados. Ese método, como puede colegirse, era para Leibniz el cálculo infinitesimal, el cual –creía– permitía resolver muchos problemas irresolubles hasta entonces por la geometría analítica cartesiana.[14] Ésta introducía el cálculo en la geometría, pero estaba limitada a ciertos problemas (que en gran medida motivaron su *De geometria recondita*), que Leibniz examinó con cuidado en aras de plantear un nuevo método que no estuviera sometido a tales limitaciones. Con dicho método pretendía representar y estudiar las curvas independientemente de la manera en que fueran presentadas, lo que resultaba especialmente útil para la cuestión de la máxima y la mínima curvatura de una curva y que dio paso a su *Nova methodus pro maximis et minimis* de

[13] Carta de Huygens a Leibniz en GM II, p. 98.

[14] Una sucinta e interesante contextualización de los antecedentes del cálculo leibniziano la da Knecht en su libro sobre Leibniz. Herbert H. Knecht, *op. cit.*, nota 10, pp. 296 ss.

1684.[15] Con su nuevo método Leibniz podía encontrar –como apunta Martin– “a partir de la ecuación de cualquier curva, gracias a los diferenciales, la tangente y recíprocamente reencontrar la curva misma a partir de la ecuación de la tangente o de una variable dependiente de la tangente”;[16] además, podía calcular la superficie formada por una curva con su abscisa y sus ordenadas o con otras curvas. La geometría analítica cartesiana no podía resolver estos problemas más que para ciertas curvas, mientras que para Leibniz su método era capaz de resolverlo para todas las curvas y hacerlo sólo mediante el cálculo (entre otras cosas porque [para él] se trataba de un método puramente axiomático-deductivo).

Desde luego la configuración del sistema de signos, necesario para las diversas notaciones, era central para el nuevo método y por eso resultó tan importante el tema para el filósofo de Leipzig, lo que explica su correspondencia con Bernoulli sobre esta cuestión en el año 1696[17] y sobre todo su carta a Huygens de octubre de 1690, donde trata con mayor detalle los beneficios de su notación respecto a la de Newton.[18] De manera resumida se puede decir que la notación de Leibniz es consecuencia de considerar que una curva es descrita por un punto que tiene una abscisa (x) y una ordenada (y); siendo esta última una función de aquélla y estando cada una de las dos designada con una letra.[19]

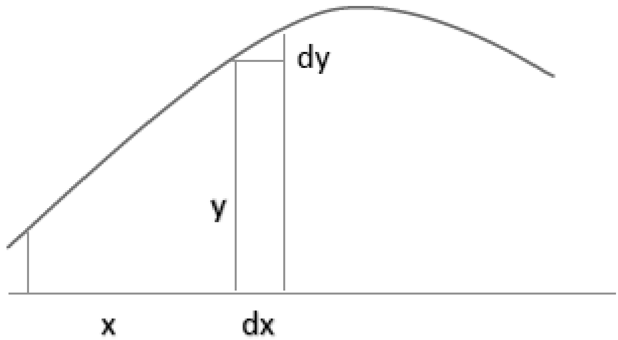
[15] *Acta Eruditorum*, 1684; GM V, pp. 220 ss.

[16] Leibniz, Gottfried Martin. *Logique et métaphysique*, Paris, Beauchesne, 1966, p. 67.

[17] Carta de Leibniz a Bernoulli del 8 de marzo de 1696: GM III, 262. Respuesta de Bernoulli a Leibniz el 7 de abril del mismo año: GM III, p. 273.

[18] La carta a Huygens es del 3 de octubre de 1690: GM II, pp. 49 ss.

[19] En esta parte retomó la exposición de Barthélemy sobre el cálculo leibniziano. Barthélemy, Georges. *Histoires des Sciences*, Paris, Ellipses, 2009, pp. 708 ss.



Leibniz consideró un incremento de *x* infinitamente pequeño (y, sin embargo, distinto de cero), y lo llamó *diferencial* de *x* notándolo como *dx*; la variable pasó de *x* a *x* + *dx* mientras la función de *y* a *y* + *dy*. A su vez mostró cómo calcular *dy* por un *dx* dado arbitrariamente, y cómo obtener la información deseada, esto es, las variaciones de *y* y la apariencia de la curva. Consideró diferenciales de diferenciales, notados como d^2y, por d (d*y*), incorporando de esta manera una práctica de los infinitamente pequeños de diferentes órdenes (de segundo orden, tercero o más). Al mismo tiempo, Leibniz consideró reconstituir una línea *x* a partir de la d*x* que la compone, lo que designó como $x = \int dx$, empleando como símbolo –como ya mencioné– la 's' estilizada de *summa*. En relación a esto, Barthélemy considera que "estamos en presencia de dos nuevas operaciones, inversas la una de la otra. Ellas mantienen buenas relaciones con las operaciones tradicionales, a través de reglas como la que indica cómo diferenciar un producto $u \cdot v$ de dos magnitudes: $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$".[20]

Debido a que las magnitudes *x* e *y*, geométricas por naturaleza, se prestaron al cálculo aritmético (algebraico), lo mismo pasó con las nuevas magnitudes que eran los diferenciales, aunque hay que decir que no eran magnitudes que respetaran plenamente las mismas reglas que las otras; aña-

[20] *Ibidem*., p. 709.

dir un número finito de diferenciales, cualquiera que sea, no permite recomponer un segmento dado, de ahí que su estatus (de los diferenciales) haya sido incierto, no obstante su aceptación y uso en el siglo XVIII. Precisamente ese estatus incierto fue, entre otras cosas, lo que llevó a algunos de los contemporáneos de Leibniz a cuestionar el nuevo método infinitesimal.

