Jan Pociej
Filozof

ROZWIĄZANIE PARADOKSÓW ROSSA I PRIORA
KLASYCZNY RACHUNEK MODALNOŚCI

ABSTRAKT: Rozwiązanie paradoksów Rossa i Priora okazało się trudnym zadaniem. Jego pierwsze dwa etapy, obejmujące identyfikację prawdziwych natur implikacji i wartości logicznych, zostały opisane w artykułach *Rozwiązanie paradoksu implikacji materialnej – 2024* i *Rozwiązanie dylematu Jörgensena – 2024*. Ten artykuł opisuje trzeci etap, obejmujący odkrycie brakujących funktorów modalnych i Klasycznego Rachunku Modalności. Na zakończenie zostają podane procedury rozwiązania obu paradoksów.

SŁOWA KLUCZOWE: rozwiązanie, paradoks Rossa, paradoks Priora, logika, klasyczna, imperatywna, deontyczna, wartości, logiczne, filozofia, metafizyka, zdania, twierdzące, wartościujące, normatywne, rozkazujące, oceny, normy, nakazy, zakazy, deklaratywy, imperatywy, stan, rzeczy, rozum, rozumowanie, implikacja, konkurencja, kompetycja, funktory modalne, Klasyczny Rachunek Modalności

1. Paradoks Rossa i paradoks Priora

Przeciwnicy logiki niedeklaratywnej przywołują na poparcie swojego stanowiska paradoks Rossa, sformułowany przez duńskiego prawnika i filozofa prawa Alfreda Nielsa Krzysztofa Rossa (1899-1979), i paradoks Priora, sformułowany przez nowozelandzkiego logika Artura Normana Priora (1914-1969).

Siła paradoksu Rossa bierze się z implikacyjnego ujęcia reguły pochłaniania dla alternatywy, która w Klasycznym Rachunku Zdań (KRZ) ma postać $p=>p\vee q$ (względnie $q=>p\vee q$), a w logice deontycznej – postać $OA=>O(A\vee B)$. Formuła deontyczna mówi, że jeżeli dana czynność jest zobowiązująca, to zobowiązująca jest dana czynność lub jakaś inna. Na przykład, jeżeli zmienną

„A” zdefiniuje się jako „Wyślij list!”, to implikacja prowadzi do wniosku „Wyślij list lub spal go!”, czego nie sposób zaakceptować (Ross 1941).

Paradoks Priora dotyczy formuły logiki deontycznej O~A=>O(A=>B). Jeżeli ujmie się ją jako implikację, to trzeba zgodzić się na rozumowanie, zgodnie z którym dokonanie czynu zabronionego zobowiązuje sprawcę do zrobienia czegoś więcej – na przykład, popełnienie kradzieży zobowiązuje dodatkowo do popełnienia cudzołóstwa. Von Wright uznał spostrzeżenie Priora za „prawdziwą trudność” (Von Wright 1956) i w celu rozwiązania tego paradoksu stworzył pierwszy system diadycznej logiki deontycznej, który dał początek całej plejadzie podobnych rozwiązań, jednak bez oczekiwanego rezultatu.

Opisując paradoksy Rossa i Priora, szwedzki logik Jerzy Hansen stwierdza, że „ponieważ te paradoksy trapią logikę deontyczną od trzech pokoleń, a nawet postawiły pod znakiem zapytania jej istnienie, ich rozwiązanie byłoby nadzwyczaj pożądane” (Hansen 2006).

2. Klucz do rozwiązania paradoksu Rossa

Kluczem do rozwiązania paradoksu Rossa jest – po pierwsze – prawidłowa identyfikacja natury funkcji logicznej znanej od starożytności jako implikacja, i – po drugie – uznanie imperatywów za zdania w sensie logicznym.

Identyfikacja natury rzekomej implikacji została dokonana w artykule *Rozwiązanie paradoksu implikacji materialnej* (Pociej 2024/1). Okazało się, że implikacja jest w rzeczywistości rodzajem przeciwstawności, dla której zaproponowana została nazwa *kompetycja*. Przeistoczenie implikacji w kompetycję wymagało stosownej zmiany konektywu, w związku z czym w miejsce konektywu „jeżeli, to” zostały zaproponowane takie spójniki, jak „lecz”, „ale” czy „jednak, a ponieważ okazało się, że niektóre zdania konkurencji brzmią lepiej z użyciem innych spójników przeciwstawnych, takich jak „ewentualnie” lub „raczej..., niż”, zostało zaproponowane również ich używanie.

Fakt sensowności logicznej zdań imperatywnych – i w ogóle wszelkich zdań z wyjątkiem samozdań – został wykazany w artykule *Rozwiązanie dylematu Jörgensena* (Pociej 2024/2).

W oparciu o wymienione rozstrzygnięcia filozoficzne można odczytać formułę p=>(p∨q) jako następujące zdanie:

PR1: “Wyślij list; ewentualnie, wyślij go lub spal!”

Takie zdanie nie ma w sobie nic paradoksalnego i w związku z tym można uznać, że na gruncie KRZ paradoks Rossa został rozwiązany. Logicy poszukiwali jednak rozwiązania paradoksu Rossa nie w ramach KRZ, a na gruncie logiki deontycznej, ponieważ odnosił się on do zdań w trybie rozkazującym. Zdania te nie zawierają czasowników modalnych, ale tryb rozkazujący sprawia, że ich orzeczenia odgrywają rolę nakazów, będących jedną z modalności deontycznych. Funktor obowiązywania w formule OA=>O(A∨B) mógłby więc oznaczać zarówno czasownik modalny (np. należy), jak i tryb rozkazujący. Jednak podobna dwuznaczność nie zachodzi w stosunku do funktora dozwolenia. Powstaje w związku z tym pytanie, co właściwie oznaczają funktory deontyczne i jakie są ich wzajemne relacje.

