ВАСИЛ ПЕНЧЕВ

# ТЕОРЕМАТА НА МАРТИН ЛЬОБ ВЪВ ФИЛОСОФСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

**Abstract**

A necessary and sufficient condition that a given proposition to be provable in such a theory that allows to be assigned to the proposition a Gödel number for containing Peano arithmetic is that Gödel number itself. This is the sense of Martin Löb's theorem (1955). Now we can put several philosophical questions. Whether is the Gödel number of a propositional formula necessarily finite? What would the Gödel number of a theorem itself containing Peano arithmetic be? That is the case of the so-called first incompleteness theorem (Gödel 1931). What would the Gödel number of a self-referential statement be? What would the Gödel number of such a proposition be: its Peano arithmetic expression after coding contains itself as an operand? What is the Gödel number of Gödel's proposition [R(q); q] that states its proper unprovability? It is the key statement for his proving of the first incompleteness theorem. Whether does Peano arithmetic figure in it (or in the ones similar to it) as a single symbol, by which however actual infinity would be introduced, or as a constructively infinite set of primary signs? In fact, in that last case the Gödel number of the first incompleteness theorem should be infinite. If the Gödel number of a statement is infinite, then can it to be accepted as a theorem? What would the Gödel number of its negation be? Whether is the infinite Gödel number of a statement equivalent to its undecidability? Respectively, whether is the following statement valid: undecidable propositions with finite Gödel numbers (even in any coding) do not exist? Martin Löb's theorem philosophically interpreted displays that paradoxes do not appear if we restrict ourselves only to positive, affirmative, cataphatic judgments in relation to totality.

***Keywords:*** Martin Löb, Kurt Gödel, John von Neumann, Henkin's proposition, Gödel number, first incompleteness theorem, self-reference, undecidabilty, Ramsey's (redundant) concept of truth, logic of quantum mechanics and information, Kochen – Specker theorem, liar and arrow paradox

Да преминем направо[1] към теоремата на Мартин Хуго Льоб (Löb: 1955). Тя може да се изкаже под формата на импликация, а именно:

От това (1), че от аксиомите на Пеано за аритметиката следва, че дадено твърдение има Гьоделов номер, то *следва* (2), че от твърдението за неговата доказуемост следва самото то.

Обратното твърдение, че от (2) *следва* (1) обикновено не се формулира като теорема, не защото е невярно, а защото се приема, че е тривиално.

Налице е следователно равнозначност на (1) и (2):

Ако от аксиомите на Пеано за аритметиката следва, че дадено твърдение има Гьоделов номер, то цялата тази импликация е равнозначна на импликацията, че от собствената доказуемост на твърдението следва самото то.

Теоремата е доказана, за да се реши като следствие задача, поставена от Л. Хенкин три години преди това в същото списание (Henkin 1952: 160). Ако $\Sigma$ е коя да е стандартна формална система, адекватна за рекурсивната теория на числата, може да се построи формула (имаща цялото число $q$ като свой Гьоделов номер), която изразява пропозицията, че формулата с Гьоделов номер $q$ е доказуема в $\Sigma$. Дали тази формула е доказуема, или независима в $\Sigma$?

Буквално Мартин Льоб е записал, след като в бележка под линия отбелязва, че в първоначалния вариант теоремата е формулирана непосредствено като решение на задачата на Хенкин, а тази формулировка е по препоръка на рецензента, своята теорема така:

„ТЕОРЕМА: *Ако $\mathfrak{S}$ е произволна формула, такава че $\mathfrak{B}(\{\mathfrak{S}\})\rightarrow\mathfrak{S}$ е теорема, то $\mathfrak{S}$ е теорема*" (Löb 1955: 116).

Тук с $\mathfrak{B}(\{\mathfrak{S}\})$ е означен гьоделовият номер на произволната формула .

Непосредствено под нея е формулирано като следствие решението на задачата на Хенкин, а именно: *твърдението според нейното условие е теорема* (не е независимо твърдение в $\Sigma$).

Нерядко теоремата се обсъжда като ход на мисълта, провокиран от този в първата теорема на Гьодел за непълнотата: вместо твърдение, твърдящо собствената си недоказуемост (Gödel 1931: 176; 1986: 150, 151), своеобразен аналог на Лъжеца (Gödel 1931: 175; 1986: 148, 149) от парадокса за него, да се разгледа твърдение, което – обратно, твърди собствената си доказуемост.