La recepción crítica del cálculo o "no hagas cosas buenas que parezcan malas"

Para algunos matemáticos del siglo XVII y XVIII el cálculo de Leibniz adolecía de rigor, pues como la noción misma de infinito era problemática consideraban que su método olvidó que el criterio de rigor tradicional, en matemáticas, rechazaba el uso de conceptos infinitos, es decir, sólo permitía magnitudes finitas. Para algunos su olvido o negligencia trajo como consecuencia justamente la falta de rigor, lo que lo llevó a caer en incoherencias y errores. A esto se sumó el hecho de que muchos de sus simpatizantes dieron diversas interpretaciones sobre el nuevo método, lo que no ayudó en nada a que fuera mejor comprendido y valorado. Desde luego para Leibniz su método era bastante riguroso y no suponía la realidad de cantidades infinitesimales, por eso hacia el final de su vida[21] argumentó, a modo de respuesta a sus críticos, que los infinitesimales eran una especie de 'ficciones' bien fundamentadas. Es cierto que con ello su doctrina parece solucionar ciertos problemas, pues se aclara que los infinitesimales no son cantidades positivas reales aunque tampoco deben ser tomados como nada, es decir, como *non quanta*.

Antes de hablar sobre las críticas de Rolle y Nieuwentijt al cálculo debo decir que para algunos comentaristas, como

[21] *Vid. infra*, nota 49.

Katz, Sherry o Arthur,[22] el texto leibniziano *Cum Prodiisset* fechado alrededor de 1701 resulta importante para comprender mejor "la postura fundacional" del alemán,[23] pues fue a partir de entonces que comenzó a difundirse mayormente su método; sin embargo, ya antes había publicado varios artículos sobre su propuesta y esas primeras publicaciones fueron las que la dieron a conocer, por lo mismo fueron las que detonaron varias de las críticas que recibió.

Michel Rolle, un crítico desde la Academia

Michel Rolle (1652-1719) fue un matemático francés que se dedicó al estudio de la teoría de ecuaciones y que pasó a la historia de la disciplina por haber desarrollado el teorema que lleva su nombre, es decir, el teorema de Rolle;[24] sin embargo, lo retomo aquí no por su teorema sino por su participación en el debate sobre el cálculo diferencial, recogido en las actas de 1700 de la Academia de Ciencias de París.

El acta del sábado 17 de julio de 1700 señala lo siguiente sobre el matemático francés: "El señor Rolle comenzó a leer un escrito contra los supuestos fundamentales de la geometría de los infinitamente pequeños. Lo ponemos como consecuencia del primer día."[25] Como bien se señala en las actas,

[22] Richard, Arthur, T. W. "Leibniz's Syncategorematic Infinitesimals, Smooth Infinitesimal analysis and second-order Differentials", en www.humanities.mcmaster. Cap. 1.

[23] Katz, Mikhail G., David Sherry, "Leibniz's Infinitesimals: Their Fictionality, Their Modern Implementations and Their Foes from Berkeley to Russell and Beyond", *Erkenntnis*, núm. 78, 3, 2013, p. 577.

[24] Sobre ese teorema puede verse el artículo de Ernesto Pérez-Chavela y Kyriakos Petakos, "Una nota sobre el Teorema de Rolle", *Miscelánea Matemática*, 50, 2009, pp. 89-94.

[25] *Vid. Procès-verbaux des séances de l´Académie royale des sciences*, tomo 19, 1700, p. 281. Las referencias de las citas las tomo del artículo de Michel Blay, *op. cit*, nota 5, pp. 223-253. He cotejado las citas con las actas originales, éstas pueden consultarse en línea en http://gallica.bnf.fr/.

Rolle criticó el cálculo por considerar que había insuficiencia y falta de rigor lógico en sus conceptos y principios fundamentales. Su lectura lo llevó a formular ejemplos para mostrar que el nuevo cálculo llevaba al error, ya que no daba los mismos resultados que los obtenidos al usar los métodos clásicos, como por ejemplo los empleados por el connotado matemático neerlandés Johannes Hudde (1628-1704).

En una segunda acta nuevamente se hace mención de Rolle y de su crítica al cálculo; se trata del acta del miércoles 21 de julio del mismo año 1700, en la que se dice que "M. Rolle ha terminado su discurso contra la geometría de los infinitamente pequeños."[26] En las actas puede leerse que en esa misma sesión el matemático Pierre Varignon, miembro tanto de la Academia francesa como de sus pares inglesa y alemana, defendió el nuevo cálculo contra los ataques de Rolle: "M. Varignon ha respondido fuerte a estos discursos en ausencia de los principales autores del cálculo diferencial que apenas son mencionados."[27] Pese a que la primer acta no registró los argumentos de Rolle, es posible hacerse una idea de los mismos a través de la respuesta que dio Varignon el sábado 7 y el miércoles 11 de agosto de ese año;[28] sin embargo, lo que sí se puede conocer claramente son algunas de las dificultades que Rolle presentó al nuevo cálculo y que quedaron registradas en las actas de la Academia del miércoles 11 de agosto. En ellas puede leerse lo siguiente: "Dificultad I. Si en geometría hay infinitamente grandes, infinitos los unos de los otros, e infinitamente pequeños, infinitamente los unos de los otros."[29]

En otra página de la misma acta aparece una segunda cuestión: "Dificultad II. Si una cantidad mayor o menor a su

[26] *Ibidem.*, p. 286.

[27] *Ibidem.*, p. 287.

[28] *Ibidem.*, p. 309.

[29] *Ibidem.*, p. 311.

diferencial, se puede tomar por igual a la misma cantidad."[30] Michel Blay señala que lo planteado por Rolle "apunta a una de las claves de la práctica del nuevo cálculo", expresada en el primer "requerimiento o suposición" del –como señalé– primer libro de texto del cálculo, a saber, el *Analyse des infiniment petits* de L'Hôpital, y que se refiere a la posibilidad de olvidarse del incremento de la variable con respecto a la variable misma. En el parágrafo dos de dicho 'requerimiento' se dice lo siguiente:

> Se pide que se puedan tomar indistintamente, una por la otra, dos cantidades que no difieran entre sí más que por una cantidad infinitamente pequeña, o (lo que es lo mismo) que una cantidad que no incremente o no disminuya más que por otra cantidad infinitamente menor que ella, pueda considerarse que permanece siendo la misma.[31]

Una tercera dificultad que encuentra Rolle del cálculo leibniziano es anotada en el acta del mismo miércoles 11 de agosto de 1700: "Dificultad III. Si los diferenciales son los ceros absolutos."[32] La respuesta de Varignon, que aparece en las mismas actas y se basa en el método newtoniano de causas primeras y últimas, así como en la práctica de los "geómetras" (que hoy llamaríamos matemáticos), resulta insatisfactoria porque afirma que los infinitesimales no son ni algo ni son nada, son más bien –dice– "evanescentes". Su respuesta, que representa a los defensores del cálculo leibniziano, es la siguiente:

---

[30] *Ibidem.*, p. 312.

