Klassinen matematiikka ja logiikka

Panu Raatikainen

panu.raatikainen@helsinki.fi

Äärettömän joukko-opin synty

Toisaalta ennennäkemätön äärettömien joukko-opillisten menetelmien hyödyntäminen sekä toisaalta epäilyt niiden hyväksyttävyydestä ja halu oikeuttaa niiden käyttö ovat ratkaisevasti muovanneet vuosisatamme matematiikkaa ja logiikkaa. Tämän kehityksen vaikutus nykyajan filosofiaan on myös ollut valtaisa; merkittävää osaa siitä ei voi edes ymmärtää tuntematta sen yhteyttä tähän matematiikan ja logiikan vallankumoukseen. Lähestymistapoja, jotka tavalla tai toisella hyväksyvät äärettömän matematiikan ja perinteisten logiikan sääntöjen (erityisesti kolmannen poissuljetun lain) soveltamisen myös sen piirissä, on tullut tavaksi kutsua klassiseksi matematiikaksi ja logiikaksi erotuksena nämä hylkäävistä radikaaleista intuitionistisista ja konstruktivistisista opeista.

Vuosisadan vaihteessa virinneen vilkkaan logiikan ja matematiikan perusteita koskevan keskustelun taustalla on kaksi viime vuosisadan lopun tärkeää kehityslinjaa, jotka liittyvät toisaalta reaalilukujen teorian ja toisaalta luonnollisten lukujen teorian perusteiden tutkimukseen.

1800-luvun matematiikalle oli leimallista pyrkimys entistä täsmällisempään käsitteenmäärittelyyn – pyrkimys päästä eroon ongelmallisesta infinitesimaalin käsitteestä, johon Leibniz ja Newton olivat perustaneet uuden differentiaali- ja integraalilaskennan, sekä epämääräiseen geometriseen intuitioon vetoamisesta. Nämä haluttiin korvata raja-arvon ja luvun käsitteisiin perustuvilla täsmällisillä, puhtaasti aritmeettis-loogisilla määritelmillä. Tässä yhteydessä on erikseen mainittava Weierstrass, jonka nimeen analyysin aritmetisoinnin ohjelma usein liitetään. (Boyer 1959, 1994, Grattan-Guiness 1970)

Kävi kuitenkin ilmi, että analyysin aritmetisoinnissa tarvittiin aiempaa yleisempää luvun käsitettä. Tässä tilanteessa Richard Dedekind ja Georg Cantor esittivät teoriansa reaaliluvuista (Dedekind 1872, Cantor 1872). Molemmat käyttivät määritelmissään eri tavoin äärettömiä rationaalilukujen joukkoja. Tämä poikkesi radikaalisti kaikesta aiemmasta matematiikasta, jossa aktuaalista ääretöntä oli kaikin keinoin vältetty. Ymmärrettävästi Dedekind ja varsinkin Cantor katsoivat tarpeelliseksi luoda yleisen teorian näistä uusista, kiistanalaisesta äärettömistä olioista. Näin syntyi joukko-oppi. (Cantor 1885-7, ks. Dauben 1979)

Kriitikot, kuten Brouwer (1912), ovat syyttäneet ääretöntä joukko-oppia äärelliselle pätevien periaatteiden luvattomasta yleistämisestä äärettömään. Kuitenkin uusi joukko-oppi perustui tärkeällä tavalla juuri eräiden äärellisestä pätevien periaatteiden hylkäämiseen. “Äärettömän paradoksit” ratkaistiin luopumalla siitä perinteisestä äärellisistä joukoista johdetusta “itsestäänselvyydestä”, että kokonaisuus on aitoa osaansa suurempi: ääretön joukko voikin olla yhtä mahtava aidon osajoukkonsa kanssa. Myöskään monet äärellisten lukujen yhteen- ja kertolaskusäännöt eivät päde äärettömille ordinaali- ja kardinaaliluvuille. (Dedekind 1972, Cantor 1885-7)

Cantorin joukko-opista mainittakoon tässä vain kaksi keskeistä tulosta. Ensiksikin Cantor esitti, kuinka toisaalta luonnollisten lukujen ja rationaalilukujen joukot ja toisaalta suoran ja tason pisteet voidaan yllättäen asettaa keskenään vastaavuussuhteeseen ja ovat siis yhtämahtavia: $|N| = |Q|$ ja $|R| = |R^2|$.

Toiseksi hän osoitti, että reaalilukujen joukko on mahtavampi kuin luonnollisten lukujen joukko: $|N| < |R|$. On siis olemassa erisuuruisia äärettömyyksiä! (Cantor 1885-7)

Toinen aiheemme kannalta tärkeä kehityskulku oli siis luonnollisen luvun käsitteen analyysi. Dedekind oli tässäkin keskeisessä asemassa. Hän aksiomatisoi luonnollisten lukujen teorian – hänen aksioomansa tunnetaan yleisesti Peanon aksioomien nimellä. (Dedekind 1888, Peano 1889, Wang 1957) Dedekind oli – uraa uurtavasta työstään äärettömässä joukko-opissa huolimatta – matematiikan ontologialtaan konstruktivisti. Hän ei kuitenkaan hyväksynyt konstruktivismille tyypillistä rajoittavaa epistemologiaa. Erityisesti Dedekind halusi vastata uuden joukko-opin arvovaltaisen ja kiivaan vastustajan Leopold Kroeneckerin kritiikkiin. Tämä hyväksyi ainoastaan luonnollisten lukujen olemassaolon (ks. Edwards 1988). Dedekind pyrki puolestaan osoittamaan, että jo luonnollisten lukujen teorian täsmällinen kehittäminen edellyttää äärettömiä joukkoja.[1] Tällöin ei ole mitään perustetta kieltää äärettömien joukkojen käyttöä reaalilukujen teoriassa, jos hyväksyy luonnollisten lukujen teorian. (Dedekind 1888, Kitcher 1986)

Fregen ja Russellin logisismi

Toinen tärkeä hahmo edellä mainitussa luonnollisen luvun teorian kehityksessä oli Gottlob Frege. Hänen tavoitteensa olivat filosofisemmat kuin Cantorin ja Dedekindin. Hän halusi osoittaa, että lukuteorian totuudet ovat, vastoin hänen muuten suuresti arvostamansa Kantin käsitystä, "analyyttisiä", eivät synteettistä. Hän pyrki osoittamaan oikeaksi Leibniziltä periytyvän "logisismin", joka mukaan lukuteoria on osa logiikkaa. (Frege 1879, 1884; kts. myös Kitcher 1979, Resnik 1980, Sluga 1980.)

Sekä perinteisen aristoteelisen että uudemman boolelaisen logiikan välineet osoittautuvat riittämättömiksi Fregen tarpeisiin. Ohjelmansa läpiviemiseksi hän joutui kehittämään uuden yleisemmän logiikan, joka piti sisällään koko modernin ensimmäisen ja toisen kertaluvun predikaattilogiikan. Näin Frege tuli matematiikanfilosofisen ohjelmansa sivutuotteena luoneeksi nykyaikaisen logiikan (Frege 1879).

Kirjeessään Fregelle vuonna 1902 Russell kuitenkin esitti, kuinka Fregen aksioomista voitiin johtaa ristiriita (Russell 1902). Ongelmien lähteenä oli Fregen rajoittamaton komprehensioaksiooma, jonka mukaan jokaista käsitettä vastaa luokka. On hyvä huomata heti, että varsinaisesti paradoksi ei liity mitenkään erityisesti joukko-oppiin tai äärettömiin joukkoihin, vaan Russellin paradoksi $\neg \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \neg x \in x)$ on looginen totuus mistä hyvänsä relaatiosta.

Löytämästään paradoksista huolimatta Russell uskoi Fregen logisismin perusteesiin ja jopa yleisti sen lukuteoriasta koko matematiikkaan. Hän pyrki kehittämään paradokseista vapaan yleisen logiikan, johon koko matematiikka voitaisiin palauttaa. Hän kutsui logiikkaansa tyyppiteoriaksi (Russell 1903, 1908). Sen monumentaalinen kokonaisesitys on hänen yhdessä Whiteheadin kanssa julkaisemansa *Principia Mathematica* (Russell & Whitehead 1910-13). Tässä teoriassa oliot jakautuvat eri tyyppeihin, ja tiettyjen olioiden (tai joukkojen) joukko on aina ylemmällä tasolla kuin nuo objektit (joukot). Tässä teoriassa ei voida muodostaa tunnettuja loogisia tai joukko-opillisia paradokseja.

Pian kävi kuitenkin ilmi, että matematiikan johtamiseksi tyyppiteoriaan oli välttämätöntä lisätä valinta-aksiooma sekä äärettömyysaksiooma, jonka mukaan on olemassa ääretön määrä yksilöitä. Kuten Russell itsekin myönsi, näitä voidaan tuskin pitää logiikan totuuksina (Russell 1919). Yleisesti pääteltiin, ettei logisismin ohjelmaa ollut mahdollista viedä läpi. Vaikka loogikot ovat jossain määrin jatkaneet erilaisten lisä-aksioomilla täydennettyjen tyyppiteorioiden tutkimista, kiinnostus tyyppiteoriaa kohtaan on kiistatta hiipunut, ja aksiomaattisesta joukko-opista on tullut niin matemaatikkojen kuin loogikoidenkin suuren enemmistön perusteoria.

Formalismi, jos-niin-ismi ja konventionalismi

Ennen kuin kokonaan jätämme logisismin, on syytä tarkastella vielä eräitä logisismin myöhempiä perillisiä ja sukulaisia. Nämä, pikemmin kuin Hilbertin sofistikoitu ohjelma, ansaitsevat tulla kutsutuksi formalismiksi.

