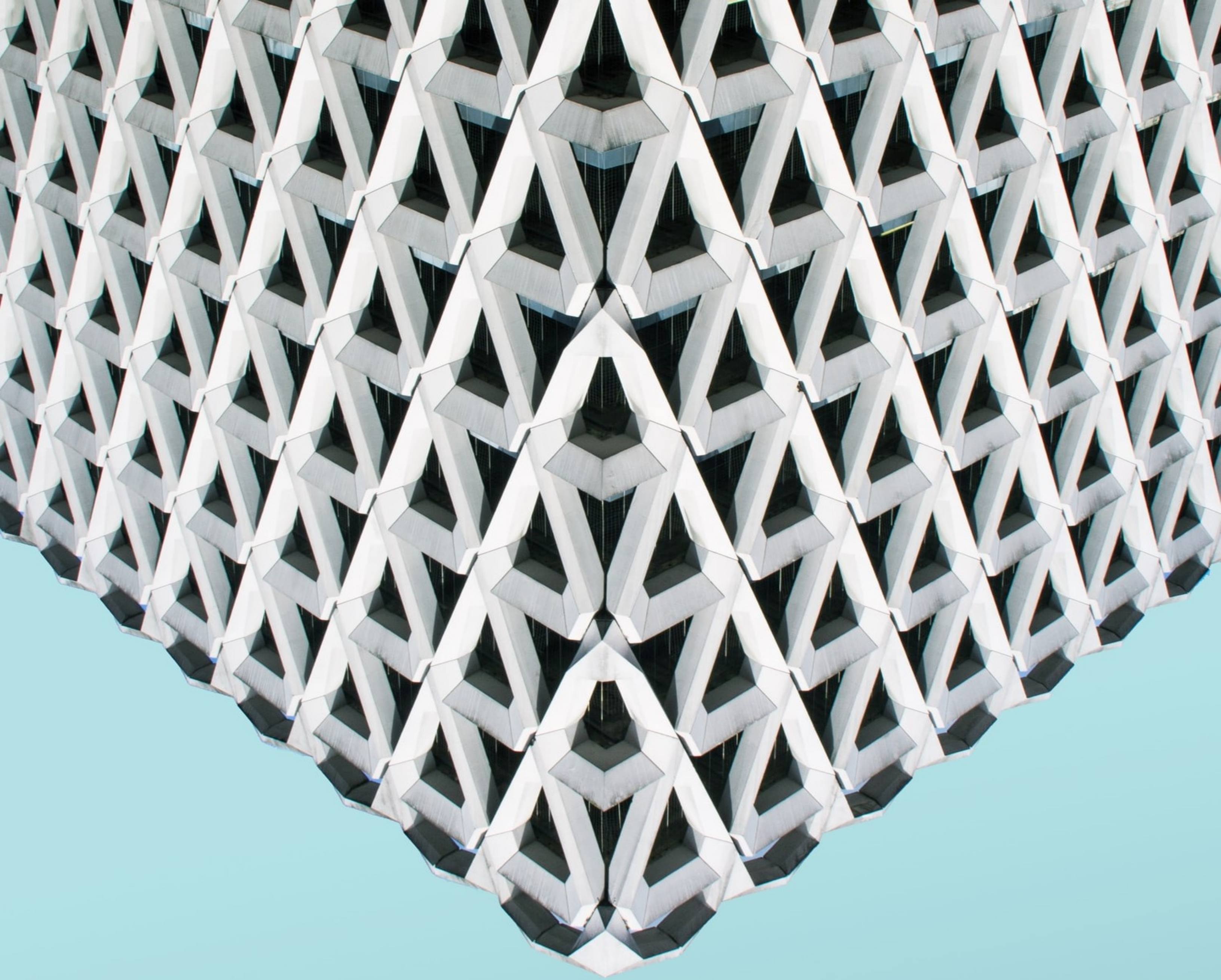


# lógica básica.

## una introducción al arte del razonamiento

---

**Carlos Romero**

(versión parcial de 29 de abril de 2023.)

# ÍNDICE

## I Fundamentos del Análisis Lógico del Discurso

# Prefacio

Como este no es el prefacio final (el cual escribiré cuando tenga la versión final del libro), aquí me gustaría describir el proyecto del libro: las ideas guía y las características que —¡espero!— lo distinguen: las que hacen que valga la pena —o, todavía mejor: que justifican— tener *otro* libro de texto de lógica.

## Ideas guía

Mi impresión es que la mayoría de los libros de texto de lógica cae en uno de dos extremos: o bien, está hecho para lectores con sofisticación matemática, o bien, está hecho para lectores con muy poco entrenamiento matemático. Cada uno de estos extremos tiene sus propios problemas.

**Libros que presuponen sofisticación** El problema más obvio es que son difíciles para quien apenas se está introduciendo al tema. Pero tampoco son muy adeptos a contar las motivaciones filosóficas para adoptar tal o cual formalismo, ni sus limitaciones expresivas, o las perplejidades conceptuales que tienen; ambos problemas tratados en la filosofía y la lógica matemática contemporáneas. A veces nos dejan con la impresión de que la lógica se hubiera desarrollado con total independencia de la filosofía, y hoy fuera un monolito independiente de toda crítica, expansión, o aplicación. Ello está bien si sólo quisiéramos aprender mecánicamente el formalismo. Pero para un entendimiento más profundo, es importante conocer sus motivaciones y limitaciones.

**Libros dirigidos a un público no matemático** El problema con estos libros es que no logran mostrar el contexto matemático más amplio en el que se desenvuelve la lógica contemporánea, ni ayudan a adquirir las herramientas básicas del pensamiento matemático. Pero estas herramientas son muy útiles, y han sido aplicadas, en una enorme cantidad de áreas: no sólo en otras ciencias formales como las ciencias de la computación, o en las ciencias empíricas, de la física a la sociología, sino también a disciplinas humanísticas como la filosofía. En todas ellas existen desarrollos matemáticos que suponen al menos familiaridad con aspectos matemáticos como la noción de *demostración*. Al escribir este libro, mi **ideal regulador**, por decirlo así, ha sido intentar un balance entre ambos enfoques. No intento esto mediante capítulos técnicos o demasiado profundos; más bien, intento explicar en términos llanos algunas motivaciones sistemáticas, y algo del contexto teórico de la lógica en las áreas más amplias de la filosofía y la lógica matemática.

## Aspectos innovadores

Después de revisar varios libros de texto de lógica y matemáticas, me he hecho una idea de qué me gustaría que tuviera un libro de texto.

**«Amigabilidad»** Un libro fácil de *navegar*: una estructura clara, que también nos permita ver la progresión natural de los capítulos: cómo uno lleva al siguiente y cómo este presupone lo aprendido en el anterior. También un texto limpio, bien organizado, que no tema usar simbolismo matemático cuando se requiera, pero que no se exceda en este cuando no es necesario. El balance perfecto requiere ayudas visuales para distinguir distintos apartados, pero que no esté cargado de gráficos que distraen la atención.

**Ejemplos esclarecedores** Ejemplos de la teoría desarrollada en el libro que sirvan para entender tanto el concepto introducido, como la importancia de este en el contexto del capítulo y de la lógica en general.

## Características

Algunas características de este libro que, espero, contribuyen a lograr los objetivos mencionados arriba, son las siguientes.

**Contenidos del capítulo y objetivos de aprendizaje** Esto nos servirá para tener mayor claridad acerca de lo que se estudiará en el capítulo, y de lo que se espera que aprendamos en él. Están al inicio de cada capítulo. Varios todavía no los escribo; todos los revisaré a fondo al tener una primera versión completa del libro.

**Definiciones distinguibles** Las definiciones se formulan en cajas azules para resaltarlas y poder regresar a ellas fácilmente. Estas se ven así:

Definición: Concepto definido

Este es un ejemplo de una definición. Estas van numeradas y me refiero a ellas a lo largo del texto.
Uso una fuente *sans-serif* porque creo que lo hace más atractivo visualmente, y ayuda a evitar la monotonía en el libro.

**Ejemplos distinguibles** Los ejemplos se formulan en cajas naranjas, que se ven así:

**ejemplo**

¡Aquí pongo un ejemplo!
Uso una fuente *sans-serif* porque creo que lo hace más atractivo visualmente, y ayuda a evitar la monotonía en el libro.
La caja tiene que tener una cierta altura mínima, para que el cintillo lateral muestre el título completo.

**Ejercicios distinguibles** Los ejercicios se formulan en cajas naranjas, con una numeración que hace fácil llevar la cuenta, y se ven así:

**Ejercicio #**

Este es un ejercicio. Uso una fuente *sans-serif* porque creo que lo hace más atractivo visualmente, y ayuda a evitar la monotonía en el libro.

**Resúmenes** Al final de cada capítulo, resumiré los conceptos y tesis principales, de manera que el estudiante pueda regresar y leer de nuevo si piensa que no los ha comprendido bien. Me falta escribir casi todos los resúmenes, aunque ya están algunos :)

**Proyectos de fin de capítulo** Aunque me falta diseñar casi todos los proyectos, mi plan es que estos consistan en ejercicios más complejos y demandantes que los ejercicios en el texto principal:

- Pienso brindar un *contexto* o *antecedente*, ya sea histórico, filosófico o matemático (o los tres), que permita entender en dónde se sitúa el problema.
- Me gustaría que la mayoría de estos proyectos consistieran en aplicaciones creativas de la lógica a varias disciplinas (matemáticas, computación, lingüística, filosofía, planeación, diseño de modelos, etc.) así como a la vida cotidiana.
- Sugeriría que se usaran como trabajos de fin de semestre, o como puntos extra en un curso; o para alguna otra evaluación importante.
- Voy a diseñar algunos de estos proyectos para que consistan en una exposición oral.
- También estoy pensando que algunos sean para producir material audiovisual o *web*.

**Secciones opcionales** Además de las cajas de información adicional, incluyo algunas secciones y subsecciones (e incluso un capítulo entero: «Teoría de las relaciones») que regularmente no se exigen en un curso de lógica básica, pero que me han parecido útiles para comprender el contexto de la materia, o complementar alguno de los temas. Están marcadas con un asterisco: «*», y encerradas entre renglones de puntos: . . . . . . . . . . . .

**Apéndices: Lista de símbolos introducidos** Al final del libro pondré una lista de los símbolos introducidos; junto con la página en donde los introduje y su pronunciación usual.

**Apéndices: Lista de definiciones** Además del índice alfabético, que refiere a las páginas donde se mencionan términos importantes, voy a ofrecer una lista de definiciones, que solamente refiere a la definición oficial del término.

**Apéndices: Ejercicios resueltos** Al final del libro resolveré algunos ejercicios, tanto para confirmar el resultado, como para ejemplificar cómo se espera que se resuelvan. Hasta ahora sólo tengo un par resueltos, pero mi objetivo es tener resuelto un 10 % del total de ejercicios.

**Apéndices: Formularios** Al final del libro reuniré en un sólo lugar todas las reglas de proposicional y cuantificacional que veremos.

# Iª PARTE:

# FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS LÓGICO DEL DISCURSO

## capítulo

## 1

# Para qué lógica

## Contenidos del capítulo

## Objetivos de aprendizaje

1. Que comprendas para qué sirve la lógica: por qué es importante y con qué fines se usa la argumentación, en diferentes áreas.
2. Que conozcas la relación de la lógica con el pensamiento crítico y con otras formas de convencimiento.
3. Que conozcas los diferentes usos del lenguaje, y puedas reconocerlos en el discurso hablado y escrito.

Este libro es una introducción a distintos aspectos de la lógica. La lógica, como se dice de otras tantas disciplinas, es una ciencia y un arte. Es una *ciencia* porque es un estudio sistemático y riguroso de un fenómeno concreto: la argumentación correcta (después analizaremos esta noción informal de «correcto»; de hecho, buena parte del libro va sobre eso). Involucra la aplicación de las matemáticas al estudio de este fenómeno, y se relaciona contras ciencias, como la computación teórica y la lingüística. La lógica también es un *arte*, en el sentido de ser una familia de *técnicas* que podemos aprender y utilizar en la vida cotidiana, así como en distintas áreas del conocimiento. Estas técnicas están enfocadas a la creación, identificación y análisis de argumentos correctos. En este libro vamos a revisar varios aspectos de estas dos caras de la lógica. Mientras tanto, sistematicemos lo dicho hasta ahora en nuestra primera definición.

**Definición 1: Lógica**

La lógica es la *ciencia* y el *arte* de la argumentación correcta.

Este primer capítulo tiene una función introductoria y motivadora: para comprender que es la lógica, expondré para qué sirve su objeto de estudio —la argumentación— en distintas áreas, y cómo se relaciona con el pensamiento crítico y con otras formas de convencimiento. También detallaré cómo es que podemos usar el lenguaje con distintos fines, y cómo la argumentación es uno de ellos. En el siguiente capítulo comenzaremos con las definiciones de los conceptos básicos de la lógica.

Como todo este primer capítulo es sobre la argumentación, y como la argumentación no es otra cosa que ofrecer argumentos, es importante tener una noción de *qué es* un argumento. Por ahora, solamente veremos una definición *tentativa* de la noción de argumento (es por ello que pongo una definición sin numerar). Para la definición más exacta requerimos de algunos conceptos especializados. Estos los definiremos en el siguiente capítulo (sección 2.3, definición 4).

**Definición: Argumento *(provisionalmente)***

Un argumento es una serie de ideas, una de las cuales se basa en las demás; es decir, ellas *apoyan* o *justifican* a la otra.

## 1.1. La importancia de la argumentación: sus fines y aplicaciones

Argumentamos con distintos objetivos. Uno de ellos es convencer a otras personas; también convencernos a nosotros mismos, como cuando en nuestra cabeza nos damos razones para hacer o no hacer alguna acción. Podemos querer convencer a alguien no sólo de que haga o deje de hacer algo, sino también de que acepte una idea, o de que rechace alguna. También es posible que queramos sustentar una idea que ya teníamos o que alguien ofrece por algún interés secundario: puede ser algún fin legal, o como primer paso hacia otra acción. Incluso, puede ser por mera curiosidad, por el deseo de *entender* la idea: conocer las bases —los argumentos a favor— de una idea nos permite ver con qué otras ideas se relaciona más cercanamente, pues nos permite ver qué ideas la justifican y con cuáles ella se justifica.

A veces también argumentamos por el mero gusto de discutir. Para algunas personas, debatir es como un deporte que gustan de practicar cada vez que se presenta la oportunidad. Para otras personas, lo importante de iniciar una discusión argumentada es ganarla y sentir la satisfacción de vencer. Aunque esto puede ser divertido, argumentar con el único propósito de demostrar que estoy en lo correcto no me llevará muy lejos: me da un fuerte incentivo para ignorar buenos argumentos, si estos se ofrecen en contra de mi postura, para basar mis ideas en razones muy débiles, y para aceptar ideas disparatadas, si es estas me ayudan a mantener mi postura pase lo que pase.

### 1.1.1. La argumentación en la vida cotidiana

Argumentamos siempre y muchas veces sin darnos cuenta. Solemos argumentar en nuestras discusiones: con nuestros amigos, pareja, familia, o hasta con gente desconocida en el internet. Argumentamos para convencerlos, para defendernos, pero también argumentamos cuando hacemos alguna propuesta, dando razones para que la persona a quien le ofrecemos esa propuesta, la acepte. Argumentamos, también, para explorar las opciones posibles: «si hacemos esto, pasaría esto otro». También argumentamos para poner a prueba algún supuesto: «suponiendo esta idea, se seguiría que ...» Si las consecuencias de tal supuesto son aceptables, no hemos encontrado razón para rechazarlo; pero sí la tenemos cuando encontramos que tales consecuencias no son aceptables.

Dado lo anterior, la argumentación es una parte esencial de la comunicación, del debate, de la curiosidad, y de la toma de decisiones.

### 1.1.2. La argumentación y las matemáticas

Las matemáticas son una ciencia eminentemente argumentativa. Se buscan describir hechos acerca de una estructura abstracta —como un sistema numérico, un tipo de espacio, un tipo de funciones, algún tipo de objeto geométrico, etc.— a partir de suposiciones básicas. Las afirmaciones sobre esta estructura se justifican sólo cuando, partiendo de las suposiciones básicas, existe un argumento particularmente fuerte a su favor: un argumento *deductivo* —una *demostración*— cuya definición vamos a revisar en el siguiente capítulo (definición 9).

Aunque la deducción es el paradigma, la «regla de oro» de las matemáticas, también se usan los argumentos *estadísticos* (por ejemplo, para motivar una conjetura) y los argumentos *abductivos* (por ejemplo, para motivar la adopción de una definición o un nuevo principio).[1] Revisaremos la definición de estos en un capítulo posterior (cap. 16).

### 1.1.3. La argumentación en las ciencias

Las ciencias son aquellas disciplinas cuyos métodos la humanidad ha depurado para encontrar las hipótesis más probablemente verdaderas sobre un tema, un área de la realidad. Al presentar una hipótesis sobre cómo es un fenómeno natural y cómo se explica, un científico no lo presenta como una verdad obvia, sino que ofrece razones para pensar que esa hipótesis es la correcta: ofrece argumentos, típicamente estadísticos, sobre cómo su hipótesis da cuenta de los datos obtenidos en el campo, el laboratorio o el observatorio.

Además de la argumentación estadística, un componente universal del método científico es la deducción. A partir de una hipótesis, se deducen consecuencias que se contrastan experimentalmente. Si las consecuencias de la hipótesis se acercan suficientemente a los resultados reales, la comunidad científica toma seriamente la posibilidad de que la hipótesis examinada describa el fenómeno en cuestión. Cuando las consecuencias confirmadas se acumulan, la hipótesis comienza a aceptarse más ampliamente, hasta llegar a ser parte de la ciencia establecida.

### 1.1.4. La argumentación en la filosofía

Para la filosofía, su propia naturaleza es un problema filosófico (existe la filosofía de la filosofía). Y como, además, existen tradiciones, métodos y presupuestos muy dispares dentro de la disciplina, tenemos que la naturaleza de la filosofía misma es un tema debatido, sobre el cual difícilmente alcanzaremos (al menos a corto plazo) un consenso universal.

Este desacuerdo sobre la naturaleza de la disciplina causa que toda caracterización más o menos acotada de ella esté destinada a ser controvertida entre quienes no compartan suposiciones al menos parecidas a las que tiene quien ofrece tal caracterización. Pero al menos una idea muy restringida es indudable: que la filosofía es una práctica racional. Esto significa que para ejercerla debemos ejercer nuestras capacidades como seres racionales. (Esto, por supuesto, no implica que debamos ejercer *sólo* esas.) A su vez, esto conlleva el que la filosofía tenga como uno de sus principales objetivos el evitar el *dogmatismo*. Por ello, en filosofía se busca ofrecer razones que logren convencer —en lugar de imponer, o de hacer creer con bases no racionales— a otros seres racionales mientras estos ejercen sus capacidades críticas.

## 1.2. La argumentación y el pensamiento crítico

Estrictamente hablando, la argumentación solamente consiste en *ofrecer* argumentos: en repetir los que ya conocemos o en construir nuevos. Pero argumentar es parte de una práctica más amplia: el **pensamiento crítico**. Pensar críticamente no es solamente tener la costumbre de ofrecer argumentos para nuestras afirmaciones: también es solicitarlos —incluso, exigirlos— cuando alguien nos comunica una idea. Pensar críticamente es preguntar «*¿por qué?*» y estar dispuestos a ofrecer una razón cuando nos lo preguntan.

Solicitar argumentos nos hace *agentes* en la formación de nuestras creencias y nuestra personalidad. Es decir, nos da un papel *activo*, *constructivo*; de manera que no nos reduzcamos a meramente recibir la información que nos llega. Para ello, debemos ser capaces de *cuestionar* la información que recibimos por todos los medios que tenemos a nuestra disposición: debemos ser capaces de preguntar sobre las bases, las fuentes, las evidencias, las razones, los argumentos sobre los que se basan las ideas, las propuestas y sugerencias.

Obviamente, usar el pensamiento crítico no significa preguntar «*¿por qué?*» frente a *cualquier* asunto. A veces nos enfrentamos con cuestiones sin importancia y no tenemos tiempo para lidiar con ellas, o interés. A veces, incluso, no está justificado hacerlo: a veces no hay una buena razón para solicitar un argumento. Por ejemplo, si alguien me dice que le gusta el helado de chocolate, ¿qué razón podría dar para ello? Parece que exigirle una razón de su gusto es exigirle algo que está fuera de lugar.

En otros casos, la actitud crítica se utiliza como máscara para negarse a aceptar la evidencia. Algunos negacionistas del cambio climático, por ejemplo, se dicen «escépticos» del consenso científico. Pero en casos como esos, preguntar «¿por qué?» cuando la evidencia está disponible para quien quiera revisarla, es, en realidad, una manera de disfrazar una negativa a aceptar lo que, por todo lo que sabemos, es un hecho.

Entonces, el pensamiento crítico no solamente es pedir y ofrecer argumentos. También es saber *cambiar de punto de vista* cuando los argumentos que conocemos son *buenos* argumentos; cuando las hipótesis que antes solamente concebíamos resultan estar basadas en la evidencia.

Así, como una primera aproximación, pensar críticamente es estar conscientes de *revisar* la información que se nos proporciona, y las creencias que tenemos, para considerar cuáles de ellas deben *examinarse* con más cuidado; también es la capacidad de *cambiar de opinión* cuando las razones para hacerlo son buenas; finalmente, también consiste en la capacidad de evaluar los argumentos, razones y evidencias sobre las que se basan nuestras creencias y las de otros.[2]

Para poder aceptar aquello para lo que existen buenos argumentos, requerimos una metodología clara y bien probada para poder determinar cuándo un argumento es bueno y cuándo no. De eso, precisamente, va la enorme mayoría de las técnicas lógicas que revisaremos en este libro: son modelos formales que nos permiten tener una metodología clara, cuya efectividad puede ser revisada y comprobada con exactitud.

### 1.2.1. La prudencia y «ser una persona lógica»

Nada de todo lo anterior significa que, para seguir las reglas de la lógica, *siempre* tengamos que estar ofreciendo, encontrando, evaluando o criticando argumentos. Hay veces en que puede valer la pena simplemente poner la lógica entre paréntesis. Como mencioné antes (sección 1.2), a veces nos dejamos convencer por el miedo o la lástima. Y eso puede estar bien: para actuar como personas inteligentes no se requiere que seamos robots. A veces actuar bajo el miedo o la compasión puede estar justificado.

Alguna vez vi un meme que contenía la escena de una película, donde un hombre le declara a una mujer: «Te amo». Ella responde algo como: «¿Tienes evidencia empírica que sustente tu afirmación?»[3] El meme es gracioso precisamente por lo absurdo de la respuesta. En ciertos tipos de interacciones preferimos basarnos en la confianza que exigir evidencias y razones. Y eso está bien: «ser una persona lógica» —es decir, tener una habilidad bien pulida para aplicar las técnicas de la lógica— no significa ser un robot. Claro que el otro extremo es creer cualquier afirmación, por más disparatada que sea, que nos diga una persona cercana. La virtud de «ser una persona lógica» también incluye una habilidad prudencial: saber en qué momentos se requiere solicitar, o exigir, evidencias y razones, y en qué otros momentos es mejor confiar en la otra persona, o incluso simplemente asentir con la cabeza y dejarlo pasar sin más.

Un ejemplo de esto último pueden ser las discusiones sobre creencias políticas y religiosas. En algunos casos es muy importante solicitar un fundamento racional, o incluso exigirlo con firmeza (por ejemplo, cuando se trata de una autoridad pretendiendo imponer algún programa de dudosa cualidad científica, o de un familiar convaleciente que piensa abandonar una terapia basada en evidencia por alguna pseudocientífica). En otros, como cuando, en la cena familiar de fin de año, algún tío suelta alguna *boutade* sin importancia, proveniente de algún dogma religioso o político sin justificación, probablemente sea mejor dejarlo pasar.

Esta habilidad prudencial es una habilidad general de la vida —saber en qué vale la pena usar nuestro tiempo y energía, digamos— pero, como puedes ver, acabo de intentar convencerte de ello mediante argumentos: mediante el uso de nuestras capacidades lógicas.

### 1.2.2. El principio de caridad

Poder interpretar un fragmento de discurso bajo el *principio de caridad* significa intentar entender tal discurso de manera que resulte ser lo más razonable posible, dentro de los límites de la interpretación adecuada. Con ello, evitamos caricaturizar las ideas que estamos interpretando.

«Intentar entender tal discurso de manera que resulte ser lo más razonable posible» significa dar por sentado que la persona que lo emitió es una persona suficientemente inteligente como para ofrecer la opción más inteligente de los mensajes que podría haber transmitido con sus palabras. Por otro lado, hacerlo «dentro de los límites de la interpretación adecuada» significa hacerlo sin forzar el mensaje de nuestro interlocutor: sin atribuirle ideas que ciertamente no expresó.

Usando las palabras de Baggini y Fosl,[4] tendríamos este resumen:

> Cuando hay diferentes traducciones que podrían explicar razonablemente el discurso o el comportamiento de un individuo, el que debe elegirse por encima de los demás es (*ceteris paribus*) el que lo hace más racional en las circunstancias relevantes.

Como un medio entre dos límites —el de atribuirle a nuestro interlocutor ideas que claramente no quiere decir, y el de atribuirle la versión más débil (menos defendible) de las posibles ideas que podría estar expresando— este principio es parte de una buena práctica del arte de la lógica, y forma parte de lo que significa ser «una persona lógica».

### 1.2.3. Las máximas de Grice para la comunicación

Para aplicar la lógica a la argumentación necesitamos *entender* lo que otra persona nos comunica. Además, parte de usar el pensamiento crítico es comunicar nuestras ideas con claridad, de manera que las razones que tenemos para ellas puedan quedar claras.

H.P. Grice, un filósofo americano del siglo XX, propuso que existen cuatro *máximas* —cuatro reglas— que permiten la existencia de la comunicación entre los seres humanos (Grice 2005/1975). A su vez, estas máximas son la manera en que realizamos lo que Grice llamó el **principio de cooperación**: si un grupo de personas establecen una interacción verbal, van a cooperar entre sí para entenderse y ser entendidos. Vamos a revisar estas máximas ahora, y explicaremos su significado.

**Máxima de cantidad** Esta máxima se refiere a la cantidad de información que damos, y se descompone en dos:

**I** Da tanta información como sea necesaria.

**II** No des más información de la que sea necesaria.

**Máxima de calidad** Esta máxima se refiere a la *calidad* de la información que damos, en dos sentidos:

**III** No digas nada que creas que es falso.

**IV** No digas nada si no tienes pruebas suficientes de su veracidad.

**Máxima de pertinencia o relevancia** El nombre y la máxima son auto-explicativos:

**V** Sé relevante.

**Máxima de modo o manera** Esta máxima se refiere a la claridad y exactitud con la que hablamos, y se descompone en estas cuatro:

**VI** Evita la oscuridad en la expresión.

**VII** Evita la ambigüedad.

**VIII** Sé breve.

**IX** Sé ordenado.

El objetivo de Grice era *describir* los patrones que seguimos para intentar llevar a cabo una buena práctica comunicativa: él no buscaba *normar* esa práctica. Sin embargo, es de notar que estas prácticas codifiquen lo que solemos entender por una *buena* práctica comunicativa. Así que ahora que las conoces, un buen consejo es intentar seguirlas siempre que sea posible, con el objetivo de lograr comunicar tus ideas de manera eficiente.

**Ejercicio # 1**

Para cada máxima de Grice, brinda tres ejemplos en los que no se cumpla. Estos ejemplos pueden ser breves narraciones que inventes, o vínculos a un video en el que suceda cada uno de estos casos (en cada caso, di en qué minuto empieza y termina la interacción que es un ejemplo de ello), o citas de un libro, periódico o revista (digitales o físicos) que lo ejemplifiquen (recuerda brindar la referencia de donde lo tomaste).

## 1.3. La argumentación y otras maneras de convencer

Ofrecer argumentos es una manera de intentar convencer: es intentar convencer *mediante razones*. Por ello, argumentar supone que la otra persona es una persona *racional*: que tiene la capacidad y el interés de entender otros puntos de vista, y de considerar las razones a favor y en contra de su punto de vista y de los demás.[5]

Pero argumentar no es la única manera de intentar convencer. También puedo intentar convencer a alguien mediante amenazas: «Si no me crees, te golpearé», o «Si no haces lo que digo, te quito tu empleo». Por supuesto, al decir esto —en lugar de realmente *golpear* o *despedir*— también se ofrecen razones: se ofrece una idea con la que se pretende justificar otra. Sin embargo, estas ideas apelan al miedo —te hacen saber que, si no lo haces, te dañarán— y no a la capacidad que tenemos de comprender fundamentos y evidencias objetivos.

También somos capaces de convencer, y de ser convencidos, apelando a la compasión, o incluso mediante la lástima. A veces la mera humanidad nos convence de ayudar a alguien o de realizar alguna acción. Estas acciones pueden estar justificadas, en un sentido tanto ético como racional: si una persona en una situación muy difícil me pide ayuda, y tengo los recursos —de tiempo, de dinero, o los que se requieran— para ayudarle, exigirle que me de algún argumento no me hace más racional. Es decir: esa forma de convencerme no me exige el uso de la razón (más allá de entender lo que me dice), pero actuar debido a la empatía y la amistad no necesariamente es ser irracional —a veces, incluso, es un deber ético.

Por supuesto, esto no significa que actuar movido por las emociones no sea es irracional. A veces *sí* lo es. Podemos tomar una decisión apresurada, sin prever sus consecuencias o considerar las alternativas, debido al miedo, la lástima, u otras emociones. A veces nos intentan convencer de creer en algo o de realizar alguna acción manipulando esas emociones. En esos casos, el pensamiento crítico sí requiere que examinemos la circunstancia con calma y cuidado, y que exijamos una razón que no se base en la manipulación.

Otra forma de intentar convencer que tradicionalmente se opone al convencimiento mediante argumentos es la *retórica*. Aunque la retórica tiene una historia muy larga y existen hoy en día diferentes tradiciones en ella, consideraremos la definición que ofrecen dos fuentes autoritativas sobre el tema.[6] En su *Diccionario de retórica y poética*, Beristáin define a la retórica como:

> Arte de elaborar discursos gramaticalmente correctos, elegantes y, sobre todo, persuasivos. Arte de extraer, especulativamente, de cualquier asunto, una construcción de carácter suasorio.

Por otro lado, en el diccionario de Vega Reñón y Olmos Gómez encontramos que:

> La historia de la retórica es una historia discontinua e indefinida con tensiones entre dos usos del término: uno general, como arte de la persuasión (su polo argumentativo u oratorio) [...]; y otro más restringido, como arte de hablar bien (su polo literario u ornamental) [...] Entre ambos polos ha habido siempre una constante oscilación y hoy asistimos al último capítulo de esa tensión entre una taxonomía de las figuras del buen discurso y una pragmática del discurso eficaz.
>
> Por tanto, la retórica ha codificado durante siglos la argumentación persuasiva como arte de usar bien el lenguaje (*ars bene loquendi*) y con eficacia en

un discurso al dirigirse a un auditorio.

Como he mencionado, tradicionalmente, la lógica se opone a la retórica: mientras una intenta convencer, primordialmente, mediante argumentos cuya estructura y contenido siga pautas bien delimitadas y sistematizadas, la otra intenta convencer, primordialmente, mediante la persuasión del discurso elegante. En muchos casos, estos fines se contraponen: un discurso lógicamente impecable puede tener nulas cualidades estéticas, y un discurso de bellos ornamentos puede realizar argumentos que fácilmente se diagnostican como falacias desde un punto de vista lógico. Pero eso no significa que esto suceda necesariamente: grandes figuras de la filosofía y la literatura han escrito ensayos combinando ambas virtudes; por lo que no se debe pensar que la exactitud y el rigor lógico están necesariamente peleados con el buen estilo.

Así, la lógica y la retórica se diferencian por los fines que persiguen: en cómo buscan persuadir. Estos modos de persuadir, a su vez, pueden usarse con distintos objetivos. Parte del pensamiento crítico consiste en saber distinguir en qué casos el uso de la retórica oculta una argumentación deficiente, que debe examinarse lógicamente, y no dejarse convencer si no hay buenas razones para ello.

**Ejercicio # 2**

Brinda:

- Dos ejemplos de intentos de convencer mediante un argumento,
- dos ejemplos de intentos de convencer mediante la apelación al miedo,
- dos ejemplos de intentos de convencer mediante la apelación a la compasión,
- dos ejemplos de intentos de convencer mediante la retórica.

Estos ejemplos pueden ser breves narraciones que inventes, o vínculos a un video en el que suceda cada uno de estos casos (en cada caso, di en qué minuto empieza y termina la interacción que es un ejemplo de ello), o citas de un libro, periódico o revista (digitales o físicos) que lo ejemplifiquen. En estos casos, recuerda brindar la referencia de donde lo tomaste.

## 1.4. La argumentación y la comunicación: Los usos del lenguaje y los actos de habla

El lenguaje —escrito, hablado o pensado— se usa de muchas maneras y con muchas finalidades. Será útil distinguir estas finalidades, y clasificar a los tipos de discurso, para poder entender a la comunicación lingüística, dentro de la cual se enmarca la práctica de la argumentación.

### 1.4.1. Usos del lenguaje

Ahora veremos una clasificación de tres grandes tipos de usos del lenguaje; esta clasificación, aunque es muy idealizada y no completamente fina, nos servirá para poner a la argumentación en contexto. La fuente principal de esta clasificación, que ha sido adoptada en muchos otros libros de texto, es el clásico de Copi y Cohen.[7] Ellos distinguen tres usos del lenguaje, que ahora expondré.

**Discurso informativo** Es el lenguaje que se usa para transmitir *información*, de cualquier tipo y calidad. Como ejemplos, tenemos a los reportes científicos, a las reconstrucciones históricas, o cuando en el habla cotidiana relatamos un suceso o brindamos datos acerca de un lugar. El caso paradigmático de discurso informativo se da en la emisión de *enunciados declarativos*.

**Discurso expresivo** Es el lenguaje que se usa para *mostrar* o *provocar* sentimientos. Aunque ciertamente el lenguaje expresivo transmite cierto tipo de información, lo que lo distingue del discurso informativo es que su función principal no es transmitir información *factual*: que pueda o no ser verdadera, sino comunicar o causar sentimientos. El caso paradigmático de discurso expresivo se da en la emisión de *enunciados exclamativos*, que no son ni verdaderos ni falsos.[8]

**Discurso directivo** Es el lenguaje que se usa para causar o impedir acciones. Se suele usar cuando realizamos órdenes y peticiones; estas, como las oraciones exclamativas, no son ni verdaderas ni falsas. El caso paradigmático de discurso informativo se da en la emisión de *enunciados imperativos*.

Como los mismos Copi y Cohen notan (pp. 85-89), es claro que esta distinción *no* es *exhaustiva*: hay usos del lenguaje que no caen definitivamente en una u otra. Tampoco es *exclusiva*: hay usos del lenguaje que caen bajo dos, o quizá hasta tres, de los tipos; en cierto grado, al menos.

Sobre la exhaustividad, parece sencillo pensar maneras de usar el lenguaje que merezcan su propia clasificación, pues no caben cómodamente en ninguno de los usos anteriores, aunque comparten algunas características importantes entre sí. La primera es el discurso *inquisitivo*.

**Discurso inquisitivo** Es el lenguaje que se usa para solicitar información y hacer preguntas. Estas, como las oraciones exclamativas e imperativas, no son ni verdaderas ni falsas. (Lo que es verdadero o falso es la *respuesta* a una pregunta.) El caso paradigmático de discurso inquisitivo se da en la emisión de *enunciados interrogativos*.

Copi y Cohen incluyen a la argumentación dentro del discurso informativo, pero no es claro que ello sea así. Una propuesta es separar ambos tipos de discurso: en el informativo, la finalidad es describir un suceso o un objeto, transmitir información sobre algún particular.[9] En el que podemos llamar «el uso *argumentativo*», la finalidad es proveer razones para una idea específica.

**Discurso argumentativo** Es el lenguaje que se usa para proveer argumentos a favor de una idea. Los argumentos no son ni verdaderos ni falsos, pero están compuestos de ideas que sí pueden serlo. El caso paradigmático de discurso argumentativo se da en la emisión de *razonamientos.*

Podrían haber más usos del lenguaje que sea útil definir. (Por ejemplo, usar el lenguaje para narrar una historia ficticia, ¿es un uso informativo? A final de cuentas, la ficción no se usa con la finalidad de *informar* sobre un hecho en el mundo, sino con la finalidad de *hacernos imaginar* un mundo distinto.) Pero esto merecería una discusión más detallada, en otro lugar.

Hay que notar que la clasificación se hace con base en las *intenciones* (los fines, los objetivos) con las que se usa el lenguaje por parte de los emisores. Las intenciones son algo que está en la cabeza, un evento psicológico; pero las podemos reconocer debido a, por ejemplo, el **contexto** —la circunstancia en la que estamos, de la cual compartimos información— y la *forma gramatical* de los enunciados.

Aunque ambas maneras son *falibles* —pueden fallar en ciertas circunstancias—, son buenas guías. Así, es usual suponer que:

- El discurso informativo se expresa mediante oraciones declarativas;
- el discurso expresivo se expresa mediante oraciones exclamativas; y
- el discurso directivo se expresa mediante oraciones imperativas.

Como he dicho, estas correspondencias a veces no se dan. El siguiente fragmento de un poema de Díaz Castelo,[10] por ejemplo, consiste exclusivamente de afirmaciones declarativas, pero es obvio que su finalidad es expresiva:

> Creo firmemente
> en los elementos de la tabla periódica,
> con sus nombres de santos,
> Cadmio, Estroncio, Galio,
> en su peso y en el número exacto de sus electrones.
> Creo en las estrellas porque insisten en constelarse
> aunque quizá estén muertas.
> Creo en el azar todopoderoso, en las cosas
> que pasan por ninguna razón, a santo y seña.
> Creo en la aspiradora descompuesta,
> en las grietas de la pared, en la entropía
> que lenta nos acaba. Creo
> en la vida aprisionada de la célula,
> en sus membranas, núcleos, y organelos.

Creo porque las he visto en diagramas,
planeta deforme partido en dos
con sus pequeñas vísceras expuestas.

Como otro ejemplo, alguien puede usar el lenguaje con una intención directiva sin emitir una oración imperativa. En el contexto de una cena familiar, mientras sacas tu cajetilla de cigarrillos y te dispones a encender uno, tu pareja te dice: «La gente educada no fuma en la mesa». Aunque es una oración declarativa, es claro cuál es la intención de tal aseveración: una intención directiva. Esto es, al mismo tiempo, un ejemplo de cómo el *contexto* en el que se usa ese lenguaje puede ayudarnos a distinguir con qué *objetivo* se lo está usando.

A final de cuentas, lo importante de diferenciar los usos del lenguaje es lo siguiente: al hacer un análisis lógico, nos enfocaremos en el uso *argumentativo* (y, por consecuencia, *informativo*) del lenguaje. Es cuando alguien se propone argumentar que tiene sentido aplicar el análisis lógico de los argumentos.

## Ejercicio # 3

Ⓘ Para cada uno de los siguientes 10 casos di de qué tipo de discurso se trata. Si piensas que se requiere más contexto para saberlo, dilo.

1. Cebolla, luminosa redoma, pétalo a pétalo se formó tu hermosura, escamas de cristal te acrecentaron y en el secreto de la tierra oscura se redondeó tu vientre de rocío. Bajo la tierra fue el milagro y cuando apareció tu torpe tallo verde, y nacieron tus hojas como espadas en el huerto, la tierra acumuló su poderío mostrando tu desnuda transparencia, y como en Afrodita el mar remoto duplicó la magnolia levantando sus senos, la tierra así te hizo, cebolla, clara como un planeta, y destinada a relucir, constelación constante, redonda rosa de agua, sobre la mesa de las pobres gentes.[11]
2. La mantarraya o manta gigante (*Manta birostris*) es una especie de elasmobranquio del orden Myliobatiformes.[12]
3. Disculpa, ¿qué hora tienes?
4. ¡A mi no me vas a venir a decir qué hacer, o qué pensar, sobre todo si tú mismo no sabes qué hacer de tu vida!
5. ¿Qué hay que hacer si uno ve un animal en peligro de extinción comiendo una planta en peligro de extinción?
6. El 29 de noviembre de 1873, Cantor envió una carta a Dedekind preguntando si la colección de números naturales y la colección de números reales positivos «pueden corresponder para que cada individuo de una colección corresponda a uno y solo a uno de los demás», a lo que Dedekind respondió escribiendo que no conocía la respuesta, agregando sin embargo que la pregunta no tenía mucho interés práctico.[13]

7. ¡Ah, qué bellos paisajes se pueden contemplar en aquéllas montañas, durante los días más claros del verano!
8. Para cada uno de los siguientes 10 casos, di de qué tipo de discurso se trata.
9. ¿Contar una historia de ficción contará como uso descriptivo?
10. ¿Por qué cuando una persona tiene la razón hay que dársela? ¡Ya la tiene! Sería mejor dársela cuando no la tenga.

(II) Para cada uno de los usos del lenguaje (informativo, expresivo, directivo, inquisitivo y argumentativo), da 4 casos que lo ilustre. Estos ejemplos pueden ser breves narraciones que inventes, o vínculos a un video en el que suceda cada uno de estos casos (en cada caso, di en qué minuto empieza y termina la interacción que es un ejemplo de ello), o citas de un libro, periódico o revista (digitales o físicos) que lo ejemplifiquen (recuerda brindar la referencia de donde lo tomaste).

### 1.4.2. Los tipos de actos de habla

El filósofo inglés John L. Austin (1911-1960) propuso una teoría de los actos de habla en su libro *Cómo Hacer Cosas con Palabras*.[14] Vamos a revisar sus conceptos básicos, resumidos en la siguiente definición.

**Definición 2: Enunciado**

Un *enunciado* es la acción de emitir una oración en un contexto específico.

Así, Austin y la pragmática entienden al enunciado como una emisión en un contexto: una serie de sonidos transmitidos en un lugar y momento específicos, digamos. Con los enunciados, expresamos lo que en gramática se llama *oraciones*. Y la particularidad de los enunciados es que constituyen *acciones*. Estas acciones se pueden clasificar en dos grandes tipos, como se ve en el cuadro 1.1.

| **Tipo** | **Características** |
|---|---|
| Constatativos | Se utilizan para *constatar*, es decir, para reportar o describir hechos. Su característica esencial es que pueden ser verdaderos o falsos. |
| Realizativos o «performativos» | Se utilizan para realizar una acción adicional al mero enunciar. No son ni verdaderos ni falsos. |

Cuadro 1.1: Clasificación de los enunciados por el tipo de acción que constituyen.

Entonces, las acciones que consisten en meramente describir un hecho, son los enunciados constatativos. Las acciones que se realizan al momento de enunciar una oración, y que no son descripciones, son los realizativos. Estas acciones son tales como *jurar*, *comprometerse*, *apostar*, *bautizar*, etcétera. Austin daba los siguientes ejemplos (Austin 1962/1981, p. 46):

- «Sí, juro (desempeñar el cargo con lealtad, honradez, etc)», expresado en el curso de la ceremonia de asunción de un cargo.
- «Bautizo este barco *Queen Elizabeth*», expresado al romper la botella de champaña contra la proa.
- «Lego mi reloj a mi hermano», como cláusula de un testamento.
- «Te apuesto cien pesos a que mañana va a llover».

De nuevo: en estos actos, el mero enunciar algo constituye una acción distinta del enunciar: «Te apuesto cien pesos a que mañana va a llover», además de enunciar la oración, constituye la acción de apostar. Si te digo: «Te prometo que leeré todos los libros que he comprado», además del enunciado, he realizado la acción de prometer. Mi enunciado *realiza* la acción: no se requiere nada más. A diferencia de estos, los enunciados constatativos no realizan ninguna acción más que el enunciar la descripción de un hecho.

Como lo dice su definición, los enunciados realizativos no son ni verdaderos ni falsos, pues no se enuncian para describir un hecho, y solamente las descripciones pueden ser verdaderas o falsas: si una descripción se ajusta al hecho, es verdadera; si no describe al hecho como sucedió, es falsa. Pero los realizativos no describen, sino que realizan otra acción. Sin embargo, así como los constatativos pueden ser o verdaderos o falsos, para los realizativos existe un criterio de corrección, una forma de saber cuándo un realizativo está «bien» o «mal».

Ningún ejemplo mejor que el de Austin: para apostar, no basta con que uno diga «Te apuesto que ...» Se requiere que ese enunciado se de en las circunstancias apropiadas. Es difícil caracterizarlas en lo general, pero podemos ejemplificar un caso en el que *no* se dan: «el caso de la persona que anuncia su apuesta cuando la carrera ya ha terminado» (Austin 1962/1981, p. 55). Si cuando ya todos vimos quién gano la carrera, yo te digo «Te apuesto que ganará *él*» (señalándote al ganador), obviamente nadie aceptaría que he realizado una apuesta: nadie me tomaría en serio. En esos casos, no es que el realizativo sea falso, sino que tiene una propiedad parecida, que Austin llama «infortunio»: un realizativo es *desafortunado* cuando no se de dan las condiciones apropiadas para que, al enunciar la oración, se realice la acción. Por ejemplo, si yo le digo a un par de amigos: «¡Los declaro marido y mujer!», pero yo no soy un juez, mi enunciado *no* realiza la acción de casarlos, sino que es desafortunado.

## Ejercicio # 4

(I) Para cada uno de los siguientes enunciados, si es constatativo, indica que solamente describe un hecho; si no lo es, indica qué acción se ejecuta con ellos.

| **Enunciado** | **Acción** |
|---|---|
| Ayer compramos la despensa para todo el mes. | |
| Si me vuelves a insultar, me largo de esta casa. | |
| Cómpreme una pintura, no sea malo. | |
| El número atómico de un elemento químico es el número de protones que tiene cada uno de sus átomos. | |
| Los declaro marido y mujer. | |

(II) Brinda tres ejemplos de enunciados constatativos y tres de enunciados realizativos.

(III) Los siguientes ejemplos de enunciados realizativos, ¿son afortunados, en el sentido específico de Austin?

| **Enunciado** | **¿Es afortunado?** |
|---|---|
| Si no me atiendes bien, te corro. [*Dicho por un cliente al cajero de un supermercado.*] | |
| Mañana te pago, prometido. [*Dicho por una persona a su acreedor.*] | |
| Como nuevo presidente de este país, cumpliré mi cargo con honestidad. [*Dicho por una persona que no ha sido electa como presidente de este país, pero por un error piensa que sí.*] | |
| Si no me pagas lo que me debes, te atendrás a las consecuencias. [Dicho por alguien a quien no le debes nada.] | |
| Mediante este anuncio, retiro mi candidatura presidencial. [Dicho por una persona que sí era candidata presidencial.] | |

DD

## Resumen del capítulo

- ★ La lógica es la ciencia y el arte de la argumentación correcta.
- ★ Argumentamos con fines distintos, como: convencer, fundamentar una idea, comprender sus relaciones con otras ideas, y por el mero gusto de debatir.
- ★ La argumentación forma parte de la vida cotidiana, pero también es esencial en las ciencias y en la filosofía.
- ★ La argumentación es parte esencial del pensamiento crítico, el cual también requiere rasgos y habilidades como la prudencia, saber utilizar el principio de caridad (entender tal discurso de manera que resulte ser lo más razonable posible), y seguir las máximas de Grice para la comunicación.
- ★ Además de la argumentación, hay otras formas de convencer, como el convencimiento mediante amenazas, miedo, compasión o lástima, o mediante la retórica. Lo distintivo del convencimiento mediante la argumentación es que se hace mediante razones.
- ★ Existen diferentes usos del lenguaje, que se separan mediante las intenciones con las que se utiliza en un contexto. Encontramos, al menos: el uso informativo, el expresivo, el directivo, el inquisitivo, y el argumentativo. Una guía confiable (pero no definitiva) para distinguir los primeros tres es mediante la forma gramatical.

## Notas

1. Los argumentos probabilísticos en las matemáticas puras ya fueron sugeridos desde Gauss. Los grandes padres de la lógica contemporánea, Russell y Gödel, fueron muy explícitos sobre el papel de la abducción en la adopción de nuevos axiomas matemáticos (Gödel 1990 [1947]: pp. 476-7; Russell & Whitehead 1910: pp. 59 y 62). Tao (medalla Fields 2006) tiene una breve introducción en su *blog* al tema de las heurísticas probabilísticas en la teoría de números (Tao 2012).

2. *Cf.* Bowell & Kemp (2005): pp. 1-9; Cederblom & Paulsen (2011): pp. 1-8; Woods & Irvine & Walton (2004): p. 5. Edmund Dudley (Dudley 2019) sugiere los siguientes cuatro elementos como componentes centrales del pensamiento crítico:

    1. *La creencia de que la información que se nos proporciona no siempre debe aceptarse al pie de la letra.* En muchos casos, es aceptable —e, incluso, ética e intelectualmente obligatorio— cuestionar, preguntar sobre las bases y fuentes.
    2. *La idea de que hay una diferencia entre comprender y entender.* Dudley hace una diferencia entre comprender el lenguaje y comprender de manera superficial un texto o un discurso, y entender el panorama más amplio. Pensar críticamente requiere no solamente entender cada fragmento de

información, sino saber integrarlo en una visión amplia.

3. *La conciencia de que estamos rodeados de información y desinformación.* Esta conciencia es el primer paso, pero también se requieren habilidades para poder tratar con la desinformación.
4. *La convicción de que la comprensión se mejora no solo al obtener respuestas, sino también al formular nuevas preguntas.*

3. Este es el meme:

4. Baggini & Fosl, 2010: p. 115; mi traducción.

5. Existe una discusión muy amplia en la epistemología y la psicología del razonamiento sobre hasta qué punto somos racionales, o podemos serlo. Desde hace varias décadas se sabe que nuestra mente tiene recursos acotados (por ejemplo, en su capacidad de memoria a corto plazo), y por ello, algunos psicólogos y filósofos han buscado teorías de la racionalidad que no requieran idealizar demasiado nuestras capacidades cognitivas. Sin embargo, lo que la evidencia empírica indica es que, en muchos contextos (sobre todo cotidianos) usamos *heurísticas* o reglas flexibles que nos llevan a conclusiones de manera solamente probable. Pero esto no implica que no seamos racionales, o que no podamos utilizar los métodos de la lógica deductiva o de la probabilidad para razonar; no lo implica porque de hecho lo hacemos, en contextos de rigor académico y fuera de ellos. Nuestra racionalidad está, de acuerdo con esta literatura, acotada: en algunos casos es más rápida que confiable. Pero aún así somos racionales. En un capítulo posterior hablaré más sobre los *sesgos cognitivos* y su relación con la teoría de las falacias. Mientras tanto, esto nos lleva a un interesantísimo debate que, por su amplitud, no puedo tratar más aquí. Ver Gigerenzer & Selten 2011, Goldman 1986, y Kahneman 2012.

6. Ver Beristáin 1995: p. 421 y Vega Reñón & Olmos Gómez 2011: p. 522.

7. Copi & Cohen (2013): pp. 83-85.

8. De hecho, se debate si los enunciados exclamativos expresan o *presuponen* proposiciones (ver Collins 2005; Michaelis 2001; Sadock & Zwicky 1985). Como este debate es muy especializado, aquí nos quedaremos con la idea, provisionalmente, de que las exclamaciones no expresan proposiciones (aunque pueden presuponerlas).

9. Por ejemplo, Pazos (2003) distingue entre usos informativos y argumentativos del lenguaje.

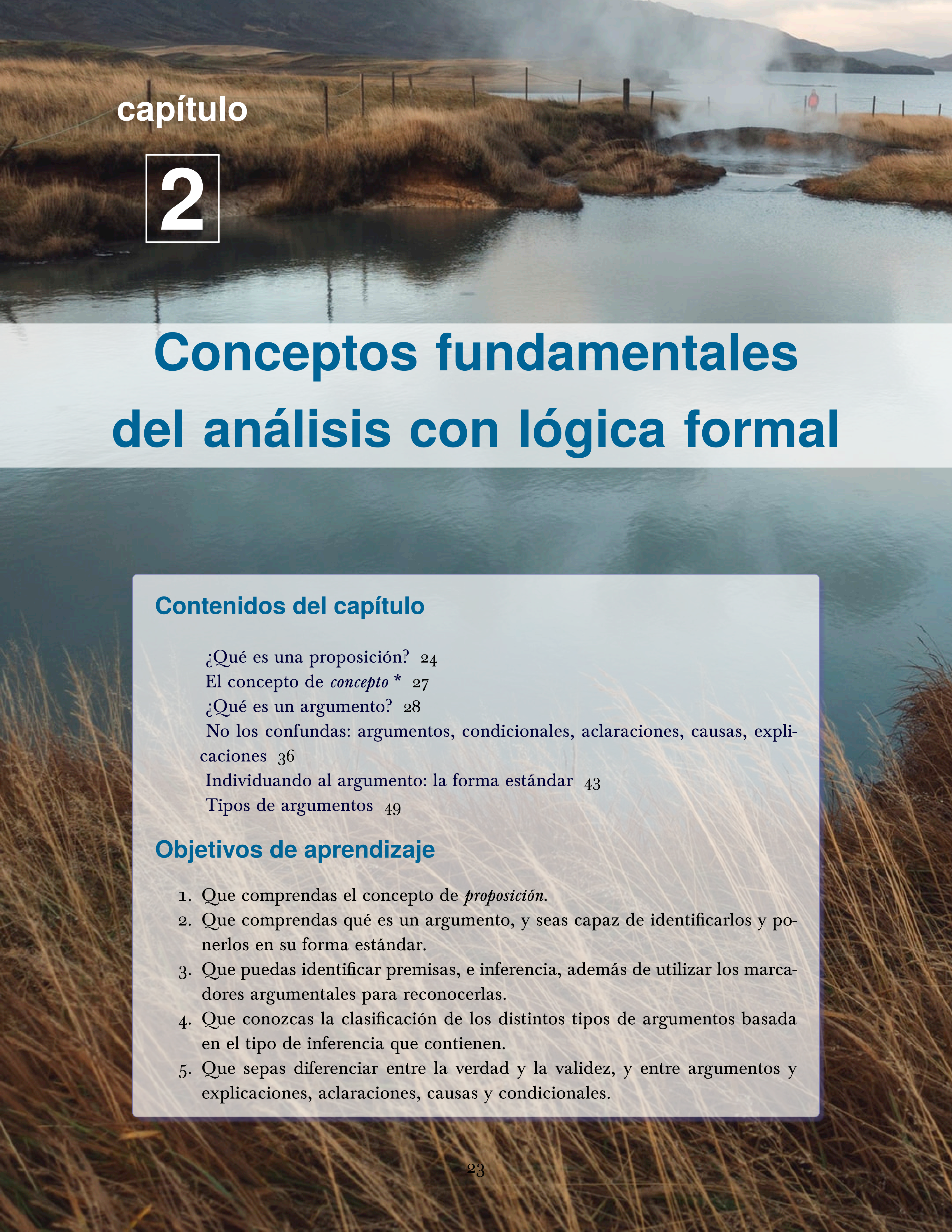
10. De su poema «Credo», en *Principia*, Fondo Editorial Tierra Adentro, 2018.

11. Pablo Neruda, «Oda a la cebolla», en *Antología fundamental*, Pehuén Poesía, 1988 (selección de Jorge Barros): pp. 182-184.

12. «Manta birostris», *Wikipedia*: `https://es.wikipedia.org/wiki/Manta_birostris`

13. Fragmento de «The Nature of Infinity — and Beyond», por Jørgen Veisdal: `https://medium.com/cantors-paradise/the-nature-of-infinity-and-beyond-a05c146df02c`

14. Austin 1962/1981.



# capítulo

# 2

# Conceptos fundamentales del análisis con lógica formal

## Contenidos del capítulo

## Objetivos de aprendizaje

1. Que comprendas el concepto de *proposición.*
2. Que comprendas qué es un argumento, y seas capaz de identificarlos y ponerlos en su forma estándar.
3. Que puedas identificar premisas, e inferencia, además de utilizar los marcadores argumentales para reconocerlas.
4. Que conozcas la clasificación de los distintos tipos de argumentos basada en el tipo de inferencia que contienen.
5. Que sepas diferenciar entre la verdad y la validez, y entre argumentos y explicaciones, aclaraciones, causas y condicionales.

## 2.1. ¿Qué es una proposición?

La noción de proposición es uno de los pilares de la lógica formal.[1] Voy a enunciar algunas de las características más centrales de las proposiciones. Estas son características que tienen *todas* las proposiciones; de hecho, son características que definen lo que es ser una proposición.

**Definición 3: Proposición**

Una proposición es un objeto tal que:

1. Es un *portador de verdad*, con lo cual solamente se quiere decir que pueden ser verdaderas o falsas. Es decir, las proposiciones son aquéllos objetos que pueden poseer un *valor de verdad*. *Ningún otro objeto* puede poseer un valor de verdad, a menos que lo haga de manera *derivada* de las proposiciones: las oraciones, las emisiones y las creencias poseen un valor de verdad *debido* a que expresan proposiciones.
2. Es el *significado de una oración declarativa*: el mensaje, la información que transmite tal tipo de oración.[2]
3. La misma proposición puede expresarse *por distintas oraciones*; por ejemplo, en voz activa («México ganó el partido») y en voz pasiva («El partido fue ganado por México»).
4. Es información *independiente de los lenguajes particulares*. Es decir, distintas oraciones de distintos lenguajes pueden significar una misma proposición.
5. Es un *hecho que podría o no darse*; excepto por las proposiciones contradictorias, que no podrían darse.
6. Es lo que se reporta con cláusulas «que», como en:
   - «Elena dijo que. . . »
   - «Pepe cree que. . . »
   - «Ana está suponiendo que. . . »
   - «Jorge propuso que. . . »

   En todos estos casos, después del «que» sigue una oración cuyo significado es una proposición.

Ahora vamos a ver algunos ejemplos de estas características.

**ejemplo 1**

- Ejemplos de la *característica 2*: las oraciones declarativas «Pedro es esposo de María» y «Correr eleva el ritmo cardíaco» expresan proposiciones.
- Como ejemplo de la *característica 3*: las siguientes oraciones significan la misma proposición: «Toño golpeó a Pepe», «Pepe fue golpeado por Toño», y «A Pepe lo golpeó Toño».
- Como ejemplos de la *característica 4*, considera estas oraciones: «La Ciudad de México es hermosa», «*Mexico City is beautiful*», «*La ville de Mexico est belle*», «*Mexiko-Stadt ist wunderschön*». Todas expresan la misma proposición, aunque sea mediante lenguajes distintos.
- Como ejemplo de la *característica 5*: el que la Tierra tuviera más de un satélite natural es un hecho que podría haber sucedido. Entonces, la oración «La Tierra tiene más de un satélite natural» es una proposición; esta proposición es falsa.
- Como ejemplo de la *característica 6*: si yo digo «Creo que hoy es jueves», lo que sigue después de la cláusula «que» es una oración que expresa una proposición: la proposición *hoy es jueves*. Si me dicen «Jorge me dijo que mañana tiene listo tu paquete», la oración «mañana tiene listo tu paquete» expresa la proposición (ya que sabemos el sujeto implícito): *Jorge tiene listo tu paquete mañana*.

En general, la primera prueba que debe pasar algo para ser una proposición es que pueda ser verdadera o falsa. Frente a una porción del lenguaje, pregúntate: «Esto que dice, ¿podría ser verdadero o podría ser falso?» Si la respuesta es que sí —que sí podría ser verdadero o falso—, entonces lo más probable es que estés frente a una proposición.

Relacionado con lo anterior, el segundo test es que una proposición puede usarse como respuesta a una pregunta —o, más usualmente, *presuponerse* o *sugerirse* como respuesta. Por ejemplo: si te preguntan, «¿Qué día es hoy?» y tú respondes «Jueves», la palabra «Jueves» no expresa, por sí misma, una proposición. Más bien, la palabra *sugiere* la siguiente proposición: *Hoy es jueves.* Esta última sí es una proposición. Considera este otro ejemplo: te preguntan «¿Cuál es tu platillo favorito?» y tú respondes: «Sopa». De nuevo, la palabra «sopa» no expresa una proposición; pero es claro que con ella quieres dar a entender esta proposición: *Mi platillo favorito es la sopa.*

Otro test para saber si algo es una proposición, aunque este no siempre tiene que ser así (es un «*test*» falible), es el siguiente. Muchas proposiciones contienen una *cópula*: una palabra que conecta sujeto con predicado, como:

- «Es»,
- «está»
- «era»

- «estaban»
- etc.

Es decir, las conjugaciones de los verbos «ser» y «estar» suelen usarse como conectores entre sujeto y predicado. Además, las oraciones que tienen estos conectores suelen usarse como oraciones declarativas. Por ello, las oraciones que contienen estas cópulas suelen expresar proposiciones. ¡Sólo recuerda que esta prueba puede fallar!

Finalmente, nota que **toda la oración de la que estemos hablando tiene que contar como proposición**. Puede suceder que una oración que no expresa una oración —por ejemplo, una oración exclamativa— tenga como parte a una oración declarativa. Pero cuando preguntamos si una oración expresa o no una proposición, preguntamos por *toda* la oración, no por sus partes. Así, «La pradera tiene valles verdes» sí expresa una proposición, pero «¿La pradera tiene valles verdes?» no.

Ya que hemos visto la definición del concepto de *proposición* y ejemplos de sus características, ejercitaremos el concepto al usarlo para reconocer en dónde se aplica.

**Ejercicio # 5**

De los siguientes casos, ¿Cuáles sí expresan una proposición? Los que no, ¿por qué no lo hacen?

1. Disculpe, ¿qué hora es?
2. La mantarraya o manta gigante (*Manta birostris*) es una especie de elasmobranquio del orden Myliobatiformes.
3. ¡A mi no me vas a venir a decir qué hacer, o qué pensar, sobre todo si tú mismo no sabes qué hacer de tu vida!
4. El realismo científico es una familia de posturas de acuerdo a las cuales nuestras mejores teorías científicas son verdaderas, o aproximadamente verdaderas.
5. Debes pagarme dentro de los próximos 11 meses.
6. ¿Cuáles son, si es que alguno, los defectos de una tesis de acuerdo a la cual el ser ahí es un ente cuyo ser es posibilidad, ser de una manera o de otra?
7. ¡Ah, qué bellos paisajes se pueden contemplar en aquéllas montañas, durante los días más claros del verano!
8. En 1583 se urdía en París una maniobra para penetrar en Inglaterra por Escocia; la tramaban el duque de Guisa, el embajador español en Francia y el nuncio apostólico, en unión de exiliados ingleses.
9. Nadie puede copiar en el examen, lo tienen prohibido.
10. El albanés es una de las lenguas oficiales de la parcialmente reconocida República de Kosovo, de algunos cantones de Macedonia del Norte y de algunas comunas del sur de Italia.

## 2.2. El concepto de *concepto* *

Algunos libros y programas de estudio en la materia de lógica incluyen un tratamiento de la noción de *concepto* como parte de la asignatura. La justificación suele ser que los conceptos son los componentes de los *juicios*, que a su vez son la representación mental de las proposiciones, y componentes de los *razonamientos*, que se suelen tomar como la ejecución mental de un argumento. (Como analogía, este modelo sugiere que un argumento es como una sinfonía abstracta: el conjunto de notas que pueden estar escritas en un pentagrama; mientras que un razonamiento es la ejecución por una sinfónica: la música real que se toca en nuestra mente, digamos). También se relacionan con las *definiciones*, pues un tipo importante de definición es la definición de un concepto.

Sin embargo, no es obvio que la noción de *concepto* sea propia del estudio de la lógica.

La razón principal es que el objeto que la lógica estudia primordialmente es la argumentación *en abstracto*: sus formas y reglas, con independencia de si son pensadas, habladas o escritas. Por supuesto, este estudio puede tener aplicaciones concretas, pero se *llega* a ellas, no se *parte* de ellas. En cambio (excepto por algunas tradiciones ya marginales de la psicología), un concepto se suele tomar como una *representación mental*. Se puede argumentar que la siguiente caracterización (basada en la descripción de Machery)[3] es el presupuesto básico sobre los conceptos en la psicología contemporánea (y lo más cercano que veremos en este libro a una definición del concepto «*concepto*»):

> Un concepto de un objeto es una representación mental almacenado en la memoria a largo plazo que se usa en los procesos mentales que producen juicios sobre ese objeto.

Entonces, los conceptos son entidades psicológicas: representaciones en nuestra mente. Pero si los conceptos son entidades psicológicas ¿por qué deberían interesarle a la lógica? Después de todo, la lógica es el estudio de la argumentación correcta, no el estudio de la mente.

Es verdad que uno de los padres de la lógica moderna —Gottlob Frege— basaba su lógica en una teoría de algo que él llamaba «conceptos», pero estos conceptos no son los que le interesan a la psicología contemporánea,[4] sino objetos abstractos que hoy se conocen como «*intensiones*» o, más generalmente, *funciones*.

La confusión que motiva el pensar que el estudio de los conceptos es un área de la lógica probablemente tenga hondas raíces históricas. Me refiero al tratado *Lógica de Port-Royal*, del siglo XVII, en el que se mezclaban cuestiones lógicas con metafísicas, y donde se estableció la así llamada «ley de extensión y comprehensión».[5] Revisemos primeramente qué significan «comprehensión» y «extensión», para después hablar sobre su relación.

La **comprehensión** de un concepto son las «notas» que se le asocian, las características con las que se representan los objetos que describe el concepto. (Por ejemplo, la comprehensión de mi concepto «*automóvil*» contiene a la característica de ser un objeto que se mueve; la comprehensión de mi concepto «*perro*» contiene la característica de ser un ser vivo.) Por otro lado, la *extensión* de un concepto es el conjunto de las cosas que describe el concepto: la extensión, por ejemplo, del concepto «*perro*» es el conjunto de todos los perros. Ahora bien, la «ley de extensión y comprehensión» suele ponerse así:

> **Ley de extensión y comprehensión** A mayor comprehensión, menor extensión, y a mayor extensión, menor comprehensión.

Aunque después de un razonamiento rápido pueda parecernos verdadera, esta «ley», así puesta, tiene una infinidad de excepciones.[6] Además, dos conceptos pueden tener el mismo número de notas en su comprehensión y aún así tener extensiones de diferente tamaño; también, dos conceptos pueden tener un número distinto de notas en su comprehensión y aún así tener extensiones del mismo tamaño (por ejemplo, los conceptos «presidente de México» y «máximo ocupante de alguna de las residencias oficiales del Castillo de Chapultepec, Los Pinos o Palacio Nacional» tienen la misma extensión, pero diferente número de características en la comprehensión).

Además de relacionarse con la teoría de la definición —que sí tiene aspectos lógicos importantes, como veremos en un capítulo posterior— y con la supuesta «ley» de comprehensión y extensión, los libros modernos de lógica que tratan con los conceptos también suelen mencionar su *clasificación*. Esto significa organizar a los conceptos de acuerdo con una variedad de criterios. A su vez, estos criterios suelen tener muy poca relación con cuestiones netamente lógicas, y ser más bien criterios semánticos, metafísicos o epistemológicos. Por ejemplo, algunos clasifican a los conceptos de acuerdo a si su comprehensión contiene o no más conceptos; los conceptos que contienen a otros son los *complejos* y los que no, son *simples*. Pero esta caracterización no es lógica, sino que requiere del análisis semántico y es muy debatida en los fundamentos de la ciencia cognitiva.[7] Otros criterios usuales son igualmente debatibles, e igualmente extraños a consideraciones puramente lógicas.

En general, además de la tradición, existen muy pocas razones para incluir un tratamiento de los conceptos en un curso de lógica.

## 2.3. ¿Qué es un argumento?

A grandes rasgos, un argumento es una serie de ideas que *fundamentan* o *apoyan* a otra. Estas ideas pueden estar en el discurso hablado, pensado o escrito. Las ideas que apoyan se conocen como *premisas*. La idea apoyada se conoce como *conclusión*. Finalmente, la relación de apoyo entre premisas y conclusión se conoce como *inferencia*.

Así, los componentes de un argumento son:

**Premisas** Ideas que se usan para apoyar a otra idea.

**Inferencia** Relación de apoyo o fundamentación entre premisas y conclusión.

**Conclusión** Idea que es apoyada, mediante la inferencia, a partir de las premisas.

Decimos, entonces, que en un «buen» argumento la conclusión de hecho *se infiere* de las premisas. Y, en muchos argumentos «inadecuados» —los que se suelen conocer como *falacias*— la conclusión solamente *parece* inferirse de las premisas. Veremos esto con mayor detalle más adelante.

Vamos a dar una definición muy general de *argumento*, a partir de dos aspectos: de qué está hecho, y para qué sirve.

**Definición 4: Argumento**

Un argumento consiste en un conjunto de proposiciones, las *premisas*, de las cuales se pretende que se *infiera* otra proposición, que es la *conclusión*. Se usa para justificar (para fundamentar racionalmente) a la conclusión, a partir de las premisas y de la conclusión.

### 2.3.1. Premisas y conclusiones: implícitas y explícitas

No siempre formulamos nuestros argumentos de manera totalmente explícita: a veces dejamos la conclusión, o algunas premisas, *implícitas*.

Decimos que un argumento tiene su conclusión *implícita* cuando ella no se menciona en la enunciación del argumento, pero es razonable suponer que quien ofrece tal argumento la está dando por sentado.

**ejemplo 2**

(I) Supongamos que tu amigo te pregunta si tú crees que su ex-novia lo siga amando. Tú no quieres lastimarlo, pero al mismo tiempo, deseas convencerlo racionalmente. Le dices lo siguiente:

> *Mira, ella ya dejó de hablarte, y además ha quemado todas tus cartas.*
> *Quien te ama no quema tus cartas ni corta toda comunicación contigo.*

¿Hay alguna conclusión explícita aquí? Sí: *Tu ex-novia ya no te ama*.

(II) Estás en un juicio donde se te acusa de haber cometido un crimen. Se ha informado que el crimen se cometió el martes por la mañana. En tu defensa, te propones dar argumentos a favor de tu inocencia. Este es uno de ellos:

> *Yo trabajo de lunes a viernes, y toda la semana mi jefe vio que yo estaba ahí.*

Solamente es una proposición, pero es claro que está funcionando como premisa. La conclusión parecería ser algo como: *Yo no cometí el crimen*, suponiendo, también, algunas premisas adicionales: *si mi jefe vio que yo estaba en mi trabajo, yo estaba en mi trabajo*; *si estuve en mi trabajo de lunes a viernes, en particular estuve el martes*; *si yo estaba en mi trabajo el martes, no cometí el crimen*. Todas estas no se mencionan porque es fácil inferir que, al mencionar tu argumento, las estabas dando por sentado.

(III) En un laboratorio se preguntan si es buena idea aprobar la importación de una molécula *X*. El interés del laboratorio proviene de algunos datos no muy fuertes: que algunos investigadores han especulado que este químico podría curar ciertos tipos de cáncer, y que sus promotores han dicho que se podría producir sin mucho costo y venderse, por ello, barato. Pero tú, que conoces la investigación, estás en desacuerdo. Les dices:

> *El químico X ni cura el cáncer ni es particularmente barato de producir; tampoco se ha mostrado que tenga algún beneficio adicional.*

La conclusión de tu argumento es clara: *No es buena idea importar la molécula X*. Era obvio, en ese contexto, que las razones que diste eran para apoyar esta idea.

(IV) Supongamos que estoy platicando con mi amigo Juan, quien es un filósofo, y que tenemos un desacuerdo sobre la relación entre el lenguaje y el mundo. Juan afirma lo siguiente:

> *El lenguaje nunca es una representación fiel de la realidad.*

Y yo le replico:

> *Tenemos lenguaje porque nos es útil para varios fines. Uno de los fines más importantes que tenemos es representar fielmente a la realidad. Si el lenguaje no cumpliera al menos algunas veces con los fines más importantes, no lo hubiéramos preservado.*

En mi argumento, no mencioné la conclusión, pero es claro cuál es:

> *El lenguaje a veces puede representar fielmente a la realidad.*

¿Cómo se podría saberlo? Diversos *factores contextuales* influyen en ello. Es decir, diversos elementos de la información que yo y mi interlocutor (Juan) tenemos en esa circunstancia específica: por ejemplo, sabemos que Juan y yo tenemos una postura contraria respecto al problema del lenguaje, y sabemos que Juan ha mencionado su postura en este problema. Además, yo le he respondido con un argumento, que parece llevar hacia la tesis contraria. Todos estos son factores que hacen razonable suponer cuál es la conclusión que pretendía inferir, aún cuando no la haya mencionado.

Hemos visto que un argumento puede tener su conclusión implícita. Pero también puede tener premisas implícitas: premisas que no se mencionan, pero que es razonable suponer que estaban dándose por sentado. Existe un término especial para argumentos con premisas implícitas, que voy a definir ahora.

**Definición 5: Entimema**

Un entimema es un argumento con premisas implícitas.

Como con los argumentos cuya conclusión se deja implícita, diversos *factores contextuales* pueden permitirnos tener una idea razonable sobre qué premisas se están dejando implícitas. Estos factores son elementos de la información que conocemos quienes hemos oído o leído el entimema. Y si no los conocemos, es probable que tengamos que preguntar: «¿Estás suponiendo que...?»

Es una buena práctica argumentativa dejar en claro, desde el principio, cuáles son las premisas de las que estamos partiendo, a menos que estas sean realmente muy obvias. Hacer explícitos nuestros supuestos permite que nuestros interlocutores entiendan mejor desde dónde partimos, cuáles son nuestras bases. Quizá ellos compartan nuestras bases; en ese caso, es más fácil lograr un acuerdo. Si no las comparten, de cualquier forma, saber en qué nos basamos les permitirá entender mejor cuál es el desacuerdo que tenemos. Así, preferir los argumentos explícitos sobre los entimemas hace menos probable que ocurran malentendidos.

Ahora vamos a ejercitar el concepto de premisas implícitas.

**Ejercicio # 6**

Ⓘ En los siguientes argumentos falta una premisa, que está implícita. Indica cuál es. He intentado que la información que se da en cada caso sea suficiente para poder distinguir qué premisa se ha dejado implícita, pero si crees que no lo es, indícalo, y sugiere las diversas ideas que podrían funcionar como premisa con la información disponible.

1. Si no cae cara, cae sol. [...] Por lo tanto, cayó sol.
2. Toda persona que acepte el relativismo moral, debe por ello aceptar ser sujeto de acciones indebidas. [...] Por lo tanto, Jorge debe aceptar ser sujeto de acciones indebidas.
3. El robo es una acción que contradice los principios morales. [...] Por lo tanto, no se debe robar.
4. Nadie sale ileso de una guerra. [...] Mariana debe haber sido lastimada.
5. Fumar produce la absorción de compuestos (como los hidrocarburos aromáticos policíclicos) que son activados metabólicamente al ser catalizados por enzimas citocromo P450. Esta activación permite que los compuestos puedan formar enlaces covalentes con el ADN. A su vez, estos forman aductos de ADN. Los aductos de ADN pueden causar errores en el proceso de replicación de las células, los cuales resultan en mutaciones (como las transversiones G→T). Estas mutaciones causan alteraciones en los controles del crecimiento celular. [...] La multiplicación descontrolada de células anómalas causa cáncer. Todo lo anterior implica

que fumar causa cáncer.

6. Al aprender lógica aumentará tu capacidad de entender diversos temas. [. . . ] Por ello, es menos probable que aumente tu capacidad de entender diversos temas.

Ⅱ Dame un argumento de cada uno de estos tipos:

1. Con conclusión después de las premisas.
2. Con conclusión antes de las premisas.
3. Con conclusión enmedio de las premisas.
4. Con conclusión que se deja implícita.

## 2.3.2. Marcadores argumentales

Algunos discursos que tienen un aspecto informativo pueden contener argumentación, aunque no sea obvio o completamente claro que la contienen. Afortunadamente, existen ciertas palabras que nos indican que estamos tratando con un discurso argumentativo. Estas son los *marcadores argumentales*.

**Definición 6: Marcadores argumentales**

Los marcadores argumentales son frases que señalan la presencia de un argumento en un discurso (hablado o escrito), y que nos ayudan a distinguir la estructura lógica del argumento.

Existen dos tipos de marcadores argumentales: los de premisa y los de conclusión.

### Marcadores de premisa

Los marcadores de premisa nos indican la presencia de una o varias *premisas* del argumento. Su presencia nos indica que las ideas que siguen apoyan a otra idea, que apareció antes o aparecerá después, y que es la conclusión del argumento.

Ejemplos de estos marcadores son:

«Sobre la base de . . . »
«Partiendo de que . . . »
«Tomando en cuenta que . . . »
«Suponiendo que . . . »
«A razón de que . . . »
«A causa de . . . »
«Debido a . . . »
«Dado que . . . »

### Marcadores de conclusión

Los marcadores de conclusión nos señalan la presencia de la *conclusión* del argumento. Nos indican que la idea que sigue es apoyada por las ideas que le siguen o le anteceden, y que son las premisas del argumento.

Ejemplos de estos marcadores son:

«Por lo tanto. . . »
«Se sigue que. . . »
«Lo cual significa que. . . »
«En consecuencia, . . . »
«Luego, . . . »
«De ahí que. . . »
«De lo que se infiere que. . . »
«Y debido a ello, . . . »
«Lo que conlleva que. . . »
«Concluimos que. . . »
«*Ergo*. . . »
«Con lo que tenemos que. . . »

Es muy importante distinguir a los marcadores de conclusión de las *expresiones condicionales*, lo cual revisaremos en la sección 4.1.6.

### Ejercicio # 7

En los siguientes argumentos, distingue los marcadores argumentales, si los hay (si no tiene alguno de los tipos de marcador, indícalo).

| *Argumento* | *Marcadores de premisa* | *Marcador de conclusión* |
|---|---|---|
| «La reproducción sexual provee un espectro más amplio para generar variabilidad genética, cuando piezas individuales de cromosomas -de óvulos y espermatozoides- se recombinan en la fertilización. Otra de las ventajas de la reproducción sexual es que las mutaciones nocivas, que naturalmente se acumulan a lo largo de los años, se diluyen y sus efectos se anulan durante esa combinación genética. Se infiere que los organismos que se reproducen asexualmente carecen de esas ventajas.»[8] | | |
| Quien, en algún momento de su vida, ha amado, sabe tanto del éxtasis del alma como de la necesidad de atender aspectos menos sutiles de la existencia. Esto es así puesto que el amor no es solamente emoción y éxtasis; también es un constante recordarnos de que, por más elevada que sea nuestra adoración, se mantiene solamente cuando descansa en cimientos concretos y firmes. Y quien ama debe, por necesidad, saber todo esto. | | |
| «Es necesario que haya sustancias simples, puesto que hay compuestos; porque el compuesto no es sino un montón o *aggregatum* de simples.»[9] | | |

| | | |
|---|---|---|
| «Muchos problemas de rodilla son causados por una musculatura apretada o desequilibrada. El estiramiento y el fortalecimiento, por lo tanto, ayudan a prevenir el dolor de rodilla.»[10] | | |
| Hay sobrepoblación cuando la cantidad de personas excede la cantidad de recursos disponibles. Esta causa diversas consecuencias sociales y ambientales. Por otro lado, en las naciones desarrolladas se consumen recursos a una tasa mucho mayor que en las naciones en vías de desarrollo. A razón de ello, la sobrepoblación afecta de manera desigual, dependiendo del nivel de desarrollo de la sociedad. | | |
| «Un embrión no es un individuo o persona humanos. Un embrión es un 'principio no desarrollado de algo', (según la cuarta acepción de la Real Academia Española). Que represente vida no significa que sea en sí y por sí mismo un ser humano, una vida humana como equivalente de persona. Vida y ser humano, persona y vida biológica no son lo mismo, y no hay que olvidarlo.»[11] | | |
| «Sigue siendo pertinente continuar revisando los orígenes y evolución, así como los derroteros en el presente y el futuro de la autonomía universitaria (pese a que haya sido un asunto sobre el que se ha escrito abundatemente). Ello es así porque en el último cuarto de siglo los controles desarrollados por los gobiernos, y las demandas sociales, parecen estar acotando cada vez más sus alcances.»[12] | | |
| Uno de los gases más contaminantes es el $CO_2$ (es uno de los gases del efecto invernadero). Por ello, cuando comparamos autos eléctricos y autos de gasolina, obtenemos que los primeros contaminan más. Esto debido a que sus baterías contienen litio, cobalto y manganeso que al extraerse y procesarse generan muchas toneladas de $CO_2$. | | |

| | | |
|---|---|---|
| «La distinción entre la cinemática de una teoría y su dinámica es fundamental para el marco conceptual de muchos físicos. Sin embargo, un cambio en la cinemática de una teoría puede compensarse con un cambio en su dinámica sin consecuencias empíricas, lo que sugiere que estas características de la teoría, consideradas por separado, no pueden tener un significado físico. Por lo tanto, debe concluirse que, en adelante, la cinemática por sí misma y la dinámica en sí misma están condenadas a desvanecerse en meras sombras, y solo una especie de unión de ambas preservará una realidad independiente.»[13] | | |

### 2.3.3. ¿Más de una conclusión o argumentos encadenados?

Según la definición 4, un argumento posee una *única* conclusión. Sin embargo, parece que podemos encontrar muchos ejemplos de argumentos que posean más de una conclusión. Por ejemplo:

> La libertad humana no se contradice con el determinismo de las leyes de la naturaleza. Pues sería imposible actuar si a cada causa no le sucediera un efecto, de acuerdo a las leyes; esto debido a que, si a una desición de actuar no le siguiera, de manera determinada por las leyes, la acción, los comportamientos subsecuentes no contarían como acciones (pues no todo movimiento corporal cuenta como acción). Y para que una acción sea libre tiene que ser causada por la voluntad de la persona. Entonces, la libertad requiere la existencia de leyes deterministas. Y si algo requiere a otra cosa, no puede contradecirla. De ahí la conclusión. También se sigue que la libertad sólo existe si hay determinismo.

En este argumento, podemos encontrar dos conclusiones distintas: primera, «La libertad humana no se contradice con el determinismo de las leyes de la naturaleza». Sabemos que esta es una conclusión debido a que encontramos el marcador de inferencia «Pues», que nos indica que lo anterior se basa en lo subsiguiente. Y la segunda conclusión es: «la libertad sólo existe si hay determinismo».

**Definición 7: Polisilogismo**

Un polisilogismo es un argumento compuesto de varios argumentos, de manera que la conclusión de uno es una premisa del siguiente.

Algunos autores también le llaman «*sorites*» a un polisilogismo.[14] A los polisilogismos que encontremos, siempre los descompondremos en argumentos con una sola conclusión, para así estudiarlos con las técnicas lógicas de este libro.

**ejemplo 3**

Puede suceder que de las mismas premisas se infiera más de una conclusión. Como ejemplo, considera el siguiente argumento:

1. Pedro y Pablo son hijos de Juan.
C1. Juan tiene al menos dos hijos.
C2. Pedro y Pablo son hermanos.
C3. Pedro es hijo de Juan.

En este ejemplo, las diferentes conclusiones, aunque son acerca de temas cercanos, no se apoyan entre sí: son, simplemente, varias conclusiones que se pueden inferir de la premisa.

Sin embargo, existe otro tipo de casos, en los que a partir de las premisas podemos inferir conclusiones que, aunque distintas, sí se apoyan entre ellas. A estas conclusiones les podemos llamar «conclusiones intermedias», aunque en las matemáticas se les suele llamar «lemas». Por ejemplo:

1. Todos los filósofos son miembros de la sociedad
2. Los miembros de la sociedad tienen responsabilidades civiles.
C1. Los filósofos tienen responsabilidades civiles.
C2. Hay ciertas responsabilidades que tienen los filósofos.
C3. La actividad filosófica está regulada bajo cierta normativa.

Aquí, las ideas C1 y C2 son conclusiones intermedias: se infieren de las premisas para llegar a la «conclusión principal», C3. Podríamos descomponer este argumento en un polisilogismo, de manera que C1 sea la premisa para un nuevo argumento, que concluya C2; a su vez, C2 sería la premisa de un tercer argumento, que concluiría C3. Finalmente, el argumento que se basa en C2 para concluir C3 es, a su vez, un entimema, pues contiene la premisa implícita de que tener una responsabilidad implica estar regulado bajo una normativa.

## 2.4. No los confundas: argumentos, condicionales, aclaraciones, causas, explicaciones

Los términos que se utilizan para indicar la presencia de un argumento —al indicar la presencia de una inferencia o de una premisa— también suelen usarse con otros fines.

Principalmente, estas palabras se suelen utilizar en *explicaciones*, *aclaraciones*, *descripciones de causas*, y *oraciones condicionales.*

### 2.4.1. Condicionales

Empecemos con las oraciones condicionales. Como su nombre lo dice, una oración condicional enuncia la condición para que suceda algo (ya sea una condición suficiente o necesaria, conceptos de los que hablaremos en la sección 4.1.6). Suele aparecer con las palabras «si... entonces» y «... solamente si... ». Por ejemplo:

> Si me dan trabajo, con gusto me cambio de ciudad.

Esta oración no es un argumento: nos dice que, *si es que* llegara a darse la condición de que me den trabajo, *entonces* con gusto me cambiaré de ciudad. En estas oraciones condicionales, basta que se dé la condición para que se dé lo condicionado. Pero no nos dan una *razón*: no fundamenta una idea. Lo que sí fundamentaría una idea sería el siguiente argumento:

> Si me dan trabajo, con gusto me cambio de ciudad.
> Me darán trabajo.
> Por ello, me cambiaré de ciudad.

Aquí sí hay un argumento. Pero es distinto de la oración anterior, porque contiene otras oraciones: además de la oración condicional, contiene otra premisa y una conclusión.

Este ejemplo nos sirve para ilustrar algo importante: **a veces se usan oraciones condicionales para hacer un argumento que se deja implícito**. Por ejemplo, si quiero argumentar que yo no merezco el castigo, y me encuentro entre una audiencia que sabe que quiero demostrarlo, y además yo y la audiencia sabemos que las pruebas son insuficientes, podría decirles: «Si me van a castigar, necesitan pruebas suficientes». Se podría pensar que estoy argumentando que no merezco el castigo porque, (i) las pruebas no son suficientes, y (ii) para que me castiguen, necesitan pruebas suficientes. En este caso hablaríamos de un argumento con una premisa y conclusión implícitas.

Sin embargo, como he dicho antes, para poder saber en dónde hay un argumento implícito se necesita conocer el contexto. Y, de cualquier forma, un argumento sigue siendo distinto a una mera afirmación condicional; lo que puede suceder es que ésta se use para *indicar* un argumento.

Considera este otro ejemplo:

> Me iré de este país sólo si encuentro un excelente trabajo fuera.

Como con el ejemplo anterior, aquí no hay un argumento: es una oración que nos dice lo que se *requiere*, lo que se *necesita*, para que me vaya de este país: se requiere que encuentre un excelente trabajo fuera. Encontrar ese trabajo quizá no baste para que me vaya, pero sí se requiere. Como con el ejemplo anterior, esta oración puede usarse en el contexto de un argumento, pero no es un argumento en sí misma.

Las oraciones condicionales y los argumentos se parecen en algo: en que en ambos encontramos **consecuencias**. Al decir que, *si pasa algo*, *entonces pasará otra cosa*, estamos diciendo que si sucede lo primero, eso tendrá como *consecuencia* lo segundo.

En un argumento también hay consecuencias: las premisas tienen como **consecuencia lógica**, o como consecuencia **probable** (dependiendo del tipo de argumento), a la conclusión (más adelante estudiaremos estos conceptos con más detalle). Pero en las oraciones condicionales solamente *afirmamos* que una cosa tiene como consecuencia otra: si sucede una, entonces sucederá la otra. En un argumento no tenemos una mera afirmación, tenemos una *relación inferencial* entre premisas y conclusión: las premisas *conllevan* la conclusión.

Resumiendo: es importante no confundir un argumento con una oración condicional: **un argumento tiene premisas**, **inferencia y conclusión**, **pero una oración condicional es solamente una oración** —una que afirma que sucederá algún evento *si es que se da*, o *únicamente bajo la condición de que se dé*, otro evento. Con un argumento no afirmamos: más bien, un argumento *contiene* afirmaciones.

### 2.4.2. Aclaraciones

Una aclaración enuncia el significado de un término o de una frase, con el propósito de —¡bueno, pues de aclararlo! Se puede intentar aclarar algo por muchas razones: quizá simplemente no me expliqué bien, quizá lo que dije era ambiguo (es decir, podría querer decir más de una cosa en el contexto), quizá lo que dije era oscuro, quizá lo que dije involucraba terminología técnica. En la siguiente cita de Sartre (en *El existencialismo es un humanismo*) encontramos un ejemplo de lo último:

> Si Dios no existe, hay por lo menos un ser en el que la existencia precede a la esencia, un ser que existe antes de poder ser definido por ningún concepto, y que este ser es el hombre. ¿Qué significa aquí que la existencia precede a la esencia? Significa que el hombre empieza por existir, se encuentra, surge en el mundo, y que después se define.

En este caso, Sartre está exponiendo lo que significa decir que «en el hombre, la existencia precede a la esencia». Está *aclarando* esa frase. (También está haciendo una afirmación condicional: «Si Dios no existe, hay por lo menos un ser en el que la existencia precede a la esencia, [. . . ] y este ser es el hombre». Como vimos arriba, esta oración no es un argumento: nos dice que, *si es que* pasa algo, *entonces* pasa otra cosa: que hay por lo menos un ser en el que. . . etc.)

Ahora bien, en las aclaraciones a veces ocurren términos que podríamos pensar que son marcadores argumentales. Por ejemplo, a veces «significa» se usa para indicar una inferencia, como en:

> Quien es libre, decide su destino. Sólo mediante la elección racional de un *ethos* podemos llegar a ser libres. Esto significa que quien es libre, decide su destino y ha hecho una elección racional de un *ethos*.

En este ejemplo, bien podríamos sustituir la frase «Esto significa» por «Esto implica»: las dos proposiciones iniciales *conllevan* la conclusión; dicho en un contexto, este argumento se usaría para demostrar la conclusión de que *quien es libre, decide su destino y ha hecho una elección racional de un ethos*. A diferencia de ello, en el ejemplo de Sartre, la intención es dar el significado de terminología técnica, de palabras especializadas a las que Sartre les da un significado específico para referirse a un fenómeno.

En general, debemos tener cuidado de que la ocurrencia de aparentes marcadores argumentales no nos confunda: también pueden ser indicadores de una aclaración o definición. ¿Cómo saberlo? Solamente podemos fijarnos en el contexto del discurso, y tratar de inferir las intenciones del autor al escribirlo o enunciarlo: si pretende **fundamentar** una idea, está argumentando; si pretende **explicar el significado** de una frase o palabra, está aclarando.

### 2.4.3. Causas

Las palabras con las que indicamos argumentos también se usan para indicar *causas*. Una causa es un evento que *produce* o *genera* o *hace que surja* otro evento (en el lenguaje coloquial, también se usa «causa» para referirse a características que, al poseerse, causan que se posean otras, como cuando decimos «la ignorancia y el miedo son la causa de la xenofobia»). Como ejemplo de esto, considera el siguiente pasaje, adaptado de una cita de la BBC:

> Sin embargo, la proyección de Carlos Anaya es que más allá del factor estacional, la demanda de aguacate de Estados Unidos seguirá creciendo y, por lo tanto, los precios tenderán a estabilizarse en un rango un poco más alto que los valores históricos.[15]

En este ejemplo, la frase «por lo tanto» se usa para indicar no un argumento, sino una causa: el aumento de la demanda de aguacate en Estados Unidos *causará* el aumento en los precios del aguacate. Veamos otro ejemplo.

> No pude dormir toda la noche. A razón de ello, estoy muy cansado.

De nuevo encontramos una expresión que a veces se utiliza para indicar premisas. Sin embargo, aquí no se está ofreciendo una proposición como razón de la otra, sino un suceso como causa del otro. El que no pudiera dormir *causó*, (hizo, produjo) que yo estuviera muy cansado. Pero no estoy *infiriendo* que yo esté causado a partir de que no pude dormir.

Las afirmaciones que describen causas tienen algo en común con los argumentos: se pueden usar para *justificar*, para *dar razón* de un suceso. La diferencia es que las afirmaciones que describen causas no contienen una relación de inferencia, como sí la contienen los argumentos.

También podemos diferenciar a la relación causa-efecto de la relación inferencial. Una relación inferencial es una relación entre *proposiciones*: se da cuando una proposición —la conclusión— es consecuencia *lógica* de otras. En cambio, la relación causal es una relación entre *sucesos*: se da cuando un evento concreto —no cómo lo describimos en el lenguaje, sino el evento mismo— genera la existencia de otro evento, o genera un cambio en otro evento.

Otra diferencia importante entre la causación y las relaciones inferenciales es que usamos inferencias para *demostrar*, para *argumentar* a favor de una proposición. Esto lo solemos hacer cuando alguien no cree en esa proposición. En cambio, regularmente, usamos la descripción de causas no cuando queremos convencer a alguien de una proposición, sino cuando queremos explicarle a alguien de *dónde proviene* cierto suceso, que ya damos por sentado que existe.

### 2.4.4. Explicaciones

Una explicación responde a una pregunta «¿por qué?». Nos dice por qué sucede tal o cual evento; por ello, la frase «porque» es un muy buen indicador de explicaciones: esa frase suele usarse para decir en dónde comienza una explicación. Una explicación tampoco es un argumento, aunque ambos conceptos estén relacionados muy estrechamente.

Por ejemplo:

> Llegué tarde porque había una manifestación.

En este caso, quien enuncia esta oración no está dando un argumento: está explicando *por qué* llegó tarde, enunciado el factor que lo provocó.

Las explicaciones, como las descripciones de causas, se parecen a los argumentos en que en ambos podemos encontrar cierto tipo de consecuencia. Pero como con las descripciones de causas, en las explicaciones ya suponemos *de entrada* que se da el hecho, y al explicarlo decimos de dónde surgió. Mientras tanto, con los argumentos *buscamos demostrar* que se da un hecho, que es la conclusión.

(Las explicaciones y descripciones de causas se parecen en varios aspectos. Esto ha llevado a algunos autores a pensar que, en realidad, *toda* explicación es una descripción de causas. Esto es muy controvertido en la teoría de la explicación, así que no profundizaremos en ello.)

Algunos argumentos suponen ciertas explicaciones: son las *inferencias a la mejor expli-*

*cación*, (que revisaremos en el capítulo ??). Y, según algunas teorías de la explicación, toda explicación supone ciertos argumentos.[16]

De cualquier forma, argumentos y explicaciones son distintos. Un argumento contiene *premisas*, de las cuales se *infiere* una *conclusión*. Tanto premisas como conclusión son proposiciones. En cambio, una explicación contiene un hecho a explicar —un *explanandum*— y la explicación de ello: un *explanans*. Al explicar damos por sentado que el *explanandum* se da, que ya existe, y buscamos decir *qué fue lo que lo llevó a existir*; en cambio, al argumentar *no* damos por sentado que la conclusión ya sea verdadera, sino que buscamos demostrar que sí lo es.

### 2.4.5. Lenguaje puramente descriptivo

A veces también pensamos que hay un argumento donde solamente se esta describiendo un suceso, o las características de algo. Si esta descripción suena muy técnica o sofisticada, puede parecernos un argumento. Por ejemplo:

> Los científicos estiman que el microbioma humano contiene billones de bacterias, la mayoría de ellas inofensivas, muchas beneficiosas y algunas que causan enfermedades. La creciente evidencia ha revelado el papel de estos microbios como poderosos moduladores de la enfermedad y la salud. Los cambios tanto en el recuento como en el contenido bacteriano se han relacionado con el desarrollo de afecciones que van desde la caries dental y las infecciones intestinales hasta las más graves, como la enfermedad inflamatoria intestinal crónica, la diabetes y la esclerosis múltiple. La mayor parte de la investigación hasta la fecha se ha centrado en *mapear* los tipos de bacterias que habitan nuestros cuerpos en un esfuerzo por determinar la presencia de una especie bacteriana determinada y cómo podría afectar el riesgo de enfermedad. Por el contrario, la nueva investigación profundiza mucho más, observando los genes que componen las diversas especies y cepas microbianas.[17]

Aquí solamente hay una descripción: se describen el microbioma y ciertas investigaciones sobre este. No hay ningún argumento. ¿Cómo lo podemos saber? Porque ninguna proposición se infiere de la otra, por lo que ninguna se ofrece como justificación —como premisa— de otra. Sin esos elementos, no hay argumento.

**Ejercicio # 8**

Para cada uno de los siguientes textos, di si es un argumento, una proposición condicional, una aclaración, una descripción de causa, o una explicación.

1. Si vamos a aceptar que una empresa tome el control de las comunicaciones globales sin tener consecuencias por ello, y que además se le brinden millonarias

exenciones de impuestos, entonces es mejor que nos vayamos preparando para una debacle no sólo de orden económico, sino político y hasta moral.

2. Cuando digo que «hemos dejado de creer en el amor duradero», me refiero a que, aunque podamos seguir buscando una relación de pareja que se mantenga ante las adversidades, nuestras acciones revelan que ya actuamos bajo la certeza de que nuestras relaciones sobrevivirán.
3. No estoy de acuerdo con la legalidad de las corridas de toros. Pues un toro siente, tanto como un humano; sentir permite percibir el dolor, y las corridas de toros producen dolor. Pero no deberíamos dejar que fuera legal causar dolor por mero disfrute.
4. Fumar produce la absorción de compuestos (como los hidrocarburos aromáticos policíclicos) que son activados metabólicamente al ser catalizados por enzimas citocromo P450. Esta activación permite que los compuestos puedan formar enlaces covalentes con el ADN. A su vez, estos forman aductos de ADN.

...
...
...
...
...
...
...
...

## 2.4.6. Sobre distintos nombres para premisas y conclusiones *

La conclusión principal, a diferencia de las intermedias, es aquella que buscamos inicialmente. Regularmente esta conclusión va a ser la idea más *interesante*, *profunda*, *informativa* o *compleja* que podamos inferir de las premisas. En matemáticas, a las conclusiones principales se les llama «*teoremas*».

Un tercer tipo de conclusiones que se distinguen en matemáticas son los «*corolarios*»: ideas que se infieren de manera «sencilla» a partir de la «conclusión principal» o teorema.

En las ciencias también se distinguen las premisas entre «postulados» y «axiomas». Estos dos serían *primeros principios*, o ideas de las cuales partimos para inferir otras. Los *axiomas*, por su parte, serían principios «autoevidentes» u obvios; mientras que los *postulados* serían principios que, aunque no son obvios, no se pueden demostrar a partir de los axiomas. Pero la noción de *obviedad* que estos conceptos asumen no tiene una definición rigurosa; sino que, como sucede con la diferencia entre lemas, teoremas y corolarios (e incluso quizá más), depende del conocimiento que una comunidad de investigación tenga en un momento determinado.

Por ejemplo, el quinto postulado de la geometría de Euclides le parecía a este, si no tan obvio como los restantes cuatro, sí suficientemente obvio a los geómetras de su época como para usarse como principio; mientras que, durante mucho tiempo, una amplia cantidad de matemáticos intentaron demostrarlo como teorema. No fue hasta el siglo XX que se demostró que el «principio» euclidiano era prescindible para hacer construcciones geométricas, fundando lo que hoy se conoce como *geometría no euclidiana*.

## 2.5. Individuando al argumento: la forma estándar

### 2.5.1. Individuando al argumento

No siempre somos completamente explícitos y exactos al enunciar nuestros argumentos. Por ejemplo a veces incluimos información adicional, que solamente contextualiza al argumento, pero no es parte ni de sus premisas ni de su conclusión. O también añadimos giros retóricos y muletillas —como cuando preguntamos «¿no?», «¿a poco no?», o «¿no es cierto?» al exponer una idea. A veces también utilizamos expresiones más cortas de lo que se requeriría para ser completamente explícitos; o usamos giros retóricos o formas del lenguaje que no son un discurso informativo y literal. También es usual dejar implícitas ya sea alguna de las premisas, la conclusión, o ambas.

Para analizar lógicamente a un argumento, primero necesitamos tenerlo «a la mano»: saber qué premisas tiene y cuál es su conclusión, así como conocer el tipo de inferencia que presenta (de lo cual hablaremos abajo). Empecemos probando qué tan bien puedes detectar estos componentes en un pasaje.

**Ejercicio # 9**

Considera los siguientes argumentos. Para cada uno de ellos, encierra en rojo cada una de las premisas, en azul la conclusión, y utiliza verde para subrayar lo que solamente es parte del contexto del argumento y no es parte de este (si es que hay tal cosa). Si hay una premisa o conclusión implícita, indícalo en cada caso.

1. Anaximandro (610-546 a. C), amigo y probablemente discípulo de Tales, argumentó que como los niños están indefensos al nacer, si el primer humano hubiera aparecido sobre la tierra como un niño no habría podido sobrevivir. En lo que puede haber sido la primera intuición de la evolución, Anaximandro razonó que, por lo tanto, los humanos deberían haber evolucionado a partir de otros animales cuyos retoños fueran más resistentes.[18]
2. Tú mismo dijiste que la infidelidad era causa suficiente para el divorcio. Con todas las pruebas que he acumulado ya no me puedes esconder la verdad: me has sido

infiel. Ya sabes a dónde voy con esto, ¿verdad?

3. Para la teoría cuántica ortodoxa la aleatoriedad surge de alguna manera del efecto de la medición, no del comportamiento del sistema dinámico, el movimiento periódico, que describe el sistema no medido. Nos gustaría sugerir (particularmente en vista del hecho de que está de moda hoy en día buscar las manifestaciones cuánticas del caos clásico) que una comparación del caos clásico y el cuántico sería más fácil si la dinámica cuántica, como la clásica, fuera responsable de la aleatoriedad, y esta no tuviera que ser puesta a mano. Pero hemos argumentado que, por agradable que fuera, esto último simplemente no es el caso. Por ello, el caos clásico no es comparable con el caos cuántico en la teoría cuántica ortodoxa.[19]
4. Ya antes hemos discutido mucho sobre la fuente de la orientación sexual y hemos podido establecer pocas cosas; la investigación sobre este tema sigue siendo controvertida y escasa. Pero sí sabemos una conclusión: que el ambiente debe jugar algún papel al determinar la orientación sexual. Esto se establece a partir de dos hechos: que los gemelos idénticos pueden tener distintas orientaciones, y que ellos heredan los mismos genes. De esto continuaremos hablando en otro capítulo del libro.
5. La causa del universo yace fuera de él. Pues: o bien el universo tiene una causa o no la tiene. Si el universo tiene una causa, la causa yace fuera de él. Y si el universo carece de causa, el universo es necesario. Además, el universo no es necesario.[20]
6. El siguiente argumento se conoce desde la Antigüedad, y ha sido llamado «La paradoja de Epicuro». Hoy en día se conoce como «el argumento lógico del mal», y se le distingue de otros argumentos alrededor de la existencia del mal. Podríamos formularlo como sigue. Un supuesto básico es que Dios es omnisciente; también es omnipotente. Además, Dios es completamente bueno. Pero existe el mal. De todo esto se sigue que Dios no existe; pues, además, la existencia de ser omnisciente, omnipotente y completamente bueno es incompatible con la existencia del mal. Este argumento ha sido discutido muchas veces a través de la historia de la filosofía.
7. Sería más fácil si supiéramos que la crisis actual fue causada por adolescentes emprendedores que administran sitios de noticias falsas en Facebook, marionetas rusas y cuentas de *bots*, publicidad dirigida de Cambridge Analytica o incluso cámaras de eco simétricamente partidistas inducidas tecnológicamente. Pero nuestros estudios nos han llevado a la conclusión de que estos riesgos supuestos no son, en el futuro cercano, las principales causas de irrupción. En lugar de estas dinámicas impulsadas tecnológicamente, que son novedosas pero en última instancia menos importantes, vemos dinámicas a largo plazo de la economía política: la ideología y las instituciones que interactúan con la adopción tecnológica como

los principales impulsores de la crisis epistémica actual. Estas dinámicas, que se desarrollan en la televisión, la radio y el periodismo profesional convencional al menos tanto como a través de Internet y las redes sociales, se han desarrollado durante 30 años y han resultado en un ecosistema de medios altamente asimétrico que es el principal impulsor de la desinformación y propaganda en la esfera pública estadounidense. El ecosistema de los medios de derecha, en particular, circula una cantidad abrumadora de desinformación y propaganda doméstica, y sus prácticas crean las mayores vulnerabilidades tanto a la propaganda extranjera como a la explotación comercial nihilista por parte de las fábricas de *clickbait*. Fuera del ecosistema de medios de derecha, observamos los esfuerzos de los partidarios, los rusos y las fábricas de *clickbait*, pero las normas de verificación de hechos y los compromisos institucionales periodísticos amortiguan la difusión y amplificación de la desinformación. Estas dinámicas se invierten en la red insular de derecha, y las afirmaciones partidistas de confirmación de identidad, por falsas que sean, se aceleran y amplifican.[21]

8. Pierre-Simon, marqués de Laplace (1749–1827), conocido habitualmente como Laplace, argumentó que las perturbaciones en las órbitas de los planetas a causa de la atracción gravitatoria deberían ser periódicas, es decir, marcadas por ciclos repetidos, en lugar de ser acumulativas. Eso bastaría para que el sistema solar se estabilizara a sí mismo, y por lo tanto no habría necesidad de la intervención divina para explicar por qué ha sobrevivido hasta el día de hoy. A Laplace se acostumbra atribuirle la primera formulación precisa del determinismo científico.[22]
9. Lo más probable es que los gases producidos al quemar derivados del petróleo y del carbón para tener fuentes de energía, sean una de las causas más importantes del efecto invernadero. (Este efecto sucede cuando algunos gases que está en la atmósfera del planeta impiden que la energía que nuestro planeta recibe por la radiación del Sol regrese al espacio exterior.) A su vez, este efecto es una de las causas más importantes del calentamiento global. Al crecer la población, crece la demanda de energía. Es fácil inferir de aquí qué relación hay entre crecimiento demográfico y calentamiento global.
10. Vemos que el proceso civilizatorio supone una transformación del comportamiento y de la sensibilidad humanos en una dirección determinada. Pero es evidente que en ningún momento ha habido seres humanos individuales que hayan tratado de realizar esta transformación, esta «civilización», de modo consciente y «racional» por medio de una serie de medidas que persigan tal objetivo. Es impensable que el proceso civilizatorio haya sido iniciado por seres humanos capaces de planificar a largo plazo y de dominar ordenadamente todos los efectos a corto plazo, ya que estas capacidades, precisamente, presuponen un largo proceso civilizatorio. Es evidente, pues, que la «civilización», como la racionalización, no es un producto

de la ratio humana, no es el resultado de una planificación que prevea a largo término.[23]

## 2.5.2. La necesidad de la paráfrasis

Como he mencionado antes, fuera de los libros de texto y de los artículos especializados, los argumentos no se suelen presentar de manera límpida y explícita. A veces sus premisas y/o conclusiones se dejan implícitas, a veces se *sugieren* mediante una exclamación o pregunta retórica; a veces el argumento está enmedio de información que no es importante para comprenderlo, y a veces se utilizan giros retóricos para indicar una idea o para agregarle algo de estilo literario.

**Parafrasear** significa usar otras palabras para expresar la misma idea con mayor claridad o inteligibilidad.

En estos casos, es necesario *parafrasear* el discurso para poner explícitamente el argumento que se pretende ofrecer. Cuando parafrasees lo que dice otra persona, siempre recuerda usar el principio de caridad (secc. 1.2.2); para aumentar la claridad de tu paráfrasis, recuerda las máximas de Grice (secc. 1.2.3).

A veces las paráfrasis se usan para extraer una sola proposición; a veces es necesario parafrasear todo un pasaje para obtener el argumento. Vamos a ver dos ejemplos: uno en el que distinguimos la proposición que se quiere expresar con una pregunta, otro donde el proceso es más radical y el argumento final no se parece mucho al texto original.

**ejemplo 4**

Ⓘ Empecemos con un ejemplo sencillo. Considera este pasaje del *Teeteto* de Platón:

> *Sócrates*: ¿Podrías, por lo menos, asegurar, que ninguna cosa le parece a otro hombre la misma que a tí? ¿Y no afirmarías, más bien, que nada se te presenta bajo el mismo aspecto, porque nunca eres semejante a tí mismo?
>
> *Teeteto*: Soy de este parecer más bien que del otro.

Aunque, en el diálogo, el personaje Sócrates le hace una pregunta a otro personaje, la intención de Platón es poner sobre la mesa una proposición, para discutir sus implicaciones. Esta es: *nada se te presenta bajo el mismo aspecto, porque nunca eres semejante a tí mismo*. Y sabemos que es esa porque es la que Teeteto acepta en lugar de la otra. Platón usa a estos dos personajes para sugerir una idea, que después discutirá. Usamos la paráfrasis para eliminar elementos innecesarios para el análisis de los argumentos.

(II) Considera el siguiente ejemplo (tomado de John Stuart Mill, *El Utilitarismo*, cap.

I):

> Lo que ahora me propongo no es criticar a esos pensadores, pero no puedo evitar el referirme, como ejemplo, a un tratado sistemático escrito por uno de los más ilustres de ellos, la *Metafísica de la Etica*, de Kant. Este hombre notable, cuyo sistema de filosofía permanecerá mucho tiempo como uno de los hitos en la historia de la especulación filosófica, establece, en el tratado en cuestión, un primer principio universal como origen y fundamento de la obligación moral; es éste: *Obra de manera que tu norma de acción sea admitida como ley por todos los seres racionales*. Pero, cuando empieza a deducir de este precepto cualesquiera de los deberes actuales de moralidad, fracasa, casi grotescamente, en la demostración de que habría alguna contradicción, alguna imposibilidad lógica (por no decir física) en la adopción por todos los seres racionales de las reglas de conducta más atrozmente inmorales. Todo cuanto demuestra que las consecuencias de su adopción universal serían tales que nadie se decidiría a incurrir en ellas.

Aquí he dado un solo pasaje, pero es importante conocer el contexto: en este primer capítulo, Mill pretende introducir el problema del fundamento de la moral. La segunda oración del capítulo es esta:

> Desde los albores de la filosofía, la cuestión concerniente al *summum bonum*, o, lo que es lo mismo, al fundamento de la moral, se ha contado entre los problemas principales del pensamiento especulativo, ha ocupado a los intelectos mejor dotados, y los ha dividido en sectas y escuelas que han sostenido entre sí una vigorosa lucha.

Muy bien. Entonces, Mill pretende hablar de cuál es este fundamento de la moral, y en la primera cita que puse, parece descalificar las ideas de Kant. Por ello, es clara su intención en la primera cita: pretende argumentar en contra del principio de Kant al concluir que este no es origen y fundamento de la obligación moral. Esta conclusión no está explícita, pero, habiendo leído el pasaje y conociendo el contexto, debería ser obvio que es a lo que Mill pretende llegar.

Por otro lado, ¿cuál es su argumento? Bueno, parte de dos premisas. La primera parece ser que Kant «fracasa [. . . ] en la demostración de que habría alguna contradicción [. . . ] en la adopción por todos los seres racionales de las reglas de conducta más atrozmente inmorales». ¿Contradicción con qué? Bueno, contradicción con su principio. Así que la primera premisa podría ponerse así: «No hay contradicción entre el principio de Kant y la adopción por todos los seres racionales de las reglas de conducta más atrozmente inmorales». La segunda premisa parece ser estar sugerida por esta idea: «Todo cuanto demuestra que las consecuencias de su adopción universal serían tales que nadie se decidiría a incurrir en ellas.» Parafraseando, tendríamos esta proposición: «De esto se sigue que las consecuencias de la adopción universal del principio de Kant serían tales que nadie se decidiría a incurrir en ellas».

Hasta ahora, tenemos esto:

- *Premisa 1*: No hay contradicción entre el principio de Kant y la adopción por todos los seres racionales de las reglas de conducta más atrozmente inmorales.
- *Premisa 2*: De esto se sigue que las consecuencias de la adopción universal del principio de Kant serían tales que nadie se decidiría a incurrir en ellas.
- *Conclusión*: El principio de Kant no es origen y fundamento de la obligación moral.

Esta es una paráfrasis suficientemente buena de la primera cita de Mill. Ve cuánto hemos dejado fuera y cuánto hemos vuelto a frasear o hasta a agregar. Todo esto lo hicimos con el fin de extraer el argumento que Mill ofrece, depurado de giros retóricos («fracasa, casi grotescamente», por ejemplo) o de información que no es relevante para su argumento. Lo hicimos siempre con la intención de tener claridad acerca de qué quiere concluir Mill y en qué premisas se basa; intentamos seguir el principio de caridad al no atribuirle cosas que es obvio que no tenía en mente.

Por supuesto, el argumento de Mill, como lo hemos puesto, es un *entimema*: para que la conclusión se *siga*, se *infiera correctamente*, de las dos premisas, hace falta información adicional. Una buena reconstrucción de un argumento —siguiendo el principio de caridad, se le llama una reconstrucción **caritativa**— puede suplementar estas ideas que faltan para vincular deductivamente a las premisas y la conclusión. Nos quedaría algo así:

- *Premisa 1*: No hay contradicción entre el principio de Kant y la adopción por todos los seres racionales de las reglas de conducta más atrozmente inmorales.
- *Premisa 2*: Si pasa lo dicho en la premisa 1, entonces las consecuencias de la adopción universal del principio de Kant serían tales que nadie se decidiría a incurrir en ellas.
- *Premisa 3*: Si nadie decidiría a incurrir en las consecuencias del principio de Kant, entonces este no es origen y fundamento de la obligación moral.
- *Conclusión*: El principio de Kant no es origen y fundamento de la obligación moral.

Este argumento es mucho más explícito, y podemos ver cómo es el que Mill podría estar pensando en su cita original, depurada de retórica e información irrelevante. Si piensas que no es el argumento de Mill —que lo hemos transformado hasta hacerlo irreconocible—, es buena idea regresar a la cita original y pensar qué premisas o conclusiones podrían estar faltando. (Incluso, ¡podrías volver a cuestionar si de hecho *hay* un argumento ahí!)

### 2.5.3. La forma estándar

Vamos a convenir en usar una manera estandarizada de representar a los argumentos. Una vez que hemos individuado al argumento —es decir, que hemos separado los que son meros factores contextuales, así como elementos de «paja» o «relleno»— y descubierto cuáles son sus premisas y su conclusión, vamos a representarlo de una manera sistemática y uniforme.

**Definición 8: Forma Estándar de un Argumento**

La forma estándar de un argumento es la siguiente:

1. [*Primera premisa*]
2. [*Segunda premisa*]

$\vdots$

$\therefore$ [*Conclusión*]

Uso los tres puntos verticales («$\vdots$») para decir que puede haber más premisas (¡incluso puede haber solamente una!) El símbolo «$\therefore$» es, por supuesto, el símbolo para la expresión «Por lo tanto», que indica cuál es la conclusión.

La ventaja de utilizar la forma estándar es que nos permite tener absoluta claridad sobre cuáles son las premisas y cuál es la conclusión.

**Ejercicio # 10**

Pon cada uno de los argumentos del ejercicio de la página 43 en la forma estándar, poniendo las premisas implícitas que fueran necesarias.

## 2.6. Tipos de argumentos

Una clasificación usual de los argumentos los divide en dos grandes grupos:

- Argumentos deductivos.
- Argumentos no-deductivos o probabilísticos.

No es la única clasificación posible, pero su generalidad y simplicidad la hacen muy atractiva, así que la adoptaremos aquí.

La clasificación toma un aspecto esencial de los argumentos: la relación de inferencia que contienen. Podríamos intentar diseñar clasificaciones alternativas, que tomaran en cuenta diferencias en premisas y/o en conclusión. Pero (1) ya hemos visto que algunas maneras de diferenciar entre tipos de premisas, y algunas maneras de diferenciar entre tipos de conclusión, son bastante poco exactas (sec. 2.4.6), y además (2) dos argumentos *distintos* pueden poseer las mismas premisas, o la misma conclusión o *incluso* las mismas premisas y la misma conclusión. Esto indica que el criterio de clasificación no debería basarse en las premisas, ni en la conclusión, sino en la manera en que las premisas apoyan a la conclusión: es decir, en la *inferencia*.

### 2.6.1. Argumentos deductivos

Los argumentos deductivos se pueden caracterizar así:

Definición 9: Argumentos deductivos

Los argumentos deductivos son aquellos en los que la relación de inferencia puede clasificarse como **válida** o **inválida**.

Es muy importante recordar que la noción de «validez» en la definición 9 **no** es la noción «cotidiana» de validez. En la noción cotidiana, solemos decir que algo «es válido» cuando «se vale» o es adecuado para ciertos fines que suponemos en ese momento. Bajo ese concepto cotidiano, un argumento contaría como «válido» en una circunstancia específica si fuera «bueno» darlo en ese contexto, pero podría no ser «válido» en otro momento. Esta noción cotidiana **no** es la noción de validez de la lógica. Esta noción es un *concepto técnico*, un tecnicismo propio de la lógica formal. Ahora lo definiremos y después vamos a notar algunas de sus relaciones con otros conceptos importantes.

### 2.6.2. Concepto de validez

Tenemos un concepto *general* de validez. Este es:

Definición 10: Validez

Un argumento es válido siempre y cuando no exista ninguna situación lógicamente posible en la que sus premisas sean todas verdaderas, pero la conclusión falsa.

Hay varias definiciones equivalentes (es decir, que dicen lo mismo con palabras distintas). Estas son algunas:

- Un argumento es válido siempre y cuando: en toda situación lógicamente posible en la que sus premisas sean todas verdaderas, la conclusión también es verdadera.
- Un argumento es válido siempre y cuando: es lógicamente necesario que: si las premisas son verdaderas, también la conclusión es verdadera.
- Un argumento es válido siempre y cuando: es lógicamente imposible que: las premisas sean verdaderas pero la conclusión sea falsa.

Tomaremos todas estas definiciones como siendo realmente una sola, dada su equivalencia.

Nota que la definición 10 implica que **un argumento válido puede tener una conclusión falsa**. Sólo que en ese caso, debe suceder que al menos una de sus premisas sea falsa también. Esa definición también implica que **un argumento puede ser válido aún cuando tenga premisas falsas**. La validez no siempre asegura verdad: solamente asegura la verdad de la conclusión cuando todas y cada una de las premisas sean verdaderas.

Por otro lado, a partir de la definición 10, se sigue directamente qué se requiere para que un argumento sea **in**válido.

**Definición: Invalidez**

Invalidez Un argumento es *in*válido siempre y cuando: hay alguna situación lógicamente posible en la que sus premisas sean todas verdaderas, pero la conclusión es falsa.

### Situaciones lógicamente posibles

En la definición de validez que vimos arriba, una **situación** es un *caso*, un *escenario*, una *realidad*, un *mundo* o un *universo*. Y decimos que una situación es **lógicamente posible** siempre y cuando no sea auto-contradictoria. De manera equivalente, una situación será lógicamente *im*posible cuando *sí* sea auto-contradictoria.

### Forma y modalidad

El concepto de validez lógica se ha relacionado, tradicionalmente, con otros dos conceptos: el de **forma** y el de **necesidad** lógicas.

Empecemos con el segundo concepto. Validez y necesidad lógica se relacionan porque en un argumento válido (por definición) las premisas *implican necesariamente* a la conclusión. Este segundo concepto es el que capturamos con la definición anterior (10). En ella, se entiende que algo es lógicamente necesario cuando ocurre en todo caso lógicamente posible, es decir, en todo posible caso que no sea auto-contradictorio. Esto quiere decir, de nuevo, lo siguiente: en un argumento válido, **en todo caso posible en el que las premisas sean verdaderas, lo será también la conclusión**.

**ejemplo 5**

Considera el siguiente ejemplo de argumento deductivo:

1. El mundo se acaba en el año 2000.
2. Si el mundo se acaba en el año 2000, entonces el mundo no existe en el año 2001.

∴ El mundo no existe en el año 2001.

Es claro que la premisa 1 es falsa: el mundo no se acabó en el año 2000. Sin embargo, podemos imaginar una situación en la que el universo implote en el año 2000 (¡Sería un universo muy distinto al nuestro! Pero esa situación es lógicamente posible porque no involucra ninguna auto-contradicción.) Y además, en esa situación meramente posible, que el mundo acabe en el año 2000 conlleva que el mundo no exista en el año 2001; por lo que se seguiría que el mundo no existe en el año 2001. Esto ejemplifica la noción de necesidad: en toda circunstancia posible en la que las premisas 1 y 2 sean verdaderas, la conclusión también lo será —aún cuando la realidad concreta no sea una situación en la que las premisas sean verdaderas; como en este caso, que 1 es falsa.

Resta hablar sobre el primer concepto. Una concepción tradicional es que un argumento válido lo es *en virtud de su forma lógica*. Que sea válido *en virtud de* su forma lógica, significa que: si un argumento particular es válido, entonces todo argumento que tenga la misma forma lógica que ese primero, también será válido. Y que lo sea en virtud *de su forma lógica* significa que la validez se debe no al contenido, sino a la **estructura**.

¿Qué es esta forma lógica? Es la estructura del argumento en el que se ha quitado toda la «materia» y solamente queda la forma. La materia consiste en los términos que no son *constantes lógicas*; a su vez, la forma de un argumento viene dada por las constantes lógicas que aparecen en ese argumento. (Como analogía, piensa que las constantes lógicas son el molde, y la materia del argumento es la masa de galletas: el argumento concreto sería la masa en el molde.) Por supuesto, todavía no hemos definido la noción de constante lógica; esto lo haremos hasta la sección 4.1.2.