[31] *Analyse des infiniment petits* (Paris, 1696), 2. *Cfr.* Michel Blay, "Deux moments de la critique du calcul infinitésimal: Michel Rolle et George Berkeley", *op. cit.*, nota 5, p. 231. Puede consultarse la traducción al español: *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas* (trad. Rodrigo Cambray), México, UNAM, 1998, p. 29.

[32] *Procès-verbaux des séances de l´Académie royale des sciences*, tomo 19, 1700, p. 316.

> El señor Rolle ha tomado los diferenciales por dos cantidades dadas o determinadas, y además por ceros absolutos, lo que le hizo encontrar contradicciones que se disipan tan pronto como uno reflexiona que el cálculo en cuestión no supone nada semejante. Por el contrario, en este cálculo la naturaleza de los diferenciales consiste en no tener nada fijo y en disminuir incesantemente hasta cero, *influxu continuo*; no considerándolos al punto (por así decir) de su desvanecimiento; *evanescentia divisibilia*. Esto es lo que la palabra variable significa en la definición primera de los infinitamente pequeños y nuevamente en la segunda. Es una porción de magnitud cuya disminución puede proceder tanto como cero, y cuyo incremento puede ir de cero a algo, esto es lo que es llamado por el señor Newton *incrementa vel decrementa momentanea* o bien *fluxiones*.[33]

La argumentación de Rolle era básicamente algebraica (basada en Johannes Hudde y Pierre Fermat) y pretendía mostrar, con ayuda de ejemplos relativos a la determinación de los extremos de curvas particulares, que el nuevo cálculo leibniziano conducía al error. Por su interés en refutar el cálculo al matemático francés no cesó en sus cuestionamientos; sus nuevas críticas aparecen en los registros de las actas de la Academia de París el 27 de noviembre y el 1 de diciembre de 1700. Allí se puede leer que Rolle desarrolla la idea de que el nuevo cálculo diferencial no sólo no da los medios para deducir el método de Hudde, como afirma de L'Hopital en su *Analyse*, sino que de hecho se trata, más bien, del "arte de ocultar los métodos encontrados por otros principios, por ejemplo los del señor Hudde de máximos y mínimos."[34]

En cuanto a la defensa del cálculo hay que decir que resulta interesante el hecho de que Varignon haya recurrido a Newton, contrincante de Leibniz, pues al hacerlo indirectamente reconoció al autor de los *Principia* como una figura de

33 *Ibidem.*, pp. 312-313.

34 *Ibidem.*, p. 394.

autoridad que podía servir para defender al propio filósofo alemán. Varignon, que se erigió como adalid del nuevo cálculo leibniziano, quiso resolver las dificultades planteadas por Rolle (que de hecho son una síntesis de las cuestiones centrales que se le criticaron al cálculo) integrándolas todas en una sola, con el propósito de responder así al conjunto de los problemas planteados.

Por otro lado, Varignon también intentó dar una prueba de los infinitamente pequeños mediante los métodos tradicionalmente aceptados, pero se limitó a explicar los diferenciales como cantidades que podrían ser vistas como más pequeñas que cualquier otra cantidad dada, lo que desde luego no ayudó a explicar el tipo de naturaleza de las nuevas cantidades. Lo que sí fue capaz de hacer, según menciona Schubring,[35] fue señalar que era propio tanto de algebristas como de geómetras rechazar las cantidades infinitamente pequeñas estableciendo la suma de series infinitas. Fue así que intentó presentar la "consistencia" del método como respuesta a los cuestionamientos planteados por Rolle (quien llegó a considerarlo "una colección de falacias ingeniosas"),[36] para lo cual se sirvió de ejemplos tradicionales de geometría y mecánica y se remitió a Huygens y Pascal, esto es, a matemáticos valorados y respetados por el propio Rolle.

Bernard Nieuwentijt y sus Considerationes sobre el cálculo

El matemático neerlandés Bernard Nieuwentijt fue un caso especial dentro de los detractores de Leibniz, incluso el propio filósofo lo mencionó en una carta a Varignon de 1702, en la que indica que tanto el neerlandés como el matemático alemán Dethleff Clüver fueron de sus primeros oponentes:

---

[35] Schubring, Gert. *Conflicts between Generalization*, Rigor and Intuition, Nueva York, Springer, 2005, p. 191.

[36] Morris, Kline. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, II, Madrid, Alianza Editorial, 1992, p. 568.

> Pienso que en aras de establecer los fundamentos de las ciencias es muy importante que haya críticos; es de esta manera que los escépticos, con mucha razón, se enfrentaron a los principios de la geometría; que el padre Gottignes, un sabio jesuita, quiso proporcionar mejores fundamentos para el álgebra, y que Clüver y Nieuwentijt recientemente se han enfrentado, aunque de diferente forma, a nuestro análisis infinitesimal [...] no debemos lamentar el esfuerzo que se necesita para justificar nuestro análisis contra todas aquellas personas capaces de entenderlo.[37]

En cuanto al matemático alemán (cuyo nombre también se escribe Detlev Clüver), su crítica apareció en su artículo *Monitum ad Geometras* publicado en las *Acta Eruditorum* de 1687. Si bien su escrito fue esperado con expectación, una vez recibido no fue especialmente valorado porque había muy pocas novedades en él; sin embargo, y por algún tiempo, Clüver, que también era astrónomo y filósofo, mantuvo una abundante correspondencia con Leibniz y con Jakob Bernoulli. De hecho, fue hasta 1700 que el matemático suizo Jakob Hermann quiso zanjar las diferencias entre ellos al dedicarle a Clüver unas cuantas secciones en su ensayo contra Nieuwentijt, titulado *Responsio ad considerationes secundas Cl. Viri Bern. Nieuventiit*.