Formalismi on kanta, jonka mukaan matematiikka on pelkkää merkkipeliä merkityksettömillä symboleilla, eikä matematiikan lauseilla näin ole merkitystä tai totuusarvoa. Sille on läheistä sukua kanta, jota on Putnamia seuraten kutsuttu jos-niin-ismiksi (Putnam 1967) tai joskus myös deduktivismiksi (Resnik 1980). Sen mukaan matemaattiset lauseet (T) ovatkin todellisuudessa ehdollisia lauseita ($A \rightarrow T$), jotka toteavat tiettyjen teoreemojen seuraavan tietyistä aksioomista. Russell ja myöhemmin loogiset empiristit pyrkivät pelastamaan logisismin siirtymällä jos-niin-ismiin (Musgrave 1977). Tällaista strategiaa ovat jossain ajattelunsa vaiheessa kannattaneet myös Hilbert ja Putnam. (Resnik 1980)

Tämä suosittu käsitys matematiikasta johtaa kuitenkin moniin ylitsepääsemättömiin ongelmiin. Voidaan esimerkiksi kysyä, miksi olemme kuitenkin kiinnostuneita vain tietyistä aksioomista, erityisesti aritmetiikan ja analyysin aksioomista? Miksi emme muodosta kaikkia mahdollisia aksioomayhdistelmiä (esim. aritmetiikan aksioomien ja niiden negaatioiden kaikki mahdolliset kombinaatiot) ja johda yhtä lailla kaikista niistä seurauksia? Samoin voidaan kysyä, mitä matemaatikot oikein tutkivat ennen kuin heidän tutkimusalansa aksiomatisoitiin. Uusien aksioomien valinta teorioita täydennettäessä jää niin ikään käsittämättömäksi. Kautta historian matemaatikot ovat myös vakuuttuneet erinäisistä tuloksista argumenteilla, mm. analogiapäättelyillä, jotka eivät ole tiukasti deduktiivisia todistuksia. (Putnam 1975) Entä mistä ehtolauseiden osina olevat aksioomat itsessään oikein puhuvat? Jos-niin-ismista seuraa, että suuri osa perinteisestä matematiikasta ei ole lainkaan matematiikkaa! (kts. Quine 1936, Resnik 1980)

Kaikkien formalististen kantojen yleinen heikkous on niiden kyvyttömyys selittää matematiikan sovellettavuutta. Jo Frege ihmetteli oman aikansa formalisteja arvostellessaan, kuinka merkityksettömät symbolijonot ja peli niillä voisivat olla hyödyllisiä todellisuuden tieteellisessä tutkimisessa. Ja kukaan tuskin voi kiistää matematiikan valtavaa hyödyllisyyttä luonnontieteissä. (Frege 1903, kts. myös Resnik 1980) Putnam on korostanut, että jos-niin-ismin mukainen kuva sovelletusta matematiikasta edellyttäisi, että fysiikka pitäisi pystyä esittämään täydellisesti vapaana matematiikasta. Mutta tämä tuskin on mahdollista, sillä nykyaikaisen fysiikan teoriat ovat täysin matematiikan kyllästämiä. (Putnam 1971)

Toinen loogisten empiristien suosima ratkaisu matematiikanfilosofisiin ongelmiin oli väittää, että matematiikka on totta sopimuksenvaraisesti. Tätä kantaa kutsutaan konventionalismiksi. Sekin johtaa vaikeisiin ongelmiin, kuten erityisesti Quine on vakuuttavasti osoittanut. Matematiikkaa ei nimittäin voi sanoa todeksi puhtaasti sopimuksenvaraisesti, elleivät myös kaikki ne loogiset periaatteet, joita käytetään matematiikan johtamisessa, ole myös tosia sopimuksenvaraisesti. Mutta jos halutaan konstruoida myös logiikka totena sopimuksenvaraisesti, kohdataan äärettömän regression ongelma: loogisia totuuksia on ääretön määrä, ja ne täytyy antaa yleisten sopimusten avulla eikä yksittäin; näin logiikkaa jo tarvitaan yksittäistapauksien johtamisessa yleisistä sopimuksista. (Quine 1936, 1954/1963)

Johtopäätöksenä voidaan todeta, että matemaatikkojen puhe matemaattisten olioiden olemassaolosta täytyy ottaa kirjaimellisesti eikä sitä voida selittää pois formalistisesti. Jäljelle jää tietysti kysymys tämän olemassaolon luonteesta sekä kysymys siitä, kuinka vahvoja olemassaolo-oletuksia matematiikka todella edellyttää.

Hilbertin ohjelma ja sen liberalisoituminen

David Hilbert oli kiistatta vuosisadan vaihteen matematiikan hallitseva voimahahmo. Reaktiona Brouwerin ja erityisesti tämän kannattajaksi kääntyneen, aiemmin Hilbertin lähipiiriin kuuluneen lahjakkaan Weylin (sekä jo aiemmin Kroneckerin ja Poincarén) "intuitionistiseen" klassisen matematiikan kritiikkiin Hilbert otti tehtäväkseen oikeuttaa äärettömien joukko-opillisten menetelmien käytön matematiikassa. Hilbert mukaan aktuaalista ääretöntä ei kuitenkaan ole olemassa todellisuudessa. Niinpä hän pyrki oikeuttamaan äärettömiä käsitteitä käyttävän matemaattisen käytännön instrumentalistisesti. Hän halusi todistaa, että niiden käyttö on täysin harmitonta eikä johda mihinkään, mitä ei voitaisi todistamaan tarvittaessa myös ilman äärettömiä menetelmiä (Hilbert 1923, 1926, 1927). Hilbert itse kutsui tutkimusohjelmaansa todistusteoriaksi tai metamatematiikaksi; myöhemmin sitä on alettu kutsua Hilbertin ohjelmaksi. Se parissa työskenteli Hilbertin lisäksi suuri joukko tuon ajan parhaita loogikkoja, kuten Bernays, von Neumann ja Ackermann, sekä hieman itsenäisemmin myös Gödel, Herbrand ja Gentzen.

Hilbertin ohjelma koostuu tavallaan kolmesta askeleesta (vrt. Simpson 1988):

1.) Eristetään täysin epäproblemaattinen, äärellinen tai "finitistinen" osa matematiikasta. Tämä finitistinen matematiikka on välttämätön kaikelle tieteelliselle päättelylle ja siten sivuuttamaton sekä riittävä alkeelliselle lukuteoreettiselle päättelylle ja äärellisten symbolijonojen manipulaatioille. Käytännössä Hilbertin finitistinen matematiikka lankeaa yhteen primitiivirekursiivisen aritmetiikan PRA kanssa (Tait 1981).[1]

2.) Ääretön matematiikka formalisoidaan. Tämän suuren formaalisen järjestelmän kaavat ovat symbolijonoja, joilla ei ole Hilbertin mukaan itsessään mitään merkitystä, mutta niitä voidaan manipuloida äärellisesti. Kävi ilmi, että toisen kertaluvun aritmetiikka $\mathbf{Z_2}$ on riittävä tähän tarkoitukseen.[3]

3.) Suurelle formaaliselle järjestelmälle tulee antaa finitistisesti pätevä ristiriidattomuustodistus. Tästä seuraisi, että mikä tahansa suuressa järjestelmässä todistuva reaalinen lause olisi finitistisesti tosi. Koko suuri järjestelmä olisi näin finitistisesti oikeutettu.

Hilbert erottikin toisistaan reaalilauseet ja ideaalilauseet. Edelliset voidaan samastaa nk. Π_1 -lauseiden kanssa.[4] Peruajatus on siis osoittaa, että vaikka käytettäisiin äärettömiä menetelmiä, todistetut reaalilauseet ovat finitistisesti tosia – vaikka todistuksessa esiintyisikin välivaiheena ideaalilauseita.

Usein Hilbert ymmärretään väärin jyrkäksi formalistiksi, koska hän korosti ristiriidattomuustodistuksen merkitystä. Tällöin Hilbertin sofistikoitu instrumentalistinen ohjelma on kuitenkin ymmärretty väärin. Ristiriidattomuustodistus antaa nimittäin menetelmän äärettömien joukko-opillisten oletusten eliminoimiseksi "reaalilauseiden" todistuksista; ristiriidattomuuden finitistinen todistus antaisi menetelmän löytää reaalilauseen finitistinen todistus, kun sen äärettömiä menetelmiä käyttävä todistus

[1] **PRA** sisältää määrittelyaksioomat kaikille primitiivirekursiivisille funktioille sekä induktioskeeman $\varphi(0)\ \&\ \forall n\, \varphi(n) \to \varphi(n+1)) \to \forall n(\varphi(n))$ rajoitettuna kvanttorittomiin kaavoihin $\varphi(x)$. Todistusteoreettisesti ekvivalentti teoria saadaan, kun tutussa ensimmäisen kertaluvun Peano-aritmetiikassa **PA** induktioskeema rajoitetaan puhtaasti eksistentiaalisiin $\mathbf{\Sigma_1}$-kaavoihin (eli kaavoihin muotoa $\exists x\, A$, missä A on kvanttoriton). Nämä kaavat vastaavat rekursiivisesti numeroituvia joukkoja

on annettu. Näin kaivatun ristiriidattomuustodistuksen merkitys on vain välillinen. Hilbertin mukaan finitistinen matematiikka ja reaalilauseet ovat merkityksellisiä ja omaavat totuusarvon – näin Hilbert on formalisti vain äärettömän matematiikan ja ideaalilauseiden suhteen. (kts. Sieg 1988, Simpson 1988, Kitcher 1976)

Täsmällisesti Hilbertin ohjelma voidaan nyt ilmaista seuraavasti: On todistettava teorian $\mathbf{Z_2}$ ristiriidattomuus teoriassa **PRA**. Jos tämä voitaisiin antaa, seuraisi myös, että jokainen Π_1-lause, joka on todistuva teoriassa $\mathbf{Z_2}$, olisi todistuva jo teoriassa **PRA**. Tällöin sanotaan, että $\mathbf{Z_2}$ on **PRA**:n konservatiivinen laajennus Π_1-lauseiden suhteen.

Gödelin kuuluisa epätäydellisyystulos (Gödel 1931) kuitenkin osoitti, ettei tämä ole mahdollista. On olemassa Π_1-lauseita, jotka ovat todistuvia $\mathbf{Z_2}$:ssa, mutta eivät **PRA**:ssa. Näin Gödelin epätäydellisyyslause osoittaa, että on mahdotonta redusoida kaikkea ääretöntä matematiikkaa äärelliseen matematiikkaan. Mutta vastoin yleistä käsitystä hilbertiläisen todistusteorian tarina ei pääty tähän.

