

L'influence des philosophes sur la formulation de l'infini mathématique

Francoise Monnoyeur

INTRODUCTION

Nos moments de réflexion sur la notion philosophique et mathématique de l'infini s'échelonnent de ladite « révolution » astronomique de Copernic à la découverte des mathématiques modernes ou théorie des ensembles. Ce livre n'a pas la prétention de retracer l'évolution historique de cette notion, entreprise qui aurait requis l'évocation de tous les mouvements de pensée qui ont contribué au devenir de la notion d'infini. Nous avons envisagé comment certains systèmes philosophiques et scientifiques ont marqué les séquences de l'histoire de l'infini. S'il s'avère périlleux de tracer grâce à ces haltes philosophiques et épistémologiques, une pensée historique de la notion d'infini, nous pouvons néanmoins à partir de ces écrits suivre les grands moments d'inflexion de cette notion, les grandes orientations qui font son histoire et qui permettent la mise en perspective des mathématiques et de la philosophie autour d'un thème commun.

Les réflexions sur l'infini annoncent au xiv^e siècle l'éclatement du cosmos de Ptolémée et la révolution copernicienne ; la conjonction du Dieu infini du monothéisme avec les théories de la nouvelle astronomie invitent à repenser les rapports de l'infini au fini et de l'infini à la catégorie de « l'indeterminatum » ou de « l'indéfini » ; la mise en évidence d'une raison devenue puissance d'ordre et capable de remplacer la structure de la connaissance née de l'ancienne astronomie, modifie la conception que l'on se faisait de la fonction de l'infini dans la connaissance ; désormais acceptée comme notion signifiante pour les mathématiques et la physique, la notion d'infini se trouve libérée de l'inconsistance et du flou que lui attribuait la tradition aristotélicienne en le dénom-

« potentiel ». La définition de l'infini mathématique se précise et donne lieu aux théories scientifiques nouvelles de Newton, Bolzano, Cantor. Il convient de nous intéresser brièvement à la conception aristotélicienne de l'infini, conception à laquelle se réfèrent de nombreux auteurs de la Renaissance et certains philosophes du XVII^e siècle, pour lesquels la tâche essentielle fût de se détacher de la philosophie aristotélicienne.

La réflexion d'Aristote au livre III de *La Physique* est précieuse en ce qu'elle analyse la validité des différentes théories de l'infini en cours à l'aide d'une seule question : L'infini existe-t-il en acte ? Cette question a le mérite d'interrompre les tentatives qui faisaient d'emblée de l'infini le principe des êtres (Pythagore, Platon, Anaxagore, Démocrite). Le soupçon d'Aristote s'exprime en ces termes :

« Un examen logique semblerait prouver qu'il n'y en a pas : si en effet, la définition du corps est : « ce qui est limité par une surface », il n'y aura pas de corps infini, ni intelligible, ni sensible. » (*L'infini sensible* P III (5) 204b)

L'infini n'est pas un corps, il n'existe donc pas en tant qu'infini actuel ; puisque, d'après Aristote (P III, 206 a) : « l'être se dit et de l'être en puissance et de l'être en acte » et que « l'infini est par composition et par retranchement », l'infini est attribué à la grandeur et ne peut être qu'en puissance. Cette existence potentielle de l'infini le définit d'emblée comme appartenant exclusivement aux mathématiques :

« La théorie ne supprime pas les considérations des mathématiciens, en supprimant l'infini qui existerait en acte dans le sens de l'accroissement, considéré comme ne pouvant être parcouru ; » (P III, 207 a)

L'analyse aristotélicienne nous apprend que « l'infini en acte » n'existe pas et que l'infini n'a de sens que pour les mathématiciens qui font eux usage d'un « infini en puissance ». Cette distinction sera présente ultérieurement chez les auteurs qui tenteront de déjouer ou d'assimiler à leur façon la problématique aristotélicienne.

Issue de l'analyse aristotélicienne, l'approche logique de l'infini au XIV^e siècle, par Jean Mair et Grégoire de Rimini est centrée avant tout sur le sens de l'infini dans les propositions et suggère ainsi une analyse métalinguistique. Au Moyen Age et à la