Pomocą w znalezieniu odpowiedzi na te pytania służy ponownie analogia między funkcjonalnością logiczną a wynikami meczu piłki nożnej, zastosowana w artykule *Rozwiązanie paradoksu implikacji materialnej*. Zdania atomowe odnoszą się tam do prostych zdarzeń – zdobycia lub niezdobycia bramki, a ich kombinacje, interpretowane na różne sposoby przy pomocy funkcji logicznych, opisują wyniki meczu, takie jak wygrana, nieprzegrana, itd. Przez analogię do tamtej analogii należy uznać, że takie imperatywy, jak „Wyślij list!" i „Nie wysyłaj listu!" oznaczają modalności szczegółowe (fakty), czyli nakazy i zakazy, a ich kombinacje stanowią modalności ogólne (stany rzeczy), będące odpowiednikami operacji logicznych. Modalności proste, jak była o tym mowa, nie muszą być wyrażone osobnymi czasownikami, jednak tworzą modalności złożone na analogicznej zasadzie, jak fakty zdobycia lub niezdobycia bramek tworzą wynik meczu. W związku z tym można przyjąć, że między imperatywem „Wyślij list!" a normatywem „Masz wysłać list!" zachodzi relacja podobna, jak między jednostkowym poleceniem a stwierdzeniem obowiązku.

Dokonawszy tych wstępnych ustaleń, można podjąć próbę rozwiązania deontycznej wersji paradoksu Rossa. Punktem wyjścia będzie – sformułowany przez Von Wrighta – drugi aksjomat logiki deontycznej, mający postać O(A=>B)=>(OA=>OB) i odczytywany jako implikacja: “Jeżeli obowiązuje wynikanie z A do B, to z obowiązywania A wynika obowiązywanie B”. Rozumiany jako kompetycja, aksjomat ten przybierałby postać O(A=>B)<=>(OA=>OB) i miałby znaczyć: “Jeżeli obowiązuje kompetycja między A a B, to obowiązek A konkuruje z obowiązkiem B”. W konsekwencji formuła O(A=>(A∨B)) zostałaby przekształcona w formułę OA=>O(A∨B), którą należałoby odczytać jako:

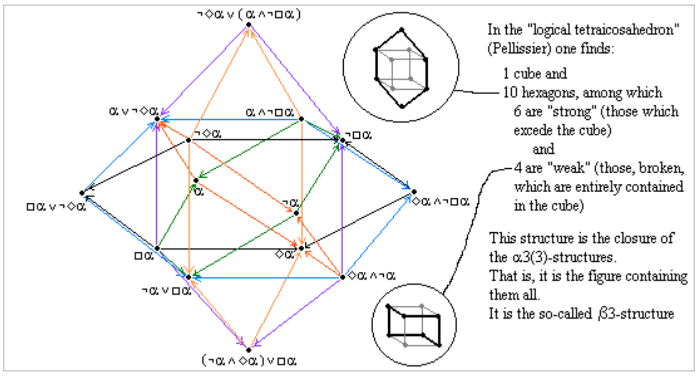
PR2: “Masz list wysłać, ewentualnie masz list wysłać lub spalić”.

Jak widać, wersja deontyczna wydaje się odpowiadać wersji propozycjonalnej. Rodzi się jednak od razu pytanie dotyczące wartości logicznych funktorów deontycznych: jakie one właściwie są? Jak to jest, że wartość logiczna funktora obowiązku alternatywy wydaje się taka sama, jak wartość funktora obowiązku pojedynczego członu ? Aby odpowiedzieć na to pytanie, należy najpierw określić zbiór wszystkich funktorów deontycznych.

3. Uzupełnienie zbioru funktorów deontycznych

Logicy (Lewis, Kripke, Feyes, Von Wright) opracowali kilka systemów modalnego rachunku zdań, jednak ich poszukiwania poszły w kierunku używania minimalnej ilości funktorów (najczęściej są to funktory konieczności i możliwości, które w logice deontycznej funkcjonują jako funktory nakazu i dozwolenia). Do stworzenia pełnej listy funktorów deontycznych bardziej przydatna okazuje się geometria przeciwstawności. Jej rdzeniem jest opisany przez Arystotelesa kwadrat logiczny, zwany również kwadratem przeciwstawności. Zgodnie z tą geometrią, przeciwstawienia tworzą strukturę, nazwaną przez Alessio Morettiego strukturą beta-trzy (β3-structure), której przestrzenny odpowiednik, mający formę tetraikosahedronu, został odkryty przez francuskiego matematyka Régisa Pellissiera. Widok tej struktury przedstawia się następująco (Moretti 2009, 209):

Ilustracja 1



Wierzchołki oznaczają elementy przeciwstawiane, a krawędzie i przekątne – relacje przeciwstawności (sprzeczność, przeciwieństwo, podprzeciwieństwo i podporządkowanie). Elementami przeciwstawianymi mogą być zarówno funkcje logiczne (koniunkcja, alternatywa, itd), jak i funktory deontyczne lub wyniki meczu piłkarskiego. Przeciwstawnościami są operacje logiczne: nierównoważność odpowiada sprzeczności (*contradictio*), dysjunkcja – przeciwieństwu (*contrarietas*), alternatywa – podprzeciwieństwu (*subcontrarietas*) i kompetycja – podporządkowaniu (*subalternatio*).

Geometria przeciwstawności w powiązaniu z tablicami istności pozwala na stwierdzenie analogii między operacjami logicznymi a funktorami deontycznymi. Cztery z tych funktorów, oznaczające nakaz, zakaz i pozwolenie na robienie czegoś lub pozwolenie na nierobienie czegoś – oznaczane w tradycyjnym kwadracie logicznym literami A, E, I i O – są znane od wieków. Struktura Pellisiera zawiera dziesięć innych funktorów, które należy dopiero zidentyfikować. Pomocą w identyfikacji służy ich analogia do wyników meczu piłkarskiego, jak to widać w tabeli poniżej.

