Revue générale des Sciences pures et appliquées

DIRECTEUR : LOUIS OLIVIER, Docteur ès sciences.

CHRONIQUE ET CORRESPONDANCE

§ 1. — Mathématiques

Les principes des Mathématiques et le problème des ensembles. — Nous avons reçu de M. J. Richard, professeur au Lycée de Dijon, la lettre suivante :

« Dans son numéro du 30 mars 1905, la *Revue* signale certaines contradictions qu'on rencontre dans la théorie générale des ensembles.

« Il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à la théorie des nombres ordinaux pour trouver de telles contradictions. En voici une qui s'offre dès l'étude du continu, et à laquelle plusieurs autres se ramèneraient probablement :

« Je vais définir un certain ensemble de nombres, que je nommerai l'ensemble E, à l'aide des considérations suivantes :

« Ecrivons tous les arrangements deux à deux des vingt-six lettres de l'alphabet français, en rangeant ces arrangements par ordre alphabétique, puis, à la suite, tous les arrangements trois à trois, rangés par ordre alphabétique, puis, à la suite, ceux quatre à quatre, etc. Ces arrangements peuvent contenir la même lettre répétée plusieurs fois, ce sont des arrangements avec répétition.

« Quel que soit l'entier p, tout arrangement des vingt-six lettres p à p se trouvera dans ce tableau, et comme tout ce qui peut s'écrire avec un nombre fini de mots est un arrangement de lettres, tout ce qui peut s'écrire se trouvera dans le tableau dont nous venons d'indiquer le mode de formation.

« La définition d'un nombre se faisant avec des mots, et ceux-ci avec des lettres, certains de ces arrangements seront des définitions de nombres. Biffons de nos arrangements tous ceux qui ne sont pas des définitions de nombres.

« Soit u_1 le premier nombre défini par un arrangement, u_2 le second, u_3 le troisième, etc.

« On a ainsi, rangés dans un ordre déterminé, *tous les nombres définis à l'aide d'un nombre fini de mots.*

« Donc : Tous les nombres qu'on peut définir à l'aide d'un nombre fini de mots forment un ensemble dénombrable.

« Voici maintenant où est la contradiction. On peut former un nombre n'appartenant pas à cet ensemble.

« Soit p, la $n^{\text{ième}}$ décimale du $n^{\text{ième}}$ nombre de l'ensemble E; formons un nombre ayant zéro pour partie entière, et pour $n^{\text{ième}}$ décimale $p+1$, si p n'est égal ni à 8 ni à 9, et l'unité dans le cas contraire ». Ce nombre N n'appartient pas à l'ensemble E. S'il était le $n^{\text{ième}}$ nombre de l'ensemble E, son $n^{\text{ième}}$ chiffre serait le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal de ce nombre, ce qui n'est pas.

« Je nomme G le groupe de lettres entre guillemets.

« Le nombre N est défini par les mots du groupe G, c'est-à-dire par un nombre fini de mots; il devrait donc appartenir à l'ensemble E. Or, on a vu qu'il n'y appartient pas.

« Telle est la contradiction.

« Montrons que cette contradiction n'est qu'apparente. Revenons à nos arrangements. Le groupe de lettres G est un de ces arrangements; il existera dans mon tableau. Mais, à la place qu'il occupe, il n'a pas de sens. Il y est question de l'ensemble E, et celui-ci n'est pas encore défini. Je devrai donc le biffer. Le groupe G n'a de sens que si l'ensemble E est totalement défini, et celui-ci ne l'est que par un nombre infini de mots. *Il n'y a donc pas contradiction.*

« On peut encore remarquer ceci : L'ensemble de l'ensemble E et du nombre N forme un autre ensemble. Le second ensemble est dénombrable. Le nombre N peut être intercalé à un certain rang k dans l'ensemble E, en reculant d'un rang tous les autres nombres de rang supérieur à k. Continuons à appeler E l'ensemble ainsi modifié. Alors le groupe de mots G définira un nombre N' *différent de* N, puisque le nombre N occupe maintenant le rang k, et que le $k^{\text{ième}}$ chiffre de N' n'est pas égal au $k^{\text{ième}}$ chiffre du $k^{\text{ième}}$ nombre de l'ensemble E. »