Por ahora, solamente piensa que: si un argumento es válido, entonces todo argumento que tenga la misma forma lógica también será válido. Es por eso que, **primordialmente, la validez es una propiedad de las formas de argumento**. Revisaremos muchas de estas estructuras de argumento válidas en este libro.[24]

**ejemplo 6**

Considera el siguiente ejemplo de argumento deductivo:

> *Quien ama es sabio. Pues todo el que ama, sabe que el amor es emoción y éxtasis, y requiere de cimientos firmes. Y quien sabe que el amor es emoción y éxtasis y requiere de cimientos firmes, ha llegado a la sabiduría.*

Podríamos parafrasear este argumento y acomodarlo en la forma estándar (según la sección 2.5) de la siguiente manera:

1. Todo el que ama, sabe que el amor es emoción y éxtasis, y requiere de cimientos firmes.

2. Todo el que sabe que el amor es emoción y éxtasis y requiere de cimientos firmes, es sabio.

∴ Todo el que ama es sabio.

Ahora bien, este argumento tiene la forma lógica que sigue —aunque, por ahora, si no lo alcanzas a ver, te voy a pedir que solamente me lo creas: podremos comprobarlo definitivamente hasta el capítulo 10.

1. Todo el que es $X$, es $Y$.
2. Todo el que es $Y$, es $Z$.

∴ Todo el que es $X$, es $Z$.

Como resulta que esta forma lógica es válida (algo que también podremos comprobar solamente hasta el capítulo 11), todo argumento que tenga esta misma forma lógica va a ser igualmente válido. En particular, este lo es:

1. Todo el que es un árbol, ladra.
2. Todo el que ladra tiene una garganta.

∴ Todo el que es un árbol tiene una garganta.

Por supuesto, la premisa 1 es falsa —y también la conclusión. ¿Cómo puede ser esto? Porque la validez de un argumento no siempre asegura la verdad de su conclusión: **solamente asegura verdad cuando todas las premisas son verdaderas**. Así, el argumento anterior es válido con premisas falsas, y por eso no asegura que su conclusión sea verdadera.

### Solidez

Como notamos arriba, la definición de validez permite que haya argumentos válidos con premisas falsas. Para argumentos así, la mera validez no garantiza la verdad de la conclusión.

Un argumento que es válido y *además* solamente tiene premisas verdaderas se conoce como un argumento **sólido** o **correcto** (en inglés, «*sound*»).

Definición 11: Solidez

Un argumento es sólido siempre y cuando sea válido y además todas sus premisas sean verdaderas.

Claramente, se sigue de la definición 11 que la conclusión de todo argumento sólido es verdadera: como, según la definición sus premisas son verdaderas, y como es válido, la verdad de las premisas necesariamente se preservará en la conclusión.

Un argumento sólido es el «estándar de oro» de la argumentación deductiva. Con él, tenemos asegurado el conseguir la verdad. ¡Sólo que, por supuesto, debes asegurarte de tener premisas verdaderas y una forma válida!

#### Verdad y validez

Hay algo que debemos notar ahora y que es importante recordar siempre. Lo resaltaré porque me interesa mucho que grabes esto (si no lo has grabado ya) en tu memoria:

> Los argumentos no son verdaderos ni falsos. Sólo las proposiciones lo son. Los argumentos pueden ser válidos o inválidos, fiables o no fiables, y correctos o incorrectos, pero nunca verdaderos ni falsos.

Parte de la definición de una proposición, como se dio arriba (definición 3), es como un objeto que es un *portador de verdad.* Ninguna otra cosa es portadora de verdad: ninguna puede ser verdadera o falsa. (Por supuesto, en el lenguaje cotidiano decimos cosas como «¡Ese es un auto de verdad!» para decir que *es un auto de mucha calidad*, o que *se acerca a un ideal.* En la lógica vamos a usar el lenguaje preciso y bien definido, y evitaremos estos usos coloquiales.) Los conceptos de «validez», «fiabilidad» y «corrección» que he mencionado son los que definimos arriba (definiciones 10, 13, y 11, respectivamente). Pero recuerda esto: la noción de verdad es para proposiciones; la noción de validez (y de fiabilidad), para argumentos.

(Por supuesto, estamos usando el *lenguaje técnico* de la lógica: estamos definiendo conceptos de manera rigurosa, y apartando ciertas palabras del Español para referirnos a ellos. En el lenguaje cotidiano, es normal utilizar adjetivos como «válido» y «confiable» para muy distintas cosas. No importa: cuando hablemos de lógica vamos a utilizar el lenguaje especializado.)

### 2.6.3. Argumentos probabilísticos

Podemos caracterizar así a los argumentos no deductivos o probabilísticos:

> **Definición 12: Argumento Probabilístico**
>
> Los argumentos probabilísticos son los que contienen a una relación inferencial que puede clasificarse como **fiable** o **no fiable**, pero que no tiene sentido caracterizarla como *válida* o *inválida*.

¿Por qué no tiene sentido caracterizar a la relación inferencial en un argumento probabilístico como válida o inválida? La respuesta es sencilla: *¡Porque ninguna es válida!* Es como si hiciéramos una «clasificación» de los seres humanos así:

- Por un lado, los seres humanos que son piedras,
- Por el otro lado, los seres humanos que *no* son piedras.

Esta «clasificación» es inútil: ¡Ningún ser humano es una piedra! En general, al clasificar un conjunto de cosas, buscamos *distinguirlas*: separarlas por una característica que tengan en común con otras, pero no con todas. La clasificación de los humanos por quiénes son y quiénes no son piedras, no sirve para ello. Lo mismo sucede con la clasificación de los argumentos probabilísticos por cuáles son y cuáles no son válidos.

Que los argumentos probabilísticos no sean válidos significa, de acuerdo a la definición 10, que existen casos lógicamente posibles en los que las premisas son verdaderas, pero la conclusión no. Sin embargo, según la definición 12, estos pueden ser fiables o no fiables. A su vez, podemos definir así al concepto de fiabilidad:

Definición 13: Fiabilidad

Un argumento es fiable siempre y cuando: las premisas elevan la probabilidad de que la conclusión sea verdadera.

La noción de «elevar la probabilidad» viene, por supuesto, de la teoría matemática de la probabilidad. La idea es que la verdad de la conclusión *dando por sentado la verdad de las premisas* sea más probable que la verdad de la conclusión por sí misma (la conclusión «solita»). Si esto sucede, el hecho de que las premisas sean verdaderas conlleva el que sea *más probable* que la conclusión sea verdadera. En un capítulo posterior (el capítulo 16) hablaremos más sobre los argumentos probabilísticos y la noción de probabilidad. Por el momento, veamos un par de ejemplos.

**ejemplo 7**

Para un ejemplo de argumento probabilístico fiable, primero consideremos esta hipótesis:

Todos los automóviles tienen un árbol de levas.

¿Qué tan probable te parece que esta afirmación sea verdadera? Bueno, supongamos que no sólo te doy esa afirmación, sino que *además* te doy las siguientes:

1. Todo automóvil contiene un motor,
2. Los motores de combustión interna son los más eficientes,
3. Todo motor de combustión interna contiene un árbol de levas.

Si consideras estas tres ideas, pensarás que es más probable que la anterior sea verdadera. Es decir: el argumento cuyas premisas son 1, 2 y 3, y cuya conclusión es la afirmación de que *Todos los automóviles tienen un árbol de levas*, es un argumento fiable. Y es fácil ver por qué es fiable: porque, si sus premisas son verdaderas, eso hace que su conclusión sea más probablemente verdadera.

Nota que estamos hablando *solamente* de la relación entre las premisas 1, 2, 3, y la conclusión. Esta relación puede existir aún si las premisas no son verdaderas (de hecho, las premisas 2 y 3 son falsas). La relación se mantiene aún en ese caso: *suponiendo* que las premisas sean verdaderas, la conclusión tiene mayor probabilidad de serlo.

Hemos visto la definición de un argumento probabilístico: es aquel cuya inferencia puede ser fiable o no fiable. Es decir: es un tipo de argumento en el que sus premisas hacen más probable a su conclusión, si es que es un *buen* argumento; o en el que sus premisas *no* hacen más probable a su conclusión, si es que es un *mal* argumento.

A su vez, los argumentos probabilísticos se suelen clasificar así:

$$\text{Probabilísticos: }\begin{cases} \text{– Inductivos} \\ \text{– Analógicos} \\ \text{– Abductivos (inferencia a la mejor explicación)} \end{cases}$$

En el capítulo 16 hablaremos con algo más de detalle sobre los argumentos probabilísticos.

Hice algunos videos donde también explico varios de los conceptos de este capítulo, te podría interesar revisarlos:

- *Concepto de argumento*: `youtube.com/watch?v=KUOLaXcoHUw`
- *La estructura de un argumento*: `youtube.com/watch?v=iEyYJjKGdvo`
- *Premisas implícitas y explícitas*: `youtube.com/watch?v=6NANYfRziUo`
- *Marcadores argumentales*: `youtube.com/watch?v=t1YlSJted4s`
- *Concepto de fiabilidad*: `www.youtube.com/watch?v=fjJzgf9_x6o`

### 2.6.4. ¿Argumentos conductivos? *

Algunos autores proponen la existencia de un tipo de argumento que no es ni deductivo, ni abductivo, ni inductivo, y le llaman «argumento conductivo».[25] Estos argumentos, según sus proponentes, se usa en contextos *deliberativos*: es decir, en contextos en los que hay que tomar una decisión. Por ello, se piensa que los argumentos conductivos están esencialmente dirigidos a la práctica y la acción.

Hay dos características que, según los autores que los proponen, definen a los argumentos conductivos. La primera es que, en un argumento conductivo, las premisas apoyan la conclusión de manera independiente o **convergente**: pueden no estar relacionadas entre sí, y cada una apoya a la conclusión sin necesidad de las otras. La segunda es que los argumentos conductivos pueden incluir lo que Wellman llamó «**premisas negativas**»: razones que apoyan la *falsedad* de la conclusión.[26]

Así, podríamos pensar a un argumento conductivo como una lista de «pros» y de «contras» respecto a una idea, que es la conclusión. La evaluación de un argumento conductivo sería en términos de qué tanto pesan las razones a favor y en contra.

Algunos autores niegan la existencia de argumentos conductivos como una categoría separada de argumento. Por ejemplo, de acuerdo con Possin (2016; *cf.* Adler 2013), lo que se ha tomado como argumento conductivo suele ser, o bien meramente un argumento inductivo, o bien, constituyente de un *artículo* argumentativo.

De cualquier forma, como hemos dicho, la evaluación de un argumento conductivo es mediante la evaluación de la «fuerza final», digámoslo así, de las premisas a favor —donde esta fuerza final considera la fuerza de las premisas a favor y les «resta» la fuerza de las premisas en contra. Pero para evaluar esta fuerza vamos a necesitar de las técnicas de evaluación de apoyo evidencial o lógico que una premisa le brinda a una conclusión, por lo que en este libro no nos enfocaremos en este tipo de argumentos.

## Resumen del capítulo

- ★ Una *proposición* es el contenido informacional, el significado de una oración declarativa.
- ★ Un *argumento* está compuesto de premisas, inferencia y conclusión.
- ★ Mientras que la verdad es una característica que pueden poseer las proposiciones, la validez es una característica que pueden poseer los argumentos.
- ★ Existen ciertas palabras, los *marcadores de argumento*, que nos ayudan a distinguir un argumento en un contexto.
- ★ Los *marcadores de premisas* indican la presencia de la premisas de un argumento.
- ★ Los *marcadores de conclusión* o *de inferencia* indican la presencia de la conclusión de un argumento.
- ★ Los argumentos que parecen tener varias consecuencias se pueden ver como varios argumentos encadenados, donde la conclusión de un uno es la premisa de otro.
- ★ Los argumentos se clasifican en dos tipos, dependiendo de tipo de *inferencia* que contengan:
    - *Deductivos*: aquellos que pretenden ser *válidos.*
    - *Probabilísticos*: aquellos que pretenden ser *fiables.*
- ★ Los argumentos se usan para justificar la verdad de una proposición, al inferirla de otras proposiciones; las explicaciones se usan para citar las causas que generaron un hecho.

## capítulo

## 3

# Lógica: filosofía, matemática, modelo y arte

## Contenidos del capítulo

## Objetivos de aprendizaje

1. Que te familiarices con los distintos aspectos de la lógica; incluyendo su historia como rama de la filosofía y su emergencia como un área de las matemáticas.
2. Que entiendas en qué sentido la lógica es un modelo de la argumentación.
3. Que consideres a la lógica también como un arte, una técnica que puede practicarse.
4. Que te familiarices con los componentes de un sistema lógico, que es el tipo de aparato matemático con el que vamos a comenzar a modelar argumentos.

## 3.1. Los orígenes filosóficos y matemáticos de la lógica

La lógica surgió, indiscutiblemente, como rama de la filosofía. Aristóteles escribió sus famosos tratados de lógica, entre ellos los *Primeros Analíticos*, para sistematizar a a la ciencia de la deducción. Este fenómeno había sido estudiado antes en la lógica hindú; por ejemplo, en la escuela Jaina o en los Nyāayasutras.[27] Como otro ejemplo, es fácil concebir al *Eutidemo* de Platón como una divertidísima exposición de las falacias más elementales. Probablemente, el desarrollo de la lógica en el seno de la filosofía llegó a su cúspide cuando (en su *Crítica de la Razón Pura*), Kant llegó a pensar que era una ciencia finalizada.[28]

Pero también es ampliamente aceptado que la lógica contemporánea, al menos en su aspecto más puro, es una rama de las matemáticas.[29]

La lógica matemática es uno de los más grandes resultados de la interacción entre la matemática y la filosofía desde la segunda mitad del siglo XIX hasta la primera del XX. Grandes genios filosófico-matemáticos contribuyeron a esto, aplicando herramientas de diversas ramas de las matemáticas descubiertas (¡o inventadas!) en su tiempo: el resultado de las ideas de, entre otros, Boole, De Morgan, Peirce y Frege de utilizar herramientas del álgebra (el estudio de las operaciones para combinar elementos de un conjunto), el análisis (la teoría de las funciones), la combinatoria y, posteriormente, la teoría de conjuntos, para entender el concepto de la *inferencia válida*.[30]

Los proyectos filosóficos y matemáticos de estas diferentes personalidades eran muy variados, pero durante este período revolucionario, un tema en común daba el hilo conductor: los fundamentos de las matemáticas. Se pensaba que la lógica podía *fundamentar* a la matemática, en el sentido de que las suposiciones básicas de ésta eran *demostrables* a partir de principios puramente lógicos. En las últimas décadas del siglo XIX, grandes matemáticos como Peano o Dedekind ya habían logrado avances definiendo distintos sistemas numéricos y haciendo completamente explícitos los principios fundamentadores de la aritmética y la teoría de los números, mientras que Hilbert había establecido los fundamentos de la geometría y Cantor había demostrado, mediante su teoría de los conjuntos, que existen distintos tamaños de infinito.

Desde entonces, la lógica matemática pasó a formar un área de las matemáticas puras, y fue desarrollada por personalidades como Russell, Zermelo, Gödel, Church, Skolem, o Tarski. La historia de ese proyecto y de la «crisis de los fundamentos» es larga e interesante, pero no puedo darla aquí.[31]

Hoy en día, la lógica matemática tiene aplicaciones muy variadas, pero sobre todo (hablando fuera de la filosofía y las matemáticas mismas) en temas relacionados con la computación: desde el inicio, con Turing, hasta llegar a la ingeniería contemporánea, donde ciertas lógicas no clásicas se aplican en sistemas de diagnóstico del Alzheimer.[32]

## 3.2. La lógica como modelo

Sin embargo, la lógica que estudiamos en los cursos de lógica para la argumentación *no* es *solamente* matemáticas puras. Incluye algo de matemáticas puras, por supuesto. Pero es, sobre todo, **matemáticas aplicadas**.

La característica esencial de las matemáticas aplicadas es que son matemáticas que se usan para diseñar un **modelo** de la realidad física, material. Un modelo es una **representación científica** de un fenómeno, que *abstrae* o *idealiza* o de otra forma *ignora* algunos de sus aspectos para enfocarse en otros. Un modelo es una *representación* de los fenómenos o sistemas modelados, y es un objeto que se puede manipular para que nos provea *información* acerca de ellos (*cf.* la figura 3.1).

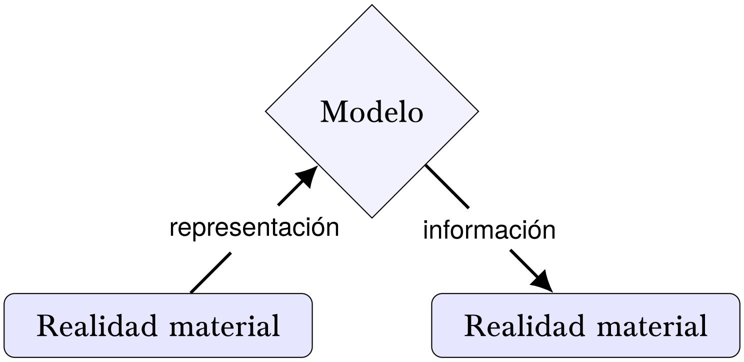


Figura 3.1: *Esquema muy simplificado del uso de modelos.*

**ejemplo 8**

Las maquetas del sistema solar hechas con bolas de unicel, que representan a los planetas en sus órbitas alrededor del Sol, son un ejemplo muy bien conocido de un modelo. Este representa al sistema solar y sus partes, aunque ignorando algunos detalles irrelevantes para nuestro propósito –como la composición química de los planetas– o escalando varias propiedades –como sus distancias y tamaños.

La importancia de los modelos, en general, es que nos permiten resolver problemas acerca del sistema representado, manipulando el modelo. El caso que nos interesa aquí es el caso de los *modelos matemáticos*, pues la lógica formal es un modelo matemático de la argumentación. Tomaremos el punto de vista, digamoslo así, de la ingeniería: aplicando técnicas matemáticas para entender y manipular un fenómeno, y para *construir* más casos de ese fenómeno.

Estamos familiarizados con los modelos matemáticos desde que iniciamos nuestra educación más básica. Veamos un ejemplo.

**ejemplo 9**

Tenemos el problema de querer saber cuántas naranjas en total tienen Martita y Luisito. Sabemos que Luisito tiene 5 naranjas y que Martita tiene 10. Entonces, la ecuación:

$$5 + 10 = x \tag{3.1}$$

es un modelo de nuestro problema. La solución, por supuesto, es obvia: $x = 15$, que es el número de naranjas que tienen conjuntamente.

Pero lo elemental de este modelo no debe hacernos perder de vista que es eso: un modelo. Al haber representado el número de naranjas que tiene Luisito como una cantidad matemática –el número 5, que *en y por sí mismo* no tiene nada que ver con naranjas, o con ninguna fruta ni objeto material alguno– y haber hecho lo mismo con el número de naranjas de Martita, damos un paso enorme: tenemos a nuestra disposición todas las técnicas de las matemáticas puras. Cuando sumamos 5 más 10, no estamos haciendo ninguna operación particular con las naranjas: estamos sumando números. Como nuestro conocimiento de la suma nos permite llegar inmediatamente al resultado, el haber pasado mediante el modelo (la ecuación 3.1) nos permite conocer algo sobre la realidad al manipular números en abstracto.

Un *buen* modelo nos representa no solamente *un solo* caso, sino un conjunto de ellos: *un modelo es siempre una representación de un tipo de fenómenos*, cuando nos interesa *obtener información acerca de un aspecto de ellos.* Por ejemplo, el modelo que usamos arriba, la ecuación 3.1, en realidad es un caso muy particular de un modelo mucho más general, que podríamos definir así:

$$T = L + M, \tag{3.2}$$

donde $T$ representa el número total de las naranjas que tienen ambas personas, $L$ las naranjas que tiene Luisito en alguna circunstancia, y $M$ el número de naranjas que tiene Martita en esa misma circunstancia. Visto así, 3.2 es un modelo que nos permite la obtener información adecuada en todo caso posible en que queramos saber cuántas naranjas tienen en total Martita y Luisito: si Martita gana una naranja o Luisito pierde tres, el modelo 3.2 sigue siendo adecuado.

Por supuesto, el ejemplo de las naranjas es extremadamente elemental; pero sirve bien para resaltar algunas características de los modelos que es importante notar en el modelo que la lógica hace de la argumentación.

Como sucede con todo modelo, al utilizar a la lógica para representar al fenómeno de la argumentación, ignoramos algunas características de éste para enfocarnos en otras. ¿Es esto necesariamente malo? No. Un modelo que fuera igual de complejo que el fenómeno que intenta representar ya no sería un modelo — ¡sería el mismo fenómeno![33]

Así, como con los planetas de unicel, el modelo de la lógica formal no va a recuperar todo en el fenómeno de la argumentación. ¿Recuperará lo suficiente? Bueno, qué cuenta como «suficiente» depende de nuestros fines. El modelo de los planetas de unicel representa «lo suficiente» si nuestro interés es conocer cómo están anidadas las órbitas de los planetas de nuestro sistema solar. Pero, ciertamente, no representa «lo suficiente» si lo que queremos es representar las proporciones de tamaños entre los planetas y el Sol, por ejemplo.

Entonces, ¿qué es lo «suficiente» que representa el modelo de la lógica formal?

La respuesta usual es: la *validez* de una cierta clase de argumentos. Pero deja de lado, como hemos visto anteriormente, otros aspectos: a saber, todo aquéllo que cae fuera del uso informativo del lenguaje, en su aspecto argumentativo; específicamente, todo aquéllo del lenguaje que no sea proposicional. (En particular, LC0 deja fuera todo aquéllo que no sea veritativo-funcional.)

¿Es esto malo? Bueno, no hay tal cosa como «lo malo» en un sentido absoluto, sino sólo en un sentido relativo a nuestros fines: si nuestro fin es hacer un análisis preciso y exacto del discurso en su aspecto argumentativo-deductivo, la lógica formal es una excelente herramienta para modelar ese aspecto. Si nuestro fin es distinto, probablemente sea mejor buscar en otro lugar. Pero en un curso de lógica para filosofía buscamos enfocarnos precisamente en el aspecto argumentativo-deductivo del lenguaje —para analizarlo, para entenderlo, y para aplicarlo— y es por ello que es tremendamente útil entender y manejar bien el sistema de la lógica formal.

## 3.3. La lógica como arte: Argumentación en contexto

Un científico puede saber mucho sobre la naturaleza de la luz y la perspectiva, pero estar negado para el arte del dibujo. En cambio, un buen pintor conocerá (al menos de manera general) algunos detalles sobre la luz, pero también será muy hábil al conectar ese conocimiento teórico con su práctica, de manera que pueda representar una escena profunda, tridimensional, en un lienzo. El científico tiene el conocimiento teórico de la óptica y la geometría proyectiva, mientras que el pintor ha logrado entender lo esencial de este conocimiento para usarlo en una práctica, que también tiene que entrenarse.

Tener un arte, entonces, va más allá de conocer los conceptos y afirmaciones de una teoría, va más allá de entender esa teoría y esos conceptos en un contexto más amplio: también requiere usar ese conocimiento para forjar y entrenar una práctica.

Además de una ciencia, la lógica también es la familia de técnicas que nos permiten aplicar las reglas abstractas del razonamiento correcto a los razonamientos que encontramos y producimos todos los días. Usando estas técnicas —que aprenderemos y entrenaremos en este libro— podremos identificar en dónde hay un argumento, cómo evaluarlo, cómo criticarlo, y cómo producir nuevos argumentos.

Ya hemos revisado, y practicado mediante ejercicios, algunas de estas habilidades lógicas, esenciales para que el modelo de la lógica sea útil para entender a la argumentación:

- Poder identificar en dónde hay un argumento y en dónde nos estamos enfrentando con un discurso no argumentativo (secciones 1.3, 1.4).
- Poder complementar a un argumento, distinguiendo las premisas implícitas que supone (secciones 2.3.1 y 2.5).
- Poder separar o diferenciar lo que pertenece a un argumento y lo que forma parte del contexto discursivo pero que no es parte del argumento (secc. 2.5).
- Poder interpretar un fragmento de discurso bajo el *principio de caridad* (secciones 1.2.2 y 2.5).

Estas las vamos a volver a usar en los siguientes capítulos. Otras habilidades forman parte de los contenidos de los siguientes capítulos, o las volveremos a revisar en distintos contextos:

- Poder parafrasear el argumento en un discurso, hablado o escrito, de manera que su estructura lógica sea clara.
- Poder transformar un problema concreto a uno en el que las técnicas lógicas sean aplicables directamente.
- Poder dominar las diferentes técnicas de modelado que estudiaremos en este libro: la formalización de argumentos en el lenguaje natural, la operación con las reglas matemáticas de los sistemas lógicos, y la interpretación de argumentos en el lenguaje formal.
- Poder aplicar razonamientos correctos para ámbitos como la toma de decisiones y la exposición de ideas.

Como he dicho, este libro básicamente está hecho para ayudarte a adquirir y entrenar estas capacidades.[34]

Además de las mencionadas, también debemos ejercitar las capacidades universales, y los principios básicos, del diálogo racional que he mencionado antes: la habilidad prudencial sobre cuándo es apropiado aplicar el análisis lógico (secc. 1.2.1), el principio de caridad (secc. 1.2.2), y las máximas comunicativas de Grice (secc. 1.2.3).

## 3.4. Los componentes de un sistema lógico

Hemos dicho que usaremos a la lógica matemática como un modelo de las inferencias deductivas del lenguaje natural (así como Newton utilizaba al cálculo y la geometría como un modelo de las fuerzas mecánicas). A este modelo –la lógica matemática interpretada como lógica del lenguaje natural– le llamaré «**lógica formal**».

La lógica formal siempre utiliza un particular *sistema lógico* estudiado en la lógica matemática. Ahora definiremos esta noción.

**Definición 14: Sistema Lógico**

Un sistema lógico consiste de los siguientes elementos:

- Lenguaje
- Teoría de modelos (semántica formal)
- Teoría de la demostración (aparato deductivo)

A su vez, cada uno de estos componentes suele tener distintos componentes. En distintos capítulos de este libro estudiaremos los componentes de dos sistemas lógicos: LC0 y LC1=. Nuestro objetivo principal es utilizar estos sistemas como modelos de la argumentación en el lenguaje natural; pero, cuando sea pertinente, no dejaré de notar las características que hacen que estos modelos posean una simplicidad y sistematicidad que los convierte en estructuras elegantes, dignas de estudiarse desde un punto de vista puramente matemático.

Otra manera usual de caracterizar a un sistema lógico es como el conjunto de *verdades lógicas* que determina, o como su *relación de consecuencia lógica*, o como el conjunto de sus *axiomas* y su relación de consecuencia. De varias de estas nociones hablaremos más adelante en este libro.[35] Además, un mismo sistema lógico (individuado de alguna de las maneras anteriores) puede tener más de un aparato deductivo, y más de una semántica formal.[36] De esto también hablaremos más adelante.

## 3.5. LC0 y las lógicas no-clásicas *

Existen muchísimos sistemas lógicos; pero el que es usual revisar en un primer curso introductorio de lógica matemática (o «simbólica» o «formal») se conoce como «**lógica clásica de orden cero**» (o «proposicional» o «de oraciones»; también se conoce como «cálculo proposicional» o «de oraciones»). Le llamaremos, de manera abreviada, «LC0», usando letras sin serifas para distinguirlo.

Como dije, existen muchísimos sistemas lógicos además de LC0. Una clasificación usual (influida por, pero no idéntica a, la clasificación de Susan Haack[37]) es la siguiente:

$$\text{Sistemas lógicos distintos a LC0} \begin{cases} \text{– Extensiones} \\ \text{– Subsistemas} \\ \text{– Rivales} \end{cases}$$

Para explicar estas diferencias voy a recurrir a conceptos —como *verdad lógica* o *lenguaje* de un sistema lógico— que todavía no hemos definido; por lo que probablemente sea más útil regresar a esta sección después de haberlos entendido. Entonces, tendríamos:

**Un sistema lógico $\mathsf{L}_1$ es una extensión de otro**, $\mathsf{L}_2$ o, de manera equivalente, $\mathsf{L}_2$ **es un subsistema de $\mathsf{L}_1$**, cuando la extensión (i) incluye las mismas fórmulas que el subsistema, (ii) el mismo conjunto de verdades lógicas del subsistema, pero también (iii) lenguaje adicional (que no está en el subsistema) y (iv) verdades lógicas adicionales (por ejemplo, la lógica de primer orden que veremos es una extensión de la lógica de orden cero.) Dos sistemas lógicos distintos pueden ser extensiones del mismo sistema (por ejemplo, la lógica clásica de primer orden y la lógica clásica modal de orden cero son ambas extensiones de LC0).

**Un sistema lógico es rival de otro** cuando no es ni una extensión de ni un subsistema del otro. (Por ejemplo, las lógicas conexivas son sistemas rivales de LC0, en este sentido.)

Esta clasificación es bastante cruda. Por ejemplo, la *lógica intuicionista* (que no revisaremos aquí) es un subsistema de LC0, pero fue diseñada bajo un proyecto filosófico y matemático radicalmente opuesto a las motivaciones de la lógica clásica.

Las motivaciones para crear sistemas distintos de lógica pueden ser muy distintas. Cuando se trata de extensiones de la lógica clásica, regularmente la motivación suele ser la idea de que la lógica clásica no es suficientemente *expresiva*: que no puede expresar conceptos y distinciones que expresamos en el lenguaje natural, y de los que nos gustaría estudiar su comportamiento inferencial. Algunos subsistemas se diseñan bajo la idea de que la lógica clásica «demuestra demasiado», en el sentido en que debería (por diferentes razones) tener menos verdades lógicas (como he mencionado sobre la lógica intuicionista, también se ha argumentado esto para las lógicas sub-estructurales). Finalmente, los sistemas rivales suelen ser diseñados ya sea para razonar sobre fenómenos que, se argumenta, no pueden entenderse de forma clásica (como la lógica cuántica), o simplemente se entienden de manera más sencilla con otro tipo de formalismo.

Esta clasificación, como he dicho, es bastante cruda. Además, solamente he hablado de sistemas lógicos para la deducción, pero también han proliferado sistemas para inferencias falibles, abductivas, o inductivas. Será mejor dirigirte a algunos libros de lógicas no clásicas y de filosofía de la lógica para más detalles.[38]

## Resumen del capítulo

- ★ La lógica tiene tres aspectos:
  - *Filosófico*: es el resultado de diversos proyectos filosóficos, entre los que se incluye la sistematización del razonamiento deductivo y la fundamentación de las matemáticas.
  - *Matemático*: es una teoría matemática abstracta que se aplica para modelar un fenómeno concreto: la argumentación.
  - *Técnico*: es una habilidad, una técnica o arte, que puede aplicarse en diferentes contextos, y que requiere de ciertos principios prudenciales para que sepamos cómo y cuándo aplicarla.
- ★ Un sistema lógico tiene varios componentes:
  - Lenguaje,
  - Teoría de modelos,
  - Teoría de la demostración.
- ★ Además de los sistemas lógicos que revisaremos en este libro, existen sistemas de *lógica no clásica*. Estos se suelen dividir en:
  - Extensiones,
  - Subsistemas,
  - Rivales.

## Notas

1. También es fundamental en la filosofía del lenguaje y de la mente. Sin embargo, precisamente debido a ello, existen muchas controversias a su alrededor, que aquí vamos a tener que pasar de largo.

2. Como he mencionado en una nota anterior, se ha propuesto que las oraciones exclamativas *expresan* proposiciones; otros autores defienden que solamente las *presuponen*. Ver la nota de la página 13.

3. Machery (2009: p. 12) argumenta que la siguiente es una descripción de «lo que la mayoría de los psicólogos consideran que son los conceptos»:

> Un concepto de $x$ es un cuerpo de conocimiento sobre $x$ que se almacena en la memoria a largo plazo y que se usa por defecto en los procesos que subyacen a la mayoría, si no a todas, las competencias cognitivas superiores cuando estos procesos dan lugar a juicios sobre $x$.

Algunos libros de texto de lógica todavía identifican a un concepto con la representación de las *carac-*

*terísticas esenciales* de aquello que representa el concepto. Esto es todavía más desafortunado. Aunque hoy en día algunos filósofos aceptan la existencia de esencias (e.g., Fine 1994), y otros han argumentado que el conocimiento de esencias se requiere para todo conocimeinto (Lowe 2012), (i) es debatible que existan las propiedades esenciales; (ii) aún si estas existen, es debatible que las conozcamos, (iii) aún si conocemos algunas, es muy debatible que las debamos conocer para tener conceptos de cualesquiera objetos: la psicología contemporánea parece ir en contra de esta idea. Sobre este último punto, ver Carey 2009; Leslie 2013.

4. Ver Frege 2016: 225-248; Hampton 1999: p. 176; Valdivia 1989.

5. Ver Buroker 2017, §3.2.

6. Basta notar que se le pueden agregar condiciones triviales (es decir, que son satisfechas por todo objeto) a la comprehensión de un concepto, de manera que su extensión permanezca la misma. Por ejemplo: la extensión del concepto «*aquella cosa que o bien es un mamífero implume o bien no es un mamífero y un no-mamífero bajo el mismo aspecto y circunstancia*» es exactamente la misma que la del concepto: «*aquella cosa que es un mamífero implume*».

7. Ver Fodor 1998, donde se argumenta que un enorme número de conceptos son *atómicos*.

8. Fuente: «Molly Amazonas: el pez asexuado que vive en México y Estados Unidos y pone en entredicho a un Nobel de Medicina», *BBC Mundo*: `https://www.bbc.com/mundo/noticias-43056728`

9. Fuente: Leibniz, *Monadología*, §2.

10. Traducido de: «How can keeping limber and fit help with knee pain?», *WebMD*: `https://www.webmd.com/pain-management/knee-pain/qa/how-can-keeping-limber-and-fit-help-with-knee-pain`

11. Fuente: José Ramón López Rubí, «Un argumento lógico sobre el aborto», *Derecho en Acción*: `http://derechoenaccion.cide.edu/un-argumento-logico-sobre-el-aborto/`

12. Adaptado de Armando Alcántara, «La autonomía en las universidades públicas: Vicisitudes de un concepto y una práctica institucional». En H. Muñoz (coord.): *La Universidad pública en México* (pp. 113-145). UNAM; Porrúa.

13. Traducido y adaptado de Robert Spekkens, «The Paradigm of Kinematics and Dynamics Must Yield to Causal Structure», en Aguirre, Foster & Merali (eds.): *Questioning the Foundations of Physics*. Springer, 2015.

14. En esto hay que tener cuidado, pues ese mismo término se utiliza como un nombre para una *paradoja*: un razonamiento aparentemente correcto, que parte de premisas aparentemente obvias, pero que lleva a una contradicción o, al menos, a una conclusión aparentemente falsa. Esta paradoja forma la motivación central para el problema filosófico de la vaguedad, pero en este libro no vamos a revisarla. Para una revisión de las distintas teorías de la vaguedad, ver Paula Tejeiro, «Supervaluar o Revisar», *Manuscrito*, 2016, **39**(3), pp. 149-169.

15. «Por qué se ha disparado el precio del aguacate y hasta cuándo seguirá subiendo», *BBC Mundo*: `https://www.bbc.com/mundo/noticias-49209380`

16. Por ejemplo, según la teoría *nomológico-deductiva* de Hempel, toda explicación científica es un argumento, que parte de leyes generales y condiciones particulares y tiene como conclusión el hecho a explicar. La teoría de Hempel fue muy discutida en el siglo XX y hoy no es muy popular en la filosofía de la ciencia. Pero no es la única teoría de la explicación que recurre a la noción de argumento. Por ejemplo, la teoría *unificacionista* de Kitcher afirma que *explicar un fenómeno* consiste en demostrar que puede la ocurrencia de ese fenómeno se puede derivar de la misma teoría que la ocurrencia de muchos otros fenómenos. Estrictamente hablando, no es a partir de cualquier derivación que se explica un fenómeno, se requiere que esa derivación (o «patrón de argumento», como le llama Kitcher) sea «exigente» o «rigurosa»: *difícil de satisfacer*.

17. «Hay más genes en el microbioma humano que estrellas observables», *La Jornada*, 14 de agosto de 2019.

18. Hawking, Stephen & Leonard Mlodinow: *El gran diseño*. Crítica.

19. Adaptado de Dürr, Goldstein y Zanghi: «Quantum chaos, classical randomness and Bohmian mechanics», p. 263.

20. Garrett, Brian: *¿Qué es eso llamado metafísica?*, p. 25.

21. Tomado de Benkler, Faris, y Roberts: *Network propaganda: Manipulation, disinformation and radicalization in American politics*, pp. 251-352; mi traducción.

22. Hawking, Stephen & Leonard Mlodinow: *El gran diseño*. Crítica.

23. Adaptado de Norbert Elias, *El proceso de la civilización*, p. 449. Fondo de Cultura Económica.

24. Para un estudio lógico y filosófico de estas dos nociones de forma y necesidad, ver Gómez Torrente 2000.

25. El origen de este concepto es el libro de Wellman de 1971, *Challenge and Response: Justification in Ethics*. Wellman se interesaba por las maneras en que podemos justificar nuestras posturas éticas.

26. Hay que notar que la noción de «convergencia» no es exclusiva —a pesar de algunas afirmaciones confundidas— de un argumento conductivo. En un argumento deductivo también se pueden brindar premisas distintas e independientes para la misma conclusión.

27. Sobre la lógica en la India, ver Woods, John & Gabbay, Dov (2004), y la edición especial del *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 40, No. 5, 2011.

28. Ver *Crítica de la Razón Pura*, Bviii. Para una historia de la lógica, ver Martha y William Kneale, 1980.

29. Para una voz de disenso, ver Barceló 2003. Como otro contrapunto a esta afirmación, existen las teorías *logicistas* de la matemática, de acuerdo a las cuales, de hecho la matemática es la que se reduce a la lógica. Estas ideas, cuya semilla se encuentra en Dedekind, se comenzaron a desarrollar por Frege (en sus *Fundamentos de la Aritmética*, ver la traducción en 1972) a finales del siglo XIX, y llevaron a la magnificente obra de Russell y Whitehead, *Principia Mathematica*, cuyos tres volúmenes fueron sucesivamente publicados en 1910, 1912 y 1913. El logicismo ha sido defendido por varios autores recientemente. Ver Tennant 2017.

30. Ver George Boole, *The Laws of Thought* o *Las Leyes del Pensamiento*.

31. Ver, por ejemplo, «Las matemáticas y los metafísicos», de Russell (*Misticismo y Lógica*); Ferreirós (2001); «El problema de la consistencia», en *El teorema de Gödel*, de Nagel y Newman; Hilbert, *Fundamentos de las Matemáticas.*

32. Para una historia de cómo la lógica desde Boole es la semilla de la revolución tecnológica e informacional, ver *The Logician and the Engineer: How George Boole and Claude Shannon Created the Information Age*, de Paul Nahin (Princeton University Press, 2012); para la aplicación de la lógica no clásica en el diagnóstico del Alzheimer, ver, por ejemplo: Lopes *et al.* 'Improved Application of Paraconsistent Artificial Neural Networks in Diagnosis of Alzheimer's Disease' *Neuroscience International*, Vol. 2, 2011.

33. En su *webcomic* «Saturday Morning Breakfast Cereal», Zach Weinersmith hace una excelente broma basada en este hecho.

34. Las habilidades de las que he hablado coinciden en buena parte con la lista que, según Herrera, Madrid, Morado y Rivera, son lo que debe saber de lógica una persona educada. Ver «¿Qué debe saber de lógica una persona educada?», en: `http://www.filosoficas.unam.mx/~Tdl/taller.htm`

35. Si quieres adelantarte, las definiciones de verdad lógica para cada uno de los sistemas lógicos son las definiciones 36 y: 168. Para la noción de consecuencia lógica, puedes ver las definiciones 40 y **??**. Sobre la noción de axioma, ve la caja de la página 42 y la sección 8.1.1.

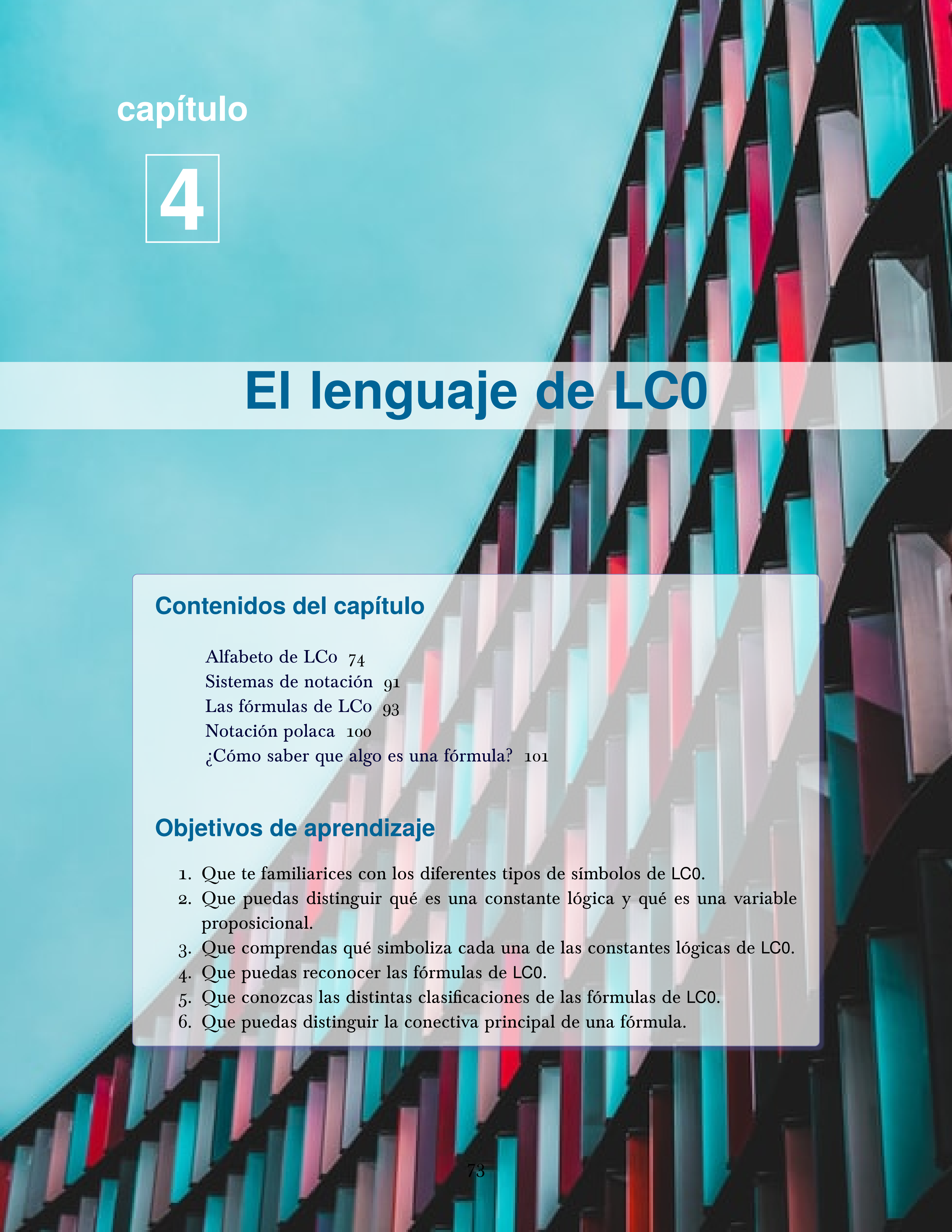
36. Sobre las distintas semánticas formales, ve las sección 6.4 y el capítulo 15. Sobre los distintos aparatos deductivos, ve la sección 8.1.

37. Ver Susan Haack, *Filosofía de la Lógica.*

38. Un reciente libro de filosofía de la lógica es Cohnitz & Estrada González 2019. Un libro muy bueno para introducirte a muchas lógicas no clásicas es Priest 2008. Una introducción mucho más amplia al enorme universo de las lógicas son los múltiples volúmenes —dieciocho, a la fecha— del *Handbook of Philosophical Logic*, editados en Springer por Dov Gabbay y Franz Guenthner.

## IIª PARTE:

# LÓGICA CLÁSICA DE ORDEN CERO



## capítulo

## 4

# El lenguaje de LC0

## Contenidos del capítulo

## Objetivos de aprendizaje

1. Que te familiarices con los diferentes tipos de símbolos de LC0.
2. Que puedas distinguir qué es una constante lógica y qué es una variable proposicional.
3. Que comprendas qué simboliza cada una de las constantes lógicas de LC0.
4. Que puedas reconocer las fórmulas de LC0.
5. Que conozcas las distintas clasificaciones de las fórmulas de LC0.
6. Que puedas distinguir la conectiva principal de una fórmula.

En la definición de *sistema lógico* (definición 14), vimos que un sistema lógico tiene, entre sus componentes, a un lenguaje. De hecho, el lenguaje del sistema lógico que estudiaremos en esta parte —LC0— tiene, a su vez, otros componentes:

$$\text{Lenguaje} = \begin{cases}\text{Alfabeto}\\ \text{Reglas de formación}\end{cases}$$

Vamos a definir estos ahora.

## 4.1. Alfabeto de LC0

Así como el lenguaje Español tiene un alfabeto —compuesto de todas las letras, mayúsculas y minúsculas, así como todos los signos ortográficos y de puntuación— así LC0 tiene el suyo.

El alfabeto de LC0 es el conjunto de símbolos que componen al lenguaje. Con estos símbolos construiremos las «palabras» de la lógica—a las que les llamaremos «*fórmulas*». (Así como, mediante las reglas de la sintaxis y la gramática, construimos palabras, frases y oraciones del Español usando su alfabeto.) Lo definimos como sigue.

**Definición 15: Alfabeto de LC0**

El alfabeto de LC0 se divide así:

$$\text{Alfabeto}\begin{cases}\text{Variables proposicionales: } p, q, r, s, t, u, v, w \dots\\ \text{Conectivas lógicas}\begin{cases}\text{Unaria (monádica): } \neg\\ \text{Binarias (diádicas): } \vee, \&, \supset, \equiv\end{cases}\\ \text{Signos de agrupación: } (,), [,]\end{cases}$$

A «¬» le llamaremos «*la negación*»; a «∨» le llamaremos «*la disyunción*», a «&», le llamaremos «*la conjunción*», a «⊃» le llamaremos «*el condicional material*», y a «≡» le llamaremos «*el bicondicional material*» o también «*la equivalencia material*».

Vamos a ver las características de estos tres componentes del alfabeto.

### 4.1.1. Variables proposicionales

Las variables proposicionales son eso: *variables* que *representan* proposiciones. En realidad, representan a las proposiciones cuando usamos a la lógica como modelo de argumentos en el lenguaje natural. En el nivel del aparato matemático, estas variables simplemente pueden tomar uno de dos posibles valores: verdadero (que denotaremos «**V**») o falso («**F**») —así como las variables del álgebra que viste en bachillerato pueden tomar un número como valor. (Esto lo veremos con más detalle en un capítulo posterior, cuando revisemos la *semántica formal* de LC0.)

Comenzaremos revisando el concepto de variable.

**Definición 16: Variable**

Una variable es un símbolo (de algún lenguaje especificado) que denota, bajo distintas interpretaciones, a distintos objetos de un conjunto específico. Este conjunto se conoce como el *dominio* de la variable.

Por ahora, por «interpretación» entiende solo esto: una interpretación es simplemente una manera (una regla) de asignarle valores a las variables.

Entonces, cada variable proposicional tendrá (bajo una interpretación) uno de los dos posibles valores: **V** o **F**. Esto es a nivel matemático. Pero como estamos usando el aparato matemático de la lógica para modelar argumentos del lenguaje natural, usaremos a las variables proposicionales como modelos de las proposiciones. Esto justifica la siguiente definición:

**Definición 17: Variable proposicional**

Una variable proposicional es un símbolo que denota, bajo una interpretación, ya sea al valor **V** o al valor **F**. Como modelo, se usa para representar proposiciones.

Podríamos resumirlo así: *Una variable proposicional representa a una proposición cualquiera, al tener asignado un valor de verdad.* Es decir: así como usamos las variables del álgebra del bachillerato para representar muchas distintas cosas —por ejemplo, en un ejercicio, «$x$» puede representar la masa de un cuerpo; en otro ejercicio, puede representar la altura de un edificio—, así también usamos las variables proposicionales para representar proposiciones. En un modelo particular —es decir, al formalizar una proposición particular—, una variable proposicional representará una proposición específica. Hablaremos más de esto en la sección 5.3.

Ahora vamos a comenzar a entender las conectivas lógicas de LC0, y cómo modelan aspectos del lenguaje natural.

### 4.1.2. Concepto de *constante* o *conectiva lógica*

Como vimos antes, usamos a las variables proposicionales para representar proposiciones: una variable proposicional representa una proposición cualquiera. Esto es en el nivel de *para qué* usamos esas variables. Matemáticamente, una variable proposicional solamente puede tomar uno de dos posibles valores: **V** o **F**.

Las variables proposicionales, entonces, representan la *materia* de los argumentos, su *contenido*. Pero con las *constantes* proposicionales representamos su *forma*, su *estructura*. Primero definamos la noción de constante.

**Definición 18: Constante**

Una constante es un símbolo (de algún lenguaje especificado) que denota a un único objeto particular de un conjunto específico.

Antes de ver más sobre las constantes particulares de LC0, veamos ejemplos de las nociones mismas de constante y de variable.

**ejemplo 10**

En el álgebra que aprendes en bachillerato ya están las nociones de constante y de variable. Por ejemplo, en esos cursos es usual utilizar las siguientes letras como variables para cualesquiera números reales:

$$x \qquad y \qquad z$$

Estas variables, como su nombre lo dice, no se refieren a un número específico. Se refieren a *cualquier* número. Por eso es que podemos usarlas para decir cosas como:

«Sea $x$=5.98...»

que quieren decir cosas como:

«Si $x$ toma el valor 5.98...»

También las usamos para decir afirmaciones generales, como:

«$x + y = y + x$»

que nos dice que: *el resultado, para* ***todo*** *número, de sumarlo con otro, es el mismo resultado que si primero sumamos el segundo y luego el primero*.

Así, la generalidad que tienen las variables en el álgebra nos permite usarlas para hablar de *cualquier* número, y para poder decir qué pasa cuando toman un valor particular.

La noción de constante también está presente en el álgebra. Todos los numerales («0», «1000», etc.) son símbolos constantes. Pero también tenemos símbolos especiales para algunos números importantes. Por ejemplo, aquí hay algunas constantes matemáticas famosas y lo que significan:

| Constante | A qué se refiere | Cómo se define |
|---|---|---|
| $\pi$ | 3.14159... | $\pi = \frac{\text{perímetro}}{\text{diámetro}}$ |
| $e$ | 2.718281... | $ln(e) = 1.$ |
| $i$ | La unidad imaginaria | $i^2 = -1.$ |

Como ves, las constantes se refieren a números *específicos*, con una definición particular; no se refieren a *cualquier* número. Esto es la diferencia esencial con las variables.

Sin embargo, las nociones de *variable* y de *constante* son mucho más generales. Una constante o una variable pueden tener valores numéricos, como los casos de este ejemplo, tomados del álgebra de bachillerato; pero también pueden tomar valores de cualquier otro tipo. En el caso que nos interesa, **las variables proposicionales tomarán solamente dos valores**: **V** —el valor de verdad verdadero— y **F** —el valor de verdad falso. No usaremos símbolos constantes para proposiciones.

En lógica, le llamamos «constantes lógicas» a aquellos elementos que no cambian su valor. **No usaremos símbolos constantes para proposiciones**, pues no tenemos una «proposición especial» para la que fijemos un símbolo especial. En cambio, en lógica, **los símbolos constantes son para operaciones lógicas entre proposiciones**.

Estas operaciones lógicas modelan algunas partículas del **lenguaje natural** (el lenguaje que hablamos, escribimos y pensamos de manera natural; que se contrasta con los lenguajes artificiales, como el de la lógica, que diseñamos con ciertos propósitos). Estas partículas del lenguaje natural son **conectores** que conectan diversas oraciones declarativas entre sí. Y así como lo que nos importa de las oraciones declarativas es la proposición que cada una expresa, lo que nos importa de las partículas del lenguaje natural es la operación entre proposiciones que expresa.

Así como las operaciones del álgebra de los números —como la multiplicación, la suma, la resta, la exponenciación, el logaritmo, etcétera— tienen una definición, así también las operaciones lógicas. Los lógicos han considerado dos aspectos con los que se podría definir a estas operaciones:

- Aspecto semántico, y
- aspecto demostrativo.

Vamos a revisar ambos aspectos en sendos capítulos (capítulo 6 y capítulo 8, respectivamente).

Mientras tanto, hay otro aspecto que podemos analogar entre constantes aritméticas y lógicas. En el álgebra del bachillerato, decimos que una fórmula como «$x+2$» es «una suma», y que una fórmula como «$a \times x$» es «un producto» o «una multiplicación». ¿Qué determina que les llamemos así? Es decir: ¿Qué hace que «$x+2$» sea una suma (en lugar de, digamos, una resta, o una división) y que «$a \times x$» sea un producto en lugar de una suma u otra operación? La respuesta es obvia: Lo que lo determina es qué operación tiene la fórmula. Si tiene una suma, es una suma; si tiene un producto, es una multiplicación —si tiene varias operaciones, como suma, resta, multiplicación y exponenciación, es un *polinomio*, etc. Lo importante es esto: las operaciones que contenga la fórmula determinan qué tipo de fórmula es, qué tipo de operación se le está aplicando a esos números.

Lo mismo sucede con las constantes lógicas: ellas determinan qué tipo de proposición estamos considerando. Es decir: las constantes lógicas definen la **forma lógica** de una proposición. Por ejemplo, diremos que una proposición «es una proposición condicional» si su operación es un condicional material. (Mejor dicho, con un concepto que revisaremos en la sección 4.3.4: si su *conectiva principal* es el condicional.)

Por ahora, este concepto de forma lógica puede parecer muy abstracto, o quizá hasta vago. Es mejor revisarlo «en vivo», verlo en acción; así que es mejor que comencemos a ver ejemplos de ello.

Mientras tanto, de todo lo dicho aquí, recuerda que las constantes lógicas son:

- *Constantes*: a diferencia de las variables, no cambian su valor: siempre significan lo mismo;
- *Lógicas*: en varios sentidos:
    1. Son *operaciones entre proposiciones*, que se definen de dos formas (semántica y demostrativamente, que veremos en capítulos posteriores).
    2. Ellas proveen *la forma lógica* de una proposición, como veremos en la sección 4.3.2 y siguientes.
    3. Al determinar la estructura lógica de una proposición, y como un argumento está compuesto de proposiciones (premisas y conclusión) conectadas mediante una inferencia, las conectivas lógicas también determinan *la forma lógica de los argumentos deductivos.*
    4. Por lo anterior, y debido a que un argumento es válido en virtud de su forma lógica (recuerda la definición 10 y la sección 2.6.2), ellas determinan qué inferencias son lógicamente válidas (profundizaremos en esto en capítulos posteriores).
- *Modelan ciertas partículas del lenguaje natural*, que revisaremos en esta sección.

Además de lo que he dicho, la noción de *forma lógica* y de *constante lógica* han provocado intensos y profundos debates en los fundamentos filosóficos de la lógica. Desafortunadamente, no podemos revisarlos aquí con la profundidad que merecen. Pero dejo algo de bibliografía recomendada en la siguiente nota.[1]

### 4.1.3. La negación

El símbolo de la negación, ¬, se utiliza para representar a la operación de **negar lógicamente** a una proposición. El resultado de esta operación es la negación de esa proposición.

La negación es una conectiva monádica, en un sentido que ahora vamos a definir.

**Definición 19: Conectiva monádica**

Una conectiva es monádica cuando se aplica a una sola proposición. A las conectivas monádicas también se les conoce como *unarias*.

De hecho, la negación es la única conectiva monádica de la lógica que estamos aprendiendo.

### Negaciones en el lenguaje natural

En Español tenemos distintas palabras con las que podemos expresar la negación lógica de una proposición. Veamos ejemplos.[2]

**ejemplo 11**

Todas las oraciones de la siguiente lista expresan la misma proposición: la negación lógica de la proposición expresada por «La justicia consiste en una distribución equitativa de los recursos».

- La justicia **no** consiste en una distribución equitativa de los recursos.
- **No es cierto que** la justicia consista en una distribución equitativa de los recursos.
- **Es falso que** la justicia consista en una distribución equitativa de los recursos.
- **No es el caso que** la justicia consista en una distribución equitativa de los recursos.
- **No sucede que** la justicia consista en una distribución equitativa de los recursos.

Algunas frases más largas, que podrían tener alguna carga retórica extra, también son representables por la negación lógica:

- **Sería mentir el afirmar que** la justicia consiste en una distribución equitativa de los recursos.
- La justicia **será cualquier cosa, menos** una distribución equitativa de los recursos.
- **Nadie sensato podría creer que** la justicia consista en una distribución equitativa de los recursos.

Quien use estas frases seguramente querrá decir algo más que la proposición expresada, quizá algún giro retórico o *implicatura* que la persona que escuche podrá detectar (en el contexto y si es suficientemente avezada). Pero la lógica no modela *todo* en el lenguaje; sólo su aspecto proposicional. Es por eso que esos aspectos quedan fuera del modelo.

### Negaciones y adversativos

Un tipo de frases que se podrían confundir como expresiones de la negación lógica son los **adversativos**, como «pero», «sin embargo», «mas», «si bien», «aunque» o «a pesar de». Es natural pensar que estas expresan negaciones, pues expresan algún tipo de contrariedad; pero la mayoría de ellas (1) no son negaciones, sino conjunciones, y (2) no expresan negación lógica.

En general, la negación lógica se suele confundir con *contrariedad*. Las proposiciones incompatibles (como *Hoy es martes* y *Hoy es miércoles*) son (al menos) *contrarias*. Pero la contrariedad no es suficiente para la negación lógica de una proposición.

Las conjunciones adversativas contraponen dos oraciones. Esta contraposición puede ser una restricción de la oración contrapuesta sobre la primera o una incompatibilidad total.

### La negación lógica es exhaustiva y exclusiva

Hablando con exactitud, la negación lógica es *exhaustiva* y *excluyente*. Explicaré estos conceptos en sendas definiciones.

**Definición 20: Exhaustividad**

Dada cualquier proposición $p$, ella y su negación lógica ($\neg p$) son *exhaustivas*: no hay otra posibilidad. Al menos una de las dos tiene que ser verdad.

Por poner un ejemplo, *Hoy es martes* y *Hoy es miércoles* no son exhaustivas porque hay otras cinco posibilidades. Pero *Hoy es martes* y *Hoy **no** es martes* sí lo son: no hay una tercera posibilidad (por ejemplo, si es miércoles, o sábado, será verdad que *Hoy no es martes*). Ahora veamos la noción de exclusividad.

**Definición 21: Exclusividad**

Dada cualquier proposición $p$, ella y su negación lógica ($\neg p$) son *exclusivas*, es decir, son *incompatibles*. No pueden ser verdad en la misma circunstancia: al menos una de las dos tiene que ser falsa.

Por ejemplo, *Firulais es un perro* y *Firulais es un gris* no son excluyentes. En cambio, *Firulais es un perro* y *Firulais es un delfín*, sí lo son (sin embargo, una no es la negación lógica de la otra, pues no son exhaustivas.)

| **Negación Lógica = Exclusiva + Exhaustiva** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ¿Pueden ambas ser **F**? | — | Sí | ⟶ | No son exhaustivas |
| ¿Pueden ambas ser **V**? | — | Sí | ⟶ | No son exclusivas |
| ¿Pueden ambas ser **F**? | — | No | ⟶ | Sí son exhaustivas |
| ¿Pueden ambas ser **V**? | — | No | ⟶ | Sí son exclusivas |

Cuadro 4.1: Cómo reconocer una negación lógica

En general, con cada par de proposiciones hay dos opciones:

1. Ambas podrían ser simultáneamente verdaderas.
2. Ambas podrían ser simultáneamente falsas.

Cuando una proposición es la negación de otra, el requisito de exclusividad cancela la alternativa (1) y el requisito de exhaustividad cancela la alternativa (2). Es decir, una proposición y su negación no podrían jamás ser *simultáneamente verdaderas* ni *simultáneamente falsas*. Por ello decimos que una es la **contradictoria** de la otra. En el cuadro 4.1 resumo los criterios para encontrar si dos proposiciones son contradictorias.

Podemos representar a la negación como partiendo el conjunto de todas las posibilidades —el conjunto de todas las situaciones o escenarios posibles— en dos: en una parte, se da la proposición; en la otra, su negación lógica. Estas partes no se cruzan (¡son exclusivas!), y no hay una tercera región (¡son exhaustiva!) Considera la proposición expresada por «Mi botella de agua es azul». Pintemos de azul el conjunto de las situaciones en las que es verdad, y dejemos en blanco aquellas en las que no es verdad: nos resultaría algo como la figura 4.1.

Pero que «Mi botella de agua es azul» sea falsa es compatible con otras varias posibilidades: que mi botella sea negra, o rosa, o que no tenga botella de agua. Por ello, «Mi botella de agua es azul» y «Mi botella de agua es rosa» **no** son contradictorias: son contrarias (su verdad se excluye), pero no son exhaustivas, porque hay varias otras posibilidades: que sea negra, verde, o que yo no tenga botella, por ejemplo. **La negación lógica de una proposición solamente es su contradictoria**.

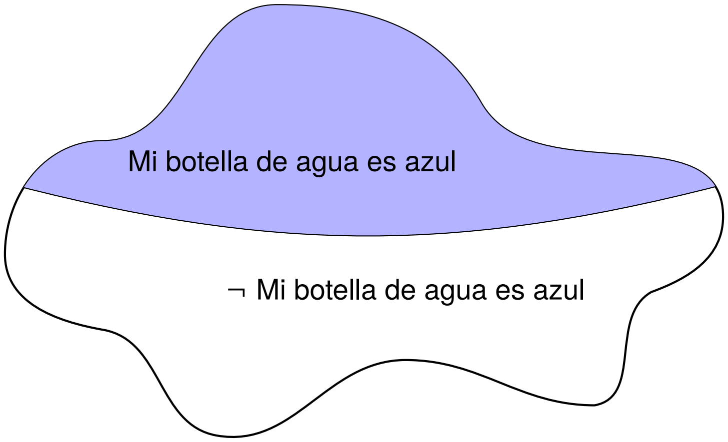


Figura 4.1: *La negación lógica es exhaustiva y exclusiva.*

### 4.1.4. La conjunción

La conjunción o símbolo «ampersand», &, se utiliza para representar la **conjunción lógica** de dos proposiciones.

La conjunción, y las demás conectivas que veremos abajo, son conectivas diádicas, en el sentido que sigue.

**Definición 22: Conectiva diádica**

Una conectiva es diádica cuando se aplica a dos proposiciones. A las conectivas diádicas también se les conoce como *binarias*.

### Conjunciones en el Español

En Español tenemos distintas palabras con las que podemos expresar la conjunción lógica. Por ejemplo, todas las oraciones de la siguiente lista expresan la misma proposición: la conjunción lógica de las proposiciones: *El ser humano es indeciso* y *La libertad es la esencia del ser humano.*[3]

**ejemplo 12**

- El ser humano es indeciso **y** la libertad es la esencia del ser humano.
- El ser humano es indeciso **y** la libertad es su esencia.
- **Tanto** el ser humano es indeciso **como** la libertad, su esencia.
- **Tanto** el ser humano es indeciso **como** la libertad es su esencia.
- El ser humano es indeciso, **además**, la libertad es su esencia.
- El ser humano es indeciso, ésta es su esencia.

### Conjunciones adversativas

Algunas conjunciones son *adversativas*: «pero», «sin embargo», «mas», «aunque», «empero», «antes bien», «si bien», «no obstante», etc. Estas no son negaciones, sino conjunciones. Aunque parezcan contraponer dos oraciones, en el nivel lógico sólo afirman ambas proposiciones. Es decir, el modelo lógico *abstrae* las características de los adversativos que van más allá de la conjunción. Por ejemplo:

**ejemplo 13**

- El ser humano es indeciso **pero** la libertad es su esencia.
- **Aunque** el ser humano es indeciso, la libertad es su esencia.
- El ser humano es indeciso; **sin embargo**, la libertad es su esencia.
- **Si bien** el ser humano es indeciso, la libertad es su esencia.
- El ser humano es indeciso, **mas** la libertad es su esencia.

Si nos quedamos en el nivel lógico, todas estas expresan la conjunción de las proposiciones mencionadas.

### Aspectos que no representa la conjunción veritativo-funcional

Hay que notar que la conjunción lógica **no** expresa:[4]

**Orden temporal** Usualmente, al decir cosas como «Pedro se inscribió y ganó la carrera», queremos comunicar que, *primero*, Pedro se inscribió, y que *después*, ganó la carrera. Esto se pierde en la representación lógica. La proposición expresada por «Pedro se inscribió & ganó la carrera» no implica ningún orden temporal. Es la misma proposición que: «Pedro ganó la carrera & se inscribió en ella».

**Orden causal** A veces, usamos las conjunciones para hablar de causas y efectos. Por ejemplo, cuando digo «Comí en la calle y me dio una infección», podría querer implicar que mi enfermedad fue *a causa* de haber comido en la calle. Pero la conjunción lógica no refleja eso. En el nivel puramente lógico, es igual lo anterior que: *Me dio una infección y comí en la calle.*

**Relevancia** Muchas veces, unir oraciones con conjunciones supone que hay alguna relación de relevancia entre ellas: que tales oraciones «tienen algo que ver» entre sí. Pero esto no se requiere con la conjunción lógica. Puedo decir, por ejemplo, que *Hoy comí pasta y también se ofreció una prueba de la hipótesis de Riemann*, aunque una cosa no sea relevante para la otra.

**Listas** En el Español a veces se usan las conjunciones, como «y», para construir listas de cosas o tareas, como una lista de supermercado o de un grupo de la escuela. (Por ejemplo, puedo hacer una lista de pendientes: *Pasear al perro y comprar detergente.*) Pero estas no son representables mediante una conjunción lógica, porque esta sólo conecta proposiciones, no cosas o tareas.

**Preguntas retóricas** También usamos a la conjunción «y» para introducir preguntas retóricas, como: «Yo no voy a ir, ¿y?». Pero este tampoco es un uso que pueda representarse por la conjunción lógica, pues tampoco conecta proposiciones.

### 4.1.5. La disyunción inclusiva

La disyunción, $\vee$, se utiliza para representar la **disyunción lógica** de dos proposiciones.

#### Disyunciones en el Español

En Español tenemos distintas palabras con las que podemos expresar la disyunción lógica. A veces usamos una simple «o» entre las oraciones en disyunción, como en:

*Iremos al cine o iremos al concierto.*

Pero también a veces usamos el «o bien . . . o bien . . . », como en:

*O bien la naturaleza del ser humano es accesible y podemos hacer ciencia de ello, o bien esa naturaleza es inexpugnable y no es cognoscible por la ciencia.*

Otra manera de expresar la disyunción es con «ya sea»:

*Ya sea que aceptemos el premio o que lo rechacemos, iremos a la premiación.*

A veces dejamos las disyunciones implícitas: *Podemos ir a bailar, a cenar, al cine, o quedarnos en casa*. Por supuesto, hay otras formas de expresar disyunciones en el español.

### Disyunciones exclusiva e inclusiva

En Español solemos usar la disyunción *exclusiva*, que es la que usamos cuando existen dos opciones incompatibles. Por ejemplo: «O estás conmigo o estás contra mi», o «Entrega todas tus tareas o vas a reprobar»; también: «O comemos pizza o comemos sushi». De hecho, la disyunción exclusiva se puede definir mediante otras conectivas, como veremos después.

Pero la disyunción que usaremos en lógica es **inclusiva**: permite que ambas proposiciones —que ambos **disyuntos**— sean verdaderos. Cuando usemos la disyunción lógica no vamos a suponer de entrada que los disyuntos son incompatibles. Si lo son, serán debido a las oraciones en disyunción en ese caso; pero *no* debido a la disyunción misma.

Vamos a ver la diferencia entre las disyunciones inclusiva y exclusiva. Recuerda que las conectivas lógicas son operaciones. Una disyunción, en particular, va a tomar dos valores y nos devolverá otro valor: el resultado de la operación de esos valores. Las disyunciones exclusiva e inclusiva difieren respecto a qué valor devuelven cuando se toman dos proposiciones que son verdaderas, y respecto a qué valor devuelven cuando se toman dos proposiciones que son falsas. Esto se ve en el cuadro 4.2.

| **Disyunción inclusiva *VS* Disyunción exclusiva** | | |
|---|---|---|
| **Casos posibles** | **Disyunción inclusiva** | **Disyunción exclusiva** |
| Primer disyunto **V**, segundo disyunto **F** | **V** | **V** |
| Primer disyunto **F**, segundo disyunto **V** | **V** | **V** |
| Primer disyunto **F**, segundo disyunto **F** | **F** | **F** |
| Primer disyunto **V**, segundo disyunto **V** | **V** | **F** |

Cuadro 4.2: Las disyunciones veritativo-funcionales.

La razón de esta diferencia es que una disyunción exclusiva es verdadera solamente cuando una, pero no la otra, de las proposiciones en disyunción es verdadera: la verdad de una excluye a la verdad de la otra. En cambio, una disyunción inclusiva es verdadera cuando una o ambas proposiciones en disyunción son verdaderas: **la verdad de la disyunción puede incluir la verdad de las dos proposiciones**.

La disyunción que estaremos usando en LC0 es la **inclusiva**.

### Cuando «o» no es una disyunción veritativo-funcional

Raymundo Morado distingue distintos usos del «o» en Español que *no* significan una disyunción inclusiva ni una exclusiva, como:

- Alternativas en preguntas, como en «¿Té o café?». No es una disyunción lógica porque no conecta proposiciones.
- Alternativas en mandatos, como en «¡La bolsa o la vida!». Tampoco es una disyunción lógica porque tampoco conecta proposiciones.

## 4.1.6. El condicional material

La herradura, «⊃», se utiliza para representar al **condicional material** entre dos proposiciones. Tenemos nombres específicos para las dos partes del condicional material:

Definición 23: Antecedente y consecuente

Dado un condicional material con la forma A ⊃ B, decimos que A es su **antecedente**, y que B es su **consecuente**.

Si una fórmula que tiene la forma de condicional material es verdadera, su antecedente es condición *suficiente* para su consecuente, y su consecuente es condición *necesaria* para su antecedente (figura 4.2).

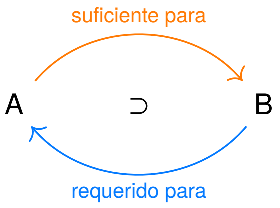


Figura 4.2: **Suficiencia**: *La verdad del antecedente* ***basta*** *(pero no se requiere) para la verdad del consecuente.* **Necesidad**: *La verdad del consecuente* ***se requiere*** *(pero no basta) para la verdad del consecuente.*

**ejemplo 14**

Para graduarse de la Universidad, se *requieren* varias cosas: tener un trabajo recepcional (por ejemplo, una tesis), aprobar todas las materias del programa, etcétera. Por ello, es verdad decir:

**V**: *Te titulas ⊃ apruebas todas las materias del programa.*

Y esto es verdad porque la verdad de «apruebas todas las materias del programa» *se requiere*, *se necesita para*, la verdad de «Te titulas».

En cambio, esto es falso:

**F**: *Apruebas todas las materias del programa ⊃ te titulas.*

Y es falso porque *no basta* aprobar todas las materias del programa para titularse: tienes que cumplir otras varias condiciones, como hacer un servicio social, etcétera.

Este es otro par de ejemplos, que espero que puedas ver por qué los he clasificado así:

**V**: *Aprendes a andar en bici* ⊃ *tienes una bici disponible*
**F**: *Tienes una bici disponible* ⊃ *Aprendes a andar en bici*

### Condicionales en el lenguaje natural

Hay que distinguir diversos usos de los términos condicionales en el Español. Por ejemplo, a veces utilizamos oraciones condicionales para indicar un argumento:

*Si los policías son parte del Estado, entonces podemos inferir que sus acciones también son responsabilidad del Estado.*

A veces las utilizamos para indicar relaciones causales, de influencia, o de dependencia:

*Si comieras sanamente, mejoraría tu salud.*

Además, solemos dar por sentado que las proposiciones relacionadas por un condicional tienen alguna relación de relevancia entre ellas—o, como se suele decir, que «tienen algo que ver». Por ello, nos sonaría muy extraño que alguien dijera algo como:

*Si comes sanamente, el área de un círculo es* $\pi \times r^2$.

Pero resulta que un condicional material no requiere ninguna relación de relevancia entre su antecedente y su consecuente, por lo que de hecho es verdadero decir que *si comes sanamente* ⊃ *el área de un círculo es* $\pi \times r^2$, o que *la luna es de queso* ⊃ *2+2=4*.

### Qué sí es un condicional material

En general, un condicional material es una relación muy débil entre su antecedente y consecuente; pues **no representa ninguno de los siguientes sentidos**:

- Una relación de causa-efecto — como en «*si fumas, te dañarás*»;
- una sucesión temporal — como en «*si salgo, cierro la puerta*»;
- una relación de relevancia — de manera que dos proposiciones que no tienen nada que ver entre sí, pueden formar un condicional material verdadero,
- una consecuencia lógica — es decir, que las premisas *impliquen lógicamente* a la conclusión,
- una relación de conexión *hipotética* o *subjuntiva* — como en: «*si hubiésemos partido antes, no hubiéramos llegado tarde*».

Todos los ejemplos anteriores *se pueden* formalizar con un condicional material, sólo que perderemos los significados especificados. Por ejemplo, decir «*Tú fumas ⊃ Tú te dañas*» no conserva el sentido de causalidad que estaba presente en el primer ejemplo. Pero, aún así, es un condicional material verdadero (como se puede confirmar después de leer el siguiente capítulo).

Como lo veremos en el siguiente capítulo, un condicional material solamente es la siguiente relación:

**Si el antecedente es verdadero, también lo es el consecuente.**

Que es la misma relación que:

**Si el consecuente es falso, también lo es el antecedente.**

Que es la misma relación que:

**No sucede que el antecedente sea verdadero y el consecuente sea falso.**

Por supuesto, esto es solamente si *de hecho* se da la relación de condicional material entre antecedente y consecuente. Es decir: sólo si la fórmula con forma de condicional material es verdadera. Si la relación no se da —si esa fórmula es falsa— entonces el antecedente puede darse sin el consecuente (recuerda la figura 4.2).

**ejemplo 15**

Todos los siguientes son condicionales materiales **verdaderos**, aunque falle alguna característica (o varias) características de los condicionales que solemos usar en el Español:

- 2+2=4 ⊃ la luna no es de queso. (*falla relevancia*)
- Hitler inició la Segunda Guerra Mundial ⊃ la Guerra Fría inició entre 1946 y 1947. (*falla sucesión temporal*)
- Como un sándwich de queso ⊃ soy de sexo masculino. (*fallan causalidad y relevancia*)

Y son verdaderos porque **no sucede que el antecedente sea verdadero y el consecuente sea falso.**

### Condicionales e indicadores de argumento

También es muy importante insistir en la diferencia entre un indicador o marcador de conclusión (concepto que introdujimos en la sección 2.3.2) y una expresión que refiere a un condicional material. Veamos.

La presencia de un marcador de conclusión nos está indicando esto:

**Existe un argumento válido mediante el cual la conclusión se infiere de las premisas.**

Mientras tanto, la presencia de una expresión que se refiera a (o que modelemos con) un condicional material, sólo indica esto:

**No sucede que el antecedente sea verdadero y el consecuente sea falso.**

Por ello, es crucial distinguir entre oraciones como:

*Comer y nutrirse son derechos humanos; por lo tanto, el comer es un derecho,*

que indican argumentos; de oraciones como:

*Si comer y nutrirse son derechos humanos, entonces el comer es un derecho,*

que indican condicionales materiales. El primero es verdadero solamente si hay un argumento válido con el cual «el comer es un derecho» se pueda inferir de «comer y nutrirse son derechos humanos». Mientras tanto, el segundo es verdadero solamente si no sucede que: «comer y nutrirse son derechos humanos» sea verdada, pero «el comer es un derecho» sea falsa. ¡Esta última opción no habla de ningún argumento!

Otra manera de verlo es así: el condicional material se define mediante su tabla de verdad, que veremos en la sección 6.4. Mientras tanto, que un argumento sea válido se define en la definición 10, y para comprobar que un argumento lo sea, se usan los métodos semánticos y demostrativos que veremos en futuros capítulos.

### Ejercicio # 11

De las siguientes oraciones, di cuáles son expresiones condicionales, y cuáles expresan un argumento (al tener un indicador de conclusión).

① Si encontramos oro, nos lo llevaremos.

② Si alguien descubre algo, y ese descubrimiento es original, se sigue que el descubrimiento le pertenece.

⑤ Si me llamas, te contestaré.

⑥ Pienso, luego, existo.

⑦ Si compraste con garantía, entonces puedes reclamar por tus derechos.

⑧ Las normas morales son convenciones, y si las convenciones son constructos humanos, se sigue que las normas morales son constructos humanos.

¿Por qué es el condicional una relación tan «débil» o tan «delgada»? Porque, originalmente, se diseñó para tratar relaciones condicionales en las matemáticas.[5] Es verdad que en el Español tenemos condicionales mucho más sofisticados que el condicional material —pero recordemos que estamos usando a la lógica matemática como un *modelo* de un fenómeno concreto. Y los modelos suelen ignorar ciertos aspectos de aquéllo que modelan, pues es imposible capturarlo todo.

De hecho, se han desarrollado sistemas lógicos que intentan recuperar algunas propiedades de los condicionales del Español que quedan fuera de LC0, pero estos sistemas caen fuera del alcance de este libro.[6]

Dicho todo lo anterior, podemos usar el condicional material para formalizar varias frases del español, entendiendo que, en algunos casos, la formalización no va a capturar todos los aspectos lógicos de las locuciones formalizadas. Por ejemplo, todas las siguientes oraciones se formalizarían como «$A \supset B$»:

Si A, entonces B.
A implica B.
Basta que A para que B.
B es necesario [o *se necesita*] para A.
B es *sine qua non* de A.
Que A conlleva que B.
A trae por consecuencia a B.
B, cuando A.
Suponiendo sin conceder que A, B.
B, toda vez que A.
B, en virtud de A.
B, por causa de A.

Si A, B.
B es implicada por A.
Que A es suficiente para que B.
A requiere que B.
A sólo si B.
A trae aparejado B.
B, dado que A.
Cuando A, B.
No ocurre que A sin que B.
B, pues A.
A causa que B.
B, porque A.

Las últimas cinco locuciones —«*pues*», «*en virtud de*», «*causa que*», «*por causa de*», y «*porque*»— son locuciones que indican relaciones de *explicación*, *influencia* o *dependencia*. Pero estas relaciones son más complejas que la relación indicada por el condicional material, por lo que usar a este para formalizar locuciones como las anteriores, supone ignorar características que no pueden formalizarse en la lógica clásica. Se han propuesto lógicas no clásicas para sistematizar las inferencias válidas con estas locuciones, que no vamos a revisar aquí.[7]

Otro par de frases que podemos formalizar con un condicional material son:

B, en toda ocasión en que A.
A, siempre que B.

Sin embargo, hay que notar que el uso de «siempre que» en el segundo ejemplo no significa «en toda ocasión». Como se ve en el primer ejemplo, «en toda ocasión en que» se utiliza para el antecedente. Entonces, el sentido de «siempre que» del segundo ejemplo es el de un *requisito*, una condición necesaria; como cuando decimos «Pasarás la materia siempre que entregues todas las tareas». En este caso, queremos decir: «Se requiere entregar todas las tareas para pasar la materia». Por lo tanto, en este sentido, «A, siempre que B» se formalizaría «$A \supset B$».

### 4.1.7. El bicondicional material

Las tres líneas, ≡, se utiliza para representar a la **equivalencia material** entre dos proposiciones, también llamado **bicondicional material**.

Esta conectiva es una *equivalencia*: un tipo de igualdad. Cuando se pone entre dos proposiciones, nos dice que las dos proposiciones son equivalentes: son iguales en cierto sentido. ¿En qué sentido? En su valor de verdad. Dos proposiciones materialmente equivalentes van a ser iguales respecto a su «materia»; es decir, una fórmula con la forma: $\mathsf{A} \equiv \mathsf{B}$ nos dice que las fórmulas a cada lado—$\mathsf{A}$ y $\mathsf{B}$—tienen el mismo valor de verdad: o son ambas verdaderas, o son ambas falsas.

### Bicondicionales en el español

En Español tenemos distintas palabras que podemos simbolizar con la equivalencia material. Por ejemplo:

- «...siempre y cuando ...»
- «...si y solamente si ...»
- «es lo mismo decir que ...que decir que ...»
- «si ..., pasa ..., y si no, no»

Además, un *bi*condicional se puede ver como dos implicaciones materiales: «de ida» y «de regreso». Es decir: para decir algo como «$p$ siempre y cuando $q$» también podemos decir algo como «$p$ implica (materialmente) a $q$, y $q$ también implica a $p$». Por eso, en algunos sistemas de notación donde se utiliza una flecha para el condicional (del tipo de: «$p \Rightarrow q$»), suelen usar una flecha doble para el bicondicional (como: «$p \Leftrightarrow q$»). En este libro no estamos usando esa notación, sino la herradura para el condicional y las tres rayas para el bicondicional. Pero estas tres rayas nos pueden recordar que el bicondicional es un tipo de igualdad (simbolizada: «=»): una igualdad de valor de verdad.

### Qué *no* nos dice un bicondicional

Como vimos arriba, le decimos «material» porque el bicondicional nos dice que las proposiciones equivalentes son idénticas en su «materia»: en su valor de verdad. Pero esto no significa que las proposiciones equivalentes sean iguales en sentidos más estrictos. Un sentido más estricto de equivalencia es la *equivalencia lógica*, que revisaremos en secciones posteriores (6.8 y 8.4).

Otro sentido de equivalencia es la equivalencia *de significado*: la que se da cuando dos oraciones distintas significan exactamente lo mismo. El criterio para decir cuándo dos oraciones expresan el mismo mensaje todavía es muy controvertido en la semántica. Sin embargo, es claro que dos oraciones pueden expresar proposiciones materialmente equivalentes sin que expresen la misma proposición. Una de las razones de ello es que el bicondicional material no requiere *relevancia* entre las proposiciones equivalentes. Por ejemplo, la proposición expresada por:

$$2 + 2 = 4$$

es verdadera (¡sorpresa!), como lo es la proposición expresada por:

*Marzo tiene 31 días*

Como ambas son verdaderas, esto significa que ambas son materialmente equivalentes. Entonces, podemos usar el bicondicional para expresar la siguiente proposición, que es verdad:

*Dos más dos es igual a cuatro, siempre y cuando marzo tenga 31 días.*

Suena «extraño»... ¡pero es lógicamente correcto! Y suena extraño porque las dos proposiciones no tienen mucho «que ver» entre sí: no hay una relación de relevancia entre ellas. Pero como con las demás conectivas que hemos visto, no se requiere que el bicondicional relacione proposiciones relevantes una para la otra. Para que sea verdad una proposición con un bicondicional, solamente requerimos que las dos proposiciones que conecta tengan el mismo valor de verdad.

En general, el bicondicional y las demás conectivas no «ven» los significados de las proposiciones: solamente su valor de verdad.

Ya tenemos frente a nosotros los símbolos con que escribiremos el lenguaje de `LC0`, y la manera usual en que estos modelan conectivas del Español. Falta ver *cómo* escribir en ese lenguaje de manera que «tenga sentido». A eso pasaremos, después de hablar sobre la notación. En el siguiente capítulo trataremos más con la relación entre este lenguaje y el lenguaje natural del que es un modelo.

## 4.2. Sistemas de notación

Una *notación* es un sistema de símbolos para referirse a objetos previamente definidos. En la lógica formal podemos encontrar distintos símbolos para las conectivas que usaremos, para las variables proposicionales, e incluso distintas *reglas de formación* (esto lo revisaremos en la sección 4.4). Un cambio de notación **no** altera el contenido del sistema lógico. Sólo lo expresa con distintos símbolos. (Así como la misma oración del Español puede expresarse con letra de molde o letra manuscrita, o con distintas tipografías, sin que eso haga que la oración sea distinta.)

Para las variables proposicionales, aunque es usual utilizar letras desde la $p$, algunos autores utilizan letras minúsculas numeradas con subíndices:

$$p_1 \quad p_5 \quad q_3 \quad s_9 \quad \ldots$$

| **Tipo** | **Conectiva** | **Nombre** | **Expresiones del Español** | **Características** |
|---|---|---|---|---|
| Monádica | $\neg$ | Negación | «No» •«Es falso que» | •Exhaustiva •Excluyente |
| Diádicas | & | Conjunción | «Y» •«También» | •A-temporal •Sin relevancia •Sin orden |
| | $\vee$ | Disyunción | «O» •«Ya sea… ya sea…» | •Inclusiva |
| | $\equiv$ | Bicondicional material | «Siempre y cuando» •«Si y solamente si» | •Material: no es necesario |
| | $\supset$ | Condicional material | «Si… entonces…» •«… implica que…» | •Material: no es necesario •El antecedente basta para el consecuente •El consecuente se requiere para el antecedente |

Cuadro 4.4: Las conectivas lógicas de LC0.

o, cuando se hace con extremo rigor, algunos[8] usan la misma letra pero con distintos números de primas:

$$p' \quad p'''' \quad p'' \quad \dots$$

y otros prefieren usar mayúsculas, a veces sin preferencia por alguna letra o letras particulares:

$$A \quad W \quad C \quad L \quad \dots$$

En general, es una cuestión arbitraria qué símbolos usar como variables proposicionales. Podemos elegir cualquiera, siempre que la convención sea conocida por las personas involucradas o al menos, sea fácil de adivinar.

Algo parecido sucede para las *meta*-variables: las variables que toman fórmulas como valores (ver la definición 24, abajo). Algunos autores (como yo) usamos las mayúsculas sin serifas:

$$\mathsf{A} \quad \mathsf{B} \quad \mathsf{C} \quad \dots$$

mientras que otros, si es que ya han usado mayúsculas para las variables proposicionales, usan letras minúsculas.[9] Algunos utilizan letra manuscrita,[10] como:

$$\mathcal{A} \quad \mathcal{B} \quad \mathcal{C} \quad \dots$$

y otros,[11] letras griegas:

$$\alpha \quad \phi \quad \dots$$

De nuevo, estas decisiones son muy arbitrarias, y lo único que importa es que conozcamos la convención y la sigamos de manera sistemática.

Para las conectivas también existen notaciones alternativas. Para la disyunción la más usual es la «v» estilizada, $\vee$, pero seguro hay otras. Para la conjunción se utilizan cualquiera de los siguientes símbolos (aquí usaremos el primero):

$$\& \quad \wedge \quad \bullet \quad {}^{\wedge}$$

o incluso se deja implícita, sólo concatenando los conyuntos, como en:

$$pq$$

El condicional material también tiene distintas notaciones. Aquí usaremos la primera de la siguiente lista de ejemplos:

$$\supset \quad > \quad \rightarrow \quad \Rightarrow$$

De manera correspondiente, el bicondicional material puede denotarse por:

$$\equiv \quad <> \quad \leftrightarrow \quad \Leftrightarrow$$

y aquí usaremos el primer símbolo.

Finalmente, la negación también tiene distintos símbolos usuales, como:

$$\neg \quad \sim \quad -$$

y aquí usaremos el primero.

Como con las variables y meta-variables, no es esencial elegir uno u otro sistema notacional. Lo importante es definir uno y dejar una convención clara y sistemática. Podemos cambiarla por motivos puramente prácticos, como qué caracteres son los más fáciles de escribir en un medio dado.[12]

## 4.3. Las fórmulas de LC0

En el Español tenemos palabras, frases y oraciones. Eso quiere decir que no toda combinación de símbolos del alfabeto es parte del español. Por ejemplo, la cadena de símbolos:

pAm;AbbRRampóK

no es parte del Español, aunque use su alfabeto. O la siguiente cadena de palabras:

brilla Rojo la ambiente Secante

tampoco es parte del Español, aunque use palabras hechas de su alfabeto.

Las reglas de la gramática y la sintaxis del Español nos permiten formar palabras, frases y oraciones a partir de su alfabeto; mientras que eliminamos como «agramáticas» aquellas cadenas de estos símbolos que no cumplan con ellas.

Esa misma es la función de las **reglas de formación** (o, como a veces también se les llama, «la gramática») de LC0. Sólo que ahora no hablaremos de «palabras», «frases» ni «oraciones», sino de *fórmulas*.[13]

Otra manera de verlo es que contaremos como fórmula del lenguaje de LC0 a una cadena de símbolos **que puede tener un valor de verdad** (ya sea verdadero o falso). Son las «frases» que, en lógica, «significan algo». Las cadenas de símbolos que no sean fórmulas no pueden tener ningún valor de verdad: no pueden ser ni verdaderas ni falsas. (Tal como decir «brilla Rojo la ambiente Secante» no es ni verdad ni falsedad —¡pues no significa nada!)

Antes de definir las reglas, introduzcamos el concepto de meta-variable:

Definición 24: Metavariable

Una meta-variable en nuestro sistema es una variable que toma valores en el conjunto de fórmulas del lenguaje. Por lo tanto, representa fórmulas atómicas (que son variables proposicionales, de ahí «*meta*-variable») y a fórmulas moleculares de cualquier tipo.

Usaremos letras mayúsculas sin serifas,[14] como «A» o «B» como *meta-variables*. Ahora ya podemos definir las reglas de formación de nuestro sistema lógico:

Definición 25: Reglas de formación de LC0

**R1**. Toda variable proposicional es una fórmula.

**R2**. Si A es una fórmula, entonces ¬(A) también es una fórmula.

**R3**. Si A y B son fórmulas, entonces todas las siguientes son fórmulas:

1. (A) & (B)
2. (A) ⊃ (B)
3. (A) ∨ (B)
4. (A) ≡ (B)

**R4**. Nada más que lo especificado por las reglas **R1**-**R3** es una fórmula.

Esas son las 4 reglas que definen el lenguaje de LC0 (aunque la tercera tenga cuatro casos). Simplemente nos dicen qué cadenas de símbolos cuentan como fórmulas de nuestro lenguaje. Además, gracias a la regla de clausura—la regla **R4** de arriba—que nos dice que nada más pertenece a nuestro lenguaje, sabemos que cualquier cosa que no cumpla con nuestras reglas, no estará en nuestro lenguaje.

Estas reglas *no tienen una conexión directa con los valores de verdad*, es decir, no nos dicen qué fórmulas son verdaderas o falsas. Solo nos dicen qué cuenta como fórmula en nuestro lenguaje. Por lo tanto, son más bien un requisito: para que algo pueda tener valor de verdad en LC0, debe ser una fórmula—es decir, cumplir con las reglas de formación.

### 4.3.1. Explicación de las reglas

Según la primera regla, las variables proposicionales—como $p$, $q$ y $r$—ya son fórmulas («oraciones») del lenguaje de la lógica. Eso significa que toda variable proposicional ya puede ser interpretada como verdadera o falsa.

En las reglas **R2** y **R3** pasa algo importante: usamos metavariables, es decir, las letras A y B, para denotar cualesquiera fórmulas. Una **metavariable** simplemente es una variable que toma como valores a *otras* variables o fórmulas. Es decir, A puede denotar a la fórmula:

$$p \supset r,$$

o a la fórmula:

$$(s \,\&\, \neg\neg q) \supset t,$$

o también a la fórmula:

$$p$$

o a:

$$((s \,\&\, \neg\neg q) \supset t) \lor p$$

Es decir: A puede denotar a **cualquier** fórmula (lo mismo para B).

Esto se conoce como **recursión**: las reglas nos permiten construir fórmulas, y luego, si aplicamos esas mismas reglas otra vez, podemos construir más fórmulas a partir de esas otras. La recursión, entonces, básicamente es el proceso de aplicar una regla a cualquier resultado de haber aplicado esa regla antes. (Por ejemplo, aplicaría un proceso recursivo si comenzara a hacer pasteles, y una vez terminado, aplicara la misma receta para hacer otro pastel, pero esta vez ¡usando los pasteles que ya hice como ingredientes! Y luego, con varios de esos pasteles de pasteles, hiciera un nuevo pastel tomándolos como ingredientes... Y así sucesivamente.)

Las reglas de formación son *recursivas* porque nos dan fórmulas a partir de las atómicas (las letras «solitas»), y con esas fórmulas nos dan fórmulas complejas metiendo conectivas, y otra vez: con esas fórmulas complejas nos dan más fórmulas complejas, y con esas otras, y con esas otras, otras más, etc.

**Ejercicio # 12**

Di si las siguientes cadenas de símbolos son o no fórmulas de LC0, y si una no lo es, menciona qué regla de formación es la que no cumple:

① $p$

② $p\neg q$

③ $!p \lor q$

④ $p \supset (\neg r \supset q)$

⑤ $(q \equiv \neg r) \supset (s \,\&\, t)$

⑥ $(q \lor s \,\&\, t)$

⑦ $(r)$

⑧ $\neg(q \lor r) \lor q$

⑨ $\neg(p \equiv t) \supset (p \equiv t)$

⑩ $t \lor q \supset (s \lor q)$

### 4.3.2. Atómicas y moleculares

Las reglas de la definición 25 determinan el conjunto de las fórmulas de LC0. Dentro de estas, podemos distinguir dos tipos de fórmulas: las atómicas y las moleculares. Primero veremos una definición informal de estos conceptos.

Las fórmulas *atómicas* son aquéllas que no tienen conectivas lógicas. Es decir, son las variables proposicionales. Las fórmulas *moleculares* son las que contienen conectivas lógicas, ya sea la negación, que es unaria, o cualquiera de las binarias. (Por lo tanto, las fórmulas como: $\neg p$ son moleculares, aunque sólo contengan a la negación.)

Podemos dar una definición más rigurosa de estos conceptos, pero para ello vamos a necesitar del concepto de *subfórmula*.

### 4.3.3. Subfórmulas

Poniendo la idea de manera laxa, podemos decir que las *subfórmulas* de una fórmula A son las fórmulas que aparecen en A.

Por ejemplo, en la fórmula:

$$(p \vee r) \supset (\neg q \equiv s)$$

podemos encontrar a

$$\neg q \equiv s$$

entre sus subfórmulas, pero también a:

$$p \vee r$$

y a $p$ y $r$, así como a $\neg q$, a $q$ misma, y a $s$. Por supuesto, $p\vee$ no es una *sub*fórmula, pues ni siquiera es una fórmula. Se suele contar a la fórmula entera como una subfórmula de sí misma (como un caso «límite», digámoslo así.)

La siguiente es una definición recursiva de las subfórmulas:

**Definición 26: Subfórmula**

Donde A es una fórmula, sus subfórmulas son:

1. Si A es una letra proposicional, A es su única subfórmula.
2. Si A es una fórmula con la forma ¬B, sus subfórmulas son (además de ella misma, ¬B) las subfórmulas de B.
3. Si A es una fórmula con la forma B ∨ C, o de la forma B & C, o de la forma B ⊃ C, o de la forma B ≡ C, sus subfórmulas son (además de ella misma), B y sus subfórmulas, y C y sus subfórmulas.

Ahora ya podemos definir rigurosamente los conceptos de la subsección anterior:

**Definición 27: Fórmula atómica**

Una fórmula atómica de LC0 es una fórmula que no contiene subfórmulas (además de sí misma). Por lo tanto, no contiene conectivas proposicionales. Es decir, las fórmulas atómicas son las variables proposicionales.

**Definición 28: Fórmula molecular**

Una fórmula molecular de LC0 es una fórmula que contiene subfórmulas. Por lo tanto, contiene conectivas proposicionales.

**Ejercicio # 13**

Obtén todas las subfórmulas de las siguiente fórmulas (recuerda que la fórmula entera también es subfórmula de sí misma).

① $s \lor (t \supset r)$
② $[s \equiv (\neg q \lor r)] \supset [(q \equiv t) \,\&\, \neg p]$
③ $[(q \equiv r) \lor \neg s] \equiv [(p \lor r) \supset \neg q]$
④ $\neg s \supset p$
⑤ $p \supset r$
⑥ $s \lor [t \equiv (p \,\&\, q)]$
⑦ $(p \lor r) \supset (q \,\&\, s)$
⑧ $(s \supset r) \,\&\, (p \supset r)$
⑨ $(p \,\&\, t) \supset s$
⑩ $(p \supset r) \supset \neg s$

### 4.3.4. La conectiva principal de una fórmula y convenciones

Debemos notar algo importante: todas las conectivas binarias siempre van a quedar **enmedio** de las fórmulas que conectan, mientras que la conectiva monádica —la negación— queda siempre **hasta delante**. La negación siempre afectará a la fórmula inmediata a su derecha, mientras que las conectivas binarias unen las fórmulas inmediatas a sus lados izquierdo y derecho.

(Gracias a este hecho, sabemos «de entrada» que las siguientes cadenas de símbolos nunca van a contar como fórmulas:

$$p\neg q \qquad\qquad \&\, r \qquad\qquad r\neg(q \lor s) \qquad\qquad \equiv (q \,\&\, \neg r)$$

La primera porque usa la negación, que es monádica —es decir, que sólo se «pega» a una fórmula— como si fuera diádica; la segunda porque usa una conectiva diádica como si fuera monádica; la tercera porque también usa mal la negación, y la cuarta porque la equivalencia material siempre debe conectar al menos dos fórmulas, y ahí sólo está conectando a una —a saber, a «$(q \,\&\, \neg r)$».)

En general, toda fórmula molecular tiene su *conectiva principal*, que es la que determina si la fórmula es una negación de otra fórmula, una conjunción de otras dos, una equivalencia entre dos fórmulas, etc.

La conectiva principal es la que está «hasta afuera» de todos los paréntesis. Por ejemplo, en la fórmula:

$$(p \equiv \neg q) \vee \neg(r \supset s)$$

la conectiva principal es la disyunción, porque está hasta afuera, aunque en medio, de los paréntesis. En cambio, en:

$$\neg \big((p \equiv \neg q) \vee \neg(r \supset s)\big)$$

la conectiva principal es la negación, que niega a toda la fórmula que le sigue.

Una vez que encontramos la conectiva principal de una fórmula, lo que une deben ser *sub*fórmulas. Estas, a su vez, pueden ser o fórmulas moleculares, o variables proposicionales. Por ejemplo, en la primera fórmula de arriba podemos encontrar dos subfórmulas:

$$p \equiv \neg q,$$

y:

$$\neg(r \supset s)$$

Ambas fórmulas tienen sus propias conectivas principales. La primera tiene al bicondicional material; la segunda, a la negación.

Veamos otro ejemplo. La fórmula:

$$(p \vee s) \supset \neg(q \vee r)$$

tiene al condicional material como conectiva principal, por lo que una manera correcta de leerlo es:

Si $p$ o $s$, entonces es falso que: $q$ o $r$.

Nota que leímos tomando *primero* a la conectiva que está *hasta afuera* de todos los paréntesis—en este caso, «$\supset$»—y después, yendo por sus subfórmulas de izquierda a derecha, empezando con cada una de ellas por su conectiva principal. Por eso, después de empezar con la conectiva principal, vamos con su subfórmula:

$$(p \vee s),$$

que leemos «*Si $p$ o $s$*», donde el «si» es la primera parte del condicional que está enmedio de esta y la siguiente subfórmula:

$$\neg(q \vee r),$$

que leemos «*entonces es falso que: $q$ o $r$*», pues el «entonces» es la segunda parte del condicional. Seguimos con la conectiva principal de esa subfórmula: «es falso que», para terminar con la conectiva principal de la siguiente subfórmula, $(q \vee r)$, y que leemos: «*$q$ o $r$*».

## Dos convenciones

Ya sabemos que la conectiva principal siempre va a quedar «hasta afuera» de los paréntesis, ya sea enmedio (si es una conectiva binaria) o hasta la izquierda, si es la negación. Ahora vamos a notar dos hechos y hacer dos correspondientes convenciones.

El primer hecho es que, en las reglas de formación de la definición 25, a partir de, por ejemplo, una variable proposicional como $q$, podemos construir su negación, que quedaría: $\neg(q)$. Los paréntesis en esta fórmula son innecesarios, pues sabemos que la negación está negando a $q$, así que *podríamos* escribir la misma fórmula simplemente como «$\neg q$». Pero a veces se vuelven necesarios, como en este ejemplo:

$$\neg(q \vee r), \tag{4.1}$$

en el que sí necesitamos los paréntesis. Si no los tuviéramos—es decir, si sólo tuviéramos:

$$\neg q \vee r,$$

no sería claro si tenemos la fórmula 4.1, o la siguiente:

$$(\neg q) \vee r \tag{4.2}$$

Estas fórmulas son muy distintas: 4.1 es una fórmula negada (a su vez, esa fórmula es una disyunción), mientras que 4.2 es una disyunción de dos fórmulas (una de las cuales está negada). Es decir, necesitamos los paréntesis para **desambiguar** entre fórmulas: para decir cuál de las opciones posibles es la que queremos decir.

A partir de lo dicho vamos a establecer la primera *convención*. Es decir, el primer *acuerdo* acerca de cómo escribir y leer fórmulas, que no es parte de las reglas de formación, sino cuestión de pura utilidad.

*Convención* 1 (*Paréntesis innecesarios*). Si los paréntesis de una fórmula con conectivas lógicas no son necesarios para reconocer su conectiva principal, podemos eliminarlos.

El segundo hecho es que a veces utilizar muchos paréntesis se vuelve confuso. En casos como:

$$\neg(\neg\neg q \vee (\neg r \equiv \neg s)) \supset ((\neg p) \,\&\, (r \vee s)) \tag{4.3}$$

puede resultar confuso saber si estamos frente a una negación o a un condicional. Por lo tanto, usaremos los corchetes como sustitutos de los paréntesis siempre que sea útil; pero los pondremos siempre hasta afuera de toda la fórmula. De esta manera, la fórmula 4.3 quedaría así:

$$\neg[\neg\neg q \vee (\neg r \equiv \neg s)] \supset [(\neg p) \,\&\, (r \vee s)] \tag{4.4}$$

que es un poco más fácil de leer.

Dado ello, la segunda convención notacional es la siguiente:

*Convención* 2 (*Corchetes*). Si los paréntesis de una fórmula hacen difícil leerla, sustituiremos paréntesis con corchetes.

**Ejercicio # 14**

Considera el diálogo *Fedón* de Platón. De este, extrae 10 oraciones declarativas, y formalízalas con las conectivas y variables proposicionales.

## 4.4. Notación polaca

Un sistema de notación (cf. arriba, la sección 4.2) que ha resultado importante, es la así llamada «notación polaca», inventada por el gran lógico polaco del siglo XX, Jan Łukasiewicz. Su característica principal es que es una notación *prefijo* incluso para las conectivas diádicas, a diferencia de la notación *infijo* que es la que usamos normalmente. Es decir: en nuestra notación, las conectivas diádicas se usan *enmedio* de las fórmulas (pero la negación se pone *antes* de ellas). En la notación polaca, incluso las conectivas diádicas se ponen antes.

En la siguiente tabla, comparamos la notación que usaremos en este libro con la notación de Łukasiewicz:

| Notación usual | Notación polaca |
|---|---|
| $\neg p$ | N$p$ |
| $p$ & $q$ | K$pq$ |
| $p \vee q$ | A$pq$ |
| $p \supset q$ | C$pq$ |
| $p \equiv q$ | E$pq$ |

La ventaja de la notación polaca sobre la que nosotros usamos, es que en la primera no son necesarios paréntesis ni corchetes, pues todas las conectivas se ponen «enfrente» de la fórmula.

El «truco» con la notación polaca es simplemente que, con ella, las fórmulas *se escriben como se leen.*

Por ejemplo, la fórmula:

$$\neg(p \;\&\; q)$$

que leemos: «es falso que: $p$ y $q$», se escribiría, en la notación de Łukasiewicz, así:

$$NKpq$$

Mientras que la fórmula:

$$\neg p \;\&\; q$$

que leeríamos: «no-$p$ y $q$», sería:

$$KNpq$$

A su vez, la fórmula:

$$p \mathbin{\&} \neg q$$

que pronunciaríamos: «p y no-$q$», se escribiría así:

$$KpNq$$

Otro ejemplo sería el siguiente. La fórmula:

$$q \equiv (p \vee r),$$

que leeríamos: «la equivalencia entre $q$ y la disyunción entre $p$ y $r$», se escribe justamente así:

$$EqApr$$

Por poner otro ejemplo,[15] la fórmula

$$[p \supset (q \vee r)] \supset \neg p$$

sería, en la notación de Łukasiewicz:

$$CCpAqrNp,$$

lo cual también coincide con la manera de leer la fórmula: «el condicional entre el condicional entre $p$ y: o $q$ o $r$, y no-$p$».

## 4.5. ¿Cómo saber que algo es una fórmula?

Después de un tiempo de práctica, es fácil reconocer una cadena de símbolos como fórmula de LC0 o no. Pero al inicio esto puede no ser tan sencillo.

Una manera de *demostrar* que una cadena de símbolos es una fórmula es *construyéndola* mediante las reglas de formación del lenguaje, como veremos en el siguiente ejemplo.

**ejemplo 16**

Supongamos que queremos estar completamente seguros de si una cadena de símbolos del lenguaje es una fórmula. Por ejemplo, la cadena:

$$\neg(p \mathbin{\&} q) \supset q$$

La intentamos construir mediante nuestras reglas de formación (definición 25):

1. Por **R1**, $q$ es fórmula.
2. Por **R1**, $p$ es fórmula.
3. Por **R3** caso 1, aplicada a las líneas 1 y 2 de arriba, $p \mathbin{\&} q$ es fórmula.
4. Por **R2** aplicada a 3, $\neg(p \mathbin{\&} q)$ es fórmula.

5. Por **R2**.3 en 1 y 3, $\neg(p \mathbin{\&} q) \supset q$ es fórmula.

¡Lo logré! Entonces sí es fórmula. (Se lee: «si no es el caso que $p$ y $q$, entonces $q$»).

Será útil revisar otro ejemplo.

**ejemplo 17**

Mismo problema, mismo procedimiento, ahora con la cadena:

$$\vee p(q \mathbin{\&} \neg r)$$

Veamos:

1. $q$ es fórmula (por **R1**)
2. $p$ es fórmula (por **R1**)
3. $r$ es fórmula (por **R1**)
4. $\neg r$ es fórmula (por **R2** aplicado a 3)
5. $q \mathbin{\&} \neg r$ es fórmula (por **R3**.1 aplicado a 1 y 4)
6. $p \vee (q \mathbin{\&} \neg r)$ es fórmula (por **R3**.2 aplicado a 2 y 5)

Pero nota que la fórmula del paso 6—$p \vee (q \mathbin{\&} \neg r)$—no es la cadena de símbolos con la que empecé. No pude construir la cadena que tenía arriba.

En casos como el ejemplo 17, en que no tenemos una fórmula, intentar construirla con las reglas no es suficiente, pues si no es una fórmula, nunca vamos a lograrlo.

Podemos usar el *árbol genealógico* de una fórmula.[16] Por ejemplo, dada la fórmula:

$$\neg(q \supset r) \equiv (s \vee \neg q)$$

su árbol genealógico sería la figura 4.3.

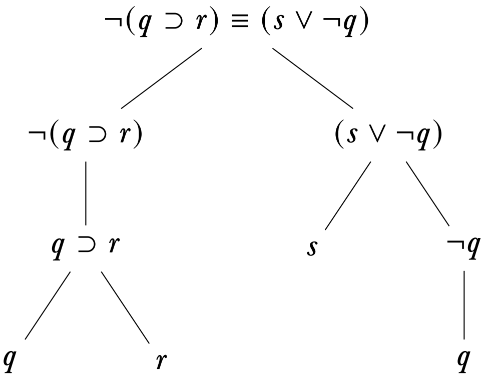
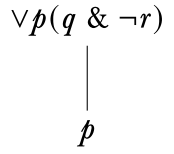


Figura 4.3: *Árbol genealógico de la fórmula* «$\neg(q \supset r) \equiv (s \vee \neg q)$».

**ejemplo 18**

Ahora consideremos la cadena de símbolos de arriba, $\vee p(q \ \& \ \neg r)$, de la que nos preguntábamos si era una fórmula. Intentaríamos construir su árbol genealógico así:



Como vemos, apenas intentamos poner las dos fórmulas que deberían estar para la disyunción, sólo logramos poner una; lo cual significa que no tenemos una fórmula ahí.

Vamos a dar la definición formal de árbol genealógico; utiliza algunos conceptos de teoría de gráficas que no hemos revisado, pero incluso sin ellos, es bastante claro a qué se refiere.

**Definición 29: Árbol genealógico**

El árbol genealógico de una fórmula es una gráfica cuyo nodo raíz es la misma fórmula, tal que: si la fórmula es una variable proposicional, el árbol no tiene más nodos; si la fórmula es una negación, tendrá un único nodo descendiente inmediato: la fórmula negada; y si la fórmula tiene a una conectiva binaria como conectiva principal, tendrá dos nodos descendientes inmediatos: a la izquierda, la subfórmula a la izquierda de la conectiva, y a la derecha, la subfórmula a la derecha de la conectiva. Se sigue recursivamente hasta llegar a las fórmulas atómicas.

En los siguientes ejercicios vamos a practicar varios de los conceptos de las últimas secciones.

**Ejercicio # 15**

Ⓐ. Di cuál es la conectiva principal de las siguientes cadenas de símbolos. Si alguna no es fórmula, justifica por qué.

1. $[(\neg t \supset \neg r) \equiv (\neg q \supset s)] \ \& \ [\neg t \supset \neg(p \vee q)]$
2. $\neg(t \supset p) \ \& \ [(q \vee r) \equiv ((t \supset r) \vee (s \ \& \ q))]$
3. $\neg s \vee p \ \& \ q$
4. $(q \vee \neg s \equiv [\neg q \vee (r \supset p)$
5. $[(q \equiv r) \vee \neg s] \equiv [(p \vee r) \supset \neg q]$

Ⓑ. Escribe las siguientes fórmulas, que están en la notación polaca, en la notación que hemos estado usando.

1. $ApNr$
2. $NKqNs$
3. $ECtsKpNq$

4. $KKqNrEpq$
5. $CKNqNrNENqNr$

Ⓒ. Toma la siguiente cadena de símbolos:

$$\neg p \supset q \equiv \neg s \ \& \ t$$

y utiliza los paréntesis para desambiguarla y obtener, en cada caso:

1. Una negación de una proposición
2. un condicional material entre dos proposiciones,
3. una equivalencia entre dos proposiciones,
4. una conjunción de dos proposiciones.

(*Pista*: El número de paréntesis de toda fórmula **siempre** debe resultar par: mismo número de paréntesis izquierdos que derechos.)

## Proyecto del capítulo:

**Antecedentes** ⇢ *

**Problema** ⇢ *

## Resumen del capítulo

- ★ El lenguaje de LCo consiste en:
    - Alfabeto
    - Reglas de formación
- ★ Podemos clasificar a las fórmulas en:
    - Atómicas
    - Moleculares
- ★ Toda fórmula molecular va a tener una conectiva principal.
- ★ Existen diversos sistemas de notación, como:
    - El que usamos nosotros
    - Notación polaca

## Notas

1. Un texto muy introductorio y muy breve es Estrada González 2005. Otro recomendable es Gómez Torrente 2000, aunque este es más avanzado. Algunas referencias clásicas para estos temas son la *Conceptografía* de Frege (en Frege 2016), la conferencia «La lógica como la esencia de la filosofía» de Russell (en Russell 1914/1964), y el *Tractatus Logico-Philosophicus* de Wittgenstein (Wittgenstein 1921/2012). Para introducciones recientes Cohnitz & Estrada González 2019 es recomendable, aunque está en inglés. Dos artículos enciclopédicos importantes son MacFarlane 2017 y Pietroski 2016.

2. Para ver más ejemplos, ver Raymundo Morado, «Conectivas Lógicas», manuscrito. Disponible en su sitio web.

3. Para ver más ejemplos, ver Raymundo Morado, «Conectivas Lógicas», manuscrito. Disponible en su sitio web.

4. Ver Raymundo Morado, «Conectivas lógicas».

5. Incluso como modelo del razonamiento en matemáticas, el condicional material ingnora algo que ciertos lógicos pensaban que también estaba presente: la aparente necesidad de la conexión entre los enunciados de las matemáticas y sus consecuencias.

6. Ver Palau *et al.*(2004).

7. Por ejemplo: Lewis, *Counterfactuals*; Schnieder, «A Logic for 'Because' »; Fine, «Guide to Ground».

8. Como Geoffrey Hunter, *Metalogic*, capítulo 17.

9. Como Copi, *Lógica Simbólica.*

10. Como Mendelson, 1997.

11. Como Badesa, Jané y Jansana, 1998.

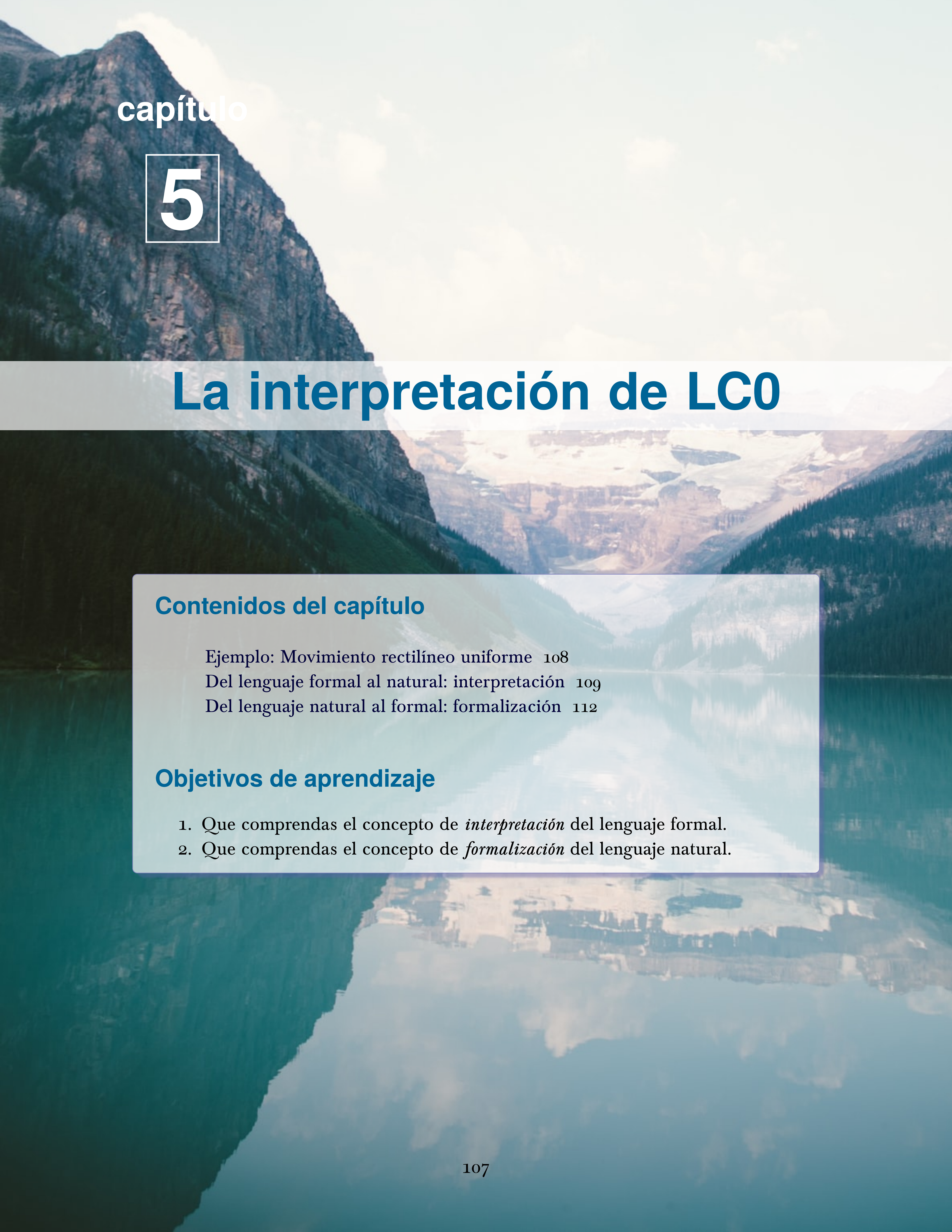
12. En realidad, existen problemas muy interesantes en la interacción entre las propiedades lógicas de un sistema y las características de la notación con la que lo describimos; problemas que, desafortunadamente, no podemos tratar aquí. Para un buen inicio, ver «Símbolos y Notación Lógica», de Axel Barceló, en su blog *Conceptual.*

13. Algunos autores usan «fórmulas bien formadas», que abrevian con «fbf» (o con «wff», por la expresión en inglés: *well formed formula*), pero aquí no seguiremos esa convención.

14. Las serifas son las «patitas» en las letras. Una fuente con serifas, como la que estoy usando en este libro, tiene «patitas», que puedes ver en la letra: «p», mientras que sin serifas, se ve así: «p».

15. El mismo que usa Alonzo Church, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton University Press, 1956, p. 38.

16. Comparar con Badesa, Jané y Jansana, *Elementos de Lógica Formal*, Ariel, pp. 129-130.



capítulo

5

# La interpretación de LC0

## Contenidos del capítulo

## Objetivos de aprendizaje

1. Que comprendas el concepto de *interpretación* del lenguaje formal.
2. Que comprendas el concepto de *formalización* del lenguaje natural.

La lógica LC0 es un sistema lógico (definición 14), pero, como vimos en la sección 3, lo usamos como un modelo de la argumentación. Lo primero quiere decir que es un lenguaje, definido con ciertos símbolos y reglas de formación, y además esos símbolos tienen una definición semántica: en este caso, mediante las *tablas de verdad* que veremos en el siguiente capítulo. Además, algunas de estas fórmulas *se infieren válidamente* de otras, como veremos en un capítulo posterior. Pero todo esto es a nivel *formal*, matemático.

Lo segundo —es decir: que usamos al sistema de la lógica como un modelo de la argumentación— quiere decir que utilizaremos sus fórmulas como representaciones de proposiciones del lenguaje natural. Como ya vimos en la sección 4.1, las conectivas proposicionales se usan como *modelos* de algunas conectivas del lenguaje natural, y las variables proposicionales se utilizan como modelos de las proposiciones atómicas. Un modelo es una representación. En este breve capítulo vamos a hacer explícitas las dos «caras» de esta representación. Empecemos con un ejemplo.

## 5.1. Ejemplo: Movimiento rectilíneo uniforme

Tomaremos un ejemplo del modelado matemático que nos dan desde la educación media, un típico problema de la materia de Física:

> Dos pueblos que están a una distancia de 20 km uno del otro están unidos por una carretera recta. Joselito, un ciclista, va de un pueblo al otro; su velocidad es constante, de 10 m/s. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar de un pueblo al otro?

Este sería el *problema*. De este, tenemos que extraer los *datos*, que son las magnitudes relevantes para poder resolverlo:

> Distancia: 20 km (rectilíneos)
> Velocidad: 10 m/s (constante o uniforme)

Y esta sería la «fórmula» o *ley* que usaremos para calcular, con los datos, una solución al problema:

$$x = x_0 + vt \tag{5.1}$$

Esta ecuación nos dice que la posición del objeto en un determinado momento, $x$, es igual a la posición inicial (en algún momento anterior), $x_0$, más: la multiplicación de la velocidad con que se ha movido, $v$, por el tiempo transcurrido, $t$.

Ya tenemos los ingredientes básicos. ¿Qué falta?

*Primero*, pasar los datos al lenguaje matemático en el que está escrita la ley. (En el modelo de la lógica, esto corresponde a la **formalización**.) *Segundo*, usar la ley para calcular el resultado. Para ello usamos técnicas matemáticas—en este caso, álgebra y aritmética. (Esto corresponde a las distintas técnicas que veremos después para demostrar validez o invalidez de un argumento.) *Tercero*, «traducir de regreso» el resultado, de manera que el resultado, que era puramente matemático, sea ahora una respuesta al problema físico. (Esto corresponde a la **interpretación** de fórmulas del sistema lógico con proposiciones expresadas en el lenguaje natural.)

Entonces, *formalizamos*:

$x_0$ = El pueblo del que sale Joselito.

$x$ = El pueblo al que va Joselito = $x_0 + 20,000$ (pues habíamos dicho que estaba a 20 km del primero, y estamos usando unidades en metros).

$v$ = 10 m/s

$t$ = incógnita

Después, usamos álgebra para despejar la variable que no concemos en la ecuación 5.1:

$$t = \frac{x - x_0}{v} \tag{5.2}$$

Es decir,

$$t = \frac{20,000m}{(10\frac{m}{s})}$$

Ya teniendo esto, usamos aritmética para encontrar el resultado:

$$t = 2{,}000 \text{ s} = 33.333\ldots \text{min} \tag{5.3}$$

Esta (un tiempo de 33 minutos y un tercio, es decir, 33 minutos y 20 segundos) nos da la *respuesta* al problema original, pues la ecuación 5.3 nos da no sólo un número, sino una cantidad física de tiempo.

El problema que acabamos de ver y su resolución es un ejemplo más del modelado matemático, pero haciendo explícito el proceso que esquematizamos en la sección 3, con la figura 3.1. En la figura 5.1 hay un esquema menos abstracto.