Pian kävi ilmi, että formalisoidun klassisen aritmetiikan ristiriidattomuus on mahdollista todistaa – vaikkakaan ei finitistisesti – kuitenkin intuitionismin sallimilla menetelmillä. Ensiksi Gödel osoitti, että ristiriidan todistus klassisessa aritmetiikassa johtaisi ristiriitaan Heytingin intuitionistisessa aritmetiikassa (Gödel 1933). Tarkemmin, ensimmäisen kertaluvun Peano-aritmetiikka **PA** sisältää perusaksioomat yhteen- ja kertolaskuoperaatioille sekä induktioskeeman (kts. ed. viite 2) kaikille ensimmäisen kertaluvun aritmetiikan kaavoille. Heyting-aritmetiikalla **HA** on samat aksioomat, mutta vain intuitionistinen logiikka sallitaan sen todistuksissa. Paul Bernays, Hilbertin tärkein yhteistyökumppani, kirjoittaa: "Tällä tavoin kävi ilmeiseksi, että intuitionistinen päättely ei ole yhtä kuin finitistinen päättely, vastoin tuonaikaista vallitsevaa näkemystä … Näin kävi myös ilmeiseksi, että 'finite Standpunkt' ei ollut ainoa vaihtoehto klassiselle päättelylle … " (Bernays 1967) Tuloksesta seuraa, että **PA** on **HA**:n konservatiivinen laajennus kaikkien negatiivisten lauseiden (Gödel 1933) ja kaikkien Π_2-lauseiden suhteen (Kreisel 1958; Friedman 1978).[5]

Intuitionismin ja finitismin oli siis uskottu olevan sama asia. Mainittu tulos kuitenkin osoitti, että intuitionismi on finitismiä sallivampi. Tämä havainto johti pian yleisemmin ajatukseen todistusteorian menetelmien laajentamisesta. Vuonna 1936 Gentzen todistikin PA:n ristiriidattomuuden intuitionistisesti hyväksyttävällä menetelmällä: induktiolla ordinaaliin ε_0 asti (Gentzen 1936); Schütte (1951) antoi erityisen luontevan **PA**:n ristiriidattomuustodistuksen hyödyntämällä ääretöntä ω-sääntöä ("jos voidaan todistaa $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, …, voi päätellä $\forall x\ \varphi(x)$") ja äärettömiä (lyhyempiä kuin ε_0) todistuksia; myös sopivalla tavalla rajatut äärettömät todistukset ovat intuitionistisesti hyväksyttävissä (mainittakoon, että Brouwer (1927) kritisoi Hilbertiä rajoittumisesta vain äärellisiin todistuksiin!). Gödel antoi (1958) toisentyyppisen, äärellistä tyyppiä oleviin primitiivirekursiivisiin funktionaaleihin perustuvan ristiriidattomuustodistuksen.

Mielenkiintoisuudestaan huolimatta näiden positiivisten tulosten todellinen merkitys tulee ilmi vasta yhteydessä eräisiin äskettäisiin tuloksiin, joihin tutustumme seuraavaksi.

Friedmanin "käänteinen matematiikka" ja todistusteoria

Vuoden 1974 kansainvälisessä matemaatikkojen kongressissa Harvey Friedman esitti tutkimusohjelman, jonka peruskysymys on: "Mitä joukkojen olemassaoloaksioomia todella tarvitaan tavallisen matematiikan lauseiden todistamiseen?" (Friedman 1975)

Friedman päätti käyttää joukkojen olemassaolo-oletusten mittana toisen kertaluvun aritmetiikan eri vahvuisia osateorioita. Kävi ilmi, että voidaan eristää muutama osateoriaa, jotka ovat erityisen tärkeitä ja luonnollisia. Erityisen tärkeä osateoria saadaan rajoittamalla komprehensioskeema aritmeettisiin kaavoihin (kaavoihin, jotka eivät sisällä joukkokvanttoreita) Tämä osateoria tunnetaan nimellä $\mathbf{ACA_0}$. Toinen varsin mielenkiintoinen, edellistä heikompi teoria on $\mathbf{WKL_0}$. Teoria saa nimensä heikosta Königin lemmasta: "jokaisessa äärettömässä binäärisessä puussa on ääretön polku." (Friedman 1976, Simpson 1985a, 1985b, 1987)

Friedman havaitsi yllättävän usein vallitsevan "empiirisen" ilmiön: "Kun lause todistetaan oikeista aksioomista, nämä aksioomat voidaan myös todistaa kyseisestä lauseesta." Toisin sanoen, tavallisen matematiikan lause on hyvin usein ekvivalentti sen todistamiseksi tarvittavan teorian pääaksiooman kanssa. Tätä teemaa kutsutaan nykyään käänteiseksi matematiikaksi. (kts. Simpson 1985a, 1987) Esimerkiksi, klassinen Bolzano-Weierstrass-lause ja aksiooma $\mathbf{ACA_0}$ ovat ekvivalentteja. Edelleen, $\mathbf{ACA_0}$ on ekvivalentti mm. seuraavien tavallisen matematiikan lauseiden kanssa: 1) Königin lemma, 2) Ascolin lemma, 3) jokaisella rajoitetulla reaalilukujonolla on pienin yläraja. $\mathbf{WKL_0}$ puolestaan on ekvivalentti mm. Heine-Borel-lauseen ja monien jatkuvia funktioita koskevien peruslauseiden kanssa. (Friedman 1976, Simpson 1984, 1985a, 1985b, 1987, Friedman, Simpson & Smith 1983))
Jo $\mathbf{WKL_0}$ on matemaattisesti melkoisen vahva teoria. Siinä voidaan todistaa monia klassisen äärettömän matematiikan tunnetuimpia ei-konstruktiivisia tuloksia. Kuitenkin Friedman osoitti vuonna 1977, että $\mathbf{WKL_0}$ on finitistisen teorian **PRA** konservatiivinen laajennus Π_2-lauselle. Tästä seuraa, että $\mathbf{WKL_0}$ voidaan redusoida finitistisesti juuri Hilbertin tavoittelemassa mielessä: jokainen siinä todistettu reaalilause voidaan todistaa finitistisesti. Kohtalaisen suuri osa klassisesta matematiikasta voidaan siis sittenkin oikeuttaa finitistisesti. (kts. Simpson 1988, Sieg 1985)[6]

Hermann Weyl havaitsi jo vuonna 1918, että suuri osa tavallisesta matematiikasta voidaan kehittää $\mathbf{ACA_0}$:ta muistuttavassa teoriassa, "predikatiivisessa analyysissä" (Weyl 1918). Feferman (1977), Takeuti (1978), Friedman ja Simpson ovat edelleen jatkaneet tätä tutkimuslinjaa. Erityisesti Friedmanin ja Simpsonin töistä seuraa, että kaikki tavallisen analyysin ja algebran ja tavallisen perinteisen matematiikan tulokset voidaan todistaa teoriassa $\mathbf{ACA_0}$. (Friedman 1976, Friedman, Simpson & Smith 1983, Simpson 1984, 1985a, 1984b, 1987)). Teoria $\mathbf{ACA_0}$ ilmaisee näin täsmällisesti tavallisen matematiikan olettaman joukkojen olemassaolon vahvuuden: täytyy olettaa aritmeettisesti määriteltävien joukkojen olemassaolo. Kuinka paljon tämä sitten on?

Itse asiassa $\mathbf{ACA_0}$ on ensimmäisen kertaluvun Peano-aritmetiikan **PA** konservatiivinen laajennus[7]. Niinpä se on todistusteorian näkökulmasta ekvivalentti **PA**:n kanssa. Näin ACA0:n ristiriidattomuus palautuu Gödelin vanhan (1933) tuloksen kautta intuitionistisen aritmetiikan **HA** ristiriidattomuuteen, ja $\mathbf{ACA_0}$ on **HA**:n konservatiivinen laajennus Π_2-lauseiden suhteen.

1970-luvulla näki päivänvalon kaksi uutta kiinnostavaa intuitionistista teoriaa, Fefermanin konstruktiivinen luokkien ja operaatioiden teoria $\mathbf{T_0}$ (Feferman 1979) ja Martin-Löfin intuitionistinen tyyppiteoria (Martin-Löf 1975, 1982, 1984), jonka versioita ilman universumia ja yhdellä universumilla merkitään $\mathbf{ML_0}$ ja $\mathbf{ML_1}$ (Beeson 1985). $\mathbf{ML_0}$ on todistusteoreettisesti ekvivalentti **PA**:n kanssa, ja $\mathbf{ML_1}$, kuten myös Fefermanin $\mathbf{T_0}$, jopa todistaa **PA**:n ja $\mathbf{ACA_0}$:n ristiriidattomuuden. (kts. Beeson 1985)

Vaikka Hilbert ei onnistunut oikeuttamaan klassista matematiikkaa finitistisesti, tämä on silti mahdollista tehdä intuitionistisesti. Ja tähänhän Hilbert itse asiassa pyrki – hän vain erehtyi tulkitsemaan intuitionismin yhtäpitäväksi paljon rajoittavamman finitismin kanssa. Voimme siis todeta, että todistusteorian myöhemmän kehityksen valossa sekä Brouwer että Hilbert olivat osaltaan väärässä: Brouwer väittäessään, että klassinen matematiikka voi johtaa epätotuuksiin tai jopa ristiriitoihin, ja puolestaan Hilbert väittäessään, että intuitionismi kastroisi koko matematiikan. Tavallisen matematiikan kannalta valinta intuitionismin ja klassisen matematiikan välillä on yllättävän vähämerkityksinen.

Joukon käsite ja aksiomaattinen joukko-oppi

Laajalle levinneen käsityksen mukaan Cantorin joukko-oppi perustui naiiviin joukon käsitteeseen, jonka vuosisadan alussa ilmaantuneet paradoksit osoittivat epäselväksi ja jopa ristiriitaiseksi; näiden paradoksien välttämiseksi on sitten muotoiltu erilaisia formalisoituja joukko-opin teorioita, joissa joukkojen muodostamista on rajoitettu *ad hoc* ilman intuitiivista perustelua. Tämä vakiintunut käsitys asiasta on kuitenkin virheellinen.