J. Richard,
Professeur au Lycée de Dijon.

Les contradictions que nous signalions précédemment[1] dans la théorie des ensembles, et dont M. J. Richard étudie et éclaircit d'une manière définitive un autre exemple, ont, de nouveau, attiré l'attention de M. Hilbert. C'est un sujet sur lequel il revient dans sa Communication présentée en août 1904 au Congrès de

[1] *Revue* du 30 mars dernier.

Heidelberg, communication qui vient d'être traduite en français par M. Pierre Boutroux[1].

M. Hilbert fait spécialement allusion au paradoxe qui concerne l'« ensemble de tous les ensembles », et qui, en effet, est, au premier abord, assez troublant, du moins s'il est bien spécifié qu'un ensemble ne doit pas se renfermer lui-même comme élément. Faut-il admettre que l'ensemble E, ayant pour éléments tous les ensembles possibles, existe, — puisqu'il suffit, pour constituer un ensemble, d'avoir défini ce qui en fait partie et ce qui n'en fait pas partie?

Faut-il admettre qu'il n'existe pas, puisque, dans le cas contraire, E serait, par définition, un ensemble non contenu dans E?

Nous voilà revenus à Zénon d'Elée.

Pour échapper à ce paradoxe, M. Hilbert, dans la nouvelle théorie qu'il propose, juge nécessaire de changer complètement la définition du mot « ensemble » : il regarde la notion d'un ensemble comme *antérieure* à celle de ses éléments, au lieu qu'elle en soit le résultat. C'est, au moins en principe, une manière d'opérer assurément légitime, comme toutes les conventions. Ce qui est moins évident, c'est l'utilité d'un pareil changement. Il ne nous paraît pas nécessaire, en tout cas, pour éclaircir la contradiction signalée plus haut : celle-ci, à notre avis, relève des remarques de M. Richard, lesquelles ont une portée tout à fait générale et ne doivent pas être perdues de vue dans ces sortes de discussions. Pour former un ensemble avec certains éléments, encore faut-il que ceux-ci existent au préalable. Il ne nous paraît pas douteux qu'une solution tout analogue ne s'applique à l'antinomie de M. Burali Forti[2] sur l'ensemble W de tous les nombres ordinaux. Celui-ci, comme l'ensemble E de tout à l'heure, devrait, en conséquence, être considéré comme non existant[3].

Au reste, il est évident *a priori* qu'un changement dans les définitions n'est pas nécessaire pour réfuter une antinomie, et même qu'il n'y suffit pas à proprement parler. Dans le cas présent, par exemple, la contradiction n'est pas évitée par ce seul fait qu'on a proposé d'étudier des « ensembles hilbertiens » (c'est-à-dire des ensembles définis à la façon de M. Hilbert) : il faudrait encore interdire d'étudier des ensembles définis par la voie classique. Du moment que cette dernière est légitime (ce qui est assurément le cas, puisque c'est une définition nominale), il est clair que, *correctement employée*, elle ne doit conduire à aucune contradiction.

La solution qui consiste à considérer les nombres ordinaux comme existants, mais l'ensemble complet de ces nombres comme non existant, avait été indiquée par M. Hilbert en 1900 au Congrès de Paris, mais sous une forme différente, qui se rattache d'ailleurs au sujet de sa Communication de 1904.

Dans cette dernière, en effet, bien que la question des ensembles tienne, comme nous venons de le voir, une certaine place, l'objet principal est plus général. Il se rattache à un ordre d'idées sur lequel l'auteur a insisté à maintes reprises dans ces dernières années. Pour fonder une théorie mathématique ou logique, M. Hilbert admet qu'il est nécessaire et suffisant de trouver une liste d'axiomes desquels on puisse prouver: 1° Qu'ils sont exempts de contradiction; 2° qu'ils sont indépendants entre eux et suffisent pour raisonner sur la théorie en question. Autrement dit, parmi les divers modes de définition utilisés en Mathématiques, il préconise, à l'exclusion de toutes les autres, les définitions « par postulats ».