Друга формулировка на теоремата на Льоб (Сморински 1983: 33):

Еквивалентни са (1') и (2'):

(1') От това, че от теория, съдържаща аритметиката на Пеано, следва Гьоделов номер за дадено твърдение, следва самото твърдение.

---

1 Контекстът на настоящата статия е втората част на книгата ми „Философия на квантовата информация. Айнщайн и Гьодел" (2009).

(2') От теория, съдържаща аритметиката на Пеано, следва самото твърдение.

Следователно необходимо и достатъчно условие дадено твърдение да е доказуемо в дадена теория, която поради това, че съдържа аритметиката на Пеано, позволява да му се определи Гьоделов номер, е самият този Гьоделов номер.

Тук ще поставим цяла група тясно свързани въпроси, отчасти обсъдени в друга публикация (Пенчев 2010Н). Дали Гьоделовият номер на една пропозиционална формула е непременно краен? Какъв би бил Гьоделовият номер на теорема, която самата тя съдържа аритметиката на Пеано, какъвто е случаят с т. нар. първа теорема за непълнотата на Гьодел? Какъв би бил Гьоделовият номер на самореференциално твърдение или на такова, чийто аритметичен израз при кодиране, в т.ч. например използваното от Гьодел, съдържа в качеството на операнд себе си, т. е. резултатът от операцията, какъвто е случаят с ключовото за доказателството на първата му теорема за непълнотата[2] съждение, обозначено от него с [R(q); q]: онова, което твърди собствената си недоказуемост (Gödel 1931: 176; 1986: 150, 151)? Дали аритметиката на Пеано в нея и в подобна на нея фигурира в качеството на единичен символ, чрез което обаче имплицитно би била въведена актуална безкрайност или като конструктивно безкрайно множество от първични знаци? Наистина в последния случая – по начина на кодиране, използван от Гьодел (Gödel 1931: 178–179; 1986: 156; 157) – номерът на т. нар. първа теорема за непълнотата би трябвало да бъде безкраен, но какви биха били предпоставките на твърдение, че не съществува крайно кодиране на (конструктивно) безкраен брой знаци? Най-сетне, ако Гьоделовият номер на дадено твърдение е безкраен, може ли то да се приеме за теорема? Какъв би бил Гьоделовият номер на неговото отрицание? Дали наличието на безкраен Гьоделов номер на пропозиционална формула не е еквивалентно на нейната неразрешимост? Съответно, дали е валидно твърдението: не съществуват неразрешими твърдения с краен Гьоделов номер при каквото и да е кодиране?

От философска гледна точка особен интерес представляват свойствата „коректност" (всичко доказуемо е истинно) и „пълнота" (всичко истинно е доказуемо: за всяко твърдение е доказуемо или то, или неговото отрицание) на теорията (Сморинский 1983: 32).

Нека разгледаме теоремата на Льоб за една коректна и пълна теория. За нея би било валидно:

От това (1"), че от аксиомите на Пеано за аритметиката следва, че дадено твърдение има Гьоделов номер, тогава и само тогава (2"), когато от твърдението за неговата истинност следва самото то.

Но ако твърдението за истинността на едно твърдение **P** е еквивалентно на самото твърдение: ***P*** $\longleftrightarrow$ **{*P е истинно*}**, то в случая на коректна и пълна теория би било валидно:

Наличието на Гьоделов номер е еквивалентно на това, че дадено твърдение следва от себе си.

**„*P*** $\longleftrightarrow$ **{*P е истинно*}**" е по същество една метаматематическа хипотеза; тя има прекалено общ характер, за да бъде обсъждана в качеството на аксиома. По-скоро заслужава название „концепция за истината" и това е т. нар. редундантна концепция за истината, обикновено приписвана на Франк Рамзи: поредния отишъл си твърде рано математик (1903–1930).

---

[2] В номерацията на неговата публикация това е теорема VI (Gödel 1931: 187; 1986: 172, 173).

В контекста на една негова, малко по-ранна работа „Истина и вероятност“ (Ramsey 1978: 58–100), т. нар. редундантна концепция за истината може да бъде тълкувана[3] като приписване вероятност единица на дадено твърдение в смисъла на пълна достоверност или убеденост в него.