Tosi asiassa paradoksit eivät koskeneet Cantorin joukon käsitettä, vaan ainoastaan Fregen “käsitteen alan” tai “luokan” käsitettä (kts. Gödel 1947, Wang 1974, Kreisel 1967a,1967b). Nämä kaksi varsin erilaista käsitettä menivät usein sekaisin, mutta ainakin Cantorille itselleen oli selvää, ettei hänen joukon käsitteensä ollut sama kuin yleinen luokan käsite. Matemaattinen joukon (joidenkin objektien joukkona) käsite ja looginen käsitteen alan tai luokan käsite ovatkin aivan selvästi eri käsitteitä. Luokat voivat olla suurempia kuin joukot (esim. kaikkien joukkojen luokka); toisaalta joukkoja on olemassa ylinumeroituva määrä, kun taas luokkia on vain numeroituvasti äärellinen määrä. Näitä kahta käsitettä ei joukko-opin alkuaikoina erotettu riittävästi toisistaan, ja erityisesti Fregellä ne olivat pahoin sekaantuneet. (Parsons 1974, Maddy 1983)

Myöskään paradoksien todellinen historia ei tue vallitsevaa käsitystä joukko-opin ja paradoksien välisestä suhteesta. Cantor itse oli löytänyt Burali-Fortin paradoksin jo 1985 ja kertonut siitä mm. Hilbertille seuraavana vuonna (kts. Wang 1974). Myös Cantorin kirjeenvaihdosta Dedekindin kanssa vuonna 1899 (Cantor 1899) käy selvästi ilmi, että hän oli tietoinen paradoksien mahdollisuudesta. Cantorille joukko on kokoelma, jota voidaan ristiriidattomasti pitää yhtenä objektina, kokonaisuutena. Tämän lisäksi on hänen mukaansa olemassa kokoelmia, joita ei voida tarkastella yhtenä kokonaisuutena joutumatta ristiriitaisuuksiin. Hän kutsuu tällaisia kokoelmia “absoluuttisesti äärettömiksi” tai “ristiriitaisiksi kokoelmiksi”. Nämä eivät ole joukkoja hänen tarkoittamassaan mielessä. Hän antaa esimerkkinä kaikkien ordinaalien kokoelman ja Burali-Fortin paradoksin. Cantor ei nähnyt tässä joukon käsitteen kannalta mitään hälyttävää. (Cantor 1899, ks. myös Moore 1980) Burali-Forti julkaisi oman “paradoksinsa” 1897, mutta ei hän eikä kukaan muukaan nähnyt siinä mitään ongelmaa joukko-opille. Jo 1900, siis ennen Russellia, Zermelo puolestaan löysi Russellin paradoksin. Hän ei kuitenkaan julkaissut tulosta, eikä se mitenkään häirinnyt häntä, vaan hänkin jatkoi rauhallisin mielin joukko-opillisia tutkimuksiaan. (Moore 1980).

Joukko-opin keskeiset kehittäjät olivat siis hyvin tietoisia paradoksien mahdollisuudesta, mutta aivan oikeutetusti katsoivat, etteivät ne koskeneet heidän joukon käsitettään. Vaikka Cantor ei aksiomatisoinut saati formalisoinut joukkojen teoriaansa, ei tämä merkitse sitä, että hänen joukon käsitteensä olisi ollut epäselvä tai ristiriitainen. Hilbertin klassisesta geometrian aksiomatisoinnista inspiraationsa saanut Zermelo aksiomatisoi joukko-opin 1908 (Zermelo 1908). Hänen ensisijaisena motivaationaan eivät kuitenkaan olleet paradoksit, vaan kiivas keskustelu hänen aiemmasta joukkojen hyvinjärjestämis-tuloksestaan, joka perustui Zermelon esittämään uuteen valinta-aksioomaan (Zermelo 1904). Joukko-opin aksioomilla on itse asiassa selvä intuitiivinen motivaatio. Aksioomat kuvaavat ns. iteratiivista joukkohierarkiaa, jossa joukko muodostuu aiemmin muodostetuista joukoista (kannattaa huomata, että tämä on eräänlainen tyyppiteoria; tyypit vain ovat kumulatiivisia, ja tyyppihierarkia jatkuu äärettömiin). Joukko-opin aiottu universumi muodostuu seuraavasti (P(A) on kaikkien joukon A osajoukkojen muodostama joukko eli A:n potenssijoukko):

U_0 = (mahdollisesti tyhjä) kokoelma “yksilöitä”,
$U_{a+1} = P(U_a)$ » Ua,
U_a = kaikkien U_b, b < a, unioni, jos a on rajaordinaali.

Tätä intuitiivista joukon käsitettä eivät paradoksit missään vaiheessa koskeneetkaan. Sen näkökulmasta on ilmeistä, ettei joukko voi sisältää itseään ja että rajoittamaton komprehensio on virheellinen. Zermelon keskeinen erotteluaksiooma, *Aussonderungsaxiom*, on tämän joukon käsitteen luonteva ilmaus, ei mikään rajoittamattoman komprehensioaksiooman *ad hoc* rajoitus. Tätä joukon käsitettä on alettu kutsua (maksimaaliseksi) iteratiiviseksi joukon käsitteeksi.[7]

Zermelon aksiomatisoinnissa ei ole kuitenkaan mitään lopullista eikä pyhää (vrt. Martin 1976); joukko-opin aksioomien joukko onkin hiljalleen kasvanut. Sitä on täydennetty erinäisillä iteratiivisesta joukon käsitteestä luontevasti seuraavilla aksioomilla. Mirmanoff (1917) esitti lisättäväksi aksioomaa, jonka mukaan joukot ovat “hyvin perustettuja”. Tämä seuraa luontevasti edellä kuvatusta joukon käsitteestä. Kuinka pitkälle joukkojen hierarkiaa sitten tulisi jatkaa? Äärettömän joukko-opin näkökulmasta ei tuntuisi olevan mitään hyvää perustetta pysähtyä tietylle tasolle. Fraenkel (1922) huomasi, että Zermelon aksioomista ei voida johtaa joukon $\aleph_\omega$ olemassaoloa, ja ehdotti tämän saamiseksi korvausaksioomaa, joka sopii hyvin yhteen joukon käsitteen kanssa. Nykyinen joukko-opin perusteoria, joka tunnetaan Zermelo-Fraenkel-joukko-opin (ZF) nimellä, pitääkin sisällään myös nämä lisäaksioomat.

Edelleen joukko-hierarkian iterointia on ehdotettu jatkettavaksi “pidemmälle”, koska ei ole uskottavaa, että potenssijoukko- ja korvausoperaatiot riittäisivät tyhjentämään koko monimutkaisen joukko-opillisen universumin. Ensimmäinen tämänsuuntainen lisäoletus oli luonteva saavuttamattoman kardinaalin postulointi. (Zermelo 1930, Tarski 1938) Sittemmin on esitetty monenlaisia vahvoja äärettömyysaksioomia, jotka olettavat valtavan suurien kardinaalien olemassaolon. Nämäkin on mahdollista oikeuttaa tietyistä joukon käsitteeseen liittyvistä yleisesti hyväksytyistä periaatteista. Suosituin tällainen sääntö on Cantorin joukon käsitteestä luontevasti seuraava nk. heijastusperiaate: sen mukaan koko joukko-opillinen universumi itse on määrittelemätön, eli jokainen siitä pätevä lause on tosi jo jostain hierarkiassa olevasta joukosta. Tämä intuitiivinen periaate oikeuttaa monet vahvat suurten kardinaalien aksioomat. (kts. Maddy 1988, Wang 1974, 1977, Martin 1976, Solovay, Reinhardt & Kanamouri 1978)

Joukko-opin riippumattomuustulokset ja uudet aksioomat

Paljon keskustelua ja hämmennystä on aiheuttanut Paul Cohenin 1963 kehittämällään uudella malliteoreettisella menetelmällä (“pakotus”) todistama riippumattomuustulos, jonka mukaan Cantorin kontinuumihypoteesia ($P(\aleph_0) = \aleph_1$) ei voida todistaa eikä hylätä vakiintuneista joukko-opin aksioomista (ZF) (Cohen 1963, 1964, 1966). Pian muut loogikot, erityisesti Solovay (1970), todistivat vastaavanlaisia riippumattomuustuloksia monista muistakin joukko-opin ja matematiikan avoimista kysymyksistä. Kysymys siitä, onko kontinuumihypoteesi jossain mielessä tosi tai epätosi, muuttui näin perin mutkikkaaksi. Muiden muassa Cohen itse omaksui formalistisen kannan koko kysymykseen (ks. Cohen 1971). Olemme kuitenkin jo aiemmin todenneet suoraviivaisen formalismin kestämättömäksi kannaksi. Mutta myös monet muutoin realistisesti matemaattiseen olemassaoloon suhtautuvat loogikot ja filosofit ovat ilmaisseet epäilyjä joukon ja erityisesti kontinuumin käsitteen relatiivisuudesta (ks. esim. Mostowski 1967, Niiniluoto 1977). Mielestäni kaikki tällaiset johtopäätökset ovat kuitenkin ennenaikaisia – ja ongelmallisia.

Ensiksikin, valinta-aksiooman aiottu merkitys on nimenomaisesti se, että jokaisella joukolla on määrätty mahtavuus (joko a ≤ b tai a ≥ b). Relativistisen kannan tulisi näin johdonmukaisuuden nimissä johtaa myös valinta-aksiooman hylkäämiseen. Se on kuitenkin niin sivuuttamaton osa nykyistä klassista matematiikkaa, että harvat lienevät tähän valmiita. Edelleen, on huomattava, että kontinuumiongelma ei ole vain abstraktin joukko-opin ongelma, vaan myös (korkeamman kertaluvun) aritmetiikan ongelma; kontinuumihypoteesihan väittää: “Jos *A* on luonnollisten lukujen joukon kaikkien osajoukkojen joukon ääretön osajoukko, eikä sitä voida asetta yksi-yhteen -vastaavuuteen luonnollisten lukujen joukon kanssa, niin se voidaan asettaa yksi-yhteen -vastaavuuteen luonnollisten lukujen joukon kaikkien osajoukkojen joukon kanssa.” Jos hyväksyy luonnollisten lukujen standardimallin mielekkyyden, on vaikea kiistää johdonmukaisesti kontinuumihypoteesilta määrätty totuusarvo. Ja edellisen kieltäminen on varsin vaikeaa.