## 5.2. Del lenguaje formal al natural: interpretación

A grandes rasgos, **interpretar** una fórmula es proveer una proposición, expresada en el lenguaje natural, que puede ser representada por tal fórmula.

Siendo un poco más rigurosos, una interpretación de una fórmula A consiste en una función de interpretación, que podemos dar simplemente como una lista de cada una de sus variables proposicionales, junto con la proposición simple que formalizan. Por ejemplo, a la fórmula:

$$p \supset (q \vee r)$$

podemos interpretarla con la proposición:

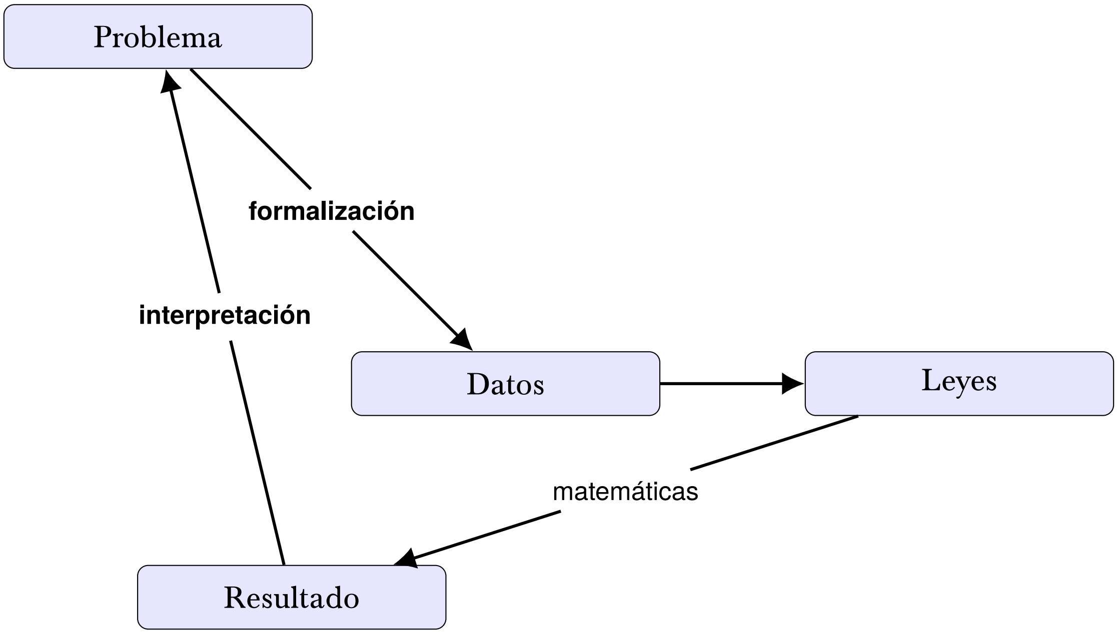


Figura 5.1: *Esquema del uso de modelos en física.*

*Si salimos el viernes, o vamos al cine o vamos a cenar*

Como también veremos con la formalización, existen interpretaciones más o menos perspicuas que otras. Decimos que una interpretación es **perspicua** cuando la fórmula «recorta» de la manera más fina posible la forma lógica con la que la interpretamos. ¿Qué significa esto?

Consideremos otra vez la fórmula $p \supset (q \vee r)$. La podemos interpretar con la proposición:

*Si no salimos el jueves, o jugamos videojuegos o pedimos pizza y vemos una película*

Pues interpretaríamos así:

- $p$ = No salimos el jueves,
- $q$ = Jugamos videojuegos,
- $r$ = Pedimos pizza y vemos una película.

Pero esta interpretación **no** es la más perspicua posible. ¿Por qué? Porque las proposiciones con que interpretamos a $p$ y a $r$ no son atómicas: contienen partículas que, a su vez, podríamos representar lógicamente. Es decir: la forma lógica de la proposición expresada por «*Si no salimos el jueves, o jugamos videojuegos o pedimos pizza y vemos una película*», no es *exactamente* la de la fórmula $p \supset (q \vee r)$—*aunque* puede serlo si es que pasamos por alto cierta estructura en las proposiciones.

Entonces, la interpretación de la fórmula: «$p \supset (q \vee r)$» con la proposición:

*Si salimos el viernes, o vamos al cine o vamos a cenar* es más perspicua que la interpretación con la proposición:

*Si no salimos el jueves, o jugamos videojuegos o pedimos pizza y vemos una película*,

pues la segunda tiene conectivas lógicas que no se representan en la fórmula.

De hecho, hablando para todos los casos, tenemos esta definición:

**Definición 30: Interpretación perspicua**

Una interpretación perspicua de una fórmula interpreta a las atómicas en esa fórmula sólo con proposiciones simples, y a las conectivas de esa fórmula con sus correspondientes conectivas de la lógica formal.

Vamos a ejemplificar el proceso de interpretar una fórmula; después de ello, ejercitaremos el concepto.

**ejemplo 19**

Supongamos que me dan esta fórmula:

$$(\neg p \lor r) \supset \neg s$$

La interpreto *primero* interpretando sus variables proposicionales con cualquier proposición atómica que yo prefiera:

$p$: Hace buen día.
$q$: Viene tu mamá.
$r$: Vamos al cine.

Para, finalmente, dar la interpretación de la fórmula entera, usando la interpretación de las atómicas y de las conectivas:

**Interpretación** Si o no hace buen día o viene tu mamá, entonces no vamos al cine.

## Ejercicio # 16

Interpreta de manera perspicua cada una de las 10 fórmulas siguientes:

1. $p \,\&\, s$
2. $t \supset \neg p$
3. $q \equiv (p \,\&\, r)$
4. $q \equiv (p \,\&\, \neg r)$
5. $(t \lor s) \supset (p \,\&\, \neg p)$
6. $(q \,\&\, r) \lor (t \,\&\, s)$
7. $(q \supset \neg s) \equiv (t \lor \neg r)$
8. $(r \equiv \neg s) \supset (q \,\&\, \neg r)$
9. $[q \lor (r \lor s)] \equiv \neg(t \,\&\, r)$
10. ⑨ $\lor \neg$⑧

## 5.3. Del lenguaje natural al formal: formalización

«**Formalizar** una proposición» significa representarla en el lenguaje de la lógica formal. Se dice que una formalización es **perspicua** cuando la fórmula tiene la estructura lógica más fina que puede representar de la proposición. Veamos qué quiere decir esto.

La proposición expresada por la siguiente oración:

*O pedimos pizza y cenamos en casa, o vamos al café y cenamos ahí*

podría formalizarse con una simple variable proposicional:

- O pedimos pizza y cenamos en casa, o vamos al café y cenamos ahí = $p$,

pero, obviamente, esto es muy poco satisfactorio. Una opción más satisfactoria, al ser más perspicua, sería formalizarla con:

$$p \vee q,$$

tomando:

- Pedimos pizza y cenamos en casa = $p$,
- Vamos al café y cenamos ahí = $q$.

Pero esta opción tampoco es la *más* perspicua, pues otra vez estamos ignorando conectivas lógicas dentro de las proposiciones que le asignamos a las atómicas. De hecho, la opción más perspicua sería:

$$(p \,\&\, r) \vee (q \,\&\, s),$$

tomando:

- Pedimos pizza = $p$,
- Cenamos en casa = $r$,
- Vamos al café = $q$,
- Cenamos [en el café] = $s$.

Esta es la opción más perspicua porque **le hemos asignado proposiciones simples a las fórmulas atómicas**, **haciendo corresponder las conectivas en la proposición molecular con las de la fórmula**.

En general,

**Definición 31: Formalización perspicua**

Una formalización perspicua de una proposición $p$ expresada en el lenguaje natural, formaliza a las proposiciones atómicas presentes en $p$ sólo con fórmulas atómicas, y a las conectivas lógicas de esa proposición con sus correspondientes conectivas de la lógica formal.

Para formalizar, hay que seguir los siguientes pasos:

**Primero** Organiza los argumentos en premisas y conclusiones: primero las premisas, luego un indicador de inferencia, y finalmente, la conclusión. Recuerda que un argumento puede tener su conclusión al inicio, en medio o al final. (Puedes revisar este video para recordar.)

**Segundo** Formaliza cada proposición. Recuerda que esto consiste en definir una **interpretación**: una variable proposicional para cada proposición *atómica*, y entonces extraer las conectivas que están presentes en las fórmulas complejas; finalmente, ofrecer una **fórmula** que (dadas las conectivas en esa proposición y el diccionario) represente esa proposición.

**Tercero** Arregla las fórmulas en orden, de acuerdo a los dos pasos anteriores: enumera las premisas, y en la siguiente línea pon un símbolo de «por lo tanto» (es decir: $\therefore$) seguido de la conclusión.

**ejemplo 20**

Supongamos que me dan este argumento:

> Si la libertad no existe, tampoco la creación. Si la creación no existe, el arte no es posible. Por lo tanto, si la libertad no existe, el arte no es posible.

Lo formalizaría *primero*, distinguiendo premisas y conclusión:

> *Premisa 1*. Si la libertad no existe, tampoco la creación.
> *Premisa 2*. Si la creación no existe, el arte no es posible.
> *Conclusión*. Si la libertad no existe, el arte no es posible.

Para hacer un ejercicio, no siempre es necesario entregar este primer paso de distinguir premisas y conclusión, pero es muy útil hacerlo.

Como *segundo* paso, defino una *interpretación*:

$p$: La libertad existe.
$q$: La creación existe.
$r$: El arte es posible.

*Tercero*, enumero premisas y conclusión formalizadas, con lo cual termino mi trabajo:

1. $\neg p \supset \neg q$.
2. $\neg \supset \neg r$.

$\therefore \neg p \supset \neg r$.

## Ejercicio # 17

Formaliza los siguientes argumentos.

- El arte es *mimesis* y el arte es *katarsis*. Pero el arte es *mimesis* y *katarsis* siempre y cuando: el artista busca representar y, también, busca expresar. Si el artista busca expresar, entonces el arte es subjetivo. Si el artista busca representar, entonces el arte es objetivo. Por lo tanto, el arte es subjetivo y objetivo.

- Si me ruegas, tenemos un gran futuro. Pues basta que me ruegues para que te perdone; pero te perdono siempre y cuando no lo vuelvas a hacer; y si no lo vuelves a hacer, tenemos un gran futuro.
- Pasaré el examen de idiomas y me graduaré. Me graduaré, lo que requiere que termine los créditos. O dejo el trabajo o no termino los créditos. O sea que, en definitiva, todo lo anterior conlleva que voy a pasar el examen y voy a dejar el trabajo.
- Si te quiere, te trata bien. Pero si te trata bien, esperará reciprocidad. De ahí que, si te quiere, esperará reciprocidad y le importará tu bienestar. Pues no va a pasar que: espere reciprocidad y no le importa tu bienestar.

A veces no es totalmente obvio cómo formalizar un argumento, pues pueden ocurrir una o más de estas circunstancias:

- El argumento a formalizar puede contener aclaraciones que forman parte del *contexto* del argumento, no del argumento mismo.
- El argumento puede contener premisas implícitas, que deben hacerse explícitas para demostrar la validez.
- Puede ser necesario parafrasear lo dicho en el texto, para que se «ajuste» al modelo que nos da LC0.
- En todavía otros casos, es necesario parafrasear mucho para poder encontrar el «núcleo», por así decir, del argumento, lo que el autor parece querer decir.

Antes de cerrar el capítulo, vamos a hacer varios ejercicios de formalización con algunos argumentos tomados de textos reales de filosofía.

**Ejercicio # 18**

Formaliza los siguientes argumentos. Puedes usar la misma interpretación para los cinco argumentos (es decir, las mismas variables proposicionales para las mismas proposiciones atómicas). En el caso del argumento de Mill (tercer argumento de abajo), que debe parafrasearse mucho, pongo la paráfrasis entre paréntesis, y eso es lo que hay que formalizar.

1. Si conocer es percibir, entonces: conozco algo si y solamente si percibo lo conocido. Si recuerdo algo y lo que recuerdo está bien guardado en la memoria, conozco lo que recuerdo. Si recuerdo algo y cierro los ojos, entonces (de todos modos) conozco lo que recuerdo. Pero: si conozco algo siempre y cuando percibo lo conocido, entonces: si cierro los ojos y recuerdo algo, no conozco lo que recuerdo. Por lo tanto, conocer no es percibir. (Platón, *Teeteto*, 163b-164b)
2. Cada una de las tres propuestas (que consideraré) no triunfa sin que tenga éxito el

programa de nominalización de Field (o algo muy parecido a ello). Así que, al final, esas tres propuestas no son caminos fáciles. (*Premisa implícita*: las tres propuestas son caminos fáciles si y solamente si: triunfan y no tiene éxito el programa de nominalización de Field.) (Mark Colyvan, 'There is No Easy Road to Nominalism', *Mind*, 2010)

3. Él [Kant] establece, en el tratado en cuestión [*Fundamentación de la Metafísica de las Costumbres*], un primer principio universal como origen y fundamento de la obligación moral; es éste: Obra de manera que tu norma de acción sea admitida como ley por todos los seres racionales. Pero, cuando empieza a deducir de este precepto cualesquiera de los deberes actuales de moralidad, fracasa, casi grotescamente, en la demostración de que habría alguna contradicción, alguna imposibilidad lógica (por no decir física) en la adopción por todos los seres racionales de las reglas de conducta más atrozmente inmorales. Todo cuanto demuestra que las consecuencias de su adopción universal serían tales que nadie se decidiría a incurrir en ellas. (*Paráfrasis*: El principio de Kant es compatible con la adopción de las reglas de conducta inmorales. Si eso pasa, entonces nadie actúa bajo ese principio. Si nadie se actúa bajo el principio de Kant, entonces este no es origen y fundamento de la obligación moral. Ergo, el principio de Kant no es origen y fundamento de la obligación moral.) (John Stuart Mill, *El Utilitarismo*, capítulo I)
4. Hay compuestos. Una sustancia compuesta es un agregado de simples. Por lo tanto, hay sustancias simples. (*Premisa implícita*: Si una sustancia compuesta es un agregado de simples, y hay sustancias compuestas, entonces hay simples.) (Leibniz, *Monadología*, §1)
5. Pero ¿no cree que hay suficientes casos registrados de personas que creen que han oído cómo Satán les hablaba dentro de su corazón, del mismo modo que los místicos afirman a Dios? Y ahora no hablo de una visión exterior, hablo de una experiencia puramente mental. Ésa parece ser una experiencia de la misma clase que la experiencia de Dios de los místicos, y no veo por qué, por lo que nos dicen los místicos, no se puede sostener el mismo argumento en favor de Satán. (*Paráfrasis*: Si hay personas que creen que les ha hablado Satán, entonces: si los místicos infieren la existencia de Dios a partir de sus experiencias, entonces podemos inferir la existencia de Satán a partir de la experiencia de las personas que creen que les habla Satán. Si podemos inferir la existencia de Satán a partir de la experiencia de las personas que creen que les habla, entonces el argumento de los místicos es inválido. Hay personas que creen que les ha hablado Satán. Por lo tanto, el argumento de los místicos es inválido.) (Bertrand Russell: «La existencia de Dios», debate con F.C. Copleston)

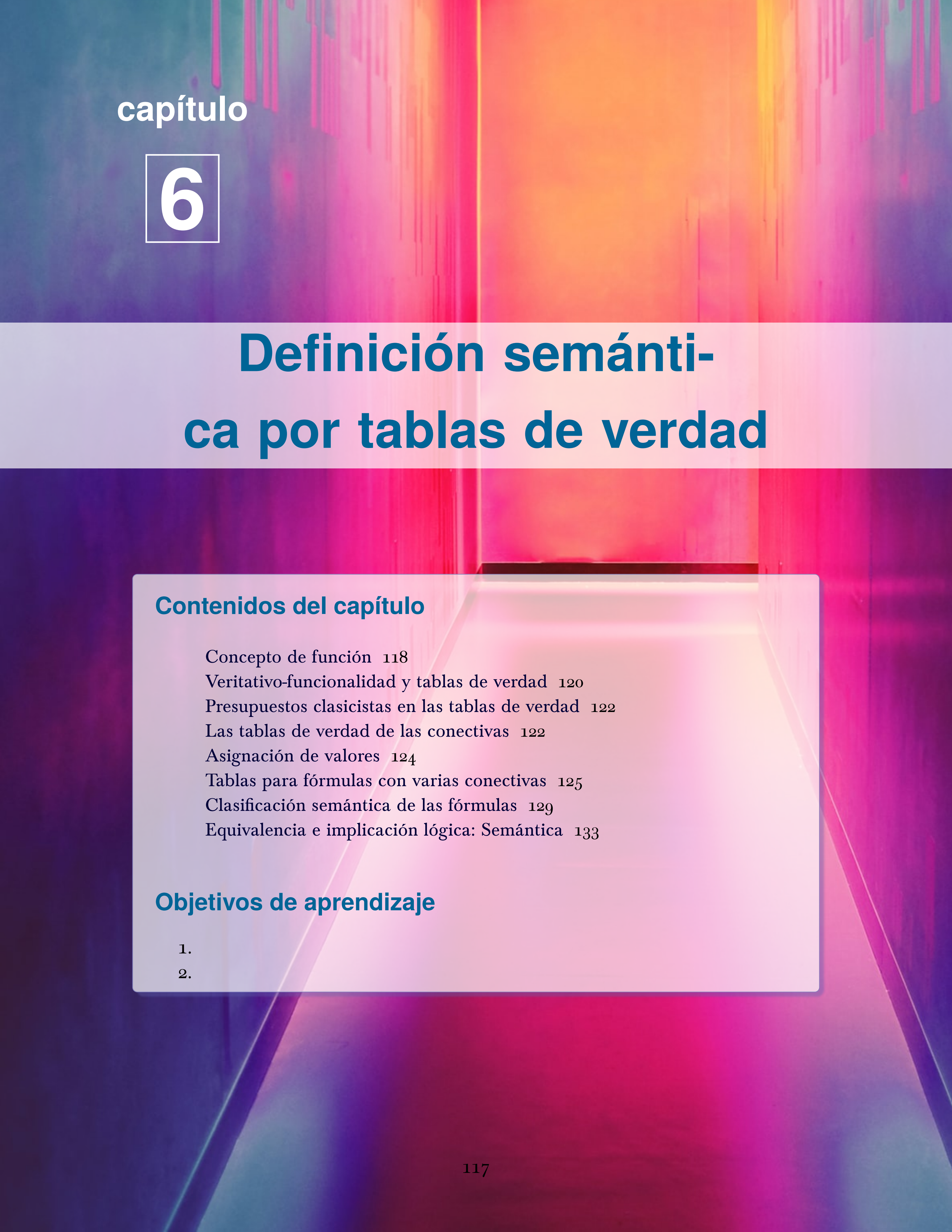
## Proyecto del capítulo:

**Antecedentes** --→ *

**Problema** --→ *

★

## Notas



capítulo

## 6

# Definición semántica por tablas de verdad

## Contenidos del capítulo

## Objetivos de aprendizaje

1.
2.

Las conectivas lógicas son, al nivel de la gramática de LC0, *símbolos* que conectan fórmulas entre sí (*cf.* el capítulo 4). Al nivel de la semántica formal, estos símbolos representan funciones de valores de verdad. (Al nivel del modelado, estas conectivas representan partículas del lenguaje: cap. 5). De igual forma, las variables proposicionales son, a nivel del lenguaje, símbolos; pero al nivel de la semántica formal, variables que pueden tomar uno y sólo uno de dos valores posibles: **V** y **F** —verdadero y falso. (Y las usamos, por supuesto, para modelar proposiciones atómicas.)

Vamos a definir la noción de *función*, y después la de función *de valores de verdad*.

## 6.1. Concepto de función

Como veremos abajo (en la sección 6.4), cada una de las conectivas lógicas es una *función de valores de verdad*. Primero definamos qué es una función.

**Definición 32: Función**

Una función es una *regla de asociación* entre dos conjuntos, de manera que, para cada entrada (elemento del primer conjunto) le corresponde una única «salida» (elemento del segundo). Que una función sea una **regla** significa que hay una manera de especificarla —de definirla— de una vez para siempre.

Una manera útil de pensar a las funciones es como «máquinas», que *toman a la entrada*, la «procesan» *de acuerdo a la regla que las define*, y nos devuelven el *resultado*. Vamos a ilustrar esto gráficamente, en la figura 6.1.[1] Usaremos $x$ como variable para los elementos de la entrada, y $f$ como variable para las funciones. Entonces, $f(x)$ va a ser la función aplicada a $x$, que es idéntica al resultado.

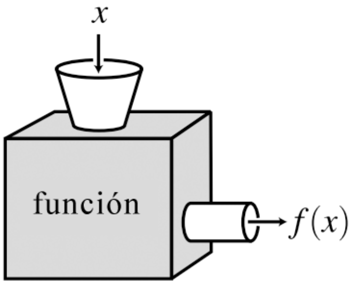


Figura 6.1: *Una función puede verse como una máquina.*

Dijimos que una función es una regla de asociación *entre dos conjuntos*, lo cual nos servirá por ahora. La idea es que una función asocia elementos «de dos conjuntos» porque toma elementos de un conjunto —el conjunto de las entradas— y nos devuelve elementos del segundo conjunto—el conjunto de las salidas. (Aunque, de hecho, el conjunto de entradas y el de las salidas pueden ser **el mismo**, de manera que la función tome entradas en un conjunto, las «procese» y nos devuelva valores del mismo conjunto. En este sentido, la función «va» de un conjunto a ese mismo conjunto, solo que «tomándolo» dos veces.)

La notación que se usa para definir de qué conjunto tomamos la entrada y de cuál la salida de una función $f$, es la siguiente:

$$f : E \longrightarrow S,$$

donde $E$ es el conjunto de las entradas y $S$ el de las salidas. Por ejemplo, si tomamos la función *sucesor*, que para cada número natural nos da ese número sumándole 1, tendríamos:

$$\mathit{sucesor} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

Sólo nos falta la notación para la regla que define a la función. En muchos ámbitos, es usual definir a las funciones—especificar las reglas—con esta notación (fíjate que también es una flecha, pero con una «colita», y que no va de conjuntos a conjuntos, sino de entradas al valor correspondiente):

$$f(x) \longmapsto y,$$

donde $y$ es el valor que resulta de aplicarle $f$ a una entrada $x$, y en el que definimos la regla. Por ejemplo, para el caso de la función *sucesor*, escribiríamos:

$$sucesor(x) \longmapsto x + 1$$

Otra notación usual (en algunos ámbitos) para definir una función es así:

$$f(x) := y$$

Por ejemplo,

$$sucesor(x) := x + 1$$

Dijimos que una función es una regla de asociación entre dos conjuntos, de manera que a un elemento del primer conjunto **le corresponde uno**, **y un único** elemento del segundo. Todas las funciones que vimos arriba cumplen con esto—¡si no, no serían funciones! Si una «función» nos devuelve cero, dos o más valores para una misma entrada, se dice que «*no está bien definida*», y en realidad no cuenta como función.

**Ejercicio # 19**

Ⓘ Dime si las siguientes reglas definen a una función o no, y por qué.

1. Para todo papá, devuelve su hijo.
2. Para todo papá, devuelve su hijo *primogénito*.
3. Para auto vendido, devuelve su más reciente dueño.
4. Para cada mano de una persona, devuelve su otra mano.
5. Para toda persona, devuelve una con la que haya tenido una amistad.
6. Para todo papá, devuelve su hijo.
7. Para cada país del planeta, devuelve un idioma que se hable ahí.
8. Para cada ciudad del país, devuelve su montaña más grande.
9. Para cada Copa Mundial de futbol, devuelve su ganador.
10. Para cada país del planeta, devuelve su capital.

(II) Dame diez ejemplos de funciones. Para cada uno, puedes ya sea definir su regla (como en los casos de arriba), o poner una función matemática explícita (como: «$f(x) = x^3$»).

## 6.2. Veritativo-funcionalidad y tablas de verdad

Las conectivas lógicas proposicionales son operaciones con valores de verdad: funciones (def. 32) que toman uno (la negación) o dos (las demás) valores de verdad, y regresan exactamente un valor de verdad. Se dice, entonces, que son conectivas **veritativo-funcionales**.

Por ejemplo, la negación es una función que toma un valor de verdad—el de la fórmula negada—y nos devuelve un único valor de verdad: el de la fórmula negativa. Denotemos con un «dos» en **negritas** al conjunto de los dos valores de verdad: $\mathbf{2} = \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$. Entonces, usando la notación de la sección anterior para funciones, diríamos:

$$\neg : \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{2}$$

Es decir: la negación toma uno de los dos valores de verdad, y nos da otro de los valores de verdad. ¿Cuál es la regla que define a esta función?

Bueno, pues que la negación de una fórmula falsa es verdadera, y que la negación de una fórmula verdadera, es falsa. Lo primero lo podríamos poner, usando una de las notaciones de la sección anterior,

$$\neg(\mathbf{V}) \longmapsto \mathbf{F}$$

o lo que es lo mismo, usando la otra:

$$\neg(\mathbf{V}) := \mathbf{F}$$

Mientras que la segunda parte sería también: $\neg(\mathbf{F}) \longmapsto \mathbf{V}$, o igualmente: $\neg(\mathbf{F}) := \mathbf{V}$.

Ahora bien, tenemos también conectivas binarias. Por ejemplo, la disyunción, que es una función que toma dos valores de verdad: el de cada uno de los disyuntos, y nos devuelve un único valor de verdad: el de la fórmula disyuntiva. Entonces, la disyunción va desde **2** «dos veces»—porque toma *dos* valores como entrada—a **2** «una vez», porque regresa *un* solo resultado. Usando «×» para decir cuántas veces toma valores de un conjunto, escribiríamos:

$$\vee : \mathbf{2} \times \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{2}$$

Y podríamos usar notaciones (maneras de escribir los conceptos: secc. 4.2) como las anteriores para cada uno de sus casos. Por ejemplo:

$$\vee(\mathbf{V}, \mathbf{F}) \longmapsto \mathbf{V}$$

Pero para el caso de las conectivas lógicas, lo usual es definirlas mediante su **tabla de verdad**, que nos dice, para cada posible combinación de valores de verdad de las proposiciones conectadas, qué valor de verdad tiene la proposición compuesta (compleja, *molecular*) resultante. Es decir: las tablas de verdad nos definen a las conectivas *semánticamente* —pues dan su semántica formal— y de manera *explícita*, pues dan *todas sus posibles maneras* de operar con sus entradas.

Las tablas de verdad son un caso particular del concepto de *tabla de función* en matemáticas. Una tabla de función nos dice, para cada entrada de la función, el resultado de aplicar esta función a esa entrada.

Como veremos ahora, las funciones de LC0 tienen un número muy pequeño de posibles entradas, definido por los dos valores de verdad. Pero esto no pasa siempre. Por ejemplo, al aprender aritmética nos enseñan las *tablas de multiplicar*: para cada número entero del 0 al 10, estas tablas nos dan el resultado de multiplicarlo por cada número entero del 0 al 10. Incluyen, entonces, ejemplos como «$3 \times 3 = 9$» o «$5 \times 7 = 35$». Pero sería imposible dar la tabla de función *completa* para la multiplicación—¡Por el sencillo hecho de que esta es infinita! Tendría que incluir *no sólo* los números del 0 al 10... ¡Sino la tabla de *todo* número, y además, no sólo multiplicar cada uno de los números por un número del 0 al 10, sino por *cada uno* de *todos* los números! Nunca acabaríamos de escribir, y menos de aprender, estas tablas. Por ello, es mucho más sencillo aprenderse las reglas básicas —las tablas de multiplicar de la escuela primaria—, y luego aprender un **algoritmo** —una serie de reglas— para utilizar estas tablas al multiplicar cualquier número que nos presenten. Este es el tipo de procedimiento que utilizaremos aquí.

Por otro lado (y como veremos después: en el capítulo 8), las definiciones de las conectivas mediante las tablas son equivalentes con la validez de ciertos esquemas de inferencia. Pero primero, vamos a definir estas tablas. Y para ello, primero pongamos sus presupuestos filósofico-matemáticos sobre la mesa.[2]

## 6.3. Presupuestos clasicistas en las tablas de verdad

Las tablas de verdad de LC0 se definen bajo cuatro presupuestos esenciales:

- Existen dos y sólo dos valores de verdad.
- Toda proposición tiene al menos un valor de verdad.
- Ninguna proposición tiene más de un valor de verdad.
- Las conectivas son veritativo-funcionales.

Probablemente debamos agregar al menos dos supuestos más, pero ahora vamos enfocarnos en estos.[3]

Les llamo «presupuestos *clasicistas*» porque son presupuestos que definen lo que significa que las tablas que vamos a ver sean tablas de la conectivas de la lógica **clásica**, es decir, de LC0. Las conectivas (de orden cero) de muchas lógicas *no clásicas* (*cf.* la sección 3.5) no siguen estos presupuestos. Por ejemplo: algunas aceptan conectivas que no son veritativo-funcionales,[4] otras rechazan que ninguna proposición tenga más de un valor de verdad,[5] y otras rechazan que sólo haya dos valores de verdad.[6]

## 6.4. Las tablas de verdad de las conectivas

De nuevo: una tabla de verdad nos dice, para cada posible combinación de valores de verdad de las proposiciones conectadas, qué valor de verdad tiene la proposición compuesta (compleja, *molecular*) resultante. Entonces necesitamos exponer *todas* las posibles combinaciones de valores de verdad. Vamos a dar una definición rigurosa.

**Definición 33: Tabla de verdad**

Una tabla de verdad es una **matriz**: un arreglo de valores en *columnas* y *filas*.

Las columnas (verticales) corresponden a las una fórmulas atómicas (variables proposicionales) y a las conectivas: una columna por cada una de las atómicas y por cada una de las conectivas.

Las filas (horizontales) corresponden a las posibles combinaciones de valores de verdad: cada fila tendrá: en la columna que corresponde a una atómica, un valor de verdad, y en la columna que le corresponde a una conectiva, el valor de verdad que tiene la fórmula molecular que corresponde con esa conectiva.

Dada una fórmula con $n$ atómicas, la tabla que le corresponde va a tener $2^n$ filas; dada una fórmula con un número $n$ de atómicas y un número $p$ de conectivas lógicas, la tabla que le corresponde va a tener un número $n+p$

de columnas. Entonces, a cada fórmula con $n$ atómicas y $p$ conectivas, le corresponderá una matriz de dimensión $(2^n) \times (n + p)$.

Vamos a dar la tabla de verdad de cada conectiva. Diremos que esta tabla **define semánticamente** a la conectiva: nos dice cómo se define la función de valores de verdad que es «el aspecto semántico» de la conectiva.

Además, para cada tabla, vamos a dar una regla mnemotécnica, que resume lo esencial de la tabla y que nos permite construirla sin recordar mucho más.

### 6.4.1. La tabla de verdad de la negación

| ¬ | A |
|---|---|
| **F** | **V** |
| **V** | **F** |

**La negación invierte los valores**: negación de **V** es **F**; negación de **F** es **V**.

### 6.4.2. La tabla de verdad de la conjunción

| A | & | B |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **F** | **V** |
| **F** | **F** | **F** |

**La conjunción sólo es verdadera cuando ambas proposiciones son verdaderas** (y es falsa en todos los demás casos: cuando una es falsa y cuando ambas son falsas).

### 6.4.3. La tabla de verdad de la disyunción inclusiva

| A | ∨ | B |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **V** | **F** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **F** |

**La disyunción es falsa sólo cuando ambas proposiciones son falsas** (y es verdadera en los demás casos: cuando ambas son verdaderas, o cuando solo una es verdadera).

### 6.4.4. La tabla de verdad de la equivalencia material

| A | ≡ | B |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **F** |

**La equivalencia material sólo es verdadera cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad**: o ambas falsas, o ambas verdaderas. Si una tiene un valor y la otra el otro, el bicondicional es falso.

### 6.4.5. La tabla de verdad de la implicación material

| A | ⊃ | B |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **F** |

**La implicación material es falsa sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso**. En todos los demás casos (los dos casos con antecedente falso; antecedente verdadero y consecuente verdadero), es verdadero.

## 6.5. Asignación de valores

Como dijimos antes, una tabla nos da *todas las posibles* combinaciones de valores de verdad de las fórmulas atómicas de una fórmula, y mediante la definición semántica de cada conectiva, nos da todas los posibles valores de verdad en cada una de esas posibles combinaciones. Cada una de estas posibles combinaciones de valores de verdad de las fórmulas atómicas —es decir, cada renglón de una tabla— es lo que llamamos una *asignación*, definida como sigue.

Definición 34: Asignación de valores de verdad

Una **asignación** de valores de verdad a una fórmula es simplemente un renglón de su tabla de verdad. Es decir, es darle un valor de verdad a cada variable proposicional. Como el valor de verdad de una fórmula está determinada por (1) el valor de verdad de cada una de sus fórmulas atómicas (variables proposicionales) y (2) la definición de las constantes lógicas (mediante sus tablas), una asignación de valores a las variables proposicionales de una fórmula determina el valor de la fórmula completa.

## 6.6. Tablas para fórmulas con varias conectivas

Las tablas de la sección 6.4 nos dan la definición semántica de cada conectiva. Por lo tanto, sólo nos dicen cómo «actúa», cómo opera cada conectiva con dos valores—si es una conectiva binaria—o con uno—si es la conectiva unaria, la negación. Pero ahora vamos a *extender* esta definición para poder evaluar fórmulas con varias conectivas. La extensión consiste en definir el siguiente algoritmo.

Definición 35: Tablas de fórmulas con más de una conectiva

Para construir la tabla de verdad de una fórmula que tiene más de una conectiva lógica, hay que aplicar las tres reglas siguientes.

**Dos a la $n$** Calculo $2^n$ (2 a la $n$-ésima potencia), donde $n$ = número de variables proposicionales *distintas* en mi fórmula: si una misma variable aparece más de una vez, **no** la cuento. El número resultante es el número de **filas** que va a tener mi tabla de verdad.[7]

**Mitad de la mitad** Ya teniendo mis $2^n$ filas de la tabla, para mi primera letra proposicional (empezando por la que está hasta la izquierda) pongo la primera mitad (es decir, mis primeras «$(2^n)$ a la mitad» o: $(2^n)/2$) de esas filas todas verdaderas, y la segunda mitad todas falsas. Para la siguiente letra (hacia la derecha), la mitad de la mitad de la primera **V**, la otra mitad de mitad **F**, la siguiente mitad de mitad **V**, y la siguiente y última mitad de mitad **F**. Si hay más letras, hago lo mismo: para la tercera letra, pongo la mitad de la segunda **V**, la otra mitad **F**... Y así me voy hasta la última letra. Si he hecho todo bien, a la última letra que no se repita sólo me resta asignarle una **V**, la siguiente **F**, y así: es decir, la asignación quedará «una y una» en la última letra que no se repita. **Nota**: si una misma letra se repite en la fórmula, simplemente *copio* la misma columna de la primera vez que aparece en todas las demás columnas en las que aparezca.

**De adentro hacia afuera, usando las tablas básicas** Ya que tengo todas las filas de mis letras (es decir, de mis sub-fórmulas atómicas), aplico mis tablas de verdad básicas, empezando «de adentro hacia afuera». Para ello, primero descubro cuál es la **conectiva principal** de mi fórmula. Esa es la conectiva que voy a calcular al final. Después me voy a las *sub-fórmulas*, y para cada una, descubro su conectiva principal. Sigo así hasta llegar a las sub-fórmulas que están «más adentro» (que ya no tienen sub-fórmulas). Empiezo por esas.[8]

Al haber calculado la columna bajo la conectiva principal he terminado mi tabla de la fórmula compleja.

Veamos un ejemplo.

**ejemplo 21**

Supongamos que tengo esta fórmula:

$$r \,\&\, (s \vee \neg p)$$

Para construir su tabla, sigo los pasos de la definición 35.

Primero aplico la regla «**Dos a la** $n$». Cuento el número de letras distintas: $r, s, p$, que es 3. Entonces,

$$2^n = 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8,$$

por lo que mi tabla va a tener 8 renglones o filas. Y como tiene 3 letras y 3 conectivas, va a tener 6 columnas, una para cada una:

| $r$ | & | $(s$ | $\vee$ | $\neg$ | $p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Ya tengo las filas y columnas, me falta llenarlas. Esto lo hago con mi regla «**Mitad de la mitad**». Empiezo por la columna más hasta la izquierda, rellenando con **V**s la primera mitad de las filas y con **F**s la segunda:

| $r$ | & | $(s$ | $\vee$ | $\neg$ | $p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **V** |  |  |  |  |  |
| **V** |  |  |  |  |  |
| **V** |  |  |  |  |  |
| **V** |  |  |  |  |  |
| **F** |  |  |  |  |  |
| **F** |  |  |  |  |  |
| **F** |  |  |  |  |  |
| **F** |  |  |  |  |  |

Continuo con la letra inmediatamente a la derecha. Empiezo rellenando con **V**s la mitad de las filas que rellené con **V**s en la primera columna, la siguiente con **F**s, y así hasta terminar la tabla.

| $r$ | & | $(s$ | $\vee$ | $\neg$ | $p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **V** |  | **V** |  |  |  |
| **V** |  | **V** |  |  |  |
| **V** |  | **F** |  |  |  |
| **V** |  | **F** |  |  |  |
| **F** |  | **V** |  |  |  |
| **F** |  | **V** |  |  |  |
| **F** |  | **F** |  |  |  |
| **F** |  | **F** |  |  |  |

Y siguiendo con la misma regla, termino con la última columna:

| $r$ | & | $(s$ | $\vee$ | $\neg$ | $p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **V** |  | **V** |  |  | **V** |
| **V** |  | **V** |  |  | **F** |
| **V** |  | **F** |  |  | **V** |
| **V** |  | **F** |  |  | **F** |
| **F** |  | **V** |  |  | **V** |
| **F** |  | **V** |  |  | **F** |
| **F** |  | **F** |  |  | **V** |
| **F** |  | **F** |  |  | **F** |

En resumen: por la regla «$2^n$», como la fórmula tiene 3 variables proposicionales distintas, puse $2^3 = 8$ renglones. Por la regla «mitad de la mitad», relleno la columna de la primera letra a la izquierda así: la primera mitad de renglones con **V**, y la segunda mitad con **F** —es decir: cuatro renglones **V**, y los últimos cuatro con **F**. Usando la misma regla, paso con la letra inmediatamente a la derecha: $s$. Como la mitad de 4 es 2, las dos primeras filas en la columna de $s$ van con **V**, las siguientes dos con **F**, y así hasta terminar. Y termino con la última letra: $p$. La mitad de 2 es 1, así que ahora empiezo con **V** y me voy uno y uno hasta terminar la columna.

Ya tengo todas las posibles asignaciones a esa fórmula: todas las posibles combinaciones de los valores de verdad a las variables proposicionales. Ahora aplico mi regla «**De adentro hacia afuera, usando las tablas básicas**».

¿Cuál es la conectiva principal de esta fórmula? La conjunción. Esa la evalúo al final. La conectiva más «hasta adentro» es la negación.

Entonces, primero aplico mi tabla para la negación a la fila de $p$: veo sus valores de verdad y entonces aplico la tabla: donde hay **V**, la negación es **F**, etc. Voy a poner en verde los valores de la columna o columnas que estamos tomando para los valores de la columna de la conectiva que los toma, que estarán en rojo. Quedaría así:

| $r$ | $\&$ | $(s$ | $\vee$ | $\neg$ | $p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | | V | | F | V |
| V | | V | | V | F |
| V | | F | | F | V |
| V | | F | | V | F |
| F | | V | | F | V |
| F | | V | | V | F |
| F | | F | | F | V |
| F | | F | | V | F |

Entonces aplico la tabla de la siguiente conectiva, que en este caso es $\vee$, la disyunción. Para ella, tomo los valores de las fórmulas que conecta, que en este caso es $s$ y $\neg p$, y aplico la tabla de la $\vee$. (Por ejemplo, en el renglón en que $s$ es **V** y $\neg p$ es **F**, voy a poner que $s \vee \neg p$ es **V**, porque así está en la tabla de la disyunción. Y así en cada renglón.) Me quedará esto:

| $r$ | $\&$ | $(s$ | $\vee$ | $\neg$ | $p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | | V | V | F | V |
| V | | V | V | V | F |
| V | | F | F | F | V |
| V | | F | V | V | F |
| F | | V | V | F | V |
| F | | V | V | V | F |
| F | | F | F | F | V |
| F | | F | V | V | F |

Finalmente, tomo mi conectiva principal, que en este caso es la conjunción $\&$, y calculo usando su tabla y los valores de las fórmulas que conecta, que en este caso son $r$ y $(s \vee \neg p)$.

| $r$ | $\&$ | $(s$ | $\vee$ | $\neg$ | $p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | F | V |
| V | V | V | V | V | F |
| V | F | F | F | F | V |
| V | V | F | V | V | F |
| F | F | V | V | F | V |
| F | F | V | V | V | F |
| F | F | F | F | F | V |
| F | F | F | V | V | F |

**Ejercicio # 20**

Realiza la tabla de verdad de cada una de las siguientes fórmulas:

1. $p \,\&\, s$
2. $t \supset \neg p$
3. $q \equiv (p \,\&\, r)$
4. $q \equiv (p \,\&\, \neg r)$
5. $(t \vee s) \supset (p \,\&\, \neg p)$
6. $(q \,\&\, r) \vee (t \,\&\, s)$
7. $(q \supset \neg s) \equiv (t \vee \neg r)$
8. $(r \equiv \neg s) \supset (q \,\&\, \neg r)$
9. $[q \vee (r \vee s)] \equiv \neg(t \,\&\, r)$
10. ⑨ $\vee\, \neg$⑧

## 6.7. Clasificación semántica de las fórmulas

Las fórmulas de LC0 se pueden dividir *exclusiva* y *exhaustivamente* en tres categorías, dependiendo de qué valor de verdad puedan tener en distintas «circunstancias» —en distintas asignaciones.

Como sólo hay dos valores de verdad, *toda* fórmula de LC0 va a cumplir una y *sólo una* de las siguientes opciones: o bien es **V** en toda asignación, o bien es **F** en toda asignación, o bien es **V** en algunas asignaciones, pero **F** en otras.

Las primeras, entonces, son fórmulas que son **V** *en toda posible circunstancia* —o, como también se suele decir: son **V** *en todo mundo posible*. A estas se les llama *verdades lógicas* de LC0, *tautologías*, o también fórmulas *lógicamente necesarias* —en el sentido en que son fórmulas que, por pura lógica, *tienen* que ser verdad. Definamos, entonces:

**Definición 36: Tautología**

Una fórmula es una **tautología** cuando es **V** en toda posible asignación.

A las segundas, que son **F** en toda posible asignación —en *toda circunstancia*— se les llama *contradicciones*. (Sería mejor decir que son *auto*-contradicciones.) Son *lógicamente imposibles* —es decir, por pura lógica, *tienen* que ser falsas; también se dice que son las *falsedades lógicas* del sistema LC0.

**Definición 37: Contradicción**

Una fórmula es una **contradicción** si es **F** en toda posible asignación.

Finalmente, el tercer tipo de fórmulas —que son **V** en ciertas circunstancias pero **F** en otras— se conocen como *contingencias*, pues son «lógicamente contingentes» en el sentido de no ser necesarias: ni necesariamente verdaderas, ni necesariamente falsas.

**Definición 38: Contingencia**

Una fórmula es una **contingencia** cuando es **V** en al menos una asignacion y **F** en al menos otra asignación.

A su vez, a las fórmulas contingentes y a las fórmulas tautológicas se les llama **satisfacibles**, pues son verdaderas en al menos una asignación (las tautológicas, por supuesto, además son verdaderas en *todas*). Se usa este término porque se dice que una asignación «satisface» una fórmula cuando esta es verdadera en esa asignación. A las fórmulas satisfacibles también se le puede llamar coherentes o **consistentes**. Por otro lado, de las tautologías y contradicciones se dice que son fórmulas **lógicamente necesarias**, pues tienen el mismo valor de verdad en toda posible circunstancia.

Vamos a resumir todos estos conceptos en el cuadro 6.1.

| **Tipo** | **Definición** | ¿Necesaria? | ¿Consistente? |
|---|---|---|---|
| *Tautología* | Es **V** en toda asignación | ✓ | ✓ |
| *Contingencia* | Es **V** en al menos una asignación y **F** en al menos otra asignación | × | ✓ |
| *Contradicción* | Es **F** en toda asignación | ✓ | × |

Cuadro 6.1: Clasificación semántica de las fórmulas de LC0.

Estos conceptos nos serán útiles para diversos fines, como veremos en la siguiente sección y en el siguiente capítulo. Por lo pronto, después de hacer unos ejercicios, notaremos dos aplicaciones inmediatas, en sendas subsecciones.

**Ejercicio # 21**

Para cada una de las siguientes fórmulas, construye su tabla de verdad y con base en ello, di si son tautología, contingencia o contradicción:

① $p \supset \neg q$ ② $[\neg q \,\&\, (r \supset q)] \,\&\, r$ ③ $(r \vee t) \supset (s \vee \neg t)$

④ $q \vee \neg q$ ⑤ $t \equiv (p \equiv \neg t)$ ⑥ $(p \vee q) \supset (\neg p \supset q)$

### 6.7.1. Los «principios lógicos»

Es usual escuchar que existen «principios lógicos supremos», a veces también llamados «leyes lógicas». Algunos de estos vienen desde Aristóteles,[9] y se conservan en LC0 como fórmulas tautológicas. Vamos a formularlos usando meta-variables, pues cualquier fórmula de LC0 que sea un caso de ellas va a ser una tautología.

- *Principio de no contradicción*: $\neg(\mathsf{A} \,\&\, \neg\mathsf{A})$.

- *Principio de tercero excluido*: A ∨ ¬A.
- *Principio de identidad*: A ⊃ A.

(En realidad, el último principio se suele formular diciendo que «$A = A$». Pero esto, si se toma literalmente, pertenece no a la lógica de orden cero —que no tiene el símbolo de identidad, «=»—, sino a la lógica de primer orden con identidad: diría que todo objeto es idéntico consigo.[10] Si relajamos la noción de identidad, para que signifique algo más general —equivalencia— entonces quizá podríamos leerlo como: «*toda proposición es equivalente consigo*», es decir: A ≡ A. Pero esta última se sigue del principio como lo puse arriba y de ciertas propiedades de la equivalencia material que revisaremos después.)

No es obvio en qué sentido estas son las «leyes» o «principios supremos». Cada fórmula que sea un caso de cualquiera de las tres formas listadas, será tautológica —eso es verdad. Pero *muchas otras* fórmulas son tautológicas, aunque tengan una apariencia muy distinta a cualquiera de estas tres —como: $(p \vee q) \supset \neg(\neg q \,\&\, \neg p)$.

Quizá, en realidad, lo que sucede es que la tautologicidad de las fórmulas con las formas de los tres «principios» es un *reflejo* de los *presupuestos clasicistas* que enunciamos antes (sección 6.3).[11] Básicamente, toda fórmula del tipo: ¬(A & ¬A) va a ser tautológica debido a que ninguna fórmula puede tener más de un solo valor de verdad. Pero también porque la negación y la conjunción se definen de las maneras que vimos en la sección 6.4. Algo parecido sucede con los otros dos «principios».

Sin embargo, resultaría entonces que los «principios» *per se* no son los que reflejan, por así decir, la «esencia» de LC0 —los que definen *la clasicalidad*, digamos—, sino que son tanto los presupuestos clasicistas —que haya sólo dos valores de verdad, que cada proposición tenga uno y sólo uno de ellos, y que las conectivas sean todas veritativo-funcionales— como las definiciones de cada conectiva, los que contienen, o mejor, los que *definen*, esta *esencia de la clasicalidad*.

**Ejercicio # 22**

¿Cómo podrías demostrar que todos los casos de los tres «principios lógicos» son tautologías? Responde y justifica tu respuesta. Después de ello, demuéstralo.

### 6.7.2. Las «paradojas» de la implicación material *

Al introducir el condicional en la sección 4.1.6, notamos que este no comparte muchas características del condicional «si … entonces … » del Español. Esto se ve más claro al conocer algunas tautologías que chocan contra la interpretación del condicional material como un orden temporal o causal, o como una relación de relevancia entre las dos proposiciones conectadas. Que sean *tautologías* significa que son verdades lógicas de LC0, por lo que sólo una lógica distinta podría hacerlas falsas.

Estas tautologías se conocen como *«paradojas» de la implicación material* porque *chocan contra el sentido común*, por la manera en que, *en el Español*, solemos usar las palabras «si… entonces …». Por ejemplo, las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{cc} A \supset (B \supset A) & \neg A \supset (A \supset B) \\ (\neg A \mathbin{\&} A) \supset B & A \supset (B \vee \neg B) \\ A \supset (B \supset B) & (A \supset B) \vee (B \supset A) \end{array}$$

Dando interpretaciones de estos esquemas de fórmula en el lenguaje natural, podemos ver lo extraño que suenan a nuestro «oído lógico». Por ejemplo, una interpretación de la fórmula «$A \supset (B \supset A)$» es:

*Si estoy enfermo, entonces: si estoy sano, estoy enfermo.*

Esta interpretación muestra que el condicional material no recupera el sentido *causal* del «si … entonces …» del Español, pues no afirmaríamos la oración de arriba debido a que parece decir que hay alguna relación causal entre estar sano y enfermo. De igual forma, una posible interpretación de la fórmula «$(A \supset B) \vee (B \supset A)$» es:

*Si la Luna es de queso entonces 2+2=4, o si 2+2=4 entonces la Luna es de queso.*

Esta interpretación muestra que el condicional material no recupera una característica del «si … entonces …» del Español: unir a proposiciones que tienen «algo que ver», es decir, que guardan alguna relación de relevancia entre sí: ciertamente ¡que la Luna sea de queso no parece tener nada que ver con que 2+2=4!

Según algunos lógicos, este tipo de ejemplos son «paradójicos» o—hablando más estrictamente—*extraños* precisamente por ello. Esto ha llevado a la creación de sistemas de lógica que buscan evitar que las fórmulas «paradójicas» de arriba resulten, como resultan ser en LC0, verdades lógicas. Los primeros sistemas de lógica modal surgieron así, de hecho; pero hoy en día se estudian *lógicas de la relevancia*; que no estudiaremos aquí.[12]

### Ejercicio # 23

Para cada una de las fórmulas que representan una «paradoja» del condicional material, da al menos una manera en la que «choque» contra una manera usual de utilizar el las palabras «si… entonces …» en el Español. Por ejemplo,

> $A \supset A$ choca con el uso del «si… entonces …» como orden temporal (es decir, a veces decimos «Si A entonces B» para querer decir, entre otras cosas, que A está antes que B); pues ninguna proposición puede suceder antes que ella misma.

## 6.8. Equivalencia e implicación lógica: Semántica

Un condicional material no representa una relación *lógicamente necesaria* entre dos proposiciones: que una afirmación del tipo «Si $p$, entonces $q$» sea verdadera (donde el condicional es material), no nos dice que haya algún vínculo muy «estrecho» entre estas fórmulas. Sólo nos dice que no sucede que la primera sea verdadera, pero no la segunda. Pero estas fórmulas pueden no tener «nada que ver»: pueden no hablar sobre lo mismo. Y también puede ser que una *no* se siga lógicamente de la otra, que no haya inferencia válida que pase de la una a la otra.

De igual forma, una equivalencia material entre dos proposiciones no es una relación muy estrecha entre ambas: sólo nos dice que o ambas son verdaderas, o ambas son falsas; es decir, que ambas resultan tener el mismo valor de verdad. Pero de nuevo, estas proposiciones pueden no tener «nada que ver» entre sí, ni ser realmente «la misma» proposición: lo único que tienen idéntico es su valor de verdad.

Con las tablas de verdad y el concepto de tautología podemos definir dos relaciones más «estrechas» entre proposiciones. Vamos a definir la equivalencia y la implicación lógica entre dos proposiciones. Las que veremos son versiones semánticas de estos conceptos; en un capítulo posterior veremos las versiones definidas con la teoría de la demostración.

**Definición 39: Equivalencia lógica (versión semántica)**

Dos fórmulas, A y B, son **semánticamente equivalentes** siempre y cuando: la fórmula $A \equiv B$ sea tautológica.

Cuando dos proposiciones son *lógicamente equivalentes* según esta definición, ambas son *verdaderas en exactamente los mismos casos y falsas en exactamente los mismos casos.* Esto lo sabemos porque, si su bicondicional es tautológico, significa que en toda asignación en que la primera sea **V**, la segunda también lo será; y en toda asignación en que la primera sea **F**, también lo será la segunda.

Resulta que la mayoría de las fórmulas semánticamente equivalentes no «se ven igual»: tienen conectivas distintas, o incluso pueden incluir atómicas distintas. Pero que sean semánticamente equivalentes sólo significa que *tienen las mismas condiciones de verdad*: que son verdaderas en los mismos casos, y falsas en los mismos casos. Es decir: que el bicondicional $A \equiv B$ es lógicamente necesario —verdadero en toda posible asignación: tautológico.

La siguiente definición nos dice qué significa, según LC0, que una fórmula *implique lógicamente* a otra.

**Definición 40: Implicación lógica—versión semántica**

Una fórmula, A, **implica lógicamente** a otra fórmula, B, siempre y cuando: la fórmula $A \supset B$ sea tautológica.

Cuando una fórmula implique semánticamente a otra, según la definición de arriba, lo que va a suceder es que: *en todo caso en el que la primera sea verdad, también lo será la segunda.* Decimos entonces que la implicación es *lógicamente necesaria.* Es decir: que el condicional material $A \supset B$ es verdadero en toda posible asignación —es decir, que es tautológico.

### 6.8.1. Equivalencia e implicación lógica: Notación

Introducimos la notación para los conceptos que acabamos de definir.:

**Implicación semántica** Si A implica semánticamente a B, escribimos: $A \vDash B$.

**Equivalencia semántica** Si A y B son semánticamente equivalentes, escribimos: $A \Dashv\vDash B$.

Por ahora no vamos a usar esta notación, pero es importante que sepas a qué se refiere.

### 6.8.2. Algunas consecuencias de las definiciones anteriores

A partir de las definiciones 36-40, y de las tablas de las conectivas, es fácil demostrar los siguientes teoremas.

**Teorema 1.** *Toda fórmula de* LC0 *es o una tautología, o una contingencia, o una contradicción, y no es más de una de ellas. Es decir: la clasificación semántica de las fórmulas es exhaustiva y excluyente.*

*Demostración.* Sea A cualquier fórmula de LC0. Consideremos su tabla de verdad —es decir: si A es molecular, la columna debajo de su conectiva principal; si es atómica, la columna debajo de ella misma. Hay sólo tres opciones: que todas las filas en esa columna sean **V**, que todas sean **F**, o que haya al menos una **V** junto con al menos una **F**. Ninguna tabla va a cumplir más de una de estas opciones. El teorema se sigue entonces por las definiciones 36, 37 y 38. *Q.E.D.*

**Teorema 2.** *Toda tautología es la negación de una contradicción, y toda contradicción es la negación de una tautología.*

**Teorema 3.** *La negación de una contingencia es una contingencia.*

**Teorema 4.** *Cada tautología es lógicamente equivalente a cualquier otra tautología.*

**Teorema 5.** *Cada contradicción es lógicamente equivalente a cualquier otra contradicción.*

**Teorema 6**. *Toda proposición se implica lógicamente a sí misma. (Corolario: Toda proposición es lógicamente equivalente a sí misma.)*

**Teorema 7**. *Toda proposición implica lógicamente a cualquier tautología.*

**Teorema 8**. *Una contradicción implica lógicamente a cualquier proposición (tautológica, contradictoria o contingente).*

**Teorema 9**. *Si* A *implica lógicamente a* B *y* B *es una contradicción, entonces* A *también es una contradicción.*

**Teorema 10**. *Si* A *implica lógicamente a* B *y* A *es una tautología, entonces* B *también es una tautología.*

**Teorema 11**. *Si* A *implica lógicamente a* B *y* B *es una contingencia, entonces: o* A *es una contradicción, o* A *también es una contingencia.*

*Demostración.* Supongamos que A implica lógicamente a B y que B es una contingencia. Ahora demostraremos que se sigue el consecuente. Por el teorema 10, si A fuera una tautología, también lo sería B. Por lo tanto, A no puede ser una tautología. Las únicas dos opciones restantes (por el teorema 1) es que sea o contingencia o contradicción. *Q.E.D.*

Otra demostración posible sería esta:

*Demostración.* Supongamos que A implica lógicamente a B y que B es una contingencia. Entonces, por la definición 40 y la tabla de verdad del condicional, en la tabla de la fórmula «$A \supset B$» sucede esto: en todas las filas de la columna de B en donde hay una **F**, también hay una **F** en la columna de A. Sabemos que hay al menos una **F** bajo B, pues es una contingencia. Pero no podría haber ni una **F** en la columna de A si esta fuera una tautología. Por lo tanto, A debe ser o una contradicción o una contingencia. *Q.E.D.*

**Teorema 12**. *La conjunción, la disyunción, y la implicación material de dos tautologías, es una tautología.*

**Teorema 13**. *La conjunción y la disyunción de dos contradicciones, es una contradicción.*

**Teorema 14**. *El condicional material de dos contradicciones, es una tautología.*

**Teorema 15**. *La conjunción de dos contingencias puede ser una contingencia o una contradicción (ejemplo: las contingencias $p$ y $\neg p$), pero nunca será una tautología. La disyunción de dos contingencias puede ser una contingencia o una tautología (ejemplo: las contingencias $p$ y $\neg p$), pero nunca será una contradicción. La implicación entre dos contingencias puede ser una contingencia o una tautología, pero nunca será una contradicción. La equivalencia material entre dos contingencias puede ser una contingencia, una contradicción o una tautología.*

## Ejercicio # 24

Hay algunas fórmulas que tienen las siguientes tablas de verdad. Ahora no importa qué fórmulas sean esas, *solamente te pongo la columna de la conectiva principal*.

Usando las definiciones 39 y 40, dime cuál es lógicamente equivalente con cuál y cuál implica lógicamente a cuál.

(Recuerda que, por ejemplo, toda tautología es implicada lógicamente por toda otra fórmula, y los demás hechos mencionados en esta sección.)

| ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ | ⑩ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** | **V** | **F** | **F** | **V** | **F** | **V** | **V** |
| **V** | **V** | **V** | **F** | **F** | **F** | **F** | **F** | **F** | **F** |
| **V** | **V** | **F** | **F** | **F** | **V** | **V** | **F** | **F** | **F** |
| **V** | **F** | **F** | **F** | **V** | **V** | **F** | **F** | **F** | **F** |

**Por ejemplo**: *la fórmula con la tabla ③ implica a la fórmula ②* (porque si le hago la tabla al condicional ③ $\supset$ ②, me va a salir **V** en todo renglón, por lo que será una tautología).

## Proyecto del capítulo

**Antecedentes** ⇢ Una *demostración matemática* es un argumento deductivo a partir de las suposiciones básicas y las definiciones. Como la estudiaremos en este libro (capítulo 8), un argumento demostrativo se compone de una lista de las suposiciones básicas —las premisas—, seguida de su conclusión, seguida de la lista de los pasos que se siguen para inferir conclusiones intermedias a partir de las premisas, hasta llegar a su conclusión. Pero también puede componerse de una enunciación, utilizando el lenguaje natural, de cada uno de esos pasos. Este es el formato que utilizamos en las pocas demostraciones que enunciamos en la sección 6.8.2.

**Problema** ⇢ Utilizando las definiciones de *tautología*, *contradicción*, *contingencia*, y de la *equivalencia* e *implicación lógica* en sus versiones semánticas (definiciones 36-40), además de las tablas de verdad de las conectivas, demuestra los teoremas de la sección 6.8.2 para los que no se ofreció una demostración. Explica cada paso, como se hizo en las demostraciones de los teoremas 1 y 11.

## Resumen del capítulo

★

## Notas

1. He tomado esta gráfica de *Proofs and Fundamentals: A first course in abstract mathematics*, 2da edición, por Ethan D. Bloch, página 130; editorial Springer, 2011.

2. Para mayor detalle, ver Barceló 2015; Estrada 2011: «¿Cuánta filosofía hay en una tabla de verdad?».

3. Como nota Luis Estrada (2011), se requiere una quinta suposición:

    - No todas las oraciones son verdaderas (o falsas) en todo caso.

    Y probablemente Luis estaría de acuerdo en incluir una *sexta* suposición:

    - Los valores de verdad tienen un orden «natural»: **V** > **F**,

    donde este orden refleja el hecho de que los argumentos válidos (def. 10) son aquellos que preservan verdad, en lugar de falsedad. Se puede argumentar que esta sexta suposición también subyace a las tablas de verdad de LC0, sobre la base de que LC0 es una *álgebra de Boole*, que tiene, por definición, un orden natural como el que se refleja en la sexta suposición, y que a su vez, se ve reflejado en la definición de las operaciones booleanas que corresponden con nuestras conectivas. Quizá otra manera de argumentarlo sea notar que las extensiones de LC0 que aceptan más valores de verdad utilizan este supuesto para proceder de la manera más «conservadora» posible en la extensión de las tablas de las nuevas conectivas, ver Barceló 2015.

4. Como las lógicas intensionales o modales; ver Hughes & Cresswell 1993.

5. Como las *lógicas tensoriales* de Lorenzo Peña (1993: capítulos 2 y 3), o la interpretación de los *gluts* en ciertas lógicas multivaluadas (ver capítulos 7-9 de Priest 2008).

6. Como las lógicas trivaluadas $K_3$ y Ł$_3$, o la lógica de infinitos valores Ł$_{\aleph}$. Ver capítulos 7, 11, 11a de Priest 2008.

7. *Recordatorio*: «$2^n$» significa el numero 2 *por sí mismo n* veces. *No* significa multiplicar 2 por *n*. Por ejemplo, $2^6$ es la multiplicación: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, no $2 \times 6$.

8. *Recordatorio*: la conectiva principal es la que conecta todas las sub-fórmulas. Por ejemplo: en $(\neg p \vee (r \equiv s))$, la conectiva principal es $\vee$, y las siguientes son $\neg$ y $\equiv$; a estas las calculo primero (empezando por la que quiera) y al final calculo la principal. En $\neg(r \supset s)$ la conectiva principal es $\neg$, ésta la calculo después de $\supset$.

9. *Metafísica*, Libro IV.

10. En la notación que usaremos al revisar la lógica de primer orden con identidad, LC1=, lo escribiríamos así: $\forall x(x = x)$.

11. Para una opinión como esta, ver Copi y Cohen, *Introducción a la Lógica*, secc. 8.10.

12. Ver Palau (*et al.*) 2004; Priest 2008.

## capítulo

## 7

# Métodos semánticos para comprobar validez e invalidez

### Contenidos del capítulo

### Objetivos de aprendizaje

1.
2.

Los métodos semánticos son métodos basados en la semántica formal de LC0, es decir, en las tablas de verdad de las conectivas y de las fórmulas con más de una conectiva. La ventaja de estos métodos es que nos permiten comprobar tanto la validez como la invalidez de los argumentos formalizados en LC0; mientras que los métodos demostrativos que veremos en el siguiente capítulo, en general, *sólo* nos permiten comprobar la validez de un argumento.

## 7.1. Método del condicional asociado

El primer método semántico es el método del condicional asociado. Esto supone el concepto de *condicional asociado a una fórmula*, que veremos ahora.[1]

**Definición 41: Condicional asociado a un argumento**

Consideremos un argumento con $n$ premisas: $P_1, P_2, \ldots P_n$ y una conclusión: $C$. Entonces, el condicional asociado a ese argumento es la fórmula que tiene, como antecedente, la conjunción de todas las $n$ premisas, y como consecuente, a la conclusión. Es decir, va a tener la forma:

$$[((P_1 \ \& \ P_2) \ \& \ P_3) \ldots \ \& \ Pn] \supset C.$$

Ya que tenemos el concepto de condicional asociado a un argumento, podemos comprender el método semántico. Lo vamos a definir mediante un *algoritmo*, es decir, mediante una serie de pasos.

**Definición 42: Método del condicional asociado**

1. Tomo el condicional asociado a mi argumento.
2. Le hago la tabla de verdad a ese condicional.
3. Si la tabla me dice que el condicional es *tautología*, el argumento es válido. De otra manera, el argumento es *in*válido.

Vamos a ver este método en acción en el siguiente ejemplo resuelto.

**ejemplo 22**

Consideremos el siguiente argumento:

$$\begin{array}{l} 1.\ p \supset q \\ \underline{2.\ q \supset r} \\ \therefore\ q \supset p \end{array}$$

Vamos a comprobar su validez mediante el método del condicional asociado. El primer paso es construir su condicional asociado, que sería este:

$$[(p \supset q) \ \& \ (q \supset r)] \supset (q \supset p)$$

Y vamos a hacerle su tabla de verdad. Usando la regla «$2^n$», como son 3 variables distintas, sé que $n = 3$; por lo que necesitaremos $2^3 = 8$ filas, y una columna por cada letra y conectiva. Empezamos con las atómicas, usando la regla «mitad de la mitad»:

| $[(p$ | $\supset$ | $q)$ | $\&$ | $(q$ | $\supset$ | $r)]$ | $\supset$ | $(q$ | $\supset$ | $p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **V** | | **V** | | **V** | | **V** | | **V** | | **V** |
| **V** | | **V** | | **V** | | **F** | | **V** | | **V** |
| **V** | | **F** | | **F** | | **V** | | **F** | | **V** |
| **V** | | **F** | | **F** | | **F** | | **F** | | **V** |
| **F** | | **V** | | **V** | | **V** | | **V** | | **F** |
| **F** | | **V** | | **V** | | **F** | | **V** | | **F** |
| **F** | | **F** | | **F** | | **V** | | **F** | | **F** |
| **F** | | **F** | | **F** | | **F** | | **F** | | **F** |

Sigo con las conectivas de *más adentro*, usando la regla «de adentro hacia afuera, usando las tablas básicas»:

| $[(p$ | $\supset$ | $q)$ | $\&$ | $(q$ | $\supset$ | $r)]$ | $\supset$ | $(q$ | $\supset$ | $p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** | | **V** | **V** | **V** | | **V** | **V** | **V** |
| **V** | **V** | **V** | | **V** | **F** | **F** | | **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** | | **F** | **V** | **V** | | **F** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** | | **F** | **V** | **F** | | **F** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **V** | | **V** | **V** | **V** | | **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **V** | | **V** | **F** | **F** | | **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **F** | | **F** | **V** | **V** | | **F** | **V** | **F** |
| **F** | **V** | **F** | | **F** | **V** | **F** | | **F** | **V** | **F** |

Y ahora evaluamos la conectiva más hacia afuera, que todavía no es la principal—la conjunción. Esta «se alimenta» con las conectivas de más adentro: los condicionales materiales en el antecedente de la fórmula, cuyas columnas están en verde:

| $[(p$ | $\supset$ | $q)$ | $\&$ | $(q$ | $\supset$ | $r)]$ | $\supset$ | $(q$ | $\supset$ | $p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | | **V** | **V** | **V** |
| **V** | **V** | **V** | **F** | **V** | **F** | **F** | | **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** | **F** | **F** | **V** | **V** | | **F** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** | **F** | **F** | **V** | **F** | | **F** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | | **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **V** | **F** | **V** | **F** | **F** | | **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **F** | **V** | **F** | **V** | **V** | | **F** | **V** | **F** |
| **F** | **V** | **F** | **V** | **F** | **V** | **F** | | **F** | **V** | **F** |

La tabla completa quedaría así, con la columna de la conectiva principal en azul: el condicional material. Este condicional «se alimenta» de, por un lado, la conjunción, que es la conectiva principal del antecedente, y por el otro, la conectiva principal del consecuente, que es el condicional material:

| $[(p$ | $\supset$ | $q)$ | $\&$ | $(q$ | $\supset$ | $r)]$ | $\supset$ | $(q$ | $\supset$ | $p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** |
| **V** | **V** | **V** | **F** | **V** | **F** | **F** | **V** | **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** | **F** | **F** | **V** | **V** | **V** | **F** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** | **F** | **F** | **V** | **F** | **V** | **F** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **F** | **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **V** | **F** | **V** | **F** | **F** | **V** | **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **F** | **V** | **F** | **V** | **V** | **V** | **F** | **V** | **F** |
| **F** | **V** | **F** | **V** | **F** | **V** | **F** | **V** | **F** | **V** | **F** |

Resulta que hay al menos una asignación en la que la fórmula es **V**—por ejemplo, la primera, contando de abajo hacia arriba—, pero que también hay al menos una asignación en la que es **F**: la quinta. Es decir: el condicional asociado al argumento es *contingente*. Eso significa que el argumento es inválido: no en todo caso posible en el que las premisas son todas verdaderas, lo es también la conclusión. Ese caso es precisamente la quinta asignación.

## Ejercicio # 25

Formaliza los siguientes argumentos (dejando de lado el contexto que no forme parte de ellos, y poniendo las premisas o conclusión, si es que alguno tuviera estas implícitas), y demuestra su validez o invalidez mediante el método del condicional asociado.

1. Si el *yo* es trascendental, no podemos referirnos a él. Pero si el *yo* es empírico, no persiste a través del tiempo. Sin embargo, podemos referirnos al *yo* y este persiste a través del tiempo. Por lo tanto, el *yo* no es ni trascendental ni empírico.
2. Si tomamos la primera ruta, nos van a cobrar peaje y vamos a pagarlo. Y si tomamos la segunda ruta (que es por la libre), pasaremos por el pueblo que te dije. Pero ni vamos a pagar peaje ni vamos a pasar por ese pueblo (por razones que luego te cuento). Como bien sabes, para llegar a la boda sólo hay dos rutas, es decir: que lleguemos a la boda requiere que o tomemos la primera ruta o tomemos la segunda. ¿Puedes ver qué estoy concluyendo?
3. Para que las propuestas nominalistas triunfen se requiere que el argumento platonista de Quine sea desactivado. Para hacer esto último, se requiere demostrar que el uso de las matemáticas en las ciencias empíricas es, en última instancia, prescindible. Pero este uso es prescindible siempre y cuando el poder predictivo y explicativo de las teorías no se pierda junto con la nominalización. Se sigue que, para que las propuestas nominalistas triunfen, se requiere que las teorías preserven su poder predictivo y explicativo con la nominalización.
4. La virtud es el máximo bien de la vida, y se consigue mediante el examen de la propia conciencia. Que la virtud sea el máximo bien implica que la filosofía tiene

un valor importante, y o bien se consigue como hemos dicho, o bien nuestros presupuestos están equivocados. Por ello, basta que la filosofía tenga un valor importante para que nuestros presupuestos estén equivocados.

5. Es evidente que si la teoría cuántica solamente consiste en la ecuación de Schrödinger, entonces no hay lugar para la probabilidad en ella. Pues si la teoría solamente contiene a la ecuación de Schrödinger, entonces un sistema puede evolucionar a una superposición de estados con una función de onda que no colapsará. Pero si esto sucede, entonces la función de onda evoluciona de manera determinista. Y que la función de onda evoluciona de manera determinista basta para que no haya lugar en la teoría cuántica para la probabilidad.

### 7.1.1. Limitaciones del método del condicional asociado

El método del condicional asociado es un método sencillo de entender—sólo hago el condicional asociado al argumento, y reviso si es o no una tautología—, pero puede fácilmente volverse muy complejo y, por ello, impráctico.

La razón es que el tamaño de una tabla crece *exponencialmente* con las letras de la fórmula correspondiente. Es decir: debido que la tabla de una fórmula con $n$ variables proposicionales distintas tiene $2^n$ filas (renglones), cada variable distinta *multiplica por dos* el número de filas de la fórmula. Esto hace que el número de filas de una fórmula como:

$$[p \vee (q \equiv r)] \supset [(s \vee t) \,\&\, u],$$

que tiene 6 letras distintas, tenga $2^6 = 64$ renglones. Una con 7 letras tendrá, entonces, una tabla con 128 filas. Pero hacer una tabla con 64 renglones se vuelve impráctico —¡ni hablar de una con 128!

Entonces, este método no es perfecto—tiene una **limitante**: aplicarlo a fórmulas con muchas variables proposicionales se vuelve prácticamente irrealizable. El siguiente método supera este defecto.

## 7.2. Método de asignación de valores

El método de asignación de valores no requiere usar la tabla del condicional asociado. Es decir, no pondremos explícitamente todo el «espacio de posibilidades» del condicional asociado, que es lo que hace la tabla (y lo que, a final de cuentas, es el responsable del crecimiento exponencial del que hablamos arriba).

A grandes rasgos, el método consiste en una *reducción al absurdo*: suponer la negación de lo que queremos demostrar. Queremos demostrar que un argumento dado es válido, así que *vamos a suponer que no lo es*. Es decir (por la definición 10), vamos a suponer que todas sus premisas son verdaderas y que su conclusión es falsa. Si a partir de esta suposición llegamos a una incoherencia, tenemos certeza de que la suposición era falsa: que es falso que el argumento sea inválido—es decir, tenemos certeza de que el argumento *es* válido. (Pues para cada argumento, sólo hay dos posibilidades, exhaustivas y excluyentes: o que sea válido, o que sea inválido.)

¿Cómo podríamos llegar a esa incoherencia?

Básicamente, actuando bajo la suposición de la invalidez del argumento, y siguiendo las tablas de verdad de las conectivas. Ya teniendo la suposición, intento asignarle valores de verdad a cada fórmula de manera que sea *coherente* con la suposición. Es decir: de manera que cada atómica tenga un y sólo un valor de verdad, y que cada fórmula obedezca las tablas de verdad de las conectivas. Si logro construir la asignación de manera coherente, el argumento es *in*válido—pues he mostrado que hay una asignación en la que las premisas son verdaderas, pero no la conclusión. Si no es coherente, he demostrado su validez—pues he demostrado que suponer la verdad de las premisas y la falsedad de su conclusión, me lleva o a asignar dos valores distintos a la misma atómica, o a ir en contra de las tablas de las conectivas.

Vamos a verlo con más detalle.

**Definición 43: Método de Asignaciones**

Todo argumento se compone de $n$ premisas y conclusión, por lo que va a tener la forma:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline C \end{array}$$

Entonces usamos el siguiente algoritmo:

1. Le asigno **V** a la conectiva principal de cada una de las premisas, y **F** a la conectiva principal de la conclusión (si el argumento tiene premisas y/o conclusión atómicas, hago la misma asignación). Es decir: Supongo, de entrada, que el argumento es *in*válido.
2. Me fijo cuál de las fórmulas—ya sea la conclusión o una de las premisas—*tiene menos posibilidades*: es decir, dada la asignación que tiene (**V** si es premisa, **F** si es la conclusión), y la tabla de verdad de su conectiva principal, ¿cuál es la que tiene menos renglones que satisfagan esa asignación? Tomo esa; o, si hay empate, tomo cualquiera. (Ver el cuadro de la página 146).
3. Si no he llegado a ninguna incoherencia, sigo asignando valores de verdad de acuerdo con las tablas de las conectivas, y bajo las

suposiciones del paso anterior.

4. Continuo hasta que: o llegue a una incoherencia (es decir: hasta que le asigne dos valores distintos a la misma atómica, o hasta que tenga que asignarle valores a una fórmula molecular de manera que no siga la tabla de la conectiva), o haya terminado con las atómicas.
5. Si llego a una incoherencia, el argumento es *válido*. Si no llego a una incoherencia y puedo hacer la asignación completa, el argumento es *in*válido.
6. Si he demostrado que el argumento es inválido, la asignación que he construido de hecho me da uno de los renglones de la tabla de verdad del condicional asociado en que éste es falso.

### Contando posibilidades

¿Cómo puedo contar el número de posibilidades de cada conectiva? Depende de la conectiva y del valor de verdad de la fórmula en la asignación que estoy considerando.

Por ejemplo. Si considero una asignación en la que las dos fórmulas:

$$p \vee q \text{ y } p \,\&\, q$$

son **V**, ¿cuál de las dos tiene menos posibilidades? La idea sería empezar con esa en el método de asignaciones.

A partir de ver la tabla de verdad de cada conectiva, puedo ver lo siguiente. La respuesta es que la segunda tiene menos: una conjunción es verdadera en un *único* caso: cuando ambos conyuntos son verdaderos. Pero una disyunción es verdadera en *tres* casos: cuando el primer conyunto (pero no el segundo) es verdadero, cuando el segundo (pero no el primero) es verdadero, o cuando ambos son verdaderos.

De igual forma, el condicional es **V** en tres casos, el bicondicional en dos, y la negación en uno. Por lo tanto, si quisiera saber con cuál empezar para el método de asignaciones, suponiendo que estoy considerando a las premisas, debería empezar con la conjunción o la negación, seguir con el bicondicional, y finalmente con la disyunción o el condicional.

Mientras tanto, la conjunción es **F** en tres casos, mientras que el bicondicional es falso en dos; pero la negación, el condicional y la disyunción sólo son falsos en un caso (aunque cada uno en distintos casos, claro está).

Vamos a resumir todo esto –el número de asignaciones en que una conectiva es verdadera o falsas según su tabla de verdad— en el cuadro 7.2.

De nuevo, la idea es siempre empezar a usar el método de asignaciones por la premisa que tenga menos posibilidades de ser **V**, o por la conclusión, si es la que tiene menos

| Conectiva o var. | # verdades | # falsedades |
|---|---|---|
| atómica | 1 | 1 |
| $\neg$ | 1 | 1 |
| $\vee$ | 3 | 1 |
| & | 1 | 3 |
| $\supset$ | 3 | 1 |
| $\equiv$ | 2 | 2 |

Cuadro 7.1: Contando posibilidades.

posibilidades, pero en este caso de ser **F**.

**ejemplo 23**

Consideremos el argumento:

1. $p \supset q$
2. $q \supset r$

$\therefore q \supset p$

Según el primer paso, asigno **V** a cada premisa y **F** a cada conclusión:

1. $p \supset q$ = **V**
2. $q \supset r$ = **V**

$\therefore q \supset p$ = **F**

Según el segundo paso, sigo con la fórmula que sea me cierre más posibilidades. En este caso, es la conclusión, pues el condicional sólo es **F** en un caso:

1. $p \supset q$ = **V**
2. $q \supset r$ = **V**

$\therefore q \supset p$ = **F**; $q$=**V** y $p$=**F**.

Según el tercer paso, copio lo que ya tengo hasta ahora en las otras líneas:

1. $p \supset q$ = **V**; $p$=**F** y $q$=**V**
2. $q \supset r$ = **V**; $q$=**V**

$\therefore q \supset p$ = **F**; $q$=**V** y $p$=**F**.

Según el cuarto paso, reviso. En este caso, no he caído en incoherencia: si 1 es **V**, eso significa que el condicional (que es la conectiva principal) es V, pero ya tengo que $p$ es **F** y que $q$ es **V**, eso es coherente con la **V** del condicional: el condicional es **V** si tiene antecedente **F** y consecuente **V**. Además, en 2 tampoco tengo incoherencia, al menos no todavía: un condicional puede ser **V** si su antecedente es **V**.
Solo resta terminar con la premisa 2. Si el condicional es **V** y si antencedente es **V**, su consecuente también tiene que ser **V** (pues, si fuera **F**, el condicional sería **F**). Así que asigno:

1. $p \supset q$ = **V**; $p$=**F** y $q$=**V**
2. $q \supset r$ = **V**; $q$=**V** y $r$=**V**

$\therefore q \supset p$ = **F**; $q$=**V** y $p$=**F**.

No hay ninguna incoherencia. Por lo tanto, el argumento es *in*válido.

De hecho, vale la pena revisar que este método no sólo me da el mismo resultado que el método del condicional asociado, sino que me proporciona la asignación que demuestra la *in*validez del argumento: es decir, la asignación en la que las premisas son todas verdaderas, pero no la conclusión. Si revisamos la tabla de la página 141, podemos ver que la asignación que obtuve por este método: $p$=**F**, $q$=**V**, $r$=**V**, es precisamente la quinta asignación de la tabla del condicional asociado al argumento; en esa asignación, el condicional asociado es falso, mostrando también la invalidez del argumento.

……

Consideremos este otro argumento:

1. $p\&q$
2. $q \equiv (r \vee s)$

$\therefore r \vee s$

Aplico mi primer paso:

1. $p\&q$ = **V**
2. $q \equiv (r \vee s)$ = **V**

$\therefore r \vee s$ = **F**

Para aplicar mi segundo paso, la premisa 2 no es buena idea: el bicondicional es **V** en dos casos (ambas fórmulas **V**, o ambas **F**). En cambio, puedo empezar (da igual) por la conclusión o la premisa 1: la conclusión, siendo una disyunción, solo es **F** en un caso, y la premisa 1, siendo conjunción, solo es **V** en un caso. Empecemos (para el ejemplo) por la primera premisa. Según la tabla, la conjunción sólo es **V** cuando ambos conyuntos lo son, así que:

1. $p\&q$ = **V**; $p$ es **V**, $q$ es **V**
2. $q \equiv (r \vee s)$ = **V**

$\therefore r \vee s$ = **F**

Aplico mi tercer paso, copiando lo que ya tengo para $q$:

1. $p\&q$ = **V**; $p$ es **V**, $q$ es **V**
2. $q \equiv (r \vee s)$ = **V**; $q$ es **V**

$\therefore r \vee s$ = **F**

Reviso. No hay incoherencia, así que sigo:

1. $p\&q$ = **V**; $p$ es **V**, $q$ es **V**
2. $q \equiv (r \vee s)$ = **V**; $q$ es **V**, $(r \vee s)$ es **V**

$\therefore r \vee s$ = **F**

Esto porque el bicondicional sólo es **V** si ambos tienen el mismo valor, y ya sabía que $q$ es **V**.

Pero ahora sí puedo ver que hay incoherencia: $(rvs)$ es **V**, según lo que puse en la premisa 2, pero según lo que había puesto en la conclusión, $(rvs)$ es **F**. Le he asignado dos valores a la misma fórmula. Por lo tanto, el argumento es válido y ya terminé.

*En resumen.* Tenemos un argumento ya formalizado, con premisas distinguidas de la conclusión. Entonces el método funciona así:

1. Asigno **V** a la conectiva principal de cada una de las premisas.
2. Asigno **F** a la conectiva principal de la conclusión.
3. Si, dada las asignaciones a premisas y conclusión como arriba, puedo asignar *coherentemente* valores a las atómicas, entonces el argumento es *in*válido (pues ese sería un caso en que las premisas son todas **V** y la conclusión es **F**). Si no puedo—si, al intentar asignar valores a las atómicas, de manera que las premisas sean **V** y la conclusión **F** (usando las conectivas), le tengo que asignar dos valores distintos a una atómica—entonces el argumento es válido (pues al suponer que hay un caso de premisas **V** y conclusión **F**, llego a una incoherencia).
4. Consejo: empiezo por las fórmulas cuya conectiva tenga menos casos con el valor asignado. Por ejemplo, si mi conclusión es un condicional, como (según el paso 2) debo asignarle **F**, empiezo por esa: el condicional sólo es **F** en un solo caso. En cambio, si fuera una conjunción, no empiezo por esa, porque hay tres casos en los que una conjunción es **F** (una **F** y la otra **V**, una **V** y la otra **F**, ambos conyuntos **F**).

### Ejercicio # 26

Ⓘ Formaliza los siguientes argumentos, y demuestra su validez o invalidez mediante el método de asignación de valores.

1. Si el determinismo es verdadero, entonces no soy libre. Si el indeterminismo es verdadero, tampoco soy libre. O el determinismo es verdadero o el indeterminismo es verdadero. Por lo tanto, no soy libre.
2. No soy libre. Esto se sigue si partimos de que vivimos en un sistema político corrupto; además, si vivimos en un sistema político corrupto, entonces nuestra capacidad de decisión está muy limitada. Si nuestra capacidad de decisión está muy limitada, entonces mi capacidad de decisión está muy limitada. Y si eso sucede, entonces no soy libre.
3. Partiendo de que no soy libre, se puede concluir que no puedo transformar la realidad. Pues, además, si no soy libre, no puedo actuar. Y si no puedo actuar, no puedo transformar la realidad.
4. Si el determinismo es verdad, entonces: si ocurrió el pasado, entonces solo hay una historia futura posible. Si solo hay una historia futura posible, entonces no hay opciones abiertas. Si no hay opciones abiertas, no soy libre. Concluyo que no soy libre. Pues, además de lo anterior, es verdad tanto que ocurrió el pasado, como

que el determinismo es verdad.

5. Si el determinismo es compatible con que haya libertad, y si el indeterminismo (también) es compatible con la libertad, entonces hay libertad. Si hay libertad, entonces mi vida tiene sentido. Por lo tanto, si o el determinismo o el indeterminismo son verdaderos, mi vida tiene sentido.

(II) Interpreta los siguientes argumentos y comprueba su validez o invalidez mediante el método del condicional asociado.

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 1. $p \equiv \neg s$ | 1. $s \supset q$ | 1. $s \supset q$ | 1. $r \vee s$ |
| 2. $s \vee t$ | 2. $q$ | 2. $s \,\&\, q$ | 2. $\neg r \supset q$ |
| 3. $p \,\&\, q$ | / $\therefore s$ | 3. $\neg s$ | / $\therefore \neg r \supset (s \vee q)$ |
| / $\therefore t$ | | / $\therefore q$ | |

### 7.2.1. Limitaciones del método de asignación de valores

El método de asignaciones funciona bien cuando en las premisas tenemos fórmulas que pueden ser verdaderas «de pocas maneras» y en la conclusión tenemos una fórmula que puede ser falsa «de pocas maneras» (según lo expuesto en el cuadro 7.2).

Pero el método se hace engorroso cuando esto no sucede. Consideremos el siguiente argumento:

1. $p \supset \neg s$
2. $\neg s \supset (t \vee q)$
3. $t \supset r$
/ $\therefore t \,\&\, r$

Para usar el método de asignaciones, suponemos que el argumento es inválido, es decir, que hay al menos una asignación bajo la cual las premisas son verdaderas, pero la conclusión es falsa:

1. $p \supset \neg s$ **V**
2. $\neg s \supset (t \vee q)$ **V**
3. $t \supset r$ **V**
/ $\therefore t \,\&\, r$ **F**

Continuo asignando el valor de verdad de cada fórmula a su conectiva principal:

1. $p \underset{\mathbf{V}}{\supset} \neg s$ **V**
2. $\neg s \underset{\mathbf{V}}{\supset} (t \vee q)$ **V**
3. $t \underset{\mathbf{V}}{\supset} r$ **V**
/ $\therefore t \underset{\mathbf{F}}{\&} r$ **F**

Muy bien. Lo siguiente sería usar las tablas de verdad para asignar valores a las subfórmulas en todas sus apariciones. ¿Por dónde empezar?

Bueno, sé que la conjunción «$t$ & $r$» es falsa. Pero—recordando la tabla de verdad de la conjunción—eso me deja tres posibilidades: que $t$ sea falsa pero $r$ no, que $r$ sea falsa pero $t$ no, o que ambas sean falsas. Empezar por la conclusión, entonces, no me ayuda mucho, pues no puedo obtener mucha información sobre las subfórmulas.

¿Y si empiezo por las premisas? Eso tampoco me ayudaría mucho: las tres son condicionales materiales, y por tanto (según su tabla de verdad) tienen tres maneras de ser verdaderos: que su antecedente sea falso pero su consecuente verdadero, que ambos sean verdaderos, o que ambos sean falsos.

Es decir: ya sea que empiece por premisas o por conclusión, no puedo cerrar muchas posibilidades abiertas, porque en ambos casos tengo tres maneras de asignar valores.

Esta es una limitación **práctica** del método: cuando en las premisas tenemos fórmulas que pueden ser verdaderas «de varias maneras» y en la conclusión tenemos una fórmula que puede ser falsa «de varias maneras» (de nuevo, según el cuadro 7.2), el método no es *tan* práctico.

Hay dos opciones: usar otro método—como el del condicional asociado de la sección 7.1, o la deducción natural del siguiente capítulo—o seguir usando el método de asignaciones, aunque este se vuelve más engorroso.

### 7.2.2. Asignaciones para argumentos con varias posibilidades

Cuando nos encontramos con argumentos como el de la subsección anterior, en los que las premisas tienen varias posibilidades de ser verdaderas, y la conclusión varias de ser falsa, no es tan fácil ir cerrando las posibilidades abiertas. Tenemos que considerar varias asignaciones—varios renglones de la tabla de cada fórmula—a la vez.

Recordemos el argumento que estábamos usando como ejemplo, ya habiendo hecho la suposición inicial de que es inválido y habiendo colocado los valores de verdad en cada conectiva principal:

1. $p \underset{\mathbf{V}}{\supset} \neg s \qquad \mathbf{V}$
2. $\neg s \underset{\mathbf{V}}{\supset} (t \vee q) \qquad \mathbf{V}$
3. $t \underset{\mathbf{V}}{\supset} r \qquad \mathbf{V}$

$/ \therefore\ t \underset{\mathbf{F}}{\&} r \qquad \mathbf{F}$

Ahora vamos al siguiente paso: usar la tabla de verdad de las conectivas para considerar las posibilidades. Como tanto para premisas como para conclusión tengo tres posibilidades, no importa con cuál empiece. Empecemos con la conclusión, que tiene tres formas de ser falsa:

$$\begin{array}{lllll} \therefore & t & \& & r \quad \mathbf{F} \\ & \mathbf{V} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{V} \\ & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \end{array}$$

Lo que tenemos que hacer es **considerar cada una de las posibles asignaciones en las premisas**. En nuestro ejemplo, esto significa considerar tres posibilidades: la posibilidad de que *t* sea verdadera pero *r* no, la posibilidad de que *t* sea falsa pero *r* no, y la posibilidad de que ambos sean falsas.

Ahora bien, extendiendo lo que ya sucedía antes: si **en al menos una** de las tres asignacones puedo tener verdaderas las premisas pero falsa la conclusión (sin contravenir las tablas de verdad o asignar dos valores a más de una atómica), **el argumento es inválido**. Pero, si **para cada una** de las posibles asignaciones en las que la conclusión es falsa, no puedo hacer verdaderas a las premisas **sin caer en una incoherencia** (contravenir las tablas o asignar dos valores a una misma variable), entonces el argumento es **válido**.

Hay que fijarse en lo que acabamos de ver: basta **con una** asignación coherente para demostrar la **in**validez; pero para mostrar la **validez** no basta con que una de las posibilidades me lleve a incoherencia, tienen que ser **todas**.

En nuestro ejemplo, esto requiere que las tres asignaciones que hacen falsa a la conclusión, me lleven a asignaciones incoherentes en las premisas.

Consideremos la primera de las tres, en la que: *t* es **V** y *r* es **F**. Usaré esta para las premisas, copiando los valores donde aparezcan las letras:

1. $p \underset{\mathbf{V}}{\supset} \neg s$ **V**
2. $\neg s \underset{\mathbf{V}}{\supset} (\underset{\mathbf{V}}{t} \vee q)$ **V**
3. $\underset{\mathbf{V}}{t} \underset{\mathbf{V}}{\supset} \underset{\mathbf{F}}{r}$ **V**

/ $\therefore \underset{\mathbf{V}}{t} \underset{\mathbf{F}}{\&} \underset{\mathbf{F}}{r}$ **F**

¡Listo! En la premisa 3, asigné **V** a *t*, **F** a *r*, pero **V** al condicional: $t \supset r$. Eso es incompatible con la tabla, es decir, es una incoherencia.

Pero no he terminado. Eso sólo muestra que *una* de las tres posibles asignaciones que hacen falsa a la conclusión lleva a una incoherencia. Pero quedan dos.

Consideremos la siguiente, en la que *t* es **F** pero no *r*, y usemos eso para asignar esos valores en donde quiera que aparezcan esas letras en las premisas:

1. $p \underset{\mathbf{V}}{\supset} \neg s$ **V**
2. $\neg s \underset{\mathbf{V}}{\supset} (\underset{\mathbf{F}}{t} \vee q)$ **V**
3. $\underset{\mathbf{F}}{t} \underset{\mathbf{V}}{\supset} \underset{\mathbf{V}}{r}$ **V**

/ $\therefore \underset{\mathbf{F}}{t} \underset{\mathbf{F}}{\&} \underset{\mathbf{V}}{r}$ **F**

No hay más apariciones de $t$ ni de $r$. Además, hasta ahora no he llegado a ninguna incoherencia. Y sigo teniendo tres maneras en que cada una de las premisas podría ser verdadera.

En este caso, esta asignación me muestra la **in**validez del argumento, pues (1) no he llegado a ninguna incoherencia, y (2) **nada** en las suposiciones iniciales—que las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa—me **obligan** a hacer más asignaciones. Ahora tengo total libertad: puedo hacer las siguientes asignaciones «como yo quiera», respetando las tablas, y llegaré a una asignación para todas las atómicas que me muestra la invalidez. Por ejemplo, rellenando (con verde) las atómicas que faltan, y respetando las tablas, tendría:

$$\begin{array}{ll}
1.\ \underset{\mathbf{F}}{p} \underset{\mathbf{V}}{\supset} \underset{\mathbf{F}}{\neg} \underset{\mathbf{V}}{s} & \mathbf{V} \\
2.\ \underset{\mathbf{F}}{\neg} \underset{\mathbf{V}}{s} \underset{\mathbf{V}}{\supset} (\underset{\mathbf{F}}{t} \underset{\mathbf{F}}{\vee} \underset{\mathbf{F}}{q}) & \mathbf{V} \\
3.\ \underset{\mathbf{F}}{t} \underset{\mathbf{V}}{\supset} \underset{\mathbf{V}}{r} & \mathbf{V} \\
/ \therefore\ \underset{\mathbf{F}}{t} \underset{\mathbf{F}}{\&} \underset{\mathbf{V}}{r} & \mathbf{F}
\end{array}$$

Como había predicho, pude completar la tabla de manera coherente, pues toda la información que tenía no me obligaba o impedía hacer estas asignaciones. Esto significa que el argumento es inválido: hay al menos una asignación coherente en la que las premisas son verdaderas pero al conclusión es falsa.

## Ejercicio # 27

Formaliza los siguientes argumentos y comprueba su validez o invalidez utilizando el método de asignaciones. Si es necesario, utiliza el método extendido, considerando cada una de las posibilidades para una de las premisas o la conclusión.

(*Recuerda*: Basta una asignación coherente (bajo la suposición de premisas verdaderas y conclusión falsa) para demostrar **in**validez, pero se requiere que **todas** las asignaciones sean incoherentes (bajo la misma suposición) para demostrar **validez**. Si el argumento es tal que en una premisa o en la conclusión sólo hay una posible asignación (para hacerla verdadera o falsa, según corresponda), esto ya cuenta como *todas* las asignaciones.)

1. Si conocer es percibir, entonces: conozco algo si y solamente si percibo lo conocido. Si recuerdo algo y lo que recuerdo está bien guardado en la memoria, conozco lo que recuerdo. Si recuerdo algo y cierro los ojos, entonces (de todos modos) conozco lo que recuerdo. Pero: si conozco algo siempre y cuando percibo lo conocido, entonces: si cierro los ojos y recuerdo algo, no conozco lo que recuerdo. Por lo tanto, conocer no es percibir. (Platón, *Teeteto*, 163b-164b)
2. Cada una de las tres propuestas (que consideraré) no triunfa sin que tenga éxito el programa de nominalización de Field (o algo muy parecido a ello). Así que, al final, esas tres propuestas no son caminos fáciles. (*Premisa implícita*: las tres propues-

tas son caminos fáciles si y solamente si: triunfan y no tiene éxito el programa de nominalización de Field.) (Mark Colyvan, 'There is No Easy Road to Nominalism', *Mind*, 2010)

3. Él [Kant] establece, en el tratado en cuestión [*Fundamentación de la Metafísica de las Costumbres*], un primer principio universal como origen y fundamento de la obligación moral; es éste: Obra de manera que tu norma de acción sea admitida como ley por todos los seres racionales. Pero, cuando empieza a deducir de este precepto cualesquiera de los deberes actuales de moralidad, fracasa, casi grotescamente, en la demostración de que habría alguna contradicción, alguna imposibilidad lógica (por no decir física) en la adopción por todos los seres racionales de las reglas de conducta más atrozmente inmorales. Todo cuanto demuestra que las consecuencias de su adopción universal serían tales que nadie se decidiría a incurrir en ellas. (*Paráfrasis*: El principio de Kant es compatible con la adopción de las reglas de conducta inmorales. Si eso pasa, entonces nadie actúa bajo ese principio. Si nadie se actúa bajo el principio de Kant, entonces este no es origen y fundamento de la obligación moral. Ergo, el principio de Kant no es origen y fundamento de la obligación moral.) (John Stuart Mill, *El Utilitarismo*, cap. I)
4. Hay compuestos. Una sustancia compuesta es un agregado de simples. Por lo tanto, hay sustancias simples. (*Premisa implícita*: Si una sustancia compuesta es un agregado de simples, y hay sustancias compuestas, entonces hay simples.) (Leibniz, *Monadología*, §1)
5. Pero ¿no cree que hay suficientes casos registrados de personas que creen que han oído cómo Satán les hablaba dentro de su corazón, del mismo modo que los místicos afirman a Dios? Y ahora no hablo de una visión exterior, hablo de una experiencia puramente mental. Ésa parece ser una experiencia de la misma clase que la experiencia de Dios de los místicos, y no veo por qué, por lo que nos dicen los místicos, no se puede sostener el mismo argumento en favor de Satán. (*Paráfrasis*: Si hay personas que creen que les ha hablado Satán, entonces: si los místicos infieren la existencia de Dios a partir de sus experiencias, entonces podemos inferir la existencia de Satán a partir de la experiencia de las personas que creen que les habla Satán. Si podemos inferir la existencia de Satán a partir de la experiencia de las personas que creen que les habla, entonces el argumento de los místicos es inválido. Hay personas que creen que les ha hablado Satán. Por lo tanto, el argumento de los místicos es inválido.) (Bertrand Russell: «La existencia de Dios», debate con F.C. Copleston)

## Proyecto del capítulo:

**Antecedentes** ⇢ *

**Problema** ⇢ *

★

## Notas

1. Es útil recordar que en este texto sólo estamos tratando con argumentos que tienen un número *finito* de premisas, y una sola conclusión. (Tomamos a los argumentos que tienen varias conclusiones como siendo, en realidad, varios argumentos «encadenados»: es decir, como los *polisilogismos* de la definición 7).

capítulo

# 8

# Métodos demostrativos para comprobar validez

## Contenidos del capítulo

## Objetivos de aprendizaje

1.
2.

Como hemos dicho anteriormente, el objetivo principal de la aplicación de la lógica matemática a la argumentación —es decir, de la lógica como modelo— es el diseñar, entender y aplicar métodos matemáticos para demostrar la validez o invalidez de los argumentos en el lenguaje natural. En el capítulo pasado (cap. 7), vimos un par de tales métodos: el del *condicional asociado* y el de *asignación de valores.* Dijimos que estos son métodos *semánticos* debido a que se basan en la *definición semántica* de las conectivas—en su tabla de verdad, que las define como funciones de valores de verdad.

Lo que vamos a ver aquí es otra manera de definir a las conectivas: es una definición **inferencial** (no semántica) de ellas. Esto quiere decir que definiremos a las conectivas no mediante sus tablas de verdad, sino mediante *las inferencias válidas que involucran a tales conectivas.*

(Se puede demostrar —aunque esto pertenece a la *metalógica* de LC0— que esta definición inferencial es *equivalente* a la definición semántica.)

Todo esto se inscribe dentro del sistema lógico (definición 14) que es LC0, así:

Sistema Lógico LC0
- Lenguaje:
  - Alfabeto (def. 15)
  - Reglas de formación (def. 25)
- Teoría de modelos: Tablas de verdad (def. 33)
- Teoría de la demostración: Deducción natural

De nuevo, aplicaremos la teoría de la demostración de LC0 —que aquí veremos como *deducción natural*— para demostrar la validez de argumentos. Pero antes de ello, daré un muy breve panorama de maneras alternativas de definir la teoría de la demostración de LC0.

## 8.1. Los diferentes métodos demostrativos

Un *método de demostración* es, a grandes rasgos, un método para demostrar la validez de un argumento a partir de «reglas» básicas. Usualmente, estas «reglas» son *estructuras de argumentos válidos.* Existen distintos tipos de estos métodos, y aquí sólo veremos uno —la *deducción natural.* Ahora daré un breve repaso de un par de alternativas, que no suelen ser contenido obligatorio, pero que serán útiles si continuas estudiando sistemas de lógica no clásica (que no tratamos en este libro).

### 8.1.1. Axiomática *

Un *sistema axiomático* consiste de, primero, un conjunto de axiomas, y segundo, un conjunto de reglas. Tradicionalmente, se pensaba que los axiomas son «*proposiciones autoevidentes*» o «*reglas básicas*» en algún sentido. A su vez, se ha argumentado que esta «inmediatez» o «fundamentalidad» de los axiomas se debe a que estos dan una «definición implícita» de los conceptos involucrados en los axiomas.

Por ejemplo, la geometría de Euclides consiste de cinco axiomas, de las cuales se derivan proposiciones que describen el espacio euclidiano y las figuras geométricas que existen en este.

Para poder inferir proposiciones a partir de los axiomas, los sistemas axiomáticos deben incluir *reglas de inferencia*. Estas reglas definen qué tipos de argumentos son válidos, y usando estos argumentos, se demuestran proposiciones. Como vimos en la página 42, las proposiciones que se infieren de los axiomas y que tienen una cierta «importancia» en el contexto en el que se usa ese sistema axiomático, se conocen como *teoremas*. Las proposiciones que (aunque también se siguen de los axiomas) se utilizan para demostrar teoremas, se conocen como *lemas*. Finalmente, las proposiciones que se siguen «fácilmente» de los teoremas se conocen como *corolarios*. Algunos teoremas que se dejan sin demostrar en un contexto (pero que son teoremas porque ya se han demostrado en otro lugar) se les llama «*proposiciones*» en ese contexto. Como vimos antes, esta clasificación es más contextual que puramente lógica.

El método axiomático está en el núcleo de la matemática desde Euclides, y se formalizó con el avance de la lógica matemática desde los inicios del siglo XX. Pero también ha sido utilizado en filosofía, con mayor o menor éxito, al menos desde que Spinoza escribiera su *Ética*. Russell y Whitehead utilizaron la axiomática para llevar a cabo su programa logicista, que buscaba reducir la matemática a la lógica, en los tres volúmenes de su *Principia Mathematica*. Un ejemplo contemporáneo de filosofía axiomática es el *Principia Logico-Metaphysica* de Edward Zalta, quien lleva años formalizando una teoría de la modalidad, la identidad, la existencia y los objetos abstractos (como mundos posibles, objetos matemáticos o formas platónicas).

### 8.1.2. Cálculo de secuentes *

Un *secuente* es una fórmula de la forma:

$$\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n \vdash \mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_m$$

donde cada una de las As y cada una de las Bs son fórmulas y $n, m \geq 0$: es decir, un secuente tiene cero o más fórmulas de cada lado del símbolo de implicación lógica, «⊢» (Kleene 1952: cap. 15). Las fórmulas a la izquierda de este símbolo son el *antecedente* y las fórmulas a la derecha son el *consecuente* del secuente. Si el secuente solamente tiene una fórmula en su antecedente, su interpretación se reduce a:

$$\mathsf{A} \vdash \mathsf{B}_1 \vee \ldots \vee \mathsf{B}_m$$

y si solamente tiene una fórmula en su consecuente, se reduce a:

$$\mathsf{A}_1 \ \& \ \ldots \ \& \ \mathsf{A}_n \vdash \mathsf{B}$$

Poniendo ambas ideas juntas, si el secuente tiene más de una fórmula de cada lado, lo leemos como:

$$\mathsf{A}_1 \;\&\; \ldots \;\&\; \mathsf{A}_n \vdash \mathsf{B}_1 \vee \ldots \vee B_m$$

Es decir: las fórmulas en el antecedente se leen en conjunción y las fórmulas en el consecuente se leen en disyunción. En general, un secuente se puede leer como expresando esta idea:

*Si todas las fórmulas del antecedente son verdaderas, entonces, necesariamente: alguna fórmula del consecuente lo es.*

Si el antecedente no contiene fórmulas ($n = 0$), es decir, si el secuente es de la forma:

$$\vdash \mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_m$$

entonces se lee al secuente como teniendo un antecedente *tautológico*; si el consecuente no contiene fórmulas ($m = 0$), es decir, si el secuente es de la forma:

$$\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n \vdash$$

entonces se lee al secuente como teniendo un consecuente *contradictorio*.

Las reglas del cálculo de secuentes nos dicen cómo se comporta cada conectiva en los antecedentes y en los consecuentes. Usemos las letras griegas $\Delta, \Gamma$ para referirnos a listas de fórmulas. Entonces, tenemos esta regla para la conjunción en el consecuente, nuestro primer ejemplo:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \mathsf{A} \qquad \Gamma \vdash \Delta, \mathsf{B}}{\Gamma \vdash \Delta, \mathsf{A} \;\&\; \mathsf{B}}$$

Esta regla nos dice lo siguiente:

*Si de las fórmulas* $\Gamma$ *se siguen o bien las fórmulas* $\Delta$ *o bien la fórmula* A*, por un lado, y si (por otro lado) de las fórmulas* $\Gamma$ *se siguen o las fórmulas* $\Delta$ *o bien la fórmula* B*, entonces, de* $\Gamma$ *se siguen o bien* $\Delta$ *o bien la fórmula* A & B.

Para poner un segundo ejemplo, esta es la regla para la conjunción en el antecedente:

$$\frac{\mathsf{A}, \Gamma \vdash \Delta}{\mathsf{A} \;\&\; \mathsf{B}, \Gamma \vdash \Delta}$$

Esta regla nos dice lo siguiente:

*Si de las fórmulas* $\Gamma$ *en conjunción con la fórmula* A *se siguen las fórmulas* $\Delta$*, entonces, de* $\Gamma$ *en conjunción con la fórmula* A & B *(para cualquier fórmula* B*), también se siguen las fórmulas* $\Delta$.

Una característica de los sistemas de secuentes es que con ellos es sencillo expresar reglas *estructurales* del sistema lógico en cuestión. Estas reglas no se refieren a las propiedades lógicas de las conectivas (como la disyunción o el condicional material), sino a las propiedades de la misma relación de inferencia $\vdash$. Por ejemplo, esta es la regla estructural de *contracción* en el antecedente:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \mathsf{A}, \mathsf{A}}{\Gamma \vdash \Delta, \mathsf{A}}$$

que nos muestra que, si a partir de una serie de fórmulas podemos inferir la fórmula A dos veces, entonces a partir de la misma serie de fórmulas podemos inferir a la fórmula A una única vez. Podemos, pues, «contraer» la inferencia.

Los sistemas de secuentes son muy útiles para el estudio de las propiedades *metalógicas* de un sistema lógico, y también son muy usados para las lógicas no clásicas. Sin embargo, en este libro no usaremos sistemas de este tipo.

### 8.1.3. Deducción natural

La deducción natural es el método deductivo que más pretende acercarse a la manera en la que razonamos «naturalmente»: partiendo de ciertas premisas, y utilizando argumentos, llegamos a una conclusión.

La deducción natural no utiliza axiomas, pero sí varias *reglas de transformación*. Estas son estructuras de argumentos lógicamente válidos (es decir, tal que su condicional asociado es una tautología en LC0). Suelen suponer (en sus casos más típicos) que partimos de *premisas* con cierta estructura, y que nuestro objetivo es llegar a una conclusión.

Las premisas y la conclusión concretas no son parte del sistema de deducción natural, sino que son dadas por el argumento particular que se modela con la lógica. Lo que sí es parte son los *esquemas*, *formas* o *estructuras* (se usan los tres nombres para el mismo concepto) de argumentos válidos. Estos son las *reglas* del sistema.

Para usar la deducción natural para demostrar la validez de un argumento, inferimos su conclusión a partir de sus premisas, usando las reglas del sistema de deducción natural.

## 8.2. Noción de regla de transformación

Una regla de transformación es un *esquema*, una *estructura*, una *forma* de argumento válido (*cf.* la definición 10). Eso quiere decir que cualquier argumento que tenga esa estructura será un argumento válido. Y como, de hecho, al concatenar argumentos válidos —es decir, poner uno después del otro, usando la conclusión de uno como parte de las premisas del siguiente, al modo de un polisilogismo (definición 7)— siempre tenemos un argumento válido, usar una regla de transformación después de otra para inferir la conclusión de las premisas, resulta en un argumento válido.

A las reglas de transformación se les llama así porque «transforman» a las premisas «en» la conclusión.

Existen varias clasificaciones de las reglas de transformación. Revisaremos varias para el caso de LC0 en secciones posteriores. En los cuadros 8.1, 8.10, y 8.13 resumo varias clasificaciones posibles de las reglas.

## 8.3. Deducción Natural para LC0

Vamos a definir un sistema de reglas para LC0. De nuevo, estas reglas son estructuras de argumento válidas, y al usar una después de la otra, resultan en varios argumentos válidos. La *deducción natural* para LC0 consiste en tomar ciertas fórmulas de LC0 como *premisas* —fórmulas que encontramos, por ejemplo, al modelar un argumento concreto— y utilizar estas reglas para llegar a una conclusión específica. Eso demuestra la validez del argumento modelado, pues a partir de sus premisas, utilizando solamente argumentos válidos, podemos inferir la conclusión.

### 8.3.1. La estructura de una demostración

Una *demostración de validez* usando la deducción natural en LC0 va a tener siempre la misma estructura: primero las $n$ premisas numeradas y listadas verticalmente; después, una línea que inicia con el símbolo de «por lo tanto» ($\therefore$) que indica que sigue la conclusión; abajo de la conclusión, las *conclusiones intermedias* a partir de las premisas, usando las reglas: cada una de estas líneas será, o la repetición de una premisa, o una fórmula que se sigue de las premisas y/o de las conclusiones intermedias. A su derecha, especificamos qué regla se usó y a qué líneas se aplicó esta regla. Si la última línea es idéntica a la conclusión del argumento, hemos demostrado la *validez* lógica del argumento.

Por ejemplo:

1. $(q \mathbin{\&} r) \mathbin{\&} t$
$\therefore q$
2. $(q \mathbin{\&} r)$ E&(1)
3. $q$ E&(2)

Este argumento demuestra la validez del argumento cuya única premisa es la línea 1 y que tiene como conclusión «$q$». La demostración consiste en inferir la línea 2 a partir de la línea 1, usando la regla de eliminación de la conjunción, que abreviamos «E&», y después en inferir la línea 3 usando la misma regla, pero ahora aplicada a la línea 2. Como esta última línea es idéntica a la conclusión, esto demuestra la validez del argumento.

### 8.3.2. Sustitución uniforme

Como las reglas que vamos a usar son esquemas de argumentos válidos (estructuras, formas de ellos), necesitamos una manera de «traducirlas» a argumentos concretos, formalizados en LC0. Eso es lo que nos da la sustitución uniforme. Veamos.

Cada una de las reglas que vamos a ver está escrita con *meta-variables* (definición 24), es decir, con variables que representan fórmulas de LC0, tanto atómicas como moleculares.

Por ejemplo, esta es (parte de) la regla de la *eliminación de la conjunción* que veremos abajo:

$$\frac{\mathsf{A} \mathbin{\&} \mathsf{B}}{\mathsf{A}}$$

Esta regla nos dice: «Si tienes una fórmula cuya conectiva principal es una conjunción, es lógicamente válido inferir el conyunto de la izquierda». De nuevo, cualquier argumento con esta forma va a ser válido, como podemos confirmar muy fácilmente mediante cualquiera de los dos métodos semánticos del capítulo pasado.

Lo que quiero resaltar es que la regla está escrita con meta-variables porque **no** nos habla de *un* argumento específico, sino de un conjunto de argumentos: de todos aquéllos que tengan la estructura especificada: una conjunción como premisa, y el conyunto de la izquierda como conclusión. La regla nos dice, entonces, que todo argumento con esa estructura va a ser válido.

Por ejemplo, estos dos argumentos:

$$\begin{array}{ll} 1. q \mathbin{\&} r \qquad\qquad & 1. (p \supset s) \mathbin{\&} (r \vee t) \\ / \therefore q & / \therefore p \supset s \end{array}$$

son válidos, pues en ambos hallamos la misma estructura: una premisa cuya conectiva principal es una conjunción, y una conclusión que es el conyunto a la izquierda de la conectiva. Revisa ambos argumentos y confirma que comprendes cómo cada uno es un caso, un ejemplo, de la regla de arriba.

Lo que hemos hecho es utilizar la sustitución uniforme. A partir de la regla escrita con metavariables, hemos hecho las siguientes sustituciones. Para el primero:

$$\begin{array}{lcl} 1. q \mathbin{\&} r & = & \mathsf{A} \mathbin{\&} \mathsf{B} \\ / \therefore q & = & \mathsf{A} \end{array}$$

Y para el segundo:

$$\begin{array}{lcl} 1. (p \supset s) \mathbin{\&} (r \vee t) & = & \mathsf{A} \mathbin{\&} \mathsf{B} \\ / \therefore p \supset s & = & \mathsf{A} \end{array}$$

Ambas sustituciones son *uniformes* porque, una vez que sustituimos a «A» por una fórmula—por «$q$» en la primera, y por «$p \supset s$» en la segunda—, lo seguimos haciendo en la conclusión. Esto nos asegura que el argumento preserve la estructura de la regla. Pero, ya habiendo realizado la inferencia, «descargamos» o «reiniciamos» esa sustitución: podemos volver a usar la regla, pero ahora sustituyéndola con otras fórmulas. Por ejemplo, en este argumento:

1. $r \mathbin{\&} t$
2. $(t \mathbin{\&} s) \mathbin{\&} (q \vee p)$
$\therefore t$
3. $r$ E&(1)
4. $(t \mathbin{\&} s)$ E&(2)
5. $t$ E&(4),

hemos aplicado la misma regla: eliminación de la conjunción, sustituida uniformemente **tres** veces, a diferentes líneas, que son lo que significan los números entre paréntesis a la derecha de las líneas de abajo. Es decir: la línea 3 es la conclusión del argumento válido que tiene como única premisa a la línea 1; la línea 4 también se sigue lógicamente de la línea 2 y, a su vez, la línea 5 se sigue lógicamente de la línea 4. Todas, claro está, mediante el mismo esquema válido: la eliminación de la conjunción. Hemos utilizado ese esquema al sustituirlo uniformemente tres veces. Como la última línea es idéntica a la conclusión, y llegamos a ella mediante las reglas (por ahora, la única que hemos visto), esto constituye una demostración de la validez del argumento con las premisas 1 y 2 y con $t$ como conclusión.

### 8.3.3. Reglas de equivalencia y de inferencia

Una *regla de inferencia* nos da una inferencia válida —es decir: un argumento que, en todo posible caso en que sus premisas sean verdaderas, también tendrá conclusión verdadera.

Escribiremos a las reglas de inferencia así:

$$\begin{array}{c}\mathsf{A}_1\\ \vdots\\ \mathsf{A}_n\\ \hline \mathsf{C}\end{array}$$

Donde «$\mathsf{A}_1$» y las demás «$\mathsf{A}$»s son cada una de las premisas de la regla, y $\mathsf{C}$ es la conclusión de la regla. Entre las reglas que veremos, encontraremos reglas que tienen cero, una, dos, o hasta cuatro premisas (pero todas tienen una sola conclusión).

Mientras tanto, una *regla de equivalencia* nos da *dos* inferencias válidas. La primera inferencia válida es «de abajo hacia arriba», y la segunda es «de arriba hacia abajo», leyendo a través de las líneas, por así decirlo. Las escribiremos así:

$$\begin{array}{c}\mathsf{A}\\ \hline\hline \mathsf{B}\end{array}$$

Esta regla nos dice que los argumentos:

$$\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}$$

y:

$$\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}}$$

son, cada uno, un argumento válido.

**Sólo con las reglas de equivalencia** podemos hacer sustitución uniforme «**dentro**» de las fórmulas de un argumento. Con las de inferencia, no.

Es decir: las reglas de **inferencia** sólo se pueden aplicar a fórmulas cuya conectiva principal sea la conectiva que tiene la regla. Con las reglas de equivalencia también podemos hacer esto, pero **además** podemos aplicarlas a **sub**fórmulas cuya conectiva principal tenga esa conectiva. Al aplicarla a una subfórmula, el resto de la fórmula queda igual.

Es decir: supongamos que tenemos una fórmula $\mathsf{A}$, que contiene a otras fórmulas como subfórmulas. Por ejemplo, si $\mathsf{A}$ fuera la fórmula:

$$\neg(p \lor r) \ \& \ (q \equiv s),$$

y si tuviéramos una regla **de equivalencia** que transformara al primer conyunto (es decir, a «$\neg(p \lor r)$»), podríamos usarla para transformar esta fórmula, modificando sólo ese primer conyunto y dejando todo lo demás igual. Supongamos que lo transformo a alguna fórmula que llamaremos «$\mathsf{B}$». Entonces la fórmula de arriba quedaría:

$$\mathsf{B} \ \& \ (q \equiv s),$$

transformando sólo el primer conyunto, dejando lo demás idéntico. Recuerda que esto sólo se puede con reglas de **equivalencia**. Veremos ejemplos de esto abajo.

Voy a resumir esta primera clasificación de las reglas en el cuadro 8.1.

| **Tipo de regla** | **Notación** | **Lectura** |
|---|---|---|
| *De inferencia* | $\begin{array}{c}\mathsf{A}_1\\ \vdots\\ \mathsf{A}_n\\ \hline \mathsf{C}\end{array}$ | «C se sigue lógicamente de las fórmulas $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$» |
| *De equivalencia* | $\begin{array}{c}\mathsf{A}\\ \hline\hline \mathsf{B}\end{array}$ | «A se sigue lógicamente de B, y B se sigue lógicamente de A» |

Cuadro 8.1: Una clasificación de las reglas de deducción natural de LC0.

Veamos un par de reglas de equivalencia que formarán parte del sistema que usaremos aquí, para usarlas en un ejemplo. Estas se conocen como las «Leyes de De Morgan»,[1] la primera es la siguiente:

$$\begin{array}{c} \neg(\mathsf{A} \lor \mathsf{B}) \\ \hline\hline \neg\mathsf{A} \ \& \ \neg\mathsf{B} \end{array}$$

Esta regla nos dice que la negación de una disyunción es lógicamente equivalente con la conjunción de las dos subfórmulas negadas. La segunda ley de De Morgan es su «dual», y es esta:

$$\begin{array}{c} \neg(\mathsf{A} \ \& \ \mathsf{B}) \\ \hline\hline \neg\mathsf{A} \lor \neg\mathsf{B} \end{array}$$

Esta regla nos dice que la negación de una conjunción es lógicamente equivalente a la disyunción de las dos subfórmulas negadas. Cuando usemos a cualquiera de estas en una demostración, la abreviaremos como «DeM».

Como son reglas de equivalencia, podemos aplicarlas ya sea a toda la fórmula, o a una subfórmula también, tanto «de abajo hacia arriba», como «de arriba hacia abajo».

**ejemplo 24**

Supongamos que formalizamos un argumento, y nos encontramos que sólo tiene una premisa, y la siguiente estructura:

1. $\neg[\neg(r \lor s) \lor q]$
$\therefore \neg\neg r \lor \neg\neg s$

Es fácil demostrar este argumento utilizando las tres reglas que ya hemos visto —*E&* y las dos *DeM*—, aplicándolas a las premisas mediante la sustitución uniforme. Veamos:

1. $\neg[\neg(r \lor s) \lor q]$
$\therefore \neg\neg r \lor \neg\neg s$
2. $\neg[(\neg r \ \& \ \neg s) \lor q]$ DeM(1)
3. $\neg(\neg r \ \& \ \neg s) \ \& \ \neg q$ DeM(2)
4. $\neg(\neg r \ \& \ \neg s)$ E&(3)
5. $\neg\neg r \lor \neg\neg s$ DeM(4)

Veamos qué sucedió en cada paso.

En la línea 2, utilizamos la primera de las leyes de De Morgan que vimos, de arriba hacia abajo, y aplicada a una subfórmula de la línea 1. Es decir: usando sólo la subfórmula «$\neg(r \lor s)$» de la línea 1, aplico De Morgan y dejo todo lo demás igual. Eso me da la línea 2.

En la línea 3, aplicamos otra vez la primera ley de De Morgan, de nuevo de arriba hacia abajo, pero ahora a toda la fórmula que está en la línea 2.

En la línea 4, apliqué la eliminación de la conjunción a la línea 3: eliminé un conyunto (y la conectiva, obviamente) para quedarme con el otro.

En la línea 5, finalmente, usé la línea 4 para aplicarle una vez más las leyes de De Morgan. Sólo que, en este caso, utilicé la segunda ley (y de arriba hacia abajo): de la negación de una conjunción infiero la disyunción de las subfórmulas negadas. Esta línea es idéntica a la conclusión del argumento, así que he demostrado la validez de este.

Por supuesto, no en todos los casos las aplicaciones de las reglas van a ser «en secuencia»: es decir, que la línea 2 resulte de transformar la 1, que la 3 resulte de transformar la 2, y así. Puede ser que en la línea 25 utilice una fórmula de la línea 7, por ejemplo.

### 8.3.4. Reglas de introducción y eliminación

La segunda clasificación de las reglas que vamos a ver es la que las divide en reglas *de introducción* y reglas *de eliminación*.

Las reglas de **introducción** de una conectiva son esquemas de argumentos válidos en los que las premisas no necesariamente tienen a la conectiva como conectiva principal, pero en los que la que la conclusión sí la tiene. *Por ejemplo:* $A \mid A \vee B$.