Mucho más interesante fue la controversia entre Leibniz y Bernard Nieuwentijt. La disputa entre ambos[38] se originó

---

[37] Carta de Leibniz a Varignon del 2 de febrero de 1702, en Gottfried, Martin. IV, pp. 94-95.

[38] Las diferencias entre Leibniz (L) y Nieuwentijt (N) fueron básicamente las siguientes: L_1) los infinitesimales son variables, L_2) existen infinitesimales de orden superior, L_3) los productos de los infinitesimales no son ceros absolutos y L_4) los infinitesimales pueden ser rechazados cuando sean infinitamente pequeños en relación con otras cantidades. N_1) los infinitesimales son constantes, N_2) no existen infinitesimales de orden superior, N_3) los productos de los infinitesimales son ceros absolutos y N_4) los infinitesimales de primer orden no pueden ser rechazados. *Vid*. Goldenbaum, Ursula, Douglas Jesseph (eds.), *Infinitesimal*

cuando éste publicó en 1694 sus *Considerationes circa analyses ad quantitates infinite parvas applicatae principia et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis*. Nieuwentijt criticó que las magnitudes infinitamente pequeñas, usadas en el cálculo diferencial leibniziano, eran tratadas como cero o nada. El matemático neerlandés arguyó que si la noción de una magnitud infinitamente pequeña fuese admitida, entonces todas las diferencias de orden superior deberían que ser consideradas como igual a cero. Nieuwentijt quiso desarrollar una versión del cálculo infinitesimal que sólo contuviera diferenciales de primer orden y permitiera calcular diferenciales infinitamente pequeños sin que fueran rechazados.[39] Justificó su postura crítica, de que el cálculo trataba infinitesimales de primer orden como cero, retomando un ejemplo de las *Lectiones Geometricae* de Barrow en donde un infinitesimal es rechazado al calcular una tangente.

Con respecto a lo anterior, en la primera sección de sus *Considerationes* fue donde Nieuwentijt habló sobre Barrow al decir que "el afamado autor explica esta tesis en su razonamiento: Si una cantidad determinada tiene un radio mayor que cualquier otro asignable a cualquier otra cantidad, el último será igual a cero."[40] El neerlandés insistió en el principio de que dos cantidades sólo podían ser llamadas iguales si no tenían diferencia alguna, de modo que dos magnitudes que diferían por una cantidad infinitamente pequeña no eran *stricto sensu* iguales. Este principio lo expuso en la segunda

Differences. Controversies between Leibniz and his Contemporaries, Berlin, Walter de Gruyter, 2008, p. 199 ss.

[39] Jesseph, Douglas. *Berkeley´s Philosophy of Mathematics*, Chicago, University of Chicago Press, 1993, p. 169. Jesseph pone como ejemplo de Nieuwentijt el que haya tomado la derivada de la ecuación $y = 2x^2 + 3x$ como $dy/dx = 4x + 2dx + 3$, reteniendo el término 2dx en el lado derecho de la ecuación.

[40] Nieuwentijt, Bernard. *Considerationes circa analyses ad quantitates infinite*, Amsterdam, Johann Wolters, 1694, p. 6.

sección de su escrito: "Declaro que esta proposición es indubitable y contiene en sí misma, con la mayor evidencia, ciertas señales de verdad: *las cantidades sólo son iguales cuando su diferencia es cero o igual a nada*."[41] Si bien el objetivo de este principio era eliminar la práctica habitual de utilizar cantidades infinitamente pequeñas en el análisis, eso no significa que se opusiera al uso de infinitesimales, más bien pugnaba porque sólo se aceptasen los de primer orden. En relación a esto, Jesseph señala lo siguiente en su libro *Berkeley's Philosophy of Mathematics*:

> [Nieuwentijt] parece haber pensado que la divisibilidad infinita de una cantidad legitimaba las magnitudes infinitesimales, pero introdujo un principio, enunciado en su *Analysis infinitorum*, que haría que cualquier supuesto diferencial de orden superior fuera igual a cero: *Cualquier cosa que sea tomada por un número, pero que no pueda ser multiplicado tanto como para ser igual a cualquier cantidad dada, por muy pequeña que sea su magnitud, no es una cantidad, sino que es simplemente nada en cuestiones geométricas.*[42]

El planteamiento de Nieuwentijt era que un diferencial de primer orden, tal como dx, podía ser multiplicado infinitamente para que fuera igual a cualquier cantidad dada, pero un diferencial de segundo orden, tal como dx^2, era menor a cualquier cantidad dada, incluso si fuera multiplicado infinitamente, lo que traía como consecuencia que debía considerársele como nada.

Antes de pasar a la respuesta de Leibniz a Nieuwentijt es interesante revisar lo que él mismo mencionó del neerlandés en un borrador no fechado, pero que por el tema que trata se colige fácilmente que fue escrito tras revisar las *Considerationes*:

> Cuando mi cálculo infinitesimal, que incluye cálculo de diferenciales y sumas, apareció y se extendió, ciertos vetera-

---

[41] *Ibidem.*, p. 10.

[42] Jesseph, Douglas. *Berkeley´s Philosophy of Mathematics*, p. 169.