Tabela 1

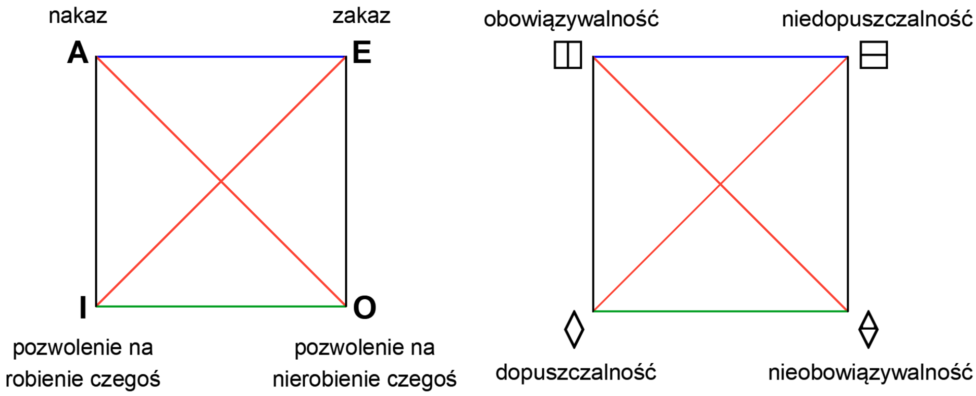
Stany rzeczy związane z meczem	Symbole funkcji	Wartości logiczne	Funktory modalne (tu: deontyczne)
A zdobywają bramkę,	A	1100	□A nakaz A (należy A)
A nie zdobywają bramki,	~A	0011	⧄A zakaz A (należy nie A)
B zdobywają bramkę,	B	1010	□B nakaz B (należy B)
B nie zdobywają bramki,	~B	0101	⧄B zakaz B (należy nie B)
wygrana A, przegrana B	A≠>B	0100	◫A, ⊟B obowiązywalność A, niedopuszczalność B (trzeba A/nie B; nie wolno nie A/B; należy A, lecz nie B/nie B, lecz A)
przegrana A, wygrana B	A<≠B	0010	⊟A, ◫B niedopuszczalność A, obowiązywalność B (trzeba B/nie A; nie wolno A/ nie B; należy nie A, lecz B/B, lecz nie A)
nieprzegrana A, niewygrana B	A<=B	1101	◊A, ⟠B dopuszczalność A, nieobowiązywalność B (wolno A, wolno nie B/nie trzeba B; należy B, ale/niemniej/ewentualnie należy A; należy raczej A, niż B)
niewygrana A, nieprzegrana B	A=>B	1011	⟠A, ◊B nieobowiązywalność A, dopuszczalność B (nie trzeba A/wolno nie A, wolno B; należy A, ale/niemniej/ewentualnie należy B, należy raczej B, niż A)
remis	A<=>B	1001	○ równoprawność (należy równoprawnie A, jeśli B)

nie remis	A<≠>B	0110	⊖ nierównoprawność (należy nierównoprawnie A, jeżeli nie B)
remis bramkowy	A∧B	1000	⦶ współobowiązywalność (należy wspólnie A i B)
remis bezbramkowy	A↓B	0001	◎ wspólniedopuszczalność (należy wspólnie nie A i nie B)
nie remis bramkowy	A↑B	0111	⊕ niewspółobowiązywalność (nie należy wspólnie A i B)
nie remis bezbramkowy	A∨B	1110	⦵ niewspólniedopuszczalność (nie należy wspólnie nie A i nie B)

Dobór nazw funktorów raczej nie powinien budzić kontrowersji. W polskiej literaturze deontycznej mówi się zasadniczo o trzech funktorach deontycznych – obowiązku, zakazu i dozwolenia. Zamiennie z „obowiązkiem” używany jest termin „nakaz”, a w miejsce „dozwolenia” pojawiają się takie terminy, jak „fakultatywność” lub „opcjonalność”. Ponieważ terminy „nakaz” i „zakaz” otrzymują znaczenie prostych modalności deontycznych, będących analogatami zdobycia i niezdobycia bramki, zostają zastąpione terminami „obowiązywalność” i „niedopuszczalność”, będących analogatami wygranej i przegranej. Natomiast terminy „dozwolenie”, „fakultatywność” i „opcjonalność” są terminami dwuznacznymi, ponieważ obejmują zarówno to, że wolno coś robić, jak i to, że wolno czegoś nie robić. W związku z tym zostają zastąpione terminami „dopuszczalność” i „nieobowiązywalność”.

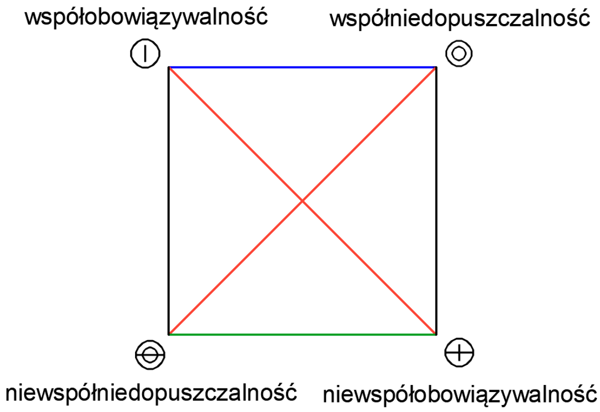
Cztery funktory – obowiązywalności, dopuszczalności, nieobowiązywalności i niedopuszczalności tworzą kwadrat logiczny, w którym tradycyjnie umieszczano nakaz, zakaz i dwie odmiany dozwolenia. Ten kwadrat zachowuje ważność. Dopuszczalność i nieobowiązywalność pozostają dwiema odmianami dozwolenia, natomiast nakaz i zakaz zostają zastąpione przez obowiązywalność i niedopuszczalność, jak to widać na ilustracji poniżej.

Ilustracja 2



Analogiczny kwadrat logiczny tworzą funktory współobowiązywalności, współniedopuszaczalności, niewspółniedopuszczalności i niewspółobowiązywalności. Jego poprawność wydaje się oczywista.

Ilustracja 3



Proponowane nazwy pozostałych nowych funktorów, takie jak „współobowiązywalność" czy „niewspółniedopuszczalność" są, co prawda, rozwlekłe, ale współbrzmią z funkcjonującymi w polskiej logice terminami takimi, jak „współzachodzenie" czy „niewspółniezachodzenie", i wydają się wystarczająco precyzyjne do prowadzenia dalszych rozważań.

4. Klasyczny Rachunek Modalności

Powstaje oczywiście pytanie, dlaczego przez wieki nie odróżniano „nakazu" od „obowiązku" ani „zakazu" od „niedopuszczalności". Wydaje się, że powodem jest bliskie powinowactwo znaczeń terminów – każdy obowiązek jest również nakazem i każda niedopuszczalność jest również zakazem. Dostrzeżenie różnic między nimi staje się możliwe dopiero dzięki zastosowaniu rachunku modalności.