Нека се обърнем за интерпретация към квантовата механика. Според класическия подход на фон Нойман (Neumann 1932) налице са хипермаксимални оператори (Neumann 1932: 87), които са физически величини[4], и проекционни оператори, които са съждения относно тези физически величини (Neumann 1932: 130–134 [§ III.5]) и могат да приемат стойности „0“ и „1“. Освен това $\|\Psi(q)\|^2$ е вероятността микрообектът $\boldsymbol{Z}$ с тази вълнова функция да се окаже в състояние $\boldsymbol{q}$. Нека при тези предпоставки обсъдим проекционния оператор да го означим със $\boldsymbol{Z}$, който съответства на съждението „Микрообектът $\boldsymbol{Z}$ е в състояние $\boldsymbol{q}$“. Пред нас се откриват две възможности. Едната е да отъждествим $\boldsymbol{Z}$, с която да е *пълна* съвкупност от едновременно измерими величини, и тогава $\boldsymbol{Z}$ съществува и приема стойност **1** – вярно, **0** – невярно. Другата е да отъждествим $\boldsymbol{Z}$ със съвкупността от всички, макар и *нееднoвременно* измерими величини и тогава $\boldsymbol{Z}$ не съществува.

Можем да покажем, че в последна сметка в първия случай е приета аксиомата за избора, а във втория – не. В първия случай можем да останем в рамките на хипотезата за скритите параметри по един особен начин, който да я примирява с положенията и експериментите на квантовата механика[5], и на причинността в смисъла на фон Нойман (Neumann 1932: 170–173), докато във втория случай бихме постулирали като най-изначална случайността в смисъла на отказ от лоренцова инвариантност и следващата оттук интерпретация на квантовата механика бихме могли да наречем радикално Копенхагенска в смисъл, че се явява краен вариант на последната.

Основа за сравнението на метаравнище за двете интерпретации може да бъде концепцията на Рамзи за истината, като при тази предпоставка би се оказало, че нещата в края на краищата опират до сравняването на субективна и обективна вероятност и съответните им „истини“ в смисъла на Рамзи.

Ако приемем съществуването на оператора $\boldsymbol{Z}$ по начина, по който е дефиниран да получава стойност или „1“, или „0“, то разпределението на вероятността $\boldsymbol{P}\!: \boldsymbol{q} \xrightarrow{p} \|\Psi(q)\|^2$ е статистика на елементарните събития, всяко от които представлява прилагане на проекционния оператор $\boldsymbol{Z}$ към вълновата функция на квантовия обект $\boldsymbol{Z}$.[6] В този случай в качеството на скрит параметър можем да разгледаме времето. До противоречие с кван-

---

3 Привеждан като редундантна концепция за истината, възгледът на Рамзи съществено се обеднява: за неговите пренебрегвани аспекти може да се прочете в работата „Рамзи за истината и истината за Рамзи“ (Le Morvan 2004).

4 „На физическите величини на квантовомеханичната система еднозначно са съпоставени хипермаксимални оператори … и е целесъобразно е да се допусне, че това съответствие е едно-еднозначно, т. е. че действително на всеки хипермаксимален оператор съответства физическа величина“ (Neumann 1932: 167).

5 При това обаче трябва да се има предвид не самата теорема (Kochen, Specker 1967: 70), а контрапримерът, който самите те дават, затова как да се построи в двумерно хилбертово пространство модел със скрити параметри за квантовата механика (Kochen, Specker 1967: 75–82). Този модел е изоморфен на кюбит (тъй като е сфера в триизмерно евклидово пространство, на която кюбитът е изоморфен) и може да се покаже как чрез пеановско аритметизиране и при валидност на аксиомата за избора, необходимо трябва да съществува скрит параметър, но не и той конструктивно да се посочи, поради което остава случаен.

6 Тъкмо това е предметът на основната теорема (теорема 1) и патосът на класическата работа на Кохен и Шпекер, цитирана в предната бележка под линия.

товата механика не се достига, тъй като този скрит параметър е невъзпроизводим. Не е възможно да повторим измерването, за който и да е момент $t = t_0$.

Пред нас се открива една твърде особена връзка между парадокса на Лъжеца, този на Стрелата и сентенцията, приписвана на Хераклит: „Не можеш два пъти да влезеш в една река":

Времето и оттук, физическата величина на времето, забранява самореференциалното прилагане, оттук и парадоксите, свързани с последното, следователно и каквато и да било неразрешимост, на следното основание:

„Аз лъжа" не може да се отнесе за миналия момент, в който е изказано, затова самореференциалната употреба е забранена.

„Стрелата не е тук" не може да се отнесе към настоящия момент, вече отминал, в който е изказано твърдението, т.е. пак не се допуска самореференциалната употреба.