> nos demasiado escrupulosos comenzaron a manifestar su inconformidad [...] Pero para mencionar uno de ellos por su nombre, incluso antes de esto se levantó contra mí en Holanda Bernard Nieuwentijt quien, de hecho, contaba con buena erudición y gran habilidad, pero uno que más deseaba darse a conocer por la revisión de nuestros métodos que por hacerlos progresar. [...] es llevado a caer en supuestos que nadie admite, como que se obtenga algo diferente de multiplicar 2 por m que de multiplicar m por 2; que esto último era imposible a pesar de que lo primero fuera posible; también que el cuadrado o el cubo de una cantidad no es una cantidad o cero.[43]

En cuanto a la respuesta del filósofo alemán hay que decir que no resultó muy convincente, pues pareció confesar que una diferencia infinitesimal era tan diminuta que realmente no era una diferencia como tal, ya que las cantidades que diferían por una cantidad infinitesimal bien podrían ser consideradas iguales. La respuesta de Leibniz se dio en una carta de julio de 1695 en la revista *Acta Eruditorum*, en donde arguyó lo siguiente:

> Pienso que aquellas cosas son iguales no sólo porque su diferencia sea absolutamente ninguna, sino también porque su diferencia es incomparablemente pequeña, y aunque esta diferencia no necesita ser llamada absolutamente nada, tampoco es una cantidad comparable con aquello cuya diferencia lo es. De la misma manera que si se altera una línea añadiéndole un punto, o una línea a una superficie, la cantidad no aumenta, es lo mismo si añades a una línea otra línea, pero una incomparablemente menor; y no cualquier incremento puede mostrarse en cualquier tipo de construcción.[44]

[43] Child, J. M. (ed.), *The early mathematical manuscripts of Leibniz*, Chicago-London, The Open Court Publishing Co., 1920, pp. 145-146.

[44] La respuesta lleva por título *Responsio ad nonnullas difficultates, a Dn. Bernardo Niewentyt circa methodum differentialem seu infinitesimalem motas*. La cita dice: "*Caeterum aequalia esse puto, non tantum quorum differentia est omnino nulla, sed et quorum differentia est incomparabilitir parva; et licet ea Nihil*

Debido a que las respuestas de Leibniz no fueron convincentes, al año siguiente, es decir, en 1696, Nieuwentijt lo replicó con sus *Considerationes secundae* que dividió en cinco secciones. La primera –señala Mancosu– versó sobre la eliminación de cantidades infinitamente pequeñas en el cálculo leibniziano. La segunda intenta mostrar que en problemas de análisis infinitesimal uno siempre puede arreglárselas sólo con diferenciales de primer orden. La tercera contiene una réplica a la respuesta de Leibniz sobre las objeciones hechas por el propio Nieuwentijt en sus *Considerationes.* La cuarta trata sobre el propio método del neerlandés del análisis infinitesimal. Finalmente, la quinta consideración versa sobre el cálculo exponencial.[45]

Tiempo después, en 1700, nuevamente Jakob Hermann respondió a nombre de los leibnizianos con su *Responsio ad Clarissimi Viri Bernh. Nieuwentiit Considerationes Secundas*, la cual siguió la misma estructura de las *Considerationes secundae* para intentar dar un comentario puntual a cada una de las objeciones. Con este escrito, que no dejó contento al matemático neerlandés, terminó el debate entre Nieuwentijt y Leibniz.

El debate contemporáneo del cálculo leibniziano

Cuando uno revisa bibliografía secundaria sobre el cálculo de Leibniz puede constatar fácilmente que éste, pese a su innegable valor y funcionalidad, sigue generando debates, al menos entre los filósofos, sobre todo por la vaguedad que

omnino dici non debeat, non tamen est quantitas comparabilis cum ipsis, quorum est differentia. Quemadmodum si lineae punctum alterius lineae addas, vel superficiei lineam, quantitatem non auges. Idem est, si lineam quidem lineae addas, sed incomparabiliter minorem. Nec ulla constructione tale augmentum exhiberi potest". Leibniz, G. W. *Opera omnia*, vol. 3, p. 328.

[45] Mancosu, Paolo. *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, Nueva York, Oxford University Press, 1996, p. 162 ss.

mostró su inventor al intentar explicar qué eran los infinitesimales. Si bien es cierto que hay bastante consenso al entenderlos como "ficciones", entendidas éstas como términos sincategoremáticos (algo a lo que el propio filósofo apuntó en su carta a Pinsson del 29 de agosto de 1701),[46] a partir de ahí surgen debates en torno a qué entender por esto, es decir, de qué tipo de ficciones sincategoremáticas (lo que alude a un orden semántico) se trata y si basta con decir que son tales para comprender claramente el problema en cuestión. Frecuentemente los seguidores son más dogmáticos que aquél al que siguen, lo que implica en este caso que algunos leibnizianos creen que el asunto es relativamente simple o no tan complicado y por ello puede resolverse más o menos rápido, entre otras cosas porque están convencidos de que no hay ningún tipo de falacia lógica en el cálculo diferencial de Leibniz; como consecuencia, minimizan incluso a quienes manifestando simpatía por el autor del *Nova methodus* reconocen ciertas carencias en su sistema.[47] No analizaré aquí las diversas polémicas contemporáneas sobre los infinitesimales, tan sólo quiero señalar dos posturas en torno a éstos con la finalidad de mostrar que el debate filosófico sobre el cálculo leibniziano continúa y, de hecho, está lejos de ser zanjado.

Arthur y la interpretación estándar del infinitesimal sincategoremático

Una postura actual, y que tiene ya algún tiempo, sobre cómo interpretar el infinitesimal leibniziano la representa Richard

[46] Leibniz, carta a Pinsson del 29 de agosto de 1701, Ak XX, 494.

[47] Ejemplo de ellos es el artículo, sin duda interesante, de Mikhail G. Katz y David Sherry: "Leibniz's Infinitesimals: Their Fictionality, Their Modern Implementations, and Their Foes from Berkeley to Russell and Beyond", *Erkenntnis*, núm. 78, 2013, pp. 571–625.