Las reglas de **eliminación** de una conectiva son esquemas de argumentos válidos en los que al menos una de las premisas tiene a la conectiva como conectiva principal, pero la conclusión ya no la tiene. *Por ejemplo:* $A \,\&\, B \mid A$.

Esta clasificación **no es exhaustiva**: existen reglas que son de una categoría distinta. Pero el primer conjunto de reglas que veremos contiene solamente a las reglas de introducción y de eliminación para cada conectiva. Empezaremos con las reglas de eliminación e introducción de la conjunción, que son las más sencillas.

#### La conjunción

Ya conocemos la primera regla de eliminación: a partir de una conjunción, podemos inferir cualquiera de sus conyuntos. En realidad sólo vimos una primera versión, en donde inferimos el conyunto izquierdo, pero inferir el conyunto derecho también es lógicamente válido. (Pues, como para cualesquiera fórmulas A y B, la conjunción A&B es lógicamente equivalente con la conjunción B&A —como puedes revisar notando que el bicondicional entre ellas es tautológico—, en las conjunciones de LC0 no importa el orden: no importa qué conyunto esté primero.)

Entonces, a las dos siguientes reglas les llamaremos *eliminación de la conjunción* —de hecho, hablaré de ellas como si fueran una sola. La abreviaremos, como lo hemos hecho arriba, con «E&».

**Definición 44: Eliminación de la Conjunción**

$$\frac{\mathsf{A} \mathbin{\&} \mathsf{B}}{\mathsf{A}} \quad \textcircled{\small E\&} \quad \frac{\mathsf{A} \mathbin{\&} \mathsf{B}}{\mathsf{B}}$$

Esta regla nos dicen que un argumento que tenga como premisa a una conjunción, y como conclusión a cualquiera de los dos conyuntos (pero sólo uno por línea), es un argumento lógicamente válido: en todo posible caso en que la premisa sea verdad, también lo será la conclusión.

Es fácil comprobar la validez de esta regla mediante cualquiera de los dos métodos semánticos del capítulo pasado, pero hagamos una demostración rápida. Supongamos que una fórmula conjuntiva A & B es verdadera. Por la tabla de verdad de la conjunción, ambos conyuntos, A y B, deben ser verdaderos. Por lo tanto, si la conjunción es verdadera, necesariamente se sigue que A es verdadera, y necesariamente se sigue que B es verdadera. Esto demuestra la validez de la regla: para cualesquiera dos fórmulas (con «*p*»s y «*q*»s digamos) de la lógica, si su conjunción es verdadera, cada uno de los conyuntos debe serlo también.

También hay una regla de introducción de la conjunción. Como la anterior, tiene dos versiones: una en la que ponemos a la izquierda la primera fórmula que encontramos, y la otra en la que esa primera fórmula va a la derecha. Esto sólo quiere decir que al introducir una conjunción, no importa cuál de los conyuntos pongamos a la izquierda y cuál a la derecha: de nuevo, a las conjunciones de LC0 «no les importa» el orden. A ambas les llamaremos «I&» y, como con la anterior, las trataré como una sola regla.

**Definición 45: Introducción de la Conjunción**

$$\frac{\begin{array}{c}\mathsf{A}\\ \mathsf{B}\end{array}}{\mathsf{A} \mathbin{\&} \mathsf{B}} \quad \textcircled{\small I\&} \quad \frac{\begin{array}{c}\mathsf{A}\\ \mathsf{B}\end{array}}{\mathsf{B} \mathbin{\&} \mathsf{A}}$$

Falta ver algo importante que esta notación no deja claro, y que vale para **todas** las reglas: las premisas de la regla (A y B) **no necesitan estar una inmediatamente después de la otra**. Basta con que aparezcan en la demostración: ya sea en una de las premisas del argumento que estamos demostrando, ya sea en las líneas después de la conclusión, que se siguen de las premisas. Es decir: A y B pueden estar separadas por una línea, o por veinte mil. **No importa**: mientras hayan aparecido antes, podemos usar I& para inferir su conjunción. (Obviamente, no podemos usar a la conclusión, pues es a lo que estamos intentando llegar.)

**Ejercicio # 28**

Utiliza las reglas de eliminación e introducción de la conjunción para demostrar los siguientes argumentos.

(I)
1. $r \,\&\, s$
$\therefore s$

(II)
1. $q$
2. $r$
$\therefore q \,\&\, r$

(III)
1. $s$
2. $p \,\&\, q$
$\therefore p \,\&\, s$

(IV)
1. $(q \,\&\, s) \,\&\, (r \,\&\, t)$
$\therefore r \,\&\, s$

(V)
1. $p \,\&\, q$
2. $(q \lor \neg t) \,\&\, (\neg t \equiv m)$
3. $(s \lor p) \,\&\, u$
$\therefore [q \,\&\, (\neg t \equiv m)] \,\&\, (p \,\&\, u)$

(VI)
1. $[t \supset (\neg q \lor r)] \,\&\, [\neg(r \lor t) \equiv (m \equiv \neg t)]$
2. $(q \supset t) \,\&\, (r \supset s)$
3. $m \,\&\, \neg t$
4. $(m \lor q) \,\&\, \neg(q \supset t)$
$\therefore m \,\&\, \{(q \supset t) \,\&\, [\neg(r \lor t) \equiv (m \equiv \neg t)]\}$

### La disyunción, 1

La primera regla para la disyunción que veremos es su regla de introducción. Esta es una de las reglas más sencillas: nos dice que es válido adicionar una disyunción a cualquier fórmula que ya teníamos. Es decir: si tenemos una fórmula como premisa, podemos concluir que, o bien esa fórmula es verdadera, o bien *cualquiera otra* lo es. Esta otra puede estar a la izquierda o a la derecha de la fórmula que teníamos como premisa. Por ello, cada una de estas es una regla válida:

**Definición 46: Introducción de la Disyunción**

$$\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{A} \lor \mathsf{B}} \quad (\mathrm{I}\lor) \quad \frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B} \lor \mathsf{A}}$$

Aquí, A es la premisa. Para demostrar la validez de estas reglas, supongamos que la premisa es verdadera. Como, por la tabla de verdad de la disyunción, una fórmula disyuntiva es verdadera si cualquiera, o ambos, de sus disyuntos es verdadero, entonces la disyunción de A con cualquier otra fórmula va a ser verdadera (pues ya estábamos asumiendo a A como verdadera). Esa otra fórmula es lo que representa la metavariable B: esta representa *cualquier* fórmula.

A ambas reglas las trataremos como una sola, y le llamaremos «I∨», o *introducción de la disyunción*. Esta nos dice que a partir de una premisa (ya sea una premisa del argumento o una fórmula que se siga de esas premisas mediante las reglas) podemos inferir la disyunción con cualquier otra fórmula, a la izquierda o a la derecha.

Por ejemplo, el siguiente argumento es válido, pues la conclusión se sigue de la premisa mediante I∨:

$$\frac{p \mathbin{\&} r}{(p \mathbin{\&} r) \vee [\neg\neg(m \equiv \neg t) \supset \neg(s \vee t)]}$$

El disyunto de la derecha no tiene nada que ver con la premisa. Pero la lógica que estamos aprendiendo no captura relaciones de «tener que ver»: solamente relaciones de inferencia válida. Este argumento es válido porque usa una regla válida: I∨. Y esta regla es válida —como puedes comprobar con los métodos semánticos— porque, si una fórmula es verdadera, la disyunción de esa fórmula con cualquier otra fórmula (a la izquierda o a la derecha) también lo es. *En todo caso lógicamente posible*; de ahí la validez de la regla.

También hay una regla de eliminación de la disyunción, pero es algo más complicada. Veremos las reglas para el condicional antes —después de unos ejercicios.

**Ejercicio # 29**

Utiliza la regla de introducción de la disyunción para demostrar los siguientes argumentos.

Ⅰ
1. $r$
$\therefore r \vee s$

Ⅱ
1. $q$
$\therefore \neg p \vee q$

Ⅲ
1. $\neg t$
2. $q$
$\therefore \neg t \vee (r \supset \neg m)$

Ⅳ
1. $(p \supset \neg m) \mathbin{\&} (\neg t \equiv m)$
$\therefore [r \vee (q \mathbin{\&} t)] \vee [(p \supset \neg m) \mathbin{\&} (\neg t \equiv m)]$

### La implicación material, 1

La primera regla de la implicación que veremos aquí es la eliminación del condicional, que llamaremos, obviamente, «E⊃».

Esta regla —como todas las demás— refleja la definición semántica del condicional material. Esta definición nos dice que un condicional material *sólo* es falso cuando su antecedente es verdadero y su consecuente es falso. En todos los demás casos, el condicional es verdadero.

Por lo anterior, si sé que un condicional es verdadero, y también sé que su antecedente es verdadero, entonces sé que su consecuente debe, también, ser verdadero. Pues si el consecuente fuera falso, entonces el condicional tendría que ser falso: recordemos que un condicional material *sólo* es falso cuando su antecedente es verdadero y su consecuente es falso. Esto justifica la regla de eliminación del condicional:

**Definición 47: Eliminación del Condicional Material**

$$\begin{array}{l} \mathrm{A} \supset \mathrm{B} \\ \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{B} \end{array} \qquad (\mathrm{E}\supset)$$

Además de «E⊃», esta regla se conoce por varios otros nombres; un par de ellas tienen abreviaciones usuales, que pongo al lado:

| | |
|---|---|
| *Modus Ponens* | M.P. |
| *Modus Ponendo Ponens* | M.P.P. |
| Separación | |

## Ejercicio # 30

Utiliza la regla de eliminación de la implicación para demostrar los siguientes argumentos.

(I)
1. $s \supset t$
2. $s$

$\therefore t$

(II)
1. $(p \,\&\, q) \supset \neg r$
2. $(p \,\&\, q)$

$\therefore \neg r$

(III)
1. $(m \equiv \neg r)$
2. $(m \equiv \neg r) \supset \neg(m \vee s)$

$\therefore \neg(m \vee s)$

(IV)
1. $[\neg(q \vee \neg t) \supset (r \equiv p)] \supset (s \equiv t)$
2. $[\neg(q \vee \neg t) \supset (r \equiv p)]$

$\therefore (s \equiv t)$

## Ejercicio # 31

Para demostrar los siguientes argumentos, utiliza las siguientes reglas (en algunos argumentos no es necesario usar todas): E&, I&, E⊃, I∨.

(I)
1. $p \,\&\, q$
2. $q \supset s$

$\therefore s$

(II)
1. $(r \vee s) \supset q$
2. $r$

$\therefore q$

(III)
1. $s \,\&\, t$
2. $(t \vee r) \supset n$

$\therefore n$

(IV)
1. $(q \vee s) \supset (t \,\&\, r)$
2. $s$
3. $(s \,\&\, r) \supset p$

$\therefore p$

### La equivalencia material, 1

La regla de introducción de la equivalencia material es muy sencilla. Se basa en el hecho de que una equivalencia material es una co-implicación: dos proposiciones son materialmente equivalentes cuando una implica materialmente a la otra y viceversa.

**Definición 48: Introducción de la Equivalencia Material**

$$\begin{array}{c} A \supset B \\ B \supset A \\ \hline A \equiv B \end{array} \qquad (\mathrm{I}\equiv) \qquad \begin{array}{c} A \supset B \\ B \supset A \\ \hline B \equiv A \end{array}$$

Esta regla solamente dice que, si tienes dos fórmulas condicionales (no importa que estén una inmediatamente después de la otra o no), donde el antecedente de una es el consecuente de la otra, y el consecuente de la primera es el antecedente de la primera, puedes inferir el bicondicional correspondiente —poniendo cualquiera de las dos fórmulas a la izquierda o a la derecha. En resumen: si una proposición implica a la otra, y viceversa, entonces ambas son equivalentes, y en la equivalencia material no importa cuál esté a la derecha o a la izquierda.

**Ejercicio # 32**

Utiliza la regla de introducción de la equivalencia material para demostrar los siguientes argumentos.

### La equivalencia material, 2

La regla de eliminación de la equivalencia material es un poco más compleja, pero no mucho más. La idea detrás de esta regla es la siguiente: si dos proposiciones son equivalentes, entonces puedes sustituir una por la otra donde quiera que aparezcan. La justificación de ello es que, si son equivalentes, entonces van a tener el mismo valor de verdad. Pero si cambiamos una fórmula por otra que tenga el mismo valor de verdad, nos va a resultar una fórmula que tenga el mismo valor de verdad que tenía la fórmula original.

Veamos la regla. Como con la de introducción de la equivalencia, en realidad tenemos dos versiones para hacer explícito que no importa cuál fórmula esté a la izquierda y cuál esté a la derecha del bicondicional: mientras sean equivalentes, siempre podemos sustituir una por la otra.

**Definición 49: Eliminación de la Equivalencia Material**

$$\begin{array}{c} \mathsf{A} \equiv \mathsf{B} \\ \Phi[\mathsf{A}] \\ \hline \Phi[\mathsf{B}] \end{array} \qquad (\mathsf{E}\equiv) \qquad \begin{array}{c} \mathsf{A} \equiv \mathsf{B} \\ \Phi[\mathsf{B}] \\ \hline \Phi[\mathsf{A}] \end{array}$$

Aquí, la letra griega Φ se refiere al contexto en el que aparece la fórmula. Así, la notación «Φ[A]» se refiere a la fórmula de la cual A es una sub-fórmula. El contexto puede ser vacío, de forma que A aparezca sola. Lo que la regla nos dice es que, si tenemos que A y B son materialmente equivalentes, y si además A (o, en el segundo caso, B) aparece como parte de otra fórmula —que sería Φ—, entonces podemos sustituir a su equivalente y dejar a todo lo demás en la fórmula Φ igual.

Esta regla es una «pariente lejana» de la regla que estudiamos en el álgebra del bachillerato: si sabemos que dos cosas son iguales, entonces cambiar una por la otra en cualquier contexto, preserva lo mismo que teníamos antes de la sustitución. Sucede que la equivalencia material ¡es un tipo de igualdad! A saber, es la igualdad *de valores de verdad*. Es decir, si una fórmula con la equivalencia material como conectiva principal es verdadera, eso significa que las dos fórmulas flanqueando la conectiva tienen el mismo valor de verdad.

Veamos un par de ejemplos del uso de esta regla.

**ejemplo 25**

Supongamos que tenemos este argumento:

1. $s \equiv t$
2. $t \supset r$
3. $s$

$\therefore r$

Bien, pues veo que tengo que llegar a $r$, que está en la línea 2. Pero para obtener esa letra, debo eliminar el condicional en el que está; lo que significa que debo tener a $t$ (pues es el antecedente del condicional, y al tenerla podría usar E⊃). Pero no tengo a $t$ sola, solamente sé que equivale a $s$. Sin embargo, como sí tengo a $s$ sola, puedo sustituir a $t$ por su equivalente y usar a $s$ para quitar el condicional de 2. Usando esta estrategia, puedo demostrar el argumento así:

1. $s \equiv t$
2. $t \supset r$
3. $s$

$\therefore r$

4. $s \supset r$ E≡(1,2)
5. $r$ E⊃(4,3)

La justificación de la línea 4 es que obtengo esa fórmula al eliminar el bicondicional que está en la línea 1, sustituyendo a las fórmulas equivalentes en la línea 2. De hecho, este mismo argumento tiene otra posible demostración, usando la misma regla:

1. $s \equiv t$
2. $t \supset r$
3. $s$
$\therefore\ r$
4. $t$ E≡(1,3)
5. $r$ E⊃(2,4)

Esta otra demostración es igual de buena que la anterior, pues también utiliza las reglas de manera adecuada. Sólo que ahora, en lugar de sustituir los equivalentes que nos dice 1 en la fórmula 2, los sustituimos en la fórmula 3: sustituyo a $t$ por su equivalente en donde sea que aparezca; como en 3 aparece sola, puedo tener a $t$ sola. En este caso, se dice que el contexto de la fórmula es vacío (ella «aparece sola»). Ya tenido a $t$ es fácil inferir $r$ eliminando el condicional de 2.

Consideremos este otro ejemplo.

1. $(q \vee r) \equiv \neg(s \ \&\ m)$
2. $\neg(s \ \&\ m) \equiv t$
3. $q$
$\therefore\ t \vee p$
4. $(q \vee r) \equiv t$ E≡(1,2)
5. $q \vee r$ I∨(3)
6. $t$ E≡(4,5)
7. $t \vee p$ I∨(6)

Quiero llegar a la disyunción $t \vee p$. No la tengo en ninguna de las tres premisas, pero sí tengo a $t$ en la premisa 2. Así que seguramente la idea es sacar a $t$ de ahí y luego introducir lo demás con una I∨. Bueno, pero ¿cómo obtengo a $t$? Veo que es equivalente con $\neg(s \ \&\ m)$, la cual, a su vez, es equivalente con $(q \vee r)$. Si tuviera alguna de estas dos podría eliminar el bicondicional y quedarme con $t$. Pero no las tengo.

Lo que sí tengo es a $q$ en 3. Si uso una introducción de la disyunción, pudo obtener $(q \vee r)$. Eso es lo que hice en 5. Con la equivalencia de 1 entre $(q \vee r)$ y $\neg(s \ \&\ m)$, puedo sustituir una por la otra en 2, que es lo que hice en 4. Con la equivalencia que me queda en esa línea, y como ya tengo a una de esas dos fórmulas sola en 5, puedo quedarme con la equivalente en 6. Sólo resta introducir lo demás mediante una introducción de la disyunción y eso me da la conclusión del arugmento.

**Ejercicio # 33**

Utiliza la regla de eliminación de la equivalencia material para demostrar los siguientes argumentos.

## Demostraciones condicionales

En las demostraciones condicionales, suponiendo algo, demuestro que ello lleva a una cierta consecuencia. Por supuesto, *suponer* algo significa lo contrario de «darlo por hecho»: significa considerarlo *hipotéticamente*, como si sucediera, aunque no pensemos que *de hecho* sucede. En una demostración condicional, consideramos hipotéticamente cierta premisa, y demostramos que una conclusión se sigue de ella.

Este tipo de razonamiento es muy común. Por ejemplo, si yo te digo un día:

*Supongamos que ni Brasil, ni Italia, ni Argentina asistieran a la próxima copa mundial. ¿Quién tendría oportunidades de ganarla?*

Lo que probablemente sucedería es que comenzarías a pensar en las consecuencias de que los países que más han ganado copas mundiales no jueguen en la próxima edición. Pero no es que *aceptes* o *des por sentado* que ellos no van a asistir: más bien, lo consideras hipotéticamente, y piensas qué resultados tendría. Esos resultados van a ser *condicionales*: se darían bajo la condición que estamos considerando. Piensas que sucederían *si es que* ni Brasil, ni Italia, ni Argentina asistieran a la próxima copa mundial.

Vamos a introducir una notación especial para las inferencias condicionales. Usaremos «cajas» alrededor de una demostración condicional. Esta caja cubre desde la fórmula que estoy suponiendo —la que estoy considerando hipotéticamente— hasta cualquier fórmula que quiera demostrar a partir de ella. La forma general es esta:

$$\begin{array}{|c} \hline \mathsf{A} \\ \vdots \\ \mathsf{B} \\ \hline \end{array}$$

Esto significa que:

- estoy suponiendo una fórmula A,
- los tres puntos representan las líneas en las que hago inferencias mediante las reglas que ya tengo, usando las premisas del argumento, lo que he inferido de ellas, o la suposición que hice, y
- B es una fórmula a la que llego, partiendo de A y de las líneas anteriores, y usando las reglas.

Revisemos brevemente un ejemplo.

**ejemplo 26**

| | |
|---|---|
| a. $s \& t$ | (Sup.) |
| b. $t$ | (a, E&) |
| c. $t \vee r$ | (b, I∨) |
| d. $(t \vee r) \vee q$ | (c, I∨) |

En este ejemplo, estoy suponiendo $s \ \& \ t$. (Por eso lo justifico simplemente como «Sup.», que abrevia el hecho de que lo estoy suponiendo.) Es como si dijera: «Supongamos que $s \& t$. ¿Qué se seguiría de ahí?» Bueno, pues de ahí se sigue $t$, por la regla E&. Y de esta última, se sigue $t \vee r$, por la regla I∨. Y, finalmente, de esta última se sigue $(t \vee r) \vee q$, por la misma regla.

Nota que no estoy poniendo la demostración entera. Este ejemplo sólo es sobre una parte de una demostración: una sub-demostración bajo la suposición de la línea *a*.

Nota la convención que vamos a usar para numerar las líneas dentro de una caja: usamos letras minúsculas (a partir de la «a»). Estrictamente hablando, una caja pertenece a una sola línea de la demostración que estemos haciendo: es una *sub-demostración*. Como hemos estado numerando las líneas que se siguen de las premisas con números arábigos a partir del 1, necesitamos otra numeración para las líneas que se siguen de un supuesto, para no confundirnos. Resumiremos esto en la siguiente convención.

*Convención* 3 (*Notación para las demostraciones condicionales*). Una demostración condicional pertenece a una única línea de la demostración principal. Pondremos una caja alrededor de una demostración condicional, y numeraremos sus líneas de manera distinta a las líneas de la demostración principal, usando «a», «b», etc., para las líneas de una demostración condicional dentro de la demostración principal. Si hacemos una demostración condicional dentro de otra demostración condicional, usaremos todavía otro sistema de numeración, como «i», «ii», etc. Y así sucesivamente.

¿Hasta donde *debo* llegar en una demostración condicional? Pues hasta donde lo requiera en mi demostración. Eso va a depender de la conclusión del argumento que estoy intentando demostrar: busco llegar a esa conclusión, o a una conclusión intermedia que pueda usar, a su vez, para llegar a la conclusión del argumento. Una demostración condicional no pone, por sí misma, ningún límite en el número de conclusiones que puedo extraer de una suposición. Sólo se requiere que cada una de estas conclusiones se siga ya sea solamente de la suposición, o de las premisas (y conclusiones intermedias) que ya tenía antes, o de ambas.

Pero sí hay una restricción importante: **cuando hago una demostración condicional, no puedo copiar fuera de la caja ninguna fórmula que esté dentro de la caja**. Hay más restricciones sobre esto, que vamos a ver en dos casos —al revisar la segunda regla para el condicional y la segunda para la disyunción. Pero puedes ir memorizando así a esta restricción: «lo que pasa en la caja se queda en la caja».

## La implicación material, 2

La regla de introducción de la implicación, «I⊃», es una demostración condicional. Me dice que si, a partir de suponer una fórmula, puedo demostrar otra, entonces puedo inferir válidamente que: si es verdadera la primera, entonces también la segunda lo es. Es decir: si a partir de la suposición de que *A*, utilizando las premisas y las reglas, puedo demostrar que *B*, de todo ello puedo inferir que: $A \supset B$. Esta es la regla:

**Definición 50: Introducción del Condicional Material**

$$\textcircled{\scriptsize I$\supset$} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{|c} \mathsf{A} \\ \vdots \\ \mathsf{B} \\ \hline \end{array} \\ \\ \hline \mathsf{A} \supset \mathsf{B} \end{array}$$

Es claro por qué esta regla es de *introducción* de la implicación: partiendo de premisas que no necesariamente tienen al condicional como conectiva principal, la regla nos dice cómo inferir una fórmula condicional.

Nota algo muy importante. Como mencioné antes, **lo que pasa en la caja se queda en la caja**. Lo que hago en la demostración dentro de la caja —las conclusiones intermedias— se obtienen *bajo la suposición* de que A sea verdadera. Pero esta es una suposición: estoy considerando qué *pasaría* si esta suposición fuera verdadera, pero eso **no** es lo mismo que decir que *es* verdadera. No es válido inferir que lo que se sigue de una suposición sea verdad. Esta regla sólo me dice que, si a partir de suponer algo —A—, puedo inferir otra cosa —B—, entonces es válido inferir que si lo que supuse fuera verdad, también lo sería lo que se sigue de ello: es válido inferir que A ⊃ B.

**ejemplo 27**

Supongamos que formalizamos un argumento, y nos encontramos que tiene la siguiente estructura:

1. $r \supset (q \;\&\; \neg s)$

$\therefore r \supset \neg s$

Como la conclusión no está en las premisas, y la conclusión es un condicional material, es muy probable que tenga que utilizar la introducción del condicional material. Como vemos en la regla, para utilizar esa regla voy a suponer el antecedente del condicional que quiero inferir. En este caso, el antecedente es $r$. A partir de este antecedente, y de las premisas que ya tengo, voy a utilizar las reglas para inferir el consecuente. Si logro hacer eso, puedo inferir el condicional material por la regla I⊃. Veamos:

1. $r \supset (q \,\&\, \neg s)$
$\therefore r \supset \neg s$

$$2.\ \boxed{\begin{array}{ll} \text{a. } r & \text{Sup.} \\ \text{b. } q \,\&\, \neg s & \text{E}\supset\text{(1,2a)} \\ \text{c. } \neg s & \text{E\&(2b)} \end{array}}$$

3. $r \supset \neg s$ I⊃(2)

Lo que hice es suponer el antecedente del condicional que quiero demostrar, esto es en la línea 2a. Lo justifico así: como una suposición. Como estoy iniciando una demostración condicional, abro una caja, dentro de la cual escribiré todo lo que se siga de esta hipótesis. Pues bien, como tengo $r$ y como mi primera premisa me dice que $r \supset (q \,\&\, \neg s)$, puedo usar mis reglas para inferir que $q \,\&\, \neg s$ en la línea 2b. Pero esto sigue dentro de la caja, pues lo inferí solamente bajo la suposición de $r$. Finalmente, elimino la conjunción de la última fórmula para poder inferir $\neg s$ (línea 2c). Podría seguir haciendo inferencias si quisiera, pero he llegado a donde quería: quería llegar a $\neg s$ porque mi conclusión la tiene como consecuente. Ahora ya puedo cerrar la caja e introducir el condicional en la siguiente línea: como antecedente, lo que supuse; como consecuente, lo que pude inferir al suponer ese antecedente. La justificación es la abreviación de la regla aplicada a la línea en la que hice la demostración condicional: la línea 2.

Veamos otro ejemplo. Supongamos que formalizamos un argumento, y nos encontramos que tiene la siguiente estructura:

1. $(q \vee t) \supset m$
2. $(q \supset m) \supset r$
$\therefore r$

Como antes, me fijo qué hay en la conclusión: $r$. Tengo esa letra en la línea 2, pero para quedarme con ella tendré que quitar el antecedente del condicional. La regla que me permite quitar condicionales es E⊃, así que parece que en algún momento tendré que usarla en 2. Pero para aplicar esta regla, necesito tanto el condicional (línea 2) como el antecedente, que es $(q \supset m)$.

Bueno, no tengo ese antecedente. Sí tengo algo parecido en la línea 1, al menos tiene a $q$ y a $m$. Tengo que hacer algo para unir esas dos letras en un condicional. Es decir, necesito «meter» un condicional ahí. Así que probablemente tenga que usar I⊃. ¿Cómo podría hacerlo?

Quizá si supongo $q$, pueda llegar a $m$. Y de hecho así es: suponiendo $q$, puedo añadirle $t$ en disyunción (por I∨) y con ello tener el antecedente para inferir $m$ (por E⊃). Habiendo hecho eso, puedo cerrar mi suposición y tener el antecedente de 2, con lo que ya podría llegar a mi conclusión.

Haciendo todo lo anterior, tenemos la siguiente demostración:

1. $(q \vee t) \supset m$
2. $(q \supset m) \supset r$
$\therefore r$

3.
| | | |
|---|---|---|
| a. $q$ | Sup. | |
| b. $q \vee t$ | I$\vee$(3a) | |
| c. $m$ | E$\supset$(1,3b) | |

4. $q \supset m$ I$\supset$(3)
5. $r$ E$\supset$(2,4)

Esto demuestra la validez del argumento.

## Ejercicio # 34

Utiliza la regla de introducción de la implicación para demostrar los siguientes argumentos.

## Ejercicio # 35

Para demostrar los siguientes argumentos, utiliza las siguientes reglas (en algunos argumentos no es necesario usar todas): I& y E&, I$\supset$ y E$\supset$, I$\equiv$ y E$\equiv$, I$\vee$.

(I)
1. $(p \vee s) \supset \neg q$
2. $s$
$\therefore \neg q$

(II)
1. $r \equiv s$
2. $(s \,\&\, t) \supset q$
3. $t \,\&\, r$
$\therefore q$

(III)
1.
2.
$\therefore$

(IV)
1.
2.
3.
$\therefore$

(IV)
1.
2.
$\therefore$

(VI)
1.
2.
3.
$\therefore$

### Demostraciones por reducción al absurdo

Una manera de demostrar que es muy típica en matemáticas es la *reducción al absurdo*. A veces se usa el mismo nombre para un tipo de falacia en el que representamos la postura de un contrincante como algo «absurdo»: tonto, o difícil de defender. Este no es un uso riguroso del nombre. Cuando representamos a la postura de un contrincante como una postura más débil de la que de hecho es estamos cometiendo una falacia de *hombre de paja*. Así que vamos a usar la frase «reducción al absurdo» para el tipo de demostraciones que veremos ahora.

El nombre viene de usar «absurdo» como algo *repugnante a la razón*. En matemáticas puras, sin embargo, nada impide postular cualesquiera tipos de objetos, siempre que se puedan definir rigurosamente y sin contradicción. Por ello, algo es matemáticamente «absurdo» solamente cuando es contradictorio. *Reducir al absurdo*, por tanto, significa mostrar que lo que reducimos implica una contradicción.

Para hacer una reducción al absurdo, primero suponemos aquello que queremos rechazar, y entonces usamos argumentos válidos para demostrar que esa suposición necesariamente implica una contradicción. Una contradicción afirma y también niega lo mismo que afirma. Es decir, la forma lógica de una contradicción es: A & ¬A. Por lo tanto, para reducir al absurdo a una fórmula, primero supongo esa fórmula, y luego demuestro que implica una fórmula con la estructura: A & ¬A. Por esta razón, una reducción al absurdo usa demostraciones condicionales.

### La negación

Las reglas de introducción y eliminación de la negación son demostraciones por reducción al absurdo.

La regla de introducción de la negación, «I¬», me dice que: si, al suponer algo, puedo demostrar que esa suposición lleva a una contradicción, entonces puedo inferir que eso que supuse es falso.

Definición 51: Introducción de la Negación

$$\text{(I¬)} \quad \begin{array}{|l} \text{A} \\ \vdots \\ \text{B \& ¬B} \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{\quad}{\text{¬A}}$$

La justificación de esta regla se basa en una idea muy sencilla: que *ninguna fórmula verdadera puede implicar a una contradicción*. Vayamos por pasos. Primero, una contradicción es falsa en toda asignación —como se puede ver fácilmente con las tablas de verdad:

| A | & | ( ¬ | A) |
|---|---|---|---|
| **V** | **F** | **F** | **V** |
| **F** | **F** | **V** | **F** |

Además, sabemos por la tabla de verdad del condicional material que una fórmula condicional (es decir, una de la forma $A \supset B$) es verdadera sólo en tres posibles casos:

| A | $\supset$ | B |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **F** |

Viendo la tabla, veo que el único caso en el que suceden dos cosas: (i) la fórmula condicional es verdadera y (ii) el consecuente es falso, es este:

| A | $\supset$ | B |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **F** |

Es decir, la fórmula condicional es verdadera y el consecuente es falso sólo cuando el antecedente también es falso.

Juntemos ambos hechos: (i) una contradicción es falsa bajo toda asignación, y (ii) el único caso en el que la fórmula condicional es verdadera y el consecuente es falso es cuando el antecedente también es falso. Con esto podemos justificar la regla de la introducción de la negación. Pues si he demostrado que una fórmula A implica a una contradicción, eso significa que el condicional $A \supset (B \,\&\, \neg B)$ es verdadero. Pero sabemos que la contradicción debe ser falsa, por lo que el consecuente del condicional anterior debe ser falso. Por el hecho (ii) de arriba, el antecedente debe ser falso también. Esto justifica la validez de nuestra regla.

**Ejercicio # 36**

Utiliza la regla de introducción de la negación, junto con las demás reglas que hemos revisado hasta ahora, para demostrar los siguientes argumentos.

(I)
1. $r \supset (p \,\&\, q)$
2. $q \supset \neg p$
$\therefore \neg r$

(II)
1. $s \equiv (m \,\&\, t)$
2. $q \supset s$
3. $q \equiv \neg t$
$\therefore \neg q$

Podemos dar una justificación parecida para la regla de eliminación de la negación, «E¬»:

**Definición 52: Eliminación de la Negación**

$$\text{E}\neg \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{|c} \neg \text{A} \\ \vdots \\ \text{B} \ \& \ \neg \text{B} \\ \hline \end{array} \\ \\ \hline \text{A} \end{array}$$

La justificación es la siguiente: Si suponer que una fórmula es falsa me lleva a una contradicción, entonces mi suposición inicial debe ser incorrecta: la fórmula debe ser, pues, verdadera.

**Ejercicio # 37**

Utiliza la regla de eliminación de la negación, junto con las demás reglas que hemos revisado hasta ahora, para demostrar los siguientes argumentos.

Ⓘ
1. $t \ \& \ r$
2. $(t \supset \neg p) \ \& \ (r \supset p)$
3. $\neg m \equiv (t \ \& \ r)$

$\therefore m$

Ⓘⓘ
1. $\neg p \supset (m \supset s)$
2. $m$
3. $\neg p \supset \neg s$

$\therefore p$

### Demostraciones por casos

Antes de pasar a la regla de eliminación de la disyunción, hay que explicar el concepto de *demostración por casos.* Vamos a empezar con un ejemplo.

Considera la elección presidencial en E.U.A. en 2016. Había dos contendientes: Donald Trump y Hillary Clinton. Además, sucedía que Donald Trump había expresado su desaprobación con las pruebas nucleares de Corea del Norte. Por otro lado, Hillary Clinton también estaba en desacuerdo con la política social e internacional de Corea del Norte. Aparte de esto, Clinton tenía la postura de que E.U.A. debería enfrentarse diplomáticamente con aquellos países que no se alinearan a los tratados internacionales en materia bélica y de derechos humanos.

Sabiendo esto, los observadores internacionales podían afirmar lo siguiente:

*Si Clinton gana las elecciones en 2016, E.U.A. tendrá un conflicto diplomático con Corea del Norte.*

Pero Trump es bien conocido por realizar afirmaciones problemáticas en su cuenta de Twitter, incluyendo afirmaciones acerca de sus opiniones de política internacional. Esto, aunado a su postura con respecto a la situación en Corea del Norte, hizo que los observadores internacionales pudieran afirmar lo siguiente:

*Si Trump gana las elecciones en 2016, E.U.A. tendrá un conflicto diplomático con Corea del Norte.*

Juntando ambas afirmaciones, teníamos que:

*E.U.A. tendrá un conflicto diplomático con Corea del Norte.*

Es decir: como *las únicas* dos opciones eran que ganara Clinton o que ganara Trump, y como, además, los dos tenían opiniones contrarias a Corea del Norte, de aquí se podía inferir que, *pasara lo que pasara*, E.U.A. tendrá un conflicto diplomático con Corea del Norte.

Así funciona la demostración por casos: *cuando tenemos sólo un número limitado de opciones, y además cada una de estas opciones implica el mismo resultado, entonces se debe seguir que ese resultado va a pasar, suceda la opción que suceda.*

En una demostración por casos, ni siquiera necesito saber cuál de las opciones sucede. Sólo necesito saber que: si una sucede, llevará a un resultado, y si la otra sucede, llevará al mismo resultado. Si sé ambas cosas—que cada una lleva al mismo resultado—y si sé que son las únicas dos opciones, puedo inferir que llegaré a ese resultado.

Pero ¿cómo puedo saber que cada una lleva al mismo resultado, si no sé si suceden o no? Fácil: *supongo* que suceden, y demuestro que llevan al resultado. Es decir: en las demostraciones por casos, hago demostraciones condicionales.

## La disyunción, 2

La regla de la eliminación de la disyunción —que llamaremos «E∨»— es la estructura de una demostración por casos.

Como vimos antes, en una demostración por casos ni siquiera necesito saber cuál de las opciones de hecho sucede. Sólo necesito saber que cada una lleva al mismo resultado, y que son las únicas dos opciones. Es decir, para cada uno de los dos disyuntos, hago esto: lo pongo como suposición y, utilizando las reglas y las premisas que ya tengo, demuestro que lleva a una fórmula específica.

Cuando cada uno *de los disyuntos* lleva a la misma fórmula, puedo saber que *la fórmula disyuntiva* implica a esa fórmula. Pues, según la tabla de verdad de la disyunción, una fórmula disyuntiva es verdadera en tres posibles casos:

| A | ∨ | B |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **V** | **F** |
| **F** | **V** | **V** |

Es decir, una fórmula disyuntiva, del tipo de «A ∨ B», es verdadera si, o bien: A es verdadera, o bien B es verdadera, o bien ambas son verdaderas. Si tanto A como B implican a una misma fórmula C, esto quiere decir que, en cualquiera de los tres posibles casos en los que la implicación sea verdadera, también lo será C. Esto justifica la regla de eliminación de la disyunción, «E∨»:

**Definición 53: Eliminación de la Disyunción**

E∨

$$\begin{array}{c} A \lor B \\ \begin{array}{|l} A \\ \vdots \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{|l} B \\ \vdots \\ C \end{array} \\ \hline C \end{array}$$

En resumen: si cada uno de los disyuntos implica a una misma fórmula C, entonces la disyunción por sí misma implica a C. Pero hay que demostrar eso: que cada uno de los disyuntos implica a una misma fórmula. Para esto hacemos dos demostraciones condicionales.

### Ejercicio # 38

Utiliza la regla de eliminación de la disyunción, junto con las demás que hemos visto, para demostrar los siguientes argumentos.

(I)
1. $r \lor s$
2. $s \supset t$
3. $r \equiv q$

$\therefore t \lor q$

(II)
1. $(q \lor r) \equiv m$
2. $m \,\&\, t$
3. $r \equiv p$
4. $q \supset p$

$\therefore p$

(III)
1. $s \supset r$
2. $r \supset (q \lor \neg m)$
3. $s \,\&\, (\neg m \supset p)$
4. $p \equiv q$

$\therefore p$

(IV)
1. $n \supset (q \lor m)$
2. $m \equiv (s \supset t)$
3. $q \supset t$
4. $n \,\&\, s$

$\therefore t$

## Resumen de las reglas hasta ahora

Vamos a resumir lo visto en sendos cuadros. El primero, el cuadro 8.10, resume la diferencia entre reglas de introducción y de eliminación; el segundo cuadro —8.11— resume las reglas que hemos visto hasta ahora.

Recuerda que la clasificación entre reglas de introducción y de eliminación **no** es exhaustiva: no todas las reglas son de una u otra categoría: hay fórmulas que son de otra categoría. Estas las revisaremos después.

| **Tipo de regla** | **Concepto** |
|---|---|
| *De eliminación* | Parto de premisas en donde una fórmula contiene a la conectiva como conectiva principal. La regla me permite inferir una fórmula sin esa conectiva como conectiva principal. |
| *De introducción* | Parto de premisas en donde no necesariamente hay una fórmula que contenga a la conectiva como conectiva principal. La regla me permite inferir una fórmula que sí tenga esa conectiva como conectiva principal. |

Cuadro 8.10: Una clasificación de las reglas: de eliminación y de introducción. Esta clasificación **no** es exhaustiva.

| | **Introducción** | **Eliminación** |
|---|---|---|
| $\&$ | $\dfrac{\begin{array}{c}\mathsf{A}\\ \mathsf{B}\end{array}}{\mathsf{A}\ \&\ \mathsf{B}} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathsf{A}\\ \mathsf{B}\end{array}}{\mathsf{B}\ \&\ \mathsf{A}}$ | $\dfrac{\mathsf{A}\ \&\ \mathsf{B}}{\mathsf{A}} \qquad \dfrac{\mathsf{A}\ \&\ \mathsf{B}}{\mathsf{B}}$ |
| $\vee$ | $\dfrac{\mathsf{A}}{\mathsf{A} \vee \mathsf{B}} \qquad \dfrac{\mathsf{A}}{\mathsf{B} \vee \mathsf{A}}$ | $\dfrac{\begin{array}{c}\mathsf{A} \vee \mathsf{B}\\ \left\vert\begin{array}{c}\mathsf{A}\\ \vdots\\ \mathsf{C}\end{array}\right. \qquad \left\vert\begin{array}{c}\mathsf{B}\\ \vdots\\ \mathsf{C}\end{array}\right.\end{array}}{\mathsf{C}}$ |
| $\supset$ | $\dfrac{\left\vert\begin{array}{c}\mathsf{A}\\ \vdots\\ \mathsf{B}\end{array}\right.}{\mathsf{A} \supset \mathsf{B}}$ | $\dfrac{\begin{array}{c}\mathsf{A} \supset \mathsf{B}\\ \mathsf{A}\end{array}}{\mathsf{B}}$ |
| $\equiv$ | $\dfrac{\begin{array}{c}\mathsf{A} \supset \mathsf{B}\\ \mathsf{B} \supset \mathsf{A}\end{array}}{\mathsf{A} \equiv \mathsf{B}} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathsf{A} \supset \mathsf{B}\\ \mathsf{B} \supset \mathsf{A}\end{array}}{\mathsf{B} \equiv \mathsf{A}}$ | $\dfrac{\begin{array}{c}\mathsf{A} \equiv \mathsf{B}\\ \Phi[\mathsf{A}]\end{array}}{\Phi[\mathsf{B}]} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathsf{A} \equiv \mathsf{B}\\ \Phi[\mathsf{B}]\end{array}}{\Phi[\mathsf{A}]}$ |
| $\neg$ | $\dfrac{\left\vert\begin{array}{c}\mathsf{A}\\ \vdots\\ \mathsf{B}\ \&\ \neg\mathsf{B}\end{array}\right.}{\neg\mathsf{A}}$ | $\dfrac{\left\vert\begin{array}{c}\neg\mathsf{A}\\ \vdots\\ \mathsf{B}\ \&\ \neg\mathsf{B}\end{array}\right.}{\mathsf{A}}$ |

Cuadro 8.11: Las reglas de eliminación y de introducción para cada una de las conectivas.

### 8.3.5. Reglas básicas y reglas derivadas

Las reglas **básicas** son las que, en conjunto, nos permiten demostrar la validez de todas las demás reglas. Estas, cuya validez es demostrable partiendo de la validez de las básicas, serán las reglas **derivadas**.

Como reglas básicas, tendremos a las reglas de eliminación e introducción de la sección anterior, así como la regla de *explosión*, que ahora veremos, y que abreviaremos «Expl»:

**Definición 54: Explosión**

$$\frac{A \mathbin{\&} \neg A}{B} \quad \text{Expl}$$

Esta regla también es conocida como «*Ex contradictione quodlibet*»: *de una contradicción, todo* se sigue. ¿Por qué es válida? Lo podemos ver con las definiciones semánticas de las conectivas y el concepto de validez (definición 10, p. 50). Por las primeras, sabemos que una contradicción es falsa bajo toda asignación: es decir, que no existe ninguna situación lógicamente posible en la que sea verdadera. Por la definición de validez, sabemos que: un argumento es válido siempre y cuando, no existe ninguna situación lógicamente posible en la que sus premisas sean todas verdaderas pero la conclusión falsa. Por lo tanto, cualquier argumento que tenga una contradicción entre sus premisas va a ser válido, pues *no va a existir ninguna situación en la que todas sus premisas sean verdaderas.* Esto sin importar qué fórmula sea la conclusión: puede ser verdadera, pero también falsa. Aún cuando la conclusión sea falsa, el argumento será válido —simplemente porque, de nuevo, no va a existir ninguna situación en la que todas sus premisas sean verdaderas pero la conclusión falsa, pues entre las premisas hay una contradicción y esta no puede ser verdadera.

Todas las reglas restantes son reglas derivadas.

| Tipo de regla | Concepto |
|---|---|
| *Básicas* | En conjunto, permiten demostrar la validez de todas las demás reglas. |
| *Derivadas* | Su validez es demostrable partiendo de la validez de las básicas. |

Cuadro 8.13: Una clasificación de las reglas: básicas y derivadas. Esta clasificación sí es exhaustiva.

La **ventaja** de tener más reglas derivadas es que las demostraciones se pueden simplificar bastante. La desventaja es que tenemos que memorizar más reglas. Podemos quedarnos solamente con las reglas básicas. Pero algunas demostraciones resultarán mucho más largas de lo que serían usando reglas derivadas. Esto sucede porque el usar solamente reglas básicas sería como estar demostrando la validez de la regla derivada en cada caso.

### 8.3.6. Propiedades algebraicas

Recordemos que las conectivas de LC0 son operaciones con valores de verdad (como explicamos en la sección 6.2). Como las operaciones aritméticas, las operaciones de LC0 también tienen propiedades algebraicas.

Recuerda la multiplicación entre números. Una de las leyes que expresan las propiedades de esta operación es esta:

$$(x \cdot y) = (y \cdot x)$$

De acuerdo con esta ley, al multiplicar un número $x$ con uno $y$ tendremos exactamente el mismo número que al multiplicar primero $y$ con $x$. Esta propiedad, tan sencilla, se llama *conmutatividad*. Decimos, entonces, que *la multiplicación es conmutativa* porque no importa si cambiamos el orden de los números, el resultado es el mismo: «el orden de los factores no altera el producto». De igual forma, la suma es conmutativa porque vale la siguiente ley:

$$(x + y) = (y + x)$$

Las operaciones lógicas también obedecen leyes algebraicas como esta. Por ejemplo, la conjunción y la disyunción también son conmutativas: no importa el orden de los conyuntos, el valor de verdad no cambia; de igual forma, no importa el orden de los disyuntos, el valor de verdad no cambia. Ahora veremos estas y otras reglas que describen estas propiedades.

#### Reglas de equivalencia

**Definición 55: Propiedades de Conmutatividad**

$$\frac{\mathsf{A} \mathbin{\&} \mathsf{B}}{\mathsf{B} \mathbin{\&} \mathsf{A}}\ \boxed{\text{Conm\&}} \qquad \frac{\mathsf{A} \vee \mathsf{B}}{\mathsf{B} \vee \mathsf{A}}\ \boxed{\text{Conm}\vee} \qquad \frac{\mathsf{A} \equiv \mathsf{B}}{\mathsf{B} \equiv \mathsf{A}}\ \boxed{\text{Conm}\equiv}$$

**Definición 56: Propiedades de Idempotencia**

$$\begin{array}{c} A \\ \hline\hline A \,\&\, A \end{array}\ \boxed{\text{Idem\&}} \qquad \begin{array}{c} A \\ \hline\hline A \lor A \end{array}\ \boxed{\text{Idem}\lor}$$

Se dice que la conjunción y la disyunción son **asociativas** porque nos permiten «mover los paréntesis». Es decir, cuando tenemos una fórmula cuyas conectivas son solamente conjunciones, o solamente disyunciones, dónde pongamos los paréntesis es irrelevante. Y es irrelevante porque una manera de acomodar los paréntesis va a ser equivalente con la otra. Recuerda que hablamos de fórmulas (o subfórmulas) que únicamente tengan a la conjunción, o a la disyunción, como conectivas principales.

**Definición 57: Propiedades de Asociatividad**

$$\begin{array}{c} A \,\&\, (B \,\&\, C) \\ \hline\hline (A \,\&\, B) \,\&\, C \end{array}\ \boxed{\text{Asoc\&}} \qquad \begin{array}{c} A \lor (B \lor C) \\ \hline\hline (A \lor B) \lor C \end{array}\ \boxed{\text{Asoc}\lor}$$

La siguiente propiedad importante es la **involutividad** de la negación, que solamente significa que la negación de una proposición negada es la proposición original. Como con la operación de tomar el negativo de un número en el álgebra: el negativo de un negativo es un positivo. Así, aquí, la negación de una negación es una afirmación. Es por eso que a la regla se le conoce, más usualmente, como «doble negación». Esta regla nos dice que podemos quitar o poner dos negaciones en toda fórmula o subfórmula.

Nota algo muy importante: la negación debe de ser **doble** para que haya equivalencia. Es completa y obviamente **in**válido poner *una sola* negación: si teníamos una proposición verdadera ¡su negación va a ser falsa! Sólo cuando ponemos, o quitamos, dos negaciones al mismo tiempo (o cualquier número par), preservamos el mismo valor de verdad.

**Definición 58: Propiedad de Involución (Doble Negación)**

$$\begin{array}{c} A \\ \hline\hline \neg\neg A \end{array}\ \boxed{\text{D.N.}}$$

Finalmente, tenemos dos reglas que no son muy usuales, pero que también representan propiedades algebraicas del condicional material.

**Definición 59: Propiedad de Conmutación de Antecedentes**

$$\begin{array}{c} \mathsf{A} \supset (\mathsf{B} \supset \mathsf{C}) \\ \hline\hline \mathsf{B} \supset (\mathsf{A} \supset \mathsf{C}) \end{array} \quad \boxed{\mathsf{CoAn}\supset}$$

Nota que esta **no** es la propiedad de la conmutatividad *del condicional*. Conmutar el condicional sería partir de A ⊃ B para inferir B ⊃ A. Pero esta inferencia es **inválida** (como puedes comprobar rápidamente mediante el método de asignaciones), pues hay un caso en que pasamos de verdad a falsedad: cuando A es falsa y B es verdadera.

Aunque el condicional material **no** es idempotente (como se puede comprobar fácilmente con el método de asignaciones), sí satisface una propiedad que podemos llamar «expansiva».

**Definición 60: Propiedades de Expansividad**

$$\begin{array}{c} \mathsf{A} \\ \hline\hline (\mathsf{A} \supset \mathsf{A}) \supset \mathsf{A} \end{array} \quad \boxed{\mathsf{Exp}\supset}$$

### Reglas de inferencia

El bicondicional y el condicional materiales tienen la propiedad de ser relaciones *transitivas.*[2] (Revisaremos con mayor profundidad este concepto en un capítulo posterior: sec. 13.1.1.) Para fines prácticos, la transitividad significa que puedes «cortar» los «eslabones» intermedios en una «cadena». Fíjate en la estructura de las dos reglas siguientes: tenemos que A implica a B, que a su vez implica a C. La transitividad de la implicación material nos permite quitar el intermedio y conectar directamente a A con C. Lo mismo con el bicondicional.

A la regla que representa la transitividad del condicional material se le conoce tradicionalmente como «silogismo hipotético», y aquí vamos a usar el nombre clásico, pero también para la transitividad del bicondicional.

**Definición 61: Propiedades de Transitividad (Silogismo Hipotético)**

$$\begin{array}{c} \mathsf{A} \supset \mathsf{B} \\ \mathsf{B} \supset \mathsf{C} \\ \hline \mathsf{A} \supset \mathsf{C} \end{array} \quad \boxed{\mathsf{S.H.}} \qquad\qquad \begin{array}{c} \mathsf{A} \equiv \mathsf{B} \\ \mathsf{B} \equiv \mathsf{C} \\ \hline \mathsf{A} \equiv \mathsf{C} \end{array} \quad \boxed{\mathsf{S.H.}}$$

**Definición 62: Propiedad de Distributividad del Condicional**

$$\frac{A \supset (B \supset C)}{(A \supset B) \supset (A \supset C)} \quad \boxed{\text{Dist}\supset}$$

Las dos siguientes son las primeras reglas **incondicionadas** que veremos en este libro. Esto quiere decir que estas reglas no necesitan premisas: podemos introducir su conclusión en cualquier momento de una demostración.

**Definición 63: Propiedades de Reflexividad**

$$\frac{}{A \supset A} \quad \boxed{\text{Refl}\supset} \qquad \qquad \frac{}{A \equiv A} \quad \boxed{\text{Refl}\equiv}$$

### Propiedades algebraicas: Interacción

Las reglas de interacción son esquemas de argumentos válidos cuyas premisas contienen distintas conectivas principales. Así, como su nombre lo dice, este tipo de reglas nos van a decir cómo *interactúan* las conectivas, es decir, qué argumentos que las contengan son válidos. Vamos a ver de dos tipos: de equivalencia y de inferencia.

### Propiedades algebraicas de interacción: reglas de equivalencia

Las primeras reglas de interacción son las propiedades algebraicas de *dualidad*: un tipo de equivalencia entre dos conectivas bajo la negación. Decimos que la conjunción y la disyunción son «duales» porque una es el «espejo» de la otra. Piensa en sus tablas de verdad: la tabla de la conjunción es la inversa de la tabla de la disyunción. A esta propiedad de dualidad le corresponde un par de reglas que se conocen, tradicionalmente, como «teoremas de DeMorgan» (por el lógico inglés del siglo XIX), y es el nombre que usaremos aquí.

**Definición 64: Propiedades de Dualidad (Teoremas de DeMorgan)**

$$\begin{array}{c} \neg(A \vee B) \\ \hline\hline \neg A \mathbin{\&} \neg B \end{array} \quad \boxed{\text{DeM.}} \qquad \qquad \begin{array}{c} \neg(A \mathbin{\&} B) \\ \hline\hline \neg A \vee \neg B \end{array} \quad \boxed{\text{DeM.}}$$

El siguiente par de reglas corresponden a las propiedades de distribución. La primera es la distributividad de la conjunción sobre la disyunción, y la segunda la distributividad de la disyunción sobre la conjunción.

**Definición 65: Propiedades de Distributividad**

$$\begin{array}{c} \mathsf{A} \;\&\; (\mathsf{B} \lor \mathsf{C}) \\ \hline\hline (\mathsf{A} \;\&\; \mathsf{B}) \lor (\mathsf{A} \;\&\; \mathsf{C}) \end{array} \;\boxed{\text{Dist\&/}\lor} \qquad \begin{array}{c} \mathsf{A} \lor (\mathsf{B} \;\&\; \mathsf{C}) \\ \hline\hline (\mathsf{A} \lor \mathsf{B}) \;\&\; (\mathsf{A} \lor \mathsf{C}) \end{array} \;\boxed{\text{Dist}\lor\text{/\&}}$$

Una propiedad importante del condicional material es que toda fórmula condicional es equivalente a su *transpuesta*. Esta solamente es la misma fórmula condicional pero que dice: **si no se da el consecuente, no se da el antecedente**. Esto justifica decir que el consecuente de un condicional material es una **condición necesaria** para el antecedente: es un *sine qua non*. A esta regla de equivalencia se le conoce como «transposición», y es el nombre que usaremos aquí.

**Definición 66: Transposición**

$$\begin{array}{c} \mathsf{A} \supset \mathsf{B} \\ \hline\hline \neg\mathsf{B} \supset \neg\mathsf{A} \end{array} \;\boxed{\text{Transp.}}$$

### Propiedades algebraicas de interacción: reglas de inferencia

Totalidad de $\supset$ (A entonces B) v (B entonces A)

Monotonicidad $(\mathsf{A}_1 \;\&\; \ldots \;\&\; \mathsf{A}_n) \supset (\mathsf{B}_1 \;\&\; \ldots \;\&\; \mathsf{B}_n)$ si sucede que $\mathsf{A}_1 \supset \mathsf{B}_1, \mathsf{A}_2 \supset \mathsf{B}_2, \ldots, \mathsf{A}_n \supset \mathsf{B}_n$

$(\mathsf{A}_1 \lor \ldots \lor \mathsf{A}_n) \supset (\mathsf{B}_1 \lor \ldots \lor \mathsf{B}_n)$ si sucede que $\mathsf{A}_1 \supset \mathsf{B}_1, \mathsf{A}_2 \supset \mathsf{B}_2, \ldots, \mathsf{A}_n \supset \mathsf{B}_n$

Monotonicidad de conjunción $\mathsf{A} \supset \mathsf{B}/(\mathsf{A} \;\&\; \mathsf{C}) \supset (\mathsf{B} \;\&\; \mathsf{C})$

Monotonicidad de disyunción $\mathsf{A} \supset \mathsf{B}/(\mathsf{A} \lor \mathsf{C}) \supset (\mathsf{B} \lor \mathsf{C})$

## 8.3.7. Definiciones entre conectivas

Resulta que cada una de las conectivas $\&, \lor, \supset, \equiv$, puede definirse en términos de la negación y de cada una de las demás conectivas. Estos se muestra mediante las siguientes reglas de inferencia. Vamos a usar la convención de poner primero la conectiva definida y después la conectiva con la que se define.

**Definición 67: Definiciones de la Conjunción**

$$\begin{array}{c} A \,\&\, B \\ \hline\hline \neg(A \supset \neg B) \end{array} \;\boxed{\&/\supset} \qquad \begin{array}{c} A \,\&\, B \\ \hline\hline \neg(\neg A \vee \neg B) \end{array} \;\boxed{\&/\vee}$$

**Definición 68: Definiciones de la Disyunción**

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \hline\hline \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \end{array} \;\boxed{\vee/\&} \qquad \begin{array}{c} A \vee B \\ \hline\hline (\neg A \supset B) \end{array} \;\boxed{\vee/\supset}$$

**Definición 69: Definiciones del Condicional**

$$\begin{array}{c} A \supset B \\ \hline\hline \neg(A \,\&\, \neg B) \end{array} \;\boxed{\supset/\&} \qquad \begin{array}{c} A \supset B \\ \hline\hline (\neg A \vee B) \end{array} \;\boxed{\supset/\vee}$$

**Definición 70: Definiciones del Bicondicional**

$$\begin{array}{c} A \equiv B \\ \hline\hline (A \,\&\, B) \vee (\neg A \,\&\, \neg B) \end{array} \;\boxed{\equiv/\vee} \qquad \begin{array}{c} A \equiv B \\ \hline\hline (A \supset B) \,\&\, (B \supset A) \end{array} \;\boxed{\equiv/\&}$$

La negación también se puede definir, pero introduciendo otras conectivas veritativo-funcionales que no veremos aquí.

### 8.3.8. Interacción entre conectivas

Vamos a definir varios esquemas de argumento válidos. Estos son reglas muy bien conocidas y muy importantes por la amplitud de sus aplicaciones. En cada caso, usamos los nombres tradicionales.

**Definición 71: Reglas de interacción**

$$\begin{array}{c} A \supset B \\ \neg B \\ \hline \neg A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \boxed{\text{M.T.}} \\ \textit{Modus Tollens} \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \vee B \\ \neg A \\ \hline B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \boxed{\text{S.D.}} \\ \textit{Silogismo Disyuntivo} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A \supset B \\ C \supset D \\ A \lor C \\ \hline B \lor D \end{array}$$

D.C. *Dilema Constructivo*

$$\begin{array}{c} A \supset B \\ C \supset D \\ \neg B \lor \neg D \\ \hline \neg A \lor \neg C \end{array}$$

D.C. *Dilema Destructivo*

$$\begin{array}{c} A \supset (B \supset C) \\ \hline\hline (A \,\&\, B) \supset C \end{array}$$

Exp. *Exportación*

$$\begin{array}{c} (A \,\&\, B) \supset C \\ \hline A \supset (B \supset C) \end{array}$$

Abs. *Absorción*

$$\begin{array}{c} A \\ \hline B \supset A \end{array}$$

Cond. *Condicionalización*

Nota que, en condicionalización, «B» es cualquier fórmula. Es decir: una vez que sabemos que una fórmula es verdadera, podemos ponerla como consecuente de un condicional con cualquier cosa como antecedente. Es fácil ver la validez de esta regla: para cualquier fórmula A, si ella es verdadera, entonces el condicional $B \supset A$ también va a ser verdadero, sin importar qué valor tenga la fórmula B. Por lo tanto, esta regla siempre preserva la verdad de las premisas y por lo tanto, es válida.

## Ejercicio # 39

Formaliza los siguientes argumentos. Después de ello, demuestra su validez utilizando las reglas de deducción natural para LC0.

(I) Sufro. Si sufro, lloro. Si lloro, hago catarsis. Si hago catarsis, me pongo extático. Por otro lado, si es el caso que: si sufro entonces me pongo extático, entonces: si sufro, disfruto. Por lo tanto, disfruto.

(II) Estudio. Si no repruebo, me regalan un auto. Si me regalan un auto y paso, seré una persona virtuosa. Por otra parte, si estudio, no repruebo. O paso o repruebo. Por lo tanto, seré una persona virtuosa.

(III) Si me ruegas, tenemos un gran futuro. Pues basta que me ruegues para que te perdone; pero te perdono siempre y cuando no lo vuelvas a hacer; y si no lo vuelves a hacer, tenemos un gran futuro.

(IV) Pasaré el examen de idiomas y me graduaré. Me graduaré, lo que requiere que termine los créditos. O dejo el trabajo o no termino los créditos. O sea que, en definitiva, todo lo anterior conlleva que voy a pasar el examen y voy a dejar el trabajo.

(V) Si te quiere, te trata bien. Pero si te trata bien, esperará reciprocidad. De ahí que, si te quiere, esperará reciprocidad y le importará tu bienestar. Pues no va a pasar que: espere reciprocidad y no le importa tu bienestar.

(VI) Ganaré la carrera. Esto lo infiero de todo lo siguiente: en primera, he entrenado. Además: o perderé la carrera o ganaré la carrera, o empataré. Aparte, sé que: no empataré. Aunque, si perderé la carrera, no he entrenado.

(VII) Si aportas al Seguro Social, te descuentan. Si te descuentan, entonces, o pierdes dinero o ahorras para tu futuro. Pero como aportas al Seguro Social, y sin perder dinero, debo concluir que: estás ahorrando para tu futuro.

(VIII) Me odias. Esto lo infiero de todo lo siguiente: en primera, me lastimas. Además: o me amas o me odias, o te soy indiferente. Aparte, sé que: no te soy indiferente. Aunque, si me amas, no me lastimas.

(IX)

(X)

……

Demuestra la validez de los siguientes esquemas de argumento utilizando las reglas de deducción natural.

I

1. $\neg q \supset \neg p$
2. $(p \supset q) \supset \neg(q \vee s)$ / $\therefore \neg s$

II

1. $\neg q \supset \neg\neg p$
2. $\neg q \;\&\; (\neg p \vee s)$ / $\therefore s$

III

1. $(\neg r \;\&\; \neg s) \equiv q$
2. $q$
3. $p \supset \neg\neg(r \vee s)$

/ $\therefore \neg p$

IV

1. $t \;\&\; (r \vee q)$
2. $t \supset \neg r$

/ $\therefore q$

V

1. $s \supset \neg\neg p$
2. $s \;\&\; (\neg p \vee t)$

/$\therefore t$

VI

1. $r \;\&\; (s \vee t)$
2. $r \supset \neg s$

/ $\therefore t$

VII

1. $(\neg q \vee r) \;\&\; t$
2. $t \supset \neg\neg q$

/ $\therefore r$

VIII

1. $p \supset \neg q$
2. $p \;\&\; (q \vee s)$

/ $\therefore s$

IX

1. $r \equiv (q \vee s)$
2. $\neg s \;\&\; r$

/ $\therefore q$

X

1. $\neg q \supset \neg p$
2. $(p \supset q) \supset \neg(q \vee s)$

/ $\therefore \neg s$

XI

1. $p \supset \neg q$
2. $(q \supset \neg p) \supset \neg(r \vee s)$
3. $\neg\neg\neg r \supset m$

/ $\therefore m$

XII

1. $\neg(m\&o) \supset \neg(q \supset s)$
2. $q \supset (r \vee t)$
3. $(t \equiv s)\&(r \supset s)$

/ $\therefore o$

XIII

1. $s \equiv (t \vee m)$
2. $\neg(\neg t \vee \neg m)$
3. $\neg q \supset \neg s$

/ $\therefore \neg\neg q$

XIV

1. $\neg(r\&s) \equiv (q \supset t)$
2. $(\neg t \supset \neg q) \supset p$
3. $\neg s$

/ $\therefore p$

XV

1. $(r \;\&\; m) \supset (\neg s \;\&\; \neg q)$
2. $\neg(q \vee s) \supset (m \supset t)$
3. $(\neg t \supset \neg m) \supset (r \;\&\; m)$

/ $\therefore (m \supset t) \equiv \neg(\neg r \vee \neg m)$

……

Completa las premisas y los pasos usados en la siguiente demostración. Voy a indicar con una estrella («★») los lugares faltantes en las premisas que hay que completar.

I

1. $p \,\&\, \neg s$
2. $(r \supset \bigstar) \,\&\, (\neg r \supset t)$ $/ \therefore \neg\neg t$
3. E&(1)
4. E&(2)
5. $\neg r$
6. E&(2)
7.
8. D.N.(7)

(II)

1. $\neg p \& \neg q$
2. $\neg(\bigstar \vee q) \equiv (r \equiv s)$
3. $(t \vee n) \& s$ $/ \therefore r$
4. DeM.(1)
5. $s$
6. E≡(2, 4)
7. $r$

## 8.4. Equivalencia e implicación lógica: Demostrativa

El concepto de *implicación lógica* nos sirve para entender cómo se relacionan las fórmulas. De forma aproximada, una fórmula implica lógicamente a la otra cuando, *solamente en virtud de su forma*, si la primera es verdadera la segunda también *tiene* que serlo. Ya vimos una definición exacta de este concepto, en la sección 6.8: de acuerdo con la definición 40, una fórmula **implica semánticamente** a otra, siempre y cuando su condicional material sea tautológico. Es decir: una fórmula implica lógicamente a la otra cuando no haya ningún caso posible en el que la primera sea verdadera, pero la implicada sea falsa.

Ahora veremos una versión demostrativa de este concepto.

**Definición 72: Implicación lógica—versión demostrativa**

Una fórmula, A, **implica lógicamente** a otra fórmula, B, siempre y cuando: tomando a A como premisa, usando las reglas podemos inferir a B como conclusión.

Por otro lado, el concepto de *equivalencia lógica* nos sirve para clasificar a las fórmulas. De forma aproximada, dos fórmulas son lógicamente equivalentes cuando, *solamente en virtud de su forma*, ambas son verdaderas y falsas en exactamente las mismas circunstancias. Podemos decir que *la lógica no distingue* entre fórmulas lógicamente equivalentes.

Ya vimos una definición exacta de este concepto, en la sección 6.8: de acuerdo con la definición 39, dos fórmulas son **semánticamente equivalentes** siempre y cuando su bicondicional sea tautológico. Es decir: dos fórmulas semánticamente equivalentes «no se pueden distinguir» porque van a ser verdaderas en exactamente los mismos casos y falsas en exactamente los mismos casos.

Ahora vamos a ver otra forma exacta de entender esta idea de que dos fórmulas lógicamente equivalentes «no se pueden distinguir por pura lógica».

Definición 73: Equivalencia lógica—versión demostrativa

Dos fórmulas, A y B, son **lógicamente equivalentes** siempre y cuando: A implica mediante las reglas (básicas y/o derivativas) a B y también B implica mediante las reglas a A.

Es decir: la equivalencia lógica, en su versión demostrativa, significa que cada una de las fórmulas equivalentes implica demostrativamente a la otra.

Uno de los más importantes logros de la lógica matemática del siglo XX es haber demostrado que las dos formas de entender a la equivalencia e implicación lógicas —la semántica y la demostrativa— cubren a exactamente las mismas fórmulas de la lógica LC0.[3] Es decir, que:

- Una fórmula A implica demostrativamente a una B, siempre y cuando A implica semánticamente a B.
- Dos fórmulas, A y B, son demostrativamente equivalentes siempre y cuando A y B sean semánticamente equivalentes.

### 8.4.1. Equivalencia e implicación lógica: Notación

Introducimos la notación para las versiones demostrativas, junto con la que ya teníamos para las versiones semánticas:

**Implicación demostrativa** Si A implica demostrativamente a B, escribimos: $A \vdash B$.

**Implicación semántica** Si A implica semánticamente a B, escribimos: $A \vDash B$.

**Equivalencia demostrativa** Si A y B son demostrativamente equivalentes, escribimos: $A \dashv\vdash B$.

**Equivalencia semántica** Si A y B son semánticamente equivalentes, escribimos: $A \;{=}\!\!\mid\!\vDash B$.

Como dijimos antes, no usaremos mucho esta notación, pero es importante que sepas a qué se refiere.

★ La interpretación de LCo
    - 
    - 
★

## Proyecto del capítulo

**Antecedentes** ⇢ A finales del siglo XIX e inicios del XX, ocurrió un debate alrededor de los fundamentos de las matemáticas. Algunos, como Gottlob Frege, pensaban que todas las matemáticas podían reducirse a algunos supuestos básicos de la lógica, aunque partiendo de esa base las demostraciones fueran muy largas. Estos supuestos solamente definían el uso de algunos símbolos básicos —incluyendo a los símbolos que hemos definido para las conectivas lógicas de LC0— y mostraban cómo interactuaban entre sí. Sin embargo, Frege no pensaba que estos supuestos fueran arbitrarios. Él era un *realista* acerca de las matemáticas y de la lógica: pensaba que las fórmulas describen un reino objetivo, real, independiente de nosotros. Pero si las matemáticas y la lógica constituyen un reino objetivo, que no creamos nosotros, ¿cómo podemos saber si estos supuestos básicos son verdaderos o falsos? Es decir, ¿cómo podemos saber si estos supuestos básicos describen a ese reino?

En el lenguaje cotidiano, las palabras que usamos forman oraciones, y estas pueden ser verdaderas si describen correctamente las circunstancias, o falsas si no lo hacen. Esto requiere, a su vez, que las palabras tengan un significado, para que, cuando las usemos juntas, puedan describir a los objetos en el mundo.

En la lógica, es usual pensar que el significado está dado por la semántica formal. En el caso de LC0, esta está dada por las tablas de verdad. Pero una vez que tenemos las reglas (de inferencia y equivalencia) y la semántica formal, surge la pregunta de cómo se relacionan entre sí.

En este proyecto vamos a dar una respuesta parcial a esa pregunta. Comenzamos con una definición: un sistema de reglas de deducción natural es **correcto** respecto a una semántica, siempre y cuando cada una de sus reglas es un argumento semánticamente válido en esa semántica.

**Problema** ⇢ Resulta que el sistema de reglas que hemos visto es correcto. Para demostrarlo, basta demostrar la validez de las reglas básicas. Este proyecto consiste en demostrar la corrección del sistema que hemos visto.

Para ello, vas a demostrar que el sistema de reglas que consiste en:

- Las reglas de Introducción de &, $\vee$, $\neg$, $\supset$, y $\equiv$,
- las reglas de Eliminación de &, $\vee$, $\neg$, $\supset$, y $\equiv$, y
- la regla de Explosión

es *correcto* (es decir, que cada una de las reglas es un argumento válido). Para ello, puedes utilizar cualquiera de los dos métodos semánticos.

## IIIª PARTE:

# Lógica Clásica de Primer Orden con Identidad

capítulo

# 9

# Aspectos elementales de la cuantificación

## Contenidos del capítulo

## Objetivos de aprendizaje

1. Que entiendas por qué la lógica LC0 es insuficiente, al tener *limitaciones expresivas.*
2. Que te familiarices con los conceptos de *predicación* y de *referencia* a objetos individuales.
3. Que entiendas la noción de *variable* y *variable individual.*
4. Que conozcas los cuantificadores universal y existencial, y sepas distinguir el alcance de un cuantificador.
5. Que comiences a familiarizarte con la noción de *modelo* de la lógica cuantificacional.

COMO vimos en capítulos anteriores, los sistemas lógicos que estudiamos en los cursos de lógica son teorías matemáticas, como la geometría, el álgebra o el cálculo. Igual que toda teoría matemática, la lógica matemática estudia cierto tipo de estructuras. Aquí, la motivación principal para la estudiar esas estructuras es que podemos *aplicarlas*: estas estructuras matemáticas particulares nos interesan debido a que *modelan* ciertos aspectos de la argumentación que hacemos en nuestros lenguajes y pensamientos.

En este capítulo vamos a ver dos cosas, principalmente: *primera*, que la lógica LC0 es insuficiente para modelar muchas inferencias en el lenguaje natural que son lógicamente válidas «intuitivamente» —es decir, incluso antes de tener una teoría de ello—; *segunda*, que podemos extender el de LC0 para representar ciertas estructuras lógicas que no podemos representar con LC0. En capítulos posteriores revisaremos el lenguaje extendido de forma sistemática, definiendo a un nuevo sistema lógico: la lógica clásica de primer orden, LC1, y también veremos cómo se define su semántica formal y su teoría de la demostración.

## 9.1. La lógica de orden cero como modelo de la validez

La lógica clásica de orden cero (LC0) es conocida también como «lógica proposicional», porque su objetivo central es estudiar las propiedades lógicas de operaciones que pueden usarse para modelar *conectivas* que conectan *proposiciones.* Pero, fuera de estas conectivas, la lógica de orden cero no estudia la estructura interna de estas proposiciones.

Suponemos que las conectivas veritativofuncionales de la lógica clásica se corresponden, si no exactamente, al menos sí de una manera suficientemente aproximada, con partículas del lenguaje natural. Si hay esta correspondencia, podemos suponer que el aparato matemático de la lógica formal nos sirve como idealización del lenguaje natural, lo cual nos permite entender las características lógicas de muchos argumentos del lenguaje natural mediante la aplicación de las técnicas matemáticas que podemos usar con este aparato.

El estudio de estas características se enfoca en comprender, de manera matemáticamente exacta, el concepto de *validez lógica.* Como vimos antes (definición 10), este concepto se puede entender así:

> Un argumento es válido siempre y cuando: no existe ninguna situación lógicamente posible en la que sus premisas sean todas verdaderas, pero la conclusión falsa.

Y es importante notar que esta definición implica que un argumento puede ser válido aún cuando tenga premisas falsas,[4] y que la definición también implica que un argumento válido puede tener una conclusión falsa.[5] También que tenemos definiciones equivalentes a esta;[6] pero, sobre todo, recordemos que vimos tres métodos —dos semánticos y uno con la teoría de la demostración— para demostrar validez en LC0.

Pues bien: resulta que muchos argumentos que pensaríamos que son válidos, de hecho no lo son en LC0.

## 9.2. Limitaciones de LC0 como modelo de la validez

Este es un ejemplo de lo anterior:

1. Hipatia de Alejandría es una mujer sabia.
$\therefore$ Hipatia de Alejandría es sabia.

Es fácil ver por qué pensaríamos que este es un argumento válido. No parece haber ninguna circunstancia *posible* —ninguna circunstancia que no se auto-contradiga— en la que Hipatia de Alejandría sea una mujer sabia, pero que no sea sabia. Es decir, no parece haber ninguna circunstancia posible en la que la premisa sea verdadera, pero la conclusión sea falsa.

Sin embargo, la premisa del argumento es una proposición *atómica* según la lógica proposicional, pues no involucra conectivas lógicas: no contiene negaciones, condicionales, equivalencias, disyunciones o conjunciones. Por esa razón, también la conclusión es atómica. Así que tendríamos una atómica (como $p$) como premisa y otra atómica como conclusión ($q$). Un uso elemental de las herramientas semánticas de la lógica proposicional nos demuestra la invalidez de esta forma argumental.

Podríamos intentar «forzar» el argumento en las formas de la lógica proposicional: pensar que la premisa del argumento es, en realidad, una conjunción de dos proposiciones: que Hipatia es una mujer ($p$) y que Hipatia es sabia ($q$). De ahí podríamos inferir $q$ por la regla de la eliminación de la conjunción.

Pero este «forzamiento» en realidad es muy limitado. Por ejemplo, este argumento también parece válido (también parece ser tal que es *imposible* que su conclusión sea falsa en las circunstancias en las que sus premisas sean verdaderas):

1. Hipatia de Alejandría es una mujer sabia.
2. Todos los sabios son seres humanos.
$\therefore$ Hipatia de Alejandría es un ser humano.

Si la estrategia anterior funcionara, como la premisa (1) implica lógicamente que Hipatia de Alejandría es sabia, y como (según (2)) quienquiera que sea sabio es humano, debería seguirse la conclusión. Pero no se sigue en el modelo proposicional—como, otra vez, podemos demostrar usando las herramientas semánticas proposicionales:

1. $p \,\&\, q$

2. $r$
∴ $s$

Para reafirmar la sensación de que el argumento anterior es válido, consideremos este argumento:

1. Angela Merkel es un ser humano.
2. Todos los seres humanos son seres vivos.
∴ Angela Merkel es un ser vivo.

Parece que el argumento sobre Merkel y el anterior argumento sobre Hipatia comparten algo: una estructura lógica. Esto quiere decir, simplemente, que uno es válido siempre y cuando el otro lo sea también. Y ambos parecen válidos. Pero esto, de nuevo, no puede ser entendido con el modelo de la LC0, que los clasifica a ambos como inválidos.

Otro ejemplo de la insuficiencia de la lógica proposicional es el siguiente:

1. Hipatia de Alejandría es una mujer sabia.
∴ Hay alguien que es una mujer sabia.

Al formalizarlo, otra vez tendremos dos proposiciones atómicas distintas. Sin embargo, otra vez parecemos estar frente a un caso de validez: parece imposible que haya una situación en la que Hipatia sea una mujer sabia, *pero* que sea falso que *alguna* mujer es sabia. ¡Si Hipatía es sabia, *alguien* lo es!

Así que, o bien estamos mal al juzgar los argumentos anteriores como válidos, o bien algo anda mal con la LC0. Pero tenemos al menos tres casos y, de hecho, como vimos con el par de argumentos sobre Hipatia y Merkel, estos argumentos parecen tener estructuras que siempre podemos «rellenar» con otras premisas, de manera que se preserve la sensación de que estamos frente a argumentos válidos. Así, suponiendo que aceptamos la validez de estos argumentos, debemos encontrar dónde falla la lógica proposicional.

## 9.3. Predicación y referencia

### 9.3.1. Limitaciones expresivas de LC0

La respuesta que muchos filósofos han aceptado es que la falla de la lógica proposicional está en sus pocos *recursos expresivos*. Es decir, el problema es que este sistema no puede expresar ciertas estructuras de nuestro lenguaje que son importantes para la validez de cierta clase de argumentos.

Como vimos arriba, la lógica proposicional estudia las conectivas con las que se construyen proposiciones cuyo valor de verdad será una función de las proposiciones que «conectan». Pero no se interesa por la *estructura interna* de estas proposiciones, más allá de las conectivas veritativofuncionales.

Las estructuras del lenguaje que debemos entender para poder modelar la validez de los argumentos sobre Hipatia y sobre Merkel son la *referencia a los objetos individuales*, la *predicación* y la *cuantificación*. Ahora vamos a ver las dos primeras.

### 9.3.2. Referencia a objetos individuales

Una estructura muy importante en nuestro lenguaje y pensamiento es la referencia a objetos individuales.[7] Por ejemplo, podemos referirnos a *esta silla*, o a Mark Zuckerberg; incluso podemos introducir nuevos nombres al lenguaje para referirnos a cosas individuales, como cuando, en clase de álgebra por ejemplo, decimos algo como «sea '*A*' este conjunto de números».

En el lenguaje natural, usamos *nombres propios* («Pepe», «México», «John»), *sustantivos comunes con pronombres demostrativos* («esta mesa», «aquella vaca»), y *pronombres personales singulares* («usted», «yo», «ella») para referirnos a individuos.

### 9.3.3. Predicación

Otra estructura importante en nuestro lenguaje es la que nos permite **predicar** atributos a los objetos individuales, o relaciones entre ellos. Por ejemplo, podemos decir de Mark Zuckerberg que *es muy adinerado*, o de esta mesa que *está hecha de madera y pesa 10 kilos*, o de ti que *estás leyendo*. Estamos atribuyendo propiedades (*cualidades* y *magnitudes*) a objetos individuales.[8] Pero también podemos decir que tú *estás leyendo* este texto, de Zuckerberg que *es el creador de* Facebook, y de esta mesa que *está entre* mi computadora *y* el piso. En estos casos, atribuimos **relaciones** entre los objetos.

Mientras que las cualidades se predican de un solo objeto, las relaciones se predican de varios. Diferentes relaciones se predican de diferentes números de cosas.

**Definición 74: Adicidad**

La adicidad—o, también, la *aridad*, o el *número de lugares* o *número de argumentos*— de una relación es el número de objetos que pueden estar relacionados mediante tal relación.

Por ejemplo, una relación *binaria* (o *diádica*) es una que siempre relaciona a dos objetos, por lo que tiene dos «lugares»; como:

_ *es más alto que* _

que se podría «rellenar» así para conseguir una proposición:

Platón *es más alto que* Sócrates.

Una relación *ternaria* (o *triádica*), a su vez, relaciona a tres objetos, como:

_ *está entre* _ *y* _

que nos da una proposición siempre que «rellenemos» estos tres lugares, como en:

La estación Bellas Artes *está entre* la estación Allende *y* la estación Hidalgo.

(No es claro cuántos lugares pueda llegar a tener un predicado del Español (no se me ocurre uno ejemplo «no artificial» de un predicado con 10 lugares, por ejemplo), pero, como solemos hacer en lógica, vamos a hacer una generalización matemática. Consideraremos predicados de *cualquier número finito de lugares* como parte del lenguaje lógico que construiremos.)

Nota que la predicación y la referencia cumplen funciones complementarias en nuestro lenguaje. Podemos predicar propiedades y relaciones de los objetos una vez que los hemos individuado y nos *referimos* a ellos, y referirnos a objetos regularmente sirve para *hablar* de ellos—es decir, decir de ellos que son de tal o cual manera: predicarles propiedades y relaciones.

……

### La silogística aristotélica y la idea de Frege *

La silogística aristotélica es una manera de intentar sistematizar las inferencias válidas que incluyen esencialmente a las estructuras de referencia, predicación, y cuantificación (de la que hablaremos después).[9] En ella, lo usual es distinguir la estructura de un juicio así (pongo su simbolización entre paréntesis):

$$\text{Juicio:}\begin{cases}\text{– Sujeto } (S)\\ \text{– Cópula («es»)}\\ \text{– Predicado } (P)\end{cases}$$

Hay que notar que esta *no* es la estructura gramatical que, en general, tienen los enunciados. Más bien, la silogística es una teoría de la inferencia válida, por lo que la estructura que distingue es solo aquella que encuentra esencial para entender la validez de los argumentos con juicios en los que la referencia, la predicación y la cuantificación juegan un papel central.

En la silogística, además, se distinguían cuatro formas de juicios,[10] a los que se les asignaban letras para propósitos mnemnotécnicos:

- Universal afirmativo, de la forma: *Todo* $S$ *es* $P$. (A)
- Universal negativo, de la forma: *Ningún* $S$ *es* $P$. (E)
- Particular afirmativo, de la forma: *Algún* $S$ *es* $P$. (I)
- Particular negativo, de la forma: *Algún* $S$ *no es* $P$. (O)

Como podemos ver, la estructura que distinguía la silogística abstraía—por no decir que *ignoraba*—aspectos modificadores de la cópula, como la temporalidad, el número y el género.[11] Otro tipo de juicios que incluía sólo de manera muy poco natural eran los juicios *singulares*, como el expresado por: «Tomás es inteligente». Esto sucede porque en la silogística no tenemos manera de referirnos a individuos. La manera estándar de lidiar con esta problema era agrupar a los juicios singulares como casos de juicios universales. Así, «Tomás es inteligente» se convertía en «Todo el que sea idéntico a Tomás es inteligente».

Estos aspectos resultan, por decir lo menos, forzados; pero por sí mismos no parecen un *error* inescapable de la silogística. Los verdaderos problemas eran otros.

Uno surge por el siguiente hecho. Los esquemas silogísticos A, E, I y O sólo consideran predicados que—como diríamos hoy, de acuerdo con la definición 74—tienen un único lugar de argumento. Pero, de hecho, podemos razonar válidamente con predicados de mayor adicidad. Por ejemplo, consideremos el siguiente argumento:

1. Hipatia vivió antes que Marie Curie.

$\therefore$ Alguien vivió antes que Marie Curie.

Parece que este argumento es válido, pero en la silogística aristotélica es difícil demostrarlo. Existen maneras de intentar salvar el problema, pero resultan no sólo poco naturales, sino que, además, no se extienden a una lógica de las relaciones por sí misma.[12]

El otro gran problema es conocido como *el problema de la generalidad múltiple*. Este surge del hecho de que la silogística aristotélica sólo lidia con un único cuantificador. Pero, para entender esto, primero vamos a hablar de la propuesta de Frege.

Gottlob Frege, el padre de la lógica moderna, propuso una nueva forma de pensar en todo esto. En lugar de la estructura *sujeto-cópula-predicado*, Frege propuso la estructura *entrada-función*. Frege era un matemático que inicialmente trabajaba en temas de geometría, pero pronto se dedicó a la lógica.

Frege nació el 8 de noviembre de 1848 en Wismar, hoy parte de la provincia alemana de Mecklenburg-Schwerin.

Como mencionamos antes, la silogística aristotélica no tenía una representación natural de juicios singulares, como «Tomás es inteligente», pues no tenía reglas para los juicios singulares. Bajo la propuesta de Frege en la que la estructura lógica no es *sujeto-cópula-predicado*, sino *entrada-función*, es fácil recuperar a los juicios singulares. Según la postura fregeana, la estructura de ese juicio es «$I(t)$». Aquí, «$I$» es una *función*—una regla de asociación entre dos conjuntos de cosas. Esta función toma un objeto como entrada y nos devuelve otro: devuelve al objeto **V** —el valor de verdad *verdadero*— si la entrada de hecho tiene la propiedad representada por la función, y devuelve al objeto **F** —el valor de verdad *falso*— si la entrada *no* tiene la propiedad representada por la función.[13] En el caso de «Tomás es inteligente», la función $I$ toma como entrada a Tomás, y nos devuelve **V** si es que Tomás sí es inteligente, o el valor **F**, si no lo es.

La propuesta fregeana también lidia fácilmente con las relaciones. Para ver eso, notemos que las funciones de más de un argumento son usuales en matemáticas. Por ejemplo, la suma de números naturales es una función de dos lugares. Cuando digo, por ejemplo, que $5+7=12$, lo que estoy haciendo es aplicar la función suma—que denoto con «+»—al par de números $(5,7)$, y esto me dará al 12 como resultado. Podríamos, entonces, también escribir así: «$+(5,7)=12$».

Frege utilizó esto para simbolizar la estructura lógica de los juicios relacionales. Así, en su lógica (utilizando la notación contemporánea), el juicio «Hipatia vivió antes que Marie» se simbolizaría así: $A(h,m)$, donde el predicado «$A$» tiene dos lugares y representa a la relación *vivir antes de*, $h$ refiere a Hipatia, y $m$ refiere a Marie.

Todavía más: es fácil extender esto a predicados de más lugares. Por ahora, concluyamos con esto: la lógica contemporánea tiene sus fundamentos en los revolucionarios avances de Frege. ..........................................................

### 9.3.4. Formalizando predicación y referencia

Para formalizar una oración, lo primero es distinguir los objetos particulares —los individuos— de los que habla, así como las cualidades y relaciones —las propiedades— que les atribuye. Esta distinción *no* es la misma que la distinción gramatical entre sujeto y predicado. Por ejemplo, en la oración:

*Juan golpeó a Pepe*,

el sujeto gramatical es Juan, y Pepe el objeto directo, por lo que el predicado completo es «golpeó a Pepe». Pero, en esta otra oración:

*Pepe fue golpeado por Juan*,

el sujeto gramatical es Pepe, y Juan el objeto directo (el predicado es «fue golpeado por Juan»). Sin embargo, ambas oraciones expresan exactamente el mismo hecho.

Como el mismo hecho puede ser descrito por oraciones distintas, y como las oraciones se distinguen por su estructura gramatical, a la lógica no le importa tanto la estructura gramatical de la oración, sino la **estructura lógica**. Para la lógica cuantificacional que estamos viendo, las categorías de *individuo* y *propiedad* son categorías lógicas, no gramaticales. Los individuos son los objetos particulares —personas, países, cosas inanimadas, planetas, etc.— a los que se les atribuye una cualidad o se los pone en una relación.

Ya habiendo distinguido individuos y propiedades, el primer paso para formalizar es definir una *interpretación*. (Falta un segundo paso, pero ese lo veremos en la sección 9.5.)

Como su nombre lo dice, una interpretación es una manera de asignarle predicados del lenguaje natural a letras del lenguaje lógico, y nombres del lenguaje natural a constantes del lenguaje lógico.

Para definir interpretaciones, vamos a establecer tres convenciones que seguiremos en el resto del libro.

*Convención* 4. Vamos a utilizar las primeras letras minúsculas del alfabeto ($a$, $b$, $c$, $d$, ...) como nombres para los individuos (las últimas las reservaremos para las variables, que veremos más adelante). A estas les llamaremos **constantes individuales**.

*Convención* 5. Vamos a utilizar letras mayúsculas para los predicados y las relaciones. Es usual usar las letras $F, G, H$ como letras para propiedades de una cosa, y letras como $R, S$ como letras para relaciones entre dos o más cosas, pero voy a ser flexible con ello. A ambas les llamaremos **letras de predicado**.

*Convención* 6. Vamos a utilizar letras minúsculas griegas: «$\alpha$», «$\beta$», ... para representar cualquier nombre de individuo:[14] $a$, $b$, $c$, ... A estas letras les llamaremos **metavariables individuales** (o simplemente «metavariables», para abreviar).

Usamos *metavariables* —minúsculas griegas: $\alpha$, $\beta$, ... — para aclarar cuántos lugares, y en qué orden, tiene un predicado bajo una interpretación. También usamos paréntesis para indicar a qué cosas «afecta» una letras de predicado.

Así, escribir algo como:

$$P(\alpha,\beta,\gamma)$$

nos dice que «$P$» es un predicado de tres lugares —es decir, que relaciona a tres cosas entre sí—, y nos dice también en qué orden van: primero lo que sustituyamos por «$\alpha$», luego lo que sustituyamos por «$\beta$», y luego lo que sustituyamos por «$\gamma$». Los paréntesis nos ayudan a ver «hasta dónde llega» la letra «$P$»: cuántos lugares tiene, a qué cosas «afecta».

Veamos ejemplos de estos conceptos.

**ejemplo 28**

Consideremos a la oración «Alberto es filósofo». Para formalizarla, realizo exactamente el mismo procedimiento:

$a$: Alberto
$F(\alpha)$: $\alpha$ *es filósofo*.

Con esta interpretación, la proposición de que Alberto es filósofo se formaliza con la fórmula:

$$F(a)$$

……

Veamos otro ejemplo. Considera la proposición expresada por la oración «Pedro golpea a Juan». Esta proposición habla de dos individuos—Pedro y Juan—y les atribuye una relación: $\alpha$ *golpea a* $\beta$. Para formalizar esta proposición, defino una interpretación:

$a$: Pedro
$b$: Juan
$G(\alpha,\beta)$: $\alpha$ *golpea a* $\beta$.

Y simplemente escribo la fórmula. Los predicados siempre van hasta la izquierda, y uso paréntesis y coma para distinguir a los individuos:

$$G(a,b)$$

Esta fórmula representa a la proposición expresada por «Pedro golpea a Juan».

……

En la lógica de predicados que estamos viendo, una relación puede relacionar a dos, tres, cuatro o más individuos. (Cualquier número finito de ellos, de hecho.) Por supuesto, es inusual encontrarnos relaciones de cuatro lugares, pero esta proposición incluye una:

*El coche de Alicia se parece más al coche de Beto de lo que la moto de Cristina se parece a la moto de Diego*

La formalizaríamos con esta interpretación:

$a$: El coche de Alicia
$b$: El coche de Beto
$c$: La moto de Cristina
$d$: La moto de Diego
$H(\alpha,\beta,\delta,\gamma)$: $\alpha$ *se parece más a* $\beta$ *de lo que* $\delta$ *se parece a* $\gamma$

Resultando en la fórmula:

$$H(a,b,c,d)$$

……

Las relaciones de tres lugares son más comunes. Por ejemplo, la fórmula:

$$E(a,b,c)$$

formaliza a la proposición:

*México está entre Estados Unidos y Canadá*

con la siguiente interpretación:

$a$: México
$b$: Estados Unidos
$c$: Canadá
$E(\alpha,\beta,\delta)$: $\alpha$ *está entre* $\beta$ *y* $\delta$.

……

Por supuesto, una misma fórmula puede formalizar proposiciones distintas, si cambiamos la interpretación. Por ejemplo, la fórmula de arriba cambia su significado con esta interpretación:

$a$: Padre Juan
$b$: Miriam
$c$: Alicia
$E(\alpha,\beta,\delta)$: $\alpha$ casó a $\beta$ con $\gamma$.

Bajo esta nueva interpretación, la fórmula $E(a,b,c)$ ahora significa que el Padre Juan casó a Miriam con Alicia. Con una nueva interpretación —cambiando el significado del predicado o de los nombres, o de ambos— tendremos que la fórmula representa a *otra* proposición.

Ahora vamos a ejercitar la formalización de proposiciones. Puedes utilizar una misma interpretación o varias.

**Ejercicio # 40**

Formaliza las siguientes oraciones:

1. Platón fue filósofo.
2. Sócrates es feo.
3. Oceanía es un continente.
4. Sócrates fue filósofo.
5. Alemania colinda con Australia.
6. El Río Bravo separa a México de Estados Unidos.
7. Donald Trump es presidente de Estados Unidos.
8. Claudio es el mejor amigo de Claudia.
9. Juan es su propio mejor amigo.
10. Sócrates vivió en Grecia.

### 9.3.5. Estructura proposicional

Las fórmulas de la nueva lógica también tienen *estructura proposicional* —es decir, también pueden conectarse mediante las conectivas veritativo-funcionales de LC0.

Por ejemplo, si «$H(d,a)$» representa a una proposición, entonces «$\neg H(d,a)$» es su negación lógica. Supongamos que (dada una interpretación que dejo implícita) «$H(d,a)$» representa que Diego es hermano de Alicia. Entonces, la fórmula «$\neg H(d,a)$» nos dice que: es falso que Diego sea hermano de Alicia, es decir: que Diego *no* es hermano de Alicia.

Nota cómo la negación sigue poniéndose hasta «afuera» de la proposición: así como antes escribíamos «$\neg p$», ahora escribimos «$\neg H(d,a)$». Las conectivas **nunca** se ponen al lado de los nombres para individuo.

También las otras conectivas siguen significando lo mismo. Por ejemplo, si (bajo una interpretación) «$F(d)$» significa que Diego es filósofo, la fórmula:

$$F(d) \ \& \ \neg H(d,a)$$

nos dice que Diego es filósofo pero no es hermano de Alicia. La estructura proposicional de esta fórmula es: A & ¬B. Como decíamos, las conectivas siguen usándose para operar sobre proposiciones enteras, **nunca** sobre constantes de individuo.

Ya que vemos que las fórmulas siguen teniendo estructura proposicional, podemos seguir utilizando las reglas de la lógica proposicional LC0 como siempre. De hecho, podemos utilizar todos los métodos semánticos. Veamos un ejemplo.

**ejemplo 29**

Supongamos que formalizo un cierto argumento, después de lo cual veo que tiene la siguiente estructura lógica:

1. $H(d,a) \ \vee \ G(a)$
2. $\neg H(d,a)$

$\therefore G(a)$

Es fácil demostrar que este argumento es válido, usando ya sea los métodos semánticos o la deducción natural de LC0. Vamos a usar la segunda.

1. $H(d,a) \ \vee \ G(a)$
2. $\neg H(d,a)$

$\therefore G(a)$

3. $G(a)$ S.D.(1, 2)

Es decir: las demostraciones proceden igual que siempre. Sólo tengo que ver la estructura proposicional del argumento.

Como vimos en la sección 9.2, muchos argumentos válidos no son proposicionalmente válidos. Esto significa que van a haber casos en los que la estructura proposicional no sea suficiente para demostrar la validez de un argumento —en ellos, vamos a requerir conocer la *estructura cuantificacional* del argumento. En la siguiente sección vamos a entender qué es esta estructura. Pero primero, ejercitemos la deducción natural de LC0, usando lo que ya sabemos sobre predicación y referencia.

**Ejercicio # 41**

Formaliza los siguientes argumentos y demuéstralos usando el sistema de deducción natural para LC0. Recuerda definir una o más interpretaciones, de manera que siempre quede claro qué constantes representan a qué individuos y qué predicados representan a qué propiedades (de uno o más lugares).

1. Canadá está arriba de México y México está arriba de Guatemala. Si Canadá está arriba de México, entonces Canadá está arriba de Guatemala. Se sigue que Canadá está arriba de Guatemala.
2. Pepe no es amigo de Beto. Se sigue que Ricardo es amigo de Pepe. Pues, tam-

bién, o Ricardo es amigo de Pepe, o Pepe es amigo de Beto.

3. Mercedes Benz no comprará a Apple. Esto se sigue de varias tesis. Mercedes Benz comprará a Apple siempre y cuando Mercedes Benz tenga dinero. Esto sucederá si y solamente si Mercedes Benz venderá a BMW. Pero Mercedes Benz no venderá a BMW.
4. Marx tenía dinero siempre y cuando *El Capital* fuera un éxito. Kant tenía dinero siempre y cuando *Crítica de la Razón Pura* fuera un éxito. Si *El Capital* tenía éxito, Marx era capitalista, y si Kant era un santo, *Crítica de la Razón Pura* tenía éxito. Se sigue de lo anterior que Marx no tenía dinero, pero Kant sí. Pues, además de lo anterior, también sucede que Marx era socialista y es falso que Kant no fuera un santo. Y finalmente, si Marx era socialista, no era capitalista.
5. Marx influyó en Pepe, y este no tenía dinero. Por otro lado, es falso que Kant viva en Guatemala. Sin embargo, si Canadá está abajo de México, Kant vive en Guatemala. Pepe comprará a Apple siempre y cuando tenga dinero. Por ello, Canadá no está abajo de México y Pepé no comprará a Apple.
6. Si Mercedes Benz está en Berlín, no tendrá dinero. Ello lo inferimos de varios hechos. Que Mercedes Benz esté en Berlín implica que Mercedes Benz está en Alemania. Si Mercedes Benz está en Alemania entonces pagará impuestos en Alemania. Y si Mercedes Benz paga impuestos en Alemania, entonces no tendrá dinero.
7. O bien Pepe es amigo de Beto, o bien Ricardo es amigo de Beto. Si Ricardo es amigo de Beto, entonces Beto tendrá dinero. Pepe no es amigo de Beto y además, si Beto tiene dinero, dejará de trabajar. En conclusión, Beto dejará de trabajar.
8. Canadá no está abajo de México. Ello se infiere de: que Canadá esté abajo de México equivale a que México esté arriba de Canadá. Y si México está arriba de Canadá entonces Canadá y México hacen un tratado. Pero ellos no harán un tratado.
9. Kant influyó en Hegel y este influyó en Marx. Marx era socialista. Si Marx era socialista, entonces influyó en Lenin. Tomando lo anterior, tenemos que: Marx influyó en Lenin y era socialista.
10. Apple es socialista siempre y cuando Marx influyó en Apple. Pero Hegel influyó en Apple, y Hegel no es socialista. Si Hegel influyó en Apple, esta es capitalista. Y si Apple es capitalista, no es socialista. De lo anterior, sabemos que Marx no influyó en Apple.

## 9.4. Cuantificación y variables

Los argumentos sobre Hipatia que revisamos en la sección 9.2 nos muestran que debemos investigar las características lógicas de la referencia y la predicación, pero que esto no es suficiente.

Tenemos que formalizar los argumentos sobre Hipatia de manera que podamos dar cuenta de su validez. Uno de estos argumentos incluye la frase «todos», mientras que otro incluye la frase «alguna». Cualquiera que sepa hablar Español sabrá que, si todas las cosas de un grupo son de cierta manera, entonces es válido inferir que una cosa particular de ese grupo es de esa manera. Y cualquiera que sepa hablar Español sabrá que decir de algo específico que es de cierta manera, nos permite inferir que *alguna cosa* es de esa manera. Esto debemos formalizarlo y encontrar su estructura lógica.

La siguiente estructura que necesitamos es la *cuantificación*, que representaremos mediante los *cuantificadores* lógicos. Por ejemplo, el siguiente argumento:

1. Todos los perros tienen alguna correa
2. Todas las correas están hechas de cuero

/∴ Todos los perros tienen alguna cosa hecha de cuero

parece válido. Pero ocurren varios cuantificadores en sus premisas: tiene generalidad múltiple.

Frege también resolvió este problema con su lógica. La lógica que veremos aquí —la lógica de primer orden con identidad, LC1=— es una parte de la lógica de Frege. Con ella, podemos entender mejor argumentos como el anterior: podemos ver su estructura lógica de manera que nos permita demostrar su validez. Pero resulta que, para poder hablar de «todos» y de «algo» —de los *cuantificadores*, que están en la base de la lógica que heredamos de Frege—, es necesario primero hablar de las variables.

La silogística aristotélica intentó formalizar esto con las cuatro figuras. Pero se enfrentaba con el problema de *la generalidad múltiple*. Como sólo usa un único cuantificador –en los juicios de tipo A, «Todos», en los de tipo I, «Algunos», y así–, es incapaz de dar un tratamiento sistemático a los argumentos con más de un cuantificador.

### 9.4.1. Variables

El concepto de *variable* es una de las más importantes innovaciones en el pensamiento humano, sin el cual difícilmente hubiera sido posible el progreso en matemáticas.[15] Frege (en su *Begriffsschrift* o *Conceptografía*[16]) fue el primer lógico en notar que el concepto de variable es esencial también en el estudio de la validez, especialmente cuando hablamos (entre muchos otros) de argumentos como los de Hipatia (en la sección 9.2).

Usamos variables desde la educación básica, por ejemplo, en ecuaciones como:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

que es la ecuación de un círculo de radio $r$ centrado en el origen. ¿Qué significa la «$x$» en esta ecuación? No se refiere a ningún número *específico*. Lo mismo sucede con la «$y$» y la «$r$» (pero no, obviamente, con «2»). Las letras significan *cualesquiera* números—con la única restricción de que satisfagan la relación que expresa la ecuación.

A partir de este ejemplo, y de muchos otros que podríamos tomar de la educación básica (y avanzada) en matemáticas, es justificable usar esta definición:

**Definición 75: Variable individual**

Una variable individual es un símbolo que refiere de manera no específica a un objeto en su *dominio*, bajo una interpretación.

Mientras que la noción correlativa de dominio sería esta:

**Definición 76: Dominio**

El dominio de una variable es el conjunto de objetos que pueden ser sustituidos por la variable en una interpretación.

Básicamente, el dominio es *el conjunto de las cosas de las que estamos hablando*.

Por ejemplo, en el ejemplo de la ecuación del círculo, cada una de las variables $x$, $y$, y $r$ toma valores en los números reales: el dominio de las variables es el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$).

En secciones posteriores (9.4.5 y 15.3.1) veremos más aspectos, sintácticos y semánticos, de las variables.

### 9.4.2. Los cuantificadores

Ahora necesitamos especificar cómo vamos a usar a los *cuantificadores*. Estas son nuevas **constantes lógicas** que *no* son veritativo-funcionales (es decir, que no se definen por una tabla de verdad como función de los valores de las proposiciones que conectan).

Estas constantes lógicas *ligan variables*. Con las variables representamos objetos no especificados del conjunto de cosas de las que hablamos. Con los cuantificadores decimos cuántos objetos del dominio son de la manera en la que *predicamos* a las variables. Decir que un cuantificador «liga» a una variable simplemente quiere decir que es el cuantificador que nos dice cuántos objetos del dominio son representados por esa variable. Si una variable no está ligada, no podremos tener una fórmula con significado. Veamos esto paso a paso.

Por ejemplo, predicarle «ser perro» a la variable $x$ no nos da una oración significativa; sería: «$x$ es perro». Pero ¿qué representa «$x$» ahí? En cambio, al ligar esa variable con un cuantificador y predicarle «ser perro», sí tenemos una oración con significado.

En esta lógica, vamos a reconocer solamente dos cuantificadores: «todos» y «al menos uno». Entonces, si decimos algo como «toda $x$ es un perro», estaríamos diciendo que *cualquier* objeto que le asignemos como valor a la $x$, es un perro. Si ligamos la variable con el otro cuantificador, diciendo «al menos una $x$ es un perro», también estamos diciendo algo con significado: que al menos un objeto del dominio, que le podemos asignar como valor a la «$x$», es un perro.

Ambas oraciones ya pueden ser verdaderas o falsas. Qué valor de verdad tengan, dependerá del conjunto de objetos de los que estamos hablando. En el primer caso, si estamos hablando solamente de perros, será verdadero que «toda $x$ es un perro»; si no, será falso (¿Suena obvio? ¡Está bien! Eso nos dice que es la definición correcta del cuantificador). Algo análogo si usamos el cuantificador existencial: «alguna $x$ es un perro» nos dice que al menos una de las cosas que encontramos en nuestro dominio va a ser un perro, y será verdadera siempre y cuando en el dominio de la variable $x$ hay al menos un perro.

Pero (por sí mismos) estos cuantificadores *no* nos dicen un número específico: sólo nos dicen si (de las cosas de las que estamos hablando en cada circunstancia) *hay al menos una* cosa que es así, o si *todas* las cosas son así. Como después veremos, usando la negación podemos también expresar que no hay *ninguna* cosa que sea así, o que algunas cosas *no* son así (es decir, que *no todas* las cosas son así).

El sistema lógico que estamos usando es un sistema de *primer orden* porque los cuantificadores ligan variables de individuos. En sistemas de cuantificación de *segundo orden*, hay cuantificadores también para variables de propiedades. En sistemas de *tercer orden*, hay cuantificadores también para variables de propiedades de propiedades; y así sucesivamente. La lógica de orden cero es la que no posee cuantificadores.

### 9.4.3. El cuantificador universal

El primer cuantificador *básico* que veremos es el *universal*, que simbolizamos como «$\forall$». (Después veremos cómo definir otros cuantificadores con los dos básicos y las demás constantes lógicas.) Como dijimos, los cuantificadores van a ligar variables, es decir, nos dirán, usando una variable ($x, y, \ldots$) para hablar de objetos de manera no específica, cuántos objetos cumplen con lo que predicamos de la variable. Esto se logra poniendo el cuantificador al lado de la variable que está ligando: si pongo «$\forall x$», el universal está ligando a la variable «$x$».

La lectura de «$\forall$» es «todo/as lo/as...», como cuando decimos que «todas las luciérnagas son coleópteros» o que «todos los perros son mamíferos». Hay que notar qué sí y qué no significa esto:

**Sí significa** «cada uno». Es ir uno por uno de los objetos que estamos considerando *hasta agotarlos todos*. Como cuando decimos, de los calcetines en un cajón: «*Cada uno tiene su par*», estamos diciendo que *todo* calcetín en el cajón tiene su par.

**No significa** «todos juntos». Como cuando decimos «Entre todos pudimos mover el coche» o «Todos los del equipo ganamos». En estos casos, no queremos decir que *cada uno* pudo mover el coche, o que *cada uno* del equipo ganó. Más bien, queremos decir que *todos juntos* pudimos mover el coche, y que *todos los del equipo juntos* ganamos.[17]

**Sí significa** «cualquiera», cuando es posible tomar cualquier cosa de un grupo y ésta va a tener cierta cualidad: estamos diciendo que todas las cosas de ese grupo tienen esa cualidad. Como cuando decimos «Cualquier libro de este anaquel que tomes, va a ser sobre Geografía»: es decir, *todos* los libros de este anaquel son sobre Geografía.

**No significa** «cualquiera», cuando queremos decir «basta con uno». Como cuando decimos «Trae cualquiera de estos documentos: credencial, acta, o licencia». Esto es, más bien, un sentido que corresponde al cuantificador existencial.

### 9.4.4. El cuantificador existencial

El siguiente cuantificador básico es el *existencial*, que simbolizamos como «$\exists$». Como con el universal, este cuantificador liga variables al ponerse al lado de la variable que está ligando, como en: «$\exists x$».

La lectura de «$\exists$» es: «*existe al menos un...*». Otra manera de leerlo es «*hay algo que es...*» o también: «*para al menos una cosa, es verdad decir que...*». Usamos este cuantificador para expresar que hay *al menos* una cosa de la que decimos lo que viene en la matriz subsiguiente. Pero puede haber dos, tres, o más: ¡incluso infinitas!

Nota que decir que *algunas* de las cosas de las que estoy hablando sean de tal o cual forma, no implica que *no todas* lo sean. Sólo implica que es falso que *ninguna* lo es.

En el Español, es usual usar «*algunos*» como si fuera «contradictorio» de «todos».[18] Por ejemplo, si me preguntan: «¿Pasaste las materias de este semestre?» y yo respondo «Algunas», la otra persona va a entender que quiero decir «Algunas, pero no todas». **Esto no es así en lógica cuantificacional**. Aquí, si queremos decir «Algunas, pero no todas», tenemos que decirlo explícitamente —con fórmulas cuantificacionales que veremos después (sección 11.3). Aquí, «algunas» **sólo** significa «al menos una», y esto es compatible tanto con «una, y nada más», con «varias», con «muchas pero no todas» y con «todas». De nuevo: sólo significa «al menos una». Quizá hay más, quizá no, quizá todas son así.

### 9.4.5. Alcance de un cuantificador, variables libres y ligadas

Es importante notar que, en nuestro lenguaje, toda fórmula que contiene al menos una *variable* (también puede contener constantes) debe necesariamente contener no sólo variables, sino también los cuantificadores correspondientes. Es decir: cadenas de símbolos del tipo: $R(x,a)$ **no significan nada**. Son sinsentidos —es como si, intentando usar el Español, dijera: «Siempre servilleta hola». No tiene sentido. Será una cadena de signos hecha con componentes —palabras y símbolos— del Español, pero no significa nada. De la misma manera, «$R(x,a)$» no significa nada en LC1. Y no significa nada porque la «$x$» que aparece ahí *no refiere a nada en particular*: es una variable, un símbolo que puede tomar cualquier valor del dominio (del cual hablaremos abajo).

Las fórmulas que tengan variables, entonces, deben tener cuantificadores. Pero esos cuantificadores deben de alguna manera estar «conectados» con esas variables. Definamos:

**Definición 77: Alcance de un cuantificador**

El alcance de un cuantificador (ya sea existencial o universal) son todos los símbolos dentro de la fórmula en la que se encuentra el cuantificador, que están dentro del paréntesis más inmediato a ese cuantificador.

Vamos a ver ejemplos de esto.

**ejemplo 30**

Consideremos las siguientes cadenas de símbolos:

i. $\forall x\,(Fx \supset Gx)$
ii. $\forall x\,(Fx) \supset Gx$

En (i), pero *no* en (ii), «$Gx$» está dentro del alcance del cuantificador universal: en (i), pero *no* en (ii), el paréntesis inmediato al cuantificador sí incluye a «$Gx$».

Lo mismo pasa con el cuantificador existencial:

iii. $\exists x\,(Hx \mathbin{\&} Tx)$
iv. $\exists x\,(Hx) \mathbin{\&} Tx$

De manera análoga, en (iii), *pero no* en (iv), «$Tx$» cae dentro del alcance del existencial.

Ahora ya podemos definir:

**Definición 78: Variables libres y ligadas**

Una variable está *ligada* en una fórmula siempre y cuando esa variable esté dentro del *alcance* de un cuantificador (ya universal, ya existencial) al que, además, le siga esa misma variable. Una variable está *libre* siempre y cuando esa variable no esté *ligada*.

Veamos ejemplos.

**ejemplo 31**

v. $\exists x\,(Hx \supset Tx)$
vi. $\exists x\,\big(Hx \supset Ty\big)$
vii. $\exists y\,(Hx \supset Tx)$
viii. $\exists y\,\big(Hy \supset Tx\big)$

Comprueba que lo que digo es cierto y que entiendes por qué: en el ejemplo (v), la variable $x$ (en ambas apariciones: con $H$ y con $T$) está ligada por el existencial. Sin embargo, en el ejemplo (vi), la variable $y$, aunque está en el alcance del existencial, *no* está ligada—pues el existencial está ligando a $x$, y no hay otro cuantificador. En el ejemplo (vii), las dos apariciones de la variable $x$ están libres. Finalmente, en el ejemplo (viii) la variable $x$ (aunque está dentro del alcance del existencial) no está ligada: está libre.

Como las fórmulas de nuestro lenguaje son análogas a las palabras y oraciones del Español, al ser las unidades de significado, **ninguna fómula de nuestro lenguaje puede tener variables libres**: todas las variables deben estar ligadas por un cuantificador. ¡Pero sólo por uno! El siguiente ejemplo:

ix. $\exists x \forall x\,(Hx \supset Tx)$

*tampoco* es fórmula de nuestro lenguaje, pues la variable $x$ en **ambas** apariciones está «ligada» por dos cuantificadores. En este caso, no sabemos si hablamos de *alguna* o de *todas* las cosas.

En el próximo capítulo vamos a definir rigurosamente el lenguaje de la lógica LC1. Antes de ello, veamos ejemplos de cómo sería un proceso de formalización. (Esto no es completamente riguroso, pues para ello necesitamos definir *modelos*, que es lo que haremos abajo.) Vamos por pasos, empezando por el lenguaje natural y terminando en el lenguaje completamente formal.

**ejemplo 32**

**Ana es filósofa.**
$Fa$
**Ana no es golfista**
$\neg Ga$
**Todos somos filósofos y algunos son golfistas**
Todos son $F$ & algunos son $G$.
Todo $x$ es $F$ & algunos $x$ son $G$.
Todo $x$: $Fx$ & algunos $x$: $Gx$.
$\forall x(Fx)\ \&\ \exists x(Gx)$.
**Todos los filósofos son amigos de Ana**

Todos los $F$ son amigos de $a$.
Todo $x$ que sea $F$, será amigo de $a$.
Todo $x$, si es $F$, es amigo de $a$.
Todo $x$: $Fx \supset x$ es amigo de $a$.
Todo $x$: $Fx \supset A(x,a)$.
$\forall x[Fx \supset A(x,a)]$.

**Todos los filósofos son amigos de algún golfista**

Todos los $F$ son amigos de algún $G$.
Todo $x$ que sea $F$ es amigo de algún $y$ que es $G$.
Todo $x$, si es $F$, entonces $x$ es amigo de algún $y$: $Gy$.
Todo $x$ : $Fx \supset x$ es amigo de algún $y$: $Gy$.
Todo $x$ : $Fx \supset \exists y$: $x$ es amigo de $y$ y $Gy$.
Todo $x$ : $Fx \supset \exists y : A(x,y)\ \&\ Gy$.
$\forall x[Fx \supset \exists y(A(x,y)\ \&\ Gy)]$.

### Ejercicio # 42

Di si las siguientes cadenas de símbolos son o no fórmulas. Si una no es fórmula, explica por qué.

1. $Pa$
2. $H(m,b)$
3. $\forall x(Px)$
4. $\exists x(Px \vee Dx)$
5. $\exists y(Py)$
6. $\neg R(m,b)$
7. $\neg T(a,e,b) \vee Pa$
8. $\neg H(m,x)$
9. $\neg T(a,x,y)$
10. $\exists x[R(a,d)] \supset \neg\neg A(c,e)$

## 9.5. Modelos

A las fórmulas que usamos en LC1 les asignamos un significado. Esto es como en el Español: las letras significan algo. Les asignamos significado cuando **formalizamos** argumentos: cuando pasamos del lenguaje natural al de la lógica. También cuando **interpretamos** argumentos en el lenguaje formal, pasando del lenguaje de la lógica al lenguaje natural.

La manera rigurosa de explicitar cómo es que les asignamos significado a los símbolos es mediante los *modelos*:

Definición 79: Modelo

Un modelo es un par de una interpretación y un dominio:

- Un **dominio** es un conjunto de cosas: el conjunto de cosas de las que estamos hablando en las oraciones que formalizamos.

- Una **interpretación** es un «diccionario» que nos dice a qué cosas (individuales) del dominio refieren las constantes, mientras que los predicados van a ser propiedades y relaciones de esas cosas del dominio, y las variables van a significar cualquier cosa individual del dominio.

Para que las reglas que veremos después (sección 11.4) funcionen con las menores complicaciones posibles, vamos a poner las siguientes restricciones sobre las interpretaciones de todo modelo:

- Cada constante individual de las fórmulas que interpretaré con ese modelo debe referir a un elemento del dominio: no puede haber una constante que no refiera a nada, o que refiera a algo que no está en el dominio de mi modelo.
- Debemos poder ser capaces de introducir un nuevo nombre para cada elemento del modelo que consideremos.[19]

El dominio de un modelo puede ser **irrestricto**[20] o **restringido**. Vamos a definir estos conceptos.

Definición 80: Dominios restringidos e irrestrictos

El dominio de un modelo es **irrestricto** cuando es el conjunto que incluye a absolutamente todas las cosas del universo.
El dominio de un modelo es **restringido** cuando es un subconjunto (propio) del dominio irrestricto: incluye a algunas, pero no todas, las cosas del universo (por ejemplo, el conjunto de los seres humanos; o el conjunto de las células nerviosas de mi perro Firuláis).

Una tercera posibilidad sería usar el conjunto vacío: el conjunto que no contiene a absolutamente nada. Sin embargo, por razones de las que hablaremos después, **los dominios de nuestros modelos nunca son vacíos**: deben ser siempre conjuntos que contengan a al menos una cosa. Vamos a establecer esto como una convención que observaremos en el resto del libro.

*Convención* 7. Para todo modelo, su dominio es un conjunto no vacío.

Cuando en un modelo usamos el dominio irrestricto, vamos a necesitar restringir los cuantificadores de las fórmulas que interpretemos con ese modelo. Hablaremos de esto abajo, en la sección 10.3.

Los dominios restringidos, como no incluyen a todas las cosas, pueden servirnos para interpretar o formalizar oraciones que hablen de cosas específicas. Por ejemplo, para formalizar «*Todos los hombres son mortales*», puedo usar un modelo cuyo dominio consista en el conjunto de todos los hombres, de manera que al formalizarlo, el cuantificador universal «$\forall x$» —que siempre significa «todo lo del modelo»— signifique «todos *los hombres*».

Es muy importante recordar que, dado un modelo para una fórmula (o conjunto de fórmulas) **todas** las variables de las fórmulas que interpreto con ese modelo *corren* sobre el dominio de ese modelo (es decir, toman sus valores en ese dominio). Esto es importante, porque significa que **no se puede definir dominios para cada una de las variables que tengo en la fórmula que estoy interpretando**.

**ejemplo 33**

Supongamos que tengo la siguiente fórmula:

$$\forall x \exists y \left[ R(x,y) \right],$$

**No** es correcto definir un «modelo» (estrictamente, esto ni siquiera contaría como un modelo) con un dominio para $x$ y otro para $y$. Supongamos que quiero interpretar la fórmula anterior como si dijera: «Toda mascota tiene un dueño». Para ello, se me ocurre definir un «modelo» así:

**Dominio** $x$: El conjunto de las mascotas.
**Dominio** $y$: El conjunto de los dueños.
**Interpretación**: $R(\alpha,\beta)$: $\alpha$ es de $\beta$.

Esto no tendría sentido, porque las variables corren por *todo* el dominio, y porque no hay nada que me impida escribir la fórmula anterior («$\forall x \exists y \left[ R(x,y) \right]$») de la siguiente forma:

$$\forall y \exists x \left[ R(y,x) \right],$$

que dice exactamente lo mismo (nota que he cambiado el orden de las variables también dentro del predicado). De igual manera, ambas fórmulas dicen exactamente lo mismo que:

$$\forall w \exists z \, [R(w,z)]$$

Es indistinto qué variables use, siempre que mi uso sea uniforme. Una variable no tiene un significado por sí misma: sólo significa algo cuando está ligada. Y no se refiere a un tipo de cosa particular: sólo cuando restringimos los cuantificadores podemos hablar de tipos de cosas, como veremos abajo, en la sección 10.3.

En resumen: usamos siempre un dominio para cada modelo porque *qué variables use es irrelevante*—siempre que todas estén ligadas, y que me fije en la **importancia del orden**, de lo cual hablaremos después.

**ejemplo 34**

Considera este ejemplo:

**Modelo 1**

**Dominio:** El conjunto de los alumnos en el salón 113.

**Interpretación:** $a$: Ana. $b$: Beto. $c$: Clara. $Q(\alpha,\beta,\gamma)$: $\alpha$ quiere más a $\beta$ que a $\gamma$. $M(\alpha,\beta)$: $\alpha$ es amigo/a de $\beta$.

Con este modelo, podemos formalizar algunas oraciones:

1. Ana no es amiga de Clara: $\neg M(a,c)$.
2. Clara es amiga de Beto, pero Beto no es amigo de Clara: $M(c,b)$ & $\neg M(b,c)$.
3. Ana quiere más a Beto que a Clara: $Q(a,b,c)$.
4. Todos los alumnos del salón 113 son amigos de Ana: $\forall x[M(x,a)]$.
5. Ana es amiga de todos los alumnos del salón 113: $\forall x[M(a,x)]$.

Nota la importancia del orden de las variables y constantes cuando tenemos relaciones (casos 4 y 5).

Vamos a realizar algunos ejercicios.

**Ejercicio # 43**

Ⓘ Formaliza las siguientes oraciones (puedes definir un modelo para todas, o varios modelos [*sugerencia*: restringe el dominio al conjunto de los de la familia Domínguez]):

1. Ana es prima de José.
2. José es primo de Beto.
3. Ana es prima de José y José es primo de Beto, pero Ana no es prima de Beto.
4. Si Ana es prima de José, entonces: Ana es o arquitecto o ingeniera.
5. Algunos de la familia Domínguez son arquitectos.
6. Todos los de la familia Domínguez son ingenieros.
7. Beto es ingeniero, y tiene un amigo de la familia Domínguez que es arquitecto.
8. Si José es primo de Ana, entonces Ana tiene al menos un primo.
9. José es arquitecto y primo de Ana, siempre y cuando, Ana tenga al menos un primo arquitecto.
10. Todos los de la familia Domínguez son o ingenieros o arquitectos, y Beto es primo de José pero no es arquitecto.