Чрез времето в качеството на аргумент за всяка функция на физическа величина се постулира, че тя може да се нареди добре[7] и с това също както аксиомата за избора, така и всеобща валидност на принципа на причинността. Ако се приеме следният уточнен вариант на аксиомата за избора, че безкраен избор може да се направи, но не може да се повтори, респ. че всяко множество може да се нареди добре, но не и втори път по същия начин, то подходите на Айнщайн и на Бор към квантовата механика се оказват примирени по следния начин:

В квантовата механика съществува скрит параметър, който определя причинно дисперсията на физическите величини статистически. Това съществувание може обаче да се твърди единствено на основата на аксиомата за избора и следователно този параметър не може да се посочи, респ. не може да се построи (не е конструктивен). Много деликатен в логическо (а и в онтологическо) отношение е въпросът дали като такъв не може да се приеме физическата величина на времето.

За да го обсъдим, да се върнем към това, че предпоставка за разглеждането на вероятностното разпределение $P(q)$ в качеството на статистика, използвайки проекционния оператор $Z$, е съществуването на последния. На свой ред това изискваше обектът $Z$ да бъде отъждествен с пълната съвкупност от едновременно измерими физически величини. За нас сега остава въпросът какво да правим, ако обектът $Z$ (нека сега го означим със $Z'$) се отъждестви с дуалната съвкупност от едновременно измерими величини и следователно с коя да е друга, различна съвкупност едновременно измерими величини. За да продължат да бъдат примирени подходите на Айнщайн и на Бор към квантовата механика, е необходимо: $Z \neq Z'$. Един начин е да се интерпретира последната нетъждественост чрез двойно време, да речем на квантовия обект и на уреда, което да приема в общия случай напр. комплексни стойности. Такъв подход е тясно свързан с посоченото уточнение на аксиомата за избора, което може също така да бъде означавано като аксиома за неповторимия избор (или просто „неповторим избор", респ. в другия случай – „повторим избор").

Ситуацията „$Z \neq Z'$" обаче може да се тълкува и на основата на повторимия избор като тогава би се избягнала или пропуснала възможността явленията на сдвояване да се отъждествяват с гравитационните, бидейки иначе обединявани и разграничени съответно в квантовия и в макроскопичния свят.

Най-прецизното, което може да се каже, относно твърдението, че физическата величина на времето е (единственият възможен) „скрит параметър" в квантовата механика,

---

7 Става дума фактически за прилагане на две сходни и в съществените аксиоматики еквивалентни позиции, а също така и с аксиомата за избора: 'всяко множество може да се нареди добре' и 'винаги съществува декартово произведение между две множества'.

е, че то е неразрешимо, но приемането на едната или другата алтернативна хипотеза в качеството на аксиома води до принципно различни теории, които *засега* са експериментално непроверими (най-малкото заради това, че още не са формулирани експлицитно). Неразрешим е също така проблемът как да се разбира „засега": само по отношение на човешкото познание или по отношение на самото състояние на нещата (зависещо от действията ни в настоящия или бъдещи моменти, т.е. от нашия избор). Току-що формулираната позиция не е задължително да се осмисля в термините на интуиционизма и неговата логика.

Обичайно е квантовата механика да се третира като досадно изключение, за което трябва да се намери подход да бъде „вкарана в строя" на останалите, особено физически и математически теории. Може обаче да се тръгне и по обратния път: тя да се разглежда като по-съвършен образец, към чиято парадигма трябва да се насочи човешкото знание. Тя задава модел, твърде близък до ежедневния тип мислене в следното отношение: противоречията не се приемат за някакво изключително и фатално за разсъжденията зло, и то за разлика от научните теории и преди всичко тези, които са изградени не описателно, а логически. Двете страни на противоречието се разглеждат по-скоро като дуални, допълнителни, ако използваме терминологията, въведена от Нилс Бор във философията на квантовата механика. То сякаш се третира като неразрешимо твърдение, което допуска „кохерентна суперпозиция" на две контрадикторни възможности. В резултат изводът се оказва само възможен, вероятен в една или друга степен и само много рядко необходим, стопроцентово сигурен, точно както и тези в квантовата механика. Ако сега сверим такъв подход с обичайния ежедневен тип човешки разсъждения и заключения, неизбежно ще забележим, че подобен модел ги описва много по-добре, отколкото строго научният и формално-логически, какъвто е канонът за теория. Така парадоксалността на квантовата механика се оказва много по-близка и може би сродна до нестрогия, но ефикасен и утвърден в хилядолетен исторически опит тип приблизителни и несигурни разсъждения, които реално ръководят нашето поведение и които са онези, съвременният човек в качеството на биологичен вид да се означава като „два пъти" разумен: homo sapiens sapiens.