Arthur,[48] quien considera que la doctrina de la naturaleza ficcional de los infinitesimales ha sido bastante mal entendida. Esto se debe, entre otras cosas, a que se ha creído que fue elaborada como una defensa tardía del cálculo infinitesimal, visto como si estuviera comprometido con la existencia de entidades que realmente son infinitamente pequeñas; pero también a que dicha doctrina ha sido leída como si estuviera en desacuerdo con otros argumentos apologéticos hechos por Leibniz sobre fundamentos explícitamente arquimedeanos. Para responder a esta mala lectura el profesor de la universidad McMaster retoma la ya clásica postura de Hidé Ishiguro (quien planteó la idea del uso contextual del término infinito o infinitesimal), para sostener que es una mala interpretación creer que Leibniz haya estado comprometido con los infinitesimales como entidades que realmente fueran infinitamente pequeñas; de hecho, Arthur sostiene que la interpretación "madura" de Leibniz sobre el cálculo concuerda plenamente con el axioma arquimedeano, generalizado por el filósofo alemán en su 'Ley de continuidad'. Esto significa –según Arthur– que la interpretación de Leibniz es sincategoremática, pues asume que los "infinitesimales son ficciones en el sentido de que los términos designados por ellos pueden ser tratados *como si* refiriesen a entidades incomparablemente más pequeñas de las cantidades finitas, pero en realidad representan cantidades finitas variables que pueden ser tan pequeñas como se desee."[49] Para Arthur, como antes planteó la propio Ishiguro, esta postura no fue un artilugio tardío de Leibniz sino que fue planteada por el nacido en Leipzig desde 1676, e incluso ya desde 1672 a partir de sus notas sobre los *Discorsi* de Galileo.

---

[48] Richard, Arthur T. W. "Leibniz's syncategorematic infinitesimals", *Archive for History of Exact Science*, núm. 67, 5, 2013, pp. 553–593.

[49] Richard, Arthur T. W., *op. cit.*, p. 554.

La interpretación de Leibniz del infinitesimal como ficción está muy relacionada con la doctrina del infinito, pues así como el infinito no existe en el sentido de ser un todo constituido por partes finitas, de igual manera los infinitesimales no son partes existentes que pueden ser compuestas en un todo finito. Para Arthur, eso es justamente lo que Leibniz señala a Des Bosses en su carta del 11 de marzo de 1706:

> Hablando filosóficamente, sostengo que no hay más magnitudes infinitamente pequeñas que infinitamente largas, esto es, no hay más infinitesimales que infinítuples. Pues sostengo que ambas son ficciones de la mente, son una forma abreviada de hablar adaptada a calcular, como son también las raíces imaginarias en el álgebra. Mientras tanto he demostrado que esas expresiones son muy útiles para abreviar el pensamiento y por tanto para el descubrimiento, y no pueden llevar al error pues son suficientes para sustituir el infinitamente pequeño por algo tan pequeño como uno desee, así que el error es menor que cualquier otro, de donde se sigue que no puede haber error.[50]

Para algunos comentaristas como el propio Arthur las raíces de la interpretación sincategoremática, e incluso las raíces mismas del cálculo leibniziano, pueden encontrarse en su tratado sobre las cuadraturas escrito entre 1675-1676 (*De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*), así como posteriormente en el *Supplementum geometricae practicae sese ad problemata trascendentia extendens, ope novae methodi generalissimae per serie infinitas* de 1693.[51]

La postura que defiende que Leibniz siempre tuvo claridad sobre su proyecto sostiene que para 1672, tras leer los

[50] *Cfr.* Carta a Des Bosses, GP II, p. 305.

[51] Ferraro, Giovanni. *The rise and development of the theory of series up to the early 1820s*, Springer, Nueva York, 2008, p. 25 ss.

Discorsi de Galileo, el filósofo de Leipzig formuló en sus notas gran parte de lo que sería la base de su nuevo método, de ahí que sostuviera lo siguiente:

> Por tanto, se sigue que en el infinito el todo no es mayor que las partes, que es la opinión de Galileo y Gregorio de san Vicente, y que yo no puedo aceptar, o que el propio infinito no es nada, es decir, ni es uno ni es un todo; o tal vez debamos decir que cuando distinguimos entre infinitos, el mayor infinito, es decir, todos los números, es algo que implica una contradicción, pues si fuera un todo podría entenderse como hecho de todos los números que continúan hasta el infinito, y sería mucho más grande que todos los números, esto es, mayor que el número más grande. O tal vez debamos decir que uno no debe decir nada sobre el infinito, como un todo, excepto cuando haya una demostración al respecto.[52]

De la cita anterior se desprenden dos características fundamentales del pensamiento leibniziano en torno a este asunto: 1) la defensa del axioma 'el todo es mayor que la parte' para el infinito, con su consecuente rechazo de que el infinito es un todo, y 2) la importancia de matizar la aseveración de que uno no puede afirmar una propiedad del infinito salvo que tenga una demostración independiente de él.

La postura de Arthur puede resumirse diciendo que –para él– Leibniz tenía un cierto programa bien articulado y coherente desde joven, en el que los infinitesimales no eran más que términos sincategoremáticos; en consecuencia, las críticas en torno a incoherencias, falta de rigor o contradicciones en su método son infundadas y, en ese sentido, pueden rebatirse claramente recurriendo a la propia obra del filósofo.

[52] Ak VI iii, p. 168.

Tho: reticencias a la postura estándar sincategoremática

Otra postura actual sobre los infinitesimales es la de Tzuchien Tho, quien considera que en los últimos años se han aportado muchos elementos para entender mejor algunos aspectos concretos de la ficcionalidad de los infinitesimales, lo que ha ayudado a no entenderlos simplemente como sincategoremáticos. Tho cree, sin embargo, que "lo que permanece poco claro [...] es el significado del infinito sincategoremático, la función que cumple dentro de las reflexiones matemáticas de Leibniz y su importancia para sus numerosas consideraciones metafísicas y matemáticas."[53] Tho nos recuerda que muchos intérpretes han señalado que el uso sincategoremático del infinitesimal no es otra cosa que el uso de una expresión que puede ser reducida a términos más modélicos, algo que el propio Leibniz mencionó en su carta a Pinsson donde dice que "en lugar del infinito o infinitamente pequeño tomamos cantidades tan grandes o pequeñas como se requieran, así que el error sería menor al error dado tal que no difiramos del estilo de Arquímedes excepto en las expresiones."[54] A partir de esta cita Tho colige –considero acertadamente– que el uso leibniziano del infinitesimal resulta ser una especie de prontuario que sustituye una expresión clásica como la del matemático griego, sin embargo, pese a que tal opinión puede ser correcta resulta también limitada; correcta, dice, porque la metodología leibniziana no admite ningún infinito real, y limitada porque una lectura que reduce lo infinitesimal a lo finito "oscurece" el significado y la complejidad de la función sincategoremática del infinitesimal en Leibniz.