Taki rachunek był dotąd traktowany jako Klasyczny Rachunek Zdań rozszerzony o funktory nakazu, zakazu i dozwolenia. Jednak dzięki uzupełnieniu zbioru funktorów deontycznych oraz przyznaniu funktorom nakazu i zakazu ról analogicznych do zmiennych zdaniowych, rachunek modalności staje się pełnoprawnym Klasycznym Rachunkiem Modalności (KRM). Tym samym zostaje sfalsyfikowane twierdzenie o nieistnieniu funkcjonalności prawdziwościowej – a mówiąc ściśle: istnościowej – operatorów modalnych. Ta funkcjonalność istnieje i pozwala na zapisanie semantyki w formacie tablic istności.

Na przykład, takie stwierdzenia, jak:

1) „Dopuszczalność jest równoważna alternatywie obowiązywalności i równoprawności, podobnie jak nieprzegrana jest równoważna alternatywie wygranej i remisu.”

oraz

2) „Nieobowiązywalność jest równoważna alternatywie niedopuszczalności i równoprawności, podobnie jak niewygrana jest równoważna alternatywie przegranej i remisu.”

można zapisać jak w tabeli poniżej.

Tabela 2

◫A ⊟B	⊟A ◫B	(◫A<=>◫B) <=> ○(A<=>B)	(◫Av○(A<=>B))<=>◊A	(⊟Av○(A<=>B))<=>⟠A
0	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1

Podobnie, takie stwierdzenia, jak:

1) „Równoprawność dopuszczalności jest równoważna koniunkcji dopuszczalności A i dopuszczalności B, podobnie jak remis jest równoważny koniunkcji nieprzegranej A i nieprzegranej B.”

oraz

2) „Koniunkcja nakazów jest współobowiązywalnością, podobnie jak równa ilość bramek zdobytych przez obie drużyny jest remisem bramkowym, a koniunkcja zakazów jest

wspólniedopuszczalnością, podobnie jak stan, w którym żadna z drużyn nie zdobywa bramki jest remisem bezbramkowym.”

można zapisać jak w tabeli poniżej.

Tabela 3

◊A <=> ⟠B	⟠A <=> ◊B	(◊A∧◊B) <=> ○(A<=>B)	□A	□B	(□A∧□B) <=> ⦶(A∧B)	⧄A	⧄B	(⧄A∧⧄B) <=> ◎(~A∧~B)
1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1	1

Przekształcenia formuł w obu powyższych tabelach zostały dokonane w oparciu kilka zasad, które wypada tu wymienić.

Zasada pierwsza: wartości logiczne zmiennych są tożsame z wartościami logicznymi funktorów nakazu i zakazu, związanych z tymi zmiennymi, co można zapisać jako pierwszy aksjomat Klasycznego Rachunku Modalności w postaci: |□X|<=>|X| i |⧄X|<=>|~X|, gdzie „X” oznacza zmienną zdaniową. Ten aksjomat stanowi podstawę jedności KRZ i KRM.

Zasada druga: funktory operacji logicznych, zwane dalej funktorami operacyjnymi, są równoważne wynikom tych operacji na funktorach zmiennych, co można zapisać jako drugi aksjomat w postaci F(A–B)<=>(FA–FB), gdzie “F” oznacza stosowny funktor, a symbol “–” oznacza operację logiczną. Na przykład, (□A∧□B)<=>⦶(A∧B).

Zasada trzecia: jeżeli wartość logiczna funktora operacyjnego jest różna od wartości logicznej operacji na zmiennych, należy dostosować funktor operacji na zmiennych do funktora operacyjnego. Na przykład: (◊A∧◊B)<=>○(A<=>B). Jeżeli z jakichś względów należy zaznaczyć, że funktor równoprawności bierze się, na przykład, z koniunkcji dopuszczalności, a nie z równoprawności nakazów, to należy przed funktorem operacyjnym postawić funktor posiłkowy, jak w formule ◊○(A<=>B). Funktor posiłkowy będzie pełnił oczywiście tylko funkcję informacyjną, nie wpływając na wartość logiczną funktora operacyjnego.

Zasada czwarta: w związku ze współwartościowością logiczną funktorów obowiązywalności i niedopuszczalności (|◫A|<=>|⊟B|, |◫B|<=>|⊟A|) oraz dopuszczalności i nieobowiązywalności (|◊A|<=>|⟠B|, |◊B|<=>|⟠A|), wybór funktora operacyjnego podlega następującym regułom:

1) W formułach obejmujących jedną operację, rolę funktora operacyjnego może odgrywać jeden lub drugi ze współwartościowych funktorów. Na przykład, formuła ◫A(A≠>B), którą można

odczytać jako „Trzeba A.” jest równoważna formule ⊟B(A≠>B), którą można odczytać jako „Nie wolno B.” Jeżeli funktorowi operacyjnemu współwartościowemu nie towarzyszy zmienna, należy przyjmować, że jego wartość logiczna odpowiada funktorowi ze zmienną A.

2) W formułach obejmujących więcej operacji, funktor operacji podrzędnej ma być dostosowany do funktora operacji nadrzędnej. Na przykład, odnośnie do formuły F=>F(A∨B), jeżeli poprzednik kompetycji odnosi się do zmiennej A, funktor operacyjny alternatywy, stanowiącej następnik[1], również ma odnosić się do zmiennej A, co można zapisać jako FA=>FA(A∨B). Natomiast jeżeli poprzednik odnosi się do zmiennej B, to funktor operacji alternatywy również ma się odnosić do zmiennej B, co można zapisać jako FB=>FB(A∨B).

Zasada piąta: ponieważ funktory równoprawności, współobowiązywalności i współniedopuszczalności oraz ich negacje odnoszą się do obu zmiennych, mogą być zapisywane bez dodawania zmiennych.