(II) Interpreta las siguientes fórmulas. Puedes usar nuevos modelos, o los que ya usaste para el ejercicio anterior.

1. $\neg P(a,b)$.
2. $[\neg P(a,b)] \supset Aa$.
3. $\exists x[\neg P(x,b)]$.
4. $\forall x(Ax \vee Ix)$.
5. $\exists x[\neg P(x,b)]$ & $\forall x(Ax)$.

## Resumen del capítulo

- ★ Debemos distinguir la estructura de predicación y referencia en las proposiciones. Esto lo hace la lógica de primer orden, LC1.
- ★ Las fórmulas de LC1 también pueden tener estructura proposicional.
- ★ La lógica LC1 también agrega variables y cuantificadores al lenguaje lógico.
- ★ El cuantificador existencial, «∃», significa «al menos una cosa del conjunto de cosas de las que hablamos».
- ★ El cuantificador universal, «∀», significa «todas las cosas del conjunto de cosas de las que hablamos».
- ★ Los cuantificadores tienen *alcances*, de manera que ligan todas las variables en su alcance.
- ★ Una variable *libre* no está ligada por ningún cuantificador; una variable *ligada*, sí.
- ★ Las fórmulas de nuestro lenguaje nunca pueden tener variables libres.

## Notas

1. Por el lógico inglés Augustus De Morgan (1806-1871).

2. Recuerda que las conectivas lógicas son *operaciones*; ahora bien, toda operación es una función y, a su vez, toda función es una relación.

3. Estos son los teoremas de *completitud* y *corrección* de la lógica LC0.

4. Un argumento que es válido y *además* tiene sólo premisas verdaderas se conoce como un argumento **sólido** (definición 11). Es claro que la conclusión de un argumento sólido *tiene* que ser verdadera.

5. Como también hemos notado anteriormente, Sólo que en ese caso, debe suceder que al menos una de sus premisas también sea falsa.

6. Por ejemplo, una definición equivalente es esta:

   > Un argumento es válido siempre y cuando: en toda situación lógicamente posible en la que sus premisas sean todas verdaderas, la conclusión también es verdadera.

   Como hemos venido haciendo, tomaremos ambas definiciones como una sola, dada su equivalencia.

7. En metafísica, hay un debate sobre si los individuos existen o son una proyección de nuestro sistema cognitivo o nuestro lenguaje; y en caso de existir, también es controvertida la cuestión de cómo son exactamente. Ver: Díaz Herrera, 2014, y Dasgupta 2016. Pero aquí nos enfocaremos en los aspectos

lógicos de la referencia a los individuos, suponiendo que estos existen (fundamental o derivativamente), o, al menos, que podemos conceptualizar al mundo—de una manera coherente—como si estos existieran.

8. En el lenguaje común y el científico, podemos distinguir propiedades y relaciones meramente «cualitativas» —como el *ser de cierto color* o el *tener cierto aroma*— de propiedades y relaciones «cuantitativas», es decir, que se pueden relacionar con números (u otros sistemas algebraicos), como el *pesar tal número de kilos* o el *estar a una distancia de tantos kilómetros respecto a* otra cosa. En cursos introductorios de lógica se suele poner tal diferencia entre paréntesis, aunque esta sea importante en metafísica y filosofía de la ciencia.

9. Un texto básico y amigable para comprender el paso de la silogística a la lógica moderna, de la cual me serviré extensamente en esta nota, es Moro Simpson 1975, capítulo 1. También es importante recalcar que me enfocaré en los silogismos categóricos, mientras que Aristóteles distinguió otros tipos.

10. De hecho, Aristóteles distinguió tres: Universal, particular e indeterminado (*Segundos Analíticos*, 24a17-24a20).

11. Pero no la modalidad, como los adverbios «necesariamente» o «posiblemente», pues existía la teoría de los silogismos modales.

12. Ver Moro Simpson, *op. cit.*, §§5, 6.

13. De hecho, la ontología de Frege no es exactamente esta. Frege pensaba que las propiedades *son* funciones, pero yo solamente estoy asumiendo que las funciones *representan* propiedades. Ver Frege, «Función y concepto» y «Concepto y objeto» en *Estudios Sobre Semántica*; ver también Valdivia 1989.

14. También cualquier *variable* individual, concepto que revisaremos en la sección 9.4.1.

15. La historia del concepto de *variable* es muy interesante, pues es la médula de la historia del Álgebra. Probablemente los padres del concepto sean el griego Diofanto, el hindú Brahmagupta, y el árabe al-Juarismi. Ver Tabak 2004.

16. Ver Frege 1972.

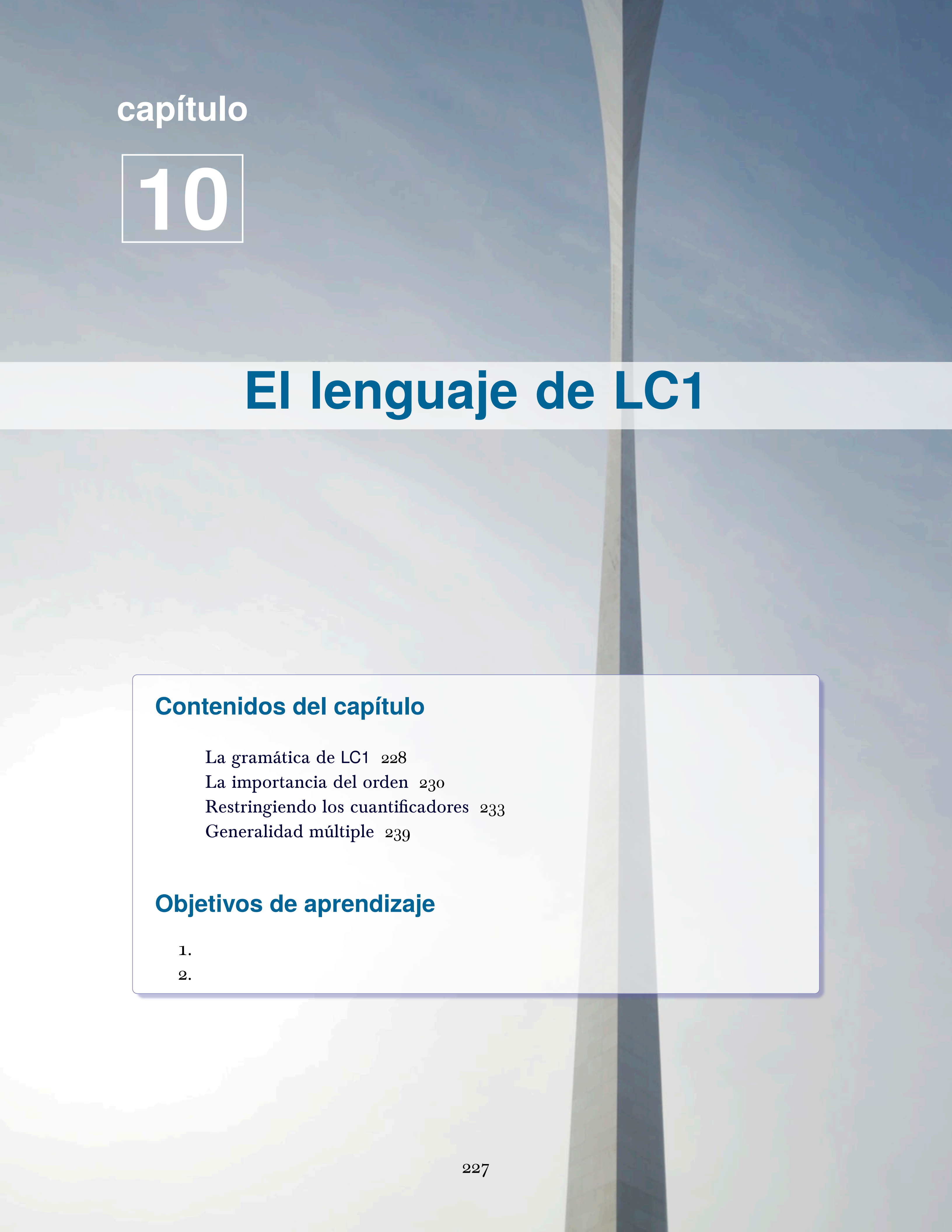
17. Este tipo de cuantificación se conoce como **cuantificación plural**. Se ha argumentado que podemos diseñar una lógica de la cuantificación plural, que serviría para muchos propósitos lógico-filosóficos; pero la cuantificación plural cae fuera de los poderes expresivos de la lógica clásica de primer orden con identidad. El artículo clásico sobre el tema es de George Boolos (1984). Uno de los pocos artículos en español que introduce este tema es Jané (1995), pp. 122-123.

18. Esto probablemente es por *principios pragmáticos* que gobiernan a la comunicación mediante lenguajes naturales, y que la hacen más «práctica» para los agentes involucrados en una conversación. Por ejemplo, suponer que «algunos» implica que «no todos» quizá esté motivado por la *Máxima de cantidad* de Grice: «Haga su contribución tan informativa como se requiera (de acuerdo con el propósito de la comunicación)». (Ver Grice 2005.)

19. Esto es para que no suceda que, mientras en nuestro modelo alguna cosa $a$ es $F$, como no podemos nombrar a $a$, no podremos construir la fórmula que diga que $a$ es $F$. Si además, $a$ fuera la única cosa $F$, no podríamos inferir la oración verdadera en ese dominio: $\exists x(Fx)$. (*Nota técnica*: esto se pone difícil

cuando hablamos de modelos con dominios que tienen cierto tamaño infinito ($\geq \aleph_1$), pues claramente hay *muchas* menos constantes que elementos de tales dominios. Pero lo único que estamos requiriendo aquí es que: para cada objeto del que *hablemos* (que esté en el dominio de algún modelo de una fórmula que interpretemos) podamos nombrarlo con este lenguaje.)

20. Si de hecho podemos cuantificar sobre absolutamente todo (e incluso suponiendo que podemos, si al hacerlo el dominio es un conjunto) es debatido en metafísica, filosofía de la lógica y de las matemáticas, pero aquí pondremos entre paréntesis al problema. Ver los artículos en Rayo y Uzquiano 2007.



capítulo

10

# El lenguaje de LC1

## Contenidos del capítulo

## Objetivos de aprendizaje

1.
2.

## 10.1. La gramática de LC1

Ahora vamos a definir el lenguaje y la sintaxis de LC1. El lenguaje de un sistema lógico se define por dos cosas:

- por los símbolos que contiene, y
- por las fórmulas que se pueden formar con esos símbolos.

Esto lo podemos ver en analogía con lenguajes naturales como el Español. También en el Español tenemos una lista de símbolos: el *alfabeto*, que incluye las letras mayúsculas y minúsculas, los acentos y demás signos ortográficos, y el espacio en blanco. Con estos símbolos, formamos *palabras*. Y con las palabras, usando las reglas gramaticales, formamos frases y *oraciones*.

Las fórmulas son análogas a las oraciones, en el siguiente sentido. Así como la gramática del Español implica que «*!,compra Valle átomo: salida*» no tiene significado (literal), así queremos tener reglas para nuestro sistema lógico que permita definir las «oraciones» que tendrán significado en él: las fórmulas con las que vamos a poder expresar distintos hechos.

### 10.1.1. El alfabeto

El lenguaje de nuestro sistema de lógica cuantificacional de primer orden con identidad, LC1, va a contener los siguientes símbolos:

Definición 81: Alfabeto de LC1

**Constantes individuales** $a, b, c, \dots$ (Estas son los «nombres propios» de nuestro lenguaje: cada una se refiere a un individuo de los que estamos hablando con nuestras fórmulas).[1] Por convención, usamos las primeras letras minúsculas.

**Variables individuales** $x, y, z, \dots$ Por convención, usamos las últimas letras minúsculas.

**Términos individuales** Le llamamos «términos individuales» a las variables y constantes de nuestro lenguaje.

**Predicados** para cada número natural $n$, tenemos constantes de predicados de $n$ lugares.

**Las conectivas lógicas proposicionales** $\neg, \vee, \ \& \ , \supset, \equiv$.

**Los cuantificadores** $\forall, \exists$.

**Símbolos de agrupación** ( , ) , [, ].

### 10.1.2. Las fórmulas

Vamos a definir las fórmulas del lenguaje de nuestra lógica cuantificacional LC1 mediante una definición *recursiva*. Estas reglas son un poco «técnicas»;[2] pero lo verdaramente importante es, más que aprendérselas al pie de la letra, saber reconocer **qué es y qué no es** una fórmula del sistema.

Como en algunos casos necesitaremos referirnos a partes de fórmulas en las que hay variables libres, a esas les llamaremos «*matrices*». Por ejemplo, «$Fx$» es una matriz, pues tiene a $x$ libre. Otra matriz es «$\exists x(Fx \vee Gy)$», pues tiene a $y$ libre. Una matriz **no** es una fórmula de nuestro lenguaje, pero sí puede ser una parte de una fórmula.

Definición 82: Lenguaje de LC1

**Predicación atómica** Si $P^n$ es un predicado de $n$ lugares (para algún número natural $n$), y tenemos $n$ constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces $P^n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es una fórmula. Cuando $n = 1$ esto se reduce a $P(a)$ y usualmente quitaremos los paréntesis: $Pa$.

**Matrices atómicas** Si $P^n$ es un predicado de $n$ lugares (para algún número natural $n$) y tenemos $n$ términos (es decir, variables o constantes), $t_1, t_2, \ldots, t_n$, entre los que se encuentra al menos una variable individual, diremos que $P^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ es una *matriz* atómica. (Estas simplemente son partes de fórmulas que tienen variables libres, y no tienen cuantificadores ni otras conectivas.) Cuando queramos resaltar una de las variables que aparecen en la matriz, utilizaremos la notación «$\Phi[x]$», que refiere a una matriz en la que $x$ aparece libre.

**Matrices moleculares** Si una o ambas de A y B son matrices, entonces A ⊃ B, A ≡ B, A ∨ B, y A & B también son matrices.

**Cuantificadores** Si $\Phi[\alpha]$ es una matriz en la que *sólo* $\alpha$ aparece libre, entonces, $\forall\alpha(\Phi[\alpha])$ y $\exists\alpha(\Phi[\alpha])$ son fórmulas. Si $\Phi[\alpha]$ es una matriz en la que $\alpha$ *y otras variables más* aparecen libres, entonces $\forall\alpha(\Phi[\alpha])$ y $\exists\alpha(\Phi[\alpha])$ son matrices.

**Fórmulas moleculares** Para cualquier fórmula A, ¬A también es una fórmula. Si A y B son fórmulas, también lo son A ⊃ B, A ≡ B, A ∨ B, y A & B. (Esto cubre tanto a los casos en que usamos conectivas proposicionales para las fórmulas donde hay predicación con constantes y sin cuantificadores, como el caso donde las conectivas conectan fórmulas con cuantificadores).

### 10.1.3. Notaciones alternativas

Aunque el uso de los simbolos «∀» y «∃» ya es muy común, en algunos textos todavía se usan símbolos distintos para los cuantificadores universales y existenciales. Veamos con ejemplos que son fácilmente generalizables.

Para cuantificaciones universales como «$\forall x(Fx)$»:

$$(x)(Fx) \qquad \bigwedge x(Fx) \qquad \Pi x(Fx)$$

Para cuantificaciones existenciales como la fórmula «$\exists x(Gx)$»:

$$(Ex)(Gx) \qquad \bigvee x(Gx) \qquad \Sigma x(Gx)$$

Aquí usaremos la notación estándar, pero es bueno tener en cuenta que otros textos podrían decir lo mismo con distintos símbolos.

## 10.2. La importancia del orden

El orden de los cuantificadores y de los **términos** (variables y constantes) es importante, pues cambiarlo puede implicar cambiar el significado de la fórmula.

Primero veamos con constantes (usando «$a$» para Ana y «$b$» para Beto). Es muy distinto decir:

$$A(a,b)$$

y decir:

$$A(b,a)$$

pues la primera dice que Ana ama a Beto, y la segunda que Beto ama a Ana. Pero, como hay amores no correspondidos, decir que alguien ama a otra persona no implica que la otra lo ame también. Así que el orden de las constantes en los predicados de relación es muy importante.

Veamos el caso de los cuantificadores. Cuando tenemos un sólo cuantificador, por ejemplo el universal, tenemos dos opciones. Primero, podemos decir que:

$$\begin{aligned} \forall x\,(A(x,b)) &= \text{Para cada } x\text{, } x \text{ ama a Beto.} \\ &= \text{Todos aman a Beto.} \\ &= \text{Beto es amado por todos.} \end{aligned} \tag{10.1}$$

Y, segundo, también podemos decir que:

$$\begin{aligned} \forall x\,(A(b,x)) &= \text{Para cada } x\text{, Beto ama a } x\text{.} \\ &= \text{Todos son amados por Beto.} \\ &= \text{Beto ama a todos.} \end{aligned} \tag{10.2}$$

Es obvio que son cosas muy distintas: mientras que la primera dice que Beto es muy querido en su grupo, la segunda dice que Beto tiene «corazón de condominio».

Sigamos con el caso de una sola variable, pero ahora ligada por un existencial (y usando a Ana en vez de a Beto). Aquí también tenemos solo dos opciones:

$$\begin{aligned}\exists x\,(A(x,a)) &= \text{Para al menos una } x\text{, } x \text{ ama a Ana.}\\ &= \text{Alguien ama a Ana.}\\ &= \text{Ana es amada por alguien.}\end{aligned} \tag{10.3}$$

$$\begin{aligned}\exists x\,(A(a,x)) &= \text{Para al menos una } x\text{, Ana ama a } x.\\ &= \text{Al menos alguien es amado por Ana.}\\ &= \text{Ana ama a alguien.}\end{aligned} \tag{10.4}$$

De nuevo tenemos dos situaciones muy distintas: en la primera, Ana tiene admiradores (bueno, al menos uno); en la segunda, Ana puede o no tener quien la ame, pero ella sí ama a alguien más.

Veamos ahora los casos cuando tenemos variables cuantificadas en cada uno de los dos lugares del predicado. Esto nos da cuatro posibilidades, que formalizan oraciones muy distintas:

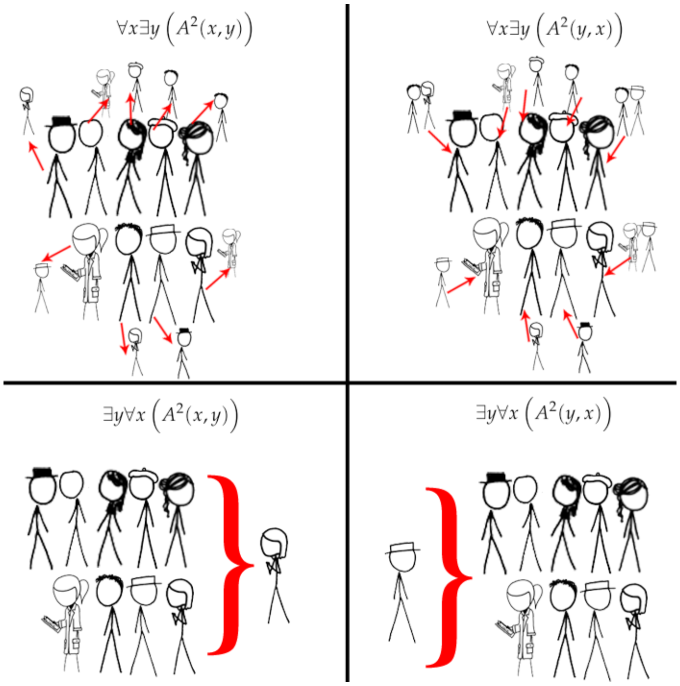
$$\begin{aligned}\forall x \exists y\,\big(A(x,y)\big) &= \text{Para cada } x\text{, hay al menos una } y \text{ tal que: } x \text{ ama a } y.\\ &= \text{Todos tienen alguien a quien aman.}\\ &= \text{Todos aman a alguien.}\end{aligned} \tag{10.5}$$

$$\begin{aligned}\forall x \exists y\,\big(A(y,x)\big) &= \text{Para cada } x\text{, hay al menos una } y \text{ tal que: } y \text{ ama a } x.\\ &= \text{Todos tienen a alguien que los ama.}\\ &= \text{Todos son amados por (al menos) alguien.}\end{aligned} \tag{10.6}$$

$$\begin{aligned}\exists y \forall x\,\big(A(x,y)\big) &= \text{Hay al menos una } y \text{ tal que, para toda } x\text{: } x \text{ ama a } y.\\ &= \text{Hay alguien tal que todos lo aman.}\\ &= \text{Alguien es amado por todos.}\end{aligned} \tag{10.7}$$

$$\begin{aligned}\exists y \forall x\,\big(A(y,x)\big) &= \text{Hay al menos una } y \text{ tal que, para toda } x\text{: } y \text{ ama a } x.\\ &= \text{Hay al menos alguien tal que para cualquiera, lo ama.}\\ &= \text{Alguien ama a todos.}\end{aligned} \tag{10.8}$$

Podríamos visualizar así a los cuatro diferentes escenarios:



Podemos ver rápidamente que estas cuatro fórmulas son distintas entre sí—ninguna es *lógicamente equivalente* con otra: ninguna *implica-y-es-implicada* por otra.

Sin embargo, algunas sí implican a (pero no son implicadas por) otras, a saber: (3.8) implica a (3.6), y (3.7) implica a (3.5), pero no viceversa. Esto es porque, si (como dice 3.8) al menos una persona ama a todas, entonces es necesario que (como dice 3.6) toda persona tiene al menos alguien que la ame (a saber: ¡esa que ama a todas!) También, si (como dice 3.7) alguien es amado por todos, entonces es necesario que (como dice 3.5) todos amen a al menos alguien (a saber: ¡ese que es amado por todos!)

Esto, de hecho, es general: cuando $\Phi$ es **cualquier** predicado (en el que no aparecen ningunas otras variables libres), la fórmula:

$$\exists y \forall x \left(\Phi(y,x)\right)$$

implica lógicamente a:

$$\forall x \exists y \left(\Phi(y,x)\right) .$$

Pero la conversa no vale: **no** es cierto que: $\forall x \exists y \left(\Phi(y,x)\right)$ implique lógicamente a: $\exists y \forall x \left(\Phi(y,x)\right)$. El *contraejemplo* podemos tomarlo de los casos que ya vimos: que cada persona tenga al menos otra que la ame *no* implica que haya alguna persona que ame a todos. De igual manera, la fórmula:

$$\exists y \forall x \left(\Phi(x,y)\right)$$

implica lógicamente a:

$$\forall x \exists y \left(\Phi(x,y)\right) ,$$

pero no viceversa (y el contrajemplo también es sencillo: que todos amen a alguna persona, *no* implica que haya una persona específica a la que todos amen).

## 10.3. Restringiendo los cuantificadores

Muchas veces, cuando decimos «todos» no queremos decir realmente *todos*. Por ejemplo, suponte que fuimos a la tiendita a comprar botanas. Después, me preguntas: *¿En dónde están las papas que compramos?* y yo te digo:

$$\text{Todo está en la mesa.} \tag{10.9}$$

Obviamente, eso **no** significa que *todo lo que existe en el universo* esté en la mesa: hablo de «todo» en un sentido restringido: de todo *lo que compramos*.

Supongamos que definimos un modelo para formalizar lo que dije. Si no uso un modelo cuyo dominio esté ya restringido a las cosas que compramos (ver arriba: sección 9.5), debo restringir los cuantificadores. Usemos un modelo irrestricto y como interpretación, definamos: $E$ es la relación de *estar en* y usamos $m$ para nombrar a mi mesa. Entonces, la formalización más **perspicua** (es decir, la que mejor refleja la forma lógica) de la oración 10.9 no es:

$$\forall x[E(x,m)], \tag{10.10}$$

que significaría «Todo —*absolutamente* todo— está en mi mesa», sino que debo introducir un predicado (de un solo lugar) para las cosas que compramos. Usando «$C$» para ello, la formalización más adecuada es:

$$\forall x\left[Cx \supset E(x,m)\right], \tag{10.11}$$

que, literalmente, reza:

$$\text{Toda cosa, si la compramos, está en mi mesa,} \tag{10.12}$$

y que es simplemente una manera algo distinta de decir lo mismo que:

$$\text{Todo lo que compramos está en mi mesa,} \tag{10.13}$$

y que sí significa lo que quería decir originalmente.

Este ejemplo muestra que la manera de restringir al cuantificador universal es usando al condicional material, «⊃». ¿Por qué?

La idea esencial es la siguiente. Cuando estoy hablando de un conjunto específico de cosas —mis amigos, las papas que compramos, etc.—, estoy hablando de las cosas *que cumplen una cierta condición*. Es decir: *no* estoy hablando de todas las cosas que *no* satisfacen esta restricción. Si hablo de lo que compramos, es obvio que hay más cosas en el universo que lo que hemos comprado —pero no estoy hablando de ellas. Estoy hablando de cualquier cosa *si es que* es una de las que compramos. Y este «*si es que*» es bien representado por el condicional material —pero no por una conjunción, un bicondicional o una disyunción. Veamos.

Supongamos que, en lugar de 10.11, usara:

$$\forall x\,[Cx \mathbin{\&} E(x, m)] \tag{10.14}$$

Eso dice algo distinto de lo que dice 10.9. Esto dice que *todo es algo que compramos y que, además, está en mi mesa.* Pero es falso que todo sea algo que compramos, y es falso que todo esté en mi mesa. Y si en lugar de la conjunción en 10.14 hubiera usado una disyunción, estaría diciendo que, todas las cosas, o las compramos o están en mi mesa. Pero eso, de nuevo, es falso (yo ni soy algo que compramos ni estoy en mi mesa).

Si hubiera usado un bicondicional (para tener «$\forall x\,[Cx \equiv E(x, m)]$»), diría también algo distinto: cualquier cosa es algo que compramos siempre y cuando esté en mi mesa: si está en mi mesa, es algo que compramos; si es algo que compramos, está en mi mesa. Pero esto *tampoco* es lo que dice 10.9: en particular, no dice que todo lo que esté en mi mesa es algo que haya comprado.

**En resumen**: decir «Todos los $A$ son $B$» debería significar que cada cosa del dominio que sea $A$, va a ser $B$. Es decir: que cada cosa que encuentres que sea $A$, esa va a ser un $B$: toda cosa, si es $A$, entonces será $B$. Y en la lógica clásica esta relación —la de un «si… entonces…»— es el condicional material.

Podemos ir por las demás conectivas diádicas clásicas que hemos definido y notar que no podrían funcionar porque no dicen lo que queríamos decir. Veamos:

- Una disyunción con el universal nos diría: «Toda cosa (en el dominio), o bien es $A$, o bien es $B$ (o ambas)».
- Una conjunción nos diría: «Todo es $A$ y además es $B$».
- Un bicondicional nos diría: «Todo lo que está en el dominio, si es $A$, también es $B$, y si es $B$, también es $A$».

Ninguna de estas tres nos dice lo mismo que «Todo (en el dominio) lo que es $A$, es $B$», lo cual nos deja solamente al condicional material, que sí nos da el significado adecuado.

Por supuesto, la restricción puede ser más específica. Supongamos que en la tienda compramos bolsas de papas y carbón para el asador, pero que quiero decir *específicamente* que *las bolsas de papas* que compramos (pero no *todo* lo que compramos: el carbón no) están en la mesa:

Las papas que compramos están en la mesa. (10.15)

Como antes, para formalizar esto, debo restringir los cuantificadores de mi fórmula. Entonces, para formalizar 10.15, definamos el predicado «$B$» para la propiedad de ser una bolsa de papas. Ahora tenemos:

$$\forall x\,[(Bx \mathbin{\&} Cx) \supset E(x, m)]\,, \tag{10.16}$$

que, leída literalmente, diría:

Toda cosa, si es una bolsa de papas y la compramos, está en mi refri. (10.17) y que simplemente es una manera «sofisticada» de decir:

Todas las papas que compramos están en mi mesa. (10.18)

Así, ahora restrinjo el cuantificador para hablar de cosas que cumplen la restricción «doble» de que la hayamos comprado y sea una bolsa de papas, y digo de *esas* cosas que están en mi mesa.

Pero, ¡cuidado!: **No siempre que haga una restricción «compuesta», está será formalizable usando una conjunción en el antecedente**. En algunos casos específicos es más adecuado usar una disyunción. Por ejemplo:

Todo lo que compramos y todo lo que trajiste está en mi mesa. (10.19)

¿Qué tan buena idea sería formalizarlo así? (usando, obviamente, «$T$» para denotar a la propiedad de ser algo que trajiste):

$$\forall x\,[(Tx \mathbin{\&} Cx) \supset E(x,m)]\,, \tag{10.20}$$

Respuesta: **no es buena idea**. Pues 10.20 dice, literalmente, que *toda cosa que hayamos comprado y que, además, hayas traído*, está en mi mesa. Pero eso no era lo que yo quería decir. Quería decir que: todo lo que compramos, *además de todo lo que trajiste*, está en mi mesa. La primera oración habla de aquéllo que satisface la condición «doble» de que lo hayamos comprado y lo hayas traído; la segunda habla de aquéllo que, *o bien* satisface la condición de que lo hayamos comprado, *o bien* satisface la condición de que lo hayas traído. Esta es la lectura correcta de 10.19, aunque la aparición de «y» puede ser inicialmente confundente. Y se formaliza:

$$\forall x\,[(Tx \;\vee\; Cx) \supset E(x,m)]\,, \tag{10.21}$$

que, *ahora sí*, dice de toda cosa que o hayamos comprado o hayas traído (o ambas) que está en mi mesa.

La diferencia entre este caso y el anterior (el de las papas que compramos, 10.18) es esta: en el primer caso, me restrinjo a hablar de **cosas de un tipo** (las que compramos) **que además son de un *sub*-tipo** (dentro de las cosas que compramos, las que sean bolsas de papas). En el segundo caso (el de lo que compramos y lo que trajiste: 10.19), hablo de, **por un lado**, todo lo que cumple una condición, y **por otro lado**, de lo que cumple otra condición —pero no presupongo que haya cosas que cumplen **ambas** condiciones (que las hayas comprado y que las trajiste).

Otra manera de ver estas diferencias es que el caso de lo que compramos y lo que trajiste sí puede formalizarse con una conjunción, pero no dentro de la restricción del cuantificador, sino una conjunción de dos oraciones cuantificadas:

$$\forall x\,[Cx \supset E(x,m)] \mathbin{\&} \forall x\,[Tx \supset E(x,m)] \tag{10.22}$$

Aquí es más claro que, por un lado, hablamos de todo lo que compramos, y por el otro, hablamos de todo lo que trajiste.

Sin embargo, es claro que esto no funciona en el caso de las restricciones «dobles» (o «triples», o etc.), como en el caso de las bolsas de papas que compramos. En ese caso, la siguiente fórmula:

$$\forall x\,[Cx \supset E(x,m)] \;\&\; \forall x\,[Bx \supset E(x,m)] \tag{10.23}$$

dice:

Todas las papas están en la mesa, y todo lo que compramos está en la mesa, (10.24)

que no es lo que quería decir con 10.19: Ni *todas* las papas están en el refri (no están las papas que se están comiendo en un bar en China, por ejemplo), ni todo lo que compramos está en la mesa (no están el carbón). Hablamos en un sentido restringido.

Cosas parecidas suceden con el cuantificador existencial. Si digo:

Alguien se tomó mi cóctel, (10.25)

claramente *no* pienso en que *alguien en el universo* se tomó mi cóctel. Regularmente al hacer este tipo de afirmaciones, tengo un dominio restringido en mente: quizá, por ejemplo, me refiero a *alguien de los que están en mi casa*. Entonces (usando $N$ para la propiedad de estar en mi casa, $T$ para la relación de *tomar a*, y $h$ como constante para mi cóctel), la formalización correcta de 10.25 sería:

$$\exists x\,(Nx \;\&\; T(x,h)) \tag{10.26}$$

¿Por qué, a diferencia de lo que sucede con el cuantificador universal, aquí usé la conjunción?

Porque, a diferencia de lo que pasa con el universal, poner un condicional para restringir un existencial **en realidad no crea ninguna restricción**. Veamos. Tomemos 10.26 y cambiemos:

$$\exists x\,(Nx \;\supset\; T(x,h)) \tag{10.27}$$

Esta fórmula dice que *hay al menos una cosa que, si está en mi casa, se tomó mi cóctel.* Sin embargo, ese enunciado es verdadero incluso debido a cosas que no están en mi casa: Leo Messi no está en mi casa, pero es verdad decir que: *Si Leo Messi está en mi casa, se tomó mi cóctel.* Esto es así porque estoy usando un condicional material, y este condicional es verdadero si su antecedente es falso. Por esa razón, usar un condicional para restringir un existencial en realidad no crea una restricción, pues la fórmula existencial (como 10.27) puede ser verdadera incluso por cosas que no cumplan con esa restricción.

Para finalizar, las restricciones para los cuantificadores en las fórmulas también pueden ocurrir cuando tengo más de un cuantificador. La idea básica es simplemente **restringir cada cuantificador con su conectiva apropiada** (los universales con «⊃» y los existenciales con «&»).

**ejemplo 35**

Supongamos que en una reunión, compramos una pizza que, afortunadamente, alcanzó para todos. Me preguntas si las rebanadas de pizza alcanzaron para todos, y te respondo que:

Todos comieron al menos una.

Obviamente, al decir «una», quiero decir *una rebanada de la pizza que compramos*. Y también, no estoy hablando de *toda persona del universo*: hablo de todas las que estuvieron en la reunión. Entonces podemos definir un modelo, con un dominio irrestricto, usando estos predicados:

- $E(\alpha)$: $\alpha$ es una persona que estuvo en la reunión.
- $R(\alpha)$: $\alpha$ es una rebanada de la pizza que compramos en la reunión.
- $C(\alpha,\beta)$: $\alpha$ se comió a $\beta$.

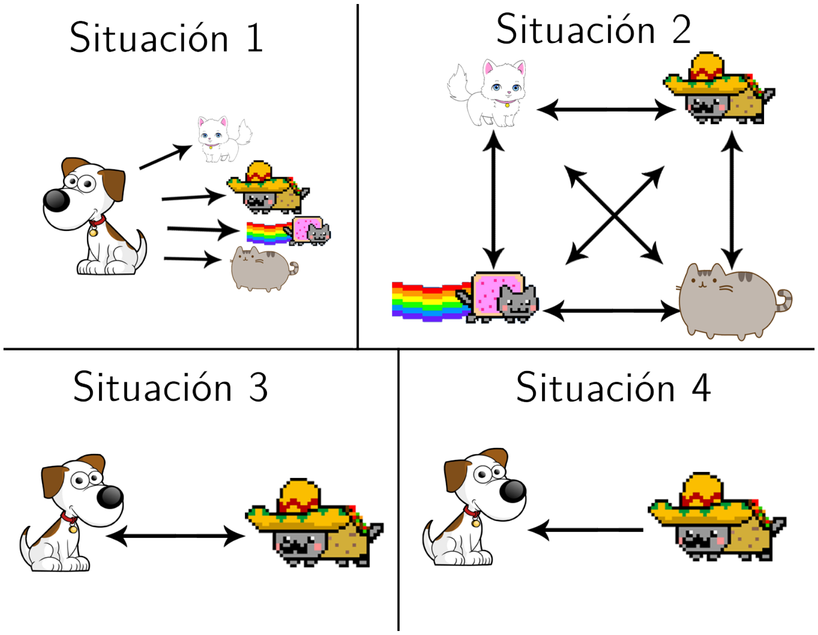
Con lo que la oración se formalizaría así:

$$\forall x \left[Ex \supset \exists y \left(Ry \mathbin{\&} C(x,y)\right)\right]$$

## Ejercicio # 44

En la siguiente imagen, cada cuadro representa una situación (modelo) distinta. En cada situación, una flecha $a \rightarrow b$ representa que $A(a,b)$. Debes imaginar que en Situación 2 cada gato tiene una flecha que parte desde sí mismo y llega a sí mismo, como en: $\overset{\curvearrowright}{a}$ (de manera que $A(a,a)$).

En cada situación (modelo) interpretaremos las fórmulas tomando como Dominio = {perro 1, gato 1, gato 2, gato 3, gato 4}, y con Interpretación: $Perro(\alpha)$: $\alpha$ es un perro. $Gato(\alpha)$: $\alpha$ es un gato. $A(\alpha,\beta)$: $\alpha$ es amigo de $\beta$, esta relación cambia en cada situación.



(I) Relaciona cada fórmula con la situación que describe, de manera que a cada fórmula le corresponda una y sólo una situación:

| | |
|---|---|
| (a) $\exists x \exists y[Perro(x) \ \& \ (Gato(y) \ \& \ A(x,y))]$ | Situación 1 |
| (b) $\exists x \exists y[Perro(x) \ \& \ (Gato(y) \ \& \ A(y,x) \ \& \ \neg A(x,y))]$ | Situación 2 |
| (c) $\exists x[Perro(x) \ \& \ \forall y(Gato(y) \supset A(x,y))]$ | Situación 3 |
| (d) $\forall x \forall y[(Gato(x) \ \& \ Gato(y)) \supset A(x,y)]$ | Situación 4 |

(II) En Situación 1, «voltea» todas las flechas: donde hay un $a \longrightarrow b$, ve un $a \longleftarrow b$. ¿Cómo formalizarías esa situación?

(III) Si en Situación 4 agregáramos una flecha sobre *perro 1* de manera que se viera así: $\overset{\curvearrowright}{\text{perro}}$ 1, ¿Qué fórmula la describiría? Escríbela.

## 10.4. Generalidad múltiple

La generalidad múltiple ocurre cuando tenemos más de un cuantificador en una proposición. Este es un ejemplo de ello, que antes mencionamos.

1. Todos los perros tienen alguna correa.
2. Todas las correas están hechas de cuero.

/∴ Todos los perros tienen alguna cosa hecha de cuero.

*Parece* que este argumento es válido. Para comprobarlo, tenemos que demostrarlo mediante los métodos lógicos que veremos después. Pero ello requiere que podamos formalizar oraciones con más de un cuantificador, que es lo que aprenderemos en esta sección.

### 10.4.1. Cuantificadores independientes

El primer tipo de caso es cuando tenemos más de un cuantificador, pero la conectiva principal es una conectiva proposicional. Por ejemplo, la proposición expresada por:

*Todos somos humanos, pero algunos somos filósofos,*

se formalizaría, usando un modelo que dejamos implícito, así:

$$\forall x(Hx) \ \& \ \exists x(Fx)$$

Como otro ejemplo, considera la siguiente fórmula:

$$\forall x(Fx) \supset \exists x(Fx)$$

Usando la misma interpretación, es claro cómo leerla:

*Si todos somos filósofos, entonces algunos somos filósofos.*

Estos casos son sencillos: sólo requieren entender qué representan las conectivas y los cuantificadores. En estos casos, los cuantificadores son *independientes* entre sí: ninguno está en el alcance de otro.

### 10.4.2. Cuantificadores en el alcance de otros cuantificadores

En otros casos, dentro del alcance del mismo cuantificador ocurren otros cuantificadores.

#### Existenciales con existenciales

Un ejemplo de esto es la proposición expresada por:

*Algunos filósofos han escrito al menos un libro*

Es importante notar que esta proposición tiene la misma forma que otras proposiciones existenciales que hemos visto antes. Al final de las cuentas, nos dice que hay algunas cosas que cumplen con dos propiedades. Entonces, su forma va a ser muy parecida a la de otras proposiciones que, aunque son más simples, también predican dos propiedades de algunas cosas, como:

*Algunos filósofos son irreverentes*: $\exists x(Fx \mathbin{\&} Ix)$

o como:

*Algunos filósofos son tranquilos*: $\exists x(Fx \mathbin{\&} Tx)$

Por ello, «*Algunos filósofos han escrito al menos un libro*» va a seguir la misma forma:

$$\exists x(Fx \mathbin{\&} \ldots),$$

donde los tres puntitos van a contener el predicado «*haber escrito al menos un libro*». Resulta que este predicado consiste en una relación: «*haber escrito*», que es una relación entre dos objetos: alguien que escribe y aquello que escribió. Y vemos que lo que relaciona, en este caso, es a alguien con *al menos un libro.* A su vez, esta última expresión es una cuantificación: «*al menos un*» es un cuantificador existencial.

Poniendo todo lo anterior junto, resulta que el predicado «*haber escrito al menos un libro*» debería formalizarse más o menos así: «$\exists y(E(x,y) \mathbin{\&} Ly)$», es decir: hay al menos una cosa, tal que $x$ la escribió, y esa cosa es un libro. ¿Quién es ese $x$? Pues la cosa que era un filósofo. Es decir, usando un modelo que dejamos implícito, la fórmula completa quedaría así:

*Algunos filósofos han escrito al menos un libro*: $\exists x \big[\ Fx \ \mathbin{\&}\ \exists y[E(x,y) \mathbin{\&} Ly]\ \big]$

Fíjate que **el segundo cuantificador debe estar en el alcance del primero**, pues el predicado incluye una relación con $x$, y variable esta no puede estar libre. Debe, entonces, estar ligada, y por ello debe estar en el alcance del cuantificador.

Vamos a leer a la fórmula por partes:

$$\underbrace{\exists x[Fx \mathbin{\&}}_{\text{Algunos son filósofos y además son tales que}} \quad \underbrace{\exists y(E(x,y)}_{\text{hay cosas que escribieron}} \quad \underbrace{\mathbin{\&} Ly}_{\text{y estas son libros}} \quad )]$$

Entonces, la lectura literal de la fórmula es: «Algunos son filósofos y además son tales que hay cosas que escribieron y estas son libros». Aunque no es la misma oración que «Algunos filósofos han escrito al menos un libro», es claro que ambas son verdaderas en todos los mismos casos y falsas en todos los mismos casos, por lo que expresan la misma proposición. Esto nos permite decir que la fórmula de arriba es una formalización perspicua. Podemos ver la razón de ello al ver que:

- «Algunos filósofos ...» = «Algunas personas que sean filósofas ...» = «Al menos una cosa que es filósofo ...»

- «han escrito al menos un libro» = «hay al menos un libro que han escrito» = «hay al menos algo que escribieron, y que es un libro»

Parecería que esto agrega muchas complicaciones, y no es claro con qué finalidad. Ahora lo voy a explicar.

### Por qué la complicación: Para evitar un error

Hay algo que podría ser «tentador» o «natural» hacer, pero que **está mal**, porque no cumple con las reglas del lenguaje de la lógica LC1. Es mejor dejar en claro por qué está mal, para que nunca lo hagas al formalizar un argumento.

Uno podría pensar que, para una proposición como *Algunos filósofos han escrito al menos un libro*, podemos formalizar, primero, la expresión «*Algunos filósofos...*», como siempre: $\exists x \left[\ Fx \ldots \right]$ y luego formalizar «han escrito al menos un libro» en el mismo orden en el que aparece en la oración, de manera que se leyera: «algunos filósofos son tales que han escrito al menos un libro», quedando así:

$$\exists x \left[\ Fx \ \& \ E[x, \exists y(Ly)]\right]$$

El error, que he puesto en rojo, es un error porque **los predicados nunca contienen fórmulas**, **sólo pueden tener constantes o variables**. Pero «$\exists y(Ly)$» es una fórmula.

Para no caer en este error es que tenemos que usar una lectura un poco más complicada, como en la subsección pasada. Es decir: como los predicados nunca tienen fórmulas, sino que sólo pueden tener constantes o variables, a las proposiciones como «*Algunos filósofos han escrito al menos un libro*» las tenemos que formalizar poniendo el segundo cuantificador *antes* de decir que estamos hablando de los libros que han escrito.

Esto mismo va a pasar en otras formas de proposiciones que también incluyen cuantificadores en el alcance de otros.

### Universales con existenciales

Cosas no muy distintas van a suceder cuando tenemos un cuantificador universal como la conectiva principal. Por ejemplo:

*Todos los filósofos han escrito al menos un libro.*

Nota que esto afirma de todas las cosas que cumplen con una propiedad —*ser filósofo*—, que también cumplen con otra: *haber escrito al menos un libro*. Es decir, al final de las cuentas, tienen la misma forma que muchas otras proposiciones que también dicen, de todas las cosas que cumplen con una propiedad, que también cumplen con otra, como «*Todos los hombres son mortales*». Y así como esta la formalizamos usando la conectiva que restringe al universal —el condicional material—, es decir (usando un modelo que dejamos implícito):

$$\forall x(Hx \supset Mx),$$

así vamos a usar al cuantificador universal y la conectiva que lo restringe para formalizar «*Todos los filósofos han escrito al menos un libro*»:

$$\forall x \left[\ Fx \ \supset \ \exists y[E(x,y) \ \& \ Ly] \ \right]$$

Si a esta otra vez la leemos por partes, quedaría así:

$$\underbrace{\forall x[Fx \supset}_{\text{Toda cosa, si es filósofo}} \quad \underbrace{\exists y(E(x,y)}_{\text{entonces habrá al menos una cosa que escribió}} \quad \underbrace{\& \ Ly}_{\text{y esta es un libro}} \quad )]$$

Y de nuevo, aunque «Toda cosa, si es filósofo, entonces habrá al menos una cosa que escribió, y esta es un libro» no es la misma oración que «Todos los filósofos han escrito al menos un libro», estas sí expresan la misma proposición, como podemos ver:

- «Todos los filósofos . . . » = «Todo el que sea filósofo . . . » = «Toda cosa, si es filósofo . . . »
- «han escrito al menos un libro» = «hay al menos un libro que ha escrito» = «hay al menos algo que escribió, y que es un libro»

Como antes, sería un **error** pensar que «Todos los filósofos han escrito al menos un libro» puede formalizarse así:

$$\forall x \left[\ Fx \supset E[x, \exists y(Ly)]\right]$$

El error, como en el caso anterior, es que los predicados nunca relacionan a cosas con fórmulas: sólo relacionan a cosas con otras cosas (constantes o variables).

### Otras combinaciones de cuantificadores

Las mismas ideas se aplican para cuando tenemos diferentes combinaciones de cuantificadores: universal con universal, existencial con universal, y negaciones de estos.

Por ejemplo, para el caso de existencial con universal, consideremos esta proposición:

*Algunos libros han sido leídos por todos*

En este caso, es claro que tenemos un cuantificador existencial: «*algunos*», y de las cosas cuantificadas se predican dos atributos: *ser libros* y *haber sido leídos por todos*. Entonces, es claro que la formalización va a ser algo como: $\exists x(Lx \ \& \ \ldots)$, donde, en lugar de los tres puntitos, vamos a tener que algo que simbolice «*haber sido leídos por todos*». Esto va a ser algo como: «$\forall y \left[D(y,x)\right]$», donde la «$x$» libre es la variable ligada por el existencial, y la relación «$D$» se interpreta (en el modelo que dejamos implícito), así: «$D(\alpha,\beta)$» significa que $\alpha$ ha leído a $\beta$.

Con todo lo anterior, quedaría esta fórmula:

$$\exists x \, \big[ \; Lx \;\; \& \;\; \forall y \, \big[ D(y,x) \big] \; \big] \, ,$$

que, leída literalmente, dice:

*Algunas cosas son libros y son tales que: todos las han leído,*

y que, como en los casos anteriores, aunque no son la misma oración, se puede ver que significan lo mismo: que expresan la misma proposición.

Otro caso consiste en las proposiciones que incluyen dos cuantificadores universales, uno en el alcance del otro. Por ejemplo, considerando un dominio de discurso en el que hablamos de todas las personas de un grupo, podríamos decir algo como:

*Todos aquí somos amigos de todos.*

Si transformamos esto mediante los métodos que ya hemos estado aprendiendo, encontraremos que:

- *Todos aquí…* = *Todos los que estamos aquí…* = *Toda cosa, si está aquí …*
- *… somos amigos de todos* = *… somos tales que, para todos, somos amigos de ellos* = *… entonces es tal que, para toda cosa, es amigo de ella.*

Por lo que «*Todos aquí somos amigos de todos*» y «*Toda cosa, si está aquí, entonces es tal que, para toda cosa, la primera es amiga de la segunda*» significan la misma proposición. Y entonces, usando el predicado «$Q$» para las cosas que están aquí y la relación de dos lugares «$A$» para relacionar a las cosas que son amigas, podemos decir que «*Todos aquí somos amigos de todos*» se formalizaría así:

$$\forall x [ \; Qx \;\; \supset \;\; \forall y [A(x,y)]]$$

Y, como en los casos anteriores, la complicación resulta de evitar poner fórmulas en donde solamente podemos poner constantes o variables.

Con los cuantificadores negados sucede básicamente lo mismo. Hablaremos más sobre la interacción con los cuantificadores y la negación en la sección 11.3.

Ahora vamos a hacer algunos ejercicios con lo aprendido hasta ahora.

**Ejercicio # 45**

① Formaliza las siguientes oraciones. Para ello, define un modelo (puede ser uno para todas o uno para cada una):

(a) Todos los libros tienen al menos un lector.
(b) Algunos han ganado todas las carreras.
(c) Todos han ganado alguna carrera.
(d) Toda carrera tiene al menos un ganador.
(e) Algunos libros contienen algunos errores.

(f) Todo libro contiene hay algún error.

(g) Algún libro contiene todos los errores.

(h) Todos los amigos de algún escritor, leen algún libro.

(i) Si todos han ganado alguna carrera, entonces, algunos han ganado toda carrera.

(j) Si algunos libros han sido leídos por todos, entonces todos han leído algún libro.

② Formaliza los siguientes argumentos. Recuerda tener en cuenta en dónde están los indicadores de premisa o de conclusión:

(a) Todo el que tenga algún yate, es rico. Esto se sigue de que: todo el que pague mucho dinero, es rico, y de que todo el que tenga algún yate, paga mucho dinero.

(b) Cualquiera que sea amigo de al menos un superhéroe, es un superhéroe. Juan es un superhéroe. Pues, además, Juan es amigo de Batman.

(c) Algunos millonarios tienen algunos yates. Por lo tanto, no todos los millonarios no tienen alguna cosa. [*donde «cosa» no es un predicado, sino solo la variable correspondiente*]

### 10.4.3. Generalidad múltiple y varias restricciones

Las proposiciones que podemos formalizar en la lógica clásica de primer orden pueden llegar a ser muy complejas, aunque la estructura «en general» sea la misma.

Como un caso de esto, consideremos a la oración: «*Todo corredor profesional tiene al menos un coche veloz*». La idea, como antes, es aplicar el mismo análisis. Al final del día, la proposición anterior, como los casos más simples que vimos antes, también afirma que todas las cosas que tienen una cualidad, también tienen otra. Pero, en este caso, la primera cualidad es compleja: tiene componentes. Esta es: *ser un corredor que es profesional*. Y la cualidad que tengan todos los que tengan esta primera cualidad, también es compleja: *tener al menos un coche que es veloz*.

Vamos por partes. Empezamos con lo obvio: que es una cuantificación universal, que afirma que todas las cosas que tienen una cualidad, también tienen otra:

$$\forall x\, [\ldots \supset \ldots]\,,$$

donde los tres puntitos de cada lado van a sustituirse por las cualidades en cuestión.

La primera es *ser un corredor profesional*, que consiste, a su vez, de dos cualidades: *ser un corredor*, por un lado, y *ser profesional*, por otro. Usando un modelo con dominio irrestricto, y con una interpretación obvia, tendríamos:

$$\forall x\, [(Cx \,\&\, Px) \supset \ldots]\,,$$

que dice, hasta ahora, que *todo corredor profesional es tal que* …

La cualidad que la proposición atribuye a todos los corredores profesionales es que tienen al menos un coche veloz. Esta cualidad, a su vez, consiste en una relación: *tener*, entre un tipo de cosas —los corredores veloces— y *al menos una* de otro tipo de cosas. Así que tenemos una cuantificación existencial: «*hay al menos…*» y esta cuantifica sobre cosas que, a su vez, tienen dos cualidades: ser coches y ser veloces. Es decir, la segunda parte debe decir que para todos y cada uno de esos corredores profesionales de los que hablamos, hay al menos un coche veloz que tienen. Debemos «voltear» así a la oración original, pues no podemos formalizar «tiene al menos un coche veloz» poniendo la relación entre la cosa que es corredor profesional y la fórmula «al menos un coche es veloz»: esto sería el mismo error que señalamos antes.

Entonces, tendríamos que «*… tienen al menos un coche veloz*» debería quedar así (usando la «o» mayúscula para el predicado de ser coche, pues ya usamos a «$C$» para *ser un corredor*): «$\exists y[(Oy \;\&\; Vy) \;\&\; T(x,y)]$», donde la «$x$» libre es la que está ligada por el cuantificador universal.

Con todo ello, formalizaríamos «*Todo corredor profesional tiene al menos un coche veloz*» así:

$$\forall x\Big[\;(Cx \,\&\, Px)\;\supset\;\exists y[(Oy \,\&\, Vy)\,\&\,T(x,y)]\;\Big]$$

Nota que, como la proposición original tiene la forma «Todos los $A$ son $B$», también la fórmula correspondiente tiene esa forma: $\forall x[A \supset B]$, solamente que «$A$» es una propiedad compleja: ser un corredor profesional, y «$B$» también: tener al menos un coche veloz.

### Ejercicio # 46

① Usando el modelo de abajo, formaliza las siguientes oraciones:

(a) Sólo los que han ganado alguna competencia justa son los mejores.

(b) Toda competencia justa tiene al menos un ganador justo.

(c) Algunas competencias justas son las mejores, pero no todas las mejores competencias son justas.

Este es el **Modelo**, con *dominio* irrestricto:

*Interpretación*: $\begin{cases} G(\alpha,\beta) : \alpha \text{ gana en } \beta & M(\alpha) : \alpha \text{ es el mejor} \\ C(\alpha) : \alpha \text{ es una competencia} & J(\alpha) : \alpha \text{ es justa} \end{cases}$

② Usando el mismo modelo, formaliza el siguiente argumento:

Ganar la competencia no te hace ser el mejor, si es que esta no es justa (*Cualquier competencia, si es injusta, no todo el que la gane es el mejor*). Sin embargo: toda competencia, si es justa, entonces sólo la ganan los mejores. Por lo tanto, para toda competencia injusta, hay quienes la ganan pero que no son los mejores, y para toda competencia justa, todos los que la ganan son los mejores.

③ Formaliza las siguientes oraciones:

(d) Algunos justos han hecho algunas acciones correctas.

(e) Sólo los justos hacen sólo acciones correctas.

(f) Las acciones bellas son justas, y viceversa; y si alguien (*cualquiera*) hace alguna acción bella, hace alguna acción justa.

Para formalizarlas, usa el siguiente **Modelo** con *dominio* irrestricto:

*Interpretación*:
$H(\alpha,\beta)$ : $\alpha$ hace $\beta$ $J(\alpha)$ : $\alpha$ es justo/a
$C(\alpha)$ : $\alpha$ es correcta $A(\alpha)$ : $\alpha$ es una acción
$B(\alpha)$ : $\alpha$ es bello/a $U(\alpha)$ : $\alpha$ es útil
$j$: Juan

④ Con el mismo modelo, formaliza el siguiente argumento:

Todo el que sólo hace acciones correctas (*todo el que toda acción que haga sea correcta*) es justo. Quien sea justo, hará algunas acciones que son bellas y útiles. Por lo tanto, quien sólo hace acciones correctas, hará algunas acciones bellas.

## Resumen del capítulo

★

## Proyecto del capítulo:

**Antecedentes** ⇢ [Este proyecto debería ser sobre formalizar argumentos del lenguaje natural: definir un modelo —con dominio e interpretación— y dar la fórmula que corresponde a cada premisa o conclusión.

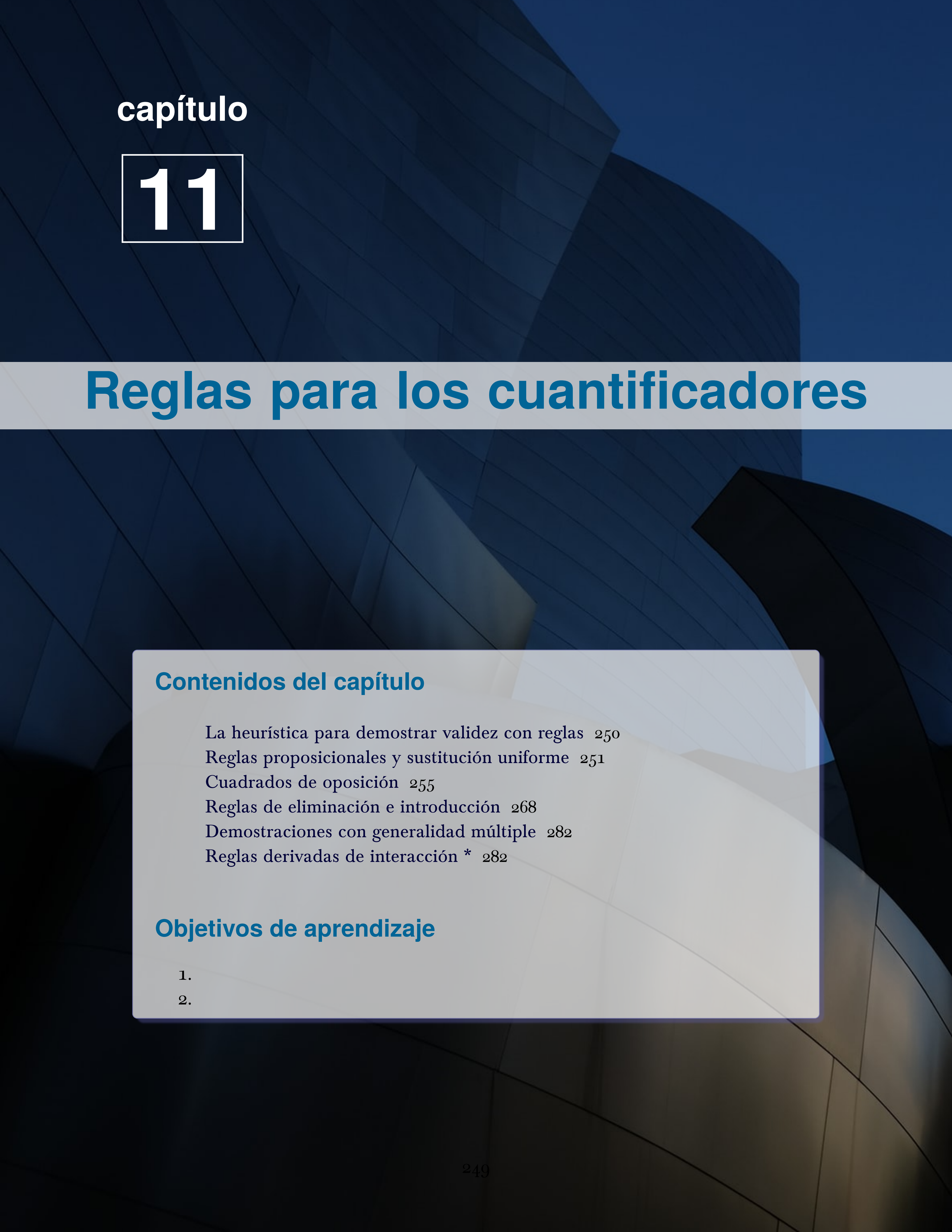
Entonces, una posibilidad podría ser buscar cinco argumentos de la literatura filosófica que se puedan formalizar, y formalizarlos. Pero debería haber otra actividad más.]

**Problema** ⇢ [Aquí describiré este proyecto.]

## Notas

1. Más adelante (en la sección 11.4) veremos que es necesario agregar dos nuevos «tipos» de constantes.

2. De hecho, me estoy saltando varios detalles técnicos que harían las definiciones más rigurosas, pero también más engorrosas. Por ejemplo, cada fórmula deberíamos encerrarla entre las «esquinas» o «comillas de Quine», que nos permiten evitar problemas de uso y mención preservando generalidad. Así, por ejemplo, la expresión $\ulcorner A \vee B \urcorner$ significa: «el resultado de concatenar la fórmula referida por $A$, la disyunción, y la fórmula referida por $B$». Otra manera en que podríamos ser completamente exactos es usando lo que se conoce como *Notación de Backus-Naur*, y que tampoco veremos aquí.



## capítulo

## 11

# Reglas para los cuantificadores

## Contenidos del capítulo

## Objetivos de aprendizaje

1.
2.

Tenemos la definición de validez usual: *Un argumento es válido siempre y cuando no exista ni un caso lógicamente posible en el que todas las premisas sean verdaderas pero la conclusión sea falsa.* En el contexto de LC1, esta definición se convierte en esta:

**Definición 83: Validez de argumentos en LC1**

Un argumento en el lenguaje de LC1 es **válido** siempre y cuando no exista ningún modelo en el que las premisas sean verdaderas, pero la conclusión sea falsa.

De manera equivalente: un argumento de LC1 es válido siempre y cuando: todo modelo en el que las premisas sean verdaderas, hará verdad también a la conclusión.

Las reglas que veremos en este capítulo son *esquemas* de argumentos válidos: cualquier argumento que sustituyamos en esos esquemas, tiene su validez garantizada.

En este capítulo vamos a revisar, primero, cómo es que las reglas de la lógica de orden cero siguen valiendo en esta lógica y, segundo, algunas reglas para los cuantificadores. De estas, unas son representadas por los *cuadrados de oposición*, de los que veremos dos (uno que llamaremos «clásico» y otro que llamaremos «moderno», y abajo explicaré sus diferencias.) Otras reglas para los cuantificadores son las de eliminación e introducción. Finalmente, veremos las reglas *derivadas*, que se conocen así porque su validez se infiere de las reglas proposicionales, las de los cuadrados de oposición, y las de eliminación e introducción de los cuantificadores.

Empezamos con una serie de consejos para hacer demostraciones con las reglas que veremos.

## 11.1. La heurística para demostrar validez con reglas

¿Cómo podemos usar las reglas de inferencia y de equivalencia para demostrar la validez de un argumento?

La idea básica es trabajar *de atrás hacia delante* (en el espíritu de lo que se conoce como «ingeniería inversa»). Empezamos analizando *el resultado* (es decir, la conclusión), y razonamos cómo es que a partir de *los puntos de partida* (de las premisas), pudimos haber llegado al resultado.

Esto usualmente significa fijarnos qué tenemos en la conclusión y buscar lo más parecido a ella en las premisas. Una vez que lo encontramos, debemos intentar aislar eso que es más parecido, eliminando todo lo que tiene a su alrededor. (Cuando lo logremos, tendremos la conclusión, o quizá sólo será necesario utilizar una regla de equivalencia para tener la conclusión.) Para producir tal aislamiento, debemos pensar cómo usar las otras premisas y las reglas que ya conozco para eliminar el material que me sobra.

**ejemplo 36**

Supongamos que tengo el siguiente argumento:

1. $Ga \supset \neg Ha$
2. $Ga$

$/ \therefore \neg Ha$

Aplicando la heurística, puedo ver que mi conclusión—es decir, «$\neg Ha$» está en la premisa 1. Sólo tengo que aislarla. Eso significa buscar en las demás premisas para ver qué regla puedo usar para eliminar el material que me sobra.

Veo que tengo la fórmula «$Ga \supset \neg Ha$» en la premisa 1, que contiene a mi conclusión. Y en mi premisa 2, tengo a la fórmula «$Ga$». Usando una eliminación del condicional, puedo eliminar el material sobrante para quedarme con la conclusión:

1. $Ga \supset \neg Ha$
2. $Ga$

$/ \therefore \neg Ha$

3. $\neg Ha$ E⊃(1, 2)

Veamos un ejemplo un poco más complicado. [**??**]

## 11.2. Reglas proposicionales y sustitución uniforme

Como vimos en la subsección 9.3.5, las fórmulas en las que hay predicación a objetos particulares también tienen estructura proposicional. Ahora que ya conocemos todo el lenguaje de LC1, podemos ver que lo mismo aplica para fórmulas cuantificadas.

Como las fórmulas de LC1 pueden tener estructura proposicional, las reglas proposicionales nos permiten usar esa estructura para hacer inferencias válidas. Para ello, necesitaremos el concepto de sustitución uniforme en una regla de LC0.

**Definición 84: Sustitución Uniforme**

Dada una regla de inferencia de la lógica proposicional (LC0), y una fórmula de la lógica cuantificacional (LC1): sustituir la fórmula en esa regla significa reemplazarla por la metavariable correspondiente en todos los lugares de la regla.

Veamos un par de ejemplos.

**ejemplo 37**

Supongamos que formalizo un argumento y me encuentro con que tiene la siguiente estructura:

1. $\forall x(Fx) \vee \exists x(Gx \vee Hx)$
2. $\neg \exists x(Gx \vee Hx) \quad \therefore \forall x(Fx)$

Después de revisar su forma, es fácil darse cuenta que tiene la estructura de un silogismo disyuntivo. **Es decir**: tiene una premisa que es una disyunción, otra premisa que niega uno de los disyuntos, y concluye el disyunto que no está negado.

Voy a usar colores para resaltar la estructura. Esta es la regla del silogismo disyuntivo:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{A} \vee \text{B}\\ \neg\text{B}\end{array}}{\text{A}}$$

Entonces, puedo usar la regla proposicional para demostrar la validez del argumento:

1. $\forall x(Fx) \vee \exists x(Gx \vee Hx)$
2. $\neg\exists x(Gx \vee Hx)$ $\quad\therefore \forall x(Fx)$
3. $\forall x(Fx)$ SD(1, 2)

Obviamente, puedo usar cualquier regla de proposicional, **siempre que tengan la misma estructura**.

Veamos otro ejemplo.

Supongamos que formalizo un argumento y me encuentro con que tiene la siguiente estructura (de nuevo, he usado colores para enfatizarla):

1. $A(b,e) \supset \exists x(Td)$
2. $\neg\ \exists x(Td) \therefore \neg A(b,e)$

Como la estructura ya se ve bien clara, es fácil ver que esto tiene la estructura de un *modus tollens*—es decir, de esta regla:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{A} \supset \text{B}\\ \neg\text{B}\end{array}}{\neg\ \text{A}}$$

Y así puedo demostrar el argumento con un solo paso:

1. $A(b,e) \supset \exists x(Td)$
2. $\neg\exists x(Td)$ $\quad\therefore \neg A(b,e)$
3. $\neg A(b,e)$ MT(1, 2)

### 11.2.1. La forma proposicional de una fórmula cuantificacional

Vamos a usar tres pasos para distinguir la forma proposicional de cada fórmula y revisar si podemos usar una regla proposicional. Ejemplificaré cada uno.

**Primero** Veo si hay una conectiva proposicional (condicional, negación, bicondicional, disyunción o conjunción) que sea la **conectiva principal** de la fórmula. Si una conectiva principal está dentro de un cuantificador (es decir, en su alcance), entonces **no** es la conectiva principal. Por ejemplo, considera estas cuatro fórmulas:

a. $Pb \supset \exists x(Tx)$ b. $\forall y(Py \supset \exists x(Tx))$
c. $\neg\exists x(Cd)$ d. $\exists x\neg(Cx)$

- La primera ($a$) tiene al condicional, «⊃», como conectiva principal.

- Pero la *b* no: su conectiva principal no es una conectiva proposicional, sino el cuantificador universal.
- En la *c*, la conectiva principal sí es proposicional: es la negación.
- Pero en la *d*, no: es el existencial.

**Segundo** Si la conectiva principal es una conectiva proposicional, eso significa que hay *subfórmulas* de la fórmula, que son las fórmulas conectadas por la conectiva proposicional. Con cada una de ellas, repito el mismo paso: veo si hay una conectiva proposicional que sea la **conectiva principal** de la forma. Si la hay, me fijo en sus sub-fórmulas y repito el mismo procedimiento. Si no, paso al siguiente paso. Por ejemplo:

a. $Pb \supset \exists x(Sx \;\&\; Tx)$ b. $\forall y[Py \supset \exists x(R(x,y))]$
c. $\neg[\forall x(Cx) \supset \exists y(Hy \;\&\; Ty)]$ d. $\neg\exists x\neg(Cx)$

- En la *a*, la conectiva principal es proposicional: el condicional. Sus dos subfórmulas son: «$Pb$» y «$\exists x(Sx \;\&\; Tx)$». De estas dos, ninguna tiene una conectiva principal que sea proposicional: la primera ya no tiene conectivas, y la segunda tiene al existencial como conectiva principal.
- En la *b*, no hay subfórmulas, pues la conectiva principal es el universal, y ni «$Py$» ni «$\exists x(R(x,y))$» son fórmulas, pues tienen una variable –la «$x$»– libre.
- En la *c* la conectiva principal sí es proposicional: la negación, y tiene una subfórmula: $\forall x(Cx) \supset \exists y(Hy \;\&\; Ty)$, a su vez, esta tiene una conectiva proposicional como conectiva principal, que une dos subfórmulas: «$\forall x(Cx)$» y «$\exists y(Hy \;\&\; Ty))$». Ninguna de estas tiene conectivas proposicionales como conectiva principal, así que no tiene subfórmulas.
- En la *d*, hay una conectiva proposicional y su única subfórmula es: $\exists x\neg(Cx)$; esta ya no tiene subfórmulas, pues su conectiva principal es un cuantificador, y «$\neg(Cx)$» no es fórmula, pues tiene una variable libre.

**Tercero** Ya que vi cuál es la forma proposicional de cada fórmula, solo resta identificar si hay alguna regla proposicional que pueda usar. Por ejemplo:

1. $\exists y(\neg Hy \lor Sy) \;\&\; \forall x(Tx \supset \neg Gx)$
2. $\forall x(Tx \supset \neg Gx) \supset \forall x(\neg Gx)$ $\therefore \forall x(\neg Gx)$

Puedo ver cuáles son las conectivas principales de cada fórmula:

- En la 1, la conectiva principal es la conjunción, y tiene dos subfórmulas: «$\exists y(\neg Hy \lor Sy)$» y «$\forall x(Tx \supset \neg Gx)$».
- En la 2, la conectiva principal es el condicional, con las dos subfórmulas: «$\forall x(Tx \supset \neg Gx)$» y «$\forall x(\neg Gx)$».
- En la conclusión no hay subfórmulas.

Habiendo distinguido la estructura proposicional de cada premisa y de la conclusión, podemos ver que tiene estructuras proposicionales que podemos usar para llegar a la conclusión. La conclusión es: «$\forall x(\neg Gx)$». Así que debo usar lo que tengo en la premisa 2 para quedarme con esa parte. Si puedo eliminar el antecedente, puedo quedarme con la conclusión. Para eliminar el antecedente, necesito tenerlo por separado para poder usar la eliminación del condicional. Esa fórmula la tengo en la línea 1, pero en conjunción. Así que primero debo eliminar esa conjunción. Por lo que utilizo la regla proposicional, que pondré en color para resaltar su estructura:

1. $\exists y(\neg Hy \vee Sy)\ \&\ \forall x(Tx \supset \neg Gx)$ A & B
2. $\forall x(Tx \supset \neg Gx) \supset \forall x(\neg Gx)$ $\therefore \forall x(\neg Gx)$
3. $\forall x(Tx \supset \neg Gx)$ E & (1) B

Pero todavía no he llegado a la conclusión. Todavía necesito eliminar el condicional, y con colores he remarcado en dónde está la estructura necesaria:

1. $\exists y(\neg Hy \vee Sy)\ \&\ \forall x(Tx \supset \neg Gx)$
2. $\forall x(Tx \supset \neg Gx) \supset \forall x(\neg Gx)$ $\therefore \forall x(\neg Gx)$ A ⊃ B
3. $\forall x(Tx \supset \neg Gx)$ E & (1)
4. $\forall x(\neg Gx)$ E⊃(2,3) B

## Ejercicio # 47

Demuestra la validez de los siguientes argumentos usando las reglas de LC0.

(I)

1. $\forall x(Fx)\ \&\ Ga$ $/ \therefore \forall x(Fx)$

(II)

1. $\forall x(Fx)\ \&\ Ga$
2. $Ga \supset Tb$ $/ \therefore Tb$

(III)

1. $\forall x(Hx) \equiv \exists y(Ty)$
2. $\neg\exists y(Ty)$ $/ \therefore \neg\forall x(Hx)$

(IV)

1. $Qb \vee \neg Pa$
2. $\neg Qb$ $/ \therefore \neg Pa$

(V)

1. $R(s,t) \vee \neg Tb$
2. $\neg R(s,t)$ $/ \therefore \neg\neg\neg Tb$

(VI)

1. $\forall x(Qx) \vee \exists y(Ty \vee Qy)$
2. $\forall x(Qx) \supset \neg Ta$
3. $\exists y(Ty \vee Qy) \supset \exists x(Mx)$ $/ \therefore \exists x(Mx) \vee \neg Ta$

Nota que, hasta ahora, no hemos visto reglas que nos digan cómo «intervenir» con con los cuantificadores. Eso es lo que haremos en el resto del capítulo.

## 11.3. Cuadrados de oposición

Los cuadrados de oposición reflejan, entre otras cosas, la relación de *dualidad* entre los cuantificadores universal y existencial. La dualidad de los cuantificadores solamente significa lo siguiente.

**Definición 85: Dualidad de los cuantificadores**

Que los cuantificadores sean duales significa que podemos definir uno en términos del otro cuantificador más la negación lógica.

Esto es claro a partir del lenguaje natural. Como hemos visto, «$\forall$» significa «*todos*» y «$\exists$» significa «*al menos uno*». Entonces, «$\neg\exists\neg$» debe significar «*no existe al menos uno que no*».

Supongamos que tomamos un modelo en el que el dominio es el conjunto de personas del salón de clases, e interpretamos a «$E$» como la propiedad de ser estudiante. Entonces, interpretada en ese modelo, la fórmula «$\neg\exists x\neg(Ex)$» significará: «*no existe al menos una persona en este salón que no sea estudiante*». Pero si no hay *ni siquiera una* persona en el salón que no sea estudiante, eso debe ser porque *toda* persona en el salón es estudiante. Es decir, «$\neg\exists x\neg(Ex)$» implica que «$\forall x(Ex)$».

Ahora consideremos la fórmula «$\forall x(Ex)$» interpretada en el mismo modelo. Preguntémonos: si, como dice la fórmula, todas las personas en el salón son estudiantes, ¿podría haber alguna que *no* fuera estudiante? Obviamente, no: si todas son estudiantes, no hay ninguna que *no* lo sea. Es decir: *no existe ni una sola* que no lo sea. Es decir: «$\neg\exists x\neg(Ex)$». Por lo que ésta implica a la universal, y tenemos la siguiente equivalencia:

$$\forall x(Ex) \equiv \neg\exists x\neg(Ex)$$

De hecho, esta equivalencia es verdad *en todo modelo*: no importa qué dominio tengamos, ni cómo interpretemos el predicado «$E$», esta equivalencia va a ser verdad: nada en el dominio es $E$, si y solamente si, no haya ni una sola cosa que no es $E$. Como veremos después (sección 15.4.4), las fórmulas que son verdaderas en *todo* modelo, son *lógicamente* verdaderas. Es decir, esta equivalencia es una *verdad lógica* de la lógica LC1.

Como no hay nada especial con el predicado $E$ (pues, como vimos, no importa cómo y en qué dominio lo interpretemos, la equivalencia seguirá siendo verdad), esto significa que los argumentos de la forma:

$$\forall x(\Phi[x]) \quad /\therefore \quad \neg\exists x\neg(\Phi[x]),$$

van a ser válidos. Y los argumentos de la forma:

$$\neg\exists x\neg(\Phi[x]) \quad /\therefore \quad \forall x(\Phi[x]),$$

también.

En general, cada cuantificador se puede definir en términos del otro y las negaciones. Básicamente, el **truco mnemotécnico** es el siguiente: un cuantificador es equivalente al otro cuando le ponemos una negación a cada lado. Voy a hacer esto oficial con una definición. Pero primero, hagamos una convención notacional.

*Convención* 8. Usaremos «A ⫤⊨ B» para decir que A y B son lógicamente equivalentes. Esta notación significa lo mismo que usar las dos rayas:

$$\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}$$

La ventaja es que nos ahorra espacio.

**Definición 86: Mnemotecnia de los cuantificadores, 1**

**Afirmar un cuantificador es equivalente a negar el otro cuantificador negando**. Es decir (usando, de manera informal, solamente los cuantificadores):

$$\forall \quad ⫤⊨ \quad \neg\exists\neg \quad \text{y} \quad \exists \quad ⫤⊨ \quad \neg\forall\neg \qquad \text{(mnemotecnia 1)}$$

No importa qué pongamos después de cada cuantificador: es irrelevante para estas equivalencias. Por ello, en esta sección vamos a seguir usando esta manera informal de hablar, donde razonaremos usando sólo los cuantificadores, aunque es obvio que nos estamos refiriendo a *cualesquiera* fórmulas del lenguaje que tengan esos cuantificadores como conectiva principal.

Con estas equivalencias, y usando la regla de doble negación ($A$ ⫤⊨ $\neg\neg A$), podemos saber qué hacer con las negaciones de los cuantificadores.

Como sabemos que: (a) ∀ ⫤⊨ ¬∃¬, y que (b) ¬¬∀ ⫤⊨ ∀, podemos sustituir el lado izquierdo de (b) en (a), para tener (c): ¬¬∀ ⫤⊨ ¬∃¬. Por otro lado, sabemos que si dos fórmulas son lógicamente equivalentes, entonces la negación de una es lógicamente equivalente a la negación de la otra.[1] Si aplicamos esto a (c), tendremos (d): ¬¬¬∀ ⫤⊨ ¬¬∃¬. Por una última aplicación de la regla de doble negación, obtenemos (e): ¬∀ ⫤⊨ ∃¬.

Este razonamiento (y uno análogo para el otro par de cuantificadores) justifica tener las siguientes equivalencias:

**Definición 87: Mnemotecnia de los cuantificadores, 2**

La negación de un cuantificador es equivalente con el otro cuantificador negando. Es decir: **la negación salta el cuantificador y lo cambia por el otro**. Es decir (usando solamente los cuantificadores):

$$\neg\forall \quad \Dashv\vDash \quad \exists\neg \quad \text{y} \quad \neg\exists \quad \Dashv\vDash \quad \forall\neg \qquad \text{(mnemotecnia 2)}$$

Estas relaciones se reflejarán en los cuadrados de oposición que veremos ahora.

### 11.3.1. Cuadrado clásico de oposición

En esta sección vamos a exponer el cuadrado «*clásico*» de oposición, al que llamamos así sólo porque no consideramos las conectivas proposicionales en la matriz que está en el alcance del cuantificador. Esto le da cierto *parecido* al cuadrado de oposición de la lógica aristotélica.[2]

Los cuadrados de oposición nos dan las relaciones lógicas entre algunos tipos básicos de fórmulas cuantificacionales: aquéllas que dicen «todo», «ninguno», «algún» y «alguno no». En particular, el cuadrado clásico no toma en cuenta las restricciones que le pongamos a los cuantificadores (de lo que hablamos arriba, en la sección 10.3), pero el moderno sí. Cuando no consideramos estas restricciones, los cuantificadores dicen: «todo lo del modelo» ($\forall$), «ninguna cosa del modelo» ($\neg\exists$), «alguna cosa del modelo» ($\exists$) y «alguna cosa del modelo no» ($\exists\neg$).

Vamos a usar algunas convenciones. La primera es la convención 7, que dice que el dominio de cada modelo que usaremos (para interpretar o formalizar) *no es vacío*. La otra es:

*Convención* 9. «$\Phi[\alpha]$» es cualquier matriz en la que «$\alpha$» es la única variable que aparece libre.

Ahora ya podemos definir el cuadrado clásico.

**Definición 88: Cuadrado Clásico de Oposición**

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\overset{\mathbf{A}}{\forall\alpha(\Phi[\alpha])} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Contrarias}"] \arrow[d, "\text{Subalternas}"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{Contradictorias}" description] & \overset{\mathbf{E}}{\forall\alpha\neg(\Phi[\alpha])} \arrow[d, "\text{Subalternas}"] \arrow[dl, leftrightarrow] \\
\overset{\mathbf{I}}{\exists\alpha(\Phi[\alpha])} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Subcontrarias}"] & \overset{\mathbf{O}}{\exists\alpha\neg(\Phi[\alpha])}
\end{tikzcd}$$

Este cuadrado incluye las siguientes relaciones:

**Contrariedad** A y E son contrarias: si una es verdadera, la otra es falsa, pero ambas pueden ser falsas.

**Subcontrariedad** I y O son subcontrarias: si una es falsa, la otra es verdadera, pero ambas pueden ser verdaderas.

**Subalternancia** I es subalterna de A, y O es subalterna de E: si la de arriba es verdadera, necesariamente la de abajo también; por lo que, si la de abajo es falsa, necesariamente la de arriba también.

**Contradictoriedad** A y O por un lado, y E y I por el otro, son **contradictorias**: si una es verdadera, la otra es falsa; si una es falsa, la otra es verdadera; una de las dos tiene que ser verdadera.

Comentaremos ahora cada una de las relaciones de este cuadrado.

### Contrariedad

En el habla cotidiana, a veces sucede que los conceptos de *contradictoriedad* y de *contrariedad* se confunden entre sí. En lógica los vamos a separar.

**Definición 89: Contrariedad**

Que dos proposiciones sean contrarias significa que no puede suceder que ambas sean verdaderas, pero sí puede suceder que ambas sean falsas. Las reglas de la contrariedad son:

$$\mathsf{A} \therefore \neg\mathsf{E} \qquad \text{(Contr)}$$

$$\mathsf{E} \therefore \neg\mathsf{A} \qquad \text{(Contr)}$$

Por ejemplo, las proposiciones expresadas por «La mesa es cuadrangular» y «La mesa es circular», son contrarias: no puede suceder que ambas sean verdaderas (suponiendo que nada puede tener dos formas geométricas al mismo tiempo), pero sí que ambas sean falsas (por ejemplo, si la mesa es triangular).

El ejemplo de las mesas no es un ejemplo de contrariedad *debida a la forma lógica*, que es lo que nos interesa aquí. La contrariedad lógica se da entre las fórmulas de la forma: $\forall$ y $\forall\neg$. Esto es porque no puede suceder al mismo tiempo que *todas* las cosas de un dominio sean de alguna manera, y *también* que *ninguna* sea de esa misma manera. (Si todos los objetos de un dominio son perros, ¡debe ser falso que ninguno es un perro!) La contrariedad lógica está expresada por las reglas de la definición 89.

### Subalternancia

Según esta relación, A implica lógicamente a I, y E a O. Estas implicaciones lógicas nos dan **reglas de los cuantificadores**: toda fórmula con la forma de I puede inferirse válidamente de la correspondiente fórmula con la forma de A, y así con E y O.

También reflejan una característica importante de los modelos: que **todos los modelos tienen dominios no vacíos**, como anunciamos con la convención 7. Como todos los dominios de los modelos contienen algún elemento, si *todos* los elementos del dominio son de una cierta manera, entonces *existe* al menos un elemento del dominio que es de esa manera.

Si fuera posible tener «dominios» vacíos, la subalternancia fallaría: es decir, sería lógicamente contingente, por lo que la «regla» sería inválida. Esto se sigue de dos hechos.

*Primero*, **para cualquier dominio vacío, decir que «todo es $F$» es verdad**. Esto es fácil de demostrarlo: como veremos abajo, decir que «todo es $F$» es lógicamente equivalente a decir que «no existe ni una cosa no sea $F$». Entonces, si fuera falso que «todo es $F$», sería verdad que «existe al menos una cosa que no es $F$». Pero, como estamos considerando sólo dominios vacíos, ahí obviamente no va a existir nada: ¡son vacíos! En particular, no existe algo que no sea $F$. Por lo tanto, en todo dominio vacío, es verdad que todo es $F$—para cualquier predicado $F$.

*Segundo*, en un dominio vacío, cualquier afirmación existencial es falsa. Para cualquier predicado $F$, es falso decir cosas de la forma: «existe algo que es $F$»; pues *no existe nada* en el dominio.

Por lo tanto, **en dominios vacíos**, para cualquier predicado $F$, es verdad decir que *todo es* $F$, pero falso decir que *existe al menos un* $F$. Esto muestra que la relación de subalternación no se da en esos dominios. Razonando de manera conversa, si la relación de subalternación es lógicamente necesaria, **es porque no estamos considerando dominios vacíos**.[3]

Vamos a definir así a esta relación, junto con las reglas correspondientes:

Definición 90: Subalternancia

Que una proposición de la forma $\exists\alpha(\Phi[\alpha])$ sea **subalterna** de otra, de la forma $\forall\alpha(\Phi[\alpha])$, significa que la universal implica a la segunda, la existencial. Las reglas de la subalternancia son:

$$\mathsf{A} \therefore \mathsf{I} \qquad \text{(Subalt)}$$

$$\mathsf{E} \therefore \mathsf{O} \qquad \text{(Subalt)}$$

### Subcontrariedad

La *subcontrariedad* se da entre las fórmulas de abajo del cuadrado de oposición: $\exists$ y $\exists\neg$. Esta relación significa:

Definición 91: Subcontrariedad

Que dos proposiciones sean subcontrarias significa que no puede suceder que ambas sean falsas, pero sí puede suceder que ambas sean verdaderas. Las reglas de la subcontrariedad son:

$$\neg\mathsf{I} \therefore \mathsf{O} \qquad \text{(Subcontr)}$$

$$\neg\mathsf{O} \therefore \mathsf{I} \qquad \text{(Subcontr)}$$

Como ejemplo, supongamos un modelo cuyo dominio son las personas en un salón de clase de posgrado. Las proposiciones expresadas por «algunos estudiamos filosofía» y «algunos no estudiamos filosofía», son subcontrarias. Ambas pueden ser verdaderas: algunos sí y algunos no. Pero *no* pueden ser ambas falsas. Esto es fácil de demostrar, basándonos en las equivalencias de los cuantificadores y en la relación de contrariedad que vimos arriba.[4]

Entonces, si sabemos que una proposición con el cuantificador «∃» es falsa, sabemos que su subcontraria *debe* ser verdadera. (Pero aunque sepamos que una es verdadera, esto no nos permite inferir que la otra no lo es.)

### Contradictoriedad

Ya arriba distinguimos contradictoriedad de contrariedad y subcontrariedad. Dijimos (def. 89) que las proposiciones contrarias no pueden ser al mismo tiempo verdaderas, pero sí al mismo tiempo falsas, y que (def. 91) las proposiciones contrarias no pueden ser al mismo tiempo falsas, pero sí al mismo tiempo verdaderas. La contradictoriedad, digamoslo así, «une» ambas propiedades.

Vamos a usar la convención 8, de manera que «$\mathsf{A} \dashv\vDash \mathsf{B}$» simplemente quiere decir que $\mathsf{A}$ y $\mathsf{B}$ son lógicamente equivalentes.

**Definición 92: Contradictoriedad**

Dos proposiciones son contradictorias siempre y cuando: si una es verdadera, la otra debe ser falsa, y si una es falsa, la otra debe ser verdadera. Las reglas de la contradictoriedad son:

$$\mathsf{A} \dashv\vDash \neg\mathsf{O} \qquad \text{(Contradict)}$$

$$\mathsf{E} \dashv\vDash \neg\mathsf{I} \qquad \text{(Contradict)}$$

En la lógica proposicional LC0 tenemos un caso claro de contradictoriedad: para toda proposición $p$, su contradictoria es su negación lógica: $\neg p$. Por supuesto, la contradictoria de $\neg p$ es su negación, $\neg\neg p$, que es lógicamente equivalente a $p$ misma. Y como es fácil ver, $p$ y su contradictoria $\neg p$ cumplen con la definición 92: si $p$ es verdadera, $\neg p$ debe ser falsa; si $p$ es falsa, $\neg p$ debe ser verdadera.

### Equivalencias

En cada una de las cuatro esquinas del cuadrado de oposición nos encontraremos con una regla de equivalencia (a las que llamaremos simplemente «Equiv», utilizando el nombre de la esquina correspondiente).

Es fácil ver porqué: gracias a que la negación es exhaustiva y exclusiva—es decir: a que tenemos dos valores de verdad, a que cada proposición tiene uno y sólo uno de estos, y a que la negación toma uno de estos valores y resulta en el otro—, la negación de la contradictoria de una proposición resulta en una proposición *lógicamente equivalente*.[5] Entonces, como cada esquina es contradictoria con la otra, **una esquina es equivalente con la negación de la otra**.

Te recomiendo que leas las dos fórmulas en cada equivalencia, para confirmar que dicen lo mismo. (Es decir, que son verdaderas en exactamente las mismas circunstancias: que una implica a la otra y viceversa.) Voy a poner el nombre de la equivalencia en cada esquina.

**Definición 93: Reglas de equivalencia del Cuadrado Clásico**

$$\forall\alpha(\Phi[\alpha]) \dashv\vDash \neg\exists\alpha\neg(\Phi[\alpha]) \tag{EquivA}$$

$$\forall\alpha\neg(\Phi[\alpha]) \dashv\vDash \neg\exists\alpha(\Phi[\alpha]) \tag{EquivE}$$

$$\exists\alpha(\Phi[\alpha]) \dashv\vDash \neg\forall\alpha\neg(\Phi[\alpha]) \tag{EquivI}$$

$$\exists\alpha\neg(\Phi[\alpha]) \dashv\vDash \neg\forall\alpha(\Phi[\alpha]) \tag{EquivO}$$

Recuerda la mnemotecnia 1 y la mnemotecnia 2: **cada cuantificador es equivalente a la negación del otro *negando*,** y **la negación de un cuantificador es equivalente a: la negación *salta* al cuantificador y lo cambia por el otro**.

### Resumen: las reglas del Cuadrado Clásico

Con el cuadrado de oposición clásico ya tenemos las primeras reglas propiamente de LC1:

**4 reglas de equivalencia** Que son las cuatro equivalencias en cada esquina, las «Equiv» de la definición 93.

**6 reglas de inferencia** Que son las reglas de subalternancia («Subalter» de la definición 90); las reglas de contrariedad («Contrar», definición 89); las reglas de subcontrariedad («Subcontra», definición 91) y las reglas de contradictoriedad, «**Contradict**» (definición 92).

**ejemplo 38**

Supongamos que me encuentro con un argumento de la siguiente forma:

1. $\forall x(Tx)$
2. $\exists x(Tx) \supset Ha \quad / \therefore Ha$

Es fácil demostrarlo con las reglas del cuadrado y las reglas proposicionales:

1. $\forall x(Tx)$
2. $\exists x(Tx) \supset Ha \quad / \therefore Ha$
3. $\exists x(Tx)$ Subalter(1)
4. $Ha$ E⊃(2, 3)

Veamos otro ejemplo. Supongamos que tengo un argumento de la siguiente forma:

1. $\neg\exists x[R(x,a)]$
2. $\forall x(Fx) \vee \exists x[R(x,a)] \quad / \therefore \exists x(Fx)$

También puedo demostrarlo con las reglas proposicionales y del cuadrado:

1. $\neg\exists x[R(x,a)]$
2. $\forall x(Fx) \lor \exists x[R(x,a)]$ $\quad / \therefore \neg\exists x\neg(Fx)$
3. $\forall x(Fx)$ SD(1, 2)
4. $\neg\exists x\neg(Fx)$ EquivA(3)

Ahora vamos a hacer ejercicios como los del ejemplo anterior.

**Ejercicio # 48**

Utilizando las reglas proposicionales (sección 11.2) y las reglas y equivalencias del cuadrado clásico de oposición de esta sección, demuestra la validez de los siguientes argumentos.

(I) 1. $\forall y(Fy)$ / $\therefore \exists y(Fy)$

(II) 1. $\exists x(Hx)$ / $\therefore \neg\forall x\neg(Hx) \lor Ga$

(III)
1. $\neg\forall x(Sx)$
2. $\exists x\neg(Sx) \supset Me$ / $\therefore Me$

(IV)
1. $\forall x\neg[R(a,x)]$
2. $Ta \supset \exists x[R(a,x)]$ / $\therefore \neg Ta$

(V)
1. $\forall x(Gx) \lor \neg\forall x(Hx)$
2. $\forall x(Hx)$ / $\therefore \exists x(Gx)$

(VI)
1. $\neg\exists z\neg[R(a,z)]$
2. $\forall z[R(a,z)] \equiv \forall z(Mz)$ / $\therefore \exists z(Mz)$

### 11.3.2. Cuadrado moderno de oposición

Cuando están restringidos, los cuantificadores dicen «toda cosa del modelo que es de tal forma, es de esta otra», «nada del modelo que es de tal forma, es de esta otra», «alguna cosa lo del modelo que es de tal forma, es de esta otra», y «alguna cosa del modelo que es de tal forma, no es de esta otra».

Si tomamos en cuenta las restricciones de los cuantificadores, aparecen algunas relaciones lógicas entre fórmulas con esa forma. Podemos resumir esas relaciones de manera muy conveniente en otro cuadrado de oposición. A este le vamos a llamar «cuadrado *moderno*», para diferenciarlo del clásico, en el que ignoramos la restricción de los cuantificadores.

Como con el cuadrado clásico, vamos a usar algunas convenciones. Seguiremos usando la convención 6, según la cual «$\alpha$» es una *meta*variable: representa cualquiera de las variables del lenguaje lógico ($x, y, z, \ldots$). Y, extendiendo un poco la convención 9 usaremos «$\Phi[\alpha]$» y «$\Psi[\alpha]$» para denotar a partes de fórmulas que tienen libre a esa variable.[6] Por ejemplo, «$\forall x\,(Fx \supset Gx)$» es un caso del esquema $\forall\alpha\,(\Phi[\alpha] \supset \Psi[\alpha])$, sustituyendo la variable «$x$» por $\alpha$. Otro caso de ese esquema es $\forall z[(Hx \lor \neg Tz) \supset (Fz\ \&\ \neg Gz)$, pues sustuimos «$z$» por $\alpha$, «$(Hx \lor \neg Tz)$» por $\Phi[\alpha]$, y «$(Fz\ \&\ \neg Gz)$» por $\Psi[\alpha]$.

Habiendo hecho estas convenciones para denotar esquemas, ahora definimos el cuadrado moderno.

**Definición 94: Cuadrado Moderno de Oposición**

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\textbf{A}\\ \forall\alpha(\Phi[\alpha]\supset\Psi[\alpha])\end{array} & & \begin{array}{c}\textbf{E}\\ \forall\alpha(\Phi[\alpha]\supset\neg\Psi[\alpha])\end{array} \\
 & \text{Contradictorias} \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\begin{array}{c}\textbf{I}\\ \exists\alpha(\Phi[\alpha]\,\&\,\Psi[\alpha])\end{array} & & \begin{array}{c}\textbf{O}\\ \exists\alpha(\Phi[\alpha]\,\&\,\neg\Psi[\alpha])\end{array}
\end{tikzcd}$$

En este caso, se pierden casi todas las relaciones lógicas: sólo se preservan las relaciones de contradictoriedad:

- A y E ya **no** son contrarias: ambas pueden ser verdaderas, si no hay Φs en el dominio (en ese caso, será verdad que todo Φ es Ψ, y también que todo Φ es no-Ψ); y ambas pueden ser falsas, haya o no Φs en el dominio.
- I y O ya **no** son subcontrarias: ambas pueden ser falsas si no hay Ψs en el dominio, o si no hay Φs (o si no hay ni Ψs ni Φs). Ambas pueden ser verdaderas también (si hay algunos Φs que son Ψ's y otros Φs que no son Ψs).
- Ya **no** hay subalternancia de I con A ni de O con E: de que A (o en su caso, E) sea verdadera, no se sigue que I (o, en su caso, O) lo sea; esto falla cuando no hay Φ's en el dominio.
- A y O por un lado, y E y I por el otro, **sí** siguen siendo **contradictorias**: si una es verdadera, la otra es falsa; si una es falsa, la otra es verdadera; una de las dos tiene que ser verdadera.

**ejemplo 39**

Considera la proposición de que *todos los círculos cuadrados son rojos*. Usando un modelo y una interpretación obvias, la formalizaríamos como: $\forall x(Cx \supset Rx)$.
Ahora bien, es claro que no existen los círculos cuadrados (¡son auto-contradictorios!). Eso implica que, si vamos revisando *cada uno* de los objetos del dominio de nuestro modelo, nunca vamos a encontrar uno que sea círculo cuadrado: nunca vamos a encontrar un objeto que cumpla con la propiedad de ser $C$.
Antes de seguir, recordemos la tabla de verdad del condicional material:

| A | ⊃ | B |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **F** |

Como vemos en las últimas dos filas (que he remarcado con azul), cuando el antecedente de un condicional material es falso, el condicional material es falso también. ¡No importa qué pase con el consecuente! Ya sea que el consecuente sea falso o verdadero, el condicional material es verdadero cuando su antecedente es falso.

Pongamos todo junto. La fórmula «$\forall x(Cx \supset Rx)$» me dice que todos los círculos cuadrados son rojos. Pero sé que nada es un círculo cuadrado: que nada es $C$. Entonces, sé que si voy revisando cada cosa del dominio, va a ser verdad que: si esa cosa es $C$ entonces esa cosa es $R$. Esto es verdad por la tabla de verdad del condicional: como nada es $C$, el antecedente siempre es falso. Pero como sucede que, para cada cosa del dominio es verdad que: si esa cosa es $C$ entonces esa cosa es $R$, entonces, es verdad que $\forall x(Cx \supset Rx)$. Esto se conoce como **verdad por vacuidad**.

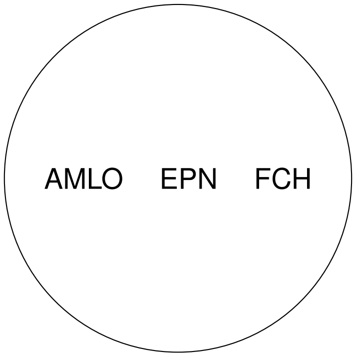
Pero resulta que *también* es verdadero decir que todo círculo cuadrado **no** es rojo. Es decir, también es verdad que $\forall x(Cx \supset \neg Rx)$. Y la razón de esto es muy parecida a la anterior: como sé que nada es un círculo cuadrado (que nada es $C$), entonces sé que si voy revisando cada cosa del dominio, va a ser verdad que: si esa cosa es $C$ entonces esa cosa es $\neg R$. Esto es verdad por la tabla de verdad del condicional: como nada es $C$, el antecedente siempre es falso, y por lo tanto, el condicional siempre es verdadero. Como esto sucede para todo objeto del dominio, entonces, es verdad que $\forall x(Cx \supset \neg Rx)$. Otra verdad por vacuidad.

«Verdad por vacuidad», como vimos, significa que una oración es verdadera debido a que no existen las cosas de las que habla. Como no hay círculos cuadrados, no hay cosas que sean círculos cuadrados *y* no sean rojas. Por lo tanto, no va a haber **contraejemplos** (casos contrarios) a la oración universal. Por la misma razón, no hay cosas que sean círculos cuadrados *y* que sean rojas. Esto significa que nada va a hacer falso que todo lo que sea círculo cuadrado *no* es rojo. Estos son los dos casos de verdad por vacuidad.

Pero la verdad por vacuidad se puede dar también en casos en los que tenemos dominios restringidos. Veamos un ejemplo de esto.

**jemplo 4**

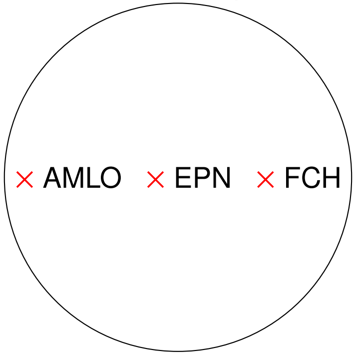
Consideremos un modelo cuyo dominio es el conjunto que sólo contiene a los últimos tres presidentes de México (hasta 2019). Es decir, el conjunto va a contener a AMLO, a EPN, y a FCH, pero sólo a estos tres objetos. Podemos usar el siguiente diagrama:



Ahora consideremos la oración «todo volcán está activo». Para formalizarla, vamos a suponer que, en la interpretación de nuestro modelo, tenemos:

- $V\alpha$: $\alpha$ es un volcán
- $A\alpha$: $\alpha$ está activo

Muy bien. Si ahora revisamos cada objeto en el dominio para ver si es un volcán de manera que, si no lo es, ponemos un tache, «×», a su lado, y si lo es, ponemos una palomita, «✓», a su lado, vamos a encontrar que:



¡Ninguna de las tres cosas en nuestro dominio es un volcán! Eso significa que la oración «$\forall x(Vx \supset Ax)$», que bajo la interpretación en este modelo nos dice que *todos los volcanes son activos*, va a ser verdadera por vacuidad: como *nada* en nuestro dominio es un volcán, entonces, nada va a ser un volcán que no esté activo. Un razonamiento parecido muestra que la oración «$\forall x(Vx \supset \neg Ax)$» también es verdadera por vacuidad.

Por supuesto, ¡*hay* volcanes! Lo que sucede en este ejemplo es que estamos tomando un modeo cuyo dominio está muy restringido: se restringe a tres objetos, ninguno de los cuales es un volcán. Este es un ejemplo de cómo la verdad por vacuidad también puede suceder cuando hablamos cosas que sí existen, pero que *no* existen en el dominio del modelo.

Aunque se pierden casi todas las relaciones lógicas —sólo se preserva la contradictoriedad— en el cuadrado moderno también existen equivalencias de las fórmulas cuantificacionales.

**Definición 95: Equivalencias del cuadrado moderno de oposición**

EquivA

$$\frac{\forall\alpha\,(\Phi[\alpha] \supset \Psi[\alpha])}{\neg\exists\alpha\,(\Phi[\alpha]\ \&\ \neg\Psi[\alpha])}$$

EquivE

$$\frac{\forall\alpha\,(\Phi[\alpha] \supset \neg\Psi[\alpha])}{\neg\exists\alpha\,(\Phi[\alpha]\ \&\ \Psi[\alpha])}$$

EquivI

$$\frac{\exists\alpha\,(\Phi[\alpha]\ \&\ \Psi[\alpha])}{\neg\forall\alpha\,(\Phi[\alpha] \supset \neg\Psi[\alpha])}$$

EquivO

$$\frac{\exists\alpha\,(\Phi[\alpha]\ \&\ \neg\Psi[\alpha])}{\neg\forall\alpha\,(\Phi[\alpha] \supset \Psi[\alpha])}$$

El cuadrado moderno de oposición nos muestra, entonces, las siguientes reglas válidas:

**4 reglas de equivalencia** Que son las que están en cada una de las cuatro esquinas en la definición 95.

**4 reglas de inferencia** Que son las que dan las esquinas contradictorias:

$$\text{A} \therefore \neg\text{O}; \qquad \text{O} \therefore \neg\text{A}$$

y:

$$\text{E} \therefore \neg\text{I}; \qquad \text{I} \therefore \neg\text{E}$$

**Ejercicio # 49**

1. Asumiendo cualquier modelo que tenga como dominio al conjunto de las personas, da fórmulas de LC1 que correspondan a (es decir, que se interpreten como) las afirmaciones que se te piden.
   *a*) Supongamos que te digo que *no todos somos marxistas*. Da una afirmación equivalente.
   *b*) Si te digo que *algunos no somos platónicos*, una de las afirmaciones que se sigue de esto es que . . .
   *c*) Supongamos que te dijera: «*No hay un solo ingeniero*». Otra manera de decir esto es que: *todos* . . .
   *d*) *Todos somos aristotélicos*. Es decir . . .
2. Usando las reglas proposicionales y las de los cuadrados de oposición, demuestra la validez de los siguientes argumentos.
   *a*) 1) $\forall x(Fx) \supset \exists x(Hxa)$

2) $\neg\exists x\neg(\neg\neg Fx)$ $/\therefore \exists x(Hxa)$

*b*) 1) $\neg\exists x(Hx \vee Gx)$

2) $\neg\exists x(Mx) \supset \neg\forall x\neg(Hx \vee Gx)$ $/\therefore \neg\forall x\neg(Mx)$

*c*) 1) $R(a,b)\ \&\ Ha$

2) $\forall x\neg(Fx) \equiv \neg Ha$ $/\therefore \exists x(Fx)$

*d*) 1) $\exists x(Fx) \vee \forall x(Gx)$

2) $\neg\exists x\neg(Gx) \supset \neg\neg\exists x(Fx)$ $/\therefore \neg\forall x\neg(Fx)$

## 11.4. Reglas de eliminación e introducción

Los dos tipos de reglas para los cuantificadores que veremos ahora son las reglas de **introducción** y las de **eliminación**. Vamos a recordar estos conceptos, que aprendimos con LC0.

**Regla de introducción de una conectiva** Un esquema de argumento válido en el que las premisas no necesariamente tienen a la conectiva como conectiva principal, pero en la que la conclusión sí la tiene. (Como ejemplo, considera a la regla de introducción de la disyunción: A ∴ A ∨ B.)

**Regla de eliminación de una conectiva** Un esquema de argumento válido en el que al menos una de las premisas tiene a la conectiva como conectiva principal, pero la conclusión ya no necesariamente la tiene. (Un ejemplo es la eliminación de la conjunción: A & B ∴ A.)

Para enunciar las reglas, necesitaremos algunas convenciones:

*Convención* 10. Usaremos $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ como variables de variables o *metavariables.* (Es decir, $\alpha$ puede ser $x$, $y$, $z$ u otras; lo mismo para $\beta$ y $\gamma$.)

*Convención* 11. Usaremos $\kappa$ como una *variable para constantes* (de manera que puede representar a $a$, $b$, $c$, $d$, etc.)

*Convención* 12. Usaremos $\Phi[\alpha]$ como una matriz en la que la única variable libre es $\alpha$ (por ejemplo, si $\alpha$ es «$x$», tendríamos como ejemplos a: $Fx$, $R(c,b,x)$, $R(c,b,y)$; si $\alpha$ es «$y$», un ejemplo es: $R(c,b,y)$, otro ejemplo es: $\forall x[G(x,y)]$).

*Convención* 13. Usaremos $\Phi[\kappa]$ como una fórmula o matriz en la que aparece la constante $\kappa$. (Si $\kappa$ es «$a$», por ejemplo, un caso de $\Phi[\kappa]$ podría ser: $Ha \vee G(b,c)$, o también, $G(x,a)$).

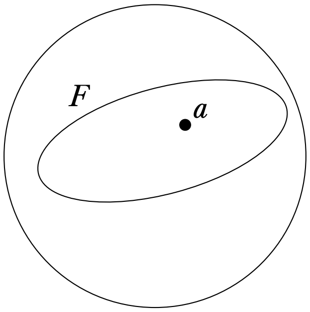
Veamos ahora la primera regla.

### Introducción del existencial: «I∃»

La primera regla es la eliminación del cuantificador existencial. Nos dice que lo siguiente es una inferencia válida: si una afirmación es verdadera para una cosa particular, $\kappa$, del dominio, entonces es verdad para *alguna* cosa del dominio. Veamos un ejemplo.

**ejemplo 41**

Supongamos que tenemos como premisa que «$Fa$». Esta premisa es verdadera en todo modelo cuyo dominio se vea así:



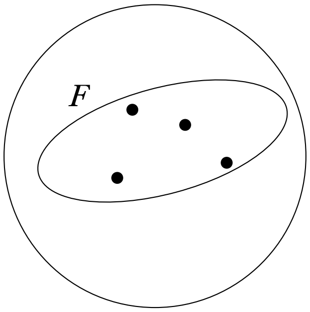
Este diagrama representa al dominio como el círculo que contiene a lo demás; representa, también, que tenemos una interpretación bajo la cual el predicado «$F$» es la elipse debajo de la letra «$F$», que hay al menos un objeto (el puntito) dentro de la interpretación de «$F$», y que ese objeto se llama «$a$» (es decir, bajo esa interpretación, «$a$» refiere a ese objeto).

Cuando tenemos situaciones como estas, es obvio que va a ser verdad que hay al menos una cosa que es $F$. Es decir, va a ser verdad que:

$$\exists x(Fx)$$

Lo sabemos porque hay al menos un objeto que es $F$: a saber, $a$.

No hace falta que haya *exactamente* una cosa que es $F$. El existencial significa «al menos una», por lo que, si hay más de una cosa que es $F$, la fórmula también va a ser verdadera. Por ejemplo, si la situación se ve, más bien, así:



. . . la fórmula también es verdadera.

Lo mismo vale para relaciones: en todo modelo, el que haya una cosa particular que esté en una relación con otra(s) cosa(s), basta para que sea verdad que *algo* está en esa relación con esas cosas.

**ejemplo 42**

Si sé que Ana es hermana de Beto, sé que *alguien* es hermana/o de Beto. Usando una interpretación obvia en un dominio que incluye a Ana y a Beto, esto significa que la fórmula:

$$H(a,b)$$

implica lógicamente a la fórmula:

$$\exists x H(x,b)$$

Por la misma regla, si sé que Ana es hermana de Beto, sé que Ana es hermana de *alguien*. Por lo tanto,

$$H(a,b)$$

también implica lógicamente a la fórmula:

$$\exists x H(a,x)$$

Defino ahora la regla.

**Definición 96: Introducción del cuantificador existencial**

$$\frac{\Phi[\kappa]}{\exists\alpha(\Phi[\alpha])} \quad \text{I}\exists$$

Notemos que la introducción del existencial vale para cualquier tipo de constante que tengamos: normal, y las que veremos abajo: «con gorrito» y «ficticia» o con asterisco.

En los ejemplos anteriores, nota algo importante: al introducir el existencial, **siempre** lo introduzco ligando a la variable que introduzco para sustituir a la constante que estoy generalizando. Voy a explicar esto ahora.

### Sustitución uniforme

En I∃ y en todas las reglas, es importante tener en mente que debemos utilizar una **sustitución uniforme**. Esto significa que (en el caso de I∃), debo siempre sustituir *todas* las apariciones de la constante que estoy generalizando con la variable ligada con el cuantificador; pero **no** se vale usar las demás constantes de la fórmula (si es que las hay). Esto es más claro con los ejemplos que ahora explicaré.

A partir de la fórmula $R(a,b)$, puedo utilizar I∃ para inferir:

$$\exists x(R(x,b)) \tag{SU1}$$

Pero **no** puedo—pues es lógicamente inválido—utilizar I$\exists$ para inferir:

$$\exists x(R(x,x)). \tag{SU2}$$

**Misma constante**, **misma variable**; **distinta constante**, **distinta variable**. Si quiero generalizar $b$ en SU1, sí puedo aplicar una segunda vez I$\exists$ a SU1, para inferir:

$$\exists y \exists x(R(x,y)). \tag{SU3}$$

También podría haber empezado generalizando $b$:

$$\exists x(R(a,x)) \tag{SU4}$$

Y, como antes, podría dejarlo aquí o aplicar de nuevo I$\exists$ para generalizar $a$. De nuevo: lo que no se vale es generalizar dos constantes (¡o más!) al mismo tiempo.

A partir de una fórmula molecular como $Fa \vee Fb$, puedo también aplicar I$\exists$ y obtener:

$$\exists x(Fa \vee Fx) \tag{SU5}$$

o también:

$$\exists x(Fx \vee Fb) \tag{SU6}$$

Pero lo que **no** puedo hacer es este horror:

$$\exists x(Fx \vee Fx) \tag{SU7}$$

pues empecé con dos constantes distintas. Claro, una vez teniendo SU5, puedo aplicar I$\exists$ de nuevo y terminar con:

$$\exists y \exists x(Fy \vee Fx) \tag{SU8}$$

Así como, teniendo SU6, puedo aplicar I$\exists$ de nuevo y terminar con:

$$\exists y \exists x(Fx \vee Fy) \tag{SU9}$$

Entonces, hay que notar que el orden en que aplique la regla puede influir en si termino con una fórmula como SU8 o como SU9, ¡que ciertamente son fórmulas muy distintas!

## Ejercicio # 50

1. Usando la regla I∃ y las reglas proposicionales, demuestra la validez de los siguientes argumentos.
    a) 1) $Na$ / ∴ $\exists y(Ny)$
    b) 1) $Pa \vee Qd$
       2) $\exists x(Px \vee Qd) \supset Qa$ / ∴ $Qa$
    c) 1) $\exists y(\neg My) \equiv Sb$
       2) $\neg Ma$ / ∴ $Sb$
    d) 1) $Qa$ / ∴ $\exists x(Qx)$ & $Qa$
    e) 1) $Tb \supset \neg[\exists x(Px)$ & $\exists y(Py)]$
       2) $Pa$ / ∴ $\neg Tb$
2. Usando la regla I∃ *además* de las reglas proposicionales y de los cuadrados de oposición clásico y moderno, demuestra la validez de los siguientes argumentos.
    a) 1) $Qa$
       2) $U(d,e,a) \vee \neg\exists x(Qx)$ / ∴ $U(d,e,a)$
    b) 1) $\exists x[U(d,x,a)] \supset \neg\forall x(Qx)$
       2) $U(d,c,a)$ / ∴ $\exists x\neg(Qx)$
    c) 1) $\neg\forall x\neg[T(x,d,x)] \equiv R(a,d)$
       2) $T(g,d,g)$ / ∴ $R(a,d)$
    d) 1) $T(g,d,g)$ & $R(a,b)$
       2) $\exists y\exists x[T(x,y,x)] \equiv \neg\exists x\neg(Fx)$ / ∴ $\forall x(Fx)$
    e) 1) $\neg(Pa$ & $Qa)$
       2) $[\neg\forall x(Px$ & $Qx)] \supset R(a,c)$ / ∴ $\exists x[R(a,x)]$

### Eliminación del universal: «E∀»

Esta regla nos dice que, de una afirmación universal, podemos inferir válidamente que esa afirmación es verdadera para cualquier cosa particular. La idea es que si algo es verdad de *cada cosa* en el dominio, va a ser verdad de *una cosa particular* del dominio. Voy a poner la regla y después explicaré su significado formal.

**Definición 97: Eliminación del Cuantificador Universal**

$$\frac{\forall\alpha(\Phi[\alpha])}{\Phi[\kappa]} \quad \text{E}\forall$$

$$\frac{\forall\alpha(\Phi[\alpha])}{\Phi[\hat{\kappa}]} \quad \text{E}\forall$$

Como vimos en las convenciones antes de introducir las reglas, $\kappa$ representa a cualquier constante. Por lo que la regla E∀ me dice que si $\Phi$ es verdad para cada cosa $\alpha$ del dominio, lo será también para una cosa particular $\kappa$.

Pero en la definición también usé otro tipo de constante: «$\hat{\kappa}$». Llamaremos «**constante con gorrito**» a este tipo de constantes que ahora estoy introduciendo al lenguaje.[7] La regla me dice que, de una afirmación universal, también puedo inferir que la afirmación es verdad para una constante con gorrito.

Las constantes «normales» –las que hemos venido usando, del tipo de $a$, $b$, $c$, etcétera– se refieren (suponiendo una interpretación) cada una a una cosa particular del dominio: funcionan como nombres propios. Así, en un modelo, «$a$» puede referirse a Stan Lee; sería el «nombre propio» de Stan Lee en ese modelo. En otro modelo (cambiando la interpretación), «$a$» podría referirse al planeta Tierra. Pero siempre se refiere a alguna cosa particular.

Pero las constantes con gorrito se refieren a una cosa particular *y a todas las demás*. Entonces, podemos leer una constante con gorrito, $\hat{a}$, así: «*a y todas las demás cosas*». Por lo que leeríamos la fórmula «$F\hat{a}$» como: «*Efe de a y de todas las demás cosas*».

Puede parecer un truco extraño—¡y lo es! Pero (1) no rompe ninguna regla y (2) necesitamos hacer algo así para poder definir una regla razonable de introducción del cuantificador universal (como veremos después de unos ejercicios). La idea es que voy a eliminar un cuantificador universal con una constante con gorrito **siempre que necesite volver a un universal**.

Vamos a hacer unos ejercicios y después veremos más sobre la importancia de este nuevo tipo de constantes.

**Ejercicio # 51**

1. Usando la regla E∀ y las de la lógica proposicional, demuestra la validez de los siguientes argumentos.
    - *a*) 1) $\forall y(Hy)$ / $\therefore$ $Hb$
    - *b*) 1) $\forall x(Hx)$
      2) $Ta \vee \neg Hb$ / $\therefore$ $Ta$
    - *c*) 1) $Ga \equiv R(a,c)$
      2) $\forall x[R(a,x)]$ / $\therefore$ $Ga$
    - *d*) 1) $Qd \supset (Td \vee Hd)$
      2) $\forall x(Qx)$
      3) $\neg Hd$ / $\therefore$ $Td$
    - *e*) 1) $Fa$
      2) $(Fa \vee Ma) \supset \forall x(Gx)$ / $\therefore$ $G\hat{a}$
2. Usando las reglas E∀, I∃, y las de lógica proposicional, demuestra las siguientes tres inferencias:

- *a*)
  1) $\forall x\neg(Qx)$
  2) $\neg Qa \supset \forall x(Rax) \quad /\therefore \neg\neg\forall x(Rax)$
- *b*)
  1) $Fb \mathbin{\&} Sa$
  2) $\exists x(Fx) \supset \forall x(Qx) \quad /\therefore Qb$
- *c*)
  1) $\exists x(\neg Qx \mathbin{\&} Wx) \equiv \forall x(Gx)$
  2) $\neg Qa \mathbin{\&} Wa \quad /\therefore Ga$

3. Usando las reglas E∀, I∃, las de los cuadrados de oposición, y las de lógica proposicional, demuestra las siguientes cinco inferencias:
   - *a*)
     1) $\neg\exists x\neg(Qx)$
     2) $Qa \supset Ta \quad /\therefore Ta$
   - *b*)
     1) $\neg\exists y(Py \mathbin{\&} Hy)$
     2) $\forall y(\neg Hy \vee \neg Py) \equiv \forall x(Qx) \quad /\therefore Qa$
   - *c*)
     1) $\exists y(Py \mathbin{\&} \neg Qy)$
     2) $Ta \supset \forall y(Py \supset Qy) \quad /\therefore \neg Ta$
   - *d*)
     1) $Qa$
     2) $\forall x[R(x,b) \equiv Qx] \quad /\therefore R(a,b)$
   - *e*)
     1) $[\forall x(Ax \supset \neg Bx)] \equiv [\forall y(Qy)]$
     2) $\neg\exists y\neg(Qy) \quad /\therefore \neg\exists x(Ax \mathbin{\&} Bx)$

### Introducción del universal: «I∀»

Evidentemente, inferir que *todos son F* a partir de que *Juanito es F*, es inválido: hay muchos modelos en los que Juanito es $F$ sin que todos lo sean. Entonces, sería desastroso proponer algo así como regla I∀:

$$\Phi(\kappa)\ \therefore\ \forall\alpha(\Phi\alpha)$$

Y sería desastroso porque, como en el caso de Juanito, de que *alguna cosa particular* tenga una cualidad, no se sigue que *toda cosa* del dominio también tenga esa cualidad.

Así que necesitamos una manera de «codificar» a todas las cosas del dominio en una constante. Ese es precisamente el papel de las constantes con gorrito, que vienen a salvarnos el día.

Como vimos arriba (sec. 11.4), una **constante con gorrito** es una constante como las que hemos usado: $a, b, c \dots$, pero con su correspondiente gorrito: $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \dots$ Estas significan, respectivamente: «$a$ y todas las demás cosas del dominio», «$b$ y todas las demás cosas del dominio», «$c$ y todas las demás cosas del dominio», y así sucesivamente.

Pero por esa misma razón—porque las constantes con gorrito «codifican» a todas las cosas del dominio—las fórmulas que tienen constantes con gorrito **sólo pueden inferirse de fórmulas que tienen cuantificadores universales**. No podemos introducir constantes con gorrito de otra forma, más que sacándolas de cuantificadores universales. Y como las constantes con gorrito vienen de cuantificadores universales, eso nos permite trabajar con ellas y volver a introducir cuantificadores universales de manera lógicamente válida.

Esta es la regla:

**Definición 98: Introducción del Cuantificador Universal**

$$\frac{\Phi[\hat{\kappa}]}{\forall\alpha(\Phi[\alpha])} \qquad \textcircled{\text{I}\forall}$$

donde $\hat{\kappa}$ es una constante «con gorrito» que se obtiene de una previa aplicación de la regla 97.

Nuestra regla es válida: es válido inferir que *toda cosa del dominio es* $F$, a partir de que $a$ *y todas las demás cosas del dominio* son $F$.

Ahora vamos a ver un par de ejemplos de cómo usar esta regla.

**ejemplo 43**

Si tengo como premisa que *todos los seres humanos somos mortales*, y que, además, *todos los filósofos somos seres humanos*, eso debería implicar que *todos los filósofos somos seres humanos*. (Este es un caso de la figura *BARBARA* de la silogística aristotélica.) Usando un modelo que dejaremos implícito, la formalización de este argumento es:

1. $\forall x(Sx \supset Mx)$
2. $\forall x(Fx \supset Sx)$ / $\therefore \forall x(Fx \supset Mx)$

Y podemos demostrar su validez usando la regla de silogismo hipotético de LC0 y las reglas de eliminación e introducción del cuantificador universal:

1. $\forall x(Sx \supset Mx)$
2. $\forall x(Fx \supset Sx)$ / $\therefore \forall x(Fx \supset Mx)$
3. $(S\hat{a} \supset M\hat{a})$ E∀(1)
4. $(F\hat{a} \supset S\hat{a})$ E∀(2)
5. $(F\hat{a} \supset M\hat{a})$ S.D.(3,4)
6. $\forall x(Fx \supset Mx)$ I∀(5)

En el ejemplo anterior, fíjate qué importante es usar la misma constante con gorrito para poder aplicar las reglas: si hubiera utilizado una constante distinta para eliminar el universal en las líneas 3 y 4, no podría haber hecho el silogismo disyuntivo de la línea 5.