Optimismi kontinuumiongelman positiivisen ratkaisun mahdollisuuden suhteen ei ole aivan katteetonta. Asian selventämiseksi on hyvä tarkastella erästä joukkon-opin aivan äskettäistä tärkeää tulosta, jonka motivointi edellyttää pientä historiallista katsausta.

Vuosisadan alussa ranskalaisten “puoli-intuitionistien” (Lebesgue, Baire, Borel) työstä alkunsa saanut nk. deskriptiivinen joukko-oppi ei tutki mielivaltaisia joukkoja, vaan ainoastaan tiettyjä suhteellisen yksinkertaisia, suljetuista joukoista yksinkertaisilla operaatioilla (komplementti, numeroituva yhdiste ja projektio) konstruoitavia ns. projektiivisia reaalilukujen joukkoja. (Suslin 1917, Lusin 1917, 1925, Sierpinski 1925; ks. myös Moschovakis 1980). Myöhemmin teoriaan sovellettiin hedelmällisellä tavalla laskettavuuden teorian käsitteitä, ja se yhteensulautui Kleenen kehittämän aritmeettisten, hyperaritmeettisten ja analyyttisten joukkojen teorian kanssa. Projektiivisia joukkoja tulivat näin vastaamaan toisen kertaluvun aritmetiikassa määriteltävät joukot. (ks. Martin 1977, Moschovakis 1980)

Projektiivisten joukkojen teoria oli kuitenkin ajautunut jo 1930-luvulla vaikeuksiin. Edes näitä yksinkertaisesti määriteltäviä joukkoja koskevia monia avoimia ongelmia (esim. ovatko kaikki projektiiviset joukot Lebesgue-mitallisia?) ei kerta kaikkiaan saatu ratkaistua. 1960-luvulla syykin selvisi. Cohenin menetelmiä soveltamalla kävi ilmi, ettei niitä voinutkaan ratkaista ZFC-joukko-opin aksioomista. (ks. Solovay 1970) Kävi kuitenkin ilmi, että olettamalla, että kaikki projektiiviset joukot ovat “determinoituvia”, avoimet ongelmat ratkeavat ja näiden joukkojen rakenteesta saadaan kaunis teoria (mm. kaikki projektiiviset joukot ovat Lebesgue-mitallisia). Ongelmana kuitenkin oli, ettei kukaan uskaltanut väittää, että determinoituvuusoletus olisi intuitiivinen ja jotenkin seuraisi joukon käsitteestä. Sillä ei ollut mitään muuta oikeutusta kuin sen toivottavat seuraukset. (ks. Martin 1976, 1977, Moschovakis 1980) Lopulta 1980-luvun lopussa Woodin, Martin ja Steel osoittivat, että projektiivisten joukkojen determinoituvuus puolestaan seuraa eräästä hyvin vahvasta suurten (ns. superkompaktien) kardinaalien olemassaoloaksioomasta (Woodin 1988, Martin & Steel 1988, 1989). Suurten kardinaalien olemassaolo – toisin kuin oletus determinoituvuudesta – taas voidaan ainakin jossain määrin oikeuttaa maksimaalisen iteratiivisen joukon käsitteestä lähtien.

Tämä tulos osoittaa toisaalta vakuuttavasti, että teoretisointi edes hyvin suurten kardinaalien olemassaolosta ei välttämättä ole pelkkää hyödytöntä akateemista nänpertelyä, vaan sillä saattaa olla yllättäviä ja tärkeitä heijastusvaikutuksia “alempana” pienempien joukkojen ja konkreettisen matematiikan piirissä. Toisaalta tällaiset kehityskulut antavat aihetta varovaiseen optimismiin myös kontinuumihypoteesin suhteen. Olemme jo edellä nähneet, kuinka joukko-oppiin on aiemminkin lisätty uusia, sittemmin aivan luonteviksi havaittuja aksioomia. Nyt näyttääkin aivan mahdolliselta, että uusien loogisten välineiden käyttöönotto auttaisi löytämään jonkin joukon käsitteen täsmennyksen, maksimaalisen iteratiivisen joukon käsitteestä luontevasti seuraavan lisäaksiooman, joka ratkaisisi kontinuumiongelman. Ei ole mitenkään ennennäkemätöntä, että matematiikka luo ongelmia, jotka saavat odottaa paitsi ratkaisuaan, myös riittäviä ratkaisuvälineitään jopa vuosisatoja. Tämä ei anna aihetta mihinkään skeptisismiin, vaan ainoastaan sinnikkyyteen ja pitkäjänteiseen ponnisteluun ongelmien ratkaisemiseksi.

Todettakoon toisaalta, että Gödelin kontinuumihypoteesin ristiriidattomuustodistuksessaan (Gödel 1938, 1939) apuvälineenä käyttämä konstruoituvuusaksiooma “V = L” ratkaisisi niin kaikki edellä mainitut avoimet ongelmat kuin kontinuumiongelmankin. Joukko-opin tutkijat (myös Gödel) ovat kuitenkin yleisesti sitä mieltä, että tämä aksiooma ei sovi yhteen intuitiivisen joukon käsitteen kanssa, vaan rajoittaa keinotekoisesti potenssijoukon rikkautta ja on näin epätosi. Näin joukko-opissa ei suinkaan olla valmiita hyväksymään mielivaltaisesti mitä tahansa ratkaisuja avoimiin ongelmiin. Tämä ilmiö sopii huonosti yhteen formalistisen matematiikkakäsityksen kanssa.

Platonismi ja realismi matematiikanfilosofiassa

Matematiikka näyttää puhuvan luvuista, funktioista ja joukoista ja olettavan näiden olemassaolon. Matematiikanfilosofinen realismi on kanta, jonka mukaan matemaattiset objektit ovat todellakin olemassa ja matematiikan lauseilla on määrätty objektiivinen totuusarvo meidän tietokykymme mahdollisista rajoituksista riippumatta.

Perinteinen realismin muoto matematiikanfilosofiassa on platonismi. Sen mukaan matemaattiset oliot ovat olemassa omassa todellisuuden sfäärissään, ajan ja avaruuden “tuolla puolen”, jonkinlaisessa ikuisessa muuttumattomassa platonisessa ideoiden maailmassa. Tunnettuja platonisteja ovat olleet esimerkiksi Cantor, Frege, varhainen Russell ja Ramsey. Myöhemmin erityisen vaikutusvaltainen ja rohkea platonisti on ollut Gödel, jonka mukaan joukko-opin käsitteet ja lauseet puhuvat määrätystä todellisuudesta, josta saamme tietoa havainnon tapaisen intuition avulla. Tämä intuitio on tarpeeksi selvä tuottamaan joukko-opin aksioomat ja jopa avoimen sarjan niiden laajennuksia. Gödelin mukaan joukko-opin aksioomat “pakottavat itsensä meille tosina”. (Gödel 1947, 1944)

Platonismilla on kuitenkin omat vaikeat filosofiset ongelmansa. Voidaan hyvin perustein väittää, että se jättää matemaattisen tiedon täydeksi mysteeriksi. Kuinka voimme koskaan saada tietoa platonisista objekteista? (Benacerraf 1973, Maddy 1984) Pelkkä puhe “intuitiosta” ei juuri selvennä asiaa. Edelleen, myös platonismin on erittäin vaikea selittää, miksi matematiikkaa voidaan niin menestyksekkäästi soveltaa fysikaaliseen todellisuuteen (Shapiro 1983). On siis olemassa ilmeinen tilaus matematiikanfilosofisen realismin versiolle, joka välttäisi nämä platonismin ongelmat.

Tässä vaiheessa meidän on kuitenkin hyvä kiinnittää huomiota erääseen perustavaan käänteeseen aikamme filosofiassa. Ajatus, jonka mukaan tiedolle, kuten tässä matematiikalle, tulisi pystyä antamaan ehdottoman varma perustus, on ilmentymä koko uuden ajan filosofiaa hallinneesta vahvasta tieto-opillisesta fundamentalismista. Sitä motivoi halu vastata vastaansanomattomasti ja lopullisesti tietoa koskeviin skeptisiin epäilyihin. Vahva fundamentalismi on yhteinen taustafilosofia niin logisismille (matematiikka *a priori* analyyttisenä), Hilbertin ohjelmalle (lopullinen vastaus äärettömän ongelmiin) kuin intuitionismillekin (oletuksista vapaa matematiikka).

Tämän vuosisadan loppupuolella perinteinen tieto-opillinen lähestymistapa on kuitenkin laajalti hylätty. Erityisen paljon tähän on vaikuttanut Quinen holistinen filosofia. Hänen mukaansa skeptisen epäilyksenkin on aina perustuttava johonkin taustatietoon, eikä meillä ole mitään parempaa tietoa kuin nykyinen tieteellinen maailmankuvamme. Vaikka joku sen osa voidaankin aina hylätä, tämä voi tapahtua vain nojaamalla sen muihin osiin. (Quine 1951, 1969, 1975) Tämä käsitys on johtanut hylkäämään fundamentalistisen ohjelman tieteen pohjaamisesta jollekin tiedettä edeltävälle varmalle filosofiselle perustalle. (Quine 1969) Samalla on todettu mahdottomaksi koko ajatus oletuksista vapaasta tiedosta ja varmasta tiedon perustasta.

Tälle nykyaikaiselle holistiselle näkemykselle on myös ollut luonteenomaista korostaa toisaalta perinteisesti apriorisena (havainnosta riippumattomana) pidettyjen logiikan ja matematiikan ja toisaalta empiirisen tieteen yhteenkietoutuneisuutta sekä näiden perinteisesti täysin erilaisina pidettyjen kahden tiedon lajin välisen erottelun suhteellisuutta ja jopa epäselvyyttä. (Quine 1951, 1954/1963) Tästä näkökulmasta myös pyrkimykset oikeuttaa matematiikka rakentamalla se ehdottoman varmalle perustalle "selviin ja kirkkaisiin ideoihin" tai haaveet "oletuksista vapaasta matematiikasta" ovat osa vanhentunutta ja virheellistä filosofista viitekehystä – ja mahdottomia toteuttaa.