Нека сега, постепенно приближавайки се към подхода на Рамзи към истината, да приемем за неразрешими всички твърдения, които не са едновременно разрешими с дадените и за разрешими всички, които са едновременно разрешими с дадените. Обиграният в „козните" на самореференциалността читател, предполагам, вече е „настръхнал" от такова определение за неразрешимост: „неразрешими са всички твърдения, които не са едновременно разрешими с дадените"; навярно тогава биха съществували твърдения, за които няма да може да се каже дали са разрешими или неразрешими, т.е. самото твърдение за неразрешимост не е (винаги) разрешимо.

Рамзи пише: „Но преди да продължим по-нататък с анализа на съждението е необходимо да кажем нещо относно истината и лъжата [falsehood], за да покажем, че няма отделен проблем за истината, а само лингвистична среда [middle]. Истина и лъжа са приписани първично на пропозициите. Пропозициите, на които те са приписани могат да бъдат или експлицитно дадени или описани. Да предположим сега, че е експлицитно дадена; тогава е очевидно, че 'Истина е, че Цезар е убит', не значи повече отколкото, че Цезар е убит, и 'Лъжа е, че Цезар е убит' значи, че Цезар не е убит. Има фрази, които използваме за подчертаване или по стилистични причини, или за да посочим позицията, заемана от твърдението в нашия аргумент. Така също можем да кажем, „Факт е, че той е убит" или „Че той е убит, е обратно на факта" (Ramsey 1978: 44).

И малко по-нататък: „Когато се въведат всички форми на пропозиция, анализът е по-сложен, но не е съществено различен; и е ясно, че проблемът не е що се отнася до природата на истината и лъжата, а що се отнася до природата на съждението или твърдението…“ (Ramsey 1978: 45).

В работата на Рамзи „Истина и вероятност“ (1928) „теорията на вероятността е взета като клон на логиката, логиката на частичната убеденост и незаключителния аргумент“ (Ramsey 1978: 59). За целта той въвежда „Степени на убеденост“ (68–86), показва различни начини за тяхното измерване като непрекъсната физическа величина и предлага аксиоматика. По-нататък разграничава логика на непротиворечивостта, относно която е валидна неговата концепция за истината, която не случайно бива наречена впоследствие редундантна концепция за истината, тъй като предикатът ‘истинен’ (респ. ‘неистинен’) е просто излишен (не добавя нищо допълнително), от *логика на истината*, която отъждествява с индуктивната логика: на всяко съждение може да се припише степен на убеденост в интервала на крайните стойности между ‘истина’ и ‘лъжа’. Чрез противопоставянето между т. нар. субективна и обективна вероятност, концепцията на Рамзи се описва в едри щрихи така:

Първата е предмет на логиката и чрез понятието „степени на убеденост“ може да се придаде съществен смисъл на това за истина, докато втората – на физиката и статистиката: „Наистина общата разлика на мненията между статистиците, които в по-голямата си част приемат честотната теория на вероятността, и логиците, които най-вече я отхвърлят, се отнася вероятно до това, че двете школи обсъждат реално различни неща и че думата ‘вероятност’ е използвана от логиците в един смисъл, а от статистиците в друг“ (Ramsey 1978: 59).

Направеното малко по-горе разглеждане, от една страна, и отъждествяването на „логиката на истината“ с индуктивната логика от Рамзи, от друга, ни позволява едновременно да разграничим и обединим „логическото“ и „статистическото“ понятие за вероятност чрез дискусията около физическата величина на времето, в т.ч. и в квантовата механика. Към нейния „портрет“ бихме могли да добавим следния щрих: на основата на Скулемова относителност (при валидност на аксиомата за избора) между канторовските видове безкрайност и дори между крайно и безкрайно (Пенчев 2010П), физическата (непълната) и математическата (пълната) индукция могат да се отъждествят чрез следното съответствие *V*: при предпоставките за валидност за ‘начално число $\stackrel{V}{\leftrightarrow}$ момент от време’ и за ‘функцията наследник $\stackrel{V}{\leftrightarrow}$ причинна връзка’ на дадено твърдение следва неговата истинност за ‘всички числа, по-големи или равни на началното $\stackrel{V}{\leftrightarrow}$ началния и всички следващи моменти от време’. Обратно, начинът и степента на отхвърляне на причинната връзка в квантовата механика заедно с валидност на аксиомата за избора, която гарантира съществуването на ‘*V*’, биха въздействали на може би най-продуктивната в пеановската аритметика аксиома, тази за пълната индукция.