On peut contester la légitimité de ce point de vue, et particulièrement l'opportunité de recourir aux définitions par postulats dans les cas où les définitions « nominales[1] » sont possibles, c'est-à-dire où les notions à définir peuvent être construites de toutes pièces à l'aide de notions plus simples. Notons cependant que, même alors, les définitions par postulats ou par axiomes ont une fécondité à laquelle les définitions nominales ne peuvent prétendre, grâce aux généralisations qu'elles permettent.

Pour ce cas de notions « dérivées », l'absence de contradiction entre les axiomes est aisée à vérifier. Il suffit, précisément, d'alléguer la constitution, à l'aide de notions antérieurement acquises, d'un concept satisfaisant à ces axiomes. C'est ce qui arrive pour la Géométrie, que l'on peut construire à l'aide des nombres. Seulement, comme nous venons de le voir, ce cas simple des notions dérivées est aussi, en général, le moins intéressant.

Pour les notions premières elles-mêmes, la difficulté est tout autre et paraissait jusqu'ici insoluble. C'est à elle que s'attaque, cette fois, M. Hilbert.

Cette difficulté, comme dans toutes les démonstrations négatives, réside dans la multiplicité des raisonnements, des combinaisons logiques que l'on peut former avec les axiomes fondamentaux. C'est prévoir, en quelque sorte, la série complète des résultats qui pourront être obtenus par ces combinaisons logiques, que d'affirmer à l'avance que ces résultats ne présenteront pas de contradiction.

Mais, avant tout, il faut commencer par poser la question. Qu'entendrons-nous par *toutes* les combinaisons logiques possibles? C'est, on le sait, un sujet profondément étudié, dans ces dernières années, par toute une école de logiciens, tels que MM. Peano, Russell, etc. Une coordination serait souhaitable, entre les travaux de cette Ecole et les recherches actuelles de M. Hilbert, et l'on peut regretter que, dans la rédaction sommaire qu'il a présentée à Heidelberg, l'auteur n'ait pas eu le temps d'indiquer la concordance entre les deux points de vue. Il est clair, par exemple, qu'il y aurait lieu de savoir si *toutes* les règles de logique, telles qu'elles ont été posées par les auteurs que nous venons de nommer, sont introduites dans les combinaisons logiques dont il s'agit. Au premier abord (*loc. cit.*, p. 94), on est tenté de croire que le seul principe du syllogisme est pris en considération; mais la fin du travail (p. 102) semble indiquer que les choses ne doivent pas être entendues ainsi.

D'autre part, les principes de logique énoncés jusqu'ici sont-ils les seuls qui existent et qui pourront être utilisés par l'esprit humain? Tout ce que nous pouvons dire, c'est que tous les raisonnements — particulièrement tous les raisonnements mathématiques — actuellement construits paraissent reposer sur ces principes seuls. Mais, aussi bien qu'il a pu exister, dans l'histoire de la pensée humaine, une époque où personne n'avait songé à se servir, par exemple, de l'induction complète, il n'est pas absolument évident que l'avenir ne fera pas découvrir quelque autre propriété des notions premières, non réductible à celles que nous connaissons.

Si l'on considère les principes généraux de la Logique déductive comme préexistant aux Mathématiques, M. Hilbert ne peut, on le voit, affirmer l'absence de contradiction de ses axiomes que moyennant un postulat, à savoir l'inexistence de principes logiques encore inconnus. S'il est vrai que cette inexistence est assez

---

[1] *L'Enseignement mathématique*, 15 mars 1905.

[2] *Circolo Mat. di Palermo*, 1897.