Las lecturas defensoras del ficcionalismo infinitesimal leibniziano terminan siendo simplistas y/o reduccionistas,

[53] Tzuchien, Tho. "Equivocation in the Foundations of Leibniz's Infinitesimal Fictions", *Society and Politics*, núm. 6, 2 (nov), 2012, p. 71.

[54] Carta a Pinsson del 29 agosto de 1701, Ak XX, 494.

pues pretenden defender a ultranza al filósofo frente a críticas que apuntan a falta de rigor o incluso a contradicción, tanto en su admisión de infinitesimales en matemáticas como en su uso de nociones infinitas en su metafísica. Tho menciona que algunos defensores de la figura de Leibniz alegan que antes de 1672 el filósofo alemán consideró los infinitesimales como reales, en el sentido de "partes indivisibles de movimiento", aunque tras su estancia en París, entre 1672 y 1676, maduró matemáticamente al grado de abandonar sus "errores de juventud" y desarrollar entonces las bases de su cálculo diferencial a partir de la noción de un infinitesimal sincategoremático no-real. Tho plantea de manera interesante que el deseo de defender a Leibniz tanto de una "posición juvenil", como de los errores que se le achacan por la recepción de su cálculo, puede resultar contraproducente, ya que al empeñarse de tal manera en el rechazo de los infinitesimales reales se puede caer en la simple reducción del infinito o infinitesimal sincategoremático en lo finito[55] (lo que no quiere decir [debo aclarar] que el comentarista señale que se deban considerar los infinitesimales como algo diferente a términos sincategoremáticos o a ficciones).

El objetivo de Tho es sobre todo subrayar que hay lecturas actuales sobre el infinitesimal leibniziano que son reduccionistas, entre otras cosas porque se basan en dos errores fundamentales. El primero es el error de asociar el fundamento del infinitesimal con su estatuto ontológico o meta-matemático, asunto que –por cierto– planteó Ishiguro en su *Leibniz's Philosophy of Logic and Language* al decir que para Leibniz "lo infinito [...] es una manera de hablar"[56] (cabe mencionar que la

[55] Tzuchien, Tho. *Op. cit.*, nota 49, p. 71.

[56] Sobre este asunto Ishiguro recurre a una cita de Leibniz para fortalecer su dicho: "Cuando hablamos del infinito en sí mismo habiendo dado un brinco hacia el final (de unas series), o cuando hablamos de lo infinitamente pequeño, estamos usando una expresión cómoda o una abreviación mental. Hablamos de verdades sólo laxamente, y éstas se hacen rigurosas mediante

interpretación de Ishiguro también ha sido objeto de críticas porque algunos la consideran adecuada pero reduccionista). El segundo error que cometen es asociar la aceptación de términos infinitesimales en matemáticas con el rigor de la demostración. Para superar esos errores Tho analiza la obra *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis* (1675); sin embargo, más allá de los resultados a los que llega Tho, lo que me interesa destacar aquí es que el comentarista quiere mostrar que la relación de Leibniz con el infinitesimal 'ficcional' es más compleja de lo que algunos arguyen, pues no se limita a la lectura sincategoremática sino que, más bien, debe entenderse dentro de "una gama de diversos contextos en los que sólo uno conlleva su rechazo del infinito y los infinitesimales reales."[57]

Para Tho hay tres ámbitos claves para confrontar la lectura reduccionista: 1) el ámbito metafísico, en donde es clara la falta de simetría entre la tesis de una división infinita concreta de partes de la naturaleza y el rechazo de una suma, cantidad o magnitud infinitesimal real; sin embargo, la naturaleza infinita de partes concretas del mundo mantiene una relación con la aceptación de infinitesimales en matemáticas, a través, indirectamente, del principio de continuidad. 2) El ámbito de las matemáticas, con la relación epistolar Leibniz-Nieuwentijt sobre la naturaleza de las derivadas de órdenes superiores. 3) El ámbito de la ciencia natural, donde Leibniz usa el término infinitesimal al tratar de cosas reales, como sucede en sus escritos de dinámica, sobre todo en el *Specimen Dynamicum* (1695) donde –en opinión de Tho– hace una asociación directa entre la medida de la fuerza muerta y la magnitud infinitesimal, aunque con la importante "advertencia" de que es una asociación 'ficcional'.

---

la explicación". *Acta Eruditorum* de 1712, GM V, p. 389. *Cfr*. Hidé Ishiguro, *Leibniz's Philosophy of Logic and Language* (2nd ed.), Cambridge, Cambridge University Press, 1990, p. 140.

[57] Tzuchien, Tho. *Op. cit.*, p. 72.

Conclusiones

Algunos historiadores del cálculo[58] niegan que haya una continuidad significativa entre el cálculo leibniziano del siglo XVII y el del siglo XX, desarrollado por Abraham Robinson en los años sesenta y conocido como "análisis no estándar" (con el que pretendió reformular el cálculo utilizando una noción rigurosa [en sentido lógico] de los números infinitesimales); sin embargo, el propio Robinson mencionó su deuda con Leibniz y le dio importancia a la historia de los infinitesimales. Esto, lejos de valorarse en su justa medida, ha llevado a algunos comentaristas –sobre todo filósofos– a criticar la postura de Robinson porque al juzgar el cálculo de Leibniz aceptó las agudas críticas de Berkeley al mismo, lo que lo llevó a afirmar que la teoría del filósofo alemán contenía algunas inconsistencias. Entre otras razones lo planteado por Robinson propició que diversos estudiosos, en su mayoría identificados con Leibniz, abordasen el cálculo leibniziano con el propósito de rechazar las críticas que se le achacaban.[59] Este tipo de actitudes fue el punto de partida para este escrito, pues me resultó inquietante descubrir toda una bibliografía reciente sobre el tema que busca, mucha de ella, desestimar las críticas que algunos han hecho al cálculo.