En otros casos, es importante utilizar *distintas* constantes con gorrito, para poder introducir cuantificadores universales ligando distintas variables. Veamos un ejemplo de esto.

**ejemplo 44**

Supongamos que me ofrecen el siguiente argumento:

1. Todos los que estamos en esta comuna somos hermanos.
2. Los hermanos comparten todo. / Por lo tanto, todos los que estamos en esta comuna, compartimos todo.

Para confirmar su validez, defino un modelo:

**Dominio** = Irrestricto.

**Interpretación** $E\alpha$: $\alpha$ está en esta comuna. $H(\alpha,\beta)$: $\alpha$ es hermano de $\beta$. $C(\alpha,\beta,\gamma)$: $\alpha$ comparte $\beta$ con $\gamma$.

Dando por sentado este modelo, formalizo así al argumento:

1. $\forall x \forall y[(Ex \,\&\, Ey) \supset H(x,y)]$
2. $\forall x \forall y[H(x,y) \supset \forall z(C(x,z,y))]$ / $\therefore$ $\forall x \forall y[(Ex \,\&\, Ey) \supset \forall z(C(x,z,y))]$

Este argumento parece más complejo que la mayoría de los que hemos visto hasta ahora, debido a la presencia de varios cuantificadores. Pero, en realidad, es fácil demostrarlo usando las reglas de introducción y eliminación del cuantificador universal, así como las de las conectivas proposicionales:

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x \forall y[(Ex \,\&\, Ey) \supset H(x,y)]$ | |
| 2. $\forall x \forall y[H(x,y) \supset \forall z(C(x,z,y))]$ | / $\therefore$ $\forall x \forall y[(Ex \,\&\, Ey) \supset \forall z C(xzy)]$ |
| 3. $\forall y[(E\hat{a} \,\&\, Ey) \supset H(\hat{a},y)]$ | E∀(1) |
| 4. $(E\hat{a} \,\&\, E\hat{b}) \supset H(\hat{a},\hat{b})$ | E∀(3) |
| 5. $\forall y[H(\hat{a},y) \supset \forall z(C(\hat{a},z,y))]$ | E∀(2) |
| 6. $H(\hat{a},\hat{b}) \supset \forall z[C(\hat{a},z,\hat{b})]$ | E∀(5) |
| 7. $(E\hat{a} \,\&\, E\hat{b}) \supset \forall z[C(\hat{a},z,\hat{b})]$ | S.H.(4,6) |
| 8. $\forall y \big[(E\hat{a} \,\&\, Ey) \supset \forall z[C(\hat{a},z,y)]\big]$ | I∀(7) |
| 9. $\forall x \forall y \big[(Ex \,\&\, Ey) \supset \forall z[C(x,z,y)]\big]$ | I∀(8) |

En este ejemplo, nota que fue importante sustituir los cuantificadores universales en 1 y 2 por distintas constantes con gorrito, porque así pude volver a introducir cuantificadores ligando a distintas variables en los pasos 8 y 9. Sin ello, no podría haber llegado a la conclcusión.

En resumen:

> Si quiero introducir el cuantificador universal para la misma variable, debo usar la misma constante con gorrito.

En cambio,

> Si quiero introducir el cuantificador universal con distintas variables, debo usar distintas constantes con gorrito.

Ahora vamos a ejercitar el uso de esta regla.

### Ejercicio # 52

1. Usando las reglas I∀, E∀ y las de la lógica proposicional, demuestra la validez de los siguientes argumentos.
   - *a*) 1) $\forall x(Qx \,\&\, Px)$ / ∴ $\forall x(Px)$
   - *b*) 1) $\forall z(Qz \lor Pz)$
     2) $\forall x(\neg Qx)$ / ∴ $\forall x(Px)$
   - *c*) 1) $\forall x \forall z[R(x,z) \,\&\, T(z,x)]$
     2) $\forall x \forall z[R(x,z)] \supset \forall y(Qy)$ / ∴ $Qb$

## Eliminación del existencial: «E∃»

Ya vimos reglas para eliminar e introducir el cuantificador universal y para introducir el existencial. Nos falta la regla para eliminar el existencial, que es un poco más elaborada que las anteriores, pero una vez que entendemos la razón de las complicaciones, es fácil ver su validez.

Empecemos. La regla que más inmediatamente se nos podría ocurrir para eliminar el existencial es un desastre:

$$\exists\alpha\Phi(\alpha) \;\; \therefore \; (\Phi\kappa)$$

Esta es una mala «regla» porque es **inválida**: es decir, porque hay modelos en los que la premisa es verdad, pero la conclusión es falsa. Por ejemplo, si tenemos un modelo cuyo dominio es el conjunto de todos los seres humanos, y que interpreta a «Φ» como el predicado «es el más grande ajedrecista vivo» y «$\kappa$» como Cuahutémoc Blanco, la premisa es verdadera—alguien es el más grande ajedrecista vivo—pero la conclusión es falsa—es falso que Cuahutémoc Blanco sea el más grande ajedrecista vivo.

Esto pasa comúnmente: podemos saber que *alguien se robó mi billetera y tiró mi credencial*, sin saber *quién específicamente* lo hizo. Sin embargo, de nuestro conocimiento meramente sobre «alguien», usualmente podemos inferir algunas cosas: por ejemplo, de que que *alguien se robó mi billetera y tiró mi credencial* seguramente es lógicamente válido inferir que *alguien se robó mi billetera*: ¡Esta parece una clara eliminación de la conjunción!

Pero nuestro sistema de reglas no nos permite eliminar la conjunción «dentro» (en el alcance de) un cuantificador. Necesitamos *primero* eliminar el cuantificador y *entonces* eliminar la conjunción. Ya sabemos cómo hacerlo con el universal, ahora falta saber cómo hacerlo con el existencial.

Necesitamos una regla que nos permita trabajar con las conectivas dentro de un existencial, pero que no caiga en la falacia que vimos arriba: que no nos permita inferir que alguien *particular* hizo algo, a partir de la información de que *alguien* (no específico) lo hizo.

La idea básica es expandir el lenguaje para introducir un tercer y último tipo de constantes: las «**constantes ficticias**» o «constantes con asterisco». Una constante con asterisco, como $a^*, b^*, c^*, \ldots$ y que representaremos con la metavariable para constantes $\kappa^*$, significa algo como «quien sea que haga verdad la fórmula existencial», o, digamos, «quien lo haya hecho». Entonces, una fórmula como «$Fc^*$» significa: «quien lo haya hecho, es $F$».

Por supuesto, cuando hablamos de «*la* fórmula existencial» o cuando decimos «lo haya hecho», nos referimos a una fórmula específica *en cada demostración*. Es por eso que la E∃ requiere de una **demostración bajo un supuesto**: comenzamos con una fórmula existencial, como $\exists x(Gx)$, y *suponemos* que *alguien*, a quien no conocemos pero que es uno de los que hace verdad a la fórmula existencial, es $G$. A ese alguien es a quien llamamos «$a^*$».

(Para repetir: «$a^*$» **no** es el mismo nombre que «$a$». La primera es sólo una manera de decir «alguien que haga lo que dice la fórmula existencial». La segunda es el nombre de algún objeto *específico* del dominio.)

Entonces, al abrir la demostración bajo un supuesto, estamos diciendo: «Supongamos que llamamos '$a^*$' a quien haga verdad el existencial. Entonces…» y los tres puntitos representan pasos en una demostración que hacemos usando las reglas que ya tenemos. Si usando las reglas podemos demostrar una fórmula específica, eso significa que esa fórmula se sigue de que *alguien* hace verdad el existencial, sin necesidad de saber quién es específicamente. (Por ello, a ese alguien lo hemos llamado «$a^*$», pero en realidad sólo sabemos que es quien hace verdad al existencial.)

Pero hay que recordar que la fórmula a la que lleguemos **no puede contener a la constante ficticia** que introducimos en la sub-prueba de E∃. Queremos demostrar que esa fórmula se sigue *sólo* de la suposición de que *alguien* hace verdad la fórmula existencial, **por lo que la demostración no puede requerir usar un nombre ficticio particular**. De ahí la restricción.

En resumidas cuentas, definamos la regla.

**Definición 99: Eliminación del Cuantificador Existencial**

$$
\text{E}\exists \qquad \begin{array}{c} \exists\alpha(\Phi[\alpha]) \\ \begin{array}{|c} \hline \Phi[\kappa^*] \\ \vdots \\ \mathsf{A} \\ \hline \end{array} \\ \\ \hline \mathsf{A} \end{array} \qquad \text{donde A no contiene a } \kappa^*
$$

Los tres puntos verticales representan el uso de las reglas válidas (tanto las que ya hemos visto como las que veremos después). Es decir: empezamos con una fórmula existencial, y para eliminar el existencial, introducimos un supuesto (representado por la línea vertical). Bajo este supuesto, quitamos el existencial y sustituimos la variable (¡en todas sus apariciones!) por una constante ficticia. Después, utilizamos las reglas válidas para llegar a la fórmula que nos interese en esa demostración. Esa fórmula no puede contener a la constante ficticia, porque la vamos a sacar del supuesto, y será la conclusión de la eliminación del existencial.

La constante ficticia es, por así decir, un mero instrumento para poder quitar el existencial. Es por eso que no debe referir a nadie específico: como no sabemos quién hace verdad al existencial, mi inferencia sólo puede depender de que yo sepa que *alguien* lo hace verdad. Es por eso que la constante ficticia sólo sirve para nombrar a una de las cosas, *la que sea*, que haga verdad al existencial.

**ejemplo 45**

Supongamos que me encuentro con el siguiente argumento:

1. Alguien se robó mi billetera y tiró mi credencial. / Por lo tanto, alguien tiró mi credencial.

Usando un modelo que dejaré implícito, lo formalizo así:

1. $\exists x(Rx \ \& \ Tx)$ / $\therefore \exists x(Tx)$

Ya puedo demostrar la validez de este argumento, usando la regla de eliminación del existencial.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\exists x(Rx \ \& \ Tx)$ | | / $\therefore \exists x(Tx)$ |
| 2. | a. $Ra^* \ \& \ Ta^*$ | Sup. | |
| | b. $Ta^*$ | E&(2a) | |
| | c. $\exists x(Tx)$ | I∃(2b) | |
| 3. | $\exists x(Tx)$ | | E∃(1,2) |

Y la notación «E∃(1,2)» significa: «por una eliminación del cuantificador existencial que está en la línea 1, en la sub-demostración de la línea 2». Como siempre que usamos supuestos, recuerda: **excepto por la última línea de la sub-demostración, nada de lo que está en la caja puede salir de la caja**.

Vamos a ejercitar el uso de esta regla.

**Ejercicio # 53**

1. Utiliza la regla de eliminación del existencial (y las demás) para demostrar la validez de los siguientes argumentos.
   *a)* 1) $\exists x(Px \ \& \ Qx)$ / $\therefore \exists x(Qx)$
   *b)* 1) $\exists x(Px \ \& \ Qx)$
   2) $\forall x(Qx \supset Ax)$ / $\therefore \exists x(Ax)$
   *c)* 1) $Pb \ \& \ Sa$

2) $\exists x(Sx) \supset \forall y \exists z[R(y,z) \ \& \ Qz] \quad / \therefore \exists x(Qx)$

2. .

### Recapitulando: las cuatro reglas

Vamos a cerrar esta sección listando las cuatro reglas que hemos visto hasta ahora.

**Definición: Reglas de los cuantificadores**

I∃

$$\frac{\Phi[\kappa] \text{ o bien, } \Phi[\hat{\kappa}] \text{ o bien, } \Phi[\kappa^*]}{\exists\alpha(\Phi[\alpha])}$$

I∀

$$\frac{\Phi[\hat{\kappa}]}{\forall\alpha(\Phi[\alpha])}$$

E∃

$$\begin{array}{l} \exists\alpha(\Phi[\alpha]) \\ \begin{array}{|l} \Phi[\kappa^*] \\ \vdots \\ \text{A} \\ \hline \end{array} \\ \hline \text{A} \end{array}$$

donde A no contiene a $\kappa^*$

E∀

$$\frac{\forall\alpha(\Phi[\alpha])}{\Phi[\kappa] \text{ o bien, } \Phi[\hat{\kappa}] \text{ o bien, } \Phi[\kappa^*]}$$

**Ejercicio # 54**

1. Formaliza y demuestra los siguientes argumentos, usando las reglas de introducción y eliminación de los cuantificadores, además de las proposicionales. Puedes usar el mismo modelo, o distintos.
   - *a*) Todo el que haya hecho trampa, será castigado. Si alguien copió en el examen, entonces, alguien hizo trampa. Pepe copió en el examen. Por lo tanto, alguien será castigado.
   - *b*) Nadie es perfecto. Si todos son imperfectos (no-perfectos), entonces algunos son imperfectos y humanos. Por lo tanto, algunos son humanos.
   - *c*) Algunos humanos no serán castigados. Todo el que no sea castigado, es puro. Por lo tanto, algunos humanos son puros.

*d*)

*e*)

*f*)

*g*)

*h*)

*i*)

*j*)

2. Demuestra los siguientes argumentos, usando las reglas de los cuadrados de oposición, las de introducción y eliminación de los cuantificadores, y las proposicionales.

   *a*) 1) $\forall x(Px \supset Qx)$
   2) $Pa \quad / \therefore Qa$

   *b*) 1) $\exists x(Px \,\&\, Qx)$
   2) $\forall x(Qx \equiv Sx) \quad / \therefore \exists x(Px \,\&\, Sx)$

   *c*) 1) $\neg\exists x(\neg Mx \,\&\, \neg Sx)$
   2) $\neg Mb \quad / \therefore Sb$

   *d*) 1) $Ta$
   2) $[\neg\forall y\neg(Ty)] \supset \forall y\neg(Ty \,\&\, \neg My) \quad / \therefore Ma$

   *e*) 1) $\neg\exists x(Px \,\&\, Qx)$
   2) $\neg\exists x\neg(Hx) \equiv \forall x(Px \supset \neg Qx) \quad / \therefore Ha$

   *f*) 1) $(\neg Fa \,\&\, \neg Pa) \supset \neg Qa$
   2) $Sa \,\&\, Qa$
   3) $\neg\exists x(\neg Fx \,\&\, \neg Fx) \quad / \therefore Pa$

   *g*) 1) $\forall x(Qx \vee Sx) \supset \forall z[Pz \equiv R(a,z)]$
   2) $\forall x(Sx) \quad / \therefore \neg\exists z\neg(Pz \equiv R(a,z))$

   *h*) 1) $\exists x(Fx \,\&\, Gx)$
   2) $\neg\forall x(Hx \,\&\, Ix) \supset \neg\exists x(Fx)$
   3) $\neg\forall x\neg(Hx) \equiv \forall x(Mx \,\&\, Jx) \quad / \therefore \forall x(Jx)$

   *i*) 1) $\forall x(Px) \supset \exists x(Jx \,\&\, Hx)$
   2) $\neg[\forall x(Mx) \,\&\, \neg\exists x(Qx \,\&\, Ix)]$
   3) $\neg\forall x\neg(Hx) \supset \forall x(Mx \,\&\, Sx) \quad / \therefore \forall x(Px) \supset \neg\forall x\neg(Ix)$

*j*) 1) $\neg[\forall x(Mx \mathbin{\&} Tx) \mathbin{\&} \neg\exists x\neg(Qx \supset Ix)]$
2) $\forall x(Qx \mathbin{\&} Mx)$
3) $[\neg\exists x\neg(Tx)] \vee [\neg\exists x(Qx)]$ $\quad / \therefore\ \exists x\neg(Ix)$

## 11.5. Demostraciones con generalidad múltiple

## 11.6. Reglas derivadas de interacción *

Además de las reglas de eliminación e introducción para los cuantificadores, así como de equivalencia entre ellos, y de las reglas para la identidad que revisaremos en el siguiente capítulo (12), nos falta revisar cómo es que los cuantificadores «interactúan» con las conectivas proposicionales. Claro está que ya las reglas de equivalencia del cuadrado de proposición moderno (11.3.2) nos dicen cómo es que los cuantificadores restringidos por «su conectiva natural» («$\supset$» para «$\forall$» y « & » para «$\exists$») equivalen entre sí y cómo estas equivalencias se comportan con estas conectivas; pero falta revisar cómo se comportan los cuantificadores—es decir, *qué inferencias son válidas*—cuando tenemos conectivas, sin enfocarnos en las equivalencias con otros cuantificadores.

Resulta que podemos *demostrar* a partir de las reglas que ya tenemos—o, de manera alternativa, de las características de los modelos—que otras inferencias son válidas. Estas **reglas derivadas de interacción** son de las que hablaremos ahora.

Dado que son derivadas —es decir, que su validez se sigue de las reglas básicas—, estas reglas no son estrictamente necesarias. Pero tenerlas en el repertorio de reglas tiene una ventaja: hace a las demostraciones más cortas. En general, siempre nos enfrentaremos con un dilema:

Entre más reglas tengamos, más hay que memorizar. Pero entre menos reglas tengamos, las demostraciones pueden ser más largas y complicadas.

Así que tú puedes elegir si memorizar o no las siguientes reglas. Sólo considera que podrían ser útiles después.

Como siempre, que una regla sea **válida** significa aquí que, para cada sustitución uniforme de los esquemas de premisa y conclusión, en todo modelo en el que la premisa sea verdadera, también lo será la conclusión. Si la regla es, además, de **equivalencia**—si nos dice que dos tipos de fórmulas son lógicamente equivalentes—entonces toda sustitución uniforme de los esquemas de premisa y conclusión son verdaderos en *exactamente los mismos* modelos.

Usando esta definición semántica, podemos demostrar las siguientes reglas. Estas también, como hemos dicho, son demostrables a partir de las reglas de introducción y eliminación de los cuantificadores, así como las reglas de los cuadrados de oposición. Para demostrarlas, lo único que tenemos que hacer es tomar a sus premisas como premisas de un argumento, y la conclusión como la conclusión de un argumento; usando las reglas que hemos visto, podríamos inferir la conclusión a partir de las premisas.

(Por supuesto, dado que son *reglas*, ellas **no** nos hablan de fórmulas particulares —como «$Fa$» o «$H(b,c) \supset \neg Fd$»— sino de *esquemas* —*tipos*, *formas*— de fórmulas. Para hacer la demostración de la que estoy hablando, tendremos que suponer que las reglas que hemos visto —como E∀— valen no sólo con las fórmulas, sino con los esquemas mismos: es decir (usando el ejemplo de E∀), que si tenemos un esquema $\forall\alpha(\Phi[\alpha])$, de ahí podemos inferir un esquema $\Phi[\kappa]$. Esto requiere suponer que la lógica de la «metalógica» es la misma; que es lo que haremos para hacer las demostraciones pertinentes.)

Empecemos.

### 11.6.1. Cambios de variable

El primer par de reglas significa que la variable que usemos en una fórmula cuantificada no es importante: sólo se requiere que esté ligada adecuadamente. Por eso es que una fórmula con una variable particular implica a la misma fórmula cuando le sustituimos esa variable por cualquier otra, **siempre que esa variable no esté ya siendo ligada por otro cuantificador dentro de la misma fórmula**.

Definición 100: Cambios de variable

CambioVar∀ $$\frac{\forall\alpha(\Phi[\alpha])}{\overline{\forall\beta(\Phi[\beta])}}$$

CambioVar∃ $$\frac{\exists\alpha(\Phi[\alpha])}{\exists\beta(\Phi[\beta])}$$

En ambos casos, la variable por la que cambio la original no puede estar ya ligada por otro cuantificador dentro de la misma fórmula.

Entonces, estas reglas reflejan lo que habíamos dicho en la sección sobre modelos (9.5): es irrelevante qué variable usemos para expresar una afirmación universal o existencial. Mientras no haya confusión acerca de qué variable está siendo ligada por cuál cuantificador, ni acerca de cuál es el orden (secc. 10.2), nada nos obliga a usar «$x$» en lugar de «$z$», por ejemplo.

### 11.6.2. Distribuciones y contracciones

Las siguientes reglas son importantes, pues nos reflejan el comportamiento de los cuantificadores en distintos de dominio.

Vamos a llamarle «reglas de **distribución**» a las reglas que nos aseguran la validez de una inferencia en la que se empieza con un cuantificador en cuyo alcance está una conectiva proposicional, y se concluye una fórmula cuya conectiva principal es esa conectiva, donde cada lado de la conectiva tiene el cuantificador. Es decir: en estas inferencias, el cuantificador se «distribuye» entre las diferentes partes de la conectiva. Por ejemplo:

$$\begin{array}{c}\text{Distribución } \exists/\& \\ \exists\alpha(\Phi[\alpha] \mathbin{\&} \Psi[\alpha]) \\ \hline \exists\alpha(\Phi[\alpha]) \mathbin{\&} \exists\alpha(\Psi[\alpha])\end{array}$$

Indicamos que la regla es de equivalencia usando las dos rayas, «//», e indicamos que es de inferencia si sólo usamos una: «/».

Por otro lado, y de manera «inversa» o «dual», le llamaremos «reglas de **contracción**» a las reglas en las que empezamos con una conectiva proposicional que tiene un cuantificador (ya ambos universales, ya ambos existenciales) en cada lado, y concluimos con una fórmula que tiene un solo cuantificador que tiene en su alcance a esta conectiva. En estas inferencias, los cuantificadores se «contraen» en uno solo. Por ejemplo:

$$\begin{array}{c}\text{Contracción } \forall/\vee \\ \forall\alpha(\Phi[\alpha]) \vee \forall\alpha(\Psi[\alpha]) \\ \hline \forall\alpha(\Phi[\alpha] \vee \Psi[\alpha])\end{array}$$

Muy bien. Vamos a empezar con la conjunción.

**Definición 101: Distribución en &**

$$\text{Dist}\forall//\& \qquad \begin{array}{c}\forall\alpha(\Phi[\alpha] \mathbin{\&} \Psi[\alpha]) \\ \hline\hline \forall\alpha(\Phi[\alpha]) \mathbin{\&} \forall\alpha(\Psi[\alpha])\end{array}$$

$$\text{Dist}\exists/\& \qquad \begin{array}{c}\exists\alpha(\Phi[\alpha] \mathbin{\&} \Psi[\alpha]) \\ \hline \exists\alpha(\Phi[\alpha]) \mathbin{\&} \exists\alpha(\Psi[\alpha])\end{array}$$

Es muy útil ver por qué son válidas estas inferencias, y por qué la primera es de equivalencia, pero no la segunda.

Considera Dist$\forall$//&. La fórmula de arriba dice que todo lo del dominio es: tanto $\Phi$ como $\Psi$. La de abajo dice que, por un lado, todo es $\Psi$, y por el otro, todo es $\Psi$. Es decir: la de arriba le atribuye a cada objeto del dominio la propiedad compuesta *ser*-$\Phi$-*y*-$\Psi$. La de abajo dice que suceden dos hechos: que todo es $\Psi$ y que todo es $\Psi$. ¿Cómo demostramos esta equivalencia?

Una manera es demostrando una fórmula a partir de la otra, usando las reglas que ya tenemos. Otra es mediante un método semántico: demostrar que todo modelo en el que la primera es verdadera, la segunda también, y viceversa.

Empecemos con el método semántico. La primera fórmula dice que cada objeto del dominio es Φ-*y*-Ψ. ¿Cómo modelamos eso?

Bueno, consideremos el dominio de cualquier modelo. Para que sea verdad que todo en el dominio es Φ-*y*-Ψ, el dominio del modelo se tiene que ver así:

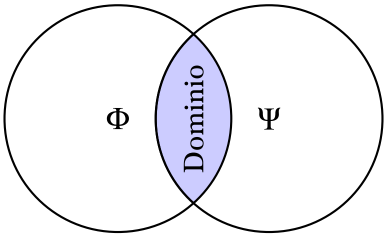
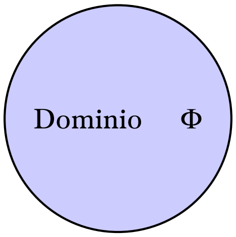


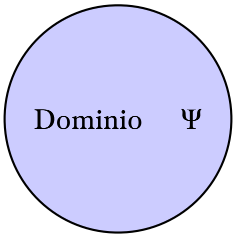
Figura 11.1: *Un dominio en el que todas las cosas son tanto Φ como Ψ.*

Ahora bien, la segunda fórmula dice que suceden dos hechos: que todo es Ψ y que todo es Ψ. ¿Qué tiene que pasar para que sea verdad que suceden ambos hechos? Por principio de cuentas, esto es una conjunción, así que sólo es verdadera si ambos conyuntos lo son. Vamos por partes. Para que sea verdad el primer conyunto —que todo es Φ—, el dominio del modelo se tiene que ver así:



Es decir, el **Dominio** es un conjunto de cosas que son, todas, Φ.

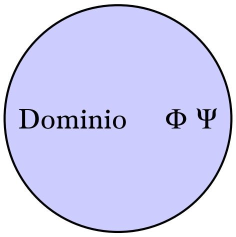
Por otro lado, para que sea verdad el segundo conyunto —que todo es Ψ—, el dominio del modelo se tiene que ver así:



Es decir, el **Dominio** es un conjunto de cosas que son, todas, Ψ.

Ahora bien, ¿cómo se tiene que ver el dominio para que ambos hechos sean verdad?

Pues así:



En este caso, todas las cosas del **Dominio** son Φ y también son Ψ. Pero entonces, el dominio va a ser un conjunto de cosas, todas las cuales son tanto Φ como Ψ. Esto significa que hemos demostrado que: en todo modelo en el que sea verdad que todo es Φ y que todo es Ψ, será verdad que todo es Φ-*y*-Ψ.

Esto da una de las implicaciones lógicas de la regla Dist∀//&. Falta la otra: que en todo modelo en el que sea verdad que todo es Φ-*y*-Ψ, será verdad que todo es Φ y también que todo es Ψ.

Demostrar esto segundo es fácil. Si todo es Φ-*y*-Ψ, el dominio se verá como el diagrama 11.1. Pero entonces, eso significa que el toda cosa en el dominio es Φ, y que toda cosa en el dominio es Ψ. Esto demuestra la implicación de arriba hacia abajo en Dist∀//&.

También podríamos haber usado las reglas que ya tenemos y mostrar ambas implicaciones. Podemos usar ese método para las siguientes reglas.

Las siguientes son las reglas de distribución y contracción con la disyunción.

**Definición 102: Distribución y contracción en ∨**

Contr∀/∨

$$\frac{\forall\alpha(\Phi[\alpha]) \lor \forall\alpha(\Psi[\alpha])}{\forall\alpha(\Phi[\alpha] \lor \Psi[\alpha])}$$

Distr∃//∨

$$\begin{array}{c} \exists\alpha(\Phi[\alpha] \lor \Psi[\alpha]) \\ \hline\hline \exists\alpha(\Phi[\alpha]) \lor \exists\alpha(\Psi[\alpha]) \end{array}$$

Las siguientes son reglas para la interacción entre los cuantificadores y el condicional material.

**Definición 103: Distribución y contracción en ⊃**

Distr∀/⊃

$$\frac{\forall\alpha(\Phi[\alpha] \supset \Psi[\alpha])}{\forall\alpha(\Phi[\alpha]) \supset \forall\alpha(\Psi[\alpha])}$$

$$\text{Contr}\exists/\supset \qquad \begin{array}{c} \exists\alpha(\Phi[\alpha]) \supset \exists\alpha(\Psi[\alpha]) \\ \hline \exists\alpha(\Phi[\alpha] \supset \Psi[\alpha]) \end{array}$$

$$\text{Distr}\exists//\supset \qquad \begin{array}{c} \exists\alpha(\Phi[\alpha] \supset \Psi[\alpha]) \\ \hline\hline \forall\alpha(\Phi[\alpha]) \supset \exists\alpha(\Psi[\alpha]) \end{array}$$

*Nota.* Hay una «regla», que podría parecerse a la última, pero que, de hecho, es inválida:

$$\begin{array}{c} \exists\alpha(\Phi[\alpha] \supset \Psi[\alpha]) \\ \hline \exists\alpha(\Phi[\alpha]) \supset \exists\alpha(\Psi[\alpha]) \end{array}$$

Finalmente,

**Definición 104: Distribución en ≡**

$$\text{Distr}\forall/\equiv \qquad \begin{array}{c} \forall\alpha(\Phi[\alpha] \equiv \Psi[\alpha]) \\ \hline \forall\alpha(\Phi[\alpha]) \equiv \forall\alpha(\Psi[\alpha]) \end{array}$$

### 11.6.3. Distribuciones y contracciones, condicionadas

Donde la variable $\alpha$ ligada por el cuantificador no está libre en A, valen las siguientes reglas:

**Definición 105: Distribuciones condicionadas de cuantificadores**

$$\text{DistrCond}\forall//\& \qquad \begin{array}{c} \mathsf{A} \mathbin{\&} \forall\alpha(\Phi[\alpha]) \\ \hline\hline \forall\alpha(\mathsf{A} \mathbin{\&} \Phi[\alpha]) \end{array}$$

$$\text{DistrCond}\exists//\& \qquad \begin{array}{c} \mathsf{A} \mathbin{\&} \exists\alpha(\Phi[\alpha]) \\ \hline\hline \exists\alpha(\mathsf{A} \mathbin{\&} \Phi[\alpha]) \end{array}$$

DistrCond∀//∨
DistrCond∃//∨
DistrCond∀//⊃
DistrCond∀, ∃//⊃
DistrCond∃, ∀//⊃

### 11.6.4. Permutaciones

**Definición 106: Permutación de, y entre, cuantificadores**

Perm∀//∀ $$\begin{array}{c}\forall\alpha\forall\beta(\Phi[\alpha,\beta]) \\ \hline\hline \forall\beta\forall\alpha(\Phi[\alpha,\beta])\end{array}$$

Perm∃//∃ $$\begin{array}{c}\exists\alpha\exists\beta(\Phi[\alpha,\beta]) \\ \hline\hline \exists\beta\exists\alpha(\Phi[\alpha,\beta])\end{array}$$

Perm∃∀/∀∃ $$\begin{array}{c}\exists\alpha\forall\beta(\Phi[\alpha,\beta]) \\ \hline \forall\beta\exists\alpha(\Phi[\alpha,\beta])\end{array}$$

Es fácil ver por qué la conversa de la última regla, que llamaríamos «Permutación∀∃/∃∀» **no** es una regla válida, si recuerdas la sección sobre *la importancia del orden* (10.2).

**Ejercicio # 55**

1. Usando las reglas que ya vimos, demuestra que estas también son válidas (Tip: recuerda la regla de introducción del condicional: si, suponiendo $A$ y usando las reglas (proposicionales y cuantificacionales), llego a $B$, se sigue que $A \supset B$):
   *a*) 1. $\forall x(Px)$
   $\therefore \exists x(Px)$
   *b*) 1. $\exists x(Px \supset Qx)$
   $\therefore \forall x(Px) \supset \exists x(Qx)$
   *c*) 1. $\forall x(Px \leftrightarrow Qx)$
   $\therefore \forall x(Px) \leftrightarrow \forall x(Qx)$
2. Recuerda que esto: «$A \dashv\vDash B$» significa que $A$ y $B$ son lógicamente equivalentes: una se puede demostrar a partir de la otra, y viceversa. (Es un bicondicional lógicamente necesario). Cuando esto pasa, tenemos una regla de equivalencia. Para demostrarla, sólo demuestra un lado a partir del otro (usando las reglas), y viceversa.
   *a*) 1. $\exists x\exists y[P(x,y)] \dashv\vDash \exists y\exists x[P(x,y)]$
   *b*) 1. $\exists x\forall y[P(x,y)]$
   $\therefore \forall y\exists x[P(x,y)]$
   *c*) Da una explicación informal de por qué *(2b)* sólo es de inferencia, y no de equivalencia.

Como ejercicio opcional, demuestra que la inferencia de la página 287 de hecho es inválida. Para ello, construye un *contramodelo*: un modelo en el que un caso —es decir, una sustición de $\alpha$ por una variable, y de $\Phi$ y $\Psi$ por matrices que contienen a la variable que sustuiste por $\alpha$— de la premisa sea verdadera, pero la conclusión sea falsa. (Nota que la premisa tienen a «∃» como conectiva principal, pero la conclusión tiene a «⊃».)

## Resumen del capítulo

★

## Proyecto del capítulo:

**Antecedentes** ⇢ [Este proyecto podría ser sobre lenguajes formales en general. Podría ser diseñar un lenguaje formal. O también podría ser sobre reglas de transformación en general: reglas para pasar de una cadena de símbolos a otra. O diseñar un lenguaje formal arbitrario, diseñar reglas de transformación, y demostrar unos teoremas en ese lenguaje.

Un segundo proyecto podría ser revisar un probador de teoremas y aprender a usarlo.

Un tercer proyecto podría ser una exposición oral y/o audiovisual sobre cualquiera de estos temas. Podría usar Prezi.

Un cuarto proyecto podría ser relacionar los cuadrados de oposición con la historia: Revisar a Aristóteles. Exponer sobre esto o diseñar un mapa mental.

Un quinto proyecto sería diseñar un diagrama de flujo para usar algunas reglas seleccionadas y exponer el diagrama en clase.]

**Problema** ⇢ [Aquí describiré este proyecto.]

## Notas

1. Esto es fácil de demostrar con la semántica de nuestra lógica, aunque requiere conceptos más avanzados que no veremos hasta el capítulo 15.

2. Pero hay que notar que la lógica LC1 y la silogística aristotélicas son sistemas distintos: **Refs**.

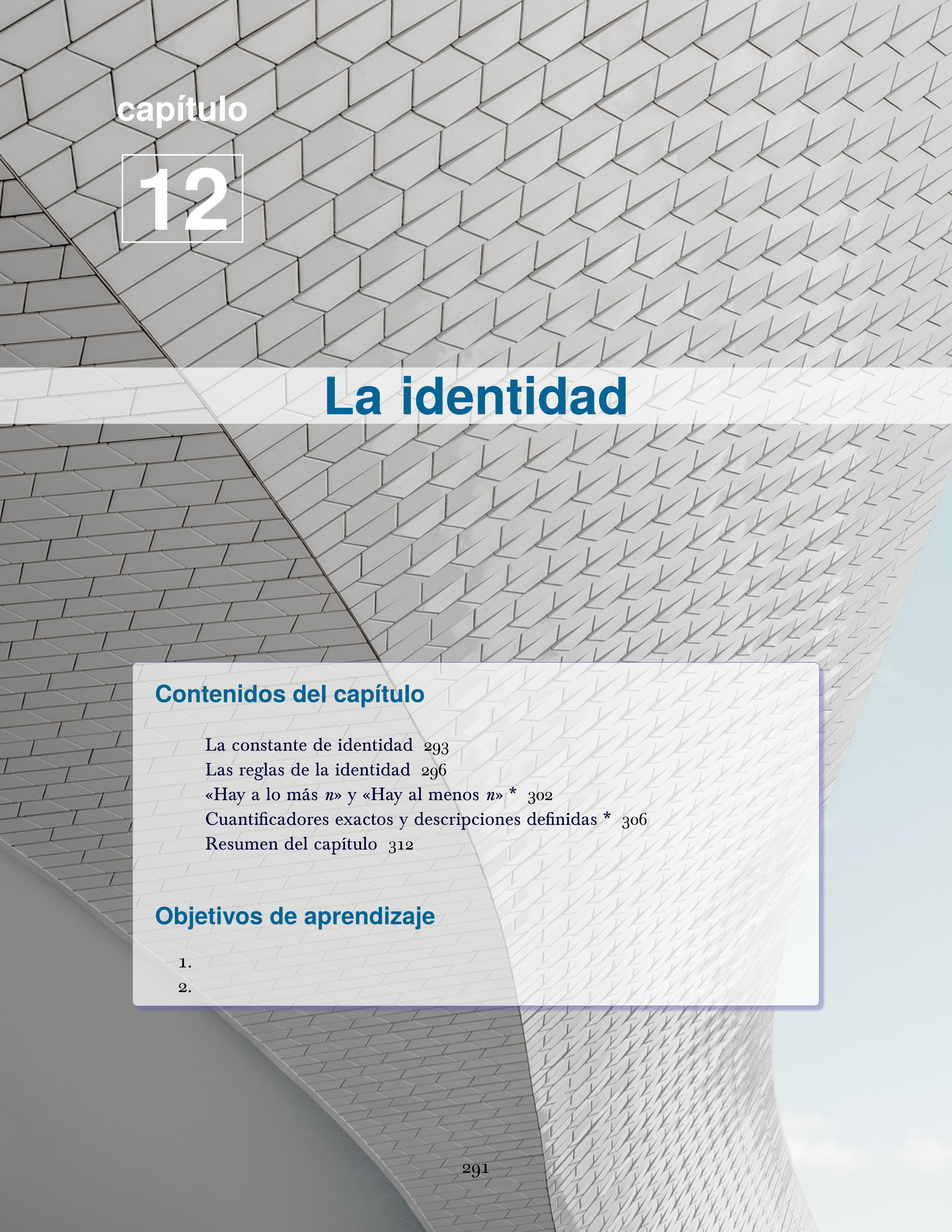
3. Existen sistemas lógicos no-clásicos para tratar con dominios vacíos.

4. Pues, si «algunos estudiamos filosofía» es falsa, esto implica que es verdad su contradictoria: «no existe alguno que estudió filosofía», que es equivalente a: «todos *no* estudiamos filosofía». Y, si «algunos no estudiamos filosofía» *también* es falsa, esto implica que es verdad su contradictoria: «no existe alguno que no estudió filosofía», que es equivalente a: «*todos* estudiamos filosofía». Pero entonces tendríamos que es verdad tanto que «todos *no* estudiamos filosofía» como que «*todos* estudiamos filosofía», lo cual no puede ser, pues estas son contrarias.

5. En LC0, esto justifica la regla de doble negación: $p \mathrel{=}\!\mid\!\models \neg\neg p$.

6. Al introducir el lenguaje en la definición 82, a estas les hemos llamado *matrices*.

7. Les llamaremos así porque el nombre del caracter «^» es «*hat*».



## capítulo

## 12

# La identidad

## Contenidos del capítulo

## Objetivos de aprendizaje

1.
2.

En este capítulo vamos a extender la lógica clásica de primer orden, LC1, a la lógica clásica de primer orden *con identidad*, LC1=. Recordemos que LC1 tiene un lenguaje, una semántica formal (teoría de modelos) y un aparato deductivo (deducción natural). Extender LC1 a LC1= significa extender cada uno de los tres aspectos mencionados.

La razón para ello es que existen ciertos enunciados que no son formalizables en LC1 de manera completamente perspicua. Por ejemplo, el enunciado:

*Sólo Andrés Manuel López Obrador es el presidente de México en 2019*,

no se puede formalizar de manera perspicua en LC1. Podemos, por ejemplo, escribir (dando un modelo por sentado):

$$P(a, m),$$

donde «$P$» sea el predicado de dos lugares «_ es el presidente de _ en 2019», y donde, obviamente, «$a$» y «$m$» denotan, respectivamente, a AMLO y a México. Pero en este modelo, la fórmula significa que «AMLO es presidente de México en 2019», pero no recuperamos el «sólo», que nos dice que *únicamente* AMLO es el presidente.

Podríamos intentar utilizar los cuantificadores, pero esto no sería adecuado. Si usamos el existencial, esto no recupera el sentido original:

$$\exists x[P(x, m)]$$

Esta fórmula nos dice que *al menos una cosa del dominio* del modelo es presidente de México en 2019. Ni siquiera si ponemos una conjunción:

$$P(a, m) \mathbin{\&} \exists x[P(x, m)],$$

pues esta nos dice que AMLO es presidente y que al menos una cosa lo es. Usar el universal sería desastroso:

$$\forall x[P(x, m)],$$

pues nos diría que *todos* en el modelo son presidentes (de México en 2019). Y no hay otra manera —no, al menos, una obvia— de formalizar en LC1 que nos permita recuperar el significado original.

Esto no sería tan importante de no ser porque parece que la validez de algunos argumentos depende de que formalicemos bien la proposición expresada por «Sólo AMLO es el presidente de México en 2019». Por ejemplo, el siguiente argumento parece válido:

1. Sólo AMLO es el presidente de México en 2019.
2. Sólo quien sea presidente de México en 2019, es comandante en jefe.

∴ AMLO es comandante en jefe.

Como veremos en este capítulo, introducir la constante lógica de identidad nos permite confirmar la apariencia de que este argumento es válido, pues las reglas de deducción natural para la identidad nos permiten demostrar su validez.

## 12.1. La constante de identidad

En esta sección vamos a ampliar el lenguaje de LC1 al lenguaje de LC1=, introduciendo una nueva constante lógica. También veremos cómo utilizar esta constante para formalizar oraciones del lenguaje natural.

### 12.1.1. Conectivas definibles y primitivas

La lógica clásica de primer orden con identidad (LC1=) incluye tres tipos de constantes lógicas:

- Las conectivas proposicionales, una monádica y cuatro diádicas: $\neg$, $\vee$, &, $\supset$, $\equiv$.
- Los cuantificadores universal y existencial: $\forall$ y $\exists$.
- La relación de identidad: =.

Como se explicita en las reglas de deducción natural, algunas de estas constantes son definibles en términos de otras:

- La conjunción ($A \mathbin{\&} B$) se puede definir en términos de la disyunción y la negación ($\neg(\neg A \vee \neg B)$) o del condicional y la negación ($\neg(A \supset \neg B)$).
- En general, toda conectiva proposicional diádica se puede definir en términos de la negación y la disyunción, o la negación y la conjunción, o la negación y el condicional.[1]
- Los cuantificadores son definibles entre sí: $\forall$ es lógicamente equivalente a $\neg\exists\neg$, y viceversa: $\exists$ es $\neg\forall\neg$.

Sin embargo, esto no pasa con todas las conectivas proposicionales. La negación ***no*** se puede definir en términos de las demás conectivas diádicas que hemos visto (aunque sí en términos de otras que no hemos visto[2]).

Otra constante que tampoco es definible es la identidad, =, que no se puede definir con las que hemos visto. Esta es una **relación lógica primitiva**, lo cual sólo significa que no se define en términos de ninguna otra constante lógica de LC1=.

### 12.1.2. El símbolo de identidad

Este símbolo es una relación de dos lugares cuya interpretación es constante, es decir: su interpretación nunca cambia a través de los modelos: siempre se interpreta de la misma manera: como la relación de identidad.

Usando la notación que hemos estado usando para relaciones, en la que escribimos el símbolo relacional fuera del paréntesis y los términos dentro del paréntesis (tantos términos como lugares tenga la relación), escribiríamos así: $=(\alpha,\beta)$. Sin embargo, usaremos la notación usual en matemáticas: $\alpha = \beta$ (a esto se le conoce como **notación de infijo**). De igual manera, usando la notación que hemos usado hasta ahora, escribiríamos la negación de la identidad así: $\neg(\alpha = \beta)$. Siguiendo la práctica usual, también podemos escribir: $\alpha \neq \beta$. Ambas notaciones para la negación de identidad son correctas en nuestro sistema.

Que $\alpha = \beta$ significa que $\alpha$ *es* $\beta$, que son *una y la misma cosa* —en fin, que son *idénticas*. Cuando «dos» cosa*s* «son» idéntica*s*, en realidad no son *dos*: es una. Esto significa que si $\alpha = \beta$, entonces $\alpha$ va a tener exactamente las mismas propiedades que $\beta$ (¡pues son la misma!), y viceversa.

Ahora bien, en el lenguaje común, a veces oímos decir cosas como: «¡*a* y *b* son idénticos!» o que «son igualitos» como hipérboles para decir que *a* y *b* son *muy parecidos*. Pero en este libro sólo usaremos «idénticos» e «iguales» en el sentido lógico estricto: la identidad.

En el Español, «*es*» puede significar varias cosas: puede significar predicación (como en «*La rosa es roja*») o puede significar identidad (como en «*Superman es Clark Kent*»).[3] De igual manera, usando negación podemos tener la negación de una predicación («*La rosa no es azul*»), o la negación de una identidad («*Clark Kent no es Lois Lane*»).

### 12.1.3. Oraciones con identidad

Usar la relación de identidad nos permite formalizar oraciones que sin ella no podríamos formalizar. Ahora veremos varios ejemplos.

**ejemplo 46**

Usando las interpretaciones obvias y un dominio que dejamos implícito, voy a poner varios enunciados del lenguaje natural y sus formalizaciones en el lenguaje de LC1=.

- Clark Kent es Superman: $c = k$.
- Clark Kent no es Batman: $c \neq b$.
- Clark Kent es Superman o Batman: $c = s \vee c = b$.
- Todos, excepto Clark Kent, fueron a la fiesta: $\forall x(x \neq c \equiv Fx)$.
- Si alguien es Superman, vuela: $\forall x(x = s \supset Vx)$: Quien sea Superman, va a

volar.

- Nadie, excepto Superman, vuela: $Vs \ \& \ \neg\exists x(Vx \ \& \ x \neq s)$, o de manera equivalente (por el cuadrado moderno de oposición): $Vs \ \& \ \forall x(Vx \supset x = s)$: Sólo Superman vuela: $Vs \ \& \ \forall x(x \neq s \supset \neg Vx)$ (por transposición).
- Sólo Superman y Batman son superhéroes: $Hs \ \& \ Hb \ \& \ \forall x[Hx \supset (x = s \vee x = b)]$.
- Superman y Batman son justos: $Js \ \& \ Jb$, o, de manera equivalente: $\forall x[(x = s \vee x = b) \supset Jx]$.
- Superman no existe: $\neg\exists x(x = s)$. O, de manera equivalente: $\forall x(x \neq s)$. [Esto significa que Superman no existe *en el dominio*; si el dominio es irrestricto, entonces esto sí significa que Superman no existe en absoluto.]

Para comprobar que lo anterior es suficiente para entender el concepto de identidad, vamos a resolver algunos ejercicios.

**Ejercicio # 56**

1. Interpreta las siguientes fórmulas en el lenguaje natural. Define un modelo para cada una (puede ser uno distinto para cada una, o el mismo para varias o todas las fórmulas).
   a) $\exists x(Fx \ \& \ Gx) \supset \forall y(Py \supset y \neq b)$.
   b) $Fa \equiv \neg\exists x(Fx \ \& \ x = a)$.
   c) $\neg\forall x(Px \supset x \neq b)$.
   d) $\exists x\neg(Fx \vee Hx) \ \& \ \forall y(Hy \supset a = x)$.
   e) $\forall x\exists y[x \neq y \supset (Hx \ \& \ Gx)]$.
2. Formaliza usando el modelo que se ofrece después de las oraciones:
   a) No todos vamos a la Cineteca.
   b) Algunos vemos algunas películas, pero nadie ve todas las películas.
   c) Algunos vemos alguna película de Del Toro.
   d) Memo es Guillermo del Toro.
   e) Algunos, que no son del Toro, no ven *The Shape of Water*.
   f) Quien aprecie *The Shape of Water* no ve todas las películas de Del Toro.
   g) Memo aprecia toda película de Del Toro que no sea *The Shape of Water*.
   h) Si Memo va al cine, ese cine al que va es la Cineteca; también aprecia algunas películas, pero sólo si no son *The Shape of Water*.
   i) Todos, excepto Memo, aprecian todas las películas de Del Toro que no sean *The Shape of Water*; pero Memo aprecia todas las películas de Del Toro (incluyendo *The Shape of Water*).
   j) Cualquiera que vea alguna película de Del Toro que no sea *The Shape of Water*, aprecia *The Shape of Water*.

**Modelo**

*Dominio*: Irrestricto (el conjunto de todas las cosas).

*Interpretación*:
$V(\alpha,\beta)$: $\alpha$ va a $\beta$. $E(\alpha,\beta)$: $\alpha$ ve $\beta$.
$A(\alpha,\beta)$: $\alpha$ es el autor de $\beta$. $R(\alpha,\beta)$: $\alpha$ aprecia a $\beta$.
$P(\alpha)$: $\alpha$ es una película.
$c$: La Cineteca Nacional. $g$: Guillermo del Toro.
$m$: Memo. $s$: *The Shape of Water*.

## 12.2. Las reglas de la identidad

La identidad posee algunas propiedades, que deberían ser obvias si realmente comprendemos lo que significa «=». Por ejemplo:

1. Todo es idéntico a sí.
2. Nada es distinto de sí.
3. Dadas cualesquiera dos cosas, o son distintas, o en realidad son la misma.
4. Si algo es idéntico a «otra» cosa, esta «otra» es idéntica a la primera.
5. Cosas idénticas tienen exactamente las mismas propiedades.
6. Si dos cosas difieren en alguna propiedad, entonces no son la misma cosa.

### 12.2.1. Reglas básicas

Resulta que estas propiedades se pueden inferir a partir de las siguientes reglas de inferencia. Recordemos que, cuando aparece una línea en blanco y debajo de ella un esquema de fórmula, esto significa que cualquier fórmula con esa forma se puede introducir en cualquier momento de la demostración; o, lo que es lo mismo, que tal fórmula es una verdad lógica del sistema.

La primera regla es la *reflexividad de la identidad*.

**Definición 107: Reflexividad de =**

$$\text{Refl=}\quad \frac{\qquad}{\forall\alpha(\alpha = \alpha)}$$

Esta regla corresponde a la afirmación 1 de arriba, e implica a 2.

Seguimos con la simetría de la identidad, con la que podemos demostrar la afirmación

3 de arriba.

**Definición 108: Simetría de =**

Sim= $$\overline{\forall\alpha\forall\beta[(\alpha = \beta) \supset (\beta = \alpha)]}$$

La siguiente propiedad lógica de la identidad es la transitividad.

**Definición 109: Transitividad de =**

Trans= $$\overline{\forall\alpha\forall\beta\forall\delta[(\alpha = \beta \;\&\; \beta = \delta) \supset \alpha = \delta]}$$

La validez de esta regla nos permite inferir la afirmación 4 de arriba. Es fácil ver que es una verdad lógica. Los ejemplos son infinitos: *si Andrés es el mismo que Manuel, y Manuel es el mismo que El Peje, entonces Andrés es el mismo que El Peje.* O: si $f(x) = y$, y además $y = z^2$, se debe seguir que $f(x) = z^2$. Para verlo por transposición: si Peter Parker es Spiderman, y Spiderman es el mejor reportero de *El Clarín*, entonces, si Peter Parker *no* fuera el mejor reportero de *El Clarín*, como *él* es Spiderman, Spiderman no podría ser tampoco el mejor reportero de *El Clarín*.

Finalmente, tenemos:

**Definición 110: Sustitución de idénticos**

SustId $$\overline{\forall\alpha\forall\beta[((\alpha = \beta) \;\&\; \Phi[\alpha]) \supset \Phi[\beta]]}$$

Esta última regla simplemente nos dice que lo siguiente es una verdad lógica: los objetos idénticos tienen las mismas propiedades, lo cual corresponde a la afirmación 5.

Usando estas cuatro reglas, podemos inferir todas las afirmaciones 1-6 de arriba.

**Ejercicio # 57**

Formaliza las oraciones 1-5 y utiliza las cuatro reglas que hemos visto (y las anteriores) para demostrarlas. Como no parten de ninguna premisa, sólo vas a poner cada afirmación como la conclusión de un argumento sin premisas, y utilizarás las cuatro reglas anteriores para introducir cualquier fórmula que tenga esa forma.

Aunque ninguna de estas cuatro reglas es estrictamente de eliminación o de introducción, porque no contienen ninguna premisa, sí se relacionan con inferencias que pueden usarse para introducir o eliminar la conectiva. Estas inferencias serán **reglas derivadas de la identidad**, pues su validez se puede demostrar a partir de las que acabamos de ver. Y como son válidas, las podemos utilizar en cualquier demostración.

### 12.2.2. Reglas derivadas

La regla SustId nos permite, suponiendo que tengamos una afirmación de identidad y una predicación a uno de los objetos, «eliminar» la identidad predicando lo mismo al «otro» objeto. No importa si no tengo cuantificadores. Por ejemplo, si tengo que:

$$a = b$$

y que:

$$Fc \lor \neg Ha,$$

entonces puedo inferir:

$$Fc \lor \neg Hb,$$

al introducir la fórmula en SustId, sustituyendo la matriz «$\Phi$» que aparece en ella por «$Fc \lor \neg H\_$», y después usar eliminación de los cuantificadores universales y del condicional. Esto es válido porque la regla SustId contiene esquemas de matrices $\Phi$ en la que las únicas variables libres están ligadas por los cuantificadores al inicio. Ejemplificando sobre el caso de arriba, y usando las variables $x$ y $y$ tendríamos:

$$\forall x \forall y[((x = y) \,\&\, (Fc \lor \neg Hx)) \supset (Fc \lor \neg Hy)],$$

lo cual, por aplicaciones de E$\forall$, nos permite hacer la inferencia de arriba.

En resumen: tenemos, como regla derivada a partir de SustId y de E$\forall$. También la podemos llamar «*Sustitución de Idénticos*» (SustId). Usando las kappas ($\kappa_1$, $\kappa_2$, $\kappa_3$) para *cualquier* tipo de constante (normales, con gorrito, y con asterisco), la definimos así:

**Definición 111: Sustitución de idénticos (derivada)**

SustId $$\frac{\begin{array}{c}\kappa_1 = \kappa_2 \\ \Phi[\kappa_1]\end{array}}{\Phi[\kappa_2]}$$

Veamos un ejemplo de una inferencia que podemos justificar con esta SustId.

**ejemplo 47**

1. $a = b$
2. $H(a,c)$ $/ \therefore H(b,c)$
3. $H(b,c)$ SustId(1,2)

Algo parecido sucede con las demás reglas. Usándolas y con aplicaciones de E∀, podemos justificar que las siguientes son inferencias válidas para *todas* las constantes (con gorrito, ficticias, y normales). En primera, Refl= significa que siempre puedo introducir $a = a$, para cualquier constante. Eso justifica la siguiente regla derivada.

**Definición 112: Reflexividad de = (derivada)**

Refl= $$\frac{}{\kappa_1 = \kappa_2}$$

También podemos justificar la siguiente versión derivada de la regla de simetría:

**Definición 113: Simetría de = (derivada)**

Sim= $$\frac{\kappa_1 = \kappa_2}{\kappa_2 = \kappa_1}$$

De igual forma, la versión derivada de la regla de transitividad:

**Definición 114: Transitividad de = (derivada)**

Trans= $$\frac{\begin{matrix}\kappa_1 = \kappa_2 \\ \kappa_2 = \kappa_3\end{matrix}}{\kappa_1 = \kappa_3}$$

Para cerrar, vamos a poner todas las reglas que introdujimos este capítulo, básicas y derivadas, en el mismo lugar.

**Definición: Reglas de la identidad**

Refl= (básica) $$\frac{}{\forall\alpha(\alpha = \alpha)}$$

| | |
|---|---|
| Sim= (básica) | $\dfrac{}{\forall\alpha\forall\beta[(\alpha=\beta)\supset(\beta=\alpha)]}$ |
| Trans= (básica) | $\dfrac{}{\forall\alpha\forall\beta\forall\delta[(\alpha=\beta\ \&\ \beta=\delta)\supset(\alpha=\delta)]}$ |
| SustId (básica) | $\dfrac{}{\forall\alpha\forall\beta[((\alpha=\beta)\ \&\ \Phi[\alpha])\supset\Phi[\beta]]}$ |
| Refl= (derivada) | $\dfrac{}{\kappa_1=\kappa_2}$ |
| Sim= (derivada) | $\dfrac{\kappa_1=\kappa_2}{\kappa_2=\kappa_1}$ |
| Trans= (derivada) | $\dfrac{\begin{array}{c}\kappa_1=\kappa_2\\ \kappa_2=\kappa_3\end{array}}{\kappa_1=\kappa_3}$ |
| SustId (derivada) | $\dfrac{\begin{array}{c}\kappa_1=\kappa_2\\ \Phi[\kappa_1]\end{array}}{\Phi[\kappa_2]}$ |

## Ejercicio # 58

1. Formaliza y demuestra (puedes usar el mismo modelo para todos, o distintos):

    *a*) Todas las orcas son mamíferos. Keiko es Willy. Willy es una orca. Por lo tanto, Keiko es un mamífero.
    *b*) Todas las orcas son cetáceos, y todos los cetáceos son mamíferos. Willy es una orca. Por lo tanto, algunos mamíferos son cetáceos.
    *c*) No todos los mamíferos son cetáceos. Si algunos mamíferos no son cetáceos, entonces, o Willy es un cetáceo o Willy es un mamífero. Si Willy es un cetáceo, Willy es un mamífero. Por lo tanto, Willy es un mamífero.
    *d*) Ningún cetáceo es un pez; pero todos son mamíferos. Willy es Keiko, y es un cetáceo. Por lo tanto, Keiko es un mamífero, pero no es un pez.
    *e*) Algunos cetáceos son orcas, otros no. Si no todos los cetáceos son orcas, entonces algunos cetáceos no son peces. Por lo tanto, existe algo que no

es un pez.

   f) Ningún pez es mamífero. El que todos los peces no sean mamíferos implica que Nemo no es mamífero. El que Nemo no sea mamífero equivale a que Tiburoncín no sea mamífero. Por lo tanto, Tiburoncín no es mamífero.
   g) Tiburoncín no es una orca, pero sí es un pez. Ningún pez es cetáceo. Por lo tanto, Tiburoncín no es cetáceo.
   h) Todos los cetáceos son mamíferos. Pero Nemo no es mamífero. Tiburoncín es distinto de Keiko, pero es el mismo que Nemo. Keiko es cetáceo. Por lo tanto, Keiko es mamífero, pero Tiburoncín no.
   i) Eres cetáceo sólo si eres mamífero. Eres pez sólo si no eres cetáceo. O Tiburoncín es un pez o es un cetáceo. Nemo es Tiburoncín. Por lo tanto, o Nemo es no es cetáceo o es un mamífero.
   j) Es falso que Nemo sea Keiko, pero es verdad que Nemo es Tiburoncín. Keiko, más bien, es Willy. Willy es un cetáceo, Nemo no. Todos los cetáceos son mamíferos. Por lo tanto, existen mamíferos y no toda cosa es un cetáceo.

2. Formaliza los siguientes argumentos (puedes definir el mismo modelo para todos) y demuestra su validez usando las reglas proposicionales, las de eliminación e introducción de los cuantificadores, las equivalencias de los cuadrados de oposición, y las reglas de la identidad.
   a) Ningún superhéroe es paciente. Batman es superhéroe y millonario. Por lo tanto, hay algún millonario que no es paciente.
   b) Peter Parker no es millonario. Esto se infiere de lo siguiente. Todo millonario es adinerado. Spiderman es un superhéroe no-adinerado. Spiderman es Peter Parker.
   c) Peter Parker no es Batman. Sólo Batman es millonario. Por lo tanto, Peter Parker no es millonario.
   d) Ningún superhéroe no es ágil. Batman y Peter Parker son superhéroes. Quien sea ágil es hábil. Por lo tanto, algunos superhéroes son hábiles.
3. Usando las reglas de los cuantificadores (E∀, I∀, E∃, I∃), las reglas de los dos cuadrados de oposición, las reglas de la identidad,[4] y las de lógica proposicional, demuestra las siguientes tres inferencias:
   a) 1) $\forall x \neg(Qx)$
      2) $\neg Qa \supset \forall x R(a,x) \quad / \therefore\ \neg\exists x \neg R(a,x)\ \&\ R(a,c)$
   b) 1) $Fb\ \&\ Sa$
      2) $\exists x(Fx) \supset \forall x(Qx) \quad / \therefore\ \forall x(Px \vee Qx)$
   c) 1) $\neg G(a,b) \supset \forall x(x \neq a) \quad / \therefore\ \exists x \exists y G(x,y)$

## 12.3. «Hay a lo más *n*» y «Hay al menos *n*» *

La lógica que estamos estudiando, LC1=, es la lógica de dos cuantificadores básicos: «todos» y «alguno». Como vimos con los cuadrados de oposición, usando la negación podemos expresar otras **frases cuantificacionales**, es decir, frases que expresan la cantidad de objetos de un dominio de discurso que tienen alguna propiedad. Estas son: «ninguno» (es decir, «ni al menos uno») y «algunos no» (es decir, «no todos»). En esta sección y la siguiente vamos a ver cómo usar las conectivas que ya tenemos para expresar otras frases cuantificacionales: «al menos $n$», «a lo más $n$» y «exactamente $n$», donde $n$ es un número natural (es decir: uno finito, positivo y entero, como 0, 1, 2, . . . ).

Esta es una muestra del **poder expresivo** de la lógica LC1=: es decir, es un ejemplo de qué tanto puede expresar nuestra lógica. Por supuesto, como todo aparato formal, la lógica no puede expresar toda frase imaginable. Por ejemplo, no podemos expresar «hay a lo más $\lambda$», donde «$\lambda$» es cualquier número *infinito* (sobre esto, ver la sección 14.5.1, abajo), simplemente porque para ello necesitaríamos fórmulas de una longitud infinita, algo que no nos permiten nuestras reglas de formación (def. 82). Otras frases cuantificacionales que no podemos expresar en nuestra lógica son, por ejemplo, «la mayoría . . . » (como en «La mayoría de los países en América no son islas») y «la minoría . . . ». Para esto se requieren otros formalismos, que no revisaremos en este libro.

### 12.3.1. «Hay al menos *n*»

Ya sabemos cómo expresar que hay *al menos un* $F$: «$\exists x(Fx)$». Esto nos podría llevar a pensar que, para expresar que hay *al menos dos* $F$s —o lo que es lo mismo que hay *mínimo* dos $F$s—, simplemente escribiríamos:

$$\exists x \exists y (Fx \,\&\, Fy) \tag{12.1}$$

Pero esto es incorrecto. La fórmula 12.1 *también* es verdadera en modelos en los que **solamente** hay un $F$. ¿Por qué? [...]

Entonces, la fórmula 12.1 no es la adecuada para expresar lo mismo que «hay al menos dos $F$s». Tampoco nos ayudaría la siguiente:

$$\exists x(Fx) \,\&\, \exists y(Fy), \tag{12.2}$$

por básicamente la misma razón: esta también es verdadera en modelos en los que hay un único $F$.

Para tener la formalización correcta, la idea es partir de la fórmula que habíamos pensado inicialmente (12.1) y agregarle lo necesario para eliminar el problema que tenía. El problema es que ella también era verdadera en modelos en los que hay un solo

$F$. Entonces, la idea es agregar lo necesario para que sea falsa en esos modelos en los que solamente hay un $F$.

Podemos usar esta:

$$\exists x \exists y[(Fx \mathbin{\&} Fy) \mathbin{\&} (x \neq y)], \tag{12.3}$$

que es la fórmula correcta, pues es verdadera en *todos y sólo* aquellos modelos en los que haya dos o más cosas que son $F$.

(Nota que si hubiéramos intentado lo mismo en 12.2, no hubiera funcionado, pues la cláusula de diferencia, «$x \neq y$», tiene que estar en el alcance de ambos cuantificadores. El resultado sería: «$\exists x(Fx) \mathbin{\&} \exists y(Fy) \mathbin{\&} x \neq y$», que no es una fórmula del lenguaje, pues las dos últimas variables no están siendo ligadas.)

Vamos a definir estos cuantificadores que, en general, llamaremos «cuantificadores de mínimos». Pero, antes de hacerlo, vamos a establecer una convención sobre el uso de paréntesis, que nos ayudará a simplificar la notación cuando sea necesario.

*Convención* 14. Cuando tengamos una fórmula (o subfórmula o matriz dentro de una fórmula) que **sólo** contenga conjunciones o que **sólo** contenga disyunciones como conectivas principales, podemos ahorrarnos los paréntesis interiores.

Por ejemplo, podemos abreviar a:

$$[(Sb \mathbin{\&} \neg Pd) \mathbin{\&} (Qe \mathbin{\&} Pc)] \mathbin{\&} \neg Qa$$

como:

$$(Sb \mathbin{\&} \neg Pd \mathbin{\&} Qe \mathbin{\&} Pc \mathbin{\&} \neg Qa)$$

debido a la convención 14. De igual forma, podemos abreviar a:

$$(Rd \vee Qa) \vee [(Sb \vee \neg Qc) \vee Se]$$

como:

$$(Rd \vee Qa \vee Sb \vee \neg Qc \vee Se)$$

gracias a la misma convención.

Esta convención se justifica debido a que tanto la conjunción como la disyunción son **conmutativas**: $(A \vee B) \dashv\vDash (B \vee A)$ y $(A \mathbin{\&} B) \dashv\vDash (B \mathbin{\&} A)$, y **asociativas**: $(A \vee B) \vee C \dashv\vDash A \vee (B \vee C)$ y $(A \mathbin{\&} B) \mathbin{\&} C \dashv\vDash A \mathbin{\&} (B \mathbin{\&} C)$.

Habiendo establecido la convención sobre el uso de paréntesis cuando tenemos a conjunciones o negaciones como conectivas principales, ya podemos definir los que cuantificadores de mínimos.

En la definición, usaré **variables con subíndices** (como «$x_1$») para el caso general. Variables con distintos subíndices cuentan como variables distintas. Usar estas nos ayudará a ver el *patrón* formal que subyace a todos estos casos: la idea básica que generalizamos para cualquier número natural $n$. Entonces, algo como «$\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n$»

representa una cadena de $n$ cuantificadores existenciales. Si (por ejemplo) $n = 4$, entonces esa cadena sería: «$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4$», pero si $n = 2$, la cadena, más bien, es: «$\exists x_1 \exists x_2$». Lo mismo para «$(Fx_1 \ \& \ Fx_2 \ \& \ \ldots \ \& \ Fx_n)$», que representa $n$ matrices en conjunción, cada una predicando «$F$» de una variable. Por ejemplo, si $n = 4$, lo anterior sería: «$(Fx_1 \ \& \ Fx_2 \ \& \ Fx_3 \ \& \ Fx_4)$». Ahora sí: veamos la definición.

**Definición 115: Cuantificadores de mínimos**

Hay al menos 1 $F$: $\exists_{\geq 1} x(Fx)$
$\exists x(Fx)$

Hay al menos 2 $F$s: $\exists_{\geq 2} x(Fx)$
$\exists x \exists y(Fx \ \& \ Fy \ \& \ x \neq y)$

Hay al menos 3 $F$s: $\exists_{\geq 3} x(Fx)$
$\exists x \exists y \exists z(Fx \ \& \ Fy \ \& \ Fz \ \& \ x \neq y \ \& \ x \neq z \ \& \ y \neq z)$

$\vdots$ $\vdots$

Hay al menos $n$ $F$s: $\exists_{\geq n} x(Fx)$
$\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n[(Fx_1 \ \& \ Fx_2 \ \& \ \ldots \ \& \ Fx_n)$
$( \ \& \ x_1 \neq x_2 \ \& \ x_1 \neq x_3 \ \& \ \ldots \ \& \ x_{n-1} \neq x_n)]$

### 12.3.2. «Hay a lo más *n*»

Ya que sabemos expresar que hay *mínimo* dos $Fs$, la generalización natural es preguntarnos si podríamos expresar que hay *máximo* dos $F$s —o lo que es lo mismo, que hay *a lo más* dos $Fs$— y, en general, si podríamos expresar que hay un *máximo* de $n$ cosas que sean $F$. La respuesta es que sí.

Como en el caso anterior, la fórmula adecuada tiene que ser aquella que sea verdadera en **todos y solamente aquellos** modelos en cuyo dominio haya máximo dos $F$s: esos en los que haya o bien 0, o bien 1, o bien 2 cosas que son $F$, pero ni una sola más. ¿Cómo lo expresaríamos?

Como queremos permitir modelos en los que no haya ninguna $F$, no sería útil usar el cuantificador existencial. Esto sugiere usar el universal. Otro hecho que apoya esto es que una fórmula cuya conectiva principal es un universal puede ser *verdadera por vacuidad* (ver el ejemplo 39), de manera que sea verdadera incluso si ninguna cosa en el dominio es $F$. Y esto último nos importa porque queremos una fórmula que también sea verdadera en dominios en donde no hay ni un solo $F$.

Esta es la fórmula:

$$\forall x \forall y \forall z[(Fx \mathbin{\&} Fy \mathbin{\&} Fz) \supset (x = y \lor x = z \lor y = z)] \tag{12.4}$$

¿Cómo sabemos que es la correcta? Pues porque es verdadera en todos y sólo los modelos en cuyo dominio hay o bien cero, o bien una, o bien dos cosas que son $F$, y ni una sola más. ¿Cómo sabemos esto? Vamos por casos.

Si hay cero $F$s en el dominio, 12.4 será verdadera por vacuidad. Pues, en ese caso, ¡es verdad decir «hay máximo dos $F$s»! Esto es porque «máximo» nos da el *tope superior*: aquél número del que no pasa el número de $F$s. Pero, obviamente, el 0 no pasa de 2. (Por la misma razón, por supuesto, en ese modelo será verdad decir que hay máximo tres, o máximo cuatro, o máximo cinco, . . . $F$s en este dominio.)

Ahora bien, si hay solo un $F$ en el dominio, 12.4 también será verdad. Supongamos que el único $F$ es una cosa llamada «$a$». Entonces, 12.4 es verdad debido a dos razones. Primera, que cualesquiera cosas que sean $F$, van a ser idénticas con $a$ —van a ser, simplemente, $a$ misma. Segunda, que la disyunción es inclusiva y, por ello, cualesquiera $x$, $y$, $w$, $z$ que sean $F$, van a ser todas idénticas entre sí: van a ser una y la misma. Esta única cosa $F$ es la misma $a$. Un razonamiento parecido demuestra la verdad de 12.4 en modelos donde hay dos $F$s.

Finalmente, debe suceder que 12.4 sea falsa en modelos donde hay tres o más cosas que son $F$. Y eso, de hecho, sucede. Por ejemplo, si hay tres $F$s, habrá tres cosas $F$ que son distintas entre sí. Usemos «$a$», «$b$» y «$c$», respectivamente, para nombrarlas. Entonces, será verdad que $Fa \mathbin{\&} Fb \mathbin{\&} Fc$, pues las tres son $F$. Sin embargo, será falso que $a = b \lor a = c \lor b = c$, pues las tres son distintas entre sí, por lo que los tres disyuntos son falsos. Por lo tanto, 12.4 es falsa en modelos donde hay tres cosas. Razonamientos parecidos demuestran la falsedad de 12.4 en modelos con cuatro o más cosas $F$.

Podemos generalizar la idea. Para decir que hay máximo $n$ cosas $F$ (para $n$ un número natural), utilizaremos $n + 1$ cuantificadores universales, y tendremos una disyunción, para cada par de las variables ligadas por ellos, diciendo que son idénticas entre sí (como la identidad es simétrica, si ya tenemos, por ejemplo, que $x = y$, no es necesario poner que $y = x$.) Como antes, para el caso general usaremos variables con subíndices (como «$x_1$»), notando que variables con distintos subíndices cuentan como variables distintas.

**Definición 116: Cuantificadores de máximos**

Hay a lo más 1 $F$: $\exists_{\leq 1} x(Fx)$
$\forall x \forall y[(Fx \mathbin{\&} Fy) \supset x = y]$

Hay a lo más 2 $F$s: $\exists_{\leq 2} x(Fx)$
$\forall x \forall y \forall z[(Fx \mathbin{\&} Fy \mathbin{\&} Fz) \supset (x = y \lor x = z \lor y = z)]$

| | |
|---|---|
| Hay a lo más 3 $F$s:<br>$\forall x \forall y \forall z \forall w[(Fx \ \& \ Fy \ \& \ Fz \ \& \ Fw) \supset (x = y \lor x = z$<br>$\lor x = w \lor y = z \lor y = w \lor z = w)]$ | $\exists_{\leq 3}x(Fx)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| Hay a lo más $n$ $F$s:<br>$\forall x_1 \forall y_2 \ldots \forall x_n[(Fx_1 \ \& \ Fx_2 \ \& \ \ldots \ \& \ Fx_n) \supset$<br>$(x_1 = x_2 \lor \ldots \lor x_{n_1} = x_n)]$ | $\exists_{\leq n}x(Fx)$ |

## 12.4. Cuantificadores exactos y descripciones definidas *

Como vimos antes, una oración de la forma «$\exists x(Fx)$» sólo significa que hay *al menos* una cosa en el dominio que es $F$; puede haber exactamente una, o más de una. Otra manera de verlo es así: fórmulas como «$\exists x(Fx)$» van a ser verdaderas en todo modelo que contenga *una o más cosas* que sean $F$.

Pero a veces deseamos decir cosas más específicas: cuando hablamos, por ejemplo, del Presidente de México, no suponemos que *hay uno o más*; tampoco suponemos que no hay *ninguno*. Suponemos que hay *uno y sólo uno*, o como también podemos decirlo, *exactamente uno*. El cuantificador existencial, por sí mismo, no puede expresar esto; pero, afortunadamente, podemos definirlo con la ayuda de la constante de identidad.

Cuando decimos que hay *exactamente una* cosa que es $F$, decimos que *hay una y sólo una* cosa $F$ (en el dominio). Todo esto es decir simplemente que: primero, *hay al menos una*, pero —segundo— que *no hay ninguna otra*. (Pues si hubiera una distinta, habrían dos $F$s, no una.) La primera parte ya sabemos cómo formalizarla: $\exists x(Fx)$. Podríamos intentar esto para la segunda parte (la de «no hay ninguna otra»): $\neg\exists x(Fx)$, pero es una obvia contradicción con la primera (y de nada servirá intentar usar «$x$» para una y «$y$» para la otra.[5]) La idea es que no exista ninguna *otra* cosa, *además de la primera que hemos mencionado*, que sea $F$. Así que necesitamos que esta segunda variable esté en el alcance del cuantificador de la primera parte:

$$\exists x(Fx \ \& \text{ no hay ninguna otra cosa que sea } F, \text{ además de } x) \tag{12.5}$$

¿Cómo formalizamos esta idea de «otra cosa, además de $x$»?

Pues ya que sabemos cómo expresar que hay *mínimo* un $F$ y también sabemos cómo expresar que hay *máximo* un $F$, podemos juntar ambas ideas para decir que hay *exactamente* un $F$.

Recordemos que «Nadie que no sea Superman puede volar» sería (usando predicados y constante obvia) algo como: $\neg\exists x(x \neq s \;\&\; Vx)$, o, lo que es lo mismo (por el cuadrado moderno de oposición): $\forall x(x \neq s \supset \neg Vx)$. Usando transposición en esta, tenemos una tercera forma equivalente: $\forall x(Vx \supset x = s)$. Esta última nos permite ver que «Nadie que no sea Superman puede volar» en realidad significa lo mismo que «Sólo Superman puede volar».

Con base en lo anterior, podemos ver que: «Ninguna otra cosa, además de Superman, es $F$» puede formalizarse como: $\forall x(Fx \supset x = s)$: todos los $F$s, son, en realidad, Superman. Análogamente, «Nadie fuera de AMLO es Presidente» sería algo como $\forall x(Px \supset x = a)$: sólo AMLO es presidente: todo Presidente es, en realidad, AMLO: quien no sea AMLO, no es Presidente.

Ahora ya podemos ver cómo terminar de formalizar la oración 12.5. Primero, queremos decir que hay *al menos una* cosa $F$, para después decir que esa cosa de hecho es *la única* que es $F$. Ya vimos cómo decir que *nada fuera de una cosa particular $a$* es $F$: $\forall x(Fx \supset x = a)$. Juntando ambas ideas, podemos definir al cuantificador «existe un único $F$», que a veces se abrevia con «$\exists! x(Fx)$», como dice la siguiente definición.

**Definición 117: Cuantificador exacto «existe un único $F$»**

$$\exists! x(Fx) \underset{\text{def.}}{\equiv} \exists x\left[Fx \;\&\; \forall y(Fy \supset x = y)\right]$$

Es muy importante notar que en el lado derecho de la definición 117 el cuantificador existencial alcanza todo lo que sigue, pues de otra manera la última aparición de «$x$» quedaría libre y no tendríamos una fórmula (sino una matriz).

Este tipo de oraciones existenciales nos dicen que una *única* cosa es $F$. Podemos ver, por lo de arriba, que siempre se van a descomponer en dos frases o cláusulas:

$$\underbrace{\exists x[Fx}_{\text{Cláusula de existencia}} \qquad \& \; \underbrace{\forall y(Fy \supset x = y))}_{\text{Cláusula de unicidad}}]$$

### Descripciones definidas

A inicios del siglo XX,[6] Russell notó que se pueden usar este tipo de fórmulas existenciales para analizar lógicamente lo que se conocen como **descripciones definidas**. Una descripción definida es una frase como «El actual presidente de Rusia» o como «La mejor gimnasta del mundo en 2018». Es decir, las descripciones definidas son frases en las que nos referimos a un único individuo del dominio, usando artículos definidos (como «*el*», o «*la*»), junto con propiedades que sólo un objeto del dominio satisface.

De acuerdo con Russell y otros, las cuantificaciones numéricas (es decir, las fórmulas definidas en la definición 117) pueden usarse para modelar a las descripciones definidas.[7] Para formalizar una oración como «El actual presidente de Rusia es un judoka», Russell propuso, primero, definir un operador que significara «el único que es el actual presidente de Rusia», y después predicar de *ese* objeto, que es un judoka. Para esto, definimos el operador «$\imath$».

**Definición 118: Operador de unicidad de Russell**

El operador de unicidad de Russell es «$\imath$», que liga variables variables (como los cuantificadores). Significa «el único que…». Entonces,

$$\imath\alpha(\Phi\alpha)$$

se refiere al único objeto del dominio que es $\Phi$ en ese dominio, es decir, al objeto que haga verdad que $\exists!\alpha(\Phi\alpha)$. Es decir, «$\imath\alpha(\Phi\alpha)$» funciona como un *nombre* para ese objeto.
Una fórmula de la forma:

$$\Psi[\imath\alpha(\Phi\alpha)]$$

significa que el único objeto del dominio que es $\Phi$ también es $\Psi$, y es verdadera en un dominio siempre y cuando la correspondiente fórmula sea verdadera:

$$\exists\alpha[\Phi\alpha \,\&\, \forall\beta(\Phi\beta \supset \alpha = \beta) \,\&\, \Psi\alpha]$$

Con esto, la formalización de «El actual presidente de Rusia es un judoka» (usando «$P$» para el predicado «es presidente de Rusia actualmente» y «$J$» para el predicado «es un judoka») sería así:

$$J[\imath x(Px)] \tag{12.6}$$

Como dice la definición 118, el operador compuesto «$\imath x(Px)$» significa: «*el único que es $P$*». Entonces, 12.6 nos dice: «el único que es $P$, es $J$», es decir: $\exists x[Px \,\&\, \forall y(Py \supset x = y) \,\&\, Jx]$. Como se puede ver, a la fórmula cuantificacional se agrega una cláusula de *predicación*; y eso se abrevia con la ayuda del nuevo operador «$\imath$».

### Cuantificadores y números finitos

Regresemos a los cuantificadores numéricos. Usando una variación de la misma idea para cuantificadores numéricos para *exactamente un* objeto —tener cláusulas de existencia y de unicidad— podemos decir cosas como «hay exactamente dos hemisferios en el planeta Tierra». Si interpretamos «$H$» como la cualidad de *ser un hemisferio de la Tierra*, sería:

$$\exists x\exists y\left[(Hx \,\&\, Hy \,\&\, x \neq y) \,\&\, \forall z(Hz \supset (z = x \vee z = y))\right] \tag{12.7}$$

Aunque parece más complicada, la idea es la misma que antes, con un «extra». Primero, afirmamos que hay al menos una $x$ y al menos una $y$ que son $H$. Esto, por sí mismo, no nos asegura que $x$ y $y$ sean distintas cosas. (Por ejemplo, aún cuando hay un único Presidente, es verdad decir que $\exists x \exists y(Px \ \& \ Py)$: ambos existenciales son hechos verdad por esa única persona.) Es por ello que incluimos la cláusula de diferencia: $x \neq y$. Esta *sí* nos asegura que hablamos de *al menos* dos cosas *distintas*.

Lo que sigue en la fórmula es simplemente una cláusula de unicidad. Nos dice que *cualesquiera* cosas que sean $H$, deben ser o bien $x$, o bien $y$. Esto impide que haya una *tercera* cosa que es $H$, y termina de asegurar que la fórmula 12.7 sea **verdadera en todos y sólo los modelos en los que hay exactamente dos** $H$s.

Si descomponemos esto como arriba, tendríamos algo así:

$$\underbrace{\exists x \exists y[(Fx \ \& \ Fy)}_{\text{Cláusula de existencia}} \ \& \ \underbrace{(x \neq y)}_{\text{Cláusula de diferencia}} \ \& \ \underbrace{\forall z(Fz \supset (z = x \lor z = y))]}_{\text{Cláusula de unicidad}}$$

Iterar estas ideas nos permite decir que hay *exactamente tres*, o *exactamente cuatro*, o *exactamente cinco*, ... cosas que son $F$ (para cualquier predicado $F$). Para cada número natural $n$, decimos que hay exactamente $n$ cosas que son $F$, simplemente poniendo $n$ cláusulas de existencia, poniendo todas las cláusulas de diferencia entre las $n$ cosas (diciendo que cada una es distinta de las demás), y usando un cuantificador universal con una variable que no haya aparecido antes, digamos $z$, para poner una cláusula de unicidad que tendrá $n$ disyuntos diciendo: «o bien $z$ no es ..., o bien $z$ no es ...», etc.

Esto significa que, para cada número natural $n$, podemos expresar que *hay exactamente $n$ cosas* (que simbolizaremos como «$\exists_n$») con el aparato de la lógica LC1=, como se ve en la definición que sigue.

**Definición 119: Cuantificadores numéricos**

Hay 0 $F$s: $\exists_0 x(Fx)$
$\neg \exists x(Fx)$

Hay exactamente 1 $F$ (también «$\exists ! x(Fx)$»): $\exists_1 x(Fx)$
$\exists x \left[Fx \ \& \ \forall y(Fy \supset x = y)\right]$

Hay exactamente 2 $F$s: $\exists_2 x(Fx)$
$\exists x \exists y[(Fx \ \& \ Fy \ \& \ x \neq y) \ \& \ \forall z(Fz \supset (z = x \lor z = y))]$

$\vdots$ $\vdots$

Hay exactamente $n$ $F$s: $\exists_n x(Fx)$

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n [(F x_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} F x_n \mathbin{\&} x_1 \neq x_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} x_1 \neq x_n \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} x_{n-1} \neq x_n) \mathbin{\&} \forall z (Hz \supset (z = x_1 \vee \ldots \vee z = x_n))]$$

Esto muestra que **la lógica clásica de primer orden con identidad, LC1=, nos permite definir a los números naturales**. Desafortunadamente, otros sistemas numéricos requieren de aparatos más expresivos, como la teoría de conjuntos.

## Ejercicio # 59

Ⓘ Formaliza la oración «*Hay a lo más tres candidatos*» (o «Hay máximo tres candidatos»). Da un dominio en el que interpretes «$C$» como el predicado para ser un candidato.

(II) Formaliza la oración «*Hay al menos cuatro casas*». Da un dominio en el que interpretes «$A$» como el predicado para ser una casa.

(III) Formaliza la oración «*Hay exactamente tres personas, a lo más cuatro coches, al menos tres casas, y cada persona tiene al menos una casa y un coche*». Da un dominio en el que interpretes «$P$» como el predicado para ser una persona, «$A$» como el predicado para ser una casa, «$O$» como el predicado para ser un coche, y «$T$» como el predicado de dos lugares para tener (es decir, $T(\alpha,\beta)$ significa que $\alpha$ tiene a $\beta$).

## Ejercicio # 60

Los siguientes acertijos pueden resolverse usando la lógica LC1=. Resuélvelos.

1. Quien haya asesinado al rey tiene las manos manchadas de sangre. Juan es cocinero y Luis, mayordomo. Ningún jardinero anduvo en la cocina el domingo por la noche; pero cualquiera que tenga las manos manchadas de sangre estuvo en la cocina el domingo por la noche. Pedro es un jardinero y sale los domingos por la noche. Lupe es cocinera pero salió el sábado por la noche, y quien sale el sábado por la noche, no está en la cocina el domingo por la noche. Juan es Pedro, pero Luis no es Juan. El asesino del rey es sólo uno de los ya mencionados (es decir, es o Juan, o Luis, o Pedro, o Lupe). ¿Quién mató al rey?
2. Beto el jardinero es futbolista, como Juan. Pero Rob el sacerdote no es futbolista aunque Alberto el mayordomo, sí. El asesino tenía sangre en las manos a las 5 pm, y es una única persona. Todos los futbolistas jugaron un partido, pero no se sabe a qué hora; sin embargo, solo los mayordomos son futbolistas. Juan tenía las manos limpias a las 5 pm, y sabemos que Rob no es mayordomo; porque hay un único mayordomo. ¿Quién es el asesino, y por qué?
3. Todo el que juega, baila; y todo el que baila, se mueve. Si Juan juega pero Rosa no se mueve, y además, sólo puedes bailar con una persona distinta de ti, y además, María viene con José pero María no se mueve, y no hay nadie además de ellos cuatro, entonces ...¿José baila? Si es así, ¿con quién? ¿Por qué?
4. Si al menos un profe es buena onda, entonces, todos los profes son buena onda.

Ahora bien: si Juan es profe, Juan es buena onda. Sin embargo, no todos los profes son buena onda. En conclusión…¿Juan es un profe o no es un profe? ¿Por qué?

5. Todo el que asesina, comete pecado mortal. Cualquiera que cometa pecado mortal, se va a existir al Infierno. Pero en el Infierno sólo puede existir un único ente: El Enemigo. Entonces: ¿Qué relación tendrán Richard, quien es un asesino, y El Enemigo?

## 12.5. Resumen del capítulo

- La constante de identidad, ‘=’, es una nueva constante lógica *primitiva*, que siempre se pone entre dos constantes, o entre dos variables, o entre una constante y una variable.
- Al expandir el lenguaje de la lógica LC1 con ella (añadiéndola al alfabeto y añadiendo reglas de formación para ella), tenemos el lenguaje de la lógica LC1.
- La constante de identidad nos permite expresar oraciones que no eran expresables en la lógica LC1. Por ejemplo, oraciones del tipo de «tal (no) es idéntico a tal», de «Solamente *tal* (no) es …» y de «Exceptuando a *tal*, todos son …»
- Las reglas de la identidad reflejan que esta ella una relación *reflexiva, simétrica y transitiva*, además de que permite la *sustitución uniforme*. Tenemos dos tipos de reglas para la identidad: las *básicas*, que nos permiten introducir fórmulas que expresan las propiedades de la identidad, y las *derivativas*, que nos permiten hacer inferencias con constantes, que también reflejan esas propiedades.
- Al usar la nueva constante de identidad, podemos definir tres nuevos tipos de expresiones cuantificacionales: los *cuantificadores de máximos y mínimos*, y los *cuantificadores numéricos*. Los cuantificadores de máximos son expresiones de la forma «hay máximo $n$ cosas que …», los de mínimos, expresiones de la forma: «hay mínimo $n$ cosas que …», mientras que los numéricos, expresiones de la forma: «hay exactamente $n$ cosas que …»
- La constante de identidad también nos permite expresar *descripciones definidas*, que funcionan como expresiones que refieren a una cosa particular. Con ello, introducimos un nuevo operador, «$\iota$», definible en términos de una descripción definida, y con el cual podemos abreviar fórmulas que dicen cosas como «El único que es de tal forma, también es de tal otra».

## Proyecto: Existencia e inexistencia

**Antecedentes** ⇢ Uno de los problemas que Russell quería resolver en su ensayo clásico «Sobre el denotar», era el siguiente. Las oraciones que contienen términos que se usan para referir a objetos que, de hecho, no existen, parecen ir en contra de la lógica. Por ejemplo, hoy en día Francia es una república. Por ello, la frase «El actual rey de Francia» no refiere a ningún objeto: por más que busquemos en todo el planeta y en todo el universo, nunca encontraremos a ninguna cosa que sea el actual rey de Francia. Pero según la ley del tercero excluido, una de las dos siguientes oraciones tiene que ser verdadera:

- o bien, «El actual rey de Francia es calvo»,
- o bien «El actual rey de Francia no es calvo».

¡Pero parece que ninguna lo es! Como el actual rey de Francia no existe, no hay cosa alguna en el universo que responda a esa descripción —«el actual rey de Francia»— y que sea calva. Por lo que la primera oración parece falsa. Pero por la misma razón, no hay cosa alguna en el universo que responda a esa descripción y *no* que sea calva; por lo que la segunda oración también parece falsa. ¿Significa esto que la mayoría de los lógicos desde Aristóteles han estado equivocados sobre la validez de la ley del tercero excluido?

El problema es todavía más grave. Si la oración «El actual rey de Francia es calvo» es falsa, parece que debe ser verdad que el actual rey de Francia *no* es calvo. Sin embargo, como sabemos que «El actual rey de Francia no es calvo» también es una oración falsa, eso parecería implicar que el actual rey de Francia *sí* es calvo. Pero que sea verdad tanto que el actual rey de Francia *no* es calvo como que el actual rey de Francia *sí* es calvo ¡parece una contradicción! ¿Significa esto que la mayoría de los lógicos desde Aristóteles han estado equivocados sobre la validez de la ley de no contradicción?

«No», dijo Russell sobre ambas preguntas. Propuso su **teoría de las descripciones definidas**, de acuerdo a la cual, la expresiones como «el actual rey de Francia» (y otras) son descripciones definidas (en el sentido de la sección 12.4).

Entonces, usando una interpretación obvia (y un dominio irrestricto), la forma lógica que, de acuerdo con Russell, tiene la oración «el actual rey de Francia es calvo» es:

$$C[\imath x(Rx)] \tag{12.8}$$

Y la forma lógica de «el actual rey de Francia no es calvo» sería:

$$\neg C[\imath x(Rx)] \tag{12.9}$$

Con esto, Russell argumentó que el conflicto entre las leyes lógicas y el par de oraciones sobre la calvicie del actual rey de Francia, era meramente aparente:

¡No hay tal conflicto! ¿Cómo lo hizo? Primero, Russell notó que ambas fórmulas (12.8 y 12.9) son falsas. Pero esto no entra en conflicto ni con la ley del tercero excluido, ni con la de no contradicción, dijo Russell, pues estas fórmulas no son *contradictorias*, sino *contrarias*. ¿Puedes ver cómo?

**Problema** ⇢ Primero, desarrolla las formas lógicas de las fórmulas que Russell propuso (12.8 y 12.9), siguiendo las definiciones de este capítulo. Después de ello, argumenta cómo es que ellas son contrarias. Finalmente, di qué formula(s) sí son falsa(s), de manera que sea vea cómo se siguen cumpliendo las leyes del tercer excluso y de no contradicción.

## Notas

1. Ver Hunter 1971, §21.

2. Se puede definir en términos del condicional $\supset$ y una conectiva 0-ádica que no hemos visto: $\bot$, que representa una contradicción y a la que siempre se le asigna el valor falso. Así, $A \supset \bot$ define a $\neg A$. También se puede definir en términos de cualquiera de dos conectivas diádicas que no hemos visto: o la barra de Sheffer $|$, que significa «no ambas», o la daga de Peirce: $\downarrow$, que significa «ni una ni otra». La negación $\neg A$ se puede definir con ya sea $A|A$ o con $A \downarrow A$.

3. Sobre la importancia filosófica de distinguir estos distintos significados de «es», veáse Moro Simpson 1975. Por otro lado, algunos filósofos han pensado que hay *otros* sentidos importantes y distintos de «es» —como el «es» de esencia, o el de constitución, o el de un tipo generalizado de identidad—, e incluso se han sugerido sistemas lógicos para algunas de estas nociones. No podremos revisar estas cuestiones metafísicas aquí (pero véase Correia 2017, Fine 1994, Johnston 1992.) Ferrater Mora y LeBlanc reconocen, además, el «es» de inclusión conjuntística (que ejemplifican con «los limeños son peruanos») y el de pertenencia ($\in$) conjuntística, que revisaremos en la sección 14. Ver Ferrater Mora y LeBlanc 1962, pp. 104-105.

4. En realidad, esta vez sólo se necesita Refl=.

5. Como hemos visto, qué variables usemos es irrelevante, mientras estén siempre ligadas y no haya ambigüedad en el alcance de los cuantificadores—por lo que, como ambas fórmulas tienen el alcance de sus respectivos cuantificadores definido y sin afectar al otro, podemos usar la *misma* variable para ambas fórmulas.

6. Ver su artículo «Sobre el denotar» («*On denoting*»).

7. Russell, Quine

capítulo

# 13

# Teoría de las relaciones *

## Contenidos del capítulo

## Objetivos de aprendizaje

1.
2.

Como vimos en el capítulo 12, las siguientes inferencias son válidas para las constantes de todos los tipos:

$$\text{Refl= (derivada)} \quad \begin{array}{c} \\ \hline \kappa_1 = \kappa_2 \end{array} \qquad \text{Trans= (derivada)} \quad \begin{array}{c} \kappa_1 = \kappa_2 \\ \kappa_2 = \kappa_3 \\ \hline \kappa_1 = \kappa_3 \end{array}$$

$$\text{Sim= (derivada)} \quad \begin{array}{c} \kappa_1 = \kappa_2 \\ \hline \kappa_2 = \kappa_1 \end{array} \qquad \text{SustId (derivada)} \quad \begin{array}{c} \kappa_1 = \kappa_2 \\ \Phi[\kappa_1] \\ \hline \Phi[\kappa_2] \end{array}$$

En realidad, las tres primeras reglas reflejan ciertas **propiedades de alto nivel** de la relación lógica de identidad.

(Decimos que son *propiedades* de alto nivel porque son *características* de esa entidad que es la relación de identidad. Y decimos que son propiedades *de alto nivel* porque, al menos conceptualmente, podemos separar una «jeraraquía» de propiedades.[1] Las de primer nivel serían las propiedades que tienen los individuos: por ejemplo, el pizarrón tiene la cualidad de ser blanco y la de ser rectangular. Las de segundo nivel serían las propiedades que tienen las propiedades de primer nivel: el blanco tiene la propiedad de ser un color, la rectangularidad la propiedad de ser una figura geométrica, por ejemplo. Las de tercer nivel serían propiedades que tienen las propiedades de segundo nivel; las de cuarto nivel serían propiedades de las propiedades de tercer nivel, y así *ad infinitum*.)

## 13.1. Propiedades lógicas de las relaciones

Regresando al tema, las reglas reflejan las propiedades de la identidad, y ahora veremos cómo estas pueden no ser únicas de la identidad. **Nos vamos a restringir a las propiedades de las relaciones de dos lugares**, pues desde este punto ya surgen muchas propiedades lógica y matemáticamente importantes.

Un estudio más profundo de las propiedades lógicas de relaciones de más lugares (que llamaremos **relaciones poliádicas**) queda para otro momento.

### 13.1.1. Transitividad, no transitividad y anti-transitividad

Regresando a las propiedades lógicas, como ejemplo tenemos a Tran=, que refleja la propiedad de la identidad que se conoce como **transitividad**. Pero esta propiedad también puede ser una propiedad de muchas otras relaciones: por ejemplo, la relación «_ *es más alto que* _», también es transitiva.

En este capítulo, voy a usar la letra $R$ como variable para relaciones binarias (es decir, relaciones entre *dos* cosas).

**Definición 120: Relación transitiva**

Una relación $R$ es transitiva *en un modelo específico*, siempre y cuando en ese modelo sea verdad que:

$$\forall x \forall y \forall z \ \left[ (R(x,y) \ \& \ R(y,z)) \supset R(x,z) \right] \qquad \text{(Transitividad)}$$

$R$ es una relación transitiva si la fórmula Transitividad es verdadera en todo modelo que no cambie la interpretación de $R$.

Un ejemplo de relación transitiva es «ser más alto que». Poniéndola en lugar de «$R$», tendríamos este como un caso de Transitividad:

$$\forall x \forall y \forall z \ \text{(si } x \text{ es más alto que } y \text{ y } y \text{ es más alto que } z\text{, entonces } x \text{ es más alto que } z\text{)}$$

Además de «ser idéntico a» y «ser más alto que», existen muchísimas relaciones binarias que también son transitivas. Por ejemplo, deberías comprobar que la relación «es de igual altura que» es transitiva.

Pero muchas relaciones **no** son transitivas. Por ejemplo, si sustituimos «*aprecia a*» por $R$ en Transitividad, obtenemos un condicional que es falso en algunos modelos. Se dice que John Lennon estaba muy enamorado de Yoko Ono, pero que ella era muy mal vista por los demás miembros de los Beatles. Supongamos por un momento que esto fuera verdad. Es claro que $R$ *no* es transitiva en ese modelo: aunque es verdad que $R$(Paul, John) y que $R$(John, Yoko) —McCartney apreciaba a Lennon, y éste a Yoko—, no es verdad que $R$(Paul, Yoko).

Se sigue de Transitividad que, si $R$ es una relación transitiva, entonces es lógicamente válido «unir» el primer «eslabón» de la «cadena» con el último. Vamos a usar constantes para ejemplificarlo. Al unir los eslabones, podríamos hacer inferencias de esta forma:

$$R(a,b)$$
$$R(b,c)$$
$$R(c,d)$$
$$\text{Por lo tanto, } R(a,d).$$

La «cadena» estaría formada (abusando de la notación) así:

$$aRbRcRd$$

y uniríamos el primer «eslabón» con el último infiriendo —válidamente, si la relación es transitiva— que $aRd$.

En general, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son $n$ constantes (distintas o iguales entre sí), y si $R$ es una relación transitiva, no importa la longitud de la cadena, siempre podemos unir el primero con el último eslabón:

$$\begin{gathered} R(a_1, a_2) \\ R(a_2, a_3) \\ \vdots \\ R(a_{n-1}, a_n) \\ \text{Por lo tanto, } R(a_1, a_n). \end{gathered}$$

Algo parecido es lógicamente válido cuando tenemos cuantificadores y variables.

Y, como sabemos, si una inferencia es lógicamente válida, entonces el condicional formado por la conjunción de sus premisas como antecedente y la conclusión como consecuente, será también lógicamente verdadero (verdadero en todo modelo). Usando la inferencia de arriba, podríamos ver que un caso especial de Transitividad para $n$ constantes es:

$$[R(a_1, a_2) \mathbin{\&} R(a_2, a_3) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} R(a_{n-1}, a_n)] \supset R(a_1, a_n)$$

Típicamente, una propiedad va a ser transitiva si es de cualquiera de estos tres tipos:

- Habla de «ser el mismo _ que», o
- Habla de «ser más _ que».
- Habla de «ser menos _ que».

(Probablemente haya más casos de tipos de relaciones que siempre sean transitivas, sólo que por ahora no puedo pensar en otro.)

Como ejemplo de lo primero, «ser del mismo peso que» es transitiva; como ejemplo de lo segundo, «ser más joven que», también. «Tener menos plumas» es un caso de lo tercero. Por ejemplo, para cualesquiera aves, es un hecho puramente lógico que: si $a$ tiene menos plumas que $b$, y éste tiene más plumas que $c$, entonces $a$ tiene menos plumas que $c$.

Pero debemos notar que relaciones de la forma «ser distinto _ que» **no** son transitivas. Por ejemplo, de que la dirección de $a$ sea distinta de la dirección de $b$, y de que la dirección de $b$ sea distinta de la dirección de $c$, **no** se sigue que la dirección de $a$ sea distinta de la dirección de $b$. Habrá casos—modelos—en los que sí, y casos en los que no. Análogamente, la relación de *diferencia* ($\neq$) **no** es transitiva. De:

$$\begin{gathered} \text{Superman} \neq \text{Spiderman}, \qquad \text{y} \\ \text{Spiderman} \neq \text{Clark Kent}, \end{gathered}$$

¡*por supuesto* que no se sigue que Superman ≠ Clark Kent!

Vamos a distinguir entre relaciones **transitivas**, **no-transitivas**, y **antitransitivas**. Las primeras ya las vimos. Las no-transitivas son relaciones que son transitivas en algunos modelos, pero que no son transitivas en otros (es decir, que satisfacen Transitividad en algunos modelos, pero no en otros). Por ejemplo, la relación «_ *es amigo de* _» en un modelo donde el dominio consiste sólo en mis amigos Álvaro, Ezequiel y Rafa, que además son amigos entre sí, esta relación es transitiva, pues el siguiente condicional es verdadero:

Si Carlos es amigo de Ezequiel, quien es amigo de Rafa, quien es amigo de Álvaro, entonces Carlos es amigo de Álvaro.

Y este condicional es verdadero porque todos somos amigos. Sin embargo, existen otros modelos donde *la misma* relación «_ *es amigo de* _» no es transitiva, es decir, no se cumple el condicional. Por ejemplo, un modelo cuyo dominio consiste sólo de Paul McCartney, John Lennon, y Yoko Ono. Así que «_ *es amigo de* _» es una relación **no transitiva**, pues en algunos casos (dominios) satisface la fórmula de la transitividad, y en otros no.

Pero también existen relaciones que podemos llamar **anti-transitivas**:

Definición 121: Relación anti-transitiva

$$\forall x \forall y \forall z \ \big[(R(x,y) \ \& \ R(y,z)) \supset \neg R(x,z)\big] \qquad \text{(Anti-transitividad)}$$

Por ejemplo, la relación «_ *es hijo de* _» es anti-transitiva: si $a$ es hijo de $b$ y $b$ es hijo de $c$, entonces $a$ **no** es—¡en ningún modelo!—padre de $c$: es decir, en todo modelo donde el antecedente sea verdad, será falso que $a$ sea hijo de $c$. (Será su *nieto*, pero esta es otra relación.)

Otro ejemplo de relación anti-transitiva viene de la aritmética. Consideremos como dominio al conjunto de los números enteros, es decir, el conjunto:

$$\mathbb{Z} = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

y, usando «$n$», «$m$», como variables para números enteros, definamos la siguiente relación, que llamaremos «$S$»:

$$S(n,m) \text{ siempre y cuando: } n = m + 1,$$

es decir, «$S(n,m)$» significa que $n$ es el *sucesor* de $m$. Esta relación es anti-transitiva: no importa cuáles números le asignemos a «$n$» y «$m$» en el conjunto $\mathbb{Z}$, si $n$ es el sucesor de $m$, y $m$, a su vez, es el sucesor de otro número, $o$, entonces $n$ *no* es el sucesor de $o$.

Las relaciones «_ *aprecia a* _» y «≠» son *no-transitivas*, mientras que «_ *es hijo de* _» y la relación de sucesor en los números enteros son *anti-transitivas*.

**Ejercicio # 61**

Ⓘ Da dos ejemplos de relaciones transitivas y explica por qué son transitivas.

(II) Da dos ejemplos de relaciones *que no sean* transitivas y explica por qué son transitivas.

Ⅲ Da una demostración de lo afirmado en el texto: «si $n$ es el sucesor de $m$, y $m$, a su vez, es el sucesor de otro número, $o$, entonces $n$ *no* es el sucesor de $o$». Usa la definición de sucesor: $S(n,m)$ siempre y cuando: $n = m + 1$.

### 13.1.2. Simetría, *A*simetría, y *Anti*simetría

La identidad, comos nos dice la regla Sim=, es una relación **simétrica**. Vamos a definir esta propiedad ahora.

**Definición 122: Relación simétrica**

Una relación $R$ es simétrica en un modelo específico, siempre y cuando en ese modelo sea verdad que:

$$\forall x \forall y \ \left[R(x,y) \supset R(y,x)\right] \qquad \text{(Simetría)}$$

$R$ es una relación simétrica siempre y cuando la fórmula Simetría sea verdadera en todo modelo que no cambie la interpretación de $R$.

Es decir: una relación simétrica es aquélla que se puede «voltear» de dirección, de manera lógicamente válida: si $R$ es una relación simétrica entre dos cosas $a$ y $b$, en realidad no importa si escribimos $R(a,b)$ o $R(b,a)$, pues estas fórmulas son lógicamente equivalentes (se implican en todo modelo que deje fija la interpretación de «$R$»). Es decir: las relaciones simétricas **no tienen una «dirección» intrínseca**.

Como vimos antes (sección 12.2), la identidad es simétrica: siempre que $a = b$, también $b = a$. Gracias a esto, todas las relaciones que hablen de algún tipo de identidad exacta en algún aspecto —como *ser igual de perseverante*, o *tener la misma cantidad de hijos*— van a ser simétricas: si $a$ tiene la misma cantidad de hijos que $b$, entonces —como cuestión de necesidad lógica— $b$ tiene la misma cantidad de hijos que $a$.

Sin embargo, muchísimas relaciones no son simétricas: si $a$ tiene más hijos que $b$, por supuesto que no se sigue que $b$ tenga más hijos que $a$. Resulta que, como con las relaciones no-transitivas (sección 13.1.1) podemos clasificar a las relaciones no-simétricas en dos tipos.

Las relaciones ***a*simétricas** son aquellas que son *simétricas en algunos casos y no-simétricas en otros*. Por ejemplo, la relación *amar a* es asimétrica: en algunos casos, $a$ ama a $b$ y $b$ ama a $a$; en otros —los amores no-correspondidos— la relación no es simétrica. Es decir: las relaciones asimétricas van a ser simétricas en algunos modelos, pero van a ser no-simétricas en otros.

Más importante es la definición de las relaciones anti-simétricas.

**Definición 123: Relación anti-simétrica**

Una relación $R$ es anti-simétrica siempre y cuando lo siguiente sea verdadero en todo modelo que no cambie la interpretación de «$R$»:

$$\forall x \forall y \left[(R(x,y) \ \& \ R(y,x)) \supset x = y\right] \qquad \text{(Anti-simetría)}$$

Un caso claro de anti-simetría es la relación «mayor o igual que» ($\leq$) en los números: si $a$ es un número mayor o igual que $b$, y si $b$ es mayor o igual que $a$, entonces $a$ es el mismo número que $b$.

**Ejercicio # 62**

Ⓘ Da dos ejemplos de relaciones simétricas y explica por qué son simétricas.

Ⓘⓘ Da dos ejemplos de relaciones *que no sean* simétricas y explica por qué son simétricas.

### 13.1.3. Reflexividad, *I*rreflexividad y *Anti*reflexividad

Otra propiedad que tiene la identidad es la reflexividad.

**Definición 124: Relación reflexiva**

Una relación binaria es reflexiva en un dominio cuando todo objeto en ese dominio está relacionado, mediante esa relación, consigo. Así, $R$ será reflexiva cuando este condicional sea verdadero en todo dominio que no cambie la interpretación de «$R$»:

$$\forall x \ [R(x,x)] \qquad \text{(Reflexividad)}$$

A diferencia de las propiedades anteriores, esta no está condicionada. Sin embargo, podemos definir una noción más débil de reflexividad, que llamaremos *cuasi-reflexividad*:

$$\forall x \ [\exists y R(x,y) \supset R(x,x)] \qquad \text{(Cuasi-reflexividad)}$$

Como en los casos anteriores, es fácil ver un patrón en el tipo de relaciones que son reflexivas o cuasi-reflexivas: involucran algún tipo de igualdad; aunque las cuasi-reflexivas suponen que hablamos de *un tipo de objeto*. Por ejemplo, la relación «*proceder del mismo país que*» es cuasi-reflexiva: como las galaxias no provienen de ningún país, no provienen de su mismo país y así, no provienen del país de nadie.

Como con las dos propiedades anteriores, podemos diferenciar entre relaciones irreflexivas y anti-reflexivas.

Las relaciones **irreflexivas** van a ser reflexivas en algunos modelos y no reflexivas en otros. Un ejemplo es la relación «_ *es el peor enemigo de* _»: en un modelo cuyo dominio contiene sólo a Donald Trump, como Donald Trump es su peor enemigo, esta relación será reflexiva. Pero en modelos que incluyen a más cosas, esta relación no será reflexiva —por ejemplo, el peor enemigo de Trótskiy no era Trótskiy mismo, sino Stalin.

Las relaciones **anti-reflexivas** son aquéllas que *en ninguna circunstancia* —en ningún modelo— relacionan a un objeto consigo.

**Definición 125: Relación anti-reflexiva**

Una relación $R$ es anti-reflexiva si lo siguiente es verdadero en todo modelo que deje fija la interpretación de «$R$»:

$$\forall x \neg [R(x,x)] \qquad \text{(Anti-reflexividad)}$$

Por ejemplo, «_ es más alto que _» es anti-reflexiva, pues ninguna cosa es más alta que sí misma (al menos, si consideramos a la cosa en un instante determinado). También la relación entre cantidades «_ es mayor que _» es anti-reflexiva, pues ninguna cantidad es mayor que sí misma.

**Ejercicio # 63**

Ⓘ Da dos ejemplos de relaciones reflexivas y explica por qué son reflexivas.

(II) Da dos ejemplos de relaciones *que no sean* reflexivas y explica por qué son reflexivas.

### 13.1.4. Relaciones de equivalencia y clases de equivalencia

Ahora vamos a definir un tipo muy importante de relaciones: las *relaciones de equivalencia*. Se les conoce así porque nos permiten definir un sentido exacto en el que dos cosas distintas pueden ser «equivalentes» en un aspecto —pueden contar como «las mismas» cuando consideramos sólo algunas de sus propiedades. Esto nos permite usar a las relaciones de equivalencia para definir *clases de equivalencia*, construcciones muy importantes en lógica y matemáticas.

**Definición 126: Relación de equivalencia**

$R$ es una relación de equivalencia siempre y cuando sea una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

Como se ve en las reglas de la identidad, la identidad es una relación de equivalencia. Pero otras relaciones también lo son: las que involucren un sentido de «identidad de aspectos». Por ejemplo, la relación «tener la misma edad» es una relación de equivalencia: es reflexiva —todo objeto tiene la misma edad que sí mismo—, simétrica —la relación no tiene una dirección intrínseca—, y transitiva —si alguien es de la misma edad que otra persona, que a su vez es de la misma edad que una tercera, entonces ésta será de la misma edad que la primera.

Como la relación «tener la misma edad» es de equivalencia, nos permite definir un sentido en que dos cosas son «la misma»: cuando dos cosas están relacionadas por ella, serán idénticas *con respecto a su edad.* En general, si $R$ es una relación de equivalencia, cualesquiera cosas relacionadas por $R$ son *idénticas en el aspecto «remarcado» por* $R$.

**Ejercicio # 64**

(I) Da dos ejemplos de relaciones de equivalencia y explica por qué son de equivalencia.

(II) La relación «$\alpha$ es *sucesor de* $\beta$» se define entre números enteros y positivos, y significa que: $\alpha = \beta + 1$. ¿Es simétrica? ¿Es transitiva? ¿Es reflexiva?

(III)

Bien. Además de esto, para *cualquier* relación binaria $R$, podemos definir el conjunto que da su extensión.

**Definición 127: Extensión de una relación binaria**

La extensión de una relación binaria es el conjunto de los pares de cosas, $\langle a, b\rangle$, tales que $R(a, b)$.

Cuando $R$ es una relación de equivalencia, es común usar el símbolo «$\simeq$» para denotarla. A la extensión de tales relaciones (el conjunto definido por 127) se le conoce como **clase de equivalencia**, y se suele denotar: $\llbracket\quad\rrbracket_{\simeq}$.

De esta manera, si $a$ es un elemento del dominio que se relaciona con otras cosas mediante la relación de equivalencia $\simeq$, decir que otro elemento del dominio, $b$, es un elemento de $\llbracket a\rrbracket_{\simeq}$ es decir que $a$ y $b$ son equivalentes en el aspecto «remarcado» por $\simeq$.

**ejemplo 48**

Veamos tres ejemplos de relaciones de equivalencia.

1. Cualquier objeto que sea elemento del conjunto:

$$\llbracket \text{Barack Obama en enero de 2018} \rrbracket_{\textit{tener la misma edad}}$$

será un objeto que tenga exactamente la misma edad que tenía Barack Obama en enero de 2018. Entonces, esta clase de equivalencia puede tomarse como representante de un número de años: los años que tenía Obama —y todos sus equivalentes— en ese entonces.

2. La relación entre flechas «_ tiene la misma dirección que _» es una relación de equivalencia: toda flecha tiene su misma dirección, si una tiene la misma dirección que otra entonces también a la inversa, y la relación es transitiva.

   Consideremos entonces la clase de equivalencia correspondiente a esta relación, para la flecha particular $\nearrow$:

$$[\![ \nearrow ]\!]_{\textit{tener la misma dirección}}$$

   Todo elemento de esta clase va a ser una flecha con la *misma* dirección que $\nearrow$. En lo único en que van a diferir las flechas de esta clase es en su longitud.[2]

3. Como último ejemplo, deberías revisar que la equivalencia material de la lógica proposicional, $\equiv$, de hecho es una relación de equivalencia en el dominio de todas las proposiciones.

Cada relación de equivalencia, como hemos dicho, *induce* clases de equivalencia, en el sentido en que éstas se definen en términos de la primera. Otro hecho central acerca de las clases de equivalencia es que éstas son una **partición** del dominio. En general, hacer una partición de un conjunto consiste en acomodar sus elementos en subconjuntos, de manera que todo elemento del conjunto esté alguno de estos subconjuntos, pero que no esté en más de uno. Esto se ve más claro con un diagrama. Una partición de un conjunto (el círculo más grande) va a definir subconjuntos (las elipses) de sus elementos (los puntos), véase la Figura 13.1. Como hemos dicho, las clases de equivalencia inducidas por una relación de equivalencia son un tipo de partición; de hecho, toda partición generará, a su vez, una relación de equivalencia. Después, cuando veamos teoría de conjuntos con un poco de mayor profundidad, definiremos formalmente el concepto de partición (sección 14.9).

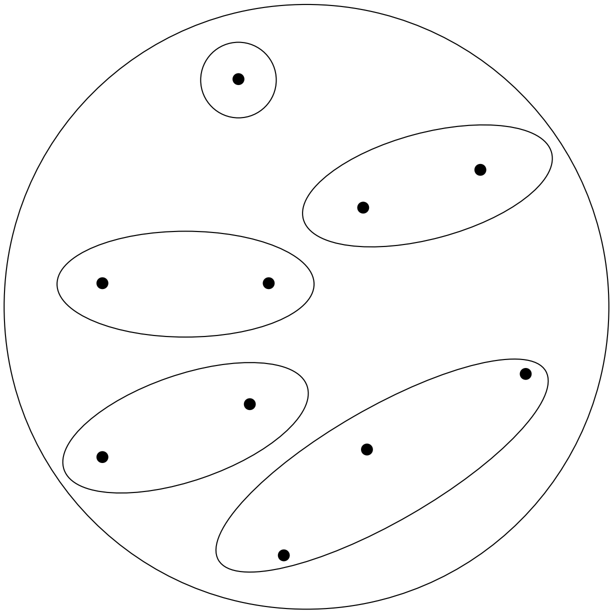


Figura 13.1: *Una partición del dominio.*

Las relaciones de equivalencia son importantes en matemáticas porque nos permiten hablar de cuándo dos objetos matemáticos distintos tienen *la misma estructura*, y en muchos casos, las demostraciones matemáticas sólo requieren pensar en la misma estructura, no en cualidades particulares de objetos particulares. Así, en matemáticas es usual demostrar propiedades para clases de equivalencia de objetos, de manera que esas clases representen una estructura general. También son importantes en metafísica para el problema de la *individuación de objetos* al menos desde que Frege notó que las relaciones de equivalencia podían servirnos para *abstraer* «nuevos» objetos a partir de objetos previamente «dados»—así como individuamos direcciones a partir de flechas, mediante una relación de equivalencia.[3]

## 13.1.5. Relaciones triviales, totales, conexas y seriales

Existen diferentes maneras de definir relaciones en un dominio que «relacionen *todo* en el dominio».

### Trivialidad

La manera más directa es la noción de **relación trivial**: una relación $R$ tal que cualesquiera objetos del dominio están $R$-relacionados, es una relación trivial en ese dominio. Como en los casos anteriores, una relación será trivial siempre y cuando sea trivial en todo dominio (de todo modelo que deje fija la interpretación de $R$ como *esa* relación). Es decir, la relación denotada por «$R$» en un modelo es trivial siempre y cuando, en todo modelo que interprete de igual manera «$R$», esto sea verdad:

$$\forall x \forall y [R(x, y)] \tag{13.1}$$

Se le llama «trivial» porque «*no exige nada*»: su definición no tiene ninguna condición especial. Es obvio que una relación trivial va a ser una relación de equivalencia: es reflexiva, simétrica, y transitiva.

La relación trivial es la relación de equivalencia «*más grande*» en el sentido de relacionar cualquier cosa con *todas* las demás. En este mismo sentido, la relación de identidad es la relación de equivalencia «*más pequeña*», pues relaciona a cada cosa *sólo* consigo misma.

Esto se entiende muy bien gráficamente. El dominio de un modelo es un conjunto de cosas, que podemos representar por un círculo—el conjunto—que adentro contiene puntos: sus elementos. Cada punto distinto representa un elemento distinto, como se ilustra en la Figura 13.2.

Si ahora representamos las clases de equivalencia definidas por la identidad, éstas van a tener un *único* elemento, ¡pues ninguna cosa está relacionada mediante la identidad con alguna cosa *distinta*! (Figura 13.3)

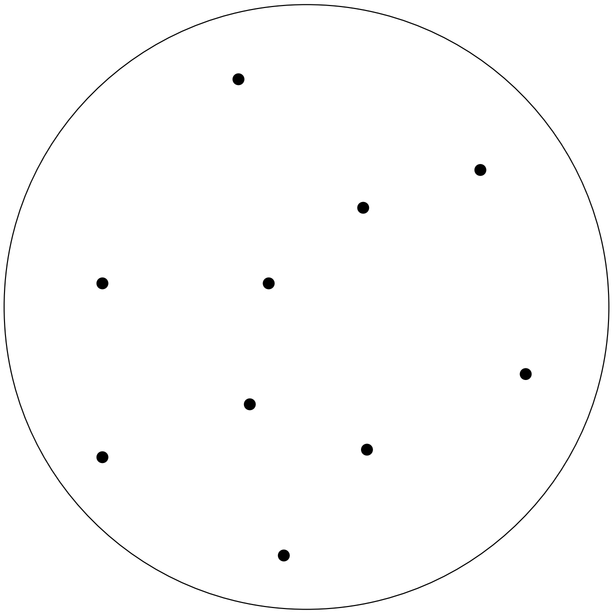


Figura 13.2: *El dominio de un modelo y sus elementos.*

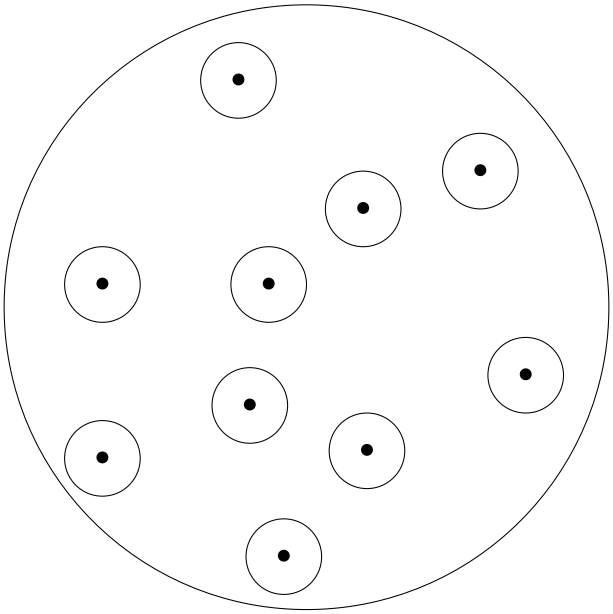


Figura 13.3: *Clases de equivalencia definidas por la identidad.*

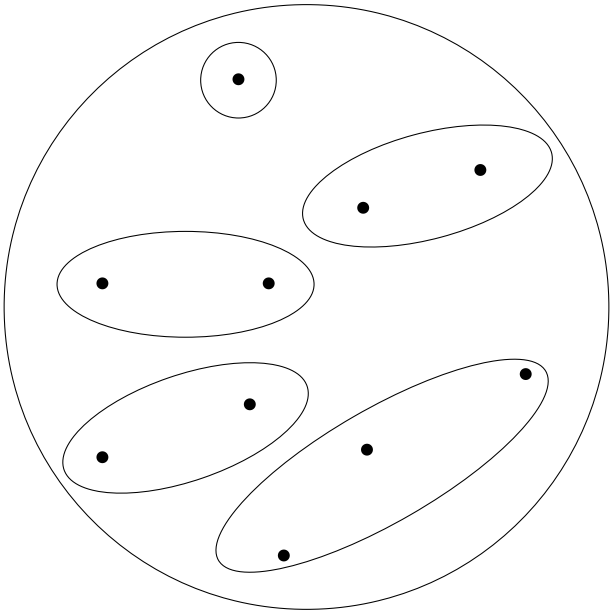


Figura 13.4: *Clases de equivalencia que no son definidas por la relación de identidad o por una relación trivial.*

Ahora bien, la relación trivial sobre un dominio se vería exactamente como la Figura 13.2: la relación trivial coincidiría exactamente con todo el modelo, pues relaciona a cada cosa con cada cosa.

En cambio, relaciones de equivalencia que no son triviales—que no incluyen a todo el dominio—pero tampoco las más pequeñas (no son la identidad) inducirían clases de equivalencia que se verían de formas parecidas a la Figura 13.4.

### Totalidad

Una noción más débil de «relación entre *todo* del dominio» es la de **relación total**. Una relación $R$ es **total** en un dominio siempre y cuando, para cualesquiera elementos $x$ y $y$ del dominio, o bien $R(x,y)$, o bien $R(y,x)$. (Como es una tautología que $[R(a,a) \vee R(a,a)] \equiv R(a,a)$, *toda relación total va a ser reflexiva.*) Una relación total, entonces, va a ser total en todo dominio; es decir:

**Definición 128: Relación total**

La relación referida por una interpretación de «$R$» es total siempre y cuando, en todo modelo que interprete igual a «$R$», sucede que:

$$\forall x \forall y[R(x,y) \vee R(y,x)] \tag{Total}$$

Otras maneras de llamarle a las relaciones totales son «relaciones *completas*», «relaciones *estrictamente conexas*», o «relaciones dicotómicas», pues obedecen la ley de la dicotomía, 128.[4]

### Conexividad

Todavía más débil que la totalidad, es la propiedad de conexividad. Una relación $R$ es **conexa** es un dominio si satisface la ley de tricotomía (Total) *al menos para objetos distintos*; lo cual es decir que será conexa si para todo dominio satisface:

$$\forall x \forall y [x \neq y \supset (R(x,y) \vee R(y,x))] \tag{13.2}$$

Como es claro, una relación será total, si y solamente si es conexa *y además* es reflexiva. Otra manera de verlo es que una relación conexa es una relación total sin «exigir» que $R(a,a)$ para toda $a$ del dominio. Como algunos llaman «estrictamente conexas» a las relaciones totales, algunos llaman «*débilmente conexas*» a las relaciones que aquí simplemente llamamos «conexas».

### Serialidad

La conexividad (débil o estricta) es distinta de la **serialidad**, que es la noción más débil de «relación entre *todo* del dominio». $R$ es serial en un dominio siempre y cuando todo objeto del dominio tenga al menos otro con el que está $R$-relacionado. A diferencia de la conexividad, la serialidad no exige que todo objeto esté $R$ relacionado o por la «izquierda» o por la «derecha» con todo objeto del dominio (que sea distinto, si hablamos de conexividad débil); y todavía menos exige, a diferencia de la trivialidad, que todo objeto esté relacionado con todos los demás (y él mismo) del dominio.

Entonces, una relación es serial si es serial en todo dominio, es decir, hace verdad que:

$$\forall x \exists y [R(x,y)] \tag{13.3}$$

Debería ser obvio que toda relación reflexiva es serial: si $R(a,a)$ para toda $a$ del dominio, entonces cada $a$ del dominio tendrá al menos una cosa con la cual está $R$-relacionada—a saber, $a$ misma. Sin embargo, *no necesariamente toda relación serial es reflexiva*: en 13.3, nada fuerza a «$x$» y «$y$» a ser la misma cosa.

**(Ejemplos de relaciones triviales, totales, conexas y seriales.)**

## 13.2. Relaciones, entimemas, postulados de significado

Cuando sabemos que una relación es de algún tipo de los estudiados arriba—por ejemplo, es un orden parcial o total, o es asimétrica, etc.—podemos usar esas características de la relación como un tipo de «reglas» nuevas *acerca de esa relación*. Así, si en una inferencia tenemos una relación $R$ de la que se nos dice que es transitiva —o de la que sabemos que es transitiva, como «_ *tiene más libros que* _»—, podemos usar la regla de la transitividad (la fórmula 120) como premisa explícita extra (es decir, la escribimos como nueva premisa), o como una regla que usamos si se requiere en el argumento. Por ejemplo, si nos dieran un argumento como este:

> *Rita tiene más libros que Pedro, y Pedro tiene más libros que Josefina. Por lo tanto, hay al menos dos personas tales que Rita tiene más libros que cada una de ellas*,

podríamos usar el hecho de que la relación «_ *tiene más libros que* _» es transitiva, para poder demostrar la conclusión (junto con la regla de introducción de ∃, claro está).

En general, se conoce como **entimemas** a los argumentos que tienen *premisas implícitas*, es decir, premisas que se dan por sentado en el argumento pero que no se mencionan (ver la definición 5). Los argumentos con relaciones pueden ser entimemáticos al dejar implícitas las características lógicas de las relaciones de las que hablan, y por lo tanto, para demostrar su validez al formalizarlos para utilizar el sistema LC1=, usualmente deberemos formular estas características, ya sea como premisas explícitas o como reglas válidas acerca de tales relaciones.[5]

Esto sería un caso de lo que Rudolf Carnap introdujo con el nombre de «**postulados de significado**» o «**reglas semánticas**».[6] La idea esencial es que los postulados de significado de un elemento de algún lenguaje son las reglas o afirmaciones que *definen* el significado de ese elemento lingüístico. En el caso que nos ocupa en esta sección, las propiedades lógicas de las relaciones serían *definitorias* de las palabras o símbolos con los que nombramos a tales relaciones, por lo que usarlas como premisas nuevas es un caso de postulados de significado. L.T.F. Gamut lo explica así:

> La función de los postulados de significados es la de restringir la clase de todos los modelos a una cierta subclase. La subclase debe consistir en aquellos modelos en los cuales algún tipo de relación semántica entre (clases de) predicados sea válido, ciertas subclases de expresiones tengan propiedades semánticas específicas, y así en adelante.[. . . ] Los postulados de significado son fórmulas de nuestro lenguaje lógico. Las usamos para imponer restricciones sobre los modelos para nuestro lenguaje lógico y, por lo tanto, indirectamente, para el lenguaje natural, al estipular que solamente consideramos aquellos modelos en los cuales los postulados son válidos.[7]

Cabe notar que hay más tipos de postulados de significado que los provistos por las propiedades lógicas de las relaciones binarias, que convierten argumentos entimemáticos en argumentos con todas las premisas explícitas. Por ejemplo, algunas propiedades están relacionadas con otras por tales postulados: el ejemplo clásico sería:

$a$ es soltero si y sólo si $a$ no está casado,

pero seguramente podemos encontrar muchas más. Esto dependerá del argumento u oración del lenguaje natural que queramos formalizar en LC1=, y, por supuesto, de que comprendamos todos los términos involucrados en tal argumento.[8]

## 13.3. Introducción a la teoría de los órdenes

Un tipo especial de relación binaria entre muchos tipos distintos de cosas, son los *órdenes*.

Muchas veces nos interesa *ordenar* un conjunto de cosas: decir qué cosa va «antes» que otra, o «después» de otra, o incluso cuándo ambas «están al mismo nivel». Un ejemplo de orden es el de los *números naturales*: los números 0, 1, 2, 3, 4, …, hasta el infinito. Estos números tienen un orden «obvio» entre ellos: 0 es menor que 1, el que a su vez es menor que 2, y así sucesivamente. Gracias a este orden de los números naturales, podemos usarlos para, a su vez, ordenar muchas otras cosas. Por ejemplo, podemos hacer una lista de l@s alumn@s de un salón, diciendo que tal persona es la *primera*, a la que le sigue tal otra, que sería la *segunda*, y así sucesivamente.

Como en el ejemplo de la lista del salón, un orden puede tener un criterio bien definido—en ese caso, el orden alfabético. Pero también podríamos definir un orden arbitrario, como cuando tenemos un conjunto de sillas muy parecidas entre sí y las ordenamos solo para hacerlas corresponder con una lista de invitados: la primera en ese orden le corresponde a la primera persona en la lista y así sucesivamente, pero seleccionamos a una silla como la «primera» sin algún criterio específico. De cualquier forma, al terminar el «pareo» entre sillas e invitados, hemos ordenado a las sillas también.

Resulta que los órdenes tienen características que pueden ser estudiadas con la lógica cuantificacional.

### 13.3.1. Preorden

Antes de todo, revisaremos brevemente la noción de **pre-orden** (o **cuasi-orden**). Como antes, la constante de predicado «$R$» se refiere a un pre-orden siempre y cuando, en todo modelo que la interprete de la misma forma, se refiera a una relación que es un pre-orden en el modelo.

**Definición 129: Pre-orden**

Una relación $R$ es un pre-orden en un modelo siempre y cuando $R$ es reflexiva y transitiva en ese modelo.

A partir de cada pre-orden podemos definir un orden, si hacemos cierta «identificación» de objetos distintos en esta relación. Pero para entender esto, primero necesitamos revisar el concepto de orden.

### 13.3.2. Orden parcial

Primero hablaremos de los *órdenes parciales*. Como veremos ahora, resulta muy intuitivo usar la notación «≤» para referirse a los órdenes, si mantenemos en mente que la teoría de los órdenes es una **generalización** de las propiedades de órdenes más «familiares», entre cosas que ya conocemos bien, como los números naturales: $0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5 \ldots$

Como esta mismo ejemplo nos sugiere, usaremos la **notación de infijo**, que es lo que ya hacemos con la constante de identidad: en lugar de escribir (por ejemplo) «$\leq (1,2)$», como lo hacemos con las relaciones *en general*, al escribir cosas como «$R(a,b)$» —a lo cual se le conoce como la **notación de prefijo**—, pondremos al símbolo en medio de los términos, como ya hacíamos al aprender aritmética y álgebra. (Si pusiéramos al símbolo relacional *después* de los *relata*, esto se conoce como la **notación de sufijo**, y se vería así: «$(a,b)R$». Esta no la usaremos en estas notas, pues es menos usual; pero no tiene ningún defecto puramente lógico.)

La manera en que debemos leer fórmulas como «$a \leq b$» es: «$a$ es menor o igual que $b$». Pero no se requiere que necesariamente entendamos esto en un sentido *cuantitativo*, sino en un sentido *ordinal*. Si ordeno mis libros en el librero por orden alfabético a partir del autor, diré que tal libro va «antes» que otro en ese orden, y lo mismo podría decir que es «menor» que otro en ese orden. No presupongo ningún tipo de *magnitud* que esté comparando entre ambos libros. Con esta forma de leerlo, definamos qué es un orden parcial.

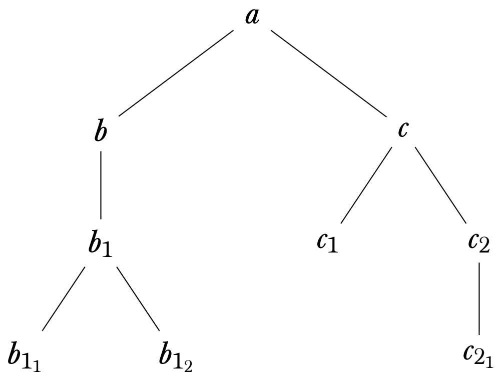
Definición 130: Orden parcial

Una relación binaria, $\leq$, es un **orden parcial** cuando tiene estas tres propiedades (para todo $x, y, z$):
**Reflexividad** $x \leq x$.
**Antisimetría** Si $x \leq y$ y también $y \leq x$, entonces $x = y$.
**Transitividad** Si $x \leq y$ y también $y \leq z$, entonces $x \leq z$.
Como antes, un orden es parcial *en un modelo* si satisface estas propiedades en ese modelo, y es *parcial* (ya no relativo a un modelo específico, sino por sí mismo) cuando es parcial en todo modelo.

En general, puedes pensar a un orden parcial como definiendo un «árbol», donde la raíz es el elemento que está antes de una serie de elementos, que formarían sus ramas. Dos elementos que sean **incomparables** —es decir, tales que ni $x \leq y$ ni $y \leq x$— vivirán en diferentes ramas del árbol.

**ejemplo 49**

Un ejemplo de esto son los *árboles genealógicos* que usamos para confirmar que una cadena de símbolos de LC0 sea una fórmula en la sección 4.5, def. 29 (ver, por ejemplo, la figura 4.3).
En general, consideremos un árbol en el sentido de la teoría de gráficas:



Confirmando lo dicho arriba, este árbol representa el siguiente orden parcial:

$$\{\ a < b < b_1 < b_{1_1};\ a < b < b_1 < b_{1_2};\ a < c < c_1;\ a < c < c_2 < c_{2_1}\ \},$$

donde, por ejemplo, vemos que $b_1$ y $c_{2_1}$ son incomparables.

Veamos un ejemplo de orden parcial, que es de relevancia para la ontología contemporánea.

**ejemplo 50**

Por ejemplo, en la *mereología* —la teoría que estudia la relación entre parte y todo—, es usual suponer que la relación _ *es parte de* _ (que podemos simbolizar con «$\sqsubseteq$»), es (al menos) un orden parcial. Entonces, $a \sqsubseteq b$ significa que $a$ es una parte de $b$. Toda cosa es una parte de sí misma, en un sentido generalizado —o «impropio»— de *parte*, de manera que Reflexividad vale para $\sqsubseteq$. Antisimetría también parece una regla adecuada para la relación de parte-todo; así como Transitividad.

Como mencioné arriba y como se ve en estos ejemplos, los órdenes parciales se llaman así —«parciales»— porque no necesitan ordenar *todo* lo que está en un modelo. Habrá cosas que sean «incomparables» o «indiferentes» respecto a estos órdenes. En el ejemplo de la mereología, si $\sqsubseteq$ es un orden parcial (que no es *total*, en el sentido que veremos en la sección 13.3.4, abajo), entonces habrá objetos que son «incomparables»: objetos distintos tales que ni uno sea parte del otro, ni el otro del primero. Por ejemplo, ni mi computadora es parte de la Pirámide del Sol, ni ésta es parte de mi computadora.

Los órdenes parciales son representables mediante lo que se conoce como **diagramas de Hasse**, en los que una flecha $a \longrightarrow b$ significaría que $a \leq b$ (o, en el ejemplo de la mereología, que $a \sqsubseteq b$). Si no hay flechas entre dos cosas, significa que éstas son incomparables.

Siguiendo con el ejemplo de la mereología, y tomándome a mi como ejemplo (a

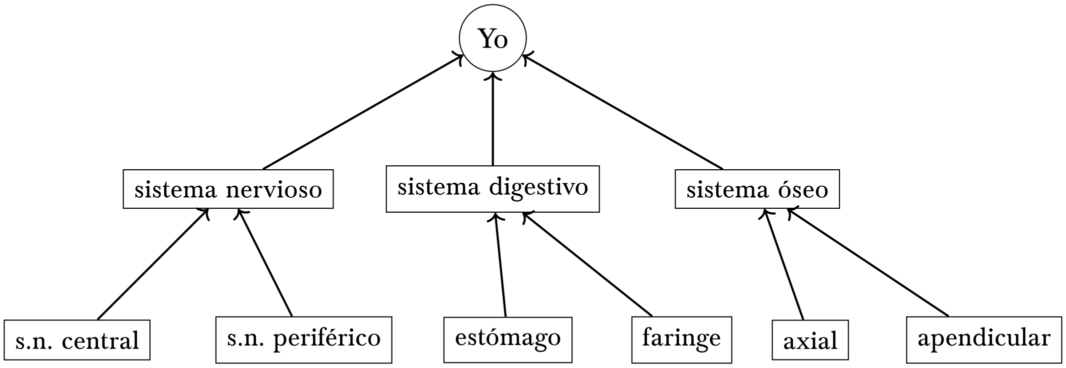


Figura 13.5: *Diagrama de Hasse para el orden parcial* $\sqsubseteq$ *entre algunas de mis partes.*

cierto nivel de descripción), podríamos usar un diagrama de Hasse para representar la relación entre algunas de mis partes, como en la Figura 13.5.

### 13.3.3. Órdenes estrictos y no estrictos

A partir de un orden parcial podemos definir un *orden estricto*. Como habíamos visto, la intención es leer «$a \leq b$» como «$a$ es menor o igual que $b$». A partir de esto, podemos definir un orden «estricto»: uno que no sea una disyunción, sino que se lea solamente como «$a$ es menor que $b$»; la notación obvia sería: «$a < b$».

Definición 131: Orden estricto

Un orden estricto tiene las siguientes propiedades (para cualesquiera objetos $x, y, z$ del dominio):

**Antirreflexividad** No sucede que $x < x$.

**Antisimetría «fuerte»** Si $x < y$, entonces no sucede que $y < x$.

**Transitividad** Si $x < y$ y también $y < z$, entonces $x < z$.

A la segunda propiedad le llamamos «Antisimetría 'fuerte'» porque sería una consecuencia de la antirreflexividad y de la antisimetría que revisamos en la sección 13.1.2, o, también, de la antirreflexividad y la transitividad.

### 13.3.4. Orden total o lineal

Un **orden total** o (**lineal**) en un dominio es un orden parcial que, además, es una relación total en el dominio. Recordemos que (según la definición 128) una relación $R$ es un orden total cuando satisface: $\forall x \forall y[R(x,y) \vee R(y,x)]$. Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 132: Orden total**

Un orden $\leq$ es total siempre y cuando satisface:

**Reflexividad** $x \leq x$

**Antisimetría** $(x \leq y \ \& \ y \leq x) \supset x = y$

**Transitividad** $(x \leq b \ \& \ y \leq z) \supset x \leq z$, y

**Totalidad** $x \leq y \vee y \leq x$

Como antes, un orden es total en un dominio si cumple estas cuatro propiedades en el dominio, y es total (no relativo a un dominio particular) si satisface estas propiedades en todo dominio en el que se encuentre tal relación.

Los órdenes totales también se conocen como «*lineales*» porque nos permiten poner a los elementos del dominio en una línea, de esta manera:

$$a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq f \leq \ldots,$$

agotando a todos los elementos del dominio, pues, gracias a la propiedad de Totalidad, *ningún* elemento va a ser incomparable con otro. Es decir: podríamos dibujar un diagrama de Hasse también para órdenes totales, pero ese diagrama será indistinguible de una línea:

$$\textcircled{a} \longleftarrow \textcircled{b} \longleftarrow \textcircled{c} \longleftarrow \ldots$$

Como en el caso de los órdenes parciales, podemos definir órdenes totales **estrictos** $<$, en los que nunca sea el caso que $a < a$. Como antes, este orden se podría leer «$a$ es menor que $b$», excluyendo que $a = b$.

Cada orden parcial se puede *extender* a un orden total sobre el mismo dominio, en el sentido en que si $\leq$ es un orden parcial, entonces existe un orden total $\leqslant$ tal que, si $a \leq b$, entonces $a \leqslant b$, y si hay elementos $c, d$ que sean incomparables respecto a $\leq$, serán comparables respecto a $\leqslant$: ya sea que $c \leqslant d$ o que $d \leqslant c$.[9] Sin embargo, nada nos asegura que el orden total de la extensión sea un orden «natural».

Un ejemplo de esta no-naturalidad sería el siguiente. Considerando el orden de la Figura 13.5, este se puede extender a un orden total $\leqslant$—de manera que o bien *faringe* $\leqslant$ *cerebro* o bien *cerebro* $\leqslant$ *faringe*; aunque, obviamente, ni la faringe es parte ($\sqsubseteq$) del cerebro ni viceversa. Entonces, en este caso (y en muchos otros), el orden total de la extensión es puramente «formal». (Tenemos otro caso donde las matemáticas nos permiten definir cosas que no corresponden a algo en el mundo físico.)

### 13.3.5. Orden inverso

Tanto los órdenes parciales como los totales tienen órdenes **inversos** (también llamados «**conversos**»).

**Definición 133: Orden inverso**

Si $\leq$ es un orden parcial o total sobre un dominio, un orden (parcial o total, según corresponda) $\geq$ es su inverso si y solamente si sucede esto (para todos los objetos $x, y$ del dominio):

$$\text{Si } x \leq y, \text{ entonces } y \geq x.$$

Lo mismo se puede hacer para definir órdenes inversos para órdenes estrictos (parciales o totales) $<$, cuyo inverso sería $>$.

Por ejemplo, el orden parcial «_ *es parte de* _», que formalizamos con «$\sqsubseteq$», tendría un orden inverso $\sqsupseteq$, que significaría «_ *tiene como parte a* _». De manera que, como el sistema nervioso tiene como parte al cerebro, podemos decir: *sistema nervioso* $\sqsupseteq$ *cerebro*.

### 13.3.6. Maximales, máximos, cotas, supremos

Cuando tenemos un orden que es *al menos* parcial (de manera que incluimos también a los totales), podemos definir distintos pares de nociones —unas más *estrictas* que otras— de elementos «más grandes» o «más pequeños» que los demás.

El par menos estricto es el par maximal/minimal.

**Definición 134: Elemento maximal**

Dado un orden parcial $\leq$ sobre un dominio, un elemento maximal del dominio (respecto a ese orden) es un elemento $m$ que no es menor que ningún otro, es decir:

$$m \text{ está en el dominio, y } \forall x \text{ en el dominio: } m > x$$

De manera equivalente, la definición 134 se podría enunciar diciendo que $\neg\exists x$ en el dominio tal que: $(x \neq m)$ & $(m \leq x)$. O bien, diciendo que: $\forall x$ en el dominio, $x \nless m$.

El concepto dual es el concepto de *minimal*.

**Definición 135: Elemento minimal**

Si $\leq$ es un orden parcial sobre un dominio, entonces $m$ es un **elemento minimal** de ese dominio, relativo a ese orden, siempre y cuando:

$$m \text{ está en el dominio, y } \forall x \text{ en el dominio: } m < x$$

De manera equivalente, la definición 135 se podría enunciar diciendo que: $\neg\exists x$ en el dominio tal que: $[(x \neq m)$ & $(m \geq x)]$; o bien, diciendo que: $\forall x$ en el dominio, $x \nless m$.

Cabe notar que un mismo dominio puede tener varios maximales y minimales relativo a un mismo orden parcial. Un ejemplo de esto es el árbol del ejemplo 49. Ahí, los elementos $b_{1_2}$ y $c_{2_1}$ son, ambos, maximales de acuerdo a ese orden.

Un par más fuerte (es decir, más restrictivo) de nociones de «ser el mayor de un orden» es el par **máximo–mínimo**.

**Definición 136: Elemento máximo**

Si $\leq$ es un orden parcial sobre un dominio, entonces $m$ es un **elemento máximo** de ese dominio relativo a ese orden, siempre y cuando:

$m$ está en el dominio, y $\forall x$ del dominio: $x \leq m$

Definimos así al concepto dual.

**Definición 137: Elemento mínimo**

Si $\leq$ es un orden parcial sobre un dominio, entonces $m$ es un **elemento mínimo** en ese dominio relativo a ese orden, siempre y cuando:

$m$ está en el dominio, y $\forall x$ del dominio: $m \leq x$

A diferencia del par maximal/minimal, si un dominio bajo un orden tiene un elemento máximo (o un mínimo), éste va a ser único.

Podemos ver que no todo elemento maximal es un elemento máximo. Pues supongamos que $m$ sea un maximal de un orden parcial $\leq$. Como $\leq$ es un orden parcial, esto es compatible con que haya elementos incomparables con respecto a $\leq$ (como el cerebro y la faringe con respecto al orden de la parte-todo). Entonces, podríamos tener algún elemento $a$ que sea incomparable con $m$, con lo que sería falso que todo elemento sea $\leq m$. Sin embargo, esto es compatible con que no haya un elemento del dominio $\geq m$; por lo que $m$ sería un maximal pero no un máximo. Un argumento dual muestra también que los minimales no necesariamente son mínimos.

Como se puede ver por los argumentos anteriores, cuando tratamos con órdenes que además de ser parciales, son totales, todo maximal va a ser el máximo, y todo minimal va a ser el mínimo. Esto **no** implica que *todo* orden total tenga un máximo o un mínimo. Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales tiene un orden total $\leq$, pero no tiene ni mínimos ni máximos: no hay ningún número real que sea «el más grande» ni uno que sea «el más chico».[10] Por supuesto, en ese caso, tampoco hay minimales ni maximales.

Otro par de nociones de «elemento más grande/chico de un orden» es el par **cota superior–cota inferior**. Para esto, debemos podemos distinguir *subconjuntos* de un dominio —por ejemplo, si nuestro dominio consiste en el conjunto de todos los seres humanos, podemos distinguir el conjunto de todos los seres humanos nacidos en el continente americano. En una sección posterior daremos la definición rigurosa del concepto de subconjunto (sec. 14.4).

**Definición 138: Cota superior de un orden**

Dado un dominio que tiene un orden parcial $\leq$, y tomando un subconjunto $S$ de ese dominio, entonces un elemento $c$ del dominio (*no* necesariamente de $S$) es una **cota superior** de ese subconjunto $S$ si se satisface:

$$\forall s \text{ que esté en } S : s \leq c$$

Es decir, la cota superior de un subconjunto puede no ser elemento de ese subconjunto. Por ejemplo, si tenemos como dominio al conjunto de los números enteros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, con su orden usual $\leq$, y si tomamos al subconjunto de este dominio: $\{1, 2, 3\}$, entonces 4 va a ser una cota superior de este subconjunto. Pero también 5, 6 y 7.

Definimos, de manera dual, la cota inferior.

**Definición 139: Cota inferior de un orden**

Dado un dominio que tiene un orden parcial $\leq$, y tomando un subconjunto $S$ de ese dominio, entonces un elemento $c$ del dominio (*no* necesariamente de $S$) es una **cota inferior** de ese subconjunto $S$ si se satisface:

$$\forall s \text{ que esté en } S : c \leq s$$

De nuevo tomando como dominio al conjunto de números $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, si nuestro subconjunto es $\{3, 4, 5\}$, entonces 1 va a ser una cota inferior de este subconjunto, así como 2 y 1.

**Definición 140: Supremo de un orden**

Dado un dominio que tiene un orden parcial $\leq$, y tomando un subconjunto $S$ de ese dominio, un elemento del dominio (no necesariamente de $S$) es el **supremo** de ese subconjunto $S$, $\sup(S)$, siempre y cuando $\sup(S)$ sea la mínima cota superior de $S$.

Es decir, $\sup(S)$:

1. Es una cota superior de $S$: $\forall s$ en $S, \sup(S) \geq s$, y
2. es el mínimo de las cotas superiores de $S$: $\sup(S) \leq c$, para toda cota superior $c$.

Como concepto dual del supremo, tenemos al ínfimo.

**Definición 141: Ínfimo de un orden**

Dado un dominio que tiene un orden parcial $\leq$, y tomando un subconjunto $S$ de ese dominio, un elemento del dominio (no necesariamente de $S$) es el **ínfimo** de ese subconjunto $S$, $\inf(S)$, siempre y cuando $\inf(S)$ sea la máxima cota inferior de $S$.

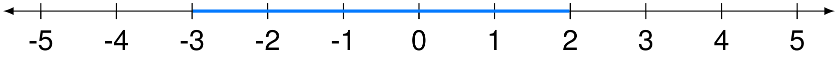
Es decir, $\text{ínf}(S)$:

1. Es una cota inferior de $S$: $\forall s$ en $S, \text{ínf}(S) \leq s$, y
2. es el máximo de las cotas inferiores de $S$: $\text{ínf}(S) \geq c$, para toda cota inferior $c$.

**ejemplo 51**

Como ejemplos de órdenes con supremos e ínfimos, podemos dar muchos tipos de intervalos de los números reales.

Consideremos el intervalo abierto $(-3, 2)$, es decir, el conjunto de todos los números estrictamente mayores a -3 y estrictamente menores a 2, aquí pintados de azul:



Cuando consideramos el orden total $<$, una de las cotas inferiores de ese intervalo es el número -5. Pero el *ínfimo* de ese intervalo es el número -3 —pues es el máximo de las cotas inferiores. Y una de las cotas superiores de ese intervalo es el número 4. Pero el *supremo* es el número 2 —pues es el mínimo de las cotas superiores. Nota que ni -3 ni 2, en este caso, pertenecen al conjunto del cual son cotas.

Los ínfimos y supremos, en general, son como las límites más «*apretados*» de un orden. Las cotas, en general, sólo nos dicen qué está más arriba o más abajo que el conjunto, pero los ínfimos y supremos son como las tapas de un tubo, que lo limitan más inmediatamente.

### 13.3.7. Orden bien fundado

### 13.3.8. Buen orden

### 13.3.9. Orden denso

## Notas

1. Digo que esto se puede hacer *al menos conceptualmente* debido al debate metafísico entre el nominalismo y el realismo acerca de las propiedades. Ver Garrett 2006, capítulo 3.

2. En algunos contextos más avanzados, a estas clases de equivalencia se les conoce como *rayos*.

3. Ver Frege, *Los Fundamentos de la Aritmética*, Instituto de Investigaciones Filosóficas–UNAM, 1972; Fine, «Identity Criteria and Ground», *Philosophical Studies*, 2016.

4. Abajo (**????**) definiremos la noción de la *inversa* de una relación, y también (**????**) a la operación de unión

de conjuntos. Con estos conceptos en mano, otra manera de definir a las relaciones totales es así: una relación es total en un dominio si y sólo si, al unirla con su inversa tenemos la relación trivial.

5. Sobre esto, cf. Irving Copi, *Lógica Simbólica* (CECSA, 2001), secc. 5.3.

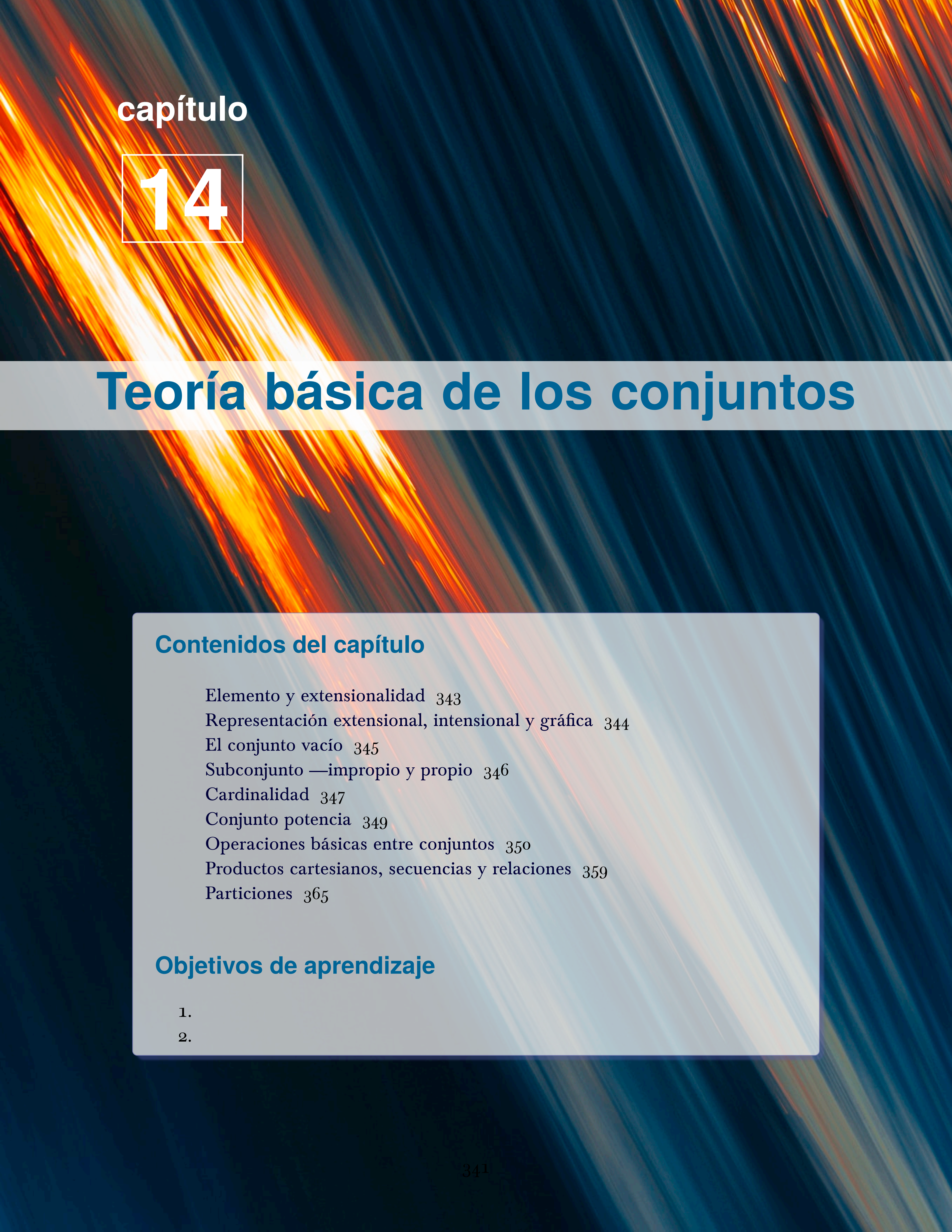
6. Cf. Rudolf Carnap, *Meaning and Necessity*, The University of Chicago Press, 1975.

7. L.T.F. Gamut, *Lógica, Lenguaje y Significado: Lógica Intensional y Gramática Lógica* (Editorial Universidad del Rosario), p. 216.

8. Para más sobre postulados de significado en la formalización de argumentos, ver Jon Barwise & John Etchemendy (con Dave Barker-Plummer), *Language, Proof and Logic* (2da edición; CSLI Publications, 2011), secc. 10.5.

9. La tesis de que todo orden parcial *estricto* se puede extender a un orden total se conoce como el «Teorema de Extensión de Szpilrajn». Edward Szpilrajn la demostró en 1930. Lo dicho en el texto principal se sigue de este teorema y del hecho de que todo orden parcial se puede convertir a un orden parcial estricto.

10. Aunque en algunos contextos, es usual el sistema real «extendido», $\mathbb{R}*$, en el que se agregan un máximo: $+\infty$, y un mínimo: $-\infty$.



## capítulo

## 14

# Teoría básica de los conjuntos

## Contenidos del capítulo

## Objetivos de aprendizaje

1.
2.

Desde que comenzamos a estudiar la lógica cuantificacional clásica de primer orden con identidad, LC1=, relacionamos las fórmulas con los modelos. Dijimos que estos son pares de un dominio y una interpretación, donde el dominio es el *conjunto* de las cosas de las que hablamos (de las que cuantificamos y predicamos), y la interpretación es la manera de entender las constantes y los predicados del lenguaje de LC1= en ese dominio.

En el siguiente capítulo vamos a profundizar un poco en la teoría formal de los modelos. Esta teoría de hecho es una subrama bastante amplia de las matemáticas, que involucra a distintas áreas, pero en su base es una aplicación de la teoría de los conjuntos. Así que primero nos introduciremos a los aspectos básicos de esta teoría, para poder definir *formalmente* las nociones de *modelo* (definición 165), de *verdad en un modelo* (definición 167), de *verdad lógica* (definición 168) y de *argumento válido* (definición 169).

Un conjunto es una manera de agrupar cero, una, o más cosas. En realidad, un conjunto es un tipo de entidad muy simple: lo podemos imaginar—sin alejarnos demasiado de su verdadera naturaleza—sencillamente como una bolsa transparente que puede contener cosas adentro. Las cosas adentro de la bolsa son los **elementos** o **miembros** del conjunto, y escribimos $a \in C$ para decir que $a$ es un elemento—está dentro de la bolsa—de $C$; a veces simplemente decimos «$a$ está en $C$». Imaginamos las bolsas transparentes porque después compararemos sus elementos. Por sí mismos, los conjuntos no tienen mayor estructura que esto.

Como punto de partida,[1] asumimos que los conjuntos no son entidades *físicas*: no se pueden ver, oler, oír o tocar. Podemos percibir, quizá algunos de sus *elementos*—por ejemplo, los elementos del conjunto que contiene a todas y sólo las piedras grises—, pero no *al conjunto mismo*. Se dice, entonces, que los conjuntos son **entidades abstractas**: no existen ni en el espacio ni en el tiempo. Hay muchos debates filosóficos alrededor de tales entidades, pero aquí no entraremos en ello.

Si seguimos con la suposición de que los conjuntos no son físicos, *no están en ningún lado*.[2] Eso significa que existen conjuntos incluso para cosas que están muy lejos entre sí, o que no tienen «nada que ver» entre sí.

Muchas[3] propiedades «corresponden» a un conjunto, en el sentido de que cualquier cosa $x$ que tenga una propiedad $P$ va a ser elemento de un conjunto específico, el cual, a su vez, *sólo* tendrá como elementos a cosas que también sean $P$.

Por ejemplo, la propiedad de *ser humano* que—supongo—tú y yo tenemos (cada uno), *define* un conjunto. Llamémosle $H$ a ese conjunto. Que la propiedad defina a $H$ significa que cualquier cosa del universo que sea un ser humano va a ser elemento de $H$, y además, que $H$ contiene como elementos *sólo* a seres humanos. Es decir, este bicondicional define a $H$:

$$\forall x(x \in H \equiv x \text{ es un ser humano })$$

Lo cual significa que $H$ contendrá a todos y sólo los seres humanos como elementos.

En adelante, usaremos las letras mayúsculas $A, B, C$ como *variables* para conjuntos; también usaremos los corchetes izquierdo (« { ») y derecho (« } ») para aclarar que estamos hablando de conjuntos.

## 14.1. Elemento y extensionalidad

Como dije antes, un conjunto[4] es una entidad muy simple, con muy poca estructura: sólo es una bolsa de sus elementos. No es nada más. No tiene color u olor; no pesa nada, ni tiene ninguna altura; no se mueve a ninguna velocidad ni piensa en nada. Un conjunto sólo es la bolsa de sus elementos.

A la relación «_ *es elemento de* _», como vimos arriba, la denotamos por «$\in$». Y la idea de que un conjunto *sólo es la bolsa de sus elementos* es una de las reglas esenciales, que definen lo que un conjunto es, así que le daremos un nombre especial para distinguirla: es el Axioma de Extensionalidad. (Un «axioma» es una regla que ayuda a definir alguna entidad u operación abstracta). Esta regla codifica lo que dijimos al expresar que: si tenemos un conjunto $A$ y un conjunto $B$, estos van a ser *exactamente el mismo*—$A = B$— siempre y cuando *tengan todos sus elementos en común.* Es decir:

**Definición 142: Axioma de Extensionalidad**

$$\forall A \forall B[(A = B) \;\equiv\; \forall x(x \in A \equiv x \in B)] \tag{14.1}$$

(Cualesquiera conjuntos $A, B$ serán idénticos siempre y cuando tengan exactamente los mismos elementos.)

A partir de Axioma de Extensionalidad, podemos inferir que si *al menos un* elemento de un conjunto no lo tiene el otro, entonces son conjuntos distintos.

### 14.1.1. Notación de infijo

Para la negación de la relación de elemento, usaremos la notación de infijo que ya usamos con la identidad: así como la negación de la identidad podemos escribirla como infijo de la forma «$a \neq b$», que nos dice lo mismo que la notación en prefijo, «$\neg(a = b)$»; así podemos usar la negación de «$\in$» en infijo: «$a \notin A$», de manera que signifique exactamente lo mismo que la notación en prefijo: «$\neg(a \in A)$».

## 14.2. Representación extensional, intensional y gráfica

La representación **extensional** de un conjunto consiste en *listar* todos sus elementos. Esta representación es muy útil cuando tratamos con conjuntos *finitos*—es decir, no infinitos: sus elementos «se acaban en algún momento»—que también son «*pequeños*»: no de un número finito pero muy grande como diez mil millones de trillones (¡o novecientos!). Por ejemplo, si llamamos «$P$» al conjunto de todos los presidentes de México en el período 2000–2018, a este conjunto podemos describirlo de manera extensional así:

$$P = \{\text{Enrique Peña Nieto, Felipe Calderón Hinojosa, Vicente Fox Quezada}\}$$

Si recordamos que ***un conjunto sólo es la bolsa de sus elementos***, esto implica que ***a un conjunto «no le importan» el orden ni las repeticiones de sus elementos***: podemos describir el mismo conjunto listando sus elementos de varias maneras, incluso repitiéndolos. Mientras seane exactamente los mismos elementos, tenemos al mismo conjunto. Por ejemplo, el conjunto de arriba:

$$P = \{\text{EPN, FCH, VFQ}\} = \{\text{FCH, VFQ, EPN}\},$$

y de igual forma,

$$P = \{\text{FCH, EPN, FCH, EPN, VFQ, FCH, EPN, EPN}\}$$

Todas estas descripciones especifican a exactamente *el mismo* conjunto, $P$.

De hecho, podemos describir *algunos* conjuntos *infinitos* de manera extensional, si es que nosotros al escribirlo y las personas que nos lean sabemos a qué nos referimos. Por ejemplo, podemos describir de manera extensional al conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, así:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\},$$

si es que nosotros y nuestros lectores sabemos que los tres puntos indican que la lista continúa infinitamente. En casos en donde no hay tal suposición compartida, la descripción extensional de un conjunto no es útil y puede causar confusión.

La representación **intensional** de un conjunto consiste en *definir* todos sus elementos mediante una ***propiedad (es decir, una fórmula) que cumplan todos y sólo*** ellos. Para esto, usamos una variable y los dos puntos, «:», de manera que $\{x : \Phi[x]\}$ se lea: «el conjunto de todas las cosas $x$ que son tales que $\Phi$».

Así, el conjunto $P$ de arriba también podemos definirlo así:

$$P = \{x : x \text{ es un presidente de México en el período 2000-2018 }\}$$

Y al conjunto de los números naturales podemos definirlo así (usando un concepto avanzado que no veremos en este curso):

$$\mathbb{N} = \{x : x \text{ es un ordinal de von Neumann finito }\}$$

Finalmente, una representación **gráfica** de un conjunto consiste en un diagrama; por ejemplo, los *diagramas de Venn*, que nos dicen cómo se relacionan los conjuntos con las operaciones básicas que veremos abajo (sec. 14.7). No todo conjunto es gráficamente representable; muchos tienen estructuras muy complicadas que no es fácil o es incluso *imposible* representar gráficamente; también, muchos conjuntos tienen *muchísimos* (algún número infinito, por ejemplo) elementos, y nunca podríamos representar estos si eso fuera necesario para los objetivos del diagrama.

## 14.3. El conjunto vacío

Un conjunto «especial» es el **conjunto vacío**: el conjunto que no contiene a ningún elemento, el conjunto tal que ninguna cosa está $\in$-relacionada con él. (Por supuesto, el conjunto vacío puede ser, él mismo, *elemento* de muchos otros conjuntos, por ejemplo, $\varnothing \in C$, de manera que (por ejemplo) $C = \{\varnothing\}$.) Lo denotamos con «$\{\}$», haciendo ver que no tiene a ningún elemento adentro, y también como «$\varnothing$».

**Definición 143: Conjunto vacío**

Descrito de manera extensional,

$$\varnothing \underset{\text{def.}}{=} \{\}$$

Y descrito de manera intensional,

$$\varnothing \underset{\text{def.}}{=} \{x : x \neq x\}$$

Como nada es distinto de sí (por la regla de la reflexividad de la identidad, Refl=), esto es lo mismo que decir que el conjunto vacío es aquel conjunto $C$ tal que $\neg\exists x(x \in C)$. De hecho, pondremos esta fórmula como *regla*, en la sección 14.7.6.

He hablado de «*el*» conjunto vacío, presuponiendo que existe un *único* tal conjunto. Esto, de hecho, se puede demostrar a partir de la definición de conjunto vacío y del Axioma de Extensionalidad. Quedará como ejercicio (p. 358) demostrar que:

Sean $C$ y $D$ conjuntos vacíos. Entonces, $C = D$.

Este *teorema*—es decir, esta afirmación que se puede demostrar a partir de axiomas y definiciones usando las reglas que ya tenemos—nos dice, entonces, que cualesquiera «dos» conjuntos vacíos son, en realidad, uno y el mismo: que el conjunto vacío es único.

## 14.4. Subconjunto —impropio y propio

Es importante distinguir entre un *elemento* (o *miembro*) y un *subconjunto* de un conjunto. Los primeros son las cosas en la relación $\in$ con el segundo: serían los «puntos» dentro de la «bolsa».

Los segundos, los **subconjuntos** de un conjunto $C$ son aquéllos conjuntos cuyos elementos pertenecen, *todos y cada uno*, a $C$. Es decir: un subconjunto de $C$ es un conjunto de cosas que son elementos de $C$. Otra manera de verlo es: un conjunto $D$ será un subconjunto de $C$ siempre y cuando todo lo que esté en $D$ está también en $C$: no hay nada en $D$ que no esté en $C$. El símbolo para esta relación es «$\subseteq$», y se definiría como sigue.

Definición 144: Subconjunto

$$D \subseteq C \underset{\text{def.}}{\equiv} \forall x(x \in D \supset x \in C) \tag{14.2}$$

Con esta definición, es fácil ver que:

*Todo conjunto es subconjunto de sí mismo*: $\forall C : C \subseteq C$.

Esto también queda como ejercicio (p. 358).

Como a veces queremos hablar de los subconjuntos de un conjunto *que no son el mismo conjunto*, definimos la relación de **subconjunto propio** (también llamado «subconjunto **estricto**»), que denotamos «$\subsetneq$».

Definición 145: Subconjunto Propio

$$D \subsetneq C \underset{\text{def.}}{\equiv} \forall x(x \in D \supset x \in C) \,\&\, \exists x(x \notin D \,\&\, x \in C) \tag{14.3}$$

Es decir, que un conjunto $D$ sea un subconjunto *propio* de otro $C$, significa que todo lo que está en el subconjunto propio, está en el conjunto «mayor» $C$ y además que $C$ tiene al menos «*algo más*» que *no está* en ese subconjunto.

Si $D \subsetneq C$, así como podemos decir que $D$ es un *subconjunto propio* o *estricto* de $C$, así también podemos decir que $C$ es un **superconjunto** de $D$.

Cuando hablamos de conjuntos *finitos*, es fácil ver que si $D \subsetneq C$, entonces $C$ tiene *más* elementos que $D$: pues todo miembro de $D$ está en $C$, y este tiene alguno que no está en $D$.

Por ejemplo, si $H$ es el conjunto de los seres humanos definido arriba, y $P$ es el conjunto de los presidentes de México en el período 2000–2018, es fácil ver que $P \subsetneq H$, y que $H \subseteq H$ y también $P \subseteq P$.

## 14.5. Cardinalidad

Como un conjunto es sólo la bolsa de sus elementos, siempre tiene un número definido de estos. A ese número le llamamos «cardinalidad», y lo denotamos como $card$ o con las barras $|\ |$. Entonces, definimos, para cualquier conjunto $C$:

**Definición 146: Cardinalidad de un conjunto**

$$card(C) = |C| \underset{\text{def.}}{=} \text{el número de elementos de } C. \tag{14.4}$$

La cardinalidad de un conjunto *finito* va a ser algún número natural. Siguiendo con el ejemplo del conjunto de los presidentes de México en 2000–2018, $card(P) = 3$; mientras que $card(H)$ (usando $H$ = el conjunto de los seres humanos) es un número definido que, aunque no conozco exactamente, está cercano a 7,000,000,000. Obviamente, $|\varnothing| = 0$.

Pero no todos los conjuntos son finitos, algunos son infinitos: básicamente, *nunca* acabaríamos de listar todos sus elementos.[5]

Sin embargo, incluso los conjuntos infinitos tienen una cardinalidad, un número definido de elementos. Sólo que este número va a ser un número *infinito*: mayor que cualquier número natural. (Escribe el número más grande que se te ocurra: 9,999,999,999,999,999,999, por ejemplo. O incluso:

$$10^{10^{10^{10^{10}}}}$$

¡Esto *ni siquiera se acerca* a un número infinito!)

### 14.5.1. Los cardinales infinitos *

Por ejemplo, el conjunto de los números *naturales*,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\},$$

es un conjunto infinito: ¡los números nunca se acaban! También lo son el conjunto de los números *enteros*,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

y muchos otros conjuntos de números.

Aunque en primera instancia podríamos haber pensado que todos los conjuntos infinitos tienen el mismo «tamaño» —¡el infinito!— resulta, de hecho, que existen *distintos* números infinitos, unos más grandes que otros. (Estos números también se conocen como «**números transfinitos**».) Esto quiere decir que hay conjuntos infinitos que tienen literalmente *más* elementos que otros conjuntos que *también* son infinitos. La demostración de este hecho se la debemos a Georg Cantor.[6]

Los números infinitos que representan la cardinalidad de los conjuntos infinitos se conocen como «números alef», y fueron descubiertos por Georg Cantor a finales del siglo XIX.[7] («Alef» es la primera letra del alfabeto hebreo, y se escribe «$\aleph$»). Estos números forman una secuencia: así como los números finitos están totalmente ordenados:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots$$

así también los números infinitos están totalmente ordenados. Entonces, la cardinalidad de los conjuntos infinitos «más chicos» es $\aleph_0$, y la cardinalidad de los conjuntos con el siguiente tamaño infinito es $\aleph_1$; mientras que la cardinalidad de los conjuntos con el *siguiente* tamaño infinito es $\aleph_2$, y así sucesivamente:

$$\aleph_0 \ < \ \aleph_1 \ < \ \aleph_2 \ < \ \aleph_3 \ < \ \aleph_4 \ < \ \aleph_5 \ < \ \dots$$

De hecho, una manera de entender al primer número cardinal infinito $\aleph_0$ es notando que es la cardinalidad del conjunto de los números naturales:

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0, \tag{14.5}$$

es decir, la cantidad de números naturales que hay es precisamente $\aleph_0$.

Cantor demostró que la cardinalidad del conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$ (que incluye a los naturales, a los enteros positivos y negativos, a lo fraccionales o racionales (los que se pueden escribir como una fracción de enteros, $n/m$), y a los irracionales (que no se pueden escribir como una fracción de enteros, como $\pi$)) es mayor que la cardinalidad de $\mathbb{N}$, es decir, que:

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$$

Estos dos conjuntos ejemplifican el hecho de que existen infinitos más grandes que otros. Sin embargo, otro aspecto sorprendente de los infinitos es que *un subconjunto estricto de un conjunto infinito puede tener el mismo número de elementos que el superconjunto.*

Esta es una diferencia esencial entre conjuntos finitos e infinitos. Pues, si $C$ es un conjunto *finito*, todo subconjunto estricto de $C$ va a tener, por necesidad, un número *menor* de elementos que $C$. Pues todo subconjunto estricto va a tener a algunos pero no todos los elementos de $C$ como miembros.

Sin embargo, esto no siempre sucede con los conjuntos infinitos. Por ejemplo, consideremos el conjunto de los números naturales *pares*:

$$\mathbb{N}_{\text{pares}} = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\},$$

y al conjunto de los números naturales *impares*:

$$\mathbb{N}_{\text{impares}} = \{0, 1, 3, 5, 7, \dots\}$$

Ambos son subconjuntos *estrictos* de $\mathbb{N}$: ¡éste incluye a los pares y a los impares!

Pues bien, se pueden usar argumentos al estilo de la «diagonalización» de Cantor para demostrar que, de hecho,

$$|\mathbb{N}_{\text{pares}}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_{\text{impares}}| = \aleph_0$$

Es decir, ¡aunque $\mathbb{N}$ tiene (en algún sentido) «más» elementos que esos dos subconjuntos estrictos suyos, pues los incluye a ambos, se puede demostrar que la *cantidad* de elementos de los tres es exactamente la misma! Este tipo de aparentes «paradojas» son un aspecto esencial de los conjuntos infinitos.

Vamos a ejercitar los conceptos de estas primeras secciones.

**Ejercicio # 65**

Ⓘ

1. Define *extensionalmente* al siguiente conjunto: $\{x : 0 \leq x \leq 10\}$.
2. ¿Cuál es la cardinalidad de $\varnothing$?
3. Sea $H = \{x : \text{Humano}(x)\}$. Cita dos subconjuntos estrictos de $H$ (descritos en lenguaje natural o formalmente, ya sea intensional o extensionalmente).
4. Dado $H$ como se define arriba, define un conjunto que lo tenga como subconjunto propio.
5. Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, b, d\}$. ¿Es alguno subconjunto del otro? ¿Por qué?

(II)

1. Demuestra que el conjunto vacío es único. Es decir, que: para cualquier conjunto $C$, si: $\neg\exists x(x \in C)$, entonces $C = \varnothing$. (Pista: Usa el Axioma de Extensionalidad.)
2. Supongamos que (dados dos conjuntos particulares $C$ y $D$), $card(C) < card(D)$. ¿Se sigue que $C \subseteq D$? ¿Por qué?
3. Demuestra que $\forall C(\{\} \subseteq C)$.

## 14.6. Conjunto potencia

Otro conjunto importante que podemos definir para cualquier conjunto es su *conjunto potencia*: el conjunto cuyos elementos son todos sus subconjuntos.

Es decir, para cualquier conjunto $C$—finito o infinito—, siempre podemos definir sus subconjuntos, propios o impropios: el único subconjunto impropio de $C$ va a ser $C$ mismo, y los demás van a ser propios (es decir, estrictos).

Entre estos últimos, siempre vamos a encontrar al conjunto vacío: es decir, el **conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto**, incluyendo, por supuesto, al vacío mismo. Esto es porque la fórmula universal $\forall x(x \in \varnothing \supset x \in C)$ va a ser verdadera «por vacuidad» para cualquier $C$ que elijamos. Pues, dado que, como dijimos, $\forall x(x \notin \varnothing)$, el antecedente del universal va a ser falso para todo $x$, lo cual hará al condicional verdadero para todo $x$.

Entonces, definimos al conjunto potencia de un conjunto $C$ así:

$$\wp(C) = \{D : D \subseteq C\}, \tag{14.6}$$

y lo que acabamos de ver es que $\varnothing \in \wp(C)$, para cualquier conjunto $C$. (¡Nota que también es verdad para cualquier conjunto que $\varnothing \subseteq \wp(C)$! ¿Por qué?)

Se conoce como **teorema de Cantor** a la siguiente afirmación, que Cantor demostró en 1891 (para todo conjunto, finito o infinito, $C$):

$$card(\wp(C)) = 2^{card(C)}. \tag{14.7}$$

En el caso de nuestro conjunto $P$ de los presidentes definido arriba, es fácil representar extensionalmente a su conjunto potencia:

$$\wp(P) = \{\varnothing, \{EPN\}, \{VFQ\}, \{FCH\}, \{EPN, FCH\}, \{FCH, VFQ\}, \{EPN, VFQ\}, P\}$$

Y se confirma el teorema de Cantor, pues: $card(\wp(P)) = 8$, $card(P) = 3$ y $8 = 2^3$.

## 14.7. Operaciones básicas entre conjuntos

En esta sección vamos a definir algunas de las operaciones que podemos hacer con los conjuntos. Estas operaciones, a su vez, definen nuevos conjuntos. En secciones posteriores (??) veremos cómo estas operaciones se corresponden con la estructura lógica de las fórmulas de LC1=.

### 14.7.1. Unión

Si imaginamos a los conjuntos como bolsas transparentes de cosas—que serían sus elementos—, la unión de dos conjuntos es la operación de «vaciar» ambas bolsas—todas, sin dejar nada en ninguna—en una tercera. La tercera bolsa es el conjunto unión de ambos.

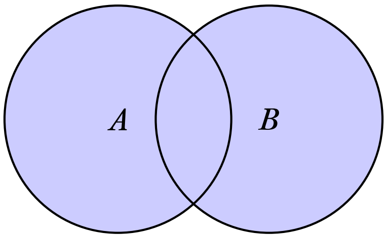
**Definición 147: Unión**

Dados dos conjuntos $A$ y $B$, su unión es el conjunto definido por:

$$A \cup B = \{x \ : \ x \in A \vee x \in B\} \tag{14.8}$$

En términos de los diagramas de Venn, la unión se ve así:

$A \cup B$



Por supuesto, en este y los diagramas de abajo, lo que está pintado de azul representa al conjunto de la operación.

**Ejercicio # 66**

Ⓘ

1.

2.

3.

(II) Sea $C_1 = \{x : 0 \leq x \leq 10\}$, y $C_2 = \{A, B, C\}$. Entonces, dime cuáles son:

1. $\wp(C_1)$
2. $\wp(C_2)$
3. $C_1 \cup C_2$
4. $\wp(C_1 \cup C_2)$

### 14.7.2. Intersección

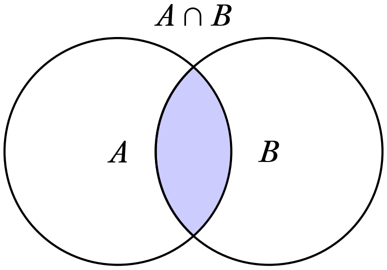
Usando la metáfora de las bolsas transparentes, la intersección es la operación de «comparar» o «transponer» las bolsas para ver qué cosas tienen en común. Si no tienen nada en común, la intersección será *vacía*—es decir, será el conjunto vacío, ∅. Si tienen elementos en común, todos ellos los metemos en una tercera bolsa—y sólo a ellos. Esa tercera bolsa es el conjunto intersección.

**Definición 148: Intersección**

Dados dos conjuntos $A$ y $B$, su intersección es el conjunto definido por:

$$A \cap B = \{x \ : \ x \in A \ \& \ x \in B\} \tag{14.9}$$

En términos de los diagramas de Venn, la intersección se ve así:



Como la intersección de dos conjuntos nos dice qué elementos tienen en común, es una operación *conmutativa*, en el sentido en que (para cualesquiera conjuntos $C$ y $D$), se puede demostrar a partir de las definiciones que hemos visto y las reglas de la lógica que: $C \cap D = D \cap C$.

### 14.7.3. Diferencia de conjuntos

La **diferencia** de $A$ y $B$, que denotamos con «$A - B$», nos dice qué cosas *no* comparte $A$ con $B$—y por tanto, es una operación *no conmutativa*. Otra manera de llamarle es la **resta** de conjuntos, o también, «$A$ **menos** $B$». Que no sea conmutativa significa que **no** es el caso para todos los conjuntos que $A - B = B - A$.

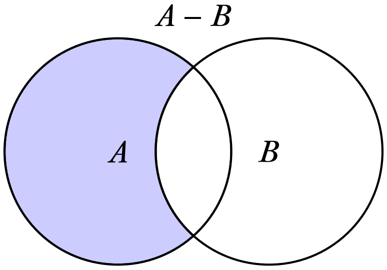
**Definición 149: Resta de un conjunto a otro**

El conjunto $A$ *menos* $B$ es:

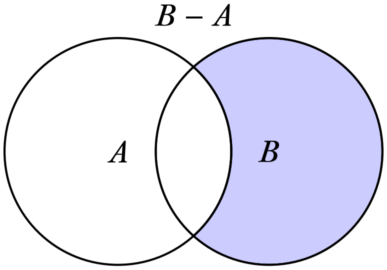
$$A - B = \{x : x \in A \; \& \; x \notin B\}, \tag{14.10}$$

es decir, restarle $B$ a $A$ es tomar los elementos de $A$ que no están en $B$.

Usando los diagramas de Venn, la diferencia de $A$ menos $B$ se ve así:



Y, por supuesto, la diferencia $B - A$ se ve así:



### 14.7.4. Diferencia simétrica

La diferencia simétrica entre dos conjuntos es como si aplicáramos las dos restas $A - B$ y $B - A$ «al mismo tiempo». También podemos entenderla como la resta de la intersección a la unión. Una tercera manera de verla es relacionándola con las conectivas proposicionales: así como la intersección corresponde a la conjunción y la unión a la disyunción inclusiva, la diferencia simétrica corresponde a la disyunción exclusiva. (Recuerda que la disyunción exclusiva de la lógica de orden cero se define así: «$A \veebar B$» significa que o bien $A$ o bien $B$, pero no ambos a la vez.) Denotando a la diferencia simétrica con «$\triangle$», la vamos a definir como sigue.

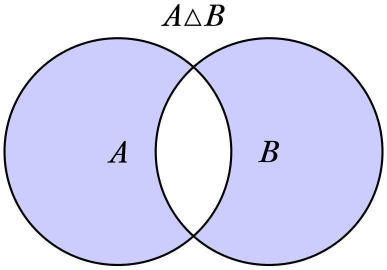
**Definición 150: Diferencia Simétrica**

Dados dos conjuntos $A$ y $B$, su diferencia simétrica es el conjunto definido por:

$$A \triangle B = \{x : x \in A \veebar x \in B\} \tag{14.11}$$

Y debería ser fácil ver que las demás definiciones, que son formalizaciones de las definiciones sugeridas antes, son equivalentes a 14.11, lo cual se queda como ejercicio.

Usando diagramas de Venn, $A \triangle B$ se vería así:



### 14.7.5. Complemento relativo

Un caso especial de la diferencia de $A$ menos $B$ es cuando $B \subsetneq A$. En este caso, $A$ es un superconjunto de $B$; es decir, $A$ se puede ver como el conjunto «*ambiente*» en el que vive $B$ (también conocido como «el conjunto *universo*» de $B$). En este caso, restarle $B$ a

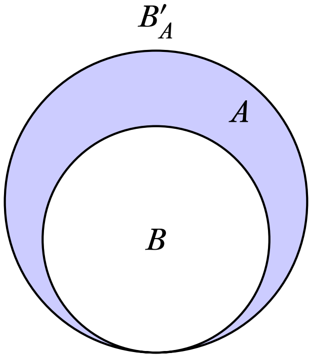
$A$ significa tomar todo lo que está en el ambiente $A$ pero que no está en $B$. A este caso de la resta se le conoce como «**complemento relativo**».

Usualmente, en la notación se deja implícito el conjunto ambiente, pues se asume que en el contexto de aplicación se entiende cuál es, y el complemento de $B$ se escribe simplemente «$B'$» o «$B^c$». Aquí nos desviaremos de esta práctica; en la definición, haremos explícito el conjunto universo de $B$.

**Definición 151: Complemento Relativo**

Dados dos conjuntos $A$ y $B$, en donde $B \subsetneq A$, el *complemento relativo de $B$ en $A$* es:

$$B'_A = A - B \tag{14.12}$$



Por ejemplo, si $M$ es el conjunto de los humanos nacidos en México y $H$ el conjunto de los seres humanos, $M'_H$ es el conjunto de todos los seres humanos que *no* nacieron en México. O, si $A$ es el conjunto de todos los animales, $H'_A$ es el conjunto de todos los animales que *no* son seres humanos.

### 14.7.6. Utilizando LC1= para razonar con conjuntos

Hasta ahora, hemos visto algunos aspectos esenciales de los conjuntos: que se definen por sus elementos, según nos dice el Axioma de Extensionalidad, que podemos representarlos por la fórmula que satisfacen sus elementos (intensionalmente), y a veces, listando sus elementos (extensionalmente) o mediante diagramas. También que existe un conjunto, el vacío, que es el único sin elementos; y que todo conjunto tiene subconjuntos: uno impropio—que es el mismo conjunto—y los demás impropios o estrictos. Y revisamos también que todo conjunto tiene una cardinalidad: el número de cosas que son sus elementos. También hemos visto que para todo conjunto podemos definir su potencia, que es el conjunto de todos los subconjuntos que se pueden formar con sus elementos, incluyendo al conjunto mismo y al vacío. Y vimos algunas operaciones con los conjuntos.

Pero hasta ahora no hemos visto cómo hacer razonamientos con las definiciones que hemos visto para hacer demostraciones. **¿Cómo podríamos hacer demostraciones en deducción natural del tipo que hemos hecho en los cursos de Lógica?**

Para ello, vamos a introducir tres nuevas reglas y una metodología para demostrar cosas con conjuntos.

### Primera regla: equivalencia lógica e identidad de conjuntos

Si $a \in A$ y $A$ es definido por una matriz $\Phi[x]$, y si a su vez esta matriz es *lógicamente equivalente* con otra matriz $\Psi[x]$, entonces $a \in A$ siempre y cuando sea verdad que $\Psi[a]$. Veamos qué significa esto.

**Definición 152: Matrices lógicamente equivalentes**

Dos matrices, $\Phi[x]$ y $\Psi[x]$, son *lógicamente equivalentes* siempre y cuando podamos hacer estas dos inferencias:

- suponiendo $\Phi[\hat{a}]$, usando las reglas podemos inferir que $\Psi[\hat{a}]$, y
- suponiendo $\Psi[\hat{a}]$, usando las reglas podemos inferir que $\Phi[\hat{a}]$.

Como ejemplo, las matrices:

$$Fx \vee Gx$$

y:

$$\neg(\neg Fx \ \& \ \neg Gx)$$

son *lógicamente equivalentes*. Pues, si suponemos:

$$F\hat{a} \vee G\hat{a},$$

entonces podemos inferir:

$$\neg(\neg F\hat{a} \ \& \ \neg G\hat{a}),$$

usando la regla de la lógica proposicional, Teorema de De Morgan. Y además, suponiendo la última, y otra vez usando Teorema de De Morgan, podemos inferir la primera.

Esto simplemente quiere decir que si un conjunto está definido por una matriz—es decir, si todos y sólo sus miembros son aquellos a los que se aplica con verdad esa matriz—, y si además esa matriz es *lógicamente equivalente* con otra—es decir, si a partir de las reglas de la lógica podemos inferir una de la otra—, entonces ese conjunto está definido *también* por la matriz equivalente. Pues para cualquier objeto, es lógicamente equivalente que satisfaga la primer matriz con que satisfaga la segunda.

Por lo tanto, esta regla está justificada por el Axioma de Extensionalidad:

**Definición 153: Equivalencia Lógica Preserva Identidad de Conjuntos (Equiv.)**

Si $\Phi[x]$ y $\Psi[x]$ son lógicamente equivalentes, entonces, esta inferencia es válida:

$$\frac{}{\{x : \Phi[x]\} = \{x : \Psi[x]\}}$$

Por ejemplo, dado que —como ya vimos arriba— las matrices $Fx \vee Gx$ y $\neg(\neg Fx \;\&\; \neg Gx)$ son *lógicamente equivalentes*, entonces podemos inferir que:

$$\{x : Fx \vee Gx\} = \{x : \neg(\neg Fx \;\&\; \neg Gx)\}$$

por una aplicación de Equiv.

### Segunda regla: implicación lógica y subconjuntos

Aplicando un razonamiento parecido, si una matriz define a un conjunto, y esta *implica lógicamente* a otra —si usando las reglas podemos inferir que un objeto satisface la segunda siempre que satisface la primera— entonces el conjunto definido por esta segunda matriz va a ser un *subconjunto* del primero. Definamos, entonces, qué es que una matriz implique a otra.

**Definición 154: Matriz que implica lógicamente a otra**

Una matriz, $\Phi[x]$ implica lógicamente a otra $\Psi[x]$, siempre y cuando: suponiendo $\Phi[\hat{a}]$, usando las reglas podemos inferir que $\Psi[\hat{a}]$.

Por ejemplo, la siguiente matriz:

$$Fx \;\&\; Gx$$

implica lógicamente a esta matriz:

$$Fx$$

porque, si suponemos $F\hat{a} \;\&\; G\hat{a}$, entonces podemos inferir $F\hat{a}$, usando la regla de la lógica proposicional, Eliminación de la Conjunción.

Entonces, tenemos justificada esta otra regla:

**Definición 155: Inferencia Lógica Preserva Subconjuntos (Inf.)**

Si $\Phi[x]$ implica lógicamente a $\Psi[x]$, entonces, esta inferencia es válida:

$$\frac{}{\{x : \Phi[x]\} \subseteq \{x : \Psi[x]\}}$$

Como ejemplo, debido a que la matriz $Fx \,\&\, Gx$ implica lógicamente a $Fx$, Inf. me permite inferir que: $\{x : Fx \,\&\, Gx\} \subseteq \{x : Fx\}$.

### Tercera regla: autoidentidad de conjuntos

Finalmente, todo conjunto que exista, es definible por la matriz que se refiere a *pertenecer a ese conjunto*. Esto justifica la última nueva regla:

**Definición 156: Autoidentidad de conjuntos (AId)**

Esta inferencia es válida:

$$\frac{\qquad\qquad\qquad}{A = \{x \ : \ x \in A\}}$$

### Usando las tres reglas

Como nota «práctica»: para usar las tres reglas de arriba, no necesitamos *demostrar* que dos matrices son equivalentes o que una implica a la otra, *sólo* necesito que justifiques esta equivalencia o esta inferencia a partir de la regla que se podría usar para demostrarla. Veamos esto con los ejemplos de abajo.

**ejemplo 52**

Usando la primera regla (Equiv.), podemos demostrar que $A \cup B = B \cup A$ de esta manera muy sencilla:

| | |
|---|---|
| 1. $A \cup B = \{x \ : \ x \in A \vee x \in B\}$ | Def.$\cup$ |
| 2. $B \cup A = \{x \ : \ x \in B \vee x \in A\}$ | Def.$\cup$ |
| 3. $\forall x[(x \in A \vee x \in B) \equiv (x \in B \vee x \in A)]$ | Conmutatividad$\vee$ |
| 4. $\{x \ : \ x \in A \vee x \in B\} = \{x \ : \ x \in B \vee x \in A\}$ | Equiv.(3) |
| 5. $A \cup B = \{x \ : \ x \in B \vee x \in A\}$ | Sust.Id.(1,4) |
| 6. $A \cup B = B \cup A$ | Sust.Id.(2,5) |

En el paso (3), no demostré que las dos matrices, $(x \in A \vee x \in B)$ y $(x \in B \vee x \in A)$ son lógicamente equivalentes, solamente lo justifiqué diciendo que lo son si uno usa la regla proposicional de Conmutatividad$\vee$. También, en las líneas (1) y (2), usé la definición de la unión; la idea es usar las definiciones de cada operación mediante las fórmulas que he dado para ellas.

……

Usando la segunda regla, (Inf.), podemos demostrar que $A \subseteq A \cup B$ también muy fácilmente:

| | |
|---|---|
| 1. $A \cup B = \{x \ : \ x \in A \vee x \in B\}$ | Def.$\cup$ |
| 2. $\forall x[x \in A \supset (x \in A \vee x \in B)]$ | Introd.$\vee$ |
| 3. $\{x \ : \ x \in A\} \subseteq \{x \ : \ x \in A \vee x \in B\}$ | Inf.(2) |

4. $A \subseteq \{x \ : \ x \in A \vee x \in B\}$ Sust.Id.(3)
5. $A \subseteq A \cup B$ Sust.Id.(1, 4)

Como antes, en (2) no demostré que la matriz $x \in A$ implica a la matriz $(x \in A \vee x \in B)$, pero se ve que lo hace a partir de la regla Introd.$\vee$.

**Ejercicio # 67**

(I)* Demuestra que: si $C$ y $D$ son conjuntos vacíos, entonces, $C = D$.

(II)* Demuestra que: todo conjunto es subconjunto de sí mismo: $\forall C : C \subseteq C$.

(III) Demuestra la *transitividad* de la relación de subconjunto, es decir, que: si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

(IV) Da un caso (es decir, un par de conjuntos concretos $A$ y $B$) en el que $A \subseteq B$ pero no $B \subseteq A$.

(V) Demuestra la *propiedad conmutativa* de la unión, es decir, que $C \cup D = D \cup C$.

(VI) También demuestra la *propiedad asociativa*, es decir, la fórmula: $(C \cup D) \cup E = C \cup (D \cup E)$.

(VII) También que $A \cup \varnothing = A$.

(VIII) Demuestra que: si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$.

(IX) Demuestra que las siguientes definiciones del conjunto diferencia simétrica son equivalentes a 14.11, en el sentido de especificar el mismo conjunto:

(a) $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$
(b) $A \triangle B = (A \cup B) - (B \cap A)$

(X) Demuestra que $A \cap B = B \cap A$ (la *conmutatividad* de la intersección).

(XI) También demuestra su *asociatividad*: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(XII) También demuestra que $A \cap \varnothing = \varnothing$.

(XIII) También demuestra que: si $A \subseteq B$, entonces $A \cap B = A$.

(XIV) Demuestra la *distributividad* de la unión con la intersección y viceversa: primero, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$; segundo, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(XV) Demuestra que si $A\cap B=\varnothing$, entonces, $A-B=A$ y $B-A=B$.

(XVI) También demuestra que la diferencia simétrica es *conmutativa*: $A\triangle B=B\triangle A$.

(XVII) Y que es *asociativa*: $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$.

## 14.8. Productos cartesianos, secuencias y relaciones

### 14.8.1. Par ordenado

Vimos antes (secc. 14.2) que, para los conjuntos, no importa ni el orden ni el número de apariciones en que listemos sus elementos. En ese sentido, los conjuntos *no* son una «lista», sólo son una «bolsa» de sus elementos. Es por eso que si un conjunto $A$ es $\{a,b,c\}$, es el mismo que $\{b,b,a,b,c,a\}$.

Sin embargo, para muchas aplicaciones nos interesa utilizar *listas*, no meras bolsas, de cosas. Los **pares ordenados** son listas de exactamente dos cosas—de ahí su nombre. (Usamos los «paréntesis angulares» para denotar listas: «$\langle$» y «$\rangle$».) A los pares ordenados sí «les importa» el orden de sus elementos, de manera que $\langle a,b\rangle$ **no** es el mismo par que $\langle b,a\rangle$—a menos, claro está, que $a=b$. Y por supuesto, también «les importa» el número de apariciones de sus elementos, pues un *par* ordenado debe contener dos elementos—aunque sea el mismo objeto listado dos veces—, no uno, ni tres, ni más. Entonces, el par ordenado $\langle a,a\rangle$ **no** es el mismo que la lista de la misma cosa una sola vez: $\langle a\rangle$.

Como queremos que los pares sean cosas a las que sí «les importa» el orden y el número de apariciones, los definimos como las entidades que cumplan con lo siguiente.

**Definición 157: Par ordenado**

$$\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle \quad \underset{\text{def.}}{\equiv} \quad a=c \text{ y } b=d. \qquad \text{(Par ordenado)}$$

Esta definición es suficiente para entender qué son los pares ordenados, pero se pueden dar definiciones más formales que muestren cómo es que un par ordenado es siempre un tipo especial de conjunto.[8] Para nuestros propósitos, lo único esencial es tener en mente que un par ordenado es una *lista* de exactamente *dos* cosas (o el mismo elemento repetido *dos* veces) en la que el orden es importante.

### 14.8.2. Producto cartesiano

El producto cartesiano entre dos conjuntos es la operación que nos permite formar pares ordenados tomando elementos de esos dos conjuntos. En el producto cartesiano, el **orden importa**, pues con esto vamos a formar pares ordenados, en los que el orden importa.

Usando «×» para denotar a esta operación, lo anterior implica que nunca va a suceder que: $A \times B = B \times A$ —*a menos que* $A = B$. (En esto, en que falla la *conmutatividad*, el producto cartesiano es distinto del producto o multiplicación de los números reales: por ejemplo, $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$.)

La operación de producto cartesiano se define como sigue.

**Definición 158: Producto cartesiano**

El producto cartesiano de un conjunto $A$ con un conjunto $B$ se escribe «$A \times B$» y es idéntico al conjunto: $\{\langle a, b\rangle : a \in A \;\&\; b \in B\}$.

Es decir, $A \times B$ es el conjunto de todos los pares ordenados tales que su primer elemento pertenece a $A$, y su segundo elemento pertenece a $B$.

Por ejemplo, sean:

$$\begin{aligned} A &= \{x : x \text{ es un presidente de México en el período 2000-2018}\} \\ &= \{\text{EPN, FCH, VFQ}\}, \end{aligned}$$

y:

$$\begin{aligned} B &= \{x : x \text{ es un presidente de EUA en el período 2000-2018}\} \\ &= \{\text{BC, GB, BO, DT}\} \end{aligned}$$

Entonces, el siguiente conjunto es el producto cartesiano $A$ «cruz» $B$:

$$\begin{aligned} A \times B = \; & \{\langle \text{FCH, BC}\rangle, \langle \text{FCH, GB}\rangle, \langle \text{FCH, BO}\rangle, \langle \text{FCH, DT}\rangle, \\ & \langle \text{EPN, BC}\rangle, \langle \text{EPN, GB}\rangle, \langle \text{EPN, BO}\rangle, \langle \text{EPN, DT}\rangle, \\ & \langle \text{VFQ, BC}\rangle, \langle \text{VFQ, GB}\rangle, \langle \text{VFQ, BO}\rangle, \langle \text{VFQ, DT}\rangle\} \end{aligned}$$

Ahora bien, el producto cartesiano $B$ «cruz» $A$, sería:

$$\begin{aligned} B \times A = \; & \{\langle \text{BC, VFQ}\rangle, \langle \text{BC, FCH}\rangle, \langle \text{BC, EPN}\rangle, \\ & \langle \text{DT, VFQ}\rangle, \langle \text{DT, FCH}\rangle, \langle \text{DT, EPN}\rangle, \\ & \langle \text{GN, VFQ}\rangle, \langle \text{GB, FCH}\rangle, \langle \text{GB, EPN}\rangle, \\ & \langle \text{BO, VFQ}\rangle, \langle \text{BO, FCH}\rangle, \langle \text{BO, EPN}\rangle\} \end{aligned}$$

Como con la multiplicación de números, podemos definir una operación de *exponenciación*. En los números, la exponenciación funciona así: cuando $r$ es un número, $r^n$ es ese mismo número multiplicado por sí mismo $n$ veces. Así,

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

Con los conjuntos, la «exponenciación» significa solamente hacer el producto cartesiano del conjunto consigo mismo tantas veces como diga el exponente.

**Definición 159: Exponenciación con producto cartesiano**

$C^n$ = El conjunto que resulta de tomar el producto cartesiano de $C$ consigo $n$ veces.

Por ejemplo,

$$C^2 = C \times C = \{\langle a, b \rangle : a \in C \text{ y } b \in C\}$$

Usando el ejemplo de arriba, en el que

$$A = \{x : x \text{ es un presidente de México en el período 2000-2018}\},$$

tendríamos:

$$\begin{aligned} A^2 = A \times A = \quad & \{\langle \text{FCH, FCH} \rangle, \langle \text{FCH, VFQ} \rangle, \langle \text{FCH, EPN} \rangle, \\ & \langle \text{EPN, FCH} \rangle, \langle \text{EPN, EPN} \rangle, \langle \text{EPN, VFQ} \rangle, \\ & \langle \text{VFQ, FCH} \rangle, \langle \text{VFQ, VFQ} \rangle, \langle \text{VFQ, EPN} \rangle\} \end{aligned}$$

### 14.8.3. Listas de dos o más elementos: *n*-secuencias o «*n*-tuplas»

En la multiplicación de números, nada nos impide multiplicar más de dos números. Así, como $2 \cdot 4 = 8$ y como $8 \cdot 3 = 24$, entonces podemos usar los paréntesis para agrupar las operaciones y tener: $(2 \cdot 4) \cdot 3 = 24$. La multiplicación entre números tiene la propiedad de ser **asociativa**,[9] es decir: $(2 \cdot 4) \cdot 3 = 2 \cdot (4 \cdot 3)$, y también **conmutativa**, es decir: $(2 \cdot 4) \cdot 3 = 3 \cdot (2 \cdot 4)$. Juntando ambas propiedades, vemos que a la operación de la multiplicación «no le importa» qué multipliquemos antes, siempre que multipliquemos lo mismo: es el famoso dicho «*El orden de los factores no altera el producto*».

También podemos multiplicar más de dos conjuntos con producto cartesiano. Pero, ¡cuidado! Como no es lo mismo $A \times B$ que $B \times A$ (a menos, otra vez, que $A = B$), entonces aquí ¡el orden de los factores **sí** altera el producto!

Vimos antes que el producto cartesiano de $A$ con $B$ nos da el conjunto de todos los pares ordenados que se pueden formar tomando, como primer elemento, un elemento de $A$, y como segundo elemento, un elemento de $B$. Si ahora hacemos una tercera multiplicación: $A \times B \times C$, ¿qué nos daría?

Respuesta: nos daría el conjunto de todas las **tripletas**, o **tríadas**, ordenadas que se pueden formar tomando, como primer elemento, un elemento de $A$, como segundo elemento, un elemento de $B$, y como *tercer* elemento, un elemento de $C$. Las tripletas ordenadas, como los pares ordenados, son *listas*: conjuntos a los que les importa el orden y el número de apariciones de sus elementos. Una tripleta siempre tiene exactamente tres elementos, y dos listas de esos tres elementos en distinto orden van a ser dos distintas tríadas; por ejemplo:

$$\langle a, b, c \rangle \neq \langle a, c, b \rangle,$$

*si es que* (por supuesto) $b \neq c$. Entonces, la definición del conjunto que nos resulta de aplicar el producto cartesiano entre tres conjuntos, sería:

$$A \times B \times C = \{\langle a, b, c \rangle : a \in A, b \in B \text{ y } c \in C\} \tag{14.13}$$

Nota que no es necesario usar paréntesis para decir cuál operación hacemos primero: **siempre** que tengamos $A \times B \times C$, sabremos que *primero* debemos tomar un elemento de $A$, *luego* uno de $B$, y *finalmente* uno de $C$. Pues, como vimos, el orden de los factores sí afecta el producto, así que la notación ya nos dice qué tomar antes y qué después.

Por supuesto, podemos usar la exponenciación básicamente como antes: si $S$ es cualquier conjunto, entonces:

$$S^3 = S \times S \times S = \{\langle a, b, c \rangle : a \in S, b \in S, \text{ y } c \in S\}$$

La generalización es obvia.

**Definición 160: Potencia $n$**

Si $n$ es cualquier número natural mayor o igual a 1,

$$S^n = \underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{n \text{ veces}} \tag{Potencia $n$}$$

Pregunta: ¿A qué conjunto va a ser idéntico el conjunto determinado por la fórmula «Potencia $n$»? Respuesta: ¡Fácil! Al conjunto formado por todas las listas que tengan esta forma:

$$\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle,$$

donde cada uno de $s_1, s_2, \ldots, s_n$ son elementos de $S$.

Estas listas ya no contienen dos o tres elementos, sino $n$. Como con los pares y las tríadas, les importa el orden y el número de apariciones. Les podemos llamar «listas de $n$ elementos», pero los nombres más oficiales son «*$n$-secuencias*» o «*$n$-adas ordenadas*» (generalizando a partir de «trí*adas*»), también se usan «*$n$-tuplas*» o «*$n$-pletas*» (generalizando desde «duplas» o «tripletas»).

Lo importante es que una $n$-secuencia es una lista de $n$ elementos: le importa el orden y el número de apariciones. Por ejemplo, los elementos de:

$$A \times B \times C \times A,$$

van a ser 4-secuencias, cada una de las cuales tendrá (obviamente) como primer elemento, un elemento de $A$, luego un elemento de $B$, luego uno de $C$ y como cuarto elemento, uno de $A$ (no necesariamente idéntico al primero).

### 14.8.4. Relaciones entre conjuntos

Resulta que podemos definir relaciones entre los elementos de conjuntos, usando lo que ya hemos visto. Por ejemplo, decir que $R$ es una relación **de dos lugares** entre los elementos de $A$ y $B$, es simplemente decir que:

$$R \subseteq A \times B$$

Esto solamente quiere decir que una relación de dos lugares entre los elementos de $A$ y de $B$ va a ser un subconjunto (quizá estricto, quizá no) del producto cartesiano entre ambos conjuntos. Es decir, $R$ va a ser un conjunto de pares ordenados que tienen como primero en la lista un elemento de $A$ y como segundo uno de $B$.

Por supuesto, podemos hablar de una relación entre elementos de un *mismo* conjunto. Por ejemplo, una relación *de dos lugares*, $R$, entre los elementos de $A$ sería:

$$R \subseteq A^2$$

La generalización es, otra vez, obvia. Una relación $S$ de tres lugares entre los elementos de $A$ sería:

$$S \subseteq A^3,$$

y así.

Entonces, una relación de tres lugares entre los conjuntos $A$ y $B$ dependería de si toma dos elementos de $A$ y uno de $B$, o dos de $B$ y uno de $A$ (por supuesto, si toma a los tres de uno solo, entonces en realidad no es «entre $A$ y $B$»), y en qué orden. Una posible sería una relación $S \subseteq A \times A \times B$, y otra sería una relación $R \subseteq B \times A \times B$, etcétera.

Hay más posibilidades. Una relación entre tres conjuntos $A, B, C$ sería simplemente un subconjunto de sus productos cartesianos. De nuevo, dependería qué elementos tome primero, así que podríamos tener un subconjunto de $A \times B \times C$, o de $B \times C \times A$, etcétera.

Veamos un ejemplo concreto. Consideremos la relación:

«_ *es hermano de* _»,

que es de dos lugares. Supongamos que tenemos el conjunto:

$$C = \{\textit{C}\text{arlos }\textit{S}\text{alinas, }\textit{R}\text{icardo }\textit{S}\text{alinas, }\textit{V}\text{icente }\textit{F}\text{ox, }\textit{F}\text{elipe }\textit{C}\text{alderón}\},$$

y que queremos saber cuál sería la relación de arriba *en* ese conjunto. Entonces, siendo muy informales (abajo veremos esto formalmente: secc. 15.3),

$$\_\ \textit{es hermano de}\ \_ \subseteq C^2,$$

y, explícitamente (y usando las iniciales como abreviaciones), tendríamos:

$$\_\ \textit{es hermano de}\ \_\ = \{\langle \text{CS, RS}\rangle, \langle \text{RS, CS}\rangle\}$$

Veamos otro ejemplo. Consideremos la relación:

«_ *está entre* _ (arriba) *y* _ (abajo)»,

que es de tres lugares. Supongamos que tenemos este conjunto, $A$:

$$\{\text{Centroamérica, Norteamérica, Sudamérica, Polo Norte, Polo Sur}\}$$

y que también queremos saber cómo se vería la relación de tres lugares en ese conjunto. Como es de tres lugares (y siendo informales otra vez),

$$\_\ \textit{está entre}\ \_\ \textit{y}\ \_\ \subseteq A^3$$

Siendo completamente explícitos (y usando las abreviaciones obvias), tendríamos:

$$\begin{aligned}\_\ \textit{está entre}\ \_\ \textit{y}\ \_\ = \{\ &\langle \text{Cen, Nor, Sud}\rangle, \langle \text{Cen, Nor, PSur}\rangle, \langle \text{Cen, PNorte, PSur}\rangle,\\ &\langle \text{Cen, PNorte, Sud}\rangle, \langle \text{Nor, PNorte, Cen}\rangle, \langle \text{Nor, PNorte, PSur}\rangle,\\ &\langle \text{Nor, PNorte, Sud}\rangle, \langle \text{Sud, PNorte, PSur}\rangle, \langle \text{Sud, Nor, PSur}\rangle,\\ &\langle \text{Sud, Cen, PSur}\rangle\ \}\end{aligned}$$

### 14.8.5. Productos cartesianos y operaciones básicas

Es claro que los productos cartesianos pueden hacerse entre operaciones de otros conjuntos.

Por ejemplo, si $A$ es el conjunto de los presidentes mexicanos en el período 2000-2018, y $B$ el de los presidentes estadunideneses en el mismo período, es obvio que en $A \cup B$ vamos a encontrar a personajes como Peña Nieto y como Bush. Ahora, si definimos $(A \cup B) \times A$ (nota que esto es *muy* distinto a: $A \cup (B \times A)$), en este conjunto encontraremos pares como ⟨Peña, Peña⟩ y como ⟨Fox, Peña⟩ y como ⟨Bush, Fox⟩.

## 14.9. Particiones

## Notas

1. Digo que «como punto de partida», aunque lo que sigue es muy debatido en filosofía de las matemáticas. Veáse, por ejemplo, Penelope Maddy: *Realism in Mathematics*, Oxford University Press, 1992.

2. Este condicional también es discutible. David Lewis cree que los conjuntos están multi-localizados, presentes en donde estén cada uno de sus elementos, (ver su *Sobre la Pluralidad de los Mundos*, Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM, 2015). De nuevo, no discutiremos estas cuestiones metafísicas aquí.

3. Un error que cometió uno de los más grandes lógicos de la historia, Frege, fue suponer que aquí podía decir «todas». Otro gran lógico, Russell, le demostró que esto llevaría a contradicciones. Este episodio dio lugar a una larga y compleja historia, que fue tremendamente fructífera en la lógica, la filosofía y las matemáticas.

4. Aquí debería hacer alguna cualificación: «*qua* conjunto», «en y por sí mismo», o «considerado sólo en tanto conjunto»; pues para muchos conjuntos podemos definir más y más estructura. Sin embargo, esto no hará mucho sentido hasta que terminemos esta sección.

5. Esto, de hecho, es debatido. Si existe un tipo de procesos, al menos teóricamente posibles, que se conocen como «supertareas», sería posible contar los elementos de un conjunto infinito en un tiempo finito. Usando el concepto de «infinito contable» que veremos abajo, una supertarea se define como «una secuencia contablemente infinita de operaciones que ocurren secuencialmente dentro de un intervalo finito de tiempo». Es un debate abierto la cuestión de si las supertareas son o no lógicamente posibles (*cf.* James F. Thomson, «Tasks and Super-Tasks», *Analysis*, 1954; Paul Benacerraf, «Tasks, super-tasks, and modern Eleatics», *Journal of Philosophy*, 1962); pero se ha argumentado que son incompatibles con las leyes de la naturaleza, es decir, que son *físicamente imposibles* (Gustavo E. Romero, «The collapse of supertasks», *Foundations of Science*, 2013).

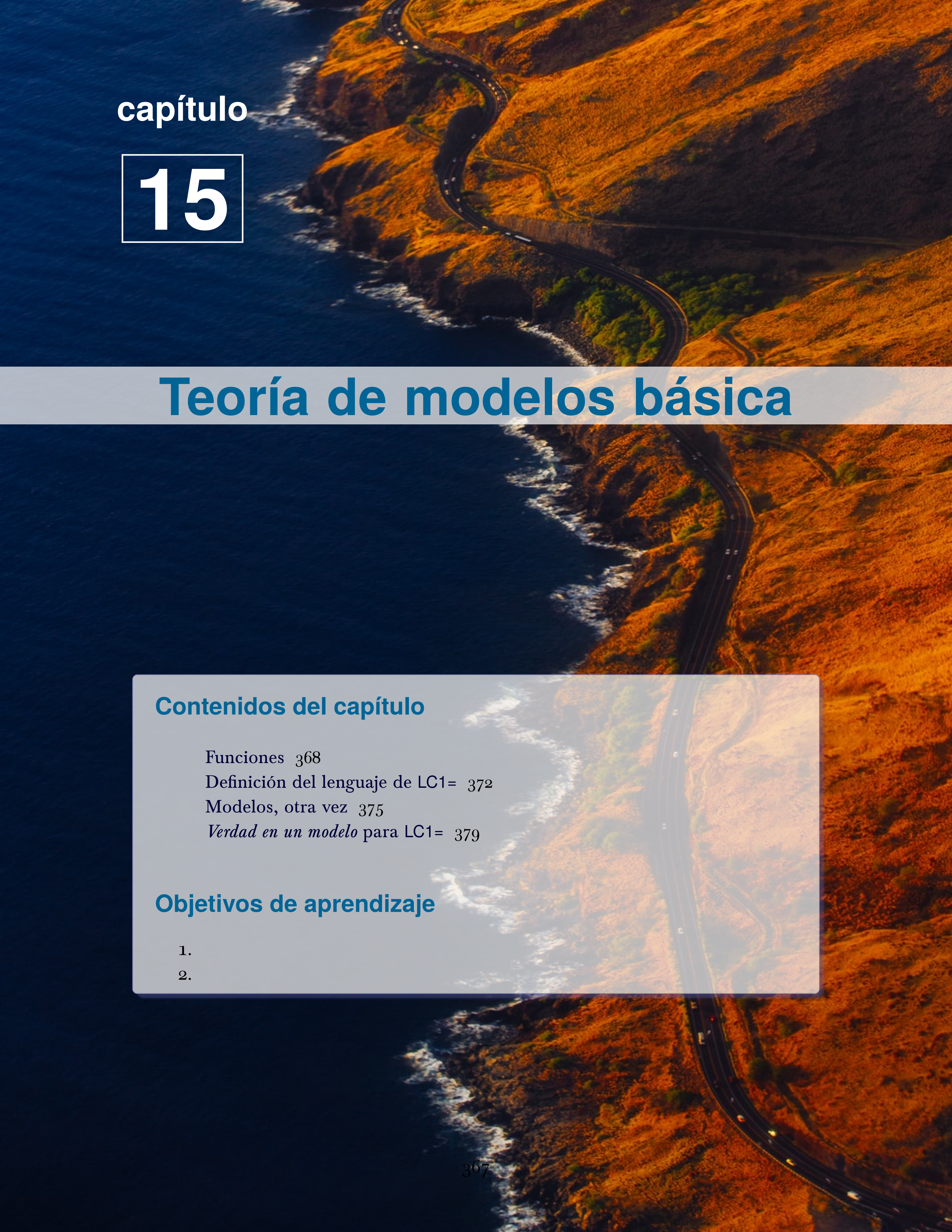
6. Esto se conoce como el *argumento de la diagonal de Cantor*, que él publicó en 1891: «Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre», en *Mathematische Annalen.*

7. Cantor describió los números transfinitos en una serie de artículos en la revista *Mathematische Annalen*, e introdujo la notación de los alefs en «Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre», *Mathematische Annalen*, 1895, traducido en la compilación *Contributions to the Theory of Transfinite Numbers*, Dover, 1954.

8. La definición formal de un par ordenado es la *definición de Kuratowski*: $\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$. Esta definición implica lo que queremos que «signifique» un par ordenado, según la definición Par ordenado: como $\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$ y $\langle c,d\rangle = \{\{c\},\{c,d\}\}$, entonces $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$ si y sólo si $a = c$ y también $b = d$. Para verlo, razonemos suponiendo que ésta última conjunción es falsa; por teorema de De Morgan, esto nos lleva a que o bien es falso que $a = c$ o bien es falso que $b = d$. Usemos eliminación de $\vee$ y *Modus Tollens.* Entonces, supongamos que $a \neq c$. Entonces $\{a\} \neq \{c\}$ y también $\{a,b\} \neq \{c,d\}$, con lo que $\{\{a\},\{a,b\}\} \neq \{\{c\},\{c,d\}\}$. Para ver el otro disyunto, supongamos que $b \neq d$. Entonces, $\{a,b\} \neq \{c,d\}$, de lo cual de nuevo se sigue que $\{\{a\},\{a,b\}\} \neq \{\{c\},\{c,d\}\}$. Así, si es falso que $a = c$ & $b = d$, entonces es falso que $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$; por transposición, esto muestra que la identidad de estos conjuntos

implica que $a = c$ & $b = d$; con lo que también implica la identidad de los pares. Un argumento parecido muestra que la identidad de los pares implica la identidad de estos conjuntos.

9. Para más sobre las propiedades de las operaciones, ver el apéndice ??.



## capítulo

## 15

# Teoría de modelos básica

## Contenidos del capítulo

## Objetivos de aprendizaje

1.
2.

## 15.1. Funciones

Para definir modelos formalmente, vamos a necesitar de *funciones*, pues hablaremos de la «función de interpretación» (y de otras, como la «función de asignación de variables» que veremos).

Como primer acercamiento, **una función es una *regla de asociación* entre dos conjuntos**, **de manera que a un elemento del primer conjunto le corresponde un único elemento del segundo**. Vamos por partes.

Que una función sea una **regla** significa que está bien definida: es decir, que hay una manera de especificarla, de definirla. Por ejemplo, podemos definir la función *sucesor*, que a cada número natural le asigna su sucesor (el número que le sigue). Entonces, *sucesor* se define por la regla: «*¡si n es un número natural, dame su sucesor!*»

Y la regla es una regla **de asociación** porque nos asocia a un elemento—que llamaremos su **entrada** o «input»—con el **resultado**, **valor** o **salida**, que es el elemento que obtenemos tras aplicar la función a la entrada. Por esta razón, también a las funciones también se les conoce como «reglas **de transformación**»: una función toma una entrada y la *transforma* en su resultado.

En la sección 6.1 puedes encontrar más explicaciones sobre el concepto de función.

En esa sección, dijimos que una función es una regla de asociación *entre dos conjuntos*: toma elementos de un conjunto —el conjunto de las entradas— y nos devuelve elementos del segundo conjunto —el conjunto de las salidas.

Pero, en realidad, una función puede asociar elementos del *mismo* conjunto, sólo que *tomado dos veces*; o puede asociar elementos de más de dos conjuntos, siempre que los «combinemos» para poder formar dos. Veamos cómo entender esto.

El conjunto de entradas y el de las salidas pueden ser **el mismo**, de manera que la función tome entradas en un conjunto, las «procese» y nos devuelva valores del mismo conjunto. En este sentido, la función «va» de un conjunto a ese mismo conjunto, solo que «tomado» dos veces.

Este un ejemplo de esto. Tomemos al conjunto: $\{x : x \text{ es un personaje fictio }\}$. Supongamos que definimos la función $f = Padre$ con la regla: *¡para cada entrada, dame su padre!* Entonces (¡spoiler!):

$$f(\text{Luke Skywalker}) = \text{Darth Vader}$$

y también,

$$f(\text{Superman}) = \text{Jor-El}$$

Entonces, para definir la función $f$, «tomamos» al conjunto de los personajes ficticios dos veces: primero para especificar las entradas de la función, y luego para decir cómo «actúa» esta función en las entradas.

Pero una función también puede tomar, o devolvernos, elementos de «más de un conjunto». Sólo que, como dijimos, primero tiene que «combinarlos». Por ejemplo, si hacemos operaciones con conjuntos, como la unión o el producto cartesiano. Veamos un ejemplo. Supongamos que queremos definir una función que, para cada pareja de seres humanos que estén casados, nos devuelva el número de años que llevan de casados (a 2018, obviamente). Parecería que la función va a tomar seres humanos y números positivos, pero hay un detalle: no puede tomar seres humanos «solitos»: ¡queremos que nos diga *de una pareja* cuánto llevan casados!

La solución es obvia: usamos producto cartesiano. Sea $H$ el conjunto de los seres humanos; definimos $C$ como la relación en $H$ de «*estar casado con*»: es decir, $C \subsetneq H \times H$, de manera que un par de humanos $\langle a, b \rangle$, que obviamente es elemento de $H \times H$, va a ser elemento de $C$ siempre y cuando $a$ esté casadx con $b$. Entonces, la función que llamaremos «$g$», tomará un elemento de $C$—es decir, una pareja de seres humanos que estén casados—y nos devolverá un elemento de $\mathbb{N}$—es decir, un número natural. Por ejemplo,

$$g(\langle \text{Samuel L. Jackson}, \text{LaTanya Richardson} \rangle) = 38$$

Por poner otro ejemplo,

$$g(\langle \text{Michelle Obama}, \text{Barack Obama} \rangle) = 26$$

Y si dos personas, $x$ y $y$ no llevan todavía ni el año de casadas, $g(\langle x, y \rangle)$ sería idéntico a 0. (Es usual eliminar los paréntesis angulares de la notación de las funciones, cuando queda entendido que la función toma elementos de un producto cartesiano como entradas; de manera que lo que acabo de decir se escribiría un poco más simplemente: $g(x, y) = 0$.)

La notación que se usa para definir de qué conjunto tomamos la entrada y de cuál la salida de una función $f$, es la siguiente:

$$f : E \longrightarrow S,$$

donde $E$ es el conjunto de las entradas y $S$ el de las salidas. Así, para definir «de dónde viene y a dónde va» la función *Padre* que definimos arriba, escribimos:

$$f : \{x : x \text{ es un personaje fictio } \} \longrightarrow \{x : x \text{ es un personaje fictio } \},$$

y para la función que nos devuelve los años de casados de una pareja de seres humanos, escribiríamos así:

$$g : C \longrightarrow \mathbb{N},$$

O, más explícitamente,

$$g : C \subsetneq H \times H \longrightarrow \mathbb{N}$$

Para la función *sucesor* de la que hablamos antes, tendríamos:

$$sucesor : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

Sólo nos falta la notación para la regla que define a la función. En muchos ámbitos, es usual definir a las funciones—especificar las reglas–con esta notación (fíjate que también es una flecha, pero con una «colita», y que no va de conjuntos a conjuntos, sino de entradas al valor correspondiente):

$$f(x) \longmapsto y,$$

donde $y$ es el valor que resulta de aplicarle $f$ a una entrada $x$, y en el que definimos la regla. Por ejemplo, para el caso de la función *sucesor*, escribiríamos:

$$sucesor(x) \longmapsto x+1,$$

y para el de la función *Padre*:

$$f(x) \longmapsto \text{ el padre de } x,$$

mientras que, para la función *años de casados*:

$$f(x,y) \longmapsto n,$$

donde $n$ es el número de años de casados de la pareja de $x$ y $y$. Otra notación usual (en algunos ámbitos) para definir una función es así:

$$f(x) := y$$

Por ejemplo,

$$sucesor(x) := x+1$$

Las salidas *también* pueden tomarse de más de un conjuntos, cuando «combinamos» estos, mediante operaciones, para formar el conjunto de valores o salidas. Veamos un ejemplo.

Sea $A$ el conjunto de los años del siglo XX: de 1900 a 1999. Entendiéndolos como números, es claro que $A \subsetneq \mathbb{N}$, pues $A$, otra vez, es el conjunto de los números: $\{1900, 1901, \dots, 1999\}$. Consideremos un subconjunto estricto de $A$: el conjunto $M$ de los años en los que hubo Mundiales de fútbol. (Por ejemplo, $1970 \in M$, pero $1971 \notin M$.) Ahora, al conjunto de selecciones nacionales de fútbol en los Mundiales del siglo XX, llamémosle $S$. Entonces, definamos la función $h$:

$$h : M \longrightarrow S \times S$$

de manera que:

$$h(n) \longmapsto \langle x, y \rangle \begin{cases} \langle x, y \rangle \text{ es el par de los finalistas del año } n \\ x \text{ es el campeón} \\ y \text{ es el segundo lugar} \end{cases}$$

Es decir, $h$ es la función que nos devuelve, para cada año, el par ordenado de los finalistas del Mundial en ese año, teniendo como primer elemento al campeón y como segundo al segundo lugar. (Por ejemplo, $h(1998) = \langle \text{Francia}, \text{Brasil} \rangle$.)

Es evidente que, para cada entrada de $h$—es decir, para cada número de año del siglo XX en el que haya habido un Mundial—existe un único valor: un único par ordenado que satisface: ser el par de los finalistas, teniendo al campeón en el primer lugar, y teniendo al segundo lugar en el segundo lugar. Nota que si no hubiéramos especificado estas condiciones, $h$ no sería una función:

- Si sólo hubiéramos dicho «$h(n)$ es la función que nos da a los finalistas del Mundial del año $n$», $h(1998)$ hubiera sido... ¿Brasil? ¿Francia? ¡No está bien definido!
- Si sólo hubiéramos dicho «$h(n)$ es la función que nos da *el par* de los finalistas del Mundial del año $n$», $h(1998)$ hubiera sido... ¿<Brasil, Francia>? ¿<Francia, Brasil>? ¡Tampoco está bien definido!

Así que: una función siempre nos da un único valor (para cada entrada); ese único valor puede contener más de una cosa, si es una secuencia ordenada, pero en ese caso tenemos que especificar *cuál* secuencia específica es el valor de la función.

Esto implica que, por ejemplo, no hay una función definida por la regla *¡para todo papá, dame su hijo!*, pues alguien que tenga más de un hijo va a hacer que la «función» que definiríamos así nos diera más de dos valores. Sin embargo, si cambiáramos la definición por: *¡para todo papá, dame su hijo primogénito!*, entonces sí que tendríamos una función.

De hecho, aunque «*¡para todo papá, dame su hijo!*» **no** define a una función, **sí** define a una relación: la relación, por supuesto, «_ es padre de _», que tiene como elementos a pares como <Raúl Salinas Lozano, Carlos Salinas de Gortari>y <Raúl Salinas Lozano, Raúl Salinas de Gortari>.

### Funciones, relaciones y conjuntos

Es usual tomar a las relaciones como un tipo de conjuntos—a saber, subconjuntos de los productos cartesianos de los conjuntos que están relacionados; también es usual identificar a las funciones con un tipo de relaciones.

Una función va a ser una relación que cumpla la propiedad (¡sorpresa!) de *funcionalidad*. La funcionalidad es, como la transitividad o la anti-simetría, una propiedad de las relaciones. Veamos.

Si $f$ es una función que va de $A$ a $B$—es decir, si:

$$f : A \longrightarrow B,$$

entonces:

$$f \subseteq A \times B$$

Es decir, $f$ es una relación entre $A$ y $B$. Que la relación tenga la propiedad de la **funcionalidad** significa que

Para todo $\langle a, b\rangle \in A \times B$, si $\langle a, b\rangle \in f$, entonces $\langle a, c\rangle \notin f$, para todo $c \neq b$.

Esto solamente dice lo que ya habíamos dicho sobre las funciones: que para cada entrada, nos dan un único valor. Pues cuando decimos «$\langle a, b\rangle \in f$», eso es simplemente lo que arriba hemos escrito como «$f(a) = b$». Y cuando sucede eso, entonces no va a suceder que $f(a) =$ también sea $c$ (si es que $c \neq b$), pues eso significaría que la «función» nos daría dos valores distintos para la misma entrada. Eso es lo que decimos con «$\langle a, c\rangle \notin f$».

Entonces, como vimos arriba, «*¡para todo papá, dame su hijo!*» **no** define a una función, pero **sí** define a una relación—es decir, a una relación que no tiene la propiedad de la funcionalidad.

## 15.2. Definición del lenguaje de LC1=

En esta sección vamos a definir el lenguaje formal de la lógica LC1=. Esto ya lo hicimos en la sección 10.1, aunque de manera informal. Ya que sabemos lo suficiente sobre los conjuntos, podemos definirlo de manera formal.

Primero definimos el «alfabeto»: el conjunto de símbolos. Este conjunto es el conjunto de las constantes, variables, y predicados.

**Definición 161: Alfabeto de LC1=**

- El lenguaje $\mathscr{L}_{\text{LC1=}} = \text{Cons} \cup \text{Var} \cup \text{Pred} \cup \{\neg, \vee, \supset, \wedge, =, \exists, \forall\}$, donde:
- Cons = $\{a, a_1, a_2, \dots, b, b_1, \dots,\}$
- Var = $\{x, x_1, x_2, \dots, y, y_1, \dots, z_1, \dots\}$
- Pred$^n$ = $\{F^n, F^n_1, F^n_2, \dots, H^n, H^n_1, \dots, R^n_1, \dots\}$ (este es el conjunto de los predicados de $n$ lugares)
- Pred = $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\text{Pred}^n) = \text{Pred}^1 \cup \text{Pred}^2 \cup \text{Pred}^3 \cup \text{Pred}^4 \cup \dots$ (este es el conjunto de los predicados de *cualesquiera* lugares)

Lo siguiente es definir las fórmulas del lenguaje, con reglas formales. Vamos primero a definir el conjunto $T_{\text{LC1=}}$ de los términos, el conjunto $A_{\text{LC1=}}$ de las matrices abiertas (subfórmulas con al menos una variable libre) y finalmente el conjunto $F_{\text{LC1=}}$ de las fórmulas del lenguaje.

Dado que, por el contexto, es obvio que siempre nos estamos refiriendo al lenguaje de LC1=, dejaremos implícito esto y ya no lo pondremos.

En lo que sigue, usaremos las **esquinas** para referirnos a las fórmulas y poder cuantificar dentro de ellas. Es decir, cuando escribo algo como «$\ulcorner A \lor B \urcorner$», esto abrevia frases como: «la fórmula que resulta de poner una disyunción entre la fórmula $A$ a la izquierda y $B$ a la derecha».

Entonces, definimos el conjunto de los términos:

**Definición 162: Términos de LC1=**

$$T = \text{Cons} \cup \text{Var}$$

Es decir, los **términos** son todas las constantes y variables de individuo.

Vamos a definir el conjunto de las matrices del lenguaje. Este es la unión del conjunto de las matrices atómicas y del conjunto de las matrices moleculares:

**Definición 163: Matrices de LC1=**

El conjunto de las **matrices atómicas** es $A_{\text{atom}}$, y se define así:

$$A_{\text{atom}} = \{x : x = \ulcorner P^n(\tau_1, \ldots, \tau_n) \urcorner \lor x = \ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner\},$$

donde cada una de las *n* $\tau$s son términos (es decir, constantes o variables), con *al menos una* de ellas siendo una variable individual, y $P^n$ es un predicado de *n* lugares y «=» es la constante de identidad. Es decir, las matrices atómicas son predicaciones (de predicados, relaciones o la relación de identidad) sin constantes lógicas ni cuantificadores.

El conjunto de las **matrices moleculares**, «$A_{\text{mol}}$» es el conjunto definido *recursivamente* así:

1. Sea $\ulcorner A \urcorner$ una matriz, atómica o molecular. Entonces $\ulcorner \neg A \urcorner \in A_{\text{mol}}$.
2. Sean $\ulcorner A \urcorner$ y $\ulcorner B \urcorner$ dos (o la misma) matrices (moleculares o atómicas). Sea $\mathbf{C}$ una conectiva lógica proposicional diádica (es decir, alguna de $\lor$, &, $\supset$, $\equiv$). Entonces, $\ulcorner (A)\mathbf{C}(B) \urcorner \in A_{\text{mol}}$.

Finalmente, el conjunto de las **matrices** de LC1= es:

$$A = A_{\text{atom}} \cup A_{\text{mol}}$$

Con todo esto, ya podemos definir el conjunto de las fórmulas del lenguaje. Lo haremos recursivamente.

**Definición 164: Fórmulas de LC1=**

1. Primero definimos el conjunto de las **fórmulas atómicas**:

   $$F_{\text{atom}} = \{x : x = \ulcorner P(\kappa_1, \dots, \kappa_n)\urcorner \vee x = \ulcorner \kappa_1 = \kappa_2 \urcorner\}$$

   donde: $P \in \text{Pred}^n$ y cada una de las *n* $\kappa$s son constantes.
2. Ahora definimos el conjunto de las **fórmulas cuantificadas**:

   $$F_{\text{cuant}} = \{x : x = \ulcorner \mathbf{Q}_1\alpha_1 \dots \mathbf{Q}_m\alpha_m(\Phi^n[\tau_1, \dots, \tau_n])\urcorner\}$$

   donde $\Phi^n[\tau_1, \dots, \tau_n]$ es una fórmula atómica o una matriz, y en este último caso, tiene *a lo más* un número $m$ de los términos $\tau$ siendo variables individuales (donde $1 \leq m \leq n$), cada una de ellas idénticas a alguna entre $\alpha_1 \dots \alpha_m$ (y estas son distintas entre sí, si es que $1 < m$), y donde cada $\mathbf{Q}$ es un cuantificador universal o existencial.
3. Lo siguiente es definir a las **fórmulas moleculares**:

   $$F_{\text{mol}} = \{x : x = \ulcorner(A)\mathbf{C}(B)\urcorner\} \cup \{x : x = \ulcorner\neg(A)\urcorner\}$$

   donde $\mathbf{C}$ es una conectiva proposicional diádica, y $\ulcorner A \urcorner$ y $\ulcorner B \urcorner$ pertenecen a:

   $$F_{\text{mol}} \cup F_{\text{cuant}} \cup F_{\text{atom}}$$
4. Finalmente, el conjunto de todas las **fórmulas** del lenguaje contiene a todas y sólo las fórmulas moleculares, a las cuantificadas y a las atómicas:

   $$F = F_{\text{mol}} \cup F_{\text{cuant}} F_{\text{atom}}$$

**ejemplo 53**

- Ejemplos de términos:

  $$a \qquad x \qquad y \qquad c \qquad b$$
- Ejemplos de matrices atómicas:

  $$a = x \qquad H(x, y) \qquad R(a, x, a) \qquad H(x, c)$$
- Ejemplos de matrices moleculares:

  $$a = x \vee P(a) \qquad H(b, c) \supset c = y \qquad \neg R(a, x, a)$$
- Ejemplos de fórmulas:
  - Atómicas: $H(b, c) \qquad F(b) \qquad T(c)$
  - Cuantificadas: $\exists z(z = d) \qquad \forall x[T(a, x)]$
  - Moleculares: $\forall x(a = x) \vee P(a) \qquad H(b, c) \supset \exists y(c = y)$

## 15.3. Modelos, otra vez

En esta sección vamos a definir formalmente a los modelos. Usaremos «$\mathscr{M}$» como variable que corre sobre el dominio de los modelos.

**Definición 165: Modelo de LC1= (Formal)**

Un modelo de LC1= es un par ordenado:

$$\mathscr{M} = \langle D, I \rangle$$

tal que:

$$D \neq \varnothing,$$

es decir: los modelos tienen dominios que nunca son vacíos; y:

$$I : \mathscr{L} \longrightarrow D \text{ de manera que: } \begin{cases} I(\kappa) \in D, \text{ si } \kappa \in \text{ Cons} \\ I(F^n) \subseteq D^n, \text{ si } F^n \in \text{ Pred}^n \end{cases}$$

Es decir, la interpretación $I$ es una función que toma elementos del lenguaje de la lógica y los «lleva» a elementos del dominio o de su producto cartesiano: la interpretación de toda constante es un elemento del dominio del modelo, y la interpretación de todo predicado de $n$ lugares es un conjunto de *n*-secuencias de elementos del dominio.

Estas reglas para definir $I$ son obvias, pues sólo reflejan formalmente lo que ya habíamos dicho informalmente acerca de cómo funcionan los modelos.

Hasta aquí, todo bien. Pero nos falta algo: las variables y las constantes con gorrito y ficticias.

### 15.3.1. Asignaciones de variables

Queremos que las variables, como dijimos al inicio (secc. 9.4.1), sean *generales*, es decir, que una variable satisfaga esto: *es un símbolo que refiere de manera no específica a un objeto en su dominio, bajo una interpretación.*

No usamos a la interpretación $I$ del modelo para interpretar a las variables porque queremos que esta no cambie en el mismo modelo—es decir, queremos que cada modelo tenga una sola interpretación. Pero la «interpretación» de las variables sí cambia dentro de un mismo modelo: una variable, como «$x$», no se refiere a un elemento específico del dominio, sino que puede referirse a cualquiera. Por ello, la interpretación $I$ fija la manera de entender a las constantes como refiriéndose a elementos del dominio y a los predicados como refiriéndose a subconjuntos del dominio (si son predicados de un solo lugar) o a conjuntos de $n$-secuencias de cosas tomadas del dominio (si son predicados de $n$ lugares). Pero no fija a las variables: de nuevo, una variable es «general»: no refiere a ninguna cosa específica del dominio.

Lo que hacemos para dar cuenta de esto es usar otro tipo de función, que llamaremos **asignaciones de variables** y que simbolizaremos con «$\sigma$», usando subíndices («$\sigma_1$», «$\sigma_2$», etc.) o primas («$\sigma'$», «$\sigma''$», etc.) cuando sea necesario distinguir entre diferentes asignaciones.

Las asignaciones de variables son maneras de «interpretar» a las variables, siempre relativo a un modelo. Por ello, cuando sea necesario haremos explícita esta dependencia, escribiendo «$\sigma_{\mathscr{M}}$» para decir que estamos considerando a la asignación $\sigma$ relativo al modelo $\mathscr{M}$. Entonces, definamos:

**Definición 166: Asignación de Variables**

Una asignación de variables relativa a un modelo $\mathscr{M}$ es una función que toma variables y les asigna objetos del dominio de $\mathscr{M}$, es decir:

$$\sigma_{\mathscr{M}} : Var \rightarrow D \in \mathscr{M}$$

De manera que, para toda variable individual $\alpha$ y toda asignación de variables $\sigma$ relativo a un modelo $\mathscr{M}$, tenemos que:

$$\sigma_{\mathscr{M}}(\alpha) \in D,$$

donde $D$ es el dominio de $\mathscr{M}$.

Es decir, toda asignación de variables (relativo a un modelo) toma a cada una de las variables del lenguaje y le asigna un elemento del dominio. No se pone constricción alguna acerca de qué elemento le debe asignar a qué variable, sólo asumimos de entrada que: para cada manera de asignarle objetos del dominio a las variables, tenemos disponible una asignación.

Ahora podemos considerar al mismo modelo usando distintas asignaciones. Entonces, usar al modelo $\mathscr{M}_1$ con la asignación de variables $\sigma_1$ nos definirá un dominio, una interpretación de las constantes y los predicados en ese dominio, y una manera de interpretar a las variables, dada por $\sigma_1$; usar al mismo modelo con una asignación distinta $\sigma_2$, nos dejaría fijo el dominio y la interpretación de las constantes y los predicados, pero cambiaría algunos (o todos) los objetos del dominio que se le asignan a las variables. Es decir: $\sigma_{\mathscr{M}}(\kappa) = I(\kappa)$, donde $I$ es la interpretación de $\mathscr{M}$, y $\kappa$ es una constante. Esto nos dice que la asignación relativo a un modelo incorpora la interpretación que ese modelo hace de las constantes. Además, $\sigma_{\mathscr{M}}(\underline{P}) = I(\underline{P})$, donde $\underline{P}$ es un predicado (de cualquier número de argumentos). Es decir, la asignación relativo a un modelo incorpora la interpretación que el modelo hace de los predicados.

Finalmente, lo que buscábamos con las asignaciones era una manera de interpretar a las variables. Entonces, la asignación $\sigma$ de una variable $\alpha$, relativo a un modelo $\mathscr{M}$, es un elemento de $D$, es decir: $\sigma_{\mathscr{M}}(\alpha) \in D$, donde $D$ es el dominio del modelo $\mathscr{M}$.

## 15.3.2. Constantes con gorrito y ficticias

¡Un momento! No hemos definido qué pasa con las constantes con gorrito, $\hat{\kappa}$ y las constantes ficticas, $\kappa^*$. Introdujimos estas constantes para las reglas de I∀ y E∃, en la sección 11.4.

### Constantes con gorrito

Empecemos con las constantes con gorrito. Habíamos dicho, al introducirlas, que «Una manera de leer una constante con gorrito, $\hat{a}$, es: '*a y todas las demás cosas*'. Entonces, leeríamos la fórmula '$F\hat{a}$' como: '*Efe de a y de todas las demás cosas*'.» Esto quiere decir que una fórmula del tipo de $\ulcorner\Phi[\hat{\kappa}]\urcorner$ va a ser verdadera en un modelo si todo elemento del dominio del modelo es elemento de la interpretación de $\ulcorner\Phi\urcorner$.

Es decir—como vimos en la sección 11.4—una fórmula que contenga una constante con gorrito nos permite inferir la misma fórmula pero *universalizada*: sustituyendo cada aparición de esa constante con gorrito por una variable (que no aparezca ya en la fórmula), y poniendo un cuantificador universal ligando esa variable al inicio de la fórmula. Y como también vimos en la misma sección, de una fórmula universalizada podemos inferir la misma fórmula pero sustituyendo cada aparición de la variable ligada por el cuantificador universal por una constante y eliminando el cuantificador universal. Entre las constantes que podemos sustituir están, por supuesto, las constantes con gorrito.

Así que las fórmulas del tipo de $\ulcorner\Phi[\hat{\kappa}]\urcorner$ son, en realidad, lógicamente equivalentes con las fórmulas del tipo de $\ulcorner\forall\alpha(\Phi[\alpha])\urcorner$. Esto significa que debemos interpretar a las constantes con gorrito de manera que se cumpla esta equivalencia.

Ahora bien, como veremos abajo (en la sección 15.4.2 y la definición 15.4.1), una fórmula como $\ulcorner\forall\alpha(\Phi[\alpha])\urcorner$ es verdad si y solamente si todo elemento del dominio es elemento de la interpretación de $\Phi$—lo cual, por el Axioma de Extensionalidad, significa que la interpretación de $\Phi$ va a ser idéntica al dominio del modelo. Entonces, $\ulcorner\forall\alpha(\Phi[\alpha])\urcorner$ es verdad si y solamente si $I(\Phi) = D$. Y como $\ulcorner\Phi[\hat{\kappa}]\urcorner$ es lógicamente equivalentes con $\ulcorner\forall\alpha(\Phi[\alpha])\urcorner$ (lo cual significa, como veremos abajo, que son verdaderas en exactamente los mismos modelos), debe suceder que $\ulcorner\Phi[\hat{\kappa}]\urcorner$ es verdadera si y solamente si $I(\Phi) = D$.

Como las asignaciones preservan interpretaciones, esto, a su vez, esto significa que debe resultar lo siguiente: $\sigma_{\mathscr{M}} \vDash \ulcorner P(\hat{\kappa})\urcorner$ si y sólo si $\sigma_{\mathscr{M}}(P) = D$. Entonces, la asignación de una constante con gorrito debe ser: $\sigma_{\mathscr{M}}(\hat{\kappa}) = D$.

Pero esto parece incorrecto. Dijimos (en la sección 15.3.1) que una asignación (en un modelo) toma a una constante o variable y le asigna un elemento del dominio (de ese modelo). ¡Pero ahora una asignación puede asignar al dominio mismo!

La solución es tomar al gorrito como una función. Esta función toma cualquier elemento del dominio y regresa al dominio mismo. Esto significa que la interpretación de una constante con gorrito debe ser la interpretación de un *símbolo de función*—el gorrito—aplicado a un elemento del dominio—aquél denotado por la constante a la que le ponemos el gorrito. Entonces, $\sigma_{\mathscr{M}}(\kappa) \in D$, y $\sigma_{\mathscr{M}}(\hat{\ }) = h$, donde $h$ es una función así: $h : D \longrightarrow \{D\}$, de manera que $h(\sigma_{\mathscr{M}}(\kappa)) = D$, donde $D$ es el dominio de $\mathscr{M}$.

(Esto es a nivel semántico. A nivel del lenguaje, el gorrito sería un símbolo para una función. Intuitivamente, esta función es definida por la regla: *¡toma un objeto y dame todas las cosas en su dominio!*)

Entonces, intuitivamente (veremos la versión rigurosa en la siguiente sección) una fórmula del tipo $\ulcorner P(\hat{\kappa})\urcorner$ será verdadera bajo una asignación $\sigma_{\mathscr{M}}$ si, y solamente si, la interpretación del predicado $P$ es idéntica al dominio del modelo $\mathscr{M}$.

### Constantes ficticias

Falta la interpretación de las constantes ficticias.

Vimos arriba () que una constante ficticia no refiere a ningún objeto específico, sino *a cualquier objeto que satisfaga la fórmula existencial* que estamos usando en la eliminación del cuantificador existencial. Eso significa que la interpretación de una constante ficticia **no** puede ser así:

$$I(a^*) \in D,$$

pues esto significa que la interpretación es un elemento particular del dominio.

Lo que requerimos es, de nuevo, que las constantes ficticias involucren una función. La idea sería que la función es $f : D \longrightarrow I(\Phi)$, donde $\Phi$ es la matriz en donde aparece la variable ligada por el cuantificador existencial que estamos eliminando. Es decir: $f$ es una función que toma un elemento del dominio (a saber, el denotado por la constante a la que le aplicamos el asterisco), y devuelve un elemento de la interpretación de $\Phi$—una cosa, entonces, que es $\Phi$. Esto significa que $I(a^*) = f$, donde $f$ toma el objeto denotado por $a$ y devuelve cualquier objeto que sea $\Phi$: ¡cualquier objeto que haga verdad que *algo* es $\Phi$!

Entonces, intuitivamente (y de nuevo, veremos la versión rigurosa abajo), una fórmula del tipo $\ulcorner\Phi[\alpha^*]\urcorner$ va ser verdadera si y solamente si, alguno de los objetos que esté en la interpretación de $\Phi$, es $\Phi$. ¡Pero esto es siempre verdad! Lo cual está bien: queríamos que las constantes ficticias significaran «tomando cualquier cosa que satisfaga la fórmula existencial», y esto es precisamente lo que hace la función $f$.

## 15.4. *Verdad en un modelo* para LC1=

Ahora vamos a definir lo que significa que una fórmula (es decir, un elemento del conjunto $F$ que definimos arriba) sea verdadera en un modelo $\mathscr{M}$.

### 15.4.1. Verdad en un modelo bajo una asignación

Como vamos a usar distintas asignaciones con el mismo modelo para poder definir a las fórmulas cuantificadas, primero consideramos a un modelo junto a una asignación.

Hemos visto que las matrices abiertas no son *fórmulas* del lenguaje; por ello, no son ni verdaderas ni falsas. Sin embargo, las fórmulas cuantificacionales que contienen a esas matrices sí son verdaderas o falsas; ahora veremos dos ejemplos.

Primer ejemplo: la fórmula «$\forall x(Fx)$» va a ser verdadera en un modelo $\mathscr{M}$ si todas las cosas del dominio de $\mathscr{M}$ son elementos del conjunto con el que $I$ (de $\mathscr{M}$) interpreta al predicado «$F$».

De la misma manera, la fórmula «$\exists y(Gy \vee Hya)$» es verdadera en un modelo $\mathscr{M}$ si al menos una cosa de su dominio o bien es elemento de $I(G)$, o bien está en un par ordenado con la cosa del dominio $I(a)$, y ese par es un elemento de $I(H)$—es decir, la fórmula es verdadera en el modelo si: para alguna cosa $d$ del dominio: o bien $d \in I(G)$, o bien $\langle d, a \rangle \in I(H)$. Para este último ejemplo usamos algo que veremos abajo: que la relación de ser verdad en un modelo incluye la definición de las tablas de verdad de las conectivas proposicionales.

Vamos a definir a la relación «el modelo $\mathscr{M}$ hace verdadera a la fórmula $A$ bajo la asignación $\sigma$». Escribiremos esta relación así: «$\sigma_{\mathscr{M}} \vDash A$», pues estamos considerando a la asignación relativa al modelo.

Definiremos a esta relación yendo caso por caso: diremos qué se necesita y basta para que cada posible tipo de fórmula de nuestro lenguaje, simbolizada por $A$, $B$ y $C$, esté en esta relación con un modelo y una asignación.

Como veremos después de escribirlas y explicarlas, la definición que daremos es *recursiva*. Pero primero veamos sus tres posibles casos.

**1er. caso**: A **es una fórmula atómica**. En este caso, consideramos los cuatro posibles casos:

- A es de la forma: $\ulcorner P(\kappa_1, \ldots, \kappa_n) \urcorner$. Entonces lo que se necesita y basta es que: $\langle \sigma_{\mathscr{M}}(\kappa_1), \ldots, \sigma_{\mathscr{M}}(\kappa_n) \rangle \in \sigma_{\mathscr{M}}(P)$.
- A es de la forma: $\ulcorner \kappa_1 = \kappa_2) \urcorner$. Entonces: $\sigma_{\mathscr{M}}(\kappa_1) = \sigma_{\mathscr{M}}(\kappa_2)$.
- A es de la forma: $\ulcorner P(\kappa_1, \ldots, \hat{\kappa}_i \ldots, \kappa_n) \urcorner$.
- A es de la forma: $\ulcorner P(\kappa_1, \ldots, \kappa^* \ldots, \kappa_n) \urcorner$.

El primer caso nos dice que una predicación atómica es verdadera en un modelo bajo una asignación siempre y cuando la secuencia de las interpretaciones (que, recuerda, son «copiadas» por $\sigma_{\mathscr{M}}$) de las constantes es un elemento de la interpretación del predicado. Como ejemplo, tomemos una predicación atómica como $R(a,b)$. Entonces, $R(a,b)$ va a ser verdadera en un modelo $\mathscr{M}_1$ bajo una asignación $\sigma_1$ (relativo a $\mathscr{M}$, pero omitimos esto para simplificar la notación) si y sólo si: el par $\langle\sigma_1(a),\sigma_1(b)\rangle$ es un elemento de $\sigma_1(R)$, donde $\sigma_1(R) \subseteq D_1$, donde $D_1$ es el dominio del modelo $\mathscr{M}_1$.

Pero esta definición nos da solamente las condiciones *formales* para que la fórmula «$R(a,b)$» sea verdadera en *cualquier* modelo bajo una asignación. Pero en muchas aplicaciones de la lógica de primer orden—como la que hemos usado en estas notas: la aplicación a la argumentación—queremos interpretar a las fórmulas con proposiciones específicas. Se dice, en estos casos, que tenemos una **interpretación intencional** para la fórmula: no nos importa *cualquier* interpretación de la fórmula, sino una específica. Por ejemplo, para alguna aplicación a la argumentación, podríamos querer interpretar a «$R(a,b)$» como «Lana Wachowski y Lilly Wachowski son hermanas». *¿En qué tipo de modelos va a ser verdadera esta fórmula, si la vamos a interpretar así?*

En modelos que tengan un dominio que incluya a las dos Wachowski, que además interpreten a «*a*» como Lana y a «*b*» como Lilly, y en los que además exista un conjunto de pares ordenados que incluya al par <Lana, Lilly>y tal que podamos usar este conjunto como interpretación de la relación «_ *es hermana de* _». (Por ejemplo, un conjunto que incluyera al par <Rihanna, Margarita Zavala>no nos serviría como interpretación del predicado *R*, si queremos interpretarlo como la propiedad «_ *es hermana de* _», por la razón obvia: ¡Rihanna no es hermana de Margarita Zavala!)

El segundo caso de fórmula atómica es obvio: una predicación de identidad entre dos constantes es verdadera (en un modelo, bajo una asignación), si la interpretación de ambas constantes es el *mismo* elemento del dominio.

Lo siguiente es definir verdad en un modelo bajo una asignación para fórmulas cuantificacionales:

**2do. caso**: *A* **es una fórmula cuantificada**. En este caso, la conectiva principal de la fórmula es un cuantificador; otra vez tenemos dos posibles casos:

- *A* es de la forma: $\ulcorner\forall\alpha(\Phi[\alpha])\urcorner$. Entonces: $\sigma'_{\mathscr{M}}(\alpha) \in \sigma'_{\mathscr{M}}(\Phi)$, para toda $\sigma'_{\mathscr{M}}$ que sea diferente de $\sigma_{\mathscr{M}}$ en, *a lo más*, lo que le asigna a $\alpha$.
- *A* es de la forma: $\ulcorner\exists\alpha(\Phi[\alpha])\urcorner$. Entonces: $\sigma'_{\mathscr{M}}(\alpha) \in \sigma'_{\mathscr{M}}(\Phi)$, para alguna $\sigma'_{\mathscr{M}}$ que sea diferente de $\sigma_{\mathscr{M}}$ en, *a lo más*, lo que le asigna a $\alpha$.

Estas definiciones parecerían algo retorcidas, pero en realidad sólo explicitan formalmente lo que ya sabíamos sobre los cuantificadores. Una fórmula de la forma $\ulcorner\forall\alpha(\Phi[\alpha])\urcorner$ nos dice (dado un modelo) que todas las cosas del modelo son $\Phi$. Para ver ejemplos, tomemos a $\alpha$ como $x$. Entonces, una fórmula como $\ulcorner\forall x(\Phi[x])\urcorner$ significa que toda cosa

$x$ del dominio, es $\Phi$. A su vez, $\Phi$ es una matriz donde $x$ está libre (pues el cuantificador $\forall$ del inicio llega a ligar a $x$). Y esta matriz puede ser un solo predicado—de un lugar, como «$Fx$», o de más, como «$R(a,x)$»—, o también puede ser varios predicados unidos con conectivas proposicionales y/o cuantificadores, como «$[Px \vee R(a,x)] \supset \exists y(Py)$». Puede haber más variables que $x$, pero estas tienen que estar ligadas por otros cuantificadores: como estamos considerando fórmulas cuya conectiva principal es $\forall$, si hay más variables que no liga este cuantificador al inicio de la fórmula, deben estar ligadas por otro.

Pues bien, dijimos que $\ulcorner\forall x(\Phi[x])\urcorner$ significa que toda cosa $x$ del dominio, es $\Phi$. ¿Qué basta y se requiere para que una fórmula así sea verdadera en un modelo? Obviamente, que toda cosa del dominio (del modelo) sea elemento de como sea que interpretemos (en el modelo) a $\Phi$. Pero como vimos, las interpretaciones no hacen nada con las variables, y por eso usamos asignaciones. Lo que queremos es que, *cualquier cosa* (del dominio) *que le asignemos a la variable $x$*, sea $\Phi$. ¡Pero una asignación sólo define un solo elemento como asignación de cada variable! No tiene mucho sentido hablar de «cualquier cosa que la asignación le asigne a la variable», pues ¡sólo hay una cosa asignada a cada variable!

Por eso es que, en la definición, dijimos que «…para toda $\sigma'_{\mathscr{M}}$ que sea diferente de $\sigma_{\mathscr{M}}$ en, *a lo más*, lo que le asigna a» la variable. Es decir: consideramos a *todas* las diferentes maneras de interpretar a la variable, y como sólo nos interesa la variable ligada por el cuantificador «$\forall$»—¡porque estamos considerando fórmulas que tienen a ese cuantificador como conectiva principal!—nos enfocamos en $\sigma_{\mathscr{M}}$ misma *y además* en todas las asignaciones que cambien lo que $\sigma_{\mathscr{M}}$ le asigna a $x$ (la variable ligada por el cuantificador principal), pero que no cambien nada más (pues, de nuevo, solo nos interesa $x$).

Entonces, si sucede que todas esas variantes de $\sigma_{\mathscr{M}}$ con respecto a $x$—es decir, todas esas asignaciones que solo difieren de la original con respecto al elemento con el que interpretan a la variable—hacen que el elemento asignado sea elemento de como sea que interpretemos a $\Phi$, podemos decir que *toda* cosa del dominio es $\Phi$. Y eso es precisamente lo que queríamos que significara decir que la fórmula universal es verdadera en el modelo (bajo una asignación). Finalmente, simplemente le llamamos «$\sigma'_{\mathscr{M}}$» a las variantes con respecto a $x$ de $\sigma_{\mathscr{M}}$, y tenemos el primer caso de las fórmulas cuantificacionales.

Habiendo dicho todo esto, la cláusula para el cuantificador existencial ya debería ser más clara. Queremos que una fórmula existencial como «$\exists x(Fx)$» sea verdadera en un modelo siempre y cuando *al menos* una cosa de su dominio sea $F$ (es decir, pertenezca a la interpretación que el modelo hace del predicado «$F$»). Entonces, consideramos qué cosa le asigna $\sigma_{\mathscr{M}}$ a la variable $x$ y si resulta que $\sigma_{\mathscr{M}}$ u otra asignación que sólo cambie la asignación de $x$, nos da un objeto que resulta ser elemento de la interpretación del predicado, tenemos lo que queríamos, pero escrito formalmente. Eso es precisamente lo que el segundo caso de la definición nos da.

Finalmente, definiremos a las fórmulas que tienen como conectiva principal a una conectiva *proposicional*.

**3er. caso**: $A$ **es una fórmula molecular**. Aquí tenemos cinco posibles casos:

- $A$ es de la forma: $\ulcorner\neg(B)\urcorner$. Entonces: es falso que $\sigma_{\mathscr{M}} \vDash B$.
- $A$ es de la forma: $\ulcorner(B) \vee (C)\urcorner$, y entonces: o bien $\sigma_{\mathscr{M}} \vDash B$, o bien $\sigma_{\mathscr{M}} \vDash C$, o ambas.
- $A$ es de la forma: $\ulcorner(B)\ \&\ (C)\urcorner$, y entonces: tanto $\sigma_{\mathscr{M}} \vDash B$ como también $\sigma_{\mathscr{M}} \vDash C$.
- $A$ es de la forma: $\ulcorner(B) \supset (C)\urcorner$, y entonces: si $\sigma_{\mathscr{M}} \vDash B$ entonces $\sigma_{\mathscr{M}} \vDash C$ (es decir: o bien $\sigma_{\mathscr{M}} \vDash \neg(B)$, o bien $\sigma_{\mathscr{M}} \vDash C$, o ambas).
- $A$ es de la forma: $\ulcorner(B) \equiv (C)\urcorner$, y entonces: o bien $\sigma_{\mathscr{M}} \vDash (\neg(B)\ \&\ \neg(C))$, o bien $\sigma_{\mathscr{M}} \vDash ((B)\ \&\ (C))$.

Como es fácil de ver, lo que hacen estas definiciones es simplemente incorporar las tablas de verdad de las conectivas proposicionales. Por ejemplo, una fórmula cuya conectiva principal es la disyunción, «∨», será verdadera en un modelo (bajo una asignación) siempre y cuando uno u otro (o ambos) de sus disyuntos sea verdadero en el modelo (bajo esa asignación). ¿Qué va a pasar con esos disyuntos? Pues que será una fórmula de alguno de los tres tipos que hemos considerado: atómica, cuantificacional o con una conectiva principal proposicional, y entonces solamente aplicamos la definición correspondiente.

Se dice, por esto, que las definiciones que hemos dado son **recursivas**: se aplican primero a la fórmula entera, tomando qué conectiva principal tenga (cuantificador o proposicional), si es que tiene una, y si no, es atómica; si es atómica ya hemos acabado; si no es atómica, ya que evaluamos su conectiva principal, nos seguimos con las subfórmulas—si su conectiva principal es proposicional, y si su conectiva es un cuantificador, seguimos con la matriz que tiene libre la variable que está ligada por el cuantificador que ya evaluamos. En esta matriz, habrá más cuantificadores, o conectivas proposicionales, o ninguno; en este caso, la asignación $\sigma*$ nos permite tratarla como atómica; en cualquiera de los tres casos, otra vez aplicamos la definición relevante.

### 15.4.2. Una manera más simple

Existe otra manera de definir la verdad en un modelo de las fórmulas cuantificacionales, que no requiere de asignaciones. En cierto sentido, es más simple, pero requiere que extendamos el lenguaje.[1]

La idea es la siguiente. Cada modelo $\mathscr{M}$ es un par de un dominio y una interpretación, así que al evaluar una fórmula cuantificada para saber si es o no verdadera en $\mathscr{M}$, extendemos el lenguaje de `LC1=`. En el lenguaje extendido, tomamos el conjunto de constantes que ya tenemos, y agregamos una constante para *cada uno* de los elementos del dominio de $\mathscr{M}$. Es decir: si $d$ es un elemento del dominio de $\mathscr{M}$, agregamos una constante $a_d$ al lenguaje. Ahora modificamos la interpretación de $\mathscr{M}$, de manera que: para toda constante $a_d$ que hemos agregado, $(a_d) = d$. Es decir, la interpretación de la constante que agregamos para el elemento $d$ del dominio es… pues $d$ mismo.

Habiendo hecho esto, la interpretación de fórmulas cuantificacionales es muy sencilla:

- Las fórmulas cuya conectiva principal es «∀», es decir, de la forma:

  $$\ulcorner \forall \alpha (\Phi[\alpha]) \urcorner,$$

  son verdaderas en un modelo $\mathscr{M}$ si y sólo si: para cada constante agregada $a_d$, $\ulcorner \Phi[a_d] \urcorner$ es verdad en $\mathscr{M}$.
- Las fórmulas de la forma $\ulcorner \exists \alpha (\Phi[\alpha]) \urcorner$, son verdaderas en un modelo $\mathscr{M}$ si y sólo si: para al menos una constante agregada $a_d$, $\ulcorner \Phi[a_d] \urcorner$ es verdad en $\mathscr{M}$.

Ahora, en vez de considerar distintas maneras de asignarle elementos del dominio a las variables, tomamos la fórmula, le quitamos el cuantificador, sustituimos *en todas sus apariciones* a la variable que estaba ligando por una constante,[2] y si la fórmula es verdadera para alguna constante, significa que es verdadera para alguna cosa del dominio—lo cual nos da la cláusula correcta para el cuantificador existencial; la cláusula para el universal es, obviamente, cuando la fórmula es verdadera para *toda* constante que sustituyamos por la variable.

Es fácil ver por qué requerimos la expansión del lenguaje—en particular, agregar más constantes—para poder definir las cláusulas para los cuantificadores: si no hubiéramos hecho esto, entonces podría resultar que algún elemento del dominio no fuera referido por *ninguna* de las constantes de nuestro lenguaje. Y si eso pasara, aunque toda cosa en el dominio de hecho fuera (por ejemplo) elemento de $I(F)$, como no tendríamos constantes para todas ellas, podríamos terminar juzgando erróneamente que no todo del dominio es $I(F)$.[3]

## 15.4.3. Verdad en un modelo

Ya podemos decir qué significa que una fórmula sea **verdadera en un modelo** — verdadera *sin nada más*, sin hablar de asignaciones: ahora consideraremos sólo al modelo y a la fórmula:

**Definición 167: Verdad en un Modelo de LC1=**

$\mathscr{M} \vDash A$ si y sólo si: $\sigma_{\mathscr{M}} \vDash A$ para toda $\sigma_{\mathscr{M}}$.

Es decir, $A$ es verdadera en el modelo $\mathscr{M}$ si y solamente si, es verdadera para toda asignación relativo a ese modelo.

Cuando una fórmula es verdadera en un modelo, esto significa que es *irrelevante* qué asignación escojamos: la fórmula será verdadera bajo cualquier forma de interpretar a las variables. Por ejemplo, las fórmulas sin variables, como «$a = b$» o «$\neg S(b, c)$» serán, si verdaderas bajo alguna asignación, verdaderas en el modelo.

### 15.4.4. Verdad lógica en LC1=

En lógica de orden cero, teníamos el concepto de *tautología*: una fórmula cuya tabla de verdad da en cada fila de su conectiva principal el valor *verdadero*; de manera equivalente, una fórmula que es verdadera bajo toda asignación de valores a sus fórmulas atómicas. En la lógica cuantificacional de primer orden, usamos «$\vDash A$» para decir que una fórmula $A$ es una verdad lógica de LC1=, y definimos esto así:

**Definición 168: Verdad Lógica de LC1=**

$\vDash A$ si y sólo si: $\mathscr{M} \vDash A$ para todo $\mathscr{M}$.

Las verdades lógicas de LC1= son, pues, las que son verdaderas en todo modelo: son aquellas fórmulas que son verdaderas sin importar qué dominio tengamos (siempre que no sea vacío) o cómo interpretemos variables, predicados y constantes (siempre que interpretemos a las constantes lógicas de manera fija). Por ejemplo,

- $\forall x(Fx \vee \neg Fx)$,
- $\forall x(x = x)$,
- $\exists x(x = x)$,

son, cada una de ellas, verdades lógicas de LC1=.

### 15.4.5. Consecuencia lógica en LC1=

Quizá la principal utilidad de la lógica formal para el análisis filosófico está en una de sus aplicaciones: ser un *modelo* (en el sentido de una *representación científica*, no en el sentido que hemos usado en este capítulo) de la validez. A su vez, como dijimos al comenzar con LC1= en la sección **??**, el concepto general de validez es el siguiente:

**Definición**

Un argumento es válido siempre y cuando: no existe ninguna situación lógicamente posible en la que sus premisas sean todas verdaderas, pero la conclusión falsa.

En lógica proposicional, la manera de entender este concepto es cuando decíamos que un argumento es lógicamente válido si y sólo si su condicional asociado es una tautología:

**Definición**

Consideremos un argumento que consista en las premisas $P_1, \ldots P_n$ y la conclusión $C$, todas en el lenguaje de la lógica clásica de orden cero (LC0). Entonces, ese argumento es **lógicamente válido** siempre y cuando: cada asignación de valores de verdad a las fórmulas atómicas de cada una de las premisas $P_1, \ldots P_n$, de acuerdo a la cual cada una de las premisas sea verdadera, es también una asignación en la que la conclusión es verdadera. De manera equivalente, el condicional asociado al argumento:

$$(P_1 \ \& \ \ldots \ \& \ P_n) \supset C$$

es una tautología.

En LC1= definimos a la validez de un argumento de manera completamente análoga:

**Definición 169: Consecuencia Lógica en LC1=**

Sea $A$ un argumento que consiste de las premisas $P_1, \ldots P_n$ y la conclusión $C$, todas en el lenguaje de la lógica clásica cuantificacional de primer orden con identidad (LC1=). Entonces, un argumento es **lógicamente válido** siempre y cuando: cada modelo que haga verdad a todas las premisas, es también un modelo en el que la conclusión es verdadera. De manera equivalente, el condicional asociado a el argumento, es decir, la fórmula: $(P_1 \ \& \ \ldots \ \& \ P_n) \supset C$, es verdadero en todo modelo. Es decir,

$$\vDash (P_1 \ \& \ \ldots \ \& \ P_n) \supset C$$

Cuando un argumento es válido, se dice que las premisas **implican lógicamente** a la conclusión. La notación estándar es:

$$(P_1 \ \& \ \ldots \ \& \ P_n) \vDash C$$

Otra manera de decirlo es diciendo que su conclusión es una **consecuencia lógica** de sus premisas.

### 15.4.6. Equivalencia lógica en LC1=

Así como la equivalencia lógica de dos fórmulas en LC0 significa que su bicondicional material es una tautología, así aquí:

**Definición 170: Equivalencia Lógica en LC1=**

Dos fórmulas $A$ y $B$ en el lenguaje $\mathscr{L}_{\text{LC1=}}$ son lógicamente equivalentes si y solamente si: el bicondicional material $A \equiv B$ es una verdad lógica de LC1=. De manera equivalente, si y solamente si: $A \vDash B$ y $B \vDash A$.

★

# Proyecto del capítulo:

## Antecedentes ⇢

# Notas

**Problema** ⇢ 1. ¿Por qué, entonces, ver primero la más complicada? Bueno, porque es bueno entenderla, pues es una definición muy usual en la lógica; además, como veremos abajo, la manera simple tiene sus limitaciones. Por cierto, esta nota al pie puede ser el mejor lugar para notar que existe una «*tercera*» manera de definir la cláusula de verdad para fórmulas cuantificadas, que de hecho es la que Tarski usó originalmente en su artículo clásico—fundacional para la teoría de modelos— de 1933, «Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych», o «El concepto de verdad para lenguajes formalizados» (que se puede encontrar, como «The concept of truth in formalized languages», en su compilación *Logic, Semantics, and Metamathematics*, Hackett Publishing Company, 1983). Esta manera, en vez de usar asignaciones, utilizaba secuencias infinitas de objetos y el concepto de «*satisfacción*»; sin embargo, resulta equivalente a la que hemos dado en términos de asignaciones—y de ahí las comillas en «tercera».

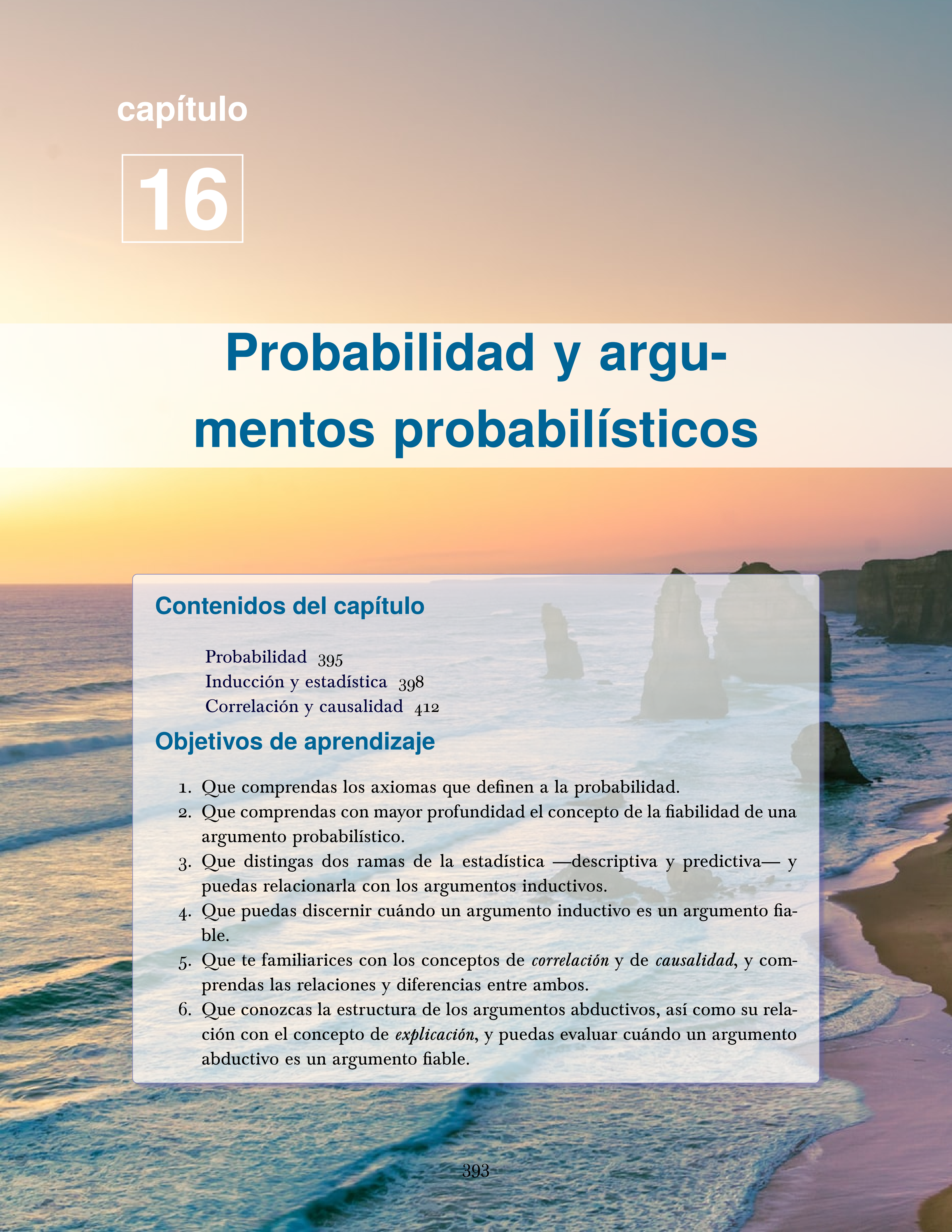
2. He sido inexacto al decir cosas como «para cada constante agregada $a_d$, $\ulcorner\Phi[a_d]\urcorner$ es verdad en $\mathscr{M}$» en las definiciones de arriba. Estrictamente, tendría que haber definido una notación para la sustitución de la variable *en todas sus apariciones* por la constante, y usar esa notación en lugar de «$\ulcorner\Phi[a_d]\urcorner$». Sin embargo, la idea es clara por lo que he explicado, y nos ahorramos el trabajo.

3. Por esta misma razón, esta idea de expandir el lenguaje (relativo a cada modelo) con constantes para cada elemento del dominio, es una estrategia limitada: es usual pensar que existe un número denumerable (es decir, a lo más igual a $card(\mathbb{N})$) de símbolos, pero existen conjuntos (como $\mathbb{R}$) con infinitamente más elementos, y nada de lo que hemos dicho prohíbe usar estos conjuntos como dominios de modelos. Para estos casos, la estrategia debe modificarse: ya sea que nos restrinjamos a modelos con dominios denumerables, o que, cuando pasamos a dominios con más elementos, usemos cada elemento del dominio como su propio nombre—de manera que diríamos que cada constante $a_d$ agregada es, en realidad, $d$ mismo.

# IVª PARTE:

# LÓGICA INFORMAL Y PROBABILÍSTICA

**Esta parte todavía está incompleta (con cosas escritas aquí y allá) y por ello solamente pongo el capítulo sobre probabilidad, que es el que tengo un poco más avanzado. Pero va a incluir un capítulo sobre lógica informal (falacias y definiciones) y uno sobre aplicaciones de la lógica al discurso cotidiano.**



## capítulo

## 16

# Probabilidad y argumentos probabilísticos

## Contenidos del capítulo

## Objetivos de aprendizaje

1. Que comprendas los axiomas que definen a la probabilidad.
2. Que comprendas con mayor profundidad el concepto de la fiabilidad de una argumento probabilístico.
3. Que distingas dos ramas de la estadística —descriptiva y predictiva— y puedas relacionarla con los argumentos inductivos.
4. Que puedas discernir cuándo un argumento inductivo es un argumento fiable.
5. Que te familiarices con los conceptos de *correlación* y de *causalidad*, y comprendas las relaciones y diferencias entre ambos.
6. Que conozcas la estructura de los argumentos abductivos, así como su relación con el concepto de *explicación*, y puedas evaluar cuándo un argumento abductivo es un argumento fiable.

No todos los argumentos tienen una inferencia deductiva: algunos tienen una inferencia no deductiva. A estos se les conoce como *argumentos probabilísticos*, pues las premisas no implican lógicamente a la conclusión. Es decir, la verdad de las premisas no es *lógicamente incompatible* con la falsedad de la conclusión: la verdad de las premisas solamente hace más probable que la conclusión sea verdadera.

Los argumentos probabilísticos a veces se clasifican como *lógica informal*. Eso se debe a que una inferencia no deductiva, para ser una inferencia correcta —o, como le llamaremos técnicamente, una inferencia *fiable*— requiere algo más que la forma de las proposiciones que fungen como premisas y conclusiones: requiere tomar en cuenta el **contenido** de las proposiciones involucradas. A este contenido, tradicionalmente, se le llamaba la «materia» de las proposiciones, que va más allá de su forma.

Por otro lado, existen áreas de las matemáticas que se aplican a estos casos: la probabilidad y la estadística. Como estas nos proveen de reglas sistemáticas y rigurosas para la evaluación de algunas inferencias probabilísticas —precisamente como la lógica matemática lo hace para la evaluación de las inferencias deductivas—, llamarle «informal» a esta rama de la lógica podría parecer un mal nombre.

Hay que recordar, entonces, que el aspecto «informal» de las inferencias probabilísticas se debe a que estas requieren, para ser fiables, estar conectadas con el contenido de las premisas, no solamente con su forma lógica. Esto, de nuevo, no se contrapone con el hecho de que existan reglas formales —matemáticas— para evaluar estas inferencias. (Quizá sería más adecuado reservar la noción de *lógica informal* para una investigación no matemática del razonamiento cotidiano, como hacen hoy en día muchos teóricos de la argumentación.[1] Sobre esto no profundizaremos aquí.)

Como he dicho, para entender los argumentos probabilísticos es necesario tener un entendimiento, al menos elemental, de la teoría de la probabilidad. Vamos a dedicar la primera sección para ello. Este tratamiento del tema es, por necesidad, breve y poco profundo, además de casi puramente cualitativo; un tratamiento más profundo requiere de un libro entero. Sin embargo, esto no impide que toquemos algunos temas importantes para el arte de razonar bien, como la relación entre causación y correlación (sección 16.3), el concepto de distribución de probabilidad (sección 16.2.5), el concepto de una muestra representativa (sección 16.2.3), y las diferentes concepciones de la naturaleza de la probabilidad (subsección 16.1.2). Por supuesto, todo esto en el marco de la exposición de dos tipos muy importantes de argumentos probabilísticos: los inductivos y los abductivos.

## 16.1. Probabilidad

### 16.1.1. La definición de la probabilidad

Por principio de cuentas, tenemos a la teoría matemática de la *medida*. Una medida es, simplemente, una manera de expresar con un número qué tan «grande» o «pequeño» es un conjunto de cosas. Por ejemplo, el área de una figura o la altura de una persona pueden ser descritas por medidas; una figura y el área que contiene son conjuntos de puntos, y podemos representar a una persona como un conjunto de partes. Sus áreas y alturas son medidas de qué tan grandes son esos conjuntos de puntos o de partes.

Ahora bien, la teoría de la probabilidad es una teoría sobre una medida que nos dice qué tan grande es la probabilidad de que suceda un conjunto de eventos posibles. Y en el caso en que el conjunto solamente contiene a un evento, decimos que mide la probabilidad *del evento*. Así, la probabilidad de un conjunto de eventos mide el «grado de posibilidad» de que ocurran esos eventos.

Vamos a usar los símbolos «$\mathrm{Pr}(X)$» como nombre del número que representa la probabilidad, dada por la medida Pr, de un conjunto $X$.[2] Esta probabilidad se define como una medida particular que cumple estas reglas, conocidas como «Axiomas de Kolmogorov»:

1. *La probabilidad de todo conjunto de eventos es un número real entre 0 y 1 (inclusivo).* Esto significa que todo evento tiene, o bien una probabilidad $0$ de suceder —que sería un evento *nada* probable—, o bien una probabilidad $1$ —que sería un evento *máximamente* probable—, o bien una probabilidad intermedia: un evento con 0.3 de probabilidad tiene menor probabilidad de ocurrir que uno con 0.6 de probabilidad, por ejemplo. Específicamente, un evento con 0.5 de probabilidad es completamente aleatorio, como lanzar una moneda al aire. En lenguaje matemático: $0 \leq \mathrm{Pr}(X) \leq 1$, para todo conjunto $X$ al que se aplique la medida.
2. *La probabilidad de que ocurra alguno de todos los eventos posibles es 1.* Es decir: es seguro que ocurra *algo*: podemos no saber cuál, pero de todas las posibilidades, una tiene que ocurrir. En lenguaje matemático: $\mathrm{Pr}(U) = 1$, donde $U$ es el conjunto de todos los eventos posibles, también llamado el «universo».
3. *La probabilidad de la alternativa entre eventos independientes* (es decir, que no se implican entre sí) *es la suma de las probabilidades de cada uno de esos eventos.* En lenguaje matemático:

   $$\mathrm{Pr}\left(E_1, \text{ o bien, } E_2, \ldots\right) = \mathrm{Pr}(E_1) + \mathrm{Pr}(E_2) + \ldots$$

   De manera equivalente, *la probabilidad de que sucedan conjuntamente eventos independientes es el producto de sus probabilidades*:

   $$\mathrm{Pr}(E_1, \text{ y también, } E_2, \ldots) = \mathrm{Pr}(E_1) \times \mathrm{Pr}(E_2) \times \ldots$$

Finalmente, vamos a utilizar el símbolo «|» para la **probabilidad condicional**, la que nos dice cuál es la probabilidad de un evento *suponiendo* que suceda otro evento. Es decir, escribir «$\Pr(B \mid A)$» simplemente nombra a la probabilidad de que suceda $B$ *suponiendo que* también sucede $A$. Es decir: el número que corresponde a la probabilidad de $B$ cuando asumimos que se dió $A$.

Dado esto, la definición del concepto de fiabilidad que dimos al inicio del libro, la definición 13, podría ponerse de esta manera equivalente:

Definición: Fiabilidad

Un argumento es fiable siempre y cuando:

$$\Pr(c \mid \text{premisa}_1, \text{premisa}_2, \ldots, \text{premisa}_n) \quad > \quad P(c),$$

donde $c$ es la conclusión del argumento, y $\text{premisa}_1, \ldots, \text{premisa}_n$ son todas las premisas del argumento.

Los tipos de argumentos que definiremos abajo son probabilísticos, por lo que el objetivo de estudiarlos es conocer las inferencias que son fiables.

### 16.1.2. La interpretación de la probabilidad *

Las reglas de Kolmogorov definen matemáticamente a la probabilidad y por ello, solamente nos dan eso: una teoría de las matemáticas puras, una teoría que nos habla de una *medida.* A su vez, interpretamos esa medida como la medida de algo: el grado de probabilidad de que ocurra un evento. Aquí todavía cabría preguntarnos qué *es* tal grado de probabilidad. ¿No es un estado misterioso, como un fantasma entre el ser y el no ser? ¿Si algo es meramente probable, existe o no existe? En las matemáticas puras, la teoría de la probabilidad solamente es el estudio de estructuras abstractas (ciertas funciones sobre ciertos conjuntos), y en las ciencias en las que se aplica esta teoría, frecuentemente estas preguntas se ven como demasiado «filosóficas» y se ponen entre paréntesis. Pero será útil revisar algunas respuestas que se han dado a la pregunta de qué es la probabilidad, aunque sea de una manera algo rápida.

#### La interpretación clásica (equiposibilidad)

La interpretación que podríamos llamar «clásica» viene desde los orígenes de la teoría moderna de la probabilidad, en algunos filósofos y matemáticos del siglo XVII, como Fermat y Pascal, y extendida por Laplace en el siglo XIX. Según esta interpretación, la probabilidad de un evento $X$ es simplemente el número resultante de la siguiente ecuación:

$$\Pr(X) = \frac{\text{número de posibilidades en las que sucede } X}{\text{número total de posibilidades}} \tag{16.1}$$

Podemos imaginarnos un espacio de todos los posibles eventos que podrían suceder en una circunstancia particular. Hay que imaginar que todos estos eventos están en un conjunto, el universo, que tiene un volumen, que cubre un área. Por supuesto, el primer axioma nos dice que esta área ha de medir 1. Si ahora consideramos al evento $X$, ese va a cubrir una parte, pero no todo, de ese volumen. Entonces, la probabilidad del evento $X$ sería el área que cubre dentro del área total del espacio de eventos posibles.

Una de los problemas de esta interpretación «clásica» de la probabilidad es que no maneja bien un número infinito de eventos, los cuales a veces se necesitan tomar en cuenta. Por ejemplo

El problema con los eventos infinitos es que la ecuación 16.1 no nos dice cuál es la probabilidad para un evento particular, pues la división no está definida de forma que nos permita dividir un número (real) cualquiera sobre otro número infinito. Para estos casos más avanzados, se necesitan herramientas del cálculo.

### Subjetivismo

El subjetivismo también es una idea bastante vieja, que últimamente ha sido muy desarrollada. La idea básica es que la probabilidad mide nuestra *ignorancia*.

Considera un volado: tomas una moneda, la lanzas al aire, y preguntas si caerá águila o sol. Todo mundo te dirá (mientras la moneda está en el aire) que la probabilidad de águila es $50\,\%$ y la probabilidad de sol también es $50\,\%$. Es decir, los eventos completamente aleatorios —cuando hablamos de «pura suerte»— tienen un grado de probabilidad de $0.5$ tanto para suceder como para no suceder.

Pero considera con más cuidado esa moneda. Si pudiéramos medir las condiciones exactas en que lanzaste la moneda, como la posición inicial, la fuerza que le imprimiste para lanzarla, el peso de esta, la dirección y fuerza del viento, etcétera, podríamos usar las leyes de la física para calcular con tanta precisión como nos lo permitieran nuestras computadoras en qué posición —y en qué momento— va a caer la moneda.[3] Pero como ignoramos todos esos datos —como no tenemos la información precisa de las condiciones en que lanzamos la moneda—, nos parece aleatorio que caiga águila o que caiga sol.

### Frecuencialismo

### Propensiones

## 16.2. Inducción y estadística

En algunos libros de texto ya obsoletos, se dice que la característica que distingue a los argumentos inductivos de los deductivos es esta: mientras que los inductivos «van de lo particular a lo general», los deductivos «van de lo general a lo particular». Esta caracterización es completamente errónea: muchos argumentos deductivamente válidos «van de lo particular a lo general». Como vemos en otro capítulo (capítulo 11), podemos partir de que *Carlos está escribiendo* para inferir que *alguien está escribiendo*, esta es una inferencia completamente válida (es decir, deductivamente correcta). Pero pasa de un hecho particular —sobre *Carlos*— a una generalización —sobre *alguien*. Así que este criterio debe desecharse.

Un mejor criterio para distinguir a las inferencias inductivas de las deductivas se basa en que los argumentos inductivos son inferencias probabilísticas. Estas inferencias pueden brindar un apoyo racional a una conclusión, incluso si la forma de argumento es deductivamente inválida: el apoyo racional consiste en hacer más probable a la conclusión, bajo la suposición de que las premisas sean verdaderas. Ahora bien, los argumentos inductivos sí *parten de lo particular* —es decir, parten de proposiciones que describen a un conjunto de individuos— para *llegar a lo general* —es decir, para inferir una proposición acerca de un conjunto que contiene al conjunto inicial, entre otros individuos. Puesto brevemente: ***inducir es inferir las características que probablemente tengan un conjunto de cosas, a partir de las características de un subconjunto de ellas.***

En las siguientes secciones vamos a tratar con diferentes tipos y aspectos de las inferencias inductivas.

### 16.2.1. Las dos ramas de la estadística

La interpretación más usual (no subjetivista) de las probabilidades en la ciencia es como una medida de las *frecuencias*: de la cantidad de un tipo de sucesos en una clase de referencia que especificamos. Así, la probabilidad se interpreta como una medida *estadística*: una descripción de la frecuencia en que cierta propiedad se encuentra en una *población*: en el conjunto que contiene al total de los individuos de un tipo.

Por supuesto, la estadística no es solamente el resumen de los datos *que ya poseemos*, esta es solamente la primera rama principal: la *estadística descriptiva*. La otra rama es la *estadística inferencial*, que estudia las inferencias que parten de propiedades de una *muestra*, un subconjunto propio del universo total, a propiedades de la población, el universo total. En este segundo caso, hacemos *inferencias ampliativas*: nos importa estimar las características del conjunto total —o como se dice técnicamente: *los parámetros poblacionales*— a partir de las características del subconjunto que podemos conocer —*los parámetros muestrales*—, además de estimar *la tasa de error* de esa primera estimación.

Vamos a desarrollar un poco estos dos tipos de estadística.

## 16.2.2. Estadística descriptiva

Esta es la rama de la estadística que, como su nombre lo dice, estudia la forma de *describir* un conjunto de datos —particularmente, le interesa *resumir* estos datos.

Los *datos* van a ser un conjunto de números que representen ciertas características de algún conjunto de individuos. Por ejemplo, la lista: 1.70, 1.65, 1.90, 1.50, 1.78, 1.66, 2.00 podría ser la lista de alturas (en metros) de algunos de mis amigos.

A veces nos interesa conocer las características «en promedio» de un conjunto de individuos, es decir, las características «típicas». Esto nos permitirá entender mejor cómo son esos individuos, o tomar desiciones al respecto. Esta es la base de la estadística descriptiva.

Para resumir los datos, vamos a utilizar dos tipos principales de medidas estadísticas: las que nos digan cómo son, «en promedio» o *típicamente*, los individuos del grupo seleccionado, y las que nos digan qué tanto se alejan los individuos de ese dato típico. A las primeras les vamos a llamar *medidas de tendencia*; a las segundas, *medidas de dispersión*.

### Medidas de tendencia central

El tipo más conocido de medidas de tendencia son las *medidas de tendencia central*. Entre estas, la medida más básica es el *promedio aritmético*, que también se conoce como la *media*. Esta nos dice, literalmente, cuál es el promedio de un *conjunto de datos*, es decir, un conjunto de números que representan datos sobre las propiedades de un grupo de individuos.

**Definición 171: Media o promedio aritmético**

Si tenemos un conjunto de datos: $d_1, d_2, \ldots, d_n$, entonces su *promedio aritmético* o *media* está dado por:

$$\frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n}$$

Es decir, simplemente sumamos los datos y dividimos sobre cuántos datos tenemos.

La media aritmética no es la única medida de tendencia central. También vamos a definir otras dos básicas. Empezamos con la mediana.

**Definición 172: Mediana**

Si tenemos un conjunto de datos: $d_1, d_2, \ldots, d_n$, entonces su mediana es el dato que encontramos al arreglar los datos de mayor a menor, y después tomar el dato en medio de los dos extremos. Si es un conjunto con un número par de datos, entonces la mediana es el promedio de los datos en medio de los extremos.

Otra medida bien conocida de tendencias centrales es la moda.

**Definición 173: Moda**

Teniendo un conjunto de datos, su *moda* es el dato que más se repite. Si hay más de un dato que se repita el mayor número de veces, se dice que tenemos una *distribución multimodal* de los datos, y las modas son los datos que se repiten el mismo número máximo de veces. Si todos los datos se repiten igual número de veces, el conjunto de datos no tiene moda.

Estas tres medidas —media, mediana y moda— son útiles para representar el elemento «típico» o «promedio» de un conjunto de datos en circunstancias que tienen al menos dos características: (1) los datos son igual de importantes entre sí, y (2) los datos no están «dispersos». Empecemos entendiendo la primera característica.

Supongamos que estoy calificando las tareas de quienes asistieron a uno de mis cursos para tener su promedio final. Podría usar la media, por supuesto, pero supongamos que algunas tareas fueron más difíciles que otras y por ello, las considero más importantes. Quisiera darles más peso a esas tareas, para premiar el esfuerzo de quien las entregó y las hizo bien (o, de manera equivalente, para castigar a quien no las haya entregado). En este tipo de casos —en los que quiero sacar un promedio, pero no quiero que todos los datos «tengan el mismo peso», no voy a usar la media, sino la *media ponderada*. Esta se parece a la media, pero también considera el peso de cada uno de los datos.

**Definición 174: Media ponderada**

Si tenemos un conjunto de datos (es decir, de números): $d_1, d_2, \ldots, d_n$, entonces su media ponderada está dada por:

$$\frac{d_1(p_1) + d_2(p_2) + \ldots + d_n(p_n)}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

Es decir, sumo el producto de cada dato por su peso, y luego divido eso entre la suma de todos los pesos.

Con la media ponderada, los datos que tienen más peso —en el sentido literal de que su peso $p_i$ es más grande— van a contribuir más en el promedio final. Si todos los pesos son iguales, la media ponderada será idéntica a la media aritmética. Además, como no se puede dividir por cero, los pesos deben sumar a más de cero, y ninguno de ellos puede ser negativo.

Otra medida de tendencia central que vamos a revisar es el concepto muy importante de *valor esperado* (también conocido como *esperanza*, *valor de expectación* o, cuando no hay ambigüedad con el promedio aritmético, simplemente *media*). Pero eso será hasta que hayamos revisado el concepto de variable aleatoria.

**Ejercicio # 68**

1. Considera la siguiente lista de datos: $70, 89, 65, 124, 53, 68, 234$. Brinda su media, mediana y moda.
2. Define un problema en el que sea útil usar el promedio ponderado (con al menos cinco datos, cada uno con distintos pesos), y obtén esa medida.

Arriba notamos que la media, mediana y moda son útiles para representar el elemento «típico» o «promedio» de un conjunto de datos cuando estos (1) son igual de importantes entre sí, y (2) no están muy «dispersos». Cuando lo primero no sucede, podemos usar la media ponderada. Ahora veamos qué pasa cuando lo segundo no sucede.

Consideremos otra vez a la media aritmética. Esta sirve como una buena representación de un conjunto de datos cuando estos no están demasiado *dispersos*. Recuerda la lista de alturas de mis amigos: 1.70, 1.65, 1.90, 1.50, 1.78, 1.66, 2.00. De esta, el promedio aritmético es 1.74 (redondeando), y se podría decir que es una buena representación de la altura de mis amigos: no es ni muy baja ni muy alta, se acerca al valor «típico» de esos datos.

Pero en otros casos el promedio aritmético no es una buena representación, porque los datos están muy dispersos: no reflejan una tendencia. Por ejemplo, supongamos que tengo un salón con cinco personas como alumnos, que tienen la siguiente calificaciones: 3, 10, 2.5, 9.7, 8.9. Si alguien me pregunta cuál fue la calificación promedio de este salón, le diré que 6.82. Pero aunque ese es el promedio ¡no es una buena representación de esas calificaciones! Nadie sacó algo *cercano* al 6.82: sólo vimos calificaciones, o bastante más altas, o bastante más bajas. Para otro ejemplo, considera una sociedad con una economía muy desigual: unas pocas personas concentran buena parte del dinero, y muchísimas personas tienen casi nada de dinero (por ejemplo, considera una sociedad hipotética parecida a algunas reales: 1 % de las personas concentran el 50 % de la riqueza, y el restante 99 % de la población tiene la otra mitad de dinero en esa sociedad). En casos como este, al sacar el promedio tendríamos que «la riqueza promedio» en esa sociedad podría ser una medida muy alta, que no represente la riqueza de la persona verdaderamente típica: parecerá que gana más gracias al efecto de considerar en el promedio a la gente extremadamente rica.

Por lo anterior, un hecho importante de la estadística es este: *además de conocer los promedios, muchas veces es importante conocer qué tan dispersos, qué tan alejados, están los datos que promediamos.*

Para esto último usamos las *medidas de dispersión*, que ahora vamos a revisar.

### Medidas de dispersión

Una primera medida de dispersión es el *rango*, que sirve para conocer qué tan amplio es el recorrido de los datos que tenemos.

**Definición 175: Rango de un conjunto de datos**

Si tenemos un conjunto de datos (es decir, de números): $d_1, d_2, \ldots, d_n$, su rango está dado por:

$$\textit{rango} = d_{\text{máximo}} - d_{\text{mínimo}}$$

Es decir, resto el dato más bajo del dato más alto.

El rango es muy fácil de calcular, pero solamente nos dice la «amplitud» en la que están dispersos nuestros datos. Tenemos otras medidas de dispersión, pero para variables aleatorias, que revisaremos abajo.

Abajo vamos a ver otra medida de dispersión, probablemente la más importante: la *desviación estándar*.

### Medidas de tendencia no central

Ya revisamos medidas de tendencia central y medidas de dispersión, que nos dicen qué tanto se alejan los datos del «promedio» o el dato «típico». Pero para resumir un conjunto de datos tenemos herramientas que no se enfocan en el promedio y la concentración de este, sino que *segmentan* los datos en grupos parecidos, para decirnos cuántos datos están en cada grupo. Así, estas medidas nos informan mejor de *cómo se distribuyen* estos datos.

La idea básica es dividir el conjunto de datos en segmentos iguales, mediante un orden creciente. A estos segmentos, en general, los vamos a dividir mediante puntos que se conocen como *cuantiles*, pero toman nombres específicos dependiendo de cuántas divisiones hagamos. Por ejemplo, si dividimos el conjunto de datos en cuatro partes, tendremos tres puntos: el primero, el segundo y el tercer *cuartil*. En general, el 25 % de los datos está abajo del primer cuartil, el 50 % está debajo del segundo cuartil (que también es la mediana), y el 75 % de los datos está debajo del tercer cuartil.

Habiendo ordenado nuestros datos de menor a mayor, obtenemos los cuartiles así:

1. Primero obtenemos la mediana del conjunto de datos. Este número va a ser el segundo cuartil.
2. El primer cuartil es la mediana en el segmento que va del dato más pequeño a la mediana del conjunto total.
3. El tercer cuartil es la mediana en el segmento que va de la mediana del conjunto total, al dato más grande.

Por ejemplo, consideremos este conjunto de veinte datos (que representa alguna propiedad de interés):

$$62, 67, 71, 74, 76, 77, 78, 79, 79, 80, 80, 81, 82, 82, 83, 84, 86, 89, 93, 95$$

Notemos que ya los tengo ordenados de menor a mayor. Su mediana es 80, por lo que este es también el segundo cuartil. Nota, además, que la mitad de los datos van a estar abajo de este dato. Ahora obtengo la mediana del conjunto que está abajo de segundo cuartil: $62, 67, 71, 74, 76, 77, 78, 79, 79, 80$, que es 76.5. Esto nos da el primer cuartil. Finalmente, obtengo la mediana del segmento que está arriba del segundo cuartil: $81, 82, 82, 83, 84, 86, 89, 93, 95$. Su mediana es 84, lo que nos da el tercer cuartil. Así, en resumen: el conjunto de datos de arriba tiene estos tres cuartiles:

$$76.5, 80, 84$$

Estos tres cuartiles nos dan una mejor idea de cómo están distribuidos los datos que un mero promedio aritmético (que es 79.9, por cierto). Nos dice cuál es el «centro» —la mediana— pero también cómo están los datos «a los lados» del centro.

Los cuartiles no son la única medida de tendencia no central. También encontramos los *deciles* y los *centiles.* En ambos, la idea básica es la misma: dividimos la serie de datos (ordenados de menor a mayor) en un número igual de segmentos, y de ahí tomamos los puntos a la mitad de la división. Para los deciles, dividimos la lista de datos en diez partes iguales, lo cual nos dará nueve puntos: los nueve deciles. El quinto decil es la mediana del conjunto total. De igual forma, los centiles son 99 puntos, cada uno de los cuales se usa para dividir el intervalo de datos en 100 partes iguales. El centil número 50 es la mediana del conjunto total de datos, y estos son de tal forma que el 1 % de los datos va a estar abajo del primer centil, el 2 % va a estar abajo del segundo centil, y así, el 99 % de todos los datos va a estar debajo del último centil. (Obviamente, para poder usar los centiles, mi conjunto de datos tiene que tener más de cien elementos.)

**Ejercicio # 69**

1. Busca la lista de países por su producto interno bruto (PIB) nominal al año 2017 (en millones de dólares). Toma los 50 países más ricos según ese parámetro y con ellos, forma el conjunto de datos de su PIB. Arregla de menor a mayor esos datos, y brinda los tres percentiles y los nueve deciles de esa lista.

### 16.2.3. Muestras: representativas y sesgadas

Considera los siguientes dos casos.

**ejemplo 54**

*Primer caso*. Juan, un joven de una lejana nación que está decidiendo a qué dedicarse, quiere saber qué tan probable es que estudiar filosofía le permita tener un buen salario al terminar la carrera. Para ello, le pregunta a algunos graduados de ciertas universidades qué tan bien les ha ido después de graduarse. Como su círculo social es limitado, Juan solamente conoce a personas que han estudiado en las tres universidades más caras de su país, y también le pregunta a algunos de los amigos de estas personas. Obtiene 20 respuestas. Entre ellas, obtiene respuestas como las siguientes:

- Al (*graduada de la Universidad Rico McPato*): «¡Me ha ido muy bien! Desde que terminé mi carrera, junto con mis compañeros invertí en un negocio y he estado ganando muy bien con ello.»
- Ben (*graduado de la Universidad Billetín Don Dinero*): «¡Excelente! Al terminar la carrera mi papá me recomendó para un puesto de dirección en el gobierno, el cual obtuve tras presentar varios procesos de selección; he utilizado mis habilidades filosóficas y me pagan bien.»
- Cam (*graduada de la Universidad Nacional de los Millones*): «Administro el negocio de la familia; sigo con mi estudio de filosofía en mis tiempos libres, pero afortunadamente al negocio le ha ido muy bien, así que no puedo quejarme.»

Por supuesto, aún cuando tiene una buena cantidad de respuestas a la mano —veinte—, si Juan infiere de ellas que *probablemente, estudiar filosofía me lleve a ganar buen dinero*, su inferencia no sería muy buena: esa conclusión no está justificada por la evidencia de la que dispone. ¿Qué le falta?

*Segundo caso*. Lucía está en la misma situación que Juan, y piensa preguntarle también a las personas que conoce. Sin embargo, Lucía conoce solamente algunas pocas personas graduadas de universidades públicas muy pequeñas, así que se pregunta si preguntar sobre ello le dará un buen panorama de sus opciones. En lugar de ello, decide ir a todas las universidades que ofrecen la carrera de filosofía en la ciudad, tanto las públicas como las privadas, y preguntar ahí.

Parece que, si Lucía decide hacer una inferencia a partir de los datos que haya recolectado, esto estaría mejor justificado que la inferencia de Juan. ¿Por qué? Porque Lucía extrajo datos que *representan* mejor a la población total: entre todas las personas que se gradúan tras haber estudiado filosofía, podemos encontrar diferentes perfiles económicos. Como es razonable pensar que estos perfiles tienen alguna relación con el salario tras haber estudiado, es mejor tratar de tener información sobre todos ellos, para que nuestra conclusión no esté *sesgada*: no esté «cargada hacia un lado» de todo el espectro de posibilidades. Al contrario: queremos que nuestra conclusión sea lo más *representativa* posible: que hable de la mayor parte de la *población*, del conjunto total, no solamente de un pequeño sector dentro de esta población.

Esta es la importancia de tener *muestras representativas*, un concepto que vamos a definir después de la siguiente definición.

**Definición 176: Muestra y población**

Una **muestra** es un subconjunto de objetos que se seleccionan (mediante algún proceso) del total de individuos de un cierto tipo. Este conjunto total es la **población**.

De aquí en adelante, vamos a entender a una muestra como un conjunto de datos: es decir, un conjunto de números que representan cierta propiedad de los individuos que seleccionamos.

Generalmente, se selecciona una muestra porque (i) deseamos investigar ciertas propiedades de la población total, y (ii) no conocemos a toda esta población o no podemos obtener información sobre ella. Como vimos con los ejemplos de arriba, es importante que, al hacer una inducción, la hagamos partiendo de un conjunto de individuos —de una muestra— que sea representativo de todos —de la población.

**Definición 177: Muestra representativa**

Una muestra representativa es una muestra que refleja o replica a la población de la que se extrae, en los aspectos de interés para los que se selecciona la muestra.

Existen distintas formas para evaluar la representatividad de una muestra, y para intentar que la muestra que seleccionemos sea representativa. Brevemente, podemos mencionar dos formas:

- Si tenemos un estimado de cómo es la población total en un aspecto relevante para nuestra estadística, trataremos de seleccionar una muestra que la represente. Por ejemplo, si queremos hacer una estadística de las preferencias de voto para un candidato en una elección presidencial, una buena idea es preguntarle al mismo número de mujeres que a hombres, pues sabemos que, aproximadamente, la mitad de las personas que pueden votar son mujeres y la otra mitad son hombres.
- Si no tenemos un estimado de cómo es la población en algún aspecto, podríamos intentar seleccionar a los individuos de nuestra muestra de la manera más aleatoria posible. Por ejemplo, si acabo de descubrir una especie de aves en una isla, para estudiar sus características debo seleccionar, como parte de mi muestra, individuos de todas las partes de la isla. De esta forma, evitaré *sesgar* mi estudio hacia las aves que solamente viven en una parte de la isla, las que podrían no

representar a todas las demás.

### 16.2.4. Variables aleatorias

Uno de los conceptos fundamentales de la estadística es el de *variable aleatoria*. Esta se define por tres características que ahora voy a explicar.

En primera, una variable aleatoria representa cuantitativamente una característica de nuestro objeto de estudio, por lo que tomará valores numéricos. Por ejemplo, quizá nos interese estudiar a los planetas del sistema solar; en ese caso, podríamos usar variables que representen la masa de cada planeta.

La segunda característica definitoria de una variable aleatoria es que *depende de circunstancias aleatorias*, es decir, puede tomar valores distintos en distintas circunstancias, donde estas circunstancias son generadas por un proceso aleatorio. Por ejemplo, al lanzar una moneda al aire, tenemos un proceso aleatorio, que produce una circunstancia aleatoria: que la moneda caiga «águila» o que caiga «sol». Así, podríamos tener una variable aleatoria, $X$, que tome cierto valor dependiendo de cuál sea el resultado de lanzar la moneda. Como las variables aleatorias deben ser numéricas, basta con asignarle un «1» a la cara con águila, y un «0» a la cara con sol. Entonces, dependiendo del resultado del lanzamiento, la variable describe a la moneda como $X = 1$ o $X = 0$.

La tercera característica es que los valores que toma una variable aleatoria en cada circunstancia posible tienen cierta probabilidad. Regresando al caso de la moneda, la probabilidad de que $X = 1$ —de que la moneda caiga en águila— es 1/2, igual que la probabilidad de que $X = 0$, pues la moneda solamente tiene dos caras. Pero ahora consideremos el caso en el que lanzamos un dado que no está cargado. Definimos una variable aleatoria, $Y$, que tomará un valor de 1 a 6, dependiendo de qué cara del dado caiga. Como suponemos el dado no está cargado, cada cara tiene la misma probabilidad de caer. Además, las probabilidades deben sumar 1. Entonces, como son seis caras (y suponemos que debe caer solamente una), sus probabilidades deben sumar 1 y tienen la misma probabilidad, cada cara tiene una probabilidad de 1/6 de caer. Así, tenemos que la probabilidad de que $Y = 1$ es de 1/6, igual que la probabilidad de que $Y = 2$, $Y = 3$, etc.

Formalmente hablando, una variable aleatoria va a ser una función que tome eventos y nos regrese números.[4] Si la variable puede tomar como valores a los números naturales (o un subconjunto de ellos), decimos que es una variable aleatoria *discreta*. Si, en cambio, toma valores en un intervalo dentro de los números reales, decimos que es una variable aleatoria *continua*. En este texto vamos a ocuparnos de manera prácticamente exclusiva de variables discretas; aunque algunos conceptos fundamentales son muy similares para las variables continuas.

### Valor esperado o Esperanza

Antes vimos que una variable aleatoria va a tomar un valor en cada circunstancia posible con una probabilidad correspondiente. El valor esperado de una variable nos da algo parecido a un promedio de los valores que puede tomar, «controlado» por las probabilidades de que tome esos valores. Es, entonces, una media ponderada, del tipo que definimos antes (definición 174). Por ello, al valor esperado de una variable también se le conoce como su *media*, y cuando es claro de qué variable hablamos, simplemente escribimos «$\mu$» para referirnos a su valor esperado. Pasemos a la definición del concepto.[5]

**Definición 178: Valor esperado**

Sea $X$ una variable aleatoria cuyos posibles valores son $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde cada uno de estos puede ocurrir con una probabilidad, respectivamente, de $p_1, p_2, \ldots, p_n$. El valor esperado de $X$, que denotamos con «$\mathrm{E}[X]$», se define así:

$$\mathrm{E}[X] = x_1(p_1) + x_2(p_2) + \ldots + x_n(p_n) = \mu \tag{16.2}$$

Es decir, es la suma de cada posible valor, multiplicado por la probabilidad de que la variable tome ese valor.

Así, entre más probable sea uno de sus valores, más peso tendrá al calcular ese promedio. Por las mismas razones, el valor esperado de una variable aleatoria incluso podría no ser uno de los valores que pueda tomar.

Un ejemplo de lo anterior es un dado justo (que no está cargado). Si lanzamos el dado, saldrá uno de los valores entre 1 y 6; cada uno de estos valores tiene la misma probabilidad de aparecer. Como son seis posibles valores, tenemos una probabilidad de 1/6 para cada uno de ellos. Si calculamos el valor esperado de la variable aleatoria, $X$, que representa el número que sale tras lanzar el dado, obtenemos:

$$\begin{aligned}\mu &= 1(\frac{1}{6}) + 2(\frac{1}{6}) + 3(\frac{1}{6}) + 4(\frac{1}{6}) + 5(\frac{1}{6}) + 6(\frac{1}{6})\\ &= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}\\ &= \frac{21}{6}\\ &= 3.5,\end{aligned}$$

que no es uno de los valores que podrían resultar tras lanzar el dado. De nuevo, el valor esperado de la variable no siempre es uno de los valores que podría tomar, pero representa un promedio de los valores a los que tiende a largo plazo, considerando también a las probabilidades que tiene cada valor.

### Desviación estándar

El valor esperado es una *medida de tendencia central*, pues nos dice a qué valores tiende en promedio la variable. También tenemos medidas de dispersión para las variables aleatorias, que nos dicen qué tan dispersos están los valores de esa variable *con relación al valor esperado*, al valor «promedio». La más importante de ellas es la *desviación estándar.*

Con poca desviación estándar, la mayoría de los posibles valores de la variable están cerca del valor esperado. Con mucha desviación estándar, hay muchos valores que podría tomar la variable lejanos a su valor esperado.

Vamos a definir la desviación estándar de una variable aleatoria $X$, que se suele escribir así: «$\sigma_X$», o sin el subíndice en caso de que se entienda de qué variable estamos hablando.

**Definición 179: Desviación estándar**

Sea $X$ una variable aleatoria y $\mathrm{E}[X]$ su valor esperado. Entonces, la desviación estándar de $X$ se define así:

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2]}, \tag{16.3}$$

lo cual, por las propiedades del valor esperado, también implica:

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2} \tag{16.4}$$

Si nos enfocamos en variables discretas $X$ que solamente puedan tomar un número finito de valores $x_i$, cada uno con su respectiva probabilidad $p_i$, la ecuación 16.4 implica la siguiente fórmula para el valor esperado de $X$.

$$\sigma_X = \sqrt{p_1(x_1 - \mathrm{E}[X])^2 + p_2(x_2 - \mathrm{E}[X])^2 + \ldots + p_n(x_n - \mathrm{E}[X])^2} \tag{16.5}$$

Como el valor esperado es la media de la variable y también se denota por $\mu$, la ecuación 16.5 puede rescribirse así:

$$\sigma_X = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + \ldots + p_n(x_n - \mu)^2} \tag{16.6}$$

Esta es la definición que más se usa para el valor esperado, y la que podemos a usar para calcularlo.

Vemos que la desviación estándar de $X$ resulta ser la raíz cuadrada de la suma de: la distancia cuadrada entre cada posible valor y la media, multiplicada por su probabilidad. Es decir, es un tipo de promedio que nos dice qué tan lejos está cada valor de la media, controlando con la probabilidad de ese valor. Si la variable puede tomar valores muy distintos, con probabilidades bastante parecidas, su desviación estándar va a ser muy alta. En cambio, si solamente puede tomar valores muy parecidos entre sí, con probabilidades parecidas, su desviación estándar va a ser baja. Ahora bien, si toma valores parecidos entre sí con probabilidades muy distintas, pero donde hay un sesgo en las probabilidades hacia cierto espectro de su valor, su desviación estándar va a ser también baja, pues los valores tienden más a acercarse a una magnitud, con poca probabilidad de alejarse de ella.

Una ventaja de la desviación estándar es que viene en las mismas dimensiones que la variable aleatoria. Por ejemplo, supongamos algún juego imaginario de un casino, donde algún proceso aleatorio produce cuatro posibilidades. Las cuatro tienen la misma oportunidad de suceder, por lo que la probabilidad de cada una sería de $1/4 = 0.25$. En cada una de las cuatro posibilidades, ganamos o perdemos fichas del juego. Vamos a usar a la variable $X$ para representar esto. Tenemos que, por las reglas del juego, estas son las pérdidas o ganancias:

- *Posibilidad 1*: ganamos 2 fichas. ($X = +2, \Pr = 0.25$)
- *Posibilidad 2*: perdemos 2 fichas. ($X = -2, \Pr = 0.25$)
- *Posibilidad 3*: ganamos 4 fichas. ($X = +4, \Pr = 0.25$)
- *Posibilidad 4*: no perdemos ni ganamos ninguna ficha. ($X = +0, \Pr = 0.25$)

En este juego, las probabilidades nos favorecen, pues si hacemos el cálculo, vemos que la media de $X$ es 1 ficha: $\mathrm{E}[X] = 1 = \mu$. Es decir, si jugamos muchas veces este juego, la tendencia a largo plazo es siempre ganar una ficha. (Sería un pésimo juego para un casino si no cobran más de una ficha para jugarlo, ¡pues estarían seguros de que no ganarán a largo plazo!) La desviación estándar es de $\approx 2.2$ fichas, de forma que, en promedio, uno va a estar ganando o perdiendo dentro de un margen de dos fichas respecto a la media.

## 16.2.5. Algunas distribuciones de probabilidad

### Uniforme

### Normal o campana de Gauss

## 16.2.6. Significancia estadística

[Explicación de su importancia y presentar conceptos que requiere]

### Hipótesis nula

La *hipótesis nula* es la hipótesis de que «no hay efecto».

Supongamos que estás haciendo pruebas de una medicina para la gripe. Tu hipótesis nula sería que la medicina no cura la gripe: que tomarla no causa que ya no tengas gripe. O imagina que quieres proponer que tener padres dentistas causa que tú quieras ser dentista. La hipótesis nula sería que no hay relación causal entre tener padres dentistas y querer ser dentista: que uno puede tener padres dentistas sin que ello aumente la probabilidad de querer ser uno.

En general, cuando uno propone que hay cierto efecto, es decir, cierta relación causal entre algo y otra cosa, ese «algo» y esa «otra cosa» van a ser *variables aleatorias* que representen los fenómenos entre los que propones que hay una conexión.

Así, para el ejemplo de la medicina, una variable puede ser las dosis que tomas de la medicina, y la otra un número que represente tus síntomas en una escala. (Siempre tienen que ser variables numéricas positivas). En el caso de los dentistas, una variable podría ser: = 1 si tienes ambos padres dentistas, = 1/2 si solamente uno. Por supuesto, estoy inventado; esto va a depender del diseño del experimento. Lo del deseo de convertirte en dentista lo podrías representar mediante la *frecuencia* (la proporción observada del total) en que la gente de la muestra se convierte en dentista, digamos.

Esto nos lleva a la siguiente definición.

**Definición 180: Hipótesis Nula**

Una **hipótesis nula** es la hipótesis que te dice que no existe la relación entre las variables aleatorias que tú quieres proponer en tu trabajo. Es la que quieres refutar mediante tu experimento, para mostrar que sí hay relación. Se le denota así: $H_0$.

Ahora bien, para refutar a la hipótesis nula mediante tu experimento, primero te preguntas lo siguiente:

Si la hipótesis nula fuera verdad, ¿qué tan probable sería observar los valores que observo experimentalmente?

Para entender por qué te preguntas esto, consideremos un ejemplo.

Supongamos que estás debatiendo con alguien más. Tú y esa persona tienen posturas contrarias. Pueden decir: «Bueno, para saber quién tiene la razón: si yo la tuviera, ¿qué tan factible sería ver lo que observamos? Y si tú tuvieras razón, ¿qué tan factible sería ver lo que observamos?» La idea es suponer esto: *la hipótesis que te diga que es más factible ver lo que observamos, es la más «preferible»* (en un sentido que veremos).

Bien, pues aquí no estás discutiendo con otra persona, *sino con la hipótesis nula.*

Aquí ya tenemos la idea esencial de la *significancia* o *significación estadística*: Que tú, como investigador(a), propones que hay cierta relación o efecto. Esta es una relación entre variables aleatorias. Tu contrincante defiende la hipótesis nula: «no, no hay tal efecto». Quieres demostrar en tu trabajo que tu contrincante está mal: que hay que rechazar la hipótesis nula. Entonces infieres esto: la mejor hipótesis es la que mejor explique los datos observados. Y entiendes esto último en un sentido cuantitativo: *la hipótesis que mejor explique los datos es la que nos diga que son más probables.*

### Valor p

Entonces, tienes dos preguntas:

¿Qué tan probables serían los datos, si la hipótesis nula fuera verdad?

Y:

¿Qué tan probables serían los datos, si mi hipótesis («sí hay efecto») fuera verdad?

Si resulta que bajo tu hipótesis los datos son más probables que bajo la hipótesis nula, se dice que *los datos son estadísticamente significativos.*

De hecho, de forma más general, puedes quitar del escenario a tu hipótesis y considerar sólo a la nula. Te preguntas:

¿Qué tan probables son los datos, si la hipótesis nula fuera verdadera?

Y estableces cierto rango en el que sea aceptable rechazar la nula. Ese rango va a ser una manera cuantitativa de decir: «Si los datos son *muy* improbables bajo la hipótesis nula, hay que rechazarla». Incluso sin tener una hipótesis alternativa específica. Es como decir:

> «Yo no tengo una postura definida, pero sí te puedo decir que quien dice que no hay efecto muy probablemente se equivoca, porque bajo su hipótesis, lo observado sería *muy* improbable».

Los *valores p* son la forma cuantitativa de expresar eso de «*muy* improbable». Es decir, te dan márgenes numéricos dentro de los cuales uno habla cualitativamente de «*muy* improbable».

Este es el concepto general. Ahora bien, el valor p representa qué contamos como «muy improbable». Entonces sería la probabilidad de haber observado un valor tan alto —o incluso mayor— como el que se observa, *si es que* la hipótesis nula resulta verdadera. Ahora veámoslo cuantitativamente.

**Definición 181: Valores p**

Si $V$ es la variable de la que se observa el valor $x$ (es decir, observamos $V = x$), que se considera un valor «alto», y $H_0$ es la hipótesis nula, el valor p sería dado por:

$$\Pr(V \geq x \mid H_0) \tag{16.7}$$

Es decir, la probabilidad de que $V$ sea mayor o igual al valor observado, suponiendo que la hipótesis nula sea verdad.

Si, al contrario, el valor observado se considera «bajo», el valor p sería:

$$\Pr(V \leq x \mid H_0) \tag{16.8}$$

Bien. Ya que calculas el valor p, ves qué tan grande es. Si el valor p es muy pequeño, significa que la hipótesis nula te está diciendo: «Es *muuuy* improbable que suceda que $V = x$». Se dice, entonces, que tus datos observados tienen *significancia estadística.*

Ahora, ¿qué significa que el valor p sea «muy pequeño»? Bueno, pues eso se define convencionalmente en cada área de estudio; algunas revistas especializadas incluso pueden decirte específicamente qué valor requieren para considerar publicar un artículo con esos datos. A este valor se le conoce como *nivel de significancia*, y se suele escribir como «$\alpha$». Por ejemplo, en psicología creo que (al menos antes de todo el escándalo de replicación) el nivel convencional era = 0.05; en la física a veces te piden = 0.001, por poner otro ejemplo.

Entonces, si tu p entonces es $\leq \alpha$, significa que tus datos son *estadísticamente significativos.* A su vez, esto significa que cumplen un *requisito científico mínimo* para que se tome en serio a tu hipótesis (que es contraria a la nula).

### 16.2.7. Inducción simple o enumerativa

### 16.2.8. Utilidad esperada

### 16.2.9. Inferencia Bayesiana

[En esta sección voy a exponer el teorema de Bayes, las nociones de probabilidad condicional y de función de verosimilitud, y la utilidad de la teoría bayesiana para actualizar probabilidades.]

## 16.3. Correlación y causalidad

Uno de los tipos de argumento probabilístico más importante es el que se conoce como *inferencia causal.* Este es el tipo de argumento que, partiendo de ciertas premisas, concluye que existe una *relación causal* entre dos eventos. Vamos a definir algunos conceptos básicos, para después enfocarnos en las relaciones de correlación y de causalidad.

### 16.3.1. Conceptos básicos

Empezamos definiendo algunos conceptos que serán útiles para comprender la relación entre causalidad y correlación.

**Evento** Un evento o suceso consiste en que un objeto particular tenga una propiedad en un momento y lugar determinado. (Por ejemplo, cuando José está feliz en la mañana del día de su cumpleaños, eso es un evento.) Cualquier suceso que ocurra, lo sepamos o no, nos parezca importante o no, o sea la que sea la reacción que nos provoque, es un evento en este sentido.

**Causalidad** Es la relación entre una serie o pluralidad de eventos en la que una parte —la causa o las causas— *provoca* o *genera* o *produce* o *hace que suceda* la otra parte —el efecto o los efectos. (Por ejemplo, la ciencia y la medicina clínica han comprobado que *fumar causa cáncer.* Para una persona específica, esto significa que toda la serie de eventos en los que ha fumado, provocaron, generaro o produjeron el evento del cáncer iniciándose en su sistema respiratorio.)

**Hipótesis causal** : Una proposición que afirma que un evento (o serie de ellos) es causado por otro evento (o serie de ellos). Como proposiciones que son, las hipótesis causales pueden ser objeto de creencias por parte de sujetos, o de afirmaciones de ellos; también pueden tener relaciones con la evidencia, o carecer de ellas.

**Correlación** : La relación probabilística entre dos tipos de sucesos que nos indica si suelen suceder conjuntamente. La definición más usual de la correlación es el *coeficiente de correlación de Pearson.*[6]

Con los conceptos básicos sobre la mesa, vamos a definir el coeficiente de correlación de Pearson.

### 16.3.2. El coeficiente de Pearson

El coeficiente de Pearson es la forma más aceptada de medir la correlación lineal entre dos variables aleatorias. Se define mediante en términos de dos magnitudes: la covarianza y la desviación estándar. Arriba (5) ya revisamos el concepto de desviación estándar, ahora hablemos sobre la covarianza.

La covarianza también es una forma de medir la relación entre dos variables aleatorias, de forma que una covarianza positiva entre ellas nos dice que a más altos valores de una, más altos valores de la otra también, y a más bajos valores de una, más bajos valores de la otra también. A su vez, una covarianza negativa nos dice que hay una relación inversa entre las variables: a más altos valores de una, más bajos los valores de otra, y viceversa. Si la covarianza es cero, no hay una relación (lineal) entre los valores que podrían tomar las variables aleatorias.

Veamos la definición de la covarianza entre dos variables aleatorias $X$, $Y$, que escribimos como «$\mathrm{Cov}(X,Y)$»:

**Definición 182: Covarianza**

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])\,(Y - \mathrm{E}[Y])\right] \tag{16.9}$$

Resulta que esta ecuación implica la siguiente, que suele ser más práctica:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}\left[XY\right] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] \tag{16.10}$$

La covarianza es una relación *simétrica*, de forma que $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$.

Habiendo visto la covarianza, podemos comprender la importancia de la correlación. Esta nos brinda una forma más cuantitativa de medir la relación conjunta entre dos variables aleatorias. Por supuesto, la covarianza de dos variables *ya* es una cantidad, pero no tiene un intervalo de variación determinado: no siempre toma los mismos valores, sino que los valores de la covarianza dependen de los valores que tomen las variables que comparamos. A diferencia de ello, el coeficiente de correlación sí tiene un intervalo determinado: solamente puede tomar valores entre -1 y 1. Se dice entonces que la correlación está *normalizada*, pero no la covarianza.

Que la correlación esté normalizada nos permite interpretarla más fácilmente. Las variables con correlación 0 no muestran ninguna relación entre sus valores: a valores más altos de una variable, la otra puede tomar iguales, más altos, o más bajos. Las variables con correlación 1 muestran *correlación positiva perfecta*: a más altos valores de una, más altos valores de la otra también, y a más bajos valores de una, más bajos valores de la otra también. Las variables con correlación -1 muestran *correlación negativa perfecta*: a más altos valores de una, más bajos los valores de otra, y viceversa. Así, si el valor de la correlación entre las variables se acerca a 1, van a estar cerca de estar perfectamente correlacionadas (positivamente); si se acerca más bien a cero, van a estar cerca de no estar en absoluto correlacionadas, y si se acerca a -1, van a estar cerca de tener una correlación negativa perfecta. Entonces, el hecho de que la correlación siempre tome valores en el mismo intervalo (de -1 a 1) nos permite comparar distintos pares de variables respecto a qué tanto están correlacionadas entre sí.

Ahora vamos a definir la correlación, que se suele conocer como *el coeficiente de correlación de Pearson*.[7]

**Definición 183: Correlación de Pearson**

Donde $X, Y$ son dos variables aleatorias, escribimos el coeficiente de correlación de Pearson como $\rho(X,Y)$, definido por:

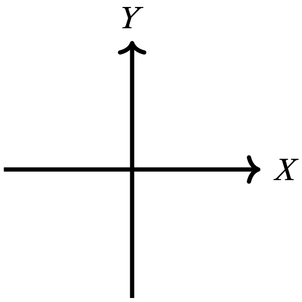
$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{16.11}$$

con $\mathrm{Cov}(X,Y)$ la covarianza entre $X$ e $Y$ y $\sigma_X, \sigma_Y$ las respectivas desviaciones estándar.

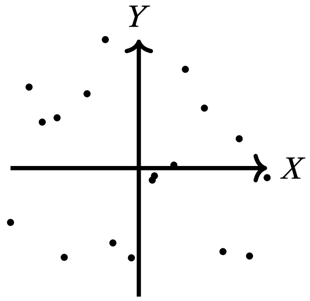
Como la covarianza, la correlación es simétrica: $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$.

Antes vimos que la correlación entre dos variables toma valores de -1 a +1. Si $\rho(X,Y) = -1$, se dice que las dos variables tienen una *anti-correlación perfecta* o una *correlación negativa perfecta*. Si tienen correlación 0, se dice que son *independientes*. Y si tienen correlación 1, están *perfectamente correlacionados*.

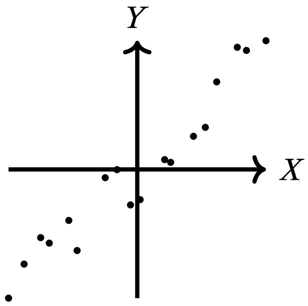
Podemos representar gráficamente las relaciones de correlación positiva, negativa, y de falta de correlación entre dos variables. Primero, ponemos una variable como el eje horizontal, y como eje vertical tenemos a la otra variable. Nos queda un plano de esta forma:



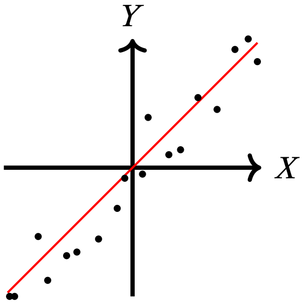
Luego acomodamos los datos que encontramos como puntos en esta gráfica. Por ejemplo, si encontramos que en un dato $X$ toma el valor 3 y $Y$ toma el valor 2, ponemos un puntito exactamente en las coordenadas $(2,3)$. Seguimos así. Entonces, si las dos variables no presentan ninguna correlación, vamos a ver una «nube» de puntos que no se parecen a ninguna línea recta, como la siguiente:



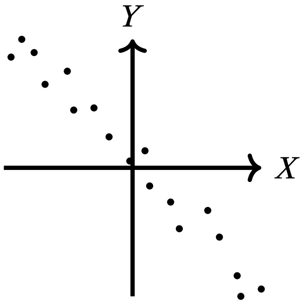
Sin embargo, cuando las dos variables aleatorias presentan correlación positiva, la gráfica se va a parecer a esta:



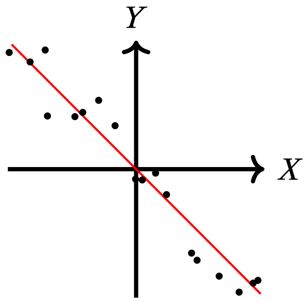
Nota como los valores de las dos variables correlacionadas se acercan a una línea recta, que ponemos en rojo. Si todos los valores estuvieran en la misma recta, la correlación sería perfecta, pues en cada circunstancia ambas variables darían exactamente el mismo valor.



Cuando las variables tienen una correlación negativa, los valores altos de una se van a corresponder con los valores bajos de la otra, y viceversa.



Como con la correlación positiva, podemos notar que la correlación negativa se aproxima a una línea, solamente que en este caso es una línea descendente. De nuevo, si los puntos que representan a los datos que conocemos estuvieran todos sobre la línea roja, tendríamos una correlación negativa perfecta.



Este concepto de correlación se llama *lineal* porque entiende a la correlación perfecta (ya sea negativa o positiva) como una línea, tal como se ve en las gráficas anteriores. Sin embargo, no todas las variables van a tener una correlación lineal: quizá sus valores describen una curva en el plano. En ese caso, no es que no tengan correlación, es que su correlación es *no lineal.* Este concepto es más complicado y necesitaríamos más espacio para revisarlo, pero es bueno tener en mente que la falta de correlación lineal no significa que no haya *algún* tipo de correlación.

### 16.3.3. Correlación no implica causalidad

Ahora podemos ver una de las ideas más importantes para comprender a la inferencia causal: *Correlación no implica causalidad.* Es decir, dos eventos pueden ocurrir conjuntamente, incluso muchas veces, sin que ninguno cause al otro. *Que dos cosas sucedan conjuntamente no significa que una haya provocado a la otra.* Por supuesto, en algunos casos sí sucede que un evento causa al otro, pero no necesariamente en todos.

Entre los eventos correlacionados que no exhiben relaciones causales, podemos hacer la siguiente división:

- Ninguno causa al otro: la correlación es una coincidencia.
- Ninguno causa al otro, pero sí hay otras relaciones causales más complicadas.

Para entender los casos del segundo tipo, en los que la correlación no es una mera coincidencia, será útil considerar algunos diagramas.

Vamos a usar dobles flechas azules para representar correlaciones, y una flecha ondulada naranja para representar causación (de manera que la flecha vaya de la causa al efecto: «$C \rightsquigarrow A$» significará que $C$ causa a $A$). Por ejemplo, en el caso 1 de abajo, $A$ y $B$ están correlacionados, pero uno no causa al otro. Su correlación se debe a que ambos tienen una causa común, que los causa simultáneamente.

①
$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, shift left] \\
C \arrow[ru, squiggly] \arrow[rd, squiggly] & \\
 & B \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}$$

②
$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, shift left] \arrow[d, squiggly] & C_2 \arrow[l, shift left] \arrow[d, squiggly] \\
A \arrow[r, shift left] & B \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

③
$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, shift left] \arrow[ld, shift left] \\
C \arrow[ru, shift left] \arrow[rd, squiggly] & \\
 & B \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}$$

④
$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, shift left] \arrow[ld, squiggly] \\
C \arrow[rd, squiggly] & \\
 & B \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}$$

Inferir que $A$ causa $B$ (o viceversa) de la mera información de que ambos tipos de eventos están correlacionados, es cometer una *falacia*: se dice que se infiere causalidad de correlación. Pero, como hemos visto, la mera correlación no implica a la causalidad. En un tema relacionado con esto, encontramos a una falacia similar, la conocida como «*post hoc, ergo propter hoc*»: «después de esto, por lo tanto, debido a esto». En esta falacia, se infiere causalidad a partir de sucesión temporal. En ambos casos, se infiere una relación causal a partir de la cercanía de los eventos en el tiempo, lo cual es incorrecto.

**Ejercicio # 70**

(I) Da dos ejemplos de cada estructura en la que hay eventos $A$ y $B$ correlacionados que no causan uno al otro. Es decir, escribe casos —reales o posibles— en los que haya eventos que se correlacionan sin causarse, con la estructura de cada uno de los diagramas de arriba.

(II) Da dos ejemplos de correlaciones azarosas (por suerte), es decir, correlaciones que no se explican causalmente.

### 16.3.4. Condiciones necesarias para la causalidad

Hemos visto que la correlación no implica a la causalidad. Entonces, la causalidad debe poseer otras características. ¿Cuáles son estas? De hecho, esta es una cuestión fuertemente debatida en la filosofía contemporánea (Schaffer 2016), así como en otras áreas que tratan con la inferencia causal.

Vamos a empezar con tres criterios cuya historia llega al menos hasta Hume (en sus famosos libros *Tratado de la Naturaleza Humana* e *Investigación sobre el conocimiento humano*). No sugiero estos como suficientes para caracterizar a la causalidad, sino como una propuesta inicial para entender qué *se requiere* para la causalidad. En lo que sigue, cuando hable de «dos eventos», pretendo que lo mismo valga para pluralidades o series de eventos, ya sea fungiendo como causas o como efectos.

**Criterio de precedencia temporal** Un evento $A$ causa a un evento $B$ solamente si $A$ ocurre antes que $B$.

Este criterio manifiesta la suposición de que no existe lo que se conoce como *causalidad retroactiva*: cuando la causa viene *después* del efecto. Todas las relaciones causales que conocemos obedecen el criterio de precedencia temporal: los efectos *siguen* a la causa.[8]

**Criterio de contigüidad espacial** Un evento $A$ causa a un evento $B$ solamente si $A$ ocurre en la cercanía de $B$.

Este criterio manifiesta la suposición de que las relaciones causales son *locales*: que se dan entre eventos cercanos entre sí. Por supuesto, un evento puede afectar a otro que esté lejos de este, pero para ello tiene que haber una *vía causal*, de lo que hablaremos al hablar de mecanismos (sección 16.3.5).

**Criterio de conjunción constante** Un evento $A$ causa a uno $B$ solamente si los eventos del tipo de $A$ y los del tipo de $B$ están en conjunción constante, es decir, si cada vez que observamos uno, observamos al otro.

En la filosofía de Hume, este criterio era la base fundamental para las inferencias causales, que Hume creía que se basaban en la mera costumbre, producida por las observaciones repetidas de los fenómenos en conjunción. En términos más contemporáneos, pondríamos este criterio como la idea de que *la causalidad implica correlación* (pero no viceversa).

Podríamos preguntar si todo caso de causalidad requiera de correlación. En primera, como hemos visto, la definición más exacta y extendida de correlación es el coeficiente de Pearson. Este nos da la covarianza entre dos variables aleatorias, normalizada por sus respectivas desviaciones estándar. Cada una de las circunstancias posibles en las que la variable toma un valor es un evento, así que son estos los que pueden entrar en relaciones causales. Sin embargo, la correlación es una relación entre variables aleatorias, es decir, entre *tipos* de eventos. Entonces, para que la causalidad implique la correlación, tendría que suceder que, siempre que un evento causa a otro, los demás posibles valores de las variables correspondientes tiendan a variar conjuntamente (suponiendo que las condiciones de fondo se mantengan iguales). ¿Sucede esto en todos los casos? Es una pregunta interesante para reflexionar unos momentos, pero intentaremos dar una respuesta definitiva aquí.

Regresando a las condiciones necesarias de la causalidad, podemos pasar a un criterio más contemporáneo, que ha sido discutido desde el siglo pasado. Algunas teorías de la causalidad (influidas por la filosofía de David Lewis) incluso reducen la causalidad al siguiente criterio, pero esto es muy controvertido. Sin embargo, muchos teóricos consideran plausible la idea de que la causalidad requiere de la dependencia contrafáctica, en el sentido siguiente.

**Criterio de dependencia contrafáctica** Un evento $A$ causa a uno $B$ solamente si sucede que: si no hubiera sucedido $A$, no hubiera sucedido $B$. Es decir: si quitáramos a $A$ de la circunstancia, también quitaríamos a $B$.

En la base de este criterio está la idea de que la causalidad es «robusta» o «estable», en el sentido de que, si es que se da, también se hubiera dado en circunstancias parecidas. La idea es que el efecto dependa contrafácticamente de la causa en el sentido en que, sin la causa, no tendríamos el efecto. Esta es una forma de comprender la noción de que la causa *genera* o *produce* al efecto. Si estamos suponiendo que el evento solamente tiene una causa, es razonable suponer entonces que se cumpla este criterio se requiere (pero no basta) para afirmar razonablemente la hipótesis causal de que $A$ causó a $B$.[9]

Vemos que este criterio involucra considerar *circunstancias meramente hipotéticas* o, como también se dice, *contrafácticas*: circunstancias que no ocurrieron, pero que podrían haber ocurrido. Por esta razón, encontrar qué depende contrafácticamente de que puede resultar un problema complejo. En las ciencias empíricas, usualmente se busca reproducir diferentes condiciones, de forma que se puedan aproximar diferentes circunstancias hipotéticas.

**Ejercicio # 71**

Para cada uno de los criterios, da dos ejemplos de un hipótesis causal justificada por ellos. Te pongo un ejemplo.

| Criterio | Ejemplo 1 | Ejemplo 2 |
|---|---|---|
| Criterio de precedencia temporal | | |
| Criterio de contigüidad espacial | | |

| | | |
|---|---|---|
| Criterio de correlación | | |
| Criterio contrafáctico | *Ayer que salí de mi casa no tenía gripe, y llovió mientras caminaba hacia el cine. Cuando regresé, ya me sentía mal. Si no me hubiera mojado, no me hubiera enfermado. Por lo tanto, es probable que haberme mojado haya contribuido a que me enfermara.* | |

### 16.3.5. Causalidad: Mecanismos y manipulabilidad

#### Mecanismos

Hemos visto que los cinco métodos de Mill involucran la presencia o ausencia de los factores que suponemos que están involucrados en relaciones causales. Las ciencias contemporáneas, particularmente las ciencias médicas y de la salud, además de algunas ciencias sociales, se enfocan en lograr entender las *vías causales*. Estas son los *canales* o *vías* mediante los cuales ciertos eventos llegan a causar efectos que parecen estar desconectados en el tiempo y el espacio.

Consideremos el ejemplo de la afirmación: *fumar causa cáncer*. Esta es una hipótesis causal bien fundamentada en la evidencia, y se conoce las vías causales mediante las que el fumar lleva al cáncer. Así, fumar produce la absorción de compuestos (como los hidrocarburos aromáticos policíclicos) que son activados metabólicamente al ser catalizados por enzimas citocromo P450. Esta activación permite que los compuestos puedan formar enlaces covalentes con el ADN. A su vez, estos forman aductos de ADN. Los aductos de ADN pueden causar errores en el proceso de replicación de las células, los cuales resultan en mutaciones (como las transversiones G→T). Estas mutaciones causan alteraciones en los controles del crecimiento celular. La multiplicación descontrolada de células anómalas causa cáncer. Esta es la vía mediante el cual un evento —darle una fumada a un cigarrillo— lleva hacia la aparición del cáncer.

Para cada uno de los componentes de una vía causal, podemos utilizar los métodos de Mill que revisaremos abajo.

### Manipulabilidad

Otro criterio que se recientemente se utiliza bastante para encontrar relaciones causales es el de *manipulabilidad*.

Consideremos dos criterios que revisamos antes (sección 16.3.4): el de precedencia temporal y el contrafáctico: $A$ ocurre antes que $B$ y, si $A$ causa $B$, eso significa que si no sucediera $A$, no sucedería $B$, pero si sí sucede $A$, sucederá $B$. Pero revisamos un problema con la condición hipotética, a saber: ¿Cómo podemos saber qué ocurriría en situaciones puramente hipotéticas?

Una manera de tratar con esta cuestión en la práctica es mediante el concepto de *manipulabilidad* o *intervención*.

La idea detrás de esto es la siguiente. Como vimos antes, una correlación entre las variables $A$ y $B$ puede ser meramente accidental cuando no haya una relación causal entre las dos variables (o, mejor dicho, entre los eventos que representan). También puede ser que haya alguna otra variable u otras variables, en cuyo caso hablamos de una *tercera causa*.

Si la correlación es meramente accidental o hay una tercera causa, entonces podemos modificar una de las variables $A$ o $B$ sin que esto implique una modificación en la otra. A esto se le llama *intervenirăen la variable*. Si la correlación no manifiesta una relación causal entre $A$ y $B$, una intervención en una de ellas no implicará una modificación en la otra. Así, si nos damos cuenta de que, al intervenir en una variable, la otra variable correlacionada se modifica de manera correspondiente, tenemos evidencia de que la primera variable es un factor causal de la segunda.

Una manera de intervenir es buscar los factores con los que $A$ está correlacionado y tratar de «bloquearlos» o «suspenderlos» —ya sea en un experimento controlado, o en el cálculo estadístico; hacemos esto con todos exceptuando a uno, para probar si éste es una causa de $A$. Además, recordemos que la variable que sea la causa debe anteceder en el tiempo al efecto.

Por ejemplo, supongamos que queremos encontrar si el tomar una medicina causa que los pacientes mejoren en cierta condición. Si solamente medimos qué tanto mejoran los pacientes al haber tomado la medicina, esto no necesariamente nos habla de ella: los pacientes podrían haber mejorado por otras razones. Sin embargo, podríamos bloquear los demás factores: considerar pacientes que estén en condiciones parecidas, y considerar la mejora en pacientes a los que no se les suministre la medicina (por ejemplo, sólo se les da un *placebo*: un dispositivo que se asemeja al medicamento original, pero sin principio activo). Si encontramos que hay una mejora en los pacientes a los que se les da la medicina, pero no en el grupo en el que no se suministra la medicina (que se conoce como *grupo control*), tenemos evidencia de que existe un vínculo causal de la medicina sobre la mejora: es decir, evidencia de que la medicina causó la mejora.

Esta se considera una buena manera de obtener evidencia sobre vínculos causales porque la variable que podría ser el efecto —la que representa a la mejora en los pacientes— se aísla de otras posibles causas —al considerarse personas en situaciones parecidas y al usarse un grupo control— y se mide si modificar la variable que podría ser una causa —la que representa el tomar la medicina— de hecho sirve para modificar a la otra variable. Si esto pasa, se considera que hay una relación causal: manipular una variable lleva a manipular a la otra, cuando se han bloqueado las otras posibles *factores confundentes*.

Por supuesto, en muchos casos no es factible utilizar estos estándares experimentales, por cuestiones éticas, de posibilidad tecnológica, u otras. Para lidiar con esos casos, existen técnicas estadísticas que permiten aislar las variables de interés, de tal manera que sea un procedimiento análogo al que hemos descrito.

Finalmente, el método mencionado antes para aislar posibles factores confundentes cae dentro de los diferentes métodos de Mill, que ahora vamos a presentar.

### 16.3.6. Los métodos de Mill para aislar factores causales

En su libro de 1843, *Un Sistema de Lógica* (en el octavo capítulo del tercer libro), John Stuart Mill propuso cinco métodos para hacer inferencias causales. Aunque Mill no lo puso así, hay que recordar que estos métodos son probabilísticos y que requieren deuna cláusula *ceteris paribus*. Lo primero significa que no estamos frente a métodos deductivos: que puede suceder que las premisas sean verdaderas, pero que la conclusión sea falsa. Sobre lo segundo, una cláusula *ceteris paribus* significa que la inferencia se hace *dando por supuesto que se preserva una igualdad de condiciones*. La idea es que se dejan las condiciones fijas, para poder aislar solamente la variable que nos interesa modificar y, con ello, estudiar los efectos de hacerlo. En esencia, los métodos de Mill precisamente buscan eso: *aislar factores para confirmar una hipótesis sobre cuáles están involucrados en relaciones causales*.

En los cinco métodos, comparamos circunstancias en las que se presentan dos tipos de factores: los que pueden resultar ser causas, y los que pensamos que pueden ser los efectos correspondientes; solo que no sabemos cuál es cuál. Es decir, tenemos dos tipos de factores, y nuestra hipótesis es que hay una relación causal entre esos dos tipos (o algunos miembros de esos dos tipos). Vamos a seguir la convención de utilizar variables mayúsculas de las primeras letras del alfabeto (como $A, B, C, \ldots$) para el primer tipo, y variables minúsculas de las últimas letras del alfabeto (como $x, y, z, \ldots$) para el segundo. Vamos a usar tres o cuatro de cada una de estos tipos de variables, pero entenderemos que el número puede ser distinto. Otra convención es que en algunos casos mencionaremos solamente dos circunstancias, pero entenderemos que podemos comparar más circunstancias entre sí.

### El método de concordancia

Para este método, comparamos dos circunstancias, las cuales contienen dos conjuntos distintos de factores, excepto por uno. Es decir, tenemos un par de circunstancias así:

*Circunstancia 1*: $A, B, C$

*Circunstancia 2*: $A, D, E$

Y en ellas, encontramos los siguientes factores:

*Circunstancia 1*: $x, y, z$

*Circunstancia 2*: $x, u, w$

Al comparar ambas circunstancias, el primer método de Mill nos lleva a inferir que es probable que $A$ tenga una relación causal con $x$, ya sea como causa o como efecto. Esto sucede porque vemos que son los únicos dos factores que se repiten, que *concuerdan* en ambas circunstancias. Mill lo resumía así (p. 369):

> Si dos o más fenómenos objeto de la investigación tienen solamente una circunstancia común, la circunstancia en la cual todos los casos concuerdan es la causa (o el efecto) del fenómeno.

Vamos a usar la manera usual de esquematizar los métodos de Mill, como inferencias probabilísticas donde la descripción de las circunstancias nos da las premisas, y la conclusión es una hipótesis causal.

**Método de la concordancia**

Los factores $A, B, C$ ocurren junto con los factores $x, y, z$.
Los factores $A, D, E$ ocurren junto con los factores $x, u, w$.

---

Probablemente, $A$ tiene una relación causal con $x$.

### El método de diferencia

En el segundo método, comparamos circunstancias distintas donde los factores en los que nos enfocamos no se repiten, como en el método anterior, sino que faltan. Si encontramos que, cuando un factor de un tipo falta, también falta un factor de otro tipo, esto nos da una base para inferir que, probablemente, esos dos factores están relacionados causalmente. Mill lo sintetizaba así (p. 370):

> Si un caso en el cual el fenómeno se presenta y un caso en que no se presenta tienen todas las circunstancias comunes, fuera de una sola, presentándose ésta solamente en el primer caso, la circunstancia única en la cual difieren

> los dos casos es el efecto, o la causa, o parte indispensable de la causa, del fenómeno.

Este es el esquema del segundo método:

**Método de la diferencia**

Los factores $A, B, C$ ocurren junto con los factores $x, y, z$.
Los factores $B, C$ ocurren junto con los factores $y, z$.

---

Probablemente, $A$ tiene una relación causal con $x$.

### El método conjunto de concordancia y diferencia

En el tercer método combinamos los dos anteriores.

> Si dos casos o más en los cuales se efectúa el fenómeno tienen una sola circunstancia común, mientras que dos casos o más en los cuales no se efectúa no tienen más de común que la ausencia de esta circunstancia, la circunstancia por la cual únicamente difieren los dos grupos de casos es el efecto, o la causa, o una parte necesaria de la causa del fenómeno.

Este es el esquema del segundo método:

**Método conjunto de concordancia y diferencia**

Los factores $A, B, C$ ocurren junto con los factores $x, y, z$.
Los factores $B, C$ ocurren junto con los factores $y, z$.
Los factores $A, D, E$ ocurren junto con los factores $x, u, w$.

---

Probablemente, $A$ tiene una relación causal con $x$.

### El método de residuos

Este método sirve cuando tenemos conocimiento ya establecido de algunas relaciones causales. Cuando esto sucede, eliminamos los factores de los cuales ya sabemos que tienen relaciones causales, y los restantes —el «residuo»— deben ser los que tengan relaciones causales con los otros factores restantes. Así lo explicaba Mill (p. 378):

> Separemos de un fenómeno la parte que se sabe, por inducciones anteriores, ser el efecto de ciertos antecedentes, y el residuo del fenómeno es el efecto de los antecedentes restantes.

Este es el esquema del tercer método:

**Método de residuos**

Los factores $A, B, C$ ocurren junto con los factores $x, y, z$.
Se sabe que $B$ causa a $y$.
Se sabe que $C$ causa a $z$.

---

Probablemente, $A$ tiene una relación causal con $x$.

### El método de variaciones concomitantes

En los métodos anteriores podíamos eliminar algunos factores para notar qué permanece o qué falta. Este método lo usamos cuando no eliminamos algunos factores para tratar de aislar uno específico. Mill introdujo así al concepto (p. 380):

> Aunque sea imposible excluir completamente un antecedente, podemos estar en situación, o la Naturaleza por nosotros, de modificarle de alguna manera. Por modificación es preciso entender un cambio, que no llega hasta su supresión total.

Si entendemos estas modificaciones como manipulaciones o intervenciones, este método se relaciona con el concepto de *manipulabilidad* que revisamos antes (sección 16.3.5). Mill lo sintetizó así (p. 382):

> Un fenómeno varía de cierta manera, siempre que otro varía de la misma manera, es, o una causa o un efecto del fenómeno, o está ligado a él por algún hecho de causación.

Vamos a ver el esquema del quinto y último método de Mill. Para ello, vamos a seguir la convención de utilizar el símbolo «±» para referirnos a una modificación en el evento, de forma que (por ejemplo) «$A\pm$» se refiere a una modificación en el evento $A$. (Podría ser que una variable se hace más intensa, o menos intensa, u otro tipo de modificación.) Así, tendríamos el último esquema:

**Método de residuos**

Los factores $A, B, C$ ocurren junto con los factores $x, y, z$.
Los factores $A\pm, B, C$ ocurren junto con los factores $x\pm, y, z$.

---

Probablemente, $A$ tiene una relación causal con $x$.

Podemos ver que ninguno de los cinco métodos nos permite calcular una probabilidad precisa para la hipótesis causal que inferimos como conclusión en cada método. Así, cada uno de los métodos es un *esquema*, una guía general y cualitativa para el pensamiento crítico. Para tener estimaciones cuantitativas precisas como las que se usan en las ciencias experimentales, se requieren herramientas más avanzadas de la estadística moderna.

## IVª PARTE:

# APÉNDICES

# Lista de símbolos introducidos

Aquí voy a poner una tabla con la lista de todos los símbolos introducidos, que contenga: el símbolo, su nombre, y la página donde se introduce. También una columna con pronunciaciones usuales.

| Símbolo | Nombre | Página | Pronunciación |
|---|---|---|---|
| $\in$ | Elemento | p. 330 | «Pertenece a», «Es elemento de», «Está en», «En» |

# Lista de definiciones

Dar *click* en cualquiera de los números azules te lleva a la página en la que aparece la definición.

# Soluciones de algunos ejercicios

## Ejercicios de la página 358

.

- Solución del ejercicio 14.7.6:

  *Demostración.* Que $C$ y $D$ son conjuntos vacíos es lo mismo que decir (por la definición),

  $$C = \{x : x \neq x\}, \text{ y}$$
  $$D = \{x : x \neq x\}$$

  Y, entonces, $\neg\exists x(x \in C)$ y $\neg\exists x(x \in D)$. Usando equivalencias del cuadrado de oposición clásico (cf. la sección 11.3), estas fórmulas son equivalentes (respectivamente) a $\forall x(x \notin C)$ y $\forall x(x \notin D)$. Usando E$\forall$ en cada una, tenemos: $(\hat{a} \notin C)$ y $(\hat{a} \notin D)$. En cada una usamos I$\vee$ de la lógica proposicional, para tener: $(\hat{a} \notin C \vee \hat{a} \in D)$ y $(\hat{a} \notin D \vee \hat{a} \in C)$, y usando una regla de equivalencia de la lógica proposicional, esto a su vez nos da: $(\hat{a} \in C \supset \hat{a} \in D)$ y $(\hat{a} \in D \supset \hat{a} \in C)$. Usando I& de la lógica proposicional, $(\hat{a} \in C \supset \hat{a} \in D)$ & $(\hat{a} \in D \supset \hat{a} \in C)$, lo cual es equivalente a $(\hat{a} \in C \equiv \hat{a} \in D)$, de lo cual inferimos (por I$\forall$), $\forall x(x \in C \equiv x \in D)$. Y esto, por Axioma de Extensionalidad, es equivalente a $C = D$. *Q.E.D.*

- Solución del ejercicio 14.7.6:

  *Demostración.* Por la reflexividad de la identidad, todo conjunto es idéntico consigo. Esto, por Axioma de Extensionalidad, implica que todo conjunto tiene los mismos elementos que sí mismo: si $C$ es cualquier conjunto, $\forall x(x \in C \equiv x \in C)$. De esta fórmula bicondicional, usando la eliminación del universal, la definición del bicondicional y la introducción del universal, podemos inferir que $\forall x(x \in C \supset x \in C)$, lo cual, por la definición 14.2, significa que $C \subseteq C$. *Q.E.D.*

# Formulario de LC0

**Reglas básicas y derivadas** Las reglas básicas son las reglas de introducción y eliminación de cada conectiva, que presento inmediatamente abajo, junto con la regla de explosión:

$$\frac{A \mathbin{\&} \neg A}{B}$$

Las demás son reglas derivadas, pues se pueden demostrar a partir de las básicas.

## Reglas de introducción y de eliminación

| | Introducción | Eliminación |
|---|---|---|
| $\neg$ | $\dfrac{\boxed{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \mathbin{\&} \neg B \end{array}}}{\neg A}$ | $\dfrac{\boxed{\begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ B \mathbin{\&} \neg B \end{array}}}{A}$ |
| $\&$ | $\dfrac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{A \mathbin{\&} B}$ | $\dfrac{A \mathbin{\&} B}{A}$ |
| $\vee$ | $\dfrac{A}{A \vee B}$ | $\dfrac{\begin{array}{c} A \vee B \\ \begin{array}{\|c} A \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{\|c} B \\ \vdots \\ C \end{array} \end{array}}{C}$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\supset$ | $\dfrac{\begin{array}{c}A \supset B\\ A\end{array}}{B}$ | $\dfrac{\begin{array}{\|c}A\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \supset B}$ |
| $\equiv$ | $\dfrac{\begin{array}{c}A \supset B\\ B \supset A\end{array}}{A \equiv B}$ | $\dfrac{\begin{array}{c}A \equiv B\\ \Phi[A]\end{array}}{\Phi[B]}$ |

## Reglas de inferencia y de equivalencia

## Reglas de interacción y propiedades algebraicas

# Formulario de LC1=

# Índice analítico

# Bibliografía

Adler, Jonathan (2013) «Are Conductive Arguments Possible?». *Argumentation* **27**: 245257.

Aliseda, Atocha (2006) *Abductive reasoning: Logical investigations into discovery and explanation.* Synthese Library, Vol. 330. Springer.

Aristóteles, *Metafísica*; *Tratados de Lógica.* Gredos.

Austin, John L. (1962/1981) *Cómo Hacer Cosas con Palabras.* Paidós.

Badesa, Jané y Jansana (1998) *Elementos de Lógica Formal*, Ariel.

Baggini, Julian & Fosl, Peter (2010) *The Philosopher's Toolkit: A compendium of philosophical concepts and methods.* 2nd ed. Blackwell.

Barceló, Axel (2003) «¿Qué tan matemática es la lógica matemática?», *Diánoia*, **XLVIII**(51).

Barceló, Axel (2015) «Las tablas de verdad como filosofía», *Argumentos*, **7**(13): pp. 165-178. `http://www.periodicos.ufc.br/argumentos/article/view/19090`

Barceló, Axel (2017) «Símbolos y Notación Lógica». Blog *Conceptual*: `https://axelbarcelo.blogspot.com/2017/10/`

Benkler, Yochai & Faris, Robert & Roberts, Hal (2018) *Network propaganda: Manipulation, disinformation and radicalization in American politics.* Oxford University Press.

Beristáin, Helena (1995) *Diccionario de retórica y poética*, 7a edición. Porrúa.

Bloch, Ethan (2011) *Proofs and Fundamentals: A first course in abstract mathematics*, 2da edición, Springer.

Boole, George () *The Laws of Thought.*

Boolos, George (1984) «To Be Is To Be a Value of a Variable (or to Be Some Values of Some Variables)», *Journal of Philosophy*, 1984 **81**(8): pp. 430-50, reimpreso en la compilación de 1998 editada por Richard Jeffrey, *Logic, Logic, and Logic*, Harvard University Press.

Bowell, Tracy & Kemp, Gary (2005) *Critical Thinking: A concise guide*, 2nd. ed. Routledge.

Buroker, Jill (2019) «Port Royal Logic». En Edward N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2017 Edition): `https://plato.stanford.edu/archives/`

`spr2017/entries/port-royal-logic/`

Carey, Susan (2009) *The Origin of Concepts.* Oxford University Press.

Cederblom, Jerry & Paulsen, David (2011) *Critical Reasoning.* Wadsworth Publishing.

Church, Alonzo (1956) *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton University Press.

Collins, Peter (2005) «Exclamative clauses in English». *Word*, **56**(1): pp. 1-17.

Copi, Irving (1979) *Lógica Simbólica.* Compañía Editorial Continental.

Copi, Irving & Cohen, Carl (2013) *Introducción a la Lógica*, 2da ed. Trad. Jorge Alejandro Rangel Sandoval. Limusa.

Dasgupta, Shamik (2016) «Can we do without fundamental individuals? Yes». En Elizabeth Barnes, ed.: *Current Controversies in Metaphysics.* Routledge.

Díaz Herrera, Patricia (2014) «El problema de la individuación y la persistencia a través del cambio». En Patricia Díaz, Jesús Jasso, eds.: *Problemas Contemporáneos de Filosofía.* UACM.

Dudley, Edmund (2019) «Critical thinking as a life skill». *Oxford University Press English Language Teaching Global Blog*, 7 de junio de 2019: `https://oupeltglobalblog.com/2019/06/07/critical-thinking-edmund-dudley/`

Correia, Fabrice (2017) «Real Definitions», *Philosophical Issues.*

Estrada González, Luis (2005) «La lógica y la comprensión del lenguaje». *Elementos: Ciencia y cultura*, **12**(59): pp. 23-27.

Estrada González, Luis (2010) «¿Cuánta filosofía hay en una tabla de verdad?», *La Pluralidad de los Mundos*: `http://difusiondefilosofia.blogspot.com/2010/11/cuanta-filosofia-hay-en-una-tabla-de.html`

Estrada González, Luis & Cohnitz, Daniel (2019) *An Introduction to the Philosophy of Logic.* Cambridge University Press.

Fine, Kit (1994) «Essence and Modality», *Philosophical Perspectives.* [Está por aparecer una traducción al español de este artículo, hecha por mi, en la colección *Cuadernos de Crítica*, Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM.]

Fine, Kit (2012) «Guide to Ground». En Correia & Schnieder (ed.): *Metaphysical Grounding: Understanding the Structure of Reality*, pp. 37-80. Cambridge University Press.

Ferrater Mora & LeBlanc (1962) *Lógica Matemática.*

Ferreirós, José (2001) «The road to modern logic—an interpretation». *Journal of Symbolic Logic.*

Fodor, Jerry (1998) *Concepts: Where cognitive science went wrong.* Oxford.

Frege, Gottlob (2016) *Estudios sobre lógica, semántica y filosofía de las matemáticas.* Margarita Valdés (comp.); varios traductores. Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM.

Garrett, Brian (2006) *¿Qué es eso llamado metafísica?.* Alianza.

Gigerenzer, Gerd & R.Selten (eds.) (2001) *Bounded Rationality: The Adaptive Toolbox.* MIT Press.

Goldman, Alvin (1986) *Epistemology and Cognition.* Harvard University Press.

Gómez Torrente, Mario (2000) *Forma y modalidad: Una introducción al concepto de consecuencia lógica.* Eudeba.

Gödel, Kurt (1990) [1947] «What is Cantor's continuum problem?» En S. Feferman, J. Dawson, S. Kleene, G. Moore, R. Solovay, & J. van Heijenoort (eds.): *Kurt Godel: Collected Works, Vol. II: Publications 1938-1974*: pp. 176-187. Oxford University Press.

Grice, H.P. (2005/1975) «Lógica y conversación». En *La Búsqueda del Significado*, ed. Luis M. Valdés Villanueva. Tecnos.

Groarke, Leo (2020) «Informal Logic». *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2020 Edition).* Edward N. Zalta (ed.). URL = `https://plato.stanford.edu/archives/spr2020/entries/logic-informal/`

Hume, David *Tratado de la Naturaleza Humana*

________ *Investigación sobre el conocimiento humano*

Haack, Susan (1991) *Filosofía de la Lógica.* Traducción de Amador Antón y Teresa Orduña, Cátedra.

Hampton, James (1999) «Concepts». En R. Wilson & Frank Keil (eds.): *The MIT Encyclopedia of the Cognitive Sciences*, pp. 176-179. The MIT Press.

Hilbert, David () *Fundamentos de las Matemáticas.*

Hughes & Cresswell (1993) *Introduccion a la Lógica Modal.* Tecnos.

Hunter, Geoffrey (1971) *Metalogic: An Introduction to the Metatheory of Standard First Order Logic.* University Of California Press.

Jané, Ignacio (1994) «Lógica de Orden Superior». En *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, Vol. 7: Lógica*; editorial Trotta.

Johnston, Mark (1992) «Constitution Is Not Identity». *Mind.*

Kant, Immanuel (2013) *Crítica de la razón pura.* Traducción de Pedro Ribas, 2da edición. Taurus.

Kahneman, Daniel (2012) *Pensar rápido, pensar despacio.* Debate.

Kleene, Stephen (1952) *Introduction to metamathematics.* North-Holland.

Kneale, Martha & Kneale, William (1980) *El desarrollo de la lógica.* Trad. Javier Muguerza. Tecnos.

Lewis, David () *Counterfactuals.* Oxford University Press.

Leslie, Sarah-Jane (2013) «Essence and natural kinds: When science meets preschooler intuition». *Oxford Studies in Epistemology* **4**: 108-66.

Lopes *et al.* (2011) ‘Improved Application of Paraconsistent Artificial Neural Networks in Diagnosis of Alzheimer’s Disease’ *Neuroscience International*, Vol. 2.

Lowe, E.J. (2012) «What is the source of our knowledge of modal truths?» *Mind*, **121**(484):919-950.

MacFarlane, John (2017) «Logical Constants». En Edward N. Zalta (ed.): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2017 Edition): `https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/logical-constants/`

Machery, Edouard (2009) *Doing Without Concepts*. Oxford University Press.

Mendelson, Elliott (1997) *Introduction to Mathematical Logic*, 4a. ed., Chapman & Hall.

Michaelis, Laura (2001) «Exclamative Constructions». En M. Haspelmath, E. König, W. Österreicher & W. Raible (eds.): *Language Universals and Language Typology: An International Handbook*: pp. 1038-1050. Walter de Gruyter.

Mill, Stuart (1843) *Sistema de Lógica Inductiva y Deductiva*. Traducción de Eduardo Ovejero.Madrid, 1917. Consultado en: `https://bvpb.mcu.es/es/consulta/registro.do?id=409180`, noviembre de 2020.

Morado, Raymundo (manuscrito) «Conectivas Lógicas». Disponible en `www.filosoficas.unam.mx/~Tdl/01-1/0301morado.doc`

Moro Simpson, Tomás (1975) *Formas Lógicas, Realidad y Significado*. EDAF.

Nagel, Ernest & Newman, () *El teorema de Gödel*.

Nahin, Paul (2012) *The Logician and the Engineer: How George Boole and Claude Shannon Created the Information Age*, Princeton University Press.

Palau, Gladys, *et al.* (2004) *Lógicas Condicionales y Razonamiento de Sentido Común*, Gedisa.

Pazos, Alicia (2003) «Usos del lenguaje». En María Alicia Pazos y Sandra Lucía Ramírez Sánchez, *Conectivas y usos del lenguaje: Hacia un discurso argumentativo*. UACM.

Peña, Lorenzo (1993) *Introducción a las Lógicas no Clásicas*, Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM.

Pietroski, Paul (2007) «Logical Form». En Edward N. Zalta (ed.): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2016 Edition): `https://plato.stanford.edu/archives/spr2016/entries/logical-form/`

Platón (2002) *Eutidemo*. Traducción de Ute Schmidt Osmanczik. Bibliotheca Scriptorum Graecorum Et Romanorum Mexicana, UNAM.

Possin, Kevin (2016) «Conductive Arguments: Why is This Still a Thing?». *Informal*

*Logic* **36**(4): pp. 563-593.

Priest, Graham (2008) *Introduction to Non-Classical Logic: From Ifs to Is.* Oxford University Press.

Rayo, Agustín y Uzquiano, Gabriel (2007) (eds.) *Absolute Generality.* Oxford University Press.

Russell, Bertrand () «Las matemáticas y los metafísicos», *Misticismo y Lógica.*

Russell, Bertrand (1914/1964) *El conocimiento del mundo exterior: Fundamentos para un método científico filosófico.* Traducción de María Teresa Cárdenas. Ediciones Fabril-Los Libros del Mirasol. (Se puede bajar legalmente la edición original de 1914 aquí: `https://archive.org/details/ourknowledgeofth005200mbp`)

Russell, Bertrand & Whitehead, Alfred (1910, 1912, 1913) *Principia Mathematica*, 3 vols. Cambridge University Press.

Sadock, Jerrold & Zwicky, Arnold (1985) «Speech act distinctions in syntax». En: Shopen, Timothy (ed.): *Language typology and syntactic description, 1*: pp. 155-196. Cambridge University Press.

Schaffer, Jonathan (2016) «The Metaphysics of Causation». *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2016 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), `https://plato.stanford.edu/archives/fall2016/entries/causation-metaphysics/`.

Szpilrajn, Edward (1930) «Sur l'extension de l'ordre partiel». *Fundamenta Mathematicae*, **16**.

Schnieder, Benjamin (2011) «A Logic for 'Because' ». *The Review of Symbolic Logic*, **4**(3): 445-465.

Tabak, John (2004) *Algebra: Sets, symbols, and the language of thought.* Facts on File.

Tao, Terence (2012) «The probabilistic heuristic justification of the ABC conjecture». *What's new*: `https://terrytao.wordpress.com/2012/09/18/the-probabilistic-heuristic-justif`

Tejeiro, Paula (2016) «Supervaluar o Revisar», *Manuscrito*, **39**(3), pp. 149-169. URL = `http://dx.doi.org/10.1590/0100-6045.2016.V39N3.PT`

Tennant, Neil (2017) «Logicism», En: Edward N. Zalta (ed.) *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2017 Edition): `https://plato.stanford.edu/entries/logicism/`

Valdivia, Lourdes (1989) *Introducción a la Semántica y Ontología de Gottlob Frege.* UNAM.

van Ditmarsch, Hans & Parikh, Rohit & Ramanujam, R. (eds.) (2011) *Journal of Philosophical Logic*: *Special Issue on Logic in India*, **40**(5).

Vega Reñón, Luis & Olmos Gómez, Paula (eds.) (2011) *Compendio de lógica, argumentación y retórica.* Trotta.

Wittgenstein, Ludwig (1921/2012) *Tractatus Logico-Philosophicus.* Traducción de Jacobo

Muñoz e Isidoro Reguera. Alianza Editorial.

Woods, John & Gabbay, Dov (2004) *Handbook of the history of logic, vol. I: Greek, indian and arabic logic.* Elsevier.

Woods, John & Irvine, Andrew & Walton, Douglas (2004) *Argument: Critical thinking, logic and the fallacies* (2nd ed.) Pearson Prentice Hall.

Zalta, Edward. *Principia Logico-Metaphysica.* Manuscrito de Abril de 2018, Stanford University. `https://mally.stanford.edu/principia.pdf`