Zasada szósta: każda formuła logiczna, występująca w KRZ, może stanowić podstawę wielu formuł deontycznych. W szybkim wyszukiwaniu wyników operacji logicznych na funktorach mogą służyć pomocą zbiorcze tablice operacji. Na przykład, jeden wiersz takiej tablicy, zawierający alternatywy nakazu A i kompletu funktorów B wygląda jak niżej:

Tabela 4

Lp	1	2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13		14	
1	□A	∨□B		∨⧄A		∨⧄B		∨◫B		∨⊟B		∨◊B		∨⟠B		∨○		∨⊖		∨⦶		⊕		∨◎		∨⊜	
	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1
			⊜		⊤		◊A ⟠B		⊜		□A		⊤		◊A ⟠B		◊A ⟠B		⊜		□A		⊤		◊A ⟠B		⊤

Na jego podstawie można stwierdzić, że formuła z funktorem operacyjnym nakazu jest ważna w co najmniej dwóch przypadkach: (□A∨⊟B)<=>□(A∨(A≠>B)) i (□A∨⦶)<=>□(A∨(A∧B)).

5. Funkcjonalność inkluzywna i ekskluzywna

[1] Ponieważ prawdziwą naturą implikacji okazała się przeciwstawność, nazwę „następnik” należy na przyszłość zastąpić nazwą „przeciwstawnik”. Przypis JP.

Operacje logiczne dokonywane w opisany sposób na funktorach ujawniają, że w przypadku, gdy zmienne A i B oznaczają zdania opisujące wykluczając się stany rzeczy – na przykład wysłanie i spalenie listu – nie jest możliwa łączność inkluzywna tych stanów. Oznacza to, że z czterech kombinacji wartości logicznych zdań – 11, 10, 01 i 00 – mogą zaistnieć trzy – 10, 01 i 00. Wskutek tego logika klasyczna staje się logiką zredukowaną i tablica funkcji logicznych przybiera postać jak niżej. Nazwy przekreślone oznaczają te zmienne i funkcje, których zbiory argumentów zostają zredukowane.

Tabela 5

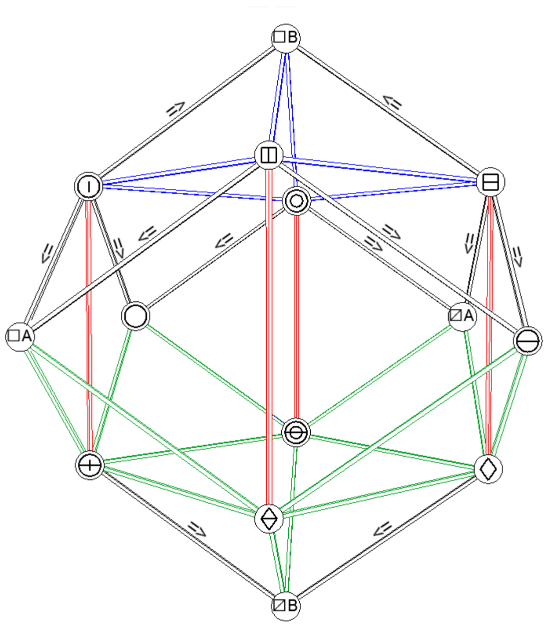
Lp	1	2	3	4
1	pq	10	01	00
2	antylogia ~~współobowiązywalność (A∧B)~~	0	0	0
3	obowiązywalność A, niedopuszczalność B (A≠>B) ~~nakaz A~~	1	0	0
4	niedopuszczalność A, obowiązywalność B (A<≠B) ~~nakaz B~~	0	1	0
5	nierównoprawność (A<≠>B) ~~niewspółniedopuszczalność (A∨B)~~	1	1	0
6	współniedopuszczalność (A↓B) ~~równoprawność (A<=>B)~~	0	0	1
7	zakaz B ~~dopuszczalność A, nieobowiązywalność B (A<=B)~~	1	0	1
8	zakaz A ~~nieobowiązywalność A, dopuszczalność (A=>B)~~	0	1	1
9	niewspółobowiązywalność (A↑B) ~~tautologia~~	1	1	1

Jest możliwy również drugi stopień redukcji, gdy wykluczona zostaje kombinacja wartości logicznych 00. Ten stopień odnosi się do zdań opisujących stany rzeczy, które wykluczają nie tylko łączność inkluzywną, ale również ekskluzywną – na przykład, takie, jak rozstrzygnięcie meczu piłkarskiego rzutami karnymi.

W konsekwencji należy stwierdzić, że występują dwie odmiany funkcjonalności modalnej – inkluzywna, obejmująca zdania wzajemnie niewykluczające się i dwustopniowa ekskluzywna, obejmująca zdania wzajemnie wykluczające się. Aby umożliwić ich rozróżnianie w zapisie, należy wprowadzić oznaczenie umożliwiające identyfikację odmiany ekskluzywnej – na przykład, w postaci pojedynczego podkreślnika zmiennej $\underline{B}$ dla pierwszego stopnia i podwójnego podkreślnika $\underline{\underline{B}}$ dla drugiego stopnia.

Geometria przeciwstawności przybiera dla każdej z odmian funkcjonalności inny kształt. W przypadku funkcjonalności inkluzywnej zawartość każdej z kolumn Tabeli 1 tworzy strukturę, którą można ująć w formie dwunastościanu rombowego, podobnego do tetraikosahedronu Pellisiera. Na rysunku poniżej wierzchołki dwunastościanu reprezentują operatory deontyczne. Kolory oznaczeń przeciwstawności zostały przyjęte zgodnie ze standardem zaproponowanym przez Morettiego: przeciwieństwo (*contrarietas*, dysjunkcja) – niebieski, sprzeczność (*contradictio*, kontrawalencja) – czerwony, podprzeciwieństwo (*subcontrarietas*, alternatywa) – zielony, podporządkowanie (*subalternatio*, konkurencja) – czarny (Moretti 2009, 80).