Quinen mukaan kriteerinä sille, mitä on olemassa, toimii lopulta se, millaisten olioiden olemassaolon joudumme olettamaan tehokkaimman mahdollisen todellisuutta koskeva teorian tuottamiseksi (Quine 1951). Erityisesti matematiikka on välttämätön parhaalle teoriallemme maailmasta, ja me hyväksymme tuon teorian. Joudumme sitoutumaan matemaattisten objektien olemassaoloon, koska ne ovat välttämättömiä parhaimmalle teoriallemme maailmasta – teorialle, johon uskomme. Fysiikkaa ei voida edes muotoilla ilman matematiikkaa. (Putnam 1971) Matematiikka – omine olemassaolo-oletuksineen – on siis sinällään aivan hyvin oikeutettu.

Quine ja Putnamin tieteelliseen sovellettavuuteen perustuva argumentaatio asettaa matematiikan statusta tieteenä koskevat skeptisistiset epäilykset oikealle paikalleen. Toisaalta se jättää kokonaan vastaamatta moniin keskeisiin matematiikanfilosofisiin ongelmiin. Se ei kerro mitään siitä, mihin perustuu ainakin alkeismatematiikan kiistämätön ilmeisyys, eikä anna minkäänlaista selitystä matematiikan omista oikeutuskäytännöistä, kuten todistamisesta, tai uusien aksioomien valinnasta. Soveltamaton abstrakti matematiikka jää sen puitteissa myös vaille oikeutusta. Oikeastaan se ei kerro mitään siitä, miten ja miksi matematiikka toimii.

Viimeaikaisen matematiikanfilosofian keskeisimpiä ja mielenkiintoisimpia teemoja onkin ollut muotoilla sellainen realismin versio, joka selittäisi luonnollisesti sekä matematiikan menestyksekkään soveltamisen fysikaaliseen todellisuuteen että matematiikan omat tiedon lähteet, "intuition" ja todistukset. Menemättä yksityiskohtiin, ajatuksena on – tavalla tai toisella – että matematiikka koskee fysikaalisen todellisuuden abstrakteja rakenteellisia tai käsitteellisiä ominaisuuksia.[2]**8** Tämä on jyrkästi ristiriidassa platonismin kanssa. Nykyaikaisten realistien pyrkimys tarkastella matemaattisten käsitteiden alkuperää havainto- ja käsitejärjestelmissämme myös lähentää realismia konstruktivismiin ja intuitionismiin, vaikka motiivina onkin nyt klassisen matematiikan ymmärtäminen eikä hylkääminen.

Klassisen matematiikan intuitionistinen kritiikki

Klassisen matematiikan ja logiikan tarkastelumme olisi vakavasti puutteellinen, ellemme pyrkisi mitenkään vastaamaan joidenkin jyrkkien intuitionistien siihen kohdistamaan ankaraan kritiikkiin. Joudumme tässä tyytymään ymmärrettävästi vain muutamiin huomautuksiin.

Ei olisi järkevää kiistää intuitionistisen käsitteen- ja teorianmuodostuksen hedelmällistä vaikutusta nykyaikaiseen logiikan ja matematiikan perusteiden tutkimukseen (kts Beeson 1985, Troelstra & van Dalen 1988). On myös selvää, että konstruktiiviset todistukset ovat, aina kun mahdollista, toivottavia, sillä ne antavat aina enemmän informaatiota. Monet intuitionismin tärkeimmät viimeaikaiset tutkijat (mm. Kreisel, Feferman, Friedman) edustavatkin ns. eklektistä kantaa: sen mukaan intuitionistiset

[2] Tässä on mainittava erityisesti Maddyn "kompromissiplatonismi" (1989, 1990a, 1990b) sekä Resnikin (1974, 1981, 1982, 1990) ja Shapiron (1983) "strukturalismi". Matemaattista intuitiota demystifioimaan pyrkiviä tarkasteluja ovat esim. Parsons 1979-80, Maddy 1980, 1990a; matematiikan sovellettavuutta tarkastelevat esim. Maddy 1989, 1990a, ja Shapiro 1983.

matematiikan teoriat ovat – muiden joukossa – kiinnostavia ja tutkimisen arvoisia, mutteivät mitenkään absoluuttisesti ainoita tosia tai jotenkin etuoikeutettuja.

Ortodoksinen intuitionismi (Brouwer, varhainen Heyting) sen sijaan väittää, että kaikki muu paitsi intuitionistinen matematiikka on vailla merkitystä tai epätotta ja tulisi näin hylätä. Se, mitä seuraavaksi arvostelen, koskee vain tällaista jyrkkää intuitionismia. Perinteinen intuitionismi (esim. Brouwer 1912) tuomitsee äärettömän joukko-opin lauseet merkityksettömiksi. Filosofian lähihistoria osoittaa kuitenkin vakuuttavasti, että positivistishenkiset yritykset antaa jokin tietämiskykyyn perustuva selvä kriteeri sille, millaiset lauseet ovat mielekkäitä ja mitkä vailla merkityssisältöä, johtavat ylitsepääsemättömiin ongelmiin. Lisäksi ne sulkevat valtaosan parhaasta tieteestä mielekkään ulkopuolelle ja vaikuttavat näin tukahduttavasti tieteen kehitykseen.

On tärkeää huomata, että paitsi realismi, myös intuitionismi idealisoi jo vahvasti ihmismielen todellisia kykyjä (Bernays 1935, 1975, Troelstra 1991). Jyrkän intuitionismin puolesta esitetyt tavanomaiset ihmismielen ja ymmärryksen rajallisuuteen perustuvat argumentit kääntyvätkin helposti argumenteiksi myös intuitionismia itseään vastaan, argumenteiksi jonkinlaisen ultra-finitismin tai aktualismin puolesta ("luku on olemassa vain jo se on aktuaalisesti konstruoitu"). (kts. Frege 1884, Bernays 1935, Wright 1981, George 1988, Troelstra 1991) Tällainen äärimmäisen rajoittava filosofinen kanta veisi pohjan pois myös intuitionistiselta matematiikalta.

Mikäli taas sallitaan aktuaalisten lisäksi myös mahdolliset konstruktiot, kuten intuitionismilla on yleisesti tapana, voidaan kysyä, millaisesta mahdollisuudesta tällöin on oikein kysymys? Fysikaalinen mahdollisuus on selvästikin liian rajoittava ja johtaa jyrkkään finitismiin. Looginen mahdollisuus taas on liian salliva ja edellyttää lisäksi jo hyvin ymmärrettyä loogisen totuuden käsitettä (intuitionistinen? -- kehäpäättely uhkaa). Lopulta matemaattinen mahdollisuus edellyttää sen, mitä pitäisi määritellä, ja johtaa kehään. Kehällisyyden tai äärettömän regression uhka on näin voimakkaasti läsnä intuitionismissa.

On siis myönnettävä, ettei ole edes varmaa, onko konstruktiivisuus lainkaan selvä tai "hyvin määritelty" käsite. "Valtavirtalogiikan" piirissä onnistuttu antamaa täsmällinen formalisoitava vastine sellaisille tärkeille matematiikanfilosofisille käsitteille kuin "mekaanisesti laskettava" (erityisesti Turing 1936-7), "finitistinen" (Tait 1981) ja "predikativiivinen" (Feferman 1964, Schütte 1964, 1965). Mitään vastaavaa ei ole tapahtunut konstruktiivisuuden käsitteelle. Sen ulottuvuus on edelleen kovin epäselvä. Konstruktiivisuuden käsitettä on toistaiseksi vain onnistuttu lähestymään "alhaalta päin", antamalla yhä vahvempia konstruktiivisesti hyväksyttäviä menetelmiä ja teorioita sekä toisaalta antamaan esimerkkejä ilmeisen ei-konstruktiivisista todistuksista. Ei ole varmaa, onko käsitteellä mitään selvää alaa jossain tällä välillä. Intuitionistit ja konstruktivistit ovat jopa perin erimielisiä siitä, mitkä periaatteet todella ovat hyväksyttäviä (kts. Beeson 1982).

Itse olisin tässä kuitenkin varovaisen optimistinen. Edellä todettiin jo, että myös intuitionismiin sisältyy vahvaa idealisointia, ja sekin operoi abstrakteilla käsitteillä (kts. Gödel 1958). Uskon, että finitismi, predikativismi, intuitioismi ja lopulta ääretön joukko-oppi ovat teoretisointia eri abstraktion ja idealisaation tasoilla ja että niillä kaikilla on oma olemassaolon oikeutuksensa ja tehtävänsä – uskon että monien eri tasojen tutkimus on perusteltua ja hyödyllistä. Sen sijaan ei ole olemassa mitään hyvää perustetta pitää yhtä idealisoinnin ja abstraktion tasoa oikeana ja muita virheellisinä (vrt. Bernays 1975). Erityisesti, ei voida kerta kaikkiaan väittää, että konstruoituvuuden käsite olisi lainkaan potenssijoukon käsitettä selvempi – puhumattakaan siinä määrin, että jälkimmäiseen perustuva teoretisointi tulisi kokonaan hylätä edelliseen perustuvan teorianmuodostuksen hyväksi.

Viime aikoina konstruktivistiset pyrkimykset rajoittaa matematiikan ja logiikan käsitteenmuodostusta ja teoretisointia ovat usein perustuneet – ihmismielen rajojen sijaan – tietojenkäsittelyopin ja ohjelmoitavuuden asettamiin rajoituksiin. Klassinen logiikka ja abstrakti joukko-opillinen matematiikka tulisi näin hylätä, koska se ei sovellu ohjelmointiin. Tällaisia vaatimuksia on kuitenkin vaikea ymmärtää. Miksi jollakin matematiikan sovellutusalalla, erityisesti jollain varsin uudella ja vielä epäkypsällä alalla tulisi olla valta määrätä matematiikan ja logiikan kehityksestä. Entä jos esitettäisiin, että ne matematiikan ja logiikan osat, joita sanokaamme sillanrakennustekniikka tai hoitotiede ei hyödynnä, tulisi kokonaan hylätä? Erona näihin on vain tietotekniikkaan nykyisin usein liittyvä uskonnollisuutta hipova kunnioitus.