Да се върнем отново към теоремата на Льоб за една коректна и пълна теория, за която би било валидно, че от това (1″), че от аксиомите на Пеано за аритметиката следва, че дадено твърдение има Гьоделов номер, следва тогава и само тогава (2″), когато от твърдението за неговата истинност следва самото то.

Съществува ли обаче коректна и пълна теория? Според теоремата на Гьодел, не и ако „съдържа“ аритметиката на Пеано, смисълът на което е, че за доказуемите в нея твърдения съществува Гьоделова номерация и тя е взаимно-еднозначна: за всяко доказуемо твърдение точно един Гьоделов номер.

Нека отбележим нещо много важно: първо, за *хипотетичната коректна и пълна теория*, щеше да е в сила, че всички твърдения, които следват от себе си, са доказуеми. Обратно, твърденията, които не следват от себе си, няма да бъдат доказуеми *в нея*.

Чрез теоремата на Герхард Генцен (Gentzen 1969: 132–213; 252–286) може да се покаже, че обратно на предразсъдъка не ако отслабим аксиоматиката на Пеано, а ако я усилим[8], по начин, достатъчен, за да бъде включена трансфинитната индукция в нея, можем да получим лелеяната, досега хипотетична *коректна и пълна теория*, относно която ще е валидно, че всички твърдения, които следват от себе си, ще бъдат доказуеми в нея. Може да се предположи, че твърденията, които не са доказуеми в нея, са логически допълнителни в смисъла на фон Нойман с доказуемите в нея; тоест, съждение за валидност на недоказуемите твърдения не може да се твърди заедно със съждение за валидността на доказуемите твърдения.

Нека отбележим още нещо много важно: второ, нека за тази коректна и пълна теория да допуснем, че не е пълна, например озадачени от факта, че сме получили теория, която не се включва в условията на първата теорема на Гьодел за непълнотата не като е отстранена, а като е *добавена* аксиома към аксиоматиката на Пеано (а именно в случая – за трансфинитната индукция); тоест, че твърденията, които не следват от себе си, всъщност следват от себе си и също така са доказуеми, но ако се добавят допълнителни, неизвестни, да ги наречем с подчертан намек *скрити* аксиоми. С други думи, да разгледаме наличието на недоказуеми твърдения в тази – за нас вече само привидно – коректна и пълна теория като свидетелство за нейната непълнота (без да поставяме под въпрос нейната коректност). Очевидно по този начин ще възпроизведем и пренесем несъгласията и съмненията на Айнщайн относно квантовата механика на един логически език. С помощта на теоремата на Кохен-Шпекер (Kochen, Specker 1967) може да се покаже, че ако „скритите аксиоми" са независими от предполагаемо непълната теория, те не могат да следват от себе си, или с други думи, да имат определена истинностна стойност. Също и обратно, ако те следват от себе си, непременно са зависими от набедената за непълна теория. Следователно съществува доказателство от противното, че теорията е пълна.

Сморински (1983: 34) в друг, макар и косвено свързан с настоящия контекст, отбелязва, че теоремата на Льоб представлява обобщение на теоремата за непълнотата. На пръв поглед изглежда това да не е така: тя е само паралелна; докато теоремата за непълнотата визира твърдения, които не са доказуеми, то теоремата на Льоб – такива, които са доказуеми. Тя обаче е обобщение в смисъл, че е валидна както за твърдения в непълни аритметични системи (в съответствие с първата теорема на Гьодел за непълнотата), така и за пълни аритметични системи (в съответствие с теоремата на Генцен и други подобни).

В настоящата статия въпросът за пълнотата на аритметиката (например с аксиоматиката на Пеано) има подчинена роля по отношение на въпроса за пълнотата на квантовата механика, от който собствено покълва и израства дисциплината „квантова информация". Въпреки това обаче е налице специфична концепция за пълнотата в аритметиката, която съответства и произтича в известна степен от опровергаването, включително и експериментално, на предложената от Айнщайн хипотеза за непълнотата на квантовата механика.