Por mi parte, y luego de revisar alguna de esa abundante bibliografía, reconozco que uno de los problemas de la propuesta de Leibniz se originó por los términos o expresiones empleados. Toda propuesta se sirve de un lenguaje y éste puede ser objeto de escrutinio público (si es que se trata de un lenguaje conocido, claro). En ese sentido, las notaciones usadas por Leibniz, así como sus propias palabras a la hora de explicar en cartas qué eran los infinitesimales, sirvieron

[58] *Cfr.* Barthélemy, Georges. *Op. cit.*, pp. 669 ss.

[59] *Vid*. Katz, Mikhail G. y David Sherry, *op. cit.*, pp. 571 ss.

para que no pocos pensadores estuvieran recelosos de su propuesta o de plano la rechazaran.[60]

El objetivo de este artículo fue introducir al lector al problema de la recepción del cálculo en el siglo XVII-XVIII y al debate contemporáneo sobre el mismo, al mostrar que la bibliografía secundaria actual evidencia que aún no hay una plena comprensión del cálculo leibniziano (al menos en el ámbito filosófico); de ahí que siga habiendo dudas, cuestionamientos, paradojas y críticas sobre ese método matemático. En gran medida esto se debe a que no se trata de una teoría-sistema totalmente clara, sino que, por el contrario, resulta por momentos oscura y un tanto vaga, lo que genera que aún en nuestros días continúe el debate en torno a ella. Desde luego ya no se discute como en siglos pasados ni sobre los mismos aspectos, pero es un hecho que sigue habiendo temas pendientes por aclarar. Entre otras cosas esto se debe a la concepción sincategoremática del infinitesimal (que es a lo que apuntan la mayoría de los comentaristas contemporáneos al aludir al problema del cálculo), que lo vuelve un término pragmático que significa en función del contexto en el que se emplee; sin duda alguna esta concepción, entre otros problemas, genera y seguirá generando debate entre los intérpretes.

[60] Recomiendo la lectura de *Leibniz et le langage* de Frédéric Nef, sobre todo los apartados "L'usage de la langue", "Langue universelle et grammaire rationnelle" y "Caracteristique universelle: de la combinatoire à la sémiotique". El libro no aborda como tal la retórica matemática leibniziana, pero estudia tanto el interés de Leibniz en el lenguaje como el uso que hace de éste en su obra filosófica. *Vid*. Frédéric, Nef, *Leibniz et le langage*, Paris, PUF, 2000.

Referencias

Richard, Arthur T. W. "Leibniz's syncategorematic infinitesimals", *Archive for History of Exact Science*, núm. 67, 5, 2013.

Barthélemy, Georges (ed.), *Histoires des Sciences*, Paris, Ellipses, 2009.

Benson, Mates. *The Philosophy of Leibniz, Metaphysics and Language*, New York, Oxford University Press, 1986.

Bertrand, Russell. *Leibniz: A critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*, Cambridge, Cambridge University Press, 1900.

Blay, Michel. "Deux moments de la critique du calcul infinitésimal: Michel Rolle et George Berkeley", *Revue d'histoire des sciences*, núm. 39, 3, 1986.

Child, J. M. (ed.). *The early mathematical manuscripts of Leibniz*, Chicago-London, The Open Court Publishing Co., 1920.

Ferraro, Giovanni. *The rise and development of the theory of series up to the early 1820s*, Nueva York, Springer, 2008.

Fischer, Kuno. *Gottfried Wilhelm Leibniz: Leben, Werke und Lehre*. 5th ed., Heidelberg, Carl Winter Verlag, 1920.

Gottfried, Martin. *Leibniz. Logique et métaphysique*, Paris, Beauchesne, 1966.

Goldenbaum, U., Jesseph, D. (eds.), *Infinitesimal Differences. Controversies between Leibniz and his Contemporaries*. Berlin, Walter de Gruyter, 2008.

Ishiguro, Hidé. *Leibniz's Philosophy of Logic and Language*, 2ª ed., Cambridge, Cambridge University Press, 1990.

Jesseph, Douglas. *Berkeley's Philosophy of Mathematics*, Chicago, University of Chicago Press, 1993.

Katz, Mikhail G., Sherry David. "Leibniz's Infinitesimals: Their Fictionality, Their Modern Implementations, and Their Foes from Berkeley to Russell and Beyond", *Erkenntnis*, núm. 78, 3, 2013.

Kline, Morris. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, II, Madrid, Alianza Editorial, 1992.

Knecht, Herbert H., *La logique chez Leibniz, L'age d'homme*, Lausanne, 1981.

Leibniz, G.W., *Mathematische Schriften,* vols. I-VII, (ed.) C. I. Gerhardt, Berlín y Halle, reimp. Georg Olms Verlag, Hildesheim-New York, 1843-63/1962.

_______________ *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, Acta Eruditorum*, 1684.

_______________ *Responsio ad nonnullas difficultates a dn. Bernardo Nieuwentijt circa methodum differentialem seu infinitesimalem motas. Acta Eruditorum*, 1695.

_______________ *Sämtliche Schriften und Briefe,* (ed.) Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften y Akademie der Wissenschaften Göttingen, Berlin, Akademie Verlag, 1923.

L'Hôpital, Guillaume. Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas, (trad. Rodrigo Cambray), México, UNAM, 1998.

Luis López, Alberto. "Berkeley: el origen de la crítica a los infinitesimales", *Cuadernos Salmantinos de filosofía*, núm. 41, 2014.

Mancosu, Paolo. *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, New York, Oxford University Press, 1996.

Nef, Frédéric. *Leibniz et le langage*, Paris, PUF, 2000.

Nieuwentijt, Bernard. *Considerationes circa analyses ad quantitates infinite*, Amsterdam, Johann Wolters, 1694.

Procès-verbaux des séances de l´Académie royale des sciences, tomo 19, 1700.

Samueli, J-J., Boudenot J. J. *30 ouvrages de mathématiques qui ont changé le monde*, Paris, Ellipses, 2006.

Schubring, Gert. *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition*, Nueva York, Springer, 2005.

EDICIONES
ACATLAN

ISBN: 978-6073001892

9 786073 001892