Lopuksi todettakoon, ettei ole mitenkään itsestään selvää, että konstruktivistisen ontologian, jonka mukaan matemaattiset objektit ovat jossain mielessä ihmismielen konstruoimia, tulisi välttämättä johtaa klassisen matematiikan hylkäämiseen intuitionistisen hyväksi. Kreiselin mukaan Gödel tulkitsi epätäydellisyystuloksensa osoittavan, että joko on olemassa meille “ulkoisia” matemaattisia objekteja tai ne ovat omia konstruktioitamme ja mieli ei ole mekaaninen. Kreisel (1967a) itse kuitenkin hylkää Gödelin tekemän taustaoletuksen: “jos matemaattiset objektit ovat omia konstruktioitamme, meidän on kyettävä ratkaisemaan kaikki niiden ominaisuudet”. Jo Dedekind (1988) korosti, etteivät mentaaliset konstruktiomme ole aina “läpinäkyviä” meille. Tämä mahdollisti hänelle konstruktivistisen ontologian ja äärettömän joukko-opin sopuisan yhteiselon (ks. myös Kitcher 1986). Matematiikanfilosofisessa keskustelussa on tarkasteltu yllättävän vähän tällaista realismia ja konstruktivismia yhdistävää kantaa. Erityisesti, perinteinen intuitionismi ei ole esittänyt mitään selviä argumentteja tällaista mahdollisuutta vastaan – mentaalisten konstruktioiden “läpinäkyvyys” on ollut pikemminkin argumentoimaton oletus. Sen hylkääminen avaa mahdollisuuden omaksua anti-platonistinen, tietynlainen konstruktivistinen ontologia ja silti hyväksyä klassinen matematiikka ja logiikka äärettömine joukkoineen.

Kirjallisuus

Beeson, Michael J. (1982) “Problematic principles in constructive mathematics”, teoksessa van Dalen et al. (toim.) Logic Colloquium ‘80, North Holland, Amsterdam, 11-55.
_____ (1985) Foundations of Constructive Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.
Benacerraf, Paul (1973) “Mathematical truth”, Journal of Philosophy 70, 661-680.
Bernays, Paul (1935) “Sur le platonisme dans les mathématiques”, L’Enseignement mathematique, vol. 34.
_____ (1967) “Hilbert, David”, teoksessa P. Edwards (toim.) The Encyclopedia of Philosophy, MacMillan, New York, vol. 3, 496-504.
_____ (1975) “Mathematics as a domain of theoretical science and of mental experience”, teoksessa Rose & Shepherdson (toim.) Logic Colloquium ‘73, North-Holland, Amsterdam, 1-4.
Boolos, George (1971) “The iterative concept of set”, Journal of Philosophy, vol. 68.
_____ (1989) Iteration Again”, Philosophical Topics, vol XVII, No 2, 5-21.
Boyer, Carl B. (1959) The History of the Calculus and it’s Conceptual Development, Dover, New York.
_____ (1994) Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia, osat I ja II, Art House, Juva.
Brouwer, L. E. J. (1912) Intuitionisme en Formalisme, Noordhoof, Groningen. Englanninkielinen käännös “Intuitionism and formalism”, Bulletin of American Mathematical Society, vol. 20, 1913.
_____ (1927) “Über Definitionsbereiche von Funktionen”, Mathematische Annalen 97, 60-75. Julkaistu englanniksi teoksessa van Heijenoort (toim.) 1967, 446-463.
Cantor, Georg (1872) “Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen”, Mathematische Annalen 5, 123-32.
____ (1885-7) “Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre”, 1 & 2, Mathematische Annalen, vols. 46 & 49.
(1889/1967) “Letter to Dedekind”, teoksessa van Heijenoort (toim.) 1967, 113-117.

Cohen, Paul J. (1963) “The independence of the continuum hypothesis I”, Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A., 50, 1143-48.
_____ (1963) “The independence of the continuum hypothesis II”, Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A., 51, 105-110.
_____ (1966) Set Theory and the continuum hypothesis, Benjamin, New York.
_____ (1971) “Comments on the foundations of set theory”, teoksessa Scott (toim.) Axiomatic Set Theory, Proceedings of the Symposia in pure mathematics, vol. 13, part 1, A.M.S. Providence, 9-15.
Davis, Martin (ed.) The Undecidable, Raven Press, New York.
Dauben, Joseph W. (1979) Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite, Harvard University Press, Cambridge, Mass.
Dedekind, Richard (1872) Stetigheit und Irrationale Zahlen, Vieweg, Braunschweig.
_____ (1888) Was sind und was sollen die Zahlen?, Vieweg, Braunschweig.
Edwards, Harold (1988) “Kroenecker’s place in history”, teoksessa Aspray & Kitcher (toim.) History and Philosophy of Modern Mathematics, Minnesota Studies in the Philosophy of Science, vol. XI, 139-144.
Feferman, Solomon (1964) “Systems of predicative analysis” Journal of Symbolic Logic 29, 1-30.
_____ (1977) “Theories of finite type related to mathematical practice” teoksessa Barwise (toim.) Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, Amsterdan, 913-971.
_____ (1979) “Constructive theories of functions and classes”, teoksessa Boffa et al. (toim.) Logic Colloquium ‘78, North-Holland, Amsterdam, 159-224.
Feferman, Solomon & Wilfrid Sieg (1981) “Proof theoretic equivalences between classical and constructive theories of analysis”, teoksessa Buchholz, Feferman, Pohler & Sieg: Iterated Inductive Definitions and Subsystems of Analysis, Lecture Notes in Mathematics, vol. 897, Springer-Verlag, 78-142.
Fraenkel, Abraham A. (1922) “Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre”, Mathematische Annalen 86, 230-237.
Frege, Gottlog (1879) Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache das reinen Denkens, Nebert, Halle. Julkaistu englanniksi teoksessa van Heijenoort 1967, 1-82.
_____ (1884) Die Grundlagen der Arithmetik, Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Breslau, Koebner.
_____ (1903) Grundgesetze der Arithmetik, Vol. II, H. Pohle, Jena.
Friedman, Harvey (1975) “Some systems of second order arithmetic and their uses”, teoksessa Proceedings of the International Congress of Mathematics, Vancouver 1974, Vol. 1, Canad. Math. Congress, 235-242.
_____ (1976) “Systems of second order arithmetic with restricted induction I, II” (abstacts), Journal of Symbolic Logic 41, 4557-559.
_____ (1978) “Classically and intuitionistically provably recursive functions”, teoksessa Müller & Scott (toim.) Higher Set Theory, Lecture Notes in Mathematics 669, Springer-Verlag, Berlin, 21-27.
Friedman, H., S.G. Simpson & R.L. Smith (1983) “Countable algebra and set existence axioms”, Annals of Pure and Applied Logic 25, 141-181.
Gentzen, Gerhard (1936) “Die Wiederspruchsfreheit der reinen Zahlentheorie”; Mathematische Annalen 112, 493-565.
George, Alexander (1988) “The conveyability of intuitionism: an essay of mathematical cognition”, Journal of Philosophical Logic 17, 133-156.
Grattan-Guinness, Ivor (1970) The Development of the Mathematical Analysis from Euler to Riemann, MIT Press, Cambridge, Mass.
Gödel, Kurt (1931) “Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I”, Monatshefte für Mathematik Physik 38:173-198.
_____ (1933) “Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie”, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 4, 34-38.

_____ (1938) “The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis”, Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A., 24, 556-557.
_____ (1939) “Consistency proof for the generalized continuum hypothesis”, Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A., 25, 220-224.
_____ (1944) “Russell’s mathematical logic”, teoksessa Schilpp (toim.) Philosophy of Bertrand Russell, Library of Living Philosophers, vol. 5, Northwestern University, Evanston, 12-153.
_____ (1947) “What is Cantor’s continuum problem?”, American Mathematical Monthly 54, 515-525.
_____ (1958) “Über eines bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes”, Dialectica 12, 280-287.
Hilbert, David (1905) “Über die Grundlagen die Logik und der Arithmetik” Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904, Teubner, Leipzig, 174-185.
_____ (1918) “Axiomatisches Denken”, Mathematische Annalen 78, 405-415.
_____ (1923) “Die logischen Grundlagen der Mathematik”, Mathematische Annalen 88, 151-165.
_____ (1926) “Über das Unendliche”, Mathematische Annalen 95, 161-190. Julkaistu englanniksi teoksessa van Heijenoort 1967, 367-392.
_____ (1927) “Die Grundlagen der Mathematik”, Abhandlungen aus dem Mathematischen Semiar der Hambburgischen Universität 6, 65-85.
Kitcher, Philip (1976) “Hilbert’s epistemology”, Philosophy of Science 43, 99-115.
_____ (1979) “Frege’s epistemology”, Philosophical Review, 88, 235-62.
_____ (1986) “Frege, Dedekind and the Philosophy of Mathematics”, teoksessa L. Haaparanta & J. Hintikka (toim.), Frege Synthesized, Reidel, Dordrecht, 299-343.
Kneale, William & Martha (1962) The Development of Logic, Clarendon Press, Oxford.
Kreisel, Georg (1958) “Mathematical significance of consistency proofs”; Journal of Symbolic Logic 23, 155-182.
_____(1967a) “Mathematical logic: what has is done for the philosophy of mathematics?”, teoksessa Shoenman (toim.) Bertrand Russell: Philosopher of the Century, Allen & Unwin, London, 201-272.
_____ (1967b) “Informal rigour and completeness proofs”, teoksessa Lakatos (toim.) Problems in the Philosophy of Mathematics, North-Holland, Amsterdam, 138-171.
Luzin, Nikolai (1917) “Sur la classification de M. Baire”, Comptes rendus de l’Académie des Sciences de Paris 164, 91-94.
_____ (1925) Sur les ensembles projektifs de M. Henri Lebesgue”, Comptes rendus de l’Académie des Sciences de Paris 180, 1572-74.
Maddy, Penelope (1980) “Perception and mathematical intuition”, Philosophical Review 89, 163-196.
_____ (1983) “Proper classes”, Journal of Symbolic Logic 48, 113-139.
_____ (1984) “Mathematical epistemology: what is the question?”, Monist 67, 46-55.
_____ (1988) “Believing the axioms I, II” Journal of Symbolic Logic 53, 481-511, 736-64.
_____ (1989) “The roots of contemporary Platonism”, Journal of Symbolic Logic 54, 1121-1144.
_____ (1990a) Realism in Mathematics, Oxford University Press, Oxford.
_____ (1990b) “Physicalistic Platonism”, teoksessa Irvine (toim.) Physicalism in Mathematics, Kluwer, Dordrecht, 259-290.
Martin, Donald (1976) “Hilbert’s first problem: the continuum hypothesis”, Proceedings of the Symposia in Pure Mathmematics 28, A.M.S., Providence, 81-92.
_____ (1977) “Descriptive set theory: projective sets”, teoksessa Barwise (toim.) Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, Amsterdam, 783-815.
Martin, D. & J. Steel (1988) “Projective determinacy”, Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A., 85, 6582-86.
_____ (1989) “A proof of projective determinacy”, Journal of the A.M.S. 2, 71-125.
Martin-Löf, Per (1975) “An intuitionistic theory of types: predicative part”, teoksessa Rose et al. (toim.) Logic Colloquium ‘73, North-Holland, Amsterdam, 73-118.