---

[8] По този начин условията на първата Гьоделова теорема за непълнотата се обезсилват, тъй като изискването да съдържа аритметиката на Пеано в действителност е много силно и ненужно: не се изисква като нейно условие. То се използва като общоприет (и неточен) прост израз вместо твърде сложните за описание, но много по-слаби условия. *Условието, което всъщност „се атакува", т. е. реално се отслабва с добавянето на трансфинитната индукция* е да съществува *взаимно еднозначно* съответствие между доказуемите твърдения и техния Гьоделов номер. Много грубо казано, сега за всяко твърдение съществуват поне два Гьоделови номера: един финитен и един трансфинитен, чрез което теоремата престава да бъде в сила за този случай, тъй като той не влиза и не се поддава на включване в рамките на нейните условия. Разбира се, това е само необходимо, но не и достатъчно условие за валидността на теоремата на Герхард Генцен, каквото обаче също е налице.

Такъв подход към евентуална пълнота на Пеановата аритметика се основава на няколко изходни положения:

1. От четирите типа „неподвижни точки" на предиката, представляващ Гьоделовия номер, т.е. от четирите възможни типа пропозиции, твърдящи или отхвърлящи собствената си доказуемост, наричани самореференциални, само споменатите вече изречения на Хенкин – като следствие от теоремата на Льоб – са доказуеми и следователно разрешими (Люцканов 2008: 75). Именно тяхното обсъждане следва да се постави в основата на пълнотата на аритметиката.

2. Следва да се търси доказателство за пълнота не на самата Пеанова аритметика, защото: а) това е изключено от втората теорема на Гьодел за непълнота; б) евентуално доказателство на пълнотата на аритметиката с помощта на някаква метатеория не решава големия въпрос, предположен от Хилберт относно аритметиката, за самообосноваващата се и в този смисъл окончателна или изначална теория (Пенчев 2010Н).

3. Подходът на квантовата механика подсказва аритметиката на Пеано да се допълни с неин дуален двойник, при което обаче да се изключи едновременното разглеждане на двете чрез едно „аритметично" съотношение за неопределеност. В качеството на такава изглежда най-естествена кандидатурата на трансфинитната аритметика. Крайното и безкрайното са очевидно допълнителни: всички крайни числа се израждат до едно единствено – „0" – от „гледна точка" на трансфинитните числа и операциите с тях; аналогично трансфинитните се израждат до символа „∞" от „гледната точка" на естествените числа.

4. Ако непълнотата се обсъжда като разлика между синтактичната и семантичната пълнота, то изглежда философски обосновано и интуитивно ясно, защо семантично релевантните твърдения, за които „не достига" „Гьоделов синтаксис", са именно относно *актуалната безкрайност*, с други думи, които са твърдения – или те, или техните отрицания са теореми – от една трансфинитна аритметика. Най-прочутите примери, обсъждани още от Гьодел (Gödel: 1940) – аксиомата за избора и обобщената континуум-хипотеза – явно се отнасят към актуалната безкрайност. Грубо казано, истинните твърдения относно актуалната безкрайност, не могат да получат Гьоделов номер в резултат на операции в една финитна аритметика и остават „неразрешими".

5. Макар и проблемите със самообосноваването на математиката да се експлицират – а според някои: и да възникват – в резултат на широкото и непрецизно навлизане на актуалната безкрайност посредством Канторовата теория на множествата, понятието за число лесно се дефинира посредством нея[9] и така идеята за актуална безкрайност, се оказва вече косвено въвлечена в аритметиката.

6. Съществува прост начин да се получи трансфинитният „дуален" двойник на Пеановата аритметика, а именно като се добави аксиомата за трансфинитната индукция.

7. Налице е теоремата на Генцен Генцен (Gentzen 1969: 132–213; 252–286), известна

[9] А именно като класа от крайни множества, чието кардинално число по определение съвпада с числото ***n***, подлежащо на дефиниране. Обаче същото число във всяка една пеановска аритметика се дефинира чрез броене, т.е. чрез ***n*** (респ. ***n – 1***) пъти прилагане на операцията наследник по отношение на първия елемент. В аксиоматиката Цермело-Френкел 'естествено число' може да се дефинира и по двата начина; вторият е видоизменен: отъждествяване на ***n***-тия (***n – 1***-ия) член в редицата, постулирана чрез аксиомата за безкрайността, с поредното естествено число. Обратно: ако ни е необходимо кардиналните и ординалните числа да не са взаимообвързани, съответно – преброените части да не са обвързани с целостта на своята съвкупност строго едно-еднозначно, трябва в една или друга степен да ревизираме тази аксиоматика.