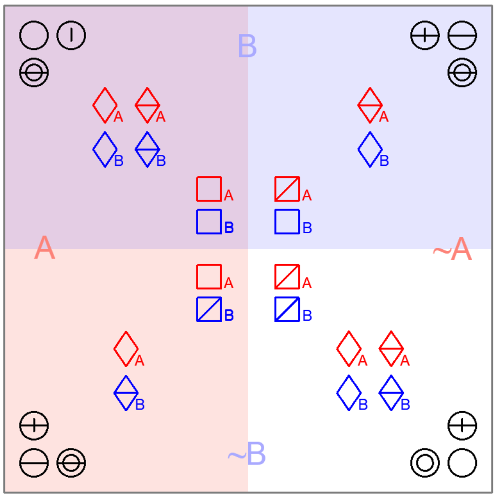
Ilustracja 4

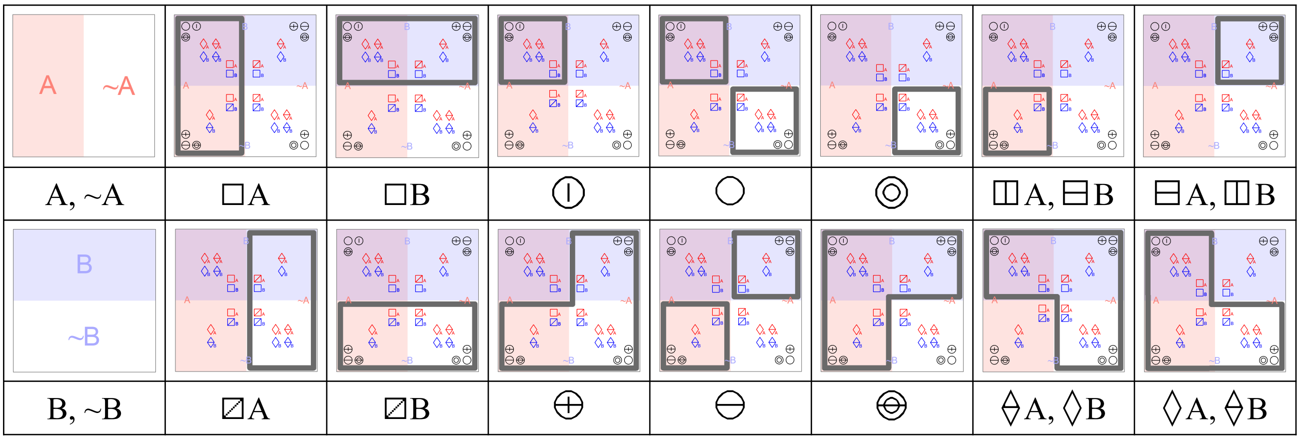


Metoda zero-jedynkowa pozwala wykazać, że 36 przeciwstawności ukazanych na rysunku jest tautologiami. Wszystkich przeciwstawności między funktorami w dodekahedronie jest dziewięćdziesiąt jeden, jednak dwanaście z nich, które występują między funktorami w wierzchołkach piramidowych (nakaz A, zakaz A, nakaz B, zakaz B, równoprawność A i B, nierównoprawność A i B) jako dłuższe przekątne rombów, jest relacjami nieokreślonymi, to znaczy: nie istnieją funkcje logiczne, przy pomocy których można by określić te relacje. Pozostałe 79 przeciwstawności można nazwać *przeciwstawnościami kanonicznymi*, a całą strukturę bipiramidy – *kanonem przeciwstawności*.

Przeciwstawności między funktorami deontycznymi w badanym przypadku można ilustrować przy pomocy diagramu Venna, identycznego z diagramem dla KRZ, lub diagramem kwadratowym, który dzięki regularności podziałów ułatwia zapamiętywanie operacji. Diagram kwadratowy dla funkcjonalności inkluzywnej i tabela z zaznaczeniem zbiorów argumentów zdaniowych, odpowiadających poszczególnym funktorom, wyglądają jak niżej.

Ilustracja 5





Geometria przeciwstawności funkcjonalności ekskluzywnej nie wymaga opisywania w tym artykule. Diagram prostokątny dla funkcjonalności ekskluzywnej pierwszego stopnia wygląda jak niżej.

Ilustracja 6

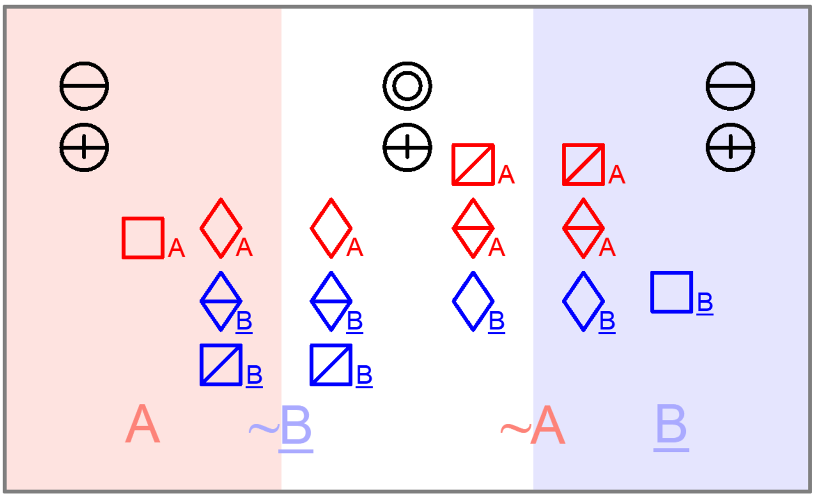
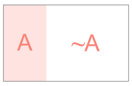
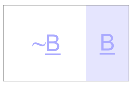
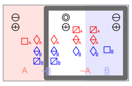
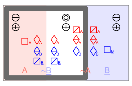
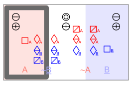
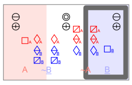
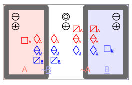
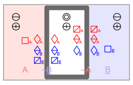
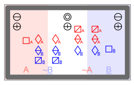


Tabela z zaznaczeniem zbiorów zdań modalnych odpowiadających poszczególnym operatorom funkcjonalności ekskluzywnej pierwszego stopnia wygląda jak niżej.

Ilustracja 7

								
A, ~A	$\underline{B}$, ~$\underline{B}$	⧄A	⧄B	◫A, ⊟$\underline{B}$	⊟A, ◫$\underline{B}$	⊖	◎	⊕

Funkcjonalność ekskluzywna drugiego stopnia zostaje zredukowana do czterech kombinacji, jak w tabeli poniżej.