_____ (1982) “Constructive mathmematics and computer programming”, teoksessa Cohen et al. (toim.) Logic, Methodology and Philosophy of Science VI, North-Holland, Amsterdam, 153-179.
_____ (1984) Intuitionistic Type Theory, Bibliopolis, Napoli.
Mirmanoff, Dimitri (1917) “Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le probleme fondamental de la théorie des ensembles”, Enseignement Mathématique, vo. 19, 37-52.
Moore, G. H. (1980) “Beyond First-order Logic: The Historical Interplay between Mathematical Logic and Axiomatic Set Theory”, History and Philosophy of Logic, 1 (1980). 95-137.
Moschovakis, Yiannis (1980) Descriptive Set Theory, North-Holland, Amsterdam.
Mostowski, Andrzej (1967) “Recent results in set theory”, teoksessa Lakatos (toim.) Problems in the Philosophy of Mathematics, North-Holland, Amsterdam, 82-96.
Musgrave, Alan (1977) “Logicism revisited”, British Journal of the Philosophy of Science, 28, 99-127.
Niiniluoto, Ilkka (1977) “Mitalliset kardinaalit: esimerkki matematiikan perusteiden tutkimisesta”, Arkhimedes 29, 129-140.
Parsons, Charles (1974) “Sets and Classes”, Nous 8, 1-12.
_____ (1979-80) “Mathematical intuition”, Proceedings of the Aristotelian Society 80, 145-168.
Peano, Giuseppe (1889) Arithmetices principia, nova methodo exposita, Turin, Bocca. Julkaistu osittain englanniksi teoksessa van Heijenoort 1967, 83-97.
Putnam, Hilary (1967) “The Thesis that Mathematics is logic”, teoksessa Shoenman (toim.) Bertrand Russell: Philosopher of the Century, Allen & Unwin, London, 273-303.
_____ (1971) Philosophy of Logic, Harper and Row, New York.
_____ (1975) “What is mathematical truth?”, teoksessa Hilary Putnam: Philosophical Papers, Vol. 1, Mathematics, Matter and Method, Cambridge University Press, Cambridge, 60-78.
Quine, W. V. O (1936) “Truth by convention”, teoksessa O. H. Lee (toim.) Philosophical Essays for Alfred North Whitehead, Longmans, Green, New York.
_____ (1951) “Two dogmas of empiricism”, Philosophical Review 60, 20-43.
_____ (1954/1963) “Carnap and logical truth”,kirjoitettu 1954 teokseen P. A. Schilpp (toim.) The Philosophy of Rudolf Carnap, Library of Living Philosophers, Open Court, La Salle, 1963.
_____ (1969) “Epistemology naturalized”, teoksessa Quine: Ontological Relativity and Other Essays, Columbia University Press, New York, 69-90.
(1975) “The nature of natural knowledge”, teoksessa Guttenplan (toim.) Mind and Language, Clarendon Press, Oxford, 67-81.
Resnik, Michael (1975) “Mathematical knowledge and pattern recognition”, Canadian Journal of Philosophy 5, 25-39.
_____ (1980) Frege and the Philosophy of Mathematics, Cornell University Press, Ithaca.
______ (1981) “Mathematics as a science of patterns: ontology and reference”, Nous 15, 529-550.
______ (1982) “Mathematics as a science of patterns: epistemology”, Nous 16, 95-105.
_____ (1991) “Beliefs about mathematical objects”, teoksessa Irvine (toim.) Physicalism in Mathematics, Kluwer, Dordrecht, 41-72.
Russell, Bertrand (1902) “Letter to Frege”, julkaistu teoksessa van Heijenoort 1967, 124-125.
_____ (1903) Principles of Mathematics, Allen & Unwin, London.
_____ (1908) “Mathematical logic as based on the theory of types”; American Journal of Mathematics 30, 222-262; julkaistu myös teoksessa van Heijenoort 1967, 150-182.
_____ (1919) Introduction to Mathematical Philosophy, Allen & Unwin, London.
Russell, Bertrand & Alfred N. Whitehead (1910-1913)Principia Mathematica , Vols. I-III, Cambridge, Cambridge University Press.
Schütte, Kurt (1951) “Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie”, Mathematische Annalen 122, 369-389.
_____ (1964) “Eine grenze für die Beweisbarkeit der tranfiniten induktion in der verzweigten Typenlogik”, Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschung 67, 45-60.

_____ (1965) “Predicative well-orderings”, teoksessa Crossley et al. (toim.) Formal Systems and Recursive Functions, North-Holland, Amsterdam, 280-303.
Shapiro, S. (1983) “Mathematics and reality”, Philosophy of Science 50, 523-548.
Shoenfield, Joseph (1977) “Axioms of set theory”, teoksessa Barwise (toim.) Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, Amsterdam, 312-344.
Sieg Wilfried (1985) “Fragments of arithmetic” Annals of Pure and Applied Logic 28, 33-71.
_____ (1988) “Hilbert’s program sixty years later”, Journal of Symbolic Logic 53, 338-348.
Sierpinski, Waclaw (1925) Sur une classe d’ensembles”, Fundamenta Mathematicae 7, 237-243.
Simpson, Stephen G. (1984) “Which set existence axioms are needed to prove Cauchy/Peano theorem for ordinary differential equations?”, Journal of Symbolic Logic 49, 783-802.
_____ (1985a) “Reverse mathematics”, teoksessa Nerode & Shore (toim.) Proceedings of the Recursion Theory Summer School, Proc. Symp. Pure Math., A.M.S. 42, 461-471.
_____ (1985b) “Friedman’s research on subsystems of second order arithmetic”, teoksessa Harrington et al (toim.) Harvey Friedman’s Research on the Foundations of Mathematics, North-Holland, Amsterdam, 137-159.
_____ (1987) “Subsystems of Z_2 and reverse mathematics”, appendix teoksessa G. Takeuti: Proof Theory (2nd ed.), North Holland, Amsterdam, 432-446.
_____ (1988) “Partial realizations of Hilbert’s program”, Journal of Symbolic Logic 53, 349-363.
Sluga, Hans (1980) Gottlog Frege, Routledge, London.
Solovay, Robert M. (1970) “A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable”, Annals of Mathematics 92, 1-56.
Solovay, R.M., W.N. Reinhardt & A. Kanamouri (1978) “Strong axioms of infinity and elementary embeddings”, Annals of Mathematical Logic 13, 73-116.
Suslin, Mikhail (1917) “Sur une définition des ensembles measurables B sans nombres transfinis”, Comptes rendus de l’Académie des Sciences de Paris 164, 88-91.
Tait, William (1981) “Finitism”, Journal of Philosophy 78, 524-546.
Takeuti, Gaisi (1978) Two Applications of Logic to Mathematics, Princeton University Press, Princeton.
Tarski, Alfred (1938) “Über unerreichbare Kardinalzahlen”, Fundamenta Mathematicae 30, 68-89.
Troelstra, A. S. (1991) “Remarks on intuitionism and the philosophy of mathematics”, Atti del Congresso Nuovi problemi della logica e della filosofia della scienza, Viareggio, 8-13 gennaio 1990, Vol. II, CLUEG, Bologna, 211-228.
Troelstra, A.S. & D. van Dalen (1988) Constructivism in Mathematics: An Introduction (2 vols.), North Holland, Amsterdam.
Turing, Alan M. (1936-7) “On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem”, Proceedings of the London Mathematical Society (2) 42, 230-265; correction, ibid. 43, 544-546. Julkaistu myös teoksessa Davis 1965, 115-154.
Van Heijenoort, Jean (toim.) (1967) From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, Harvard University Press, Cambridge, Mass.
Von Neumann, J. (1925) “Eine Axiomatisierung der Mengenlehre”, Journal für die reine und angewandte Mathematik 154, 219-240.
Wang, Hao (1957) “The axiomatization of arithmetic”, Journal of Symbolic Logic 22, 145-158.
_____ (1974) “The concept of set”, ch. VI, From Mathematics to Philosophy, Routledge, London.
_____ (1977) “Large sets”, teoksessa Butts & Hintikka (toim.) Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory, Reidel, Dordrecht, 309-333.
Weyl, Hermann (1918) Das Kontinuum, Veit, Leipzig.
Woodin, Hugh (1988) “Supercompact cardinals, sets of reals, and weakly homogeneous trees”, Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A., 85, 6587-91.
Wright, Crispin (1981) “Strict Finitism”, Synthese 51, 202-282.
Zermelo, Ernst (1904) “Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann”, Mathematische Annalen 59, 514-516. Julkaistu englanniksi teoksessa van Heijenoort 1967, 139-141.

_____ (1908) “Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I”, Mathematische Annalen 65, 261-281.Julkaistu englanniksi teoksessa van Heijenoort 1967, 199-215.
_____ (1930) “Über Grenzzahlen und Mengenbereiche”, Fundamenta Mathematicae 16, 29-47.