и обсъждана също така и от Гьодел (Gödel 1938: 107–111) – и която коректно извежда пълнотата и непротиворечивостта, т. е. консистентността на Пеановата аритметика, а на основата на последната – нейната консистентност.

Ако се върнем към една гьоделианска гледна точка, то въвеждането на актуална безкрайност в аритметичната система е „противоречиво“ и това е цената, на която – в пълно съгласие с първата теорема за непълнотата – е получена пълнота, с други думи, по недопустим начин.

В заключение може да се добави, че теоремата на Мартин Льоб формално строго показва, че единствено самореференциалност не води до парадокс. Това личи и от парадокса на Ръсел, станал нарицателен за антиномия в основите на математиката, който не се отнася до множеството от всички множества, които се съдържат в себе си, а само до това от тези, които не се съдържат в себе си. Към самореференциалността – както и в ключовото за т. нар. първа теорема за непълнотата на Гьодел твърдение, „твърдящо собствената си недоказуемост“, трябва да се добави и отрицание, за да се получи парадокс. Ако приемем актуалната безкрайност за самореференциална по дефиниция, то тя е „предразположена“ към парадокси, от една страна, но от друга, не допуска отрицание, след каквато забрана парадоксите изчезват. Това, че тоталността или съответно, множеството от всички множества, не допуска отрицание тъкмо по силата на своята всеобхватност, т. е. с други думи по определение, е много близо до ума, интуитивно пределно ясно. Философски тълкувана, теоремата на Мартин Льоб показва, че – ако обратно, останем в рамките на утвърдителни, „катафатични“ съждения относно тоталността, антиномия няма възникне.

ЛИТЕРАТУРА


Gödel, K. 1931. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I. – Monatshefte der Mathematik und Physik. Bd. 38, No 1 (December, 1931), 173–198. (Bilingual German-English edition: K. Gödel. The formally undecidable propositions of Principia mathematica and related systems I. – In: K. Gödel. Collected Works. Vol. I. Publications 1929 – 1936. Oxford: University Press, New York: Clarendon Press – Oxford, 1986, 144–195.)

Gödel, K. 1938. Vortrag bei Zilsel. – In: K. Gödel. Collected Works. Vol. III. Unpublished Essays and Lectures. Oxford: University Press, New York: Clarendon Press – Oxford, 1995, 86–113.

Gödel, K. 1940. The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis with the Axioms of Set Theory. Princeton: University Press. (Collected Works, vol. II, New York, Oxford: University Press, 1990, pp. 33–101.)

Gentzen, G. 1969. The Collected Papers of Gerhard Gentzen (ed. M. Szabo). Amsterdam-London: North Holland Publishing Company

Henkin, L. 1952. A problem concerning provability, problem 3. – The Journal of Symbolic Logic. Vol. 17, No 2, p. 160.

Kochen, S., E. Specker. 1967. The problem of hidden variables in quantum mechanics. – Physical Review A. Vol. 17, № 1, 59–87.

Le Morvan, P. 2004. Ramsey on Truth and Truth on Ramsey. – British Journal for the History of Philosophy. Vol. 12 No 4, 705–718.

Löb, M. 1955. Solution of a problem of Leon Henkin. – The Journal of Symbolic Logic. Vol. 20, No 2, 115–118.

v. Neumann, J. 1932. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin: Verlag von Julius Springer. (J. von Neumann. 1955. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Princeton: University Press;, Й. фон Нейман. 1964. Математические основы квантовой механики. Москва: „Наука“.)

Ramsey, F. 1978. Foundations. Essays in Philosophy, Logic, Mathematic and Economics. London and Henley: Routledge & Kegan Paul.

Люцканов, Р. 2008. Теоремата за непълнотата: контексти на интерпретация. С.: Изток–Запад.

Пенчев, В. 2009. Философия на квантовата информация. Т. 1. Айнщайн и Гьодел. С., ИФИ-БАН.

Пенчев, В. 2010. Неразрешимост на т.нар. първа теорема на Гьодел за непълнотата. Гьоделова и Хилбертова математика. – Философски алтернативи, № 4 (под печат).

Пенчев, В. 2010. Парадоксът на Скулем и квантовата информация. Относителност на пълнота по Гьодел. – Философски алтернативи, № 6 (под печат).

Сморинский, К. 1983. Теоремы о неполноте. – Справочая книга по математической логике. Часть IV. Теория доказательств и конструктивная математика. Наука, Москва, 9–56.