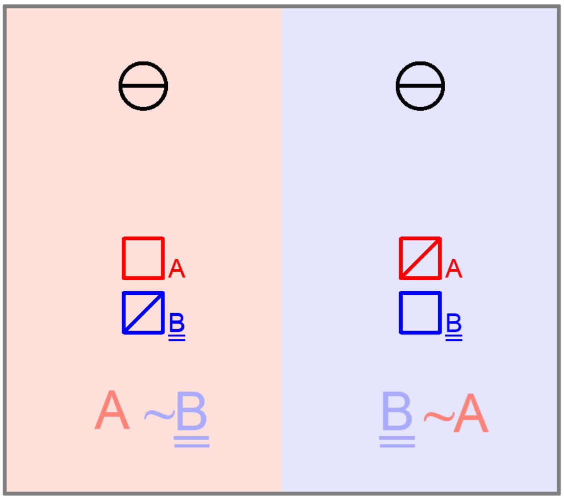
Tabela 6

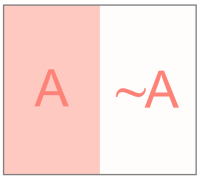
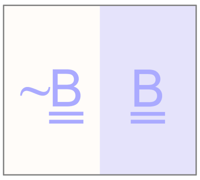
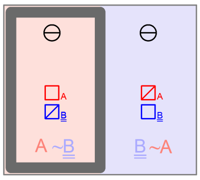
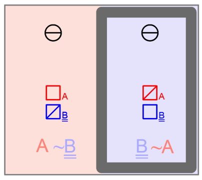
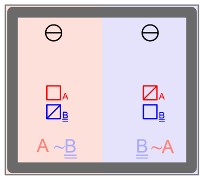
Lp	1	2	3
1	pq	10	01
2	antylogia ~~współobowiązywalność (A^B)~~ ~~wspólniedopuszczalność (A↓B)~~ ~~równoprawność (A<=>B)~~	0	0
3	obowiązywalność A, niedopuszczalność B (A≠>B) ~~nakaz A~~ ~~zakaz B~~ ~~dopuszczalność A, nieobowiązywalność B (A<=B)~~	1	0
4	niedopuszczalność A, obowiązywalność B (A<≠B) ~~nakaz B~~ ~~zakaz A~~ ~~nieobowiązywalność A, dopuszczalność B (A=>B)~~	0	1
5	nierównoprawność (A<≠>B) ~~niewspólniedopuszczalność (A∨B)~~ ~~niewspółobowiązywalność (A↑B)~~ ~~tautologia~~	1	1

Podobnie jak w tabeli funkcjonalności ekskluzywnej pierwszego stopnia, nazwy przekreślone oznaczają te zmienne i funkcje, których zbiory argumentów zostają zredukowane.

Diagram ilustrujący funkcjonalność ekskluzywną drugiego stopnia i tabela ilustrująca możliwe zbiory zdań modalnych wyglądają jak niżej.

Ilustracja 8



				
A, ~A	B, ~B	◫A, ⊟B	⊟A, ◫B	⊖

Ta rudymentarna funkcjonalność odnosi się do takich nakazów, jak „Ocal życie!” i „Zniszcz życie!”, „Czyń dobro!” i „Czyń zło!”, „Zapal światło!” i „Zgaś światło!”. Istnienie jednego stanu rzeczy oznacza nieistnienie drugiego. Jak widać, nie istnieje żadna równowaga w wymienionych parach stanów rzeczy. Jedynym przypadkiem obejmowania obu zmiennych przez jedną funkcję logiczną jest nierównoprawność.

6. Ostateczna procedura rozwiązania paradoksu Rossa

Dokonawszy wymienionych ustaleń, można przejść do finalnej procedury rozwiązania paradoksu Rossa. Zdania występujące w tym paradoksie są zdaniami wykluczającymi się, ale jest możliwa współniedopuszczalność opisywanych przez nie stanów rzeczy. W związku z tym rozwiązanie należy przeprowadzić przy pomocy funkcjonalności ekskluzywnej pierwszego stopnia, mimo że alternatywa występująca w jego formule wyklucza istność współniedopuszczalności.

Na podstawie formuły p=>(p∨q) da się utworzyć kilkadziesiąt tautologicznych formuł deontycznych z funktorem nakazu A w poprzedniku, wśród których powinna by się pojawić wspomniana na wstępie formuła □A=>□(A∨B), jednak teraz od razu widać, że występuje w niej błąd – wartość logiczna funktora operacyjnego w następniku kompetycji jest różna od wartości logicznej operacji na zmiennych. Aby osiągnąć zgodność formuły z aksjomatem równowartości należy zastąpić funktor nakazu w następniku funktorem nierównoprawności. Następnik przybiera postać $\ominus(A \vee B)$. Teraz należy jeszcze dostosować funktor w poprzedniku i operację w następniku do wymogów funkcjonalności ekskluzywnej pierwszego stopnia. Ponieważ w tej funkcjonalności nakaz zostaje zredukowany do obowiązywalności, a niewspółniedopuszczalność do nierównoprawności, cała formuła przybiera postać $\square A => \ominus(A <\neq> \underline{B})$, którą należy odczytać w języku logiki jako:

PRD/1: "List trzeba wysłać; ewentualnie, należy nierównoprawnie list wysłać, jeśli nie spalić."

Przedstawiona interpretacja jest ścisła, ale odległa od mowy potocznej. Chcąc osiągnąć brzmienie bardziej zbliżone do języka potocznego, można rozpisać funktor operacyjny nierównoprawności na funktory obowiązywalności zmiennych. Pojawia się formuła $\square A => (\square A <\neq> \square \underline{B})$, którą można odczytać jako:

PRD/2: „List trzeba wysłać; ewentualnie, list trzeba wysłać, chyba że trzeba spalić".

Sprawdzenie zredukowanej tautologiczności formuł przy pomocy tablic istności zawiera poniższa tabela:

Tabela 7

$\square A$	$\square \underline{B}$	$(\square A <\neq> \square \underline{B})$ <=> $\ominus(A <\neq> \underline{B})$	$\square A => (\square A <\neq> \square \underline{B})$ <=> $\square A => \ominus(A <\neq> \underline{B}$
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Tak wygląda rozwiązanie paradoksu Rossa.