[3] C'est par cette voie que le paradoxe de Burali Forti nous paraît devoir être éclairci, et non par celle que propose M. Félix Bernstein (*Math. Annalen*, t. LX, 2e cahier), laquelle consiste à admettre qu'on ne peut pas ajouter 1 au nombre ordinal W. Cette hypothèse n'est pas défendable; à notre avis, l'opération W + 1 est définie par G. Cantor d'une manière tout à fait générale, et cette définition ne souffre aucune difficulté, quel que soit W. — Seulement, l'ensemble W, qui, par hypothèse, était jusque-là le plus général que l'on pût former avec les objets de pensée *d'ores et déjà existants*, cesse de posséder cette propriété après l'introduction du W + 1ième objet.

[1] Voir Couturat : Définitions et démonstrations mathématiques, *Enseignement mathématique*, 15 mars 1905.

probable, on ne peut la regarder, cependant, comme une vérité démontrée.

Mais, en face de l'objection précédente, une autre attitude est possible, et c'est celle-là qu'adopte visiblement l'auteur. Elle consiste à considérer la Logique et la Mathématique comme formant un seul tout, une seule théorie, fondée sur une série d'axiomes dont il reste à établir la non-contradiction.

Dès lors, mis en présence d'un principe nouveau quelconque, on devra, sans distinguer s'il appartient au domaine de la Logique ou de la Mathématique, examiner s'il ne conduit à aucune contradiction lorsqu'on le combine avec les autres propositions antérieurement connues (de Logique ou de Mathématique indistinctement).

A ce point de vue, les raisonnements de M. Hilbert doivent être considérés comme établissant d'une manière complète l'absence de contradiction entre les axiomes de l'Arithmétique. Il en est ainsi, du moins, si, comme il y a lieu de le supposer, il a pu tenir compte de toutes les règles logiques connues, règles que nous sommes convenus, nous venons de le dire, de regarder comme les seules existantes.

Maintenant, que faut-il penser d'un tel point de départ?

Qu'il n'y ait pas de séparation bien tranchée entre la Logique et les Mathématiques, c'est ce qu'on pourra admettre sans difficulté. Mais l'identification qui se trouve établie entre les mots « vrai » et « non contradictoire », ces deux locutions étant en somme considérées comme synonymes, soulèvera peut-être plus d'objections.

En même temps que la communication de M. Hilbert, le compte rendu général des travaux du Congrès de Heidelberg nous apporte le texte définitif de celle de M. König. Celle-ci, concluant (comme nous l'avons dit précédemment) à l'impossibilité de mettre le continu sous forme d'un ensemble bien ordonné, invoquait un théorème de M. Bernstein sur les nombres ordinaux. Dans son texte actuel, l'auteur ne donne plus son résultat que sous forme dubitative, parce qu'il ne considère pas comme démontré, sans contestation possible, le théorème de M. Bernstein.

Il reste donc à considérer comme fondée la conclusion opposée de M. Zermelo, si, du moins, comme nous le ferions pour notre part, on estime que la démonstration de ce dernier n'est pas entamée par les objections dont nous avons parlé dans la *Revue* du 30 mars.

§ 2. — Météorologie

Concours international de prévision du temps (Septembre 1905). — Conformément à son programme, qui se propose non seulement le développement de l'Astronomie et de la Météorologie, mais encore de *provoquer et de faciliter les recherches de tous ceux qui désirent entreprendre des études dans cet ordre d'idées*, et se préoccupant aussi des lacunes de la prévision actuelle du temps, la Société belge d'Astronomie et de Météorologie prend l'initiative d'un *Concours international de prévision du temps*.

Elle fait appel à tous les savants et chercheurs, à quelque nationalité qu'ils appartiennent, et les convie à venir appliquer, sous sa direction, leurs méthodes et procédés quelconques de prévision.