Renaissance et avec l'expansion du monothéisme, l'existence d'un « infini en acte », comme marque divine, se trouve au centre des débats théologiques. A l'opposé de la période grecque, ces époques reconnaissent l'existence d'un « infini en acte » assimilé à l'infinité positive de Dieu et les auteurs conçoivent soit un monde fini au regard d'un infini divin inaccessible, soit un monde qui en participant à l'infinité divine prépare l'éclatement du cosmos de Ptolémée. Au XIV^e siècle, la contradiction entre le fini et l'infini n'est pas exprimée en termes d'incommensurabilité ; bien au contraire, le XIV^e siècle et le XV^e siècles, que ce soit par la représentation picturale du *Quattrocento* ou par la logique terministe de Jean de Buridan et Grégoire de Rimini, s'appliquent à mettre en présence l'infini et le fini afin de parvenir à mieux définir les formes de l'infini mondain. Autrement dit, on trouve des approches de l'infini qui prouvent que celui-ci n'est pas forcément perçu comme inaccessible ou inconnaissable. Grégoire de Rimini redéfinit le sens de la distinction entre « infini au sens catégorématique » et « infini au sens syncatégorématique » ; cette redéfinition lui permet de concevoir l'existence d'un infini positif dans les mathématiques et la physique alors que l'infini était conçu comme potentiel ou attribut exclusif de Dieu par la théologie. L'audace de Grégoire de Rimini n'est donc pas étrangère au craquement du cadre de la cosmo-physique aristotélicienne. Au XIV^e siècle, l'infini acquiert un statut mondain que les peintres du *Quattrocento* représentent sous forme d'un « *indeterminatum* », décrit par la découverte d'un point de fuite sur la toile et qui tranche par rapport au fond d'or qui représente l'infini divin. La symbolisation de l'univers divin et de l'univers mondain sur une même toile permet de discerner le dialogue de leur coexistence plus ou moins manifeste selon les artistes et les décennies. L'interprétation, qui est donnée des tableaux des Renaissants italiens, permet de constater qu'un infini mondain, un « *indeterminatum* », est désormais reconnu comme existant par la conscience collective et que sa définition résulte d'une mise en relation avec les autres ordres qui lui sont coexistants : le fini et l'infini divin.

Si aux XIV^e et XV^e siècles, bon nombre de philosophes s'inspirent des réflexions aristotéliciennes, leurs pensées marquent cependant de leur sceau le discours sur l'infini, en devinant parfaitement les intuitions qui seront celles de Nicolas de Cues.

On connaît les conclusions de l'astronomie de Copernic et de Galilée concernant le monde, à savoir que la terre n'est pas le centre du monde et qu'une matière homogène forme la terre et le ciel. Ces conclusions bouleversent les représentations que l'on pouvait avoir de l'espace mais ne vont tout de même pas jusqu'à poser que le monde est infini. Les observations scientifiques de Copernic, Galilée ou Tycho Brahé ne suffisent pas pour affirmer l'infinité du monde ; cette infinité n'est donc pas donnée, prouvée scientifiquement, mais bien le fruit de la pensée philosophique. La pensée de Giordano Bruno témoigne de cette tentative philosophique de poser l'existence d'un monde infini. Bruno a été fortement impressionné par le *De revolutionibus orbium coelestium* de Copernic et il est le seul à faire de la question de l'infinité du monde le problème central de sa pensée. Il est également influencé par l'atomisme antique dans lequel il puise une argumentation pour contrecarrer le finitisme d'Aristote. Il s'inspire de la méthode de la « *coincidentia oppositorum* » de Nicolas de Cues pour élucider le sens de l'infini cosmique et élabore à partir de cet auteur, qu'il dit « s'exprimer divinement », une interprétation des rapports de l'univers à Dieu. Ces influences sont au service de son intuition de l'infini et de sa conviction selon laquelle la matière est dotée d'une unité spirituelle. Il existe d'après Bruno, un univers infini en acte qui met en péril l'illusion géocentrique et géostatique. Il donne ainsi par ses intuitions et par l'emprunt de certains éléments méthodologiques à Cues et à Démocrite, un cadre théorique neuf à la science qui se développe. Avec Bruno, les catégories aristotéliennes s'effondrent et l'existence d'un monde infini en acte est philosophiquement démontrée. Bruno libère la pensée des xvi^e et xvii^e siècles qui peut désormais affirmer l'infinité de l'univers et en rechercher une transcription dans les mathématiques.

Bruno, Pascal et Leibniz ont tous trois pensé l'infinité de l'univers mais vécu et exprimé de façon fort différente les relations du fini à l'infini qui en découlent et c'est dans cette différence même que réside la teneur respective de leur philosophie. La reconnaissance de l'existence de l'infinité du monde va de pair, pour ces trois auteurs, avec une conception de l'infini comme fondement puisque l'infinité du monde ne peut être qu'une manifestation de Dieu. Toutefois la façon dont est vécue et interprétée cette

manifestation de Dieu dans le monde présente des différences fondamentales selon Pascal, Bruno et Leibniz. Nous l'avons vu, l'affirmation de l'infinité de l'univers ne pose pas à Bruno de problème existentiel particulier ; il sera néanmoins condamné et exécuté par l'église romaine en raison même de sa conviction. En effet, chez Bruno, l'infini fonde, valorise et justifie le fini puisque l'infini est l'expression même de la puissance de Dieu. La terre, monde fini en lui-même, participe d'un univers infini qui constitue le système solaire et qui engendre une infinité de mondes finis ; l'infini se présente comme source de tout ce qui existe, comme matrice de l'univers. Nous découvrons donc une lecture optimiste de l'infinité du monde chez Bruno qui s'oppose au désarroi qui accompagne les pensées de Pascal ; Pascal compare la finitude de l'homme à l'infinité de l'univers qui ne répond par aucune limite sécurisante au sentiment de notre inconfort face à l'immensité ; toute norme, toute mesure du fini est désormais dérisoire puisque toute idée de proportion est balayée par l'infini ; la découverte de l'infini provoque pour Pascal une prise de conscience de la discontinuité des ordres, de celui du fini et de l'infini ; la conclusion en est une incommensurabilité des ordres entre eux qui s'accompagne d'une approche négative du fini. Leibniz contrairement à Pascal ne détruit pas le fini par l'infini mais lit la présence de l'infini dans chaque parcelle du fini. La nature est pensée selon une continuité qui ne supporte pas la rupture des ordres nécessaire à Pascal. Chaque ordre de grandeur représente pour Leibniz une proportion calculable qui exprime l'ordre de grandeur supérieur. Un calcul de l'infini est donc possible chez Leibniz qui met au point le calcul infinitésimal. Quelle que soit la façon dont Bruno, Leibniz ou Pascal fondent le fini sur l'infini, le monde fini est structuré ou déstructuré par l'infini qui est conçu comme le fondement du fini.

Que penser alors de la réflexion d'un Descartes qui nie l'existence d'un univers « infini en acte » et qui entend fonder les structures du monde sur le pur exercice de la raison humaine ? La conception cartésienne de l'infini se présente-t-elle alors comme une simple reprise de celle de Nicolas de Cues ou bien est-elle porteuse dans sa spécificité d'éléments qui seront indispensables au développement de la conception scientifique de l'infini du xvii^e siècle ? Pour répondre à cette question, il faut envisager

L'ensemble de la pensée de Descartes afin de mettre en relief la fonction de la métaphysique par rapport à la physique sur le problème de l'infini. L'infini dans la théorie cartésienne de la connaissance ne s'applique qu'à Dieu alors que le monde est désigné comme « indéfini ». Bien que cette idée soit présente chez Nicolas de Cues, lorsqu'il fait référence à une infinité du monde « par privation » ou négative par rapport à « l'infinité positive » de Dieu, elle revêt un autre sens dans la pensée de Descartes ; en effet, la matière étant assimilée dans le système cartésien de la connaissance à l'étendue géométrique, l'indéfini du monde s'applique à la matière conçue comme étendue. Là, où Cues laissait l'univers mondain dans le flou dans l'indéterminé, Descartes le qualifie « d'étendu ». L'étendue, qui n'est qu'un « infini potentiel », spécifie cependant le domaine concerné par « l'indéfini » et signe ainsi son appartenance à la physique. Descartes n'a pas, comme Leibniz, donné d'interprétation mathématique de l'indéfini, mais en l'appliquant à l'étendue de la matière, il a isolé cette catégorie de la métaphysique. La matière, même si elle est indéfinie pour Descartes, a de par cette indéfiniété même une fonction dans la physique mathématique. Lorsque Leibniz analyse le calcul infinitésimal, il l'exprime en termes « d'infini potentiel » ; Descartes remplace « l'infini potentiel » des mathématiciens par « l'indéfini » de la matière. Il s'agit là d'une conception de l'indéfini qui concerne aussi bien les mathématiques que la physique et qui intègre ainsi le problème de l'infini dans les préoccupations de la physique.

L'espace classique de la géométrie euclidienne connaît avec la géométrie projective de Desargues une sorte de déconstruction. En effet en imaginant un point à l'infini où se rencontrent les parallèles et en ramenant les propriétés de cette situation aux figures coniques, elles-mêmes assimilables à celles du cercle (élément fini par excellence), Desargues bouscule l'univers conceptuel qui distingue le fini de l'infini. Il introduit une géométrie de l'infini dans un espace fini (celui de la sphère) et renouvelle ainsi la réflexion sur l'espace géométrique, fondant selon l'expression cartésienne « une géométrie de la géométrie ». Cette « métagéométrie » sera développée par les axiomes d'Hilbert qui contribueront à distinguer les propriétés projectives des propriétés métriques.

Newton met au point par le calcul des fluxions, le calcul de l'infini : non pas par le calcul d'un « infini en acte » qui renvoie à « l'infini divin », mais par le calcul d'infini considéré comme « potentiel ». Pour ce faire, il substitue au couple infini-fini, qui est une référence commune avant lui, le couple mathématique indéfini-limite ; l'infini mathématique, s'il se définit certes encore comme un « infini potentiel » trouve dans cette restriction, un lieu d'expression ; en effet, Newton traduit par là, le passage d'une grandeur finie à une autre grandeur finie par l'intermédiaire d'un mouvement continu et uniforme : cette augmentation ou diminution vers une limite finie se dénomme « fluxion ». La nouveauté inaugurée par Newton dans le calcul de l'infini mathématique est la compréhension en terme de mouvement, de l'augmentation ou de la diminution d'une quantité. Cette conception dynamique permet à Newton de traduire la notion d'infini en termes mathématiques en excluant toute référence à l'infini en tant que tel ; l'indéfini est donc positivement défini par Newton comme étant le lieu du relatif par opposition à l'absolu qui reste le lieu de l'infinité de Dieu.

Le développement de la pensée critique de Kant sur l'infini obéit à des règles qui lui sont propres, allant d'un refus du dogmatisme en passant par l'influence de l'empirisme pour trouver finalement la position critique au problème envisagé. C'est dans la *Critique de la raison pure* que Kant formule une critique du concept de « l'infini actuel ». Analysant la thèse et l'antithèse, posant, l'une, la finitude et un commencement au monde et l'autre, l'infinité du monde, Kant conclut à l'impossibilité d'accréditer l'une ou l'autre de ces hypothèses. Il est inconcevable d'accepter la finitude du monde ; il est également difficile de poser que le monde est infini en acte dans la mesure où l'infini ne peut être issu d'aucune représentation et est de fait inacceptable en tant que concept ; seul un « infini potentiel » existe utilisé dans les mathématiques et dans les opérations mentales que nous réalisons lorsque nous effectuons des actes de progression ou de régression de suites. Ces opérations s'effectuent dans un temps qui n'est pas infini et qui interdit en conséquence l'existence d'un infini actuel. Pour la connaissance donc, seul le concept d'un « infini potentiel » est admissible, alors que « l'infini actuel », idée de la raison, sert les fondements de la morale et de l'esthétique.

Leibniz préfère réserver « l'infini actuel » à Dieu et dénommer le calcul infinitésimal par le terme « infini potentiel » ; en fait, dans son refus d'admettre l'existence d'un nombre infini, Leibniz s'empêche de penser la relation d'infinité qui lie deux ensembles infinis. Bolzano va réfléchir à deux reprises sur ce problème dans *Wissenschaftslehre*, et dans les *Paradoxes de l'infini* pour parvenir à poser que la réflexivité est la propriété exclusive des ensembles infinis. Pour ce faire, il admet à la fois l'existence d'un infini actuel, la possibilité d'une comparaison entre ensembles infinis, et l'idée d'une hiérarchie des infinis. Il se donne ainsi les critères indispensables qui permettent de penser que deux ensembles infinis sont reliés par une relation bijective.

Il a fallu quatre siècles à « l'infini potentiel » aristotélien pour obtenir le statut « d'infini actuel » dans les mathématiques. Cette longue élaboration intellectuelle fut rendue possible grâce à la redéfinition permanente par les philosophes de « l'infini potentiel » des mathématiciens, grâce à l'insertion de notions intermédiaires comme celle de « l'indéfini », et grâce à la remise en cause par les scientifiques des bornes de la métaphysique. La notion d'infini témoigne de la connivence que connaissent les mathématiques avec la philosophie

Françoise MONNOYEUR

CHAPITRE 1

LOGIQUE ET PHYSIQUE DE L'INFINI AU XIV^e SIÈCLE

Par Joël Biard

Dans son étude du mouvement et du continu, Aristote n'avait pu éviter de prendre en compte l'infini. Mais il avait exclu qu'on puisse le manipuler comme un objet, et il avait irrémédiablement lié l'idée d'infinité à celle d'imperfection. Les Médiévaux, tout en admettant longtemps l'essentiel de la physique et de la cosmologie aristotéliennes, ne pouvaient se détourner de l'infini. La valorisation de l'infini en Dieu chez quelques Pères grecs puis, au Moyen Âge à partir de Thomas d'Aquin, la connaissance, provenant des Arabes, des paradoxes enlment même des indications fournies par Aristote pour penser en un certain sens l'être de l'infini, tout cela les conduisait à en réélaborer le concept. C'est à partir du XIII^e siècle que, dans la pensée médiévale d'expression latine, apparaissent des réflexions novatrices sur ce sujet. Mais c'est surtout au XIV^e siècle qu'elles se multiplient, conjuguant des dimensions qui sont, pour une part, des héritages cumulés des siècles précédents, pour une autre, des explorations liées au développement de nouvelles questions logiques ou physiques.

UNE RÉFLEXION FOISSONNANTE SUR L'INFINI

Au XIV^e siècle, les considérations portant sur l'infini se rencontrent aussi bien à l'occasion de problèmes théologiques qu'à propos de questions de philosophie naturelle concernant les forces et les résistances, en passant par quelques développements mathématiques.¹