7. Rozwiązanie paradoksu Priora

Punktem wyjścia w rozwiązaniu paradoksu Priora jest tautologia, na której Von Wright oparł swoją formułę deontyczną. Ma ona postać $\sim p => (p => q)$. Brytyjscy logicy Bertrand Russell (1872-1970) i Alfred North Whiteahead (1861-1947) odczytywali ją jako implikację, zgodnie z którą „ze zdania fałszywego wynika dowolne zdanie” (Curley 1975). Takie odczytanie miało zapewne stanowić nowoczesną wersję regułki *ex falso quodlibet*. Von Wright przetransponował ją do postaci deontycznej O~A=>(OA=>OB), za którą krył się paradoksalny wniosek Priora.

Po rozwiązaniu paradoksu Rossa, wyjaśnienie paradoksu Priora nie sprawia większych trudności i sprowadza się do odczytania zarówno formuły propozycjonalnej ~p=>(p=>q) jak i deontycznej O~A=>O(A=>B) jako kompetycji.

Formułę propozycjonalną w wersji kompetycyjnej można odczytać jako:

PPP: „Nie pij kawy; **ewentualnie** pij kawę, **ale** pij mleko.”

Odczytanie formuły deontycznej w postaci □~A=>□(A=>B) mogłoby się wydawać równie jasne i proste, jednak w świetle KRM okazuje się ona błędna z dwóch powodów:

1) konkurencja nadrzędna nie jest tautologią,

2) wartość logiczna konkurencji podrzędnej nie jest tożsama z wartością logiczną funktora operacji.

Jeżeli w formule ma zostać zachowany poprzednik konkurencji nadrzędnej, to funktor operacji w następniku powinien przybrać wartość logiczną 0011, 1011, 0111 (tautologia 1111 nie jest zdaniem spełniającym sens formuły). Wymienione trzy wartości logiczne odpowiadają kolejno (1) zakazowi A, (2) nieobowiązywalności A i (3) niewspółobowiązywalności A i B. Najbliższa formule propozycjonalnej jest kombinacja 1011, ponieważ wartość logiczna nieobowiązywalności A jest tożsama z wartością logiczną kompetycji nakazów A i B. Po wstawieniu do formuły nieobowiązywalności A pojawia się równoważność: (⧄A=>(□A=>□B))<=>(⧄A=>⟠(A=>B))

W konsekwencji formuła deontyczna może być odczytana jako:

PPD/1: „Masz nie pić kawy; ewentualnie, masz pić kawę, ale masz pić mleko.”

lub jako:

PPD/2: „Masz nie pić kawy, ale nie musisz raczej pić mleko, niż kawę.”

Podobnie jak w przypadku rozwiązania paradoksu Rossa, formuła z funktorami stojącymi przy zmiennych jest bliższa mowie potocznej od formuły z funktorem operacyjnym, ale w przypływie dobrego humoru można ją uznać za bardziej wyrafinowaną.

Sprawdzenie tautologiczności formuł przy pomocy tablic istności zawiera poniższa tabela:

□~A <=> ⧄A	□A	□B	⟠ <=> (□A=>□B)	⧄A=>(□A=>□B)	⧄A=>⟠(A=>B)
0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1

Tak wygląda rozwiązanie paradoksu Priora.

8. Podsumowanie

Rozwiązanie tytułowych paradoksów okazało się możliwe dzięki odczytaniu formuł zdaniowych i deontycznych w oparciu o wcześniejsze rozstrzygnięcia, obejmujące (1) rzeczywistą naturę implikacji, (2) rzeczywistą naturę wartości logicznych i (3) geometrię przeciwstawności.

W oparciu o geometrię przeciwstawności zostało zidentyfikowane sześć dotychczas nie wymienianych w literaturze funktorów deontycznych.

Ponadto, w trakcie przeprowadzonych dociekań został odkryty i zastosowany Klasyczny Rachunek Modalności (KRM), stanowiący modalną wersję Klasycznego Rachunku Zdań, występujący w trzech odmianach – inkluzywnej, ekskluzywnej pierwszego stopnia i ekskluzywnej drugiego stopnia. W celu ilustracji graficznej rachunku zostały opracowane diagramy modalne.

BIBLIOGRAFIA

1. Ajdukiewicz K., *Logika pragmatyczna*, Warszawa 1975, s. 28.
2. Hansen J., 2006, *The Paradoxes of Deontic Logic: Alive and Kicking*, w: „Theoria” 72/3, Lund[Oxford] 2006, (s. 221-232).
3. Hansen J, 2008, *Imperatives and Deontic Logic: On the Semantic Foundations of Deontic Logic*, PhD Dissertation, University of Leipzig.
4. Hansen J., *Imperatives Logic and Its Problems*, w: Gabbay et al. 2013, s. 137–191.
5. Hedenius I., *Om Ratt och Moral* (*On Law and Morals*), Stockholm 1941.
6. Moretti, A. (2009), *The Geometry of Logical Opposition,* PhD Thesis in Logic, University of Neuchâtel, Switzerland.

7. Pociej J./1, *Rozwiązanie paradoksu implikacji materialnej - 2024*, https://doi.org/10.6084/m9.figshare.22323703.v3
8. Pociej J./2, *Rozwiązanie dylematu Jörgensena – 2024*, https://doi.org/10.6084/m9.figshare.22329160.v2
9. Ross A., *Imperatives and Logic*, „Theoria" 7/1941, s. 53–71. doi:10.1111/j.1755-2567.1941.tb00034.x
10. Van Fraassen, *Values and the Heart's Command*, "The Journal of Philosophy", 70(1)/ 1973, s. 5–19. doi:10.2307/2024762
11. Von Wright, G. H., *A Note on Deontic Logic and Derived Obligation*, „Mind", 65/1956, s. 507–509.
12. Von Wright, G.H., "Deontic Logic", *Mind*, 60(237)/1951, s. 1–15. doi:10.1093/mind/LX.237.1
13. Von Wright, G.H., *Norm and Action: A Logical Enquiry*, New York 1963.