L'organisation de ce concours est assurée par le Bureau de la Société. Le jury d'examen sera international et sera composé de MM. : B. Brunhes, directeur de l'Observatoire météorologique du Puy-de-Dôme; Prof. L. Grossman, météorologiste à la Deutsche Seewarte, à Hambourg; Dr Polis, directeur de l'Observatoire météorologique d'Aix-la-Chapelle; Lawrence Rotch, directeur du *Blue Hill Meteorological Observatory*; L. Teisserenc de Bort, directeur de l'Observatoire de Météorologie dynamique de Trappes; J. Vincent, météorologiste à l'Observatoire royal de Belgique, qui ont bien voulu accepter d'en faire partie.

Ce jury aura à sa disposition un *prix de 5.000 francs* destiné à récompenser l'auteur des prévisions les mieux réussies d'après le programme suivant :

Le concours ne s'applique qu'à la prévision du temps à courte échéance, c'est-à-dire vingt-quatre heures à l'avance.

Les prévisions seront établies d'après les cartes synoptiques que tout bureau central météorologique publie chaque jour; mais, cependant, il sera loisible à chaque concurrent de se servir de toute autre méthode.

L'objectif principal des concurrents sera de déterminer pour le lendemain, c'est-à-dire dans les vingt-quatre heures :

1° Les variations barométriques, en hausse ou en baisse, qui devront se produire à la surface entière de l'Europe;

2° La trajectoire approximative des centres de dépression;

3° L'arrivée ou la disparition des bourrasques et des anticyclones.

Les oscillations barométriques ayant une influence capitale sur l'état de l'atmosphère, leur prévision doit être le but de tout concurrent et l'objectif principal de ce concours.

Le prix sera donc attribué au météorologiste qui aura obtenu dans ce genre de prévisions les meilleurs résultats.

Les concurrents devront s'inscrire au secrétariat de la Société belge d'Astronomie, 15, rue Philomène, à Bruxelles, avant le 1er juillet 1905, où tous renseignements complémentaires leur seront donnés.

§ 3. — Physique

Effets de radiation sur les plaques au gélatino-bromure d'argent. — Les recherches relatives aux effets de radiation des corps organiques et inorganiques sur les plaques photographiques au gélatino-bromure d'argent se multiplient dans ces derniers temps, et des opinions fort divergentes ont été énoncées à ce sujet. Ce qu'il y a de bien établi, c'est qu'une série de bois et de substances ligneuses, ainsi que des corps inorganiques (plusieurs métaux, le peroxyde d'hydrogène, le chlore, le sulfure d'hydrogène, l'ozone, etc.), exercent, sur la couche sensible, un effet analogue à celui des ondes lumineuses, y produisant des impressions susceptibles d'être révélées.

Dans un Mémoire publié dans les *Annalen der Physik* (n° 4, 1905), M. W. Merckens se pose la tâche d'examiner si les réactions en question sont de vrais effets de rayonnement (c'est-à-dire étant dus aux vibrations de l'éther) ou bien des actions purement chimiques. C'est à cette dernière opinion que s'arrête l'auteur, qui les attribue à l'oxygène à l'état naissant, produit par le peroxyde d'hydrogène. Une étude très soigneuse des métaux à l'état de pureté maxima et à surface bien polie a fait voir que l'intensité des effets dépend du caractère électropositif du métal : plus ce caractère est accentué et plus ces effets sont intenses. C'est dire que l'ordre dans lequel les métaux se placent est identique à celui de la série de tensions de Volta; l'auteur explique cette coïncidence par la capacité de former du peroxyde d'hydrogène à l'air, capacité que détermine la position de l'élément dans la série de Volta.

§ 4. — Chimie physique

Détermination de la masse atomique de l'azote. — L'auditoire de choix qui assistait, le 10 juin, à la réunion annuelle que la Société chimique de Paris a coutume d'organiser à l'occasion des congés de la Pentecôte, a écouté avec un très grand intérêt la communication de notre collaborateur, M. Ph.-A. Guye, sur les travaux que le très distingué professeur vient d'achever au Laboratoire de Physico-Chimie qu'il dirige à l'Université de Genève. La *Revue* donnera prochainement le texte détaillé de cette belle